



# Dynamique des structures

## Partie II: Méthodes directes d'intégration temporelle

Master 2 MS2 - UPMC

Corrado Maurini

Sorbonne Universités UPMC Univ Paris 06 and CNRS, Institut Jean Le Rond d'Alembert (UMR 7190),  
4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05 (France)  
[corrado.maurini@upmc.fr](mailto:corrado.maurini@upmc.fr)

16 octobre 2015

### 1.1.2. Problème hyperbolique (elastodynamique): formulation faible

Continu de Cauchy 3D en H.P.P. (ou 2D en CP ou DP)

Trouver  $\underline{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ , qui, à chaque instant  $t > 0$ , vérifie:

$$\underbrace{\int_{\Omega} \underline{C} \underline{\varepsilon}(\underline{u}(x, t)) \cdot \underline{\varepsilon}(\hat{\underline{u}}(x)) dx}_{a_k(\underline{u}, \hat{\underline{u}})} + \underbrace{\int_{\Omega} \rho \ddot{\underline{u}}(x, t) \cdot \hat{\underline{u}}(x) dx}_{a_m(\dot{\underline{u}}, \hat{\underline{u}})} = \underbrace{\int_{\Omega} \underline{f}(x, t) \cdot \hat{\underline{u}}(x) dx}_{\ell(\hat{\underline{u}})}, \quad \forall \hat{\underline{u}} \in \mathcal{U}_{ad}^0$$

et les **conditions initiales**, à  $t = 0$ :

$$\int_0^L (\underline{u}(x, 0) - \underline{u}_0(x)) \hat{\underline{u}}(x) dx = 0, \quad \int_0^L (\dot{\underline{u}}(x, 0) - \dot{\underline{u}}_0(x)) \hat{\underline{u}}(x) dx = 0$$

#### Notation

- $\underline{u} : \underline{x} \in \Omega \in R^3 \rightarrow \underline{u}(\underline{x}) \in R^3$ : champs de **déplacement** du solide  $\Omega$
- $\underline{\varepsilon}(\underline{u}) = 1/2(\underline{\nabla} \underline{u} + \underline{\nabla} \underline{u}^T)$  tenseur de déformation.
- $\underline{C}$  tenseur d'élasticité,  $\rho$  densité volumique de masse.
- $\underline{f}(\underline{x}, t)$  force volumique.
- $\mathcal{U}_{ad}$  et  $\mathcal{U}_{ad}^0$ : espaces des déplacements admissibles<sup>3</sup> et admissibles à 0<sup>4</sup>

<sup>3</sup>Réguliers et qui vérifient les conditions aux bords cinématiques, i.e. sur  $\underline{u}$

<sup>4</sup>Réguliers et qui vérifient la version à 0 des conditions aux bords cinématiques

# Problème hyperbolique (elastodynamique): formulation faible

## Ecriture générale

Trouver  $u \in \mathcal{U}_{ad}$ , qui, à chaque instant  $t > 0$ , vérifie:

$$a_m(\ddot{u}, \hat{u}) + a_k(u, \hat{u}) = \ell(\hat{u}), \quad \forall \hat{u} \in \mathcal{U}_{ad}^0$$

et les **conditions initiales**: à  $t = 0$ :

$$a_0(u, \hat{u}) = a_0(u_0, \hat{u}), \quad a_0(\dot{u}, \hat{u}) = a_0(\dot{u}_0, \hat{u}), \quad \forall \hat{u} \in \mathcal{U}_{ad}^0$$

## Notation généralisée

- $u : x \in \Omega \rightarrow u(x)$ : champs de **déplacements généralisés** de la structure  $\Omega$
- $a_m(\cdot, \cdot)$ : opérateur de masse, forme bilinéaire symétrique définie positive, avec  $\mathcal{T}(\dot{u}) = \frac{1}{2} a_m(\dot{u}, \dot{u})$  énergie cinétique de la structure.
- $a_k(\cdot, \cdot)$ : opérateur de raideur, forme bilinéaire symétrique définie positive, avec  $\mathcal{V}(u) = \frac{1}{2} a_k(u, u)$  énergie potentielle d'origine élastique de la structure.
- $a_0(\cdot, \cdot)$ : opérateur de "conditions initiales", forme bilinéaire symétrique définie positive.
- $\ell(\cdot)$ : opérateur des charges externes, forme linéaire, avec  $\ell(u)$  travail des charges externes sur les déplacements  $u$ .
- $\mathcal{U}_{ad}$  et  $\mathcal{U}_{ad}^0$ : Espaces des déplacements admissibles et admissibles à 0

## Semi-discrétisation en espace

Nous cherchons une solution de la forme

$$u(x, t) \approx u^{(n)}(x, t) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) d_j(t)$$

avec  $\varphi_i(x)$  des fonctions de base **admissibles** (i.e.  $\in \mathcal{U}_{ad}$ ) soigneusement choisies (e.g. modes propres d'un système similaire, polynômes, éléments finis). La formulation faible du problème fournit, pour un choix quelconque des  $\varphi_i(x)$ , les équations pour déterminer l'évolution temporelle  $\underline{d}(t)$ :

### Problème discret associé

$$M \ddot{\underline{d}}(t) + K \underline{d}(t) = \underline{F}(t)$$
$$\underline{d}(0) = \underline{d}_0 = A^{-1} B, \quad \dot{\underline{d}}(0) = \dot{\underline{d}}_0 = A^{-1} D$$

avec

$$M_{ij} = a_m(\varphi_i, \varphi_j), \quad K_{ij} = a_k(\varphi_i, \varphi_j), \quad F_j = \ell(\varphi_j)$$

et

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \quad B_j = \int_{\Omega} u_0(x) \varphi_j(x) dx, \quad D_j = \int_{\Omega} \dot{u}_0(x) \varphi_j(x) dx$$

## Méthodes de la famille de Newmark: présentation

Problème de dynamique des structures

(cas linéaire avec dissipation après discretisation spatiale):

$$M\ddot{\underline{d}}(t) + C\dot{\underline{d}}(t) + K\underline{d}(t) = \underline{F}(t), \quad \underline{d}(0) = \underline{d}_0, \quad \dot{\underline{d}}(0) = \dot{\underline{d}}_0$$

### Méthodes de la famille de Newmark

$$M\underline{a}_{n+1} + C\underline{v}_{n+1} + K\underline{d}_{n+1} = \underline{F}_{n+1} \quad (5)$$

$$\underline{d}_{n+1} = \underline{d}_n + \Delta t \underline{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \left( (1 - 2\beta) \underline{a}_n + 2\beta \boxed{\underline{a}_{n+1}} \right) \quad (6)$$

$$\underline{v}_{n+1} = \underline{v}_n + \Delta t \left( (1 - \gamma) \underline{a}_n + \gamma \boxed{\underline{a}_{n+1}} \right) \quad (7)$$

Ici  $2\beta$  et  $\gamma$  sont 2 paramètres dans  $[0,1]$  qui déterminent les caractéristiques (stabilité, précision) de l'algorithme.

- Amortissement proportionnel:  $C = c_1 M + c_2 K$

## Une possible implementation

La solution au temps  $t_{n+1}$  est calculée à partir de celle au temps  $t_n$  en trois étapes:

### 1 Prédiction:

$$\tilde{\underline{d}}_{n+1} = \underline{d}_n + \Delta t \underline{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta) \underline{a}_n \quad (8)$$

$$\tilde{\underline{v}}_{n+1} = \underline{v}_n + \Delta t (1 - \gamma) \underline{a}_n \quad (9)$$

### 2 Calcul de l'accélération par solution de:

$$(M + \gamma \Delta t C + \beta \Delta t^2 K) \underline{a}_{n+1} = \underline{F}_{n+1} - C \tilde{\underline{v}}_{n+1} - K \tilde{\underline{d}}_{n+1}$$

### 3 Correction:

$$\underline{d}_{n+1} = \tilde{\underline{d}}_{n+1} + \beta \Delta t^2 \underline{a}_{n+1} \quad (10)$$

$$\underline{v}_{n+1} = \tilde{\underline{v}}_{n+1} + \gamma \Delta t \underline{a}_{n+1} \quad (11)$$

L'algorithme est initialisé avec le déplacement initial  $\underline{d}_0$ , la vitesse initiale  $\underline{v}_0$  et l'accélération  $\underline{a}_0$  solution de

$$M \underline{a}_0 = \underline{F}_0 - C \underline{v}_0 - K \underline{d}_0$$

## Méthodes de la famille de Newmark: conditions de stabilité

### ■ Stabilité inconditionnée pour

$$2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2}$$

### ■ Stabilité conditionnée pour

$$\gamma \geq \frac{1}{2}, \quad \beta < \frac{\gamma}{2}, \quad \omega_h \Delta t \leq \Omega_c$$

où la fréquence (sans dimensions) critique est:

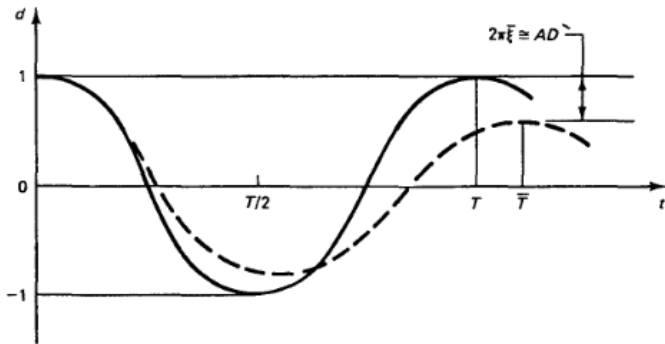
$$\Omega_c = \frac{\zeta(\gamma - 1/2) + \sqrt{\gamma/2 - \beta + \zeta^2(\gamma - 1/2)^2}}{\gamma/2 - \beta}$$

Pour le cas sans amortissement ( $\zeta = 0$ ) la fréquence critique est

$$\Omega_c = \frac{1}{\sqrt{\gamma/2 - \beta}}$$

**La fréquence  $\omega_h$  est la fréquence la plus élevée du système (la condition de stabilité doit être vérifiée pour tous les modes)**

## Méthodes de la famille de Newmark: erreurs d'amplitude et de périodicité



■ **Erreur de périodicité** (cas non amorti):  $\frac{\bar{T} - T}{T} = \frac{1}{2} \left( \beta - \frac{1}{12} \right) \omega_h^2 \Delta t^2 + O(\omega_h^3 \Delta t^3)$

■ **Erreur de d'amplitude** (cas non amorti):  $\zeta_{\text{numérique}} = \frac{1}{2} \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) (\omega_h \Delta t) + O(\omega_h^2 \Delta t^2)$



## Résumé des méthodes de la famille de Newmark

Table: Méthodes de la famille de Newmark. D'après [1] et [2].

<i>Méthode</i>	<i>Type</i>	$\beta$	$\gamma$	<i>Cond. stabilité pour <math>\omega_h \Delta t</math></i>	<i>Ordre de précision</i>
<b>Accélération moyenne</b> <sup>5</sup>	Implicite	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\infty$	2
<b>Accélération linéaire</b>	Implicite	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$2\sqrt{3} \cong 3.464$	2
<b>Différence centrée</b> <sup>6</sup>	Explicite	0	$\frac{1}{2}$	2	2

<sup>5</sup>Abaqus Standard

<sup>6</sup>Abaqus Explicit

### ■ Relation taille d'élément - fréquence la plus élevée du système

Dans le cas des éléments finis, la fréquence la plus élevée  $\omega_{\max}$  peut être estimée par la fréquence maximale de l'élément le plus petit (sans conditions aux bords sur les déplacements). Pour une barre en traction <sup>7</sup> de module de Young  $E$  et densité volumique  $\rho$ :

$$\omega_{\max} = 2 \frac{c_v}{L_e}$$

avec  $c_v = \sqrt{E/\rho}$  vitesse des ondes,  $L_e$  taille de l'élément.

### ■ Relation fréquence la plus élevée - stabilité (cas différence centrée)

$$\Delta t \leq \frac{\Omega_c}{\omega_{\max}} = \frac{2}{\omega_{\max}}$$

### ■ Relation taille d'élément - stabilité

$$\Delta t \leq \frac{L_e}{c_v} = L_e \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad \star \star \star$$

---

<sup>7</sup>En 1D discrétisée avec des éléments finis linéaires et avec matrice de masse condensée sur la diagonale

## Résumé: condition de Courant

En utilisant des méthodes **explicites** dans un code aux **éléments finis**, on doit respecter une relation similaire à celle ci-dessous entre discrétisation en espace ( $L_e$ ) et discrétisation en temps ( $\Delta t$ )

$$*** \quad \Delta t \leq \frac{L_e}{c_v} = L_e \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad ***$$

Cette condition de **stabilité** est appelée condition de Courant <sup>8</sup>

---

<sup>8</sup>La condition présentée ici est pour les éléments finis linéaires pour une barre en traction avec matrice de masse condensée sur la diagonale. Des relations analogues peuvent être établies analytiquement ou numériquement pour les autres types d'éléments en 2D et 3D.

# Explicit vs Implicit methods

from P.Wriggers, Non-linear finite element methods, Springer, 2008, pgg 208-209

- **Explicit** methods can be easily implemented since the solution at time  $t_n + 1$  depends only upon quantities at time  $t_n$ . Explicit methods are very efficient when the mass matrix  $M$  in (6.5) is replaced by a lumped mass matrix which has diagonal structure. The disadvantage of explicit methods is the limitation of the time step size due to a stabilization criterion.
- **Implicit** integration schemes replace the time derivatives by quantities which depend as well upon the last time step in (time  $t_n$ ) as upon the still unknown quantities at time  $t_n + 1$ . This requires the solution of an algebraic equation system at every time step. The advantage of implicit methods is related to the fact that they can be constructed such that they are unconditional stable. Thus the time step size is not limited.

The selection of time step sizes, used either in explicit or implicit algorithms, has to be justified by physics. In case of impact problems (e.g. car-crash analysis) or shock waves moving through a solid, small time steps have to be selected to resolve high frequency parts and travelling waves in order to capture the correct physical behaviour. Hence explicit methods are ideal for such engineering applications. Implicit methods are advantageous for problems where the response of the dynamical system depends mainly upon lower frequencies (e.g. simulation of engine vibrations or vibration of structures).