

Una plantilla en L^AT_EX para el trabajo de fin de grado



Miguel Castaño Alcalde
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Diciembre de 2023

Resumen

Este documento es una plantilla en \LaTeX diseñada para cumplir con las *directrices propias* para la elaboración del trabajo de fin de grado de Matemáticas en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza. Estas directrices, que se pueden ver en [8], indican lo siguiente sobre la memoria (artículo 4):

1. La memoria del TFG podrá ser redactada en español o en inglés. Si la memoria está escrita en español (respectivamente en inglés) deberá acompañarse de un resumen en inglés (respectivamente en español). La extensión de dicho resumen será de dos o tres páginas.
2. La memoria se editará, preferiblemente, utilizando el sistema de composición de documentos \LaTeX . A tal efecto, en la página web de la Facultad de Ciencias se dispondrá de una plantilla \LaTeX .
3. Con el fin de facilitar su validación administrativa, todas las memorias de TFG de la Facultad de Ciencias tendrán un tamaño de letra diferenciado mínimo de 11 puntos, con un interlineado a espacio 1,15 y márgenes de al menos 2,5 cm, en papel tamaño DIN A4. El índice y el resumen deberán ir justo antes del inicio de la memoria y esta, en ningún caso, podrá superar las 25 páginas, excluidos los anexos.
4. El director de un TFG deberá comprobar que la memoria presentada cumple con las normas de edición establecidas, antes de dar el visto bueno a su depósito.

Esta plantilla se ofrece por si resulta útil, pero debe quedar claro que no es obligatorio usarla: el trabajo se puede escribir prescindiendo de esta plantilla, siempre que se respeten las directrices anteriores.

La plantilla está diseñada para un trabajo compuesto por uno o más capítulos y una bibliografía única, es decir, no una por cada capítulo. Detallando un poco más, la estructura es la siguiente y por este orden:

- Una portada.
- Un resumen.
- Después, un índice general en el que figuran el resumen, los capítulos de los que consta el trabajo y la bibliografía. Cada capítulo puede contener secciones, que también aparecen en el índice.
- La parte principal, formada por cada uno de los capítulos que componen el trabajo.
- Y, por último, la bibliografía.

La plantilla está escrita para componerse en pdf\LaTeX y la forman varios archivos que deben estar en la misma carpeta:

- Un documento principal, que contiene las órdenes iniciales y el código \LaTeX del texto.
- Los archivos de imágenes que se vayan a incluir en el trabajo.

En el primer capítulo de este modelo se dan más detalles sobre esta plantilla.

Obsérvese que en este ejemplo el resumen no sigue las directrices establecidas para los trabajos de fin de grado, según las cuales debe estar escrito en inglés si el trabajo está en castellano.

El último capítulo de este documento se ha puesto solo como relleno, como ejemplo de texto matemático, y no corresponde a un verdadero trabajo de fin de grado.

Índice general

| | |
|---|------------|
| Resumen | III |
| 1. Instrucciones | 1 |
| 1.1. El preámbulo del documento principal | 1 |
| 1.2. El bloque inicial: la portada, el resumen y el índice. | 3 |
| 1.3. El bloque principal: los capítulos. | 4 |
| 1.4. El bloque final: la bibliografía. | 4 |
| 2. Comentarios | 5 |
| 2.1. Figuras | 5 |
| 2.2. Etiquetas | 6 |
| 2.3. Consejos de estilo | 6 |
| 3. La función Gamma de Euler | 9 |
| 3.1. Definición de la función Gamma como un producto infinito | 9 |
| 3.2. Definición de la función Gamma como una integral | 12 |
| 3.3. La fórmula de Stirling | 13 |
| Bibliografía | 15 |

Capítulo 1

Instrucciones

Esto no es un manual de \LaTeX . Uno bastante completo en castellano es [6]. Y, desde luego, el que más información proporciona es [10].

Estas instrucciones son más bien unos comentarios sobre la plantilla, con el objeto de facilitar su uso (y su modificación) a los autores de los trabajos de fin de grado. Lo mejor será tener a la vista el código tex al tiempo que se lee el pdf. Algunos de estos comentarios serán demasiado elementales, otros demasiado escuetos y quizá alguno no sea del todo correcto.

Como ya se ha dicho en el resumen, este trabajo está formado por varios elementos: la portada, el resumen, un índice general, los capítulos y la bibliografía. Cada uno de estos elementos empieza en página impar, dejando antes, si hace falta, una página par en blanco.

A diferencia de los capítulos, el resumen no lleva delante el título de *Capítulo* ni numeración; tampoco el índice ni la bibliografía.

La numeración de las páginas es con números romanos para la parte inicial (el resumen y el índice general) y con números arábigos para el núcleo del trabajo (los capítulos y la bibliografía).

1.1. El preámbulo del documento principal

El documento principal es *PlantillaTFG.tex* y en primer lugar contiene las órdenes principales, las llamadas a los paquetes auxiliares y las definiciones. Es lo que podemos llamar el preámbulo del documento. Empieza por las líneas

```
%&pdflatex
%!TEX TS-program = pdflatex
%!TEX encoding = UTF-8 Unicode
```

que indican el programa con que se compone el texto (*pdflatex*) y la codificación (aquí hemos usado *utf-8*). No es necesario entrar en detalles ni tocar estas líneas. A continuación vienen algunos comentarios y, por fin, la orden

```
\documentclass[11pt]{book}
```

que determina el tamaño de la letra y el formato principal. Las líneas

```
\usepackage{geometry}
\geometry{
...
}
```

establecen las dimensiones de la página y, dentro de ella, el espacio reservado al texto.

Las siguientes líneas incorporan los paquetes de \LaTeX que se van a usar. Los primeros son:

```
\usepackage[utf8]{inputenc}
\usepackage[spanish]{babel}
\usepackage[T1]{fontenc}
```

En conjunto, estas órdenes indican que el trabajo está escrito en castellano. Permiten usar de manera normal el teclado en español, es decir, no habrá que escribir `\'` para obtener la letra acentuada, sino que podremos escribir á sin más. Lo mismo se aplica a la letra ñ, a los signos de abrir interrogación y exclamación, etcétera. También establece los cortes de palabra en español y muchos otros parámetros.

A continuación aparecen varias órdenes de la forma

```
\usepackage{...}
```

cada una de la cuales carga un paquete. Algunas de estas líneas podrían quitarse (o anteponer un `%`) si no se van a usar. Un primer bloque,

```
\usepackage{amssymb}
\usepackage{amsmath}
\usepackage{amsthm}
\usepackage{mathptmx}
```

incorpora órdenes útiles cuando se escriben enunciados y fórmulas matemáticas (*amssymb*, *amsmath* y *amsthm*) y cambia a la letra Times (*mathptmx*). En lugar de *mathptmx* se puede poner, por ejemplo, *lmodern*.

Las líneas

```
\usepackage{tikz}
\usetikzlibrary{babel}
```

incorporan el paquete *tikz*, que permite hacer dibujos, gráficas y esquemas desde L^AT_EX (la segunda línea evita algunos conflictos entre los paquetes *tikz* y *babel*).

A lo largo del texto, los capítulos, las secciones, algunos enunciados, algunas fórmulas, las referencias bibliográficas... llevan una numeración a la que en otras partes se puede hacer referencia («... en la sección 1.4...»). Las líneas

```
\usepackage{url}
\usepackage[pdftex, colorlinks=true, citecolor=cyan, linkcolor=black,
urlcolor=black]{hyperref}
```

hacen que estas referencias lleven un enlace al lugar referenciado (es decir, picar en el 1.4 nos llevaría al comienzo de la sección 1.4). También mejoran el comportamiento de los enlaces externos (a páginas web, por ejemplo). Las opciones *colorlinks*, *citecolor*, *linkcolor*, *urlcolor* determinan el aspecto y el funcionamiento de estos enlaces.

El bloque

```
\usepackage{titleps}

\newpagestyle{miestilo}{
\sethead[\thepage] [] [\textsl{\chaptername\ \thechapter. \chaptertitle}]
{\textsl{Una plantilla para el TFG \ - \ Mario Pérez Riera}}{\thepage}
%\setfoot [] [\textsl{\thesection. \sectiontitle}] []
%{\textsl{\thesection. \sectiontitle}}{\}
}
```

es importante, porque establece el formato de las cabeceras y pies de página. El estilo está definido mediante dos órdenes: `\sethead` y `\setfoot`, aunque en este ejemplo solo usamos la primera. Su sintaxis es la misma:


```
\sethead[A] [B] [C] {D}{E}{F}
```

(atención a los corchetes y las llaves), donde:

- A es lo que aparece en la esquina izquierda de la cabecera de las páginas pares;
- B es la parte central de la cabecera de las páginas pares;
- C es la esquina derecha de la cabecera de las páginas pares;
- D, E y F son análogas, pero para las páginas impares.

Cada uno de estos seis elementos puede estar vacío, como en el ejemplo. Con `\setfoot` establecemos los pies de página (en esta plantilla están vacíos). Como en esta plantilla usamos dos estilos de cabecera diferentes, uno para la primera parte (resumen e índice) y otro para la parte principal, a continuación aparece otro bloque similar:

```
\newpagestyle{primeraparte}{
\sethead[\thepage] [] [\textsl{\chaptertitle}]
{\textsl{Una plantilla para el TFG \ - \ Mario Pérez Riera}}{\thepage}
%\setfoot[] [\textsl{\thesection. \sectiontitle}] []
%{\textsl{\thesection. \sectiontitle}}{}
}
```

En seguida explicamos cómo se activa un estilo u otro.

Después de este bloque se definen algunas órdenes más técnicas, así como los entornos del tipo teorema, proposición, definición, ejemplo y otras órdenes para los símbolos y operadores matemáticos de uso frecuente.

Con estas líneas termina la parte preparatoria y comienza el documento en sí. Está dividido en tres grandes bloques: el bloque inicial, el bloque principal y el bloque final.

1.2. El bloque inicial: la portada, el resumen y el índice.

El bloque inicial empieza con las órdenes

```
\frontmatter
\pagestyle{primeraparte}
```

y termina, después del código de la portada y el resumen, con

```
\tableofcontents
\clearemptydoublepage
```

La orden `\frontmatter` indica que estamos en el bloque inicial. La orden que vemos a continuación, `\pagestyle{primeraparte}`, activa el estilo de cabecera *primeraparte*, que es uno de los que acabamos de definir nosotros.

A continuación viene el código de la portada del trabajo. A diferencia del resto, aquí empleamos diferentes tamaños de letra y órdenes para forzar un espaciado vertical.

La portada termina con la orden `\clearemptydoublepage`, que se repite a lo largo del código siempre al final de una parte o un capítulo. Esta orden añade una página en blanco si hace falta, para que el siguiente elemento del trabajo empiece en página impar. Es decir: si la última página es impar, añade una página par en blanco; si la última página es par, no hace nada.

Después de la portada viene el resumen, que empieza con la orden `\chapter{Resumen}`. Técnicamente, el resumen es un capítulo del texto. Acaba también con la orden `\clearemptydoublepage`.

Al final, la orden `\tableofcontents` compone el índice general. Este índice sale de manera automática (quizás haya que componer el texto un par de veces) y contiene los títulos de los capítulos, las

secciones y las subsecciones, si las hay. Contiene también el resumen y la bibliografía. Cada entrada lleva un enlace al apartado correspondiente. Como se ha dicho antes, los colores se pueden cambiar en la línea

```
\usepackage[...]{hyperref}
```

del preámbulo.

La orden `\tableofcontents` viene seguida también por `\clearemptydoublepage`. Así termina el bloque inicial del trabajo.

1.3. El bloque principal: los capítulos.

Este bloque empieza con la orden `\mainmatter` y sigue el mismo esquema que el bloque inicial. Consta de los capítulos del trabajo.

Cada capítulo del trabajo empieza con la orden `\chapter{...}`, donde entre las llaves está el título del capítulo. Y termina con `\clearemptydoublepage`.

1.4. El bloque final: la bibliografía.

El bloque final, que empieza con la orden `\backmatter`, está formado por la bibliografía. Su estructura es estándar: comienza con

```
\begin{thebibliography}{99}
```

y termina con

```
\end{thebibliography}
```

En el pdf, cada entrada de la bibliografía aparece con un número entre corchetes, tras el cual se indica el autor o autores y el título del libro o artículo. En el caso de los libros, sigue la editorial, lugar de publicación y año; en el caso de los artículos, la revista, volumen, número, año y páginas. Cada parte va con una tipografía determinada: por ejemplo, los autores se escriben en versalitas.

Naturalmente, el estilo de las referencias se puede cambiar, pero una vez elegido el estilo es importante sujetarse a él.

El número 99 de la orden `\begin{thebibliography}{99}` indica el espacio que se reserva al número entre corchetes. En este caso, se reserva espacio para dos dígitos. Si hay menos de diez entradas, deberá escribirse un número de una cifra (por ejemplo, 9); si hay entre 100 y 999 entradas, pondremos `\begin{thebibliography}{999}`, por ejemplo.

Capítulo 2

Comentarios

Incluimos en este capítulo algunos comentarios generales y consejos de escritura que no se refieren específicamente a esta plantilla.

2.1. Figuras

Como en cualquier documento escrito en \LaTeX (en nuestro caso, *pdflatex*) podemos incluir figuras. Estas figuras pueden ser imágenes contenidas en documentos aparte o compuestas dentro de nuestro documento con órdenes de \LaTeX . Se pueden incluir imágenes en diversos formatos gráficos, como pdf, jpeg y png, pero no todos; por ejemplo, no se pueden incluir imágenes tiff o gif.

Es preferible dejar flotar las figuras. Si se usa el entorno *figure*, entonces con

```
\begin{figure}[ht]  
...  
\end{figure}
```

indicamos que la figura debe insertarse preferiblemente donde se escribe el código (la h de *here*) o en la parte superior de la página (la t de *top*).



Figura 2.1: dos imágenes en archivos externos.

El paquete *tikz* permite hacer gráficas de funciones, figuras geométricas y diagramas sencillos, y no tan sencillos, como los de las figuras 2.2 y 2.3.

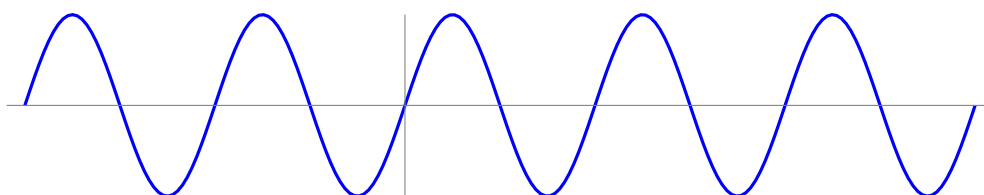


Figura 2.2: gráfica de la función $\sin(2x)$ entre -2π y 3π , hecha con *tikz*.

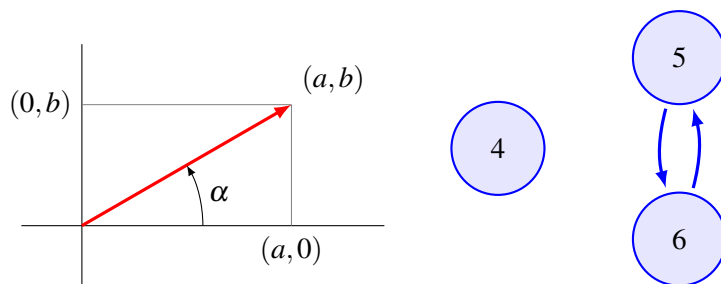


Figura 2.3: dos figuras juntas hechas con *tikz*.

2.2. Etiquetas

A menudo, los capítulos y secciones, los enunciados (teoremas, proposiciones, corolarios...) y las figuras llevan una numeración automática. Las fórmulas centradas pueden llevar también numeración o no llevarla. Es mejor numerar solo las fórmulas a las que se hace referencia en el texto. En cualquier caso, nunca se debe numerar *a mano*, sino usar las órdenes de \LaTeX adecuadas; por ejemplo,

```
\begin{equation}
...
\end{equation}
```

Y tampoco se debe hacer referencia a las fórmulas y enunciados escribiendo a mano la numeración, sino etiquetando la fórmula o enunciado con `\label` y refiriéndonos a ellos con `\eqref` (para fórmulas) y `\ref` (para enunciados).

De la misma manera, para hacer referencia a una entrada de la bibliografía debemos usar la orden `\cite`, nunca escribir a mano la clave.

2.3. Consejos de estilo

Al escribir un trabajo hay algunas reglas de estilo a las que conviene atenerse. Es fácil encontrar textos, más o menos exhaustivos, que recogen estas reglas. Aunque en ocasiones no queramos seguirlas hasta el último detalle, es útil releerlas de vez en cuando.

En la bibliografía hemos seleccionado algunas referencias con indicaciones sobre \LaTeX , tipografía y lingüística ([3, 4, 12]).

Es singularmente interesante la página *texnia* (<http://www.texnia.com/>) de Javier Bezos, una autoridad en \LaTeX y tipografía. Ahí está disponible [4], entre mucha más información.

La guía [3] está escrita para los alumnos de la Universidad de La Rioja que redacten su trabajo de fin de grado en \LaTeX . De ella hemos tomado buena parte de estas notas. Uno de sus autores, Juan Luis Varona, es otro gran experto en \LaTeX , edición y tipografía.

Desde luego, para cualquier duda lingüística en castellano es indispensable la página de la Real Academia Española [12], donde encontraremos su diccionario de la lengua española y su diccionario panhispánico de dudas.

Recogemos aquí algunos primeros consejos:

1. Redacta correctamente. Aunque se trate de un texto matemático, debe estar bien escrito y sin faltas de ortografía o gramaticales.
2. Escribe un buen código \LaTeX . Un código claro, bien estructurado, es más fácil de repasar. Lo que parece sencillo de entender en el momento en que lo escribes, puede resultar oscuro si lo tienes que revisar al cabo de un tiempo. Pon comentarios (líneas que empiezan por `%`) para explicar las partes más complicadas.

3. Corrige todos los errores de \TeX que ocurran al componer el texto. No te conformes nunca con pulsar *Enter* hasta que salga el pdf. Intenta obtener al final una composición limpia, sin errores ni advertencias. En particular, sin avisos de *overflow*.
4. No incluyas una inmensa lista de paquetes o definiciones que no vas a usar, a menudo copiados y pegados de otros sitios.
5. Usa los entornos del tipo teorema, definición, observación... (es decir, con `\begin{teorema}`, ..., `\end{teorema}`), en lugar de formatear a mano los enunciados.
6. No cites nunca a mano las fórmulas y enunciados; no pongas numeración a fórmulas que no cites. Sobre esto hemos comentado algo en la sección 2.2.
7. Evita, si es posible, las órdenes `\bigskip`, `\medskip`, `\smallskip`, `\hskip`, `\vskip` y similares, y no uses `\`, `\`, y análogas sin una buena razón. Es decir, como regla general es mejor dejar que \LaTeX establezca el espaciado vertical y horizontal por sí mismo.
8. Haz un uso moderado de `\emph`, `\textbf` y similares: una palabra en cursiva o negrita llama la atención, pero una página llena de cursivas, negritas, texto entre comillas, recuadros o incluso distintos colores es simplemente más difícil de leer. Decide con qué criterio vas a usar cada uno de estos recursos tipográficos.
9. Consulta un buen manual, como [6] y [10], antes de escribir una expresión matemática nueva. Es probable que allí encuentres una solución más sencilla que la que vayas a desarrollar por tu cuenta. La mayoría de los paquetes tienen también su manual, que tendrás en tu distribución de \LaTeX .
10. Hay una gran variedad de órdenes para escribir fórmulas que no caben en una línea. Consulta la guía de usuario del paquete *amsmath*.
11. Establece un estilo para la bibliografía y sujétate a él. Esto también lo hemos comentado antes, en la sección 1.4. Ten en cuenta, para decidir el estilo, que las entradas de la bibliografía pueden ser de varios tipos: libros enteros, artículos de revistas, páginas web... Puedes tomar el estilo de alguna revista, por ejemplo.
12. No abrevies los nombres de las revistas de cualquier manera: hay formas normalizadas de hacerlo. Puedes consultar las abreviaturas de revistas matemáticas en [1], de la American Mathematical Society (AMS). También puedes consultar MathSciNet (por ejemplo, [2]), así mismo de la AMS y suscrita por la Universidad de Zaragoza. Si no encuentras la revista que quieres, puedes buscar en [9] las abreviaturas de palabras en títulos de revistas, en diferentes idiomas, según la norma ISO.

Capítulo 3

La función Gamma de Euler

El contenido de la sección 3.1 está tomado, sin apenas cambios, de [5, pág. 518 y sig.]. Y el de la sección 3.2, de [7, pág. 185–187] y [13, pág. 206 y sig.]. De las muchas demostraciones de la fórmula de Stirling, la que presentamos en la sección 3.3 está tomada esencialmente de [11].

Para la primera sección es necesario tener conocimientos de análisis complejo. Damos por conocida la factorización

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (3.1)$$

cuya demostración puede verse, por ejemplo, en [5, pág. 518] o en [13, pág. 211–212].

Enunciamos aquí el teorema de factorización que usamos en la sección 3.1 (en realidad, el teorema de factorización de Weierstrass es más bien un recíproco de este resultado):

Definición. Escribimos $E_0(w) = 1 - w$ y para cada $p \in \mathbb{N}$,

$$E_p(w) = (1 - w) \exp \left(w + \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} + \cdots + \frac{w^p}{p} \right).$$

Estas funciones enteras se llaman *factores elementales* y su único cero es 1, simple.

Teorema 3.1. Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ con $z_n \neq 0$ para todo n y $z_n \rightarrow \infty$ (pueden estar repetidos). Si $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ y para cada $r > 0$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_n|} \right)^{1+p_n}$$

converge, entonces:

- a) $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n} \left(\frac{z}{z_n} \right)$ define una función holomorfa en \mathbb{C} ;
- b) los ceros de f son los z_n y su multiplicidad es el número de veces que aparecen repetidos en la sucesión.

3.1. Definición de la función Gamma como un producto infinito

La función entera más sencilla que se anula, con ceros simples, en los enteros negativos es

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}. \quad (3.2)$$

En efecto, basta aplicar el teorema de factorización con $z_n = -n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y con $p_n = 1$; claramente, para cada $r > 0$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_n|} \right)^{1+p_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^2}{n^2}$$

converge, y entonces el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n} \left(\frac{z}{z_n} \right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n} \right) e^{z/z_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-z/n}$$

converge uniformemente sobre compactos de \mathbb{C} y define una función entera cuyos ceros son los enteros negativos, todos ellos simples.

De la factorización (3.1) se deduce que

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z F(z) F(-z).$$

Las funciones $F(z-1)$ y $zF(z)$ son ambas enteras y con los mismos ceros: $0, -1, -2, \dots$, todos ellos simples. Por lo tanto, su cociente tiene logaritmo holomorfo: es una función entera que no se anula en ningún punto. Es decir:

$$F(z-1) = zF(z)e^{g(z)} \quad (3.3)$$

para alguna función entera g . Si sustituimos F por su definición, tenemos

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z-1}{n} \right) e^{-\frac{z-1}{n}} = ze^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-z/n}.$$

En esta expresión tomamos *derivadas logarítmicas*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1/n}{1 + \frac{z-1}{n}} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + g'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1/n}{1 + \frac{z}{n}} - \frac{1}{n} \right).$$

No insistiremos en esto, pero todos los productos infinitos, las series y los límites que hemos manejado y los que vengan a continuación convergen porque converge el producto infinito (3.2) y porque se puede derivar logarítmicamente.

De la fórmula anterior obtenemos $g'(z)$, pasando a sumas parciales para no manejar series que no converjan:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} + g'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1/n}{1 + \frac{z-1}{n}} - \frac{1}{n} \right) = \lim_N \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n+z-1} - \frac{1}{n+z} \right) \\ &= \lim_N \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{N+z} \right) = \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $g'(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, es decir, g es una constante. ¿Qué constante? La llamamos γ y para hallarla basta imponer que cumpla la fórmula (3.3) sustituyendo, por ejemplo, $z = 1$:

$$1 = F(0) = F(1)e^{\gamma} = e^{\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) e^{-1/n},$$

es decir,

$$e^{-\gamma} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) e^{-1/n}.$$

Naturalmente, no hay un único valor porque el logaritmo complejo no es único, pero el producto infinito de la derecha es un número real positivo y entonces podemos elegir el único $\gamma \in \mathbb{R}$ que cumple esa relación. Es decir:

$$\gamma = -\log \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) e^{-1/n} = -\log \lim_N \prod_{n=1}^N \frac{n+1}{n} e^{-1/n} = -\log \lim_N (N+1) e^{-1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{N}}.$$

O, equivalentemente:

$$\gamma = \lim_N \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} - \log(N+1) \right).$$

Esta constante se llama *constante de Euler*. Observemos que como $\log(N+1) = \log N + \log(1 + \frac{1}{N})$, también podemos escribir

$$\gamma = \lim_N \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} - \log N \right). \quad (3.4)$$

Volviendo a la fórmula (3.3), pero ya con $g(z) = \gamma$, tenemos

$$F(z-1) = zF(z)e^\gamma$$

y por lo tanto

$$e^{\gamma(z-1)}F(z-1) = ze^{\gamma z}F(z).$$

La función $\Gamma(z) = \frac{1}{ze^{\gamma z}F(z)}$, cuyos polos son $0, -1, -2, \dots$, todos ellos simples, cumple

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \frac{1}{e^{\gamma z}F(z)} = z\Gamma(z), \\ \Gamma(1) &= \frac{1}{e^{\gamma}F(1)} = 1. \end{aligned}$$

En particular, de aquí se deduce por inducción que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}$. También se cumple que

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z F(z) F(-z) = \pi z \frac{1}{ze^{\gamma z}\Gamma(z)} \cdot \frac{1}{-ze^{-\gamma z}\Gamma(-z)} = \frac{\pi}{\Gamma(z)(-z)\Gamma(-z)} = \frac{\pi}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)},$$

es decir,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}, \quad z \notin \mathbb{Z}.$$

Si hacemos $z = 1/2$, obtenemos $\Gamma(1/2)^2 = \pi$. Como

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\gamma}F\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\gamma}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)e^{-\frac{1}{2n}}} > 0,$$

se deduce que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Por otra parte, de la definición de $\Gamma(z)$ se sigue que

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{e^{-\gamma z}}{z} \lim_N \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n} = \lim_N \frac{e^{-\gamma z} N! e^{z(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N})}}{z(z+1) \cdots (z+N)} \\ &= \lim_N \frac{e^{z \log N} N!}{z(z+1) \cdots (z+N)} e^{z(-\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} - \log N)}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (3.4), queda

$$\Gamma(z) = \lim_N \frac{N^z N!}{z(z+1) \cdots (z+N)}, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots$$

La función Γ se llama *función Γ de Euler*.

3.2. Definición de la función Gamma como una integral

La definición más clásica de la función Γ es como una integral:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Vamos a ver que esta definición coincide con la anterior. De momento, definamos

$$G(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Como $|t^{z-1} e^{-t}| = t^{\operatorname{Re}(z)-1} e^{-t}$, se deduce que la función G está bien definida si $\operatorname{Re} z > 0$. En realidad, es fácil comprobar que es una función holomorfa en el abierto $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\}$. Algunas propiedades sencillas de esta función son:

- a) $G(z+1) = zG(z)$ (se comprueba integrando por partes).
- b) $G(1) = 1$ (es una integral inmediata).
- c) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $G(n) = (n-1)!$ (se prueba por inducción, a partir de las dos propiedades anteriores).

Sean ahora $x, y > 0$ (números reales positivos), $0 < \lambda < 1$. Entonces,

$$G(\lambda x + (1-\lambda)y) = \int_0^{\infty} t^{\lambda x + (1-\lambda)y-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} t^{\lambda(x-1)} e^{-\lambda t} t^{(1-\lambda)(y-1)} e^{-(1-\lambda)t} dt.$$

Aplicamos ahora la desigualdad de Hölder a las funciones $t^{\lambda(x-1)} e^{-\lambda t}$, $t^{(1-\lambda)(y-1)} e^{-(1-\lambda)t}$, con exponentes $p = 1/\lambda$, $q = 1/(1-\lambda)$. Resulta:

$$\begin{aligned} G(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leq \left(\int_0^{\infty} t^{\lambda p(x-1)} e^{-\lambda p t} dt \right)^{1/p} \left(\int_0^{\infty} t^{(1-\lambda)q(y-1)} e^{-(1-\lambda)q t} dt \right)^{1/q} \\ &= \left(\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \right)^{\lambda} \left(\int_0^{\infty} t^{y-1} e^{-t} dt \right)^{1-\lambda}. \end{aligned}$$

Es decir:

$$G(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq G(x)^{\lambda} G(y)^{1-\lambda}, \quad x > 0, y > 0, 0 \leq \lambda \leq 1$$

(los casos $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ son triviales). Las funciones que cumplen esta propiedad se llaman *logarítmicamente convexas*.

La demostración que vamos a ver de que G es la función Γ se aplica a cualquier función $G : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ que cumpla las propiedades a), b), c) y la convexidad logarítmica; es el teorema de Bohr-Mollerup. En nuestro caso, como G y Γ son holomorfas, si coinciden en $(0, \infty)$ coinciden en todo el abierto conexo $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\}$, por el principio de prolongación analítica.

Comencemos por un $x \in (0, 1]$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$n+1+x = (1-x)(n+1) + x(n+2),$$

luego, por la convexidad logarítmica (por eso hace falta $0 < x \leq 1$),

$$\begin{aligned} G(n+1+x) &\leq G(n+1)^{1-x} G(n+2)^x = G(n+1)^{1-x} [(n+1)G(n+1)]^x \\ &= (n+1)^x G(n+1) = (n+1)^x n! \end{aligned}$$

De la misma manera,

$$n+1 = x(n+x) + (1-x)(n+1+x),$$

luego

$$\begin{aligned} n! &= G(n+1) \leq G(n+x)^x G(n+1+x)^{1-x} \\ &= \left[\frac{G(n+1+x)}{n+x} \right]^x G(n+1+x)^{1-x} = \frac{G(n+1+x)}{(n+x)^x}. \end{aligned}$$

Juntando las dos desigualdades tenemos

$$(n+x)^x n! \leq G(n+1+x) \leq (n+1)^x n!,$$

es decir:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^x \leq \frac{G(n+1+x)}{n! n^x} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x.$$

Si hacemos $n \rightarrow \infty$, deducimos que

$$1 = \lim_n \frac{G(n+1+x)}{n! n^x} = \lim_n \frac{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)G(x)}{n! n^x},$$

donde en el último paso se usa la propiedad a). Por lo tanto,

$$G(x) = \lim_n \frac{n! n^x}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)} = \Gamma(x).$$

Ya tenemos que $G(x) = \Gamma(x)$ si $x \in (0, 1]$. Para $x > 1$ tendremos $x \in (m, m+1]$ para algún $m \in \mathbb{N}$ y entonces

$$G(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-m)G(x-m) = (x-1)(x-2)\dots(x-m)\Gamma(x-m) = \Gamma(x).$$

3.3. La fórmula de Stirling

Partimos de la definición de la función Γ como una integral, pero nos limitamos a valores reales:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

Haciendo el cambio de variable $u = \sqrt{t}$, resulta

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty 2u^{2x-1} e^{-u^2} du.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\Gamma(x)}{x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}} = \int_0^\infty 2 \left(\frac{u}{\sqrt{x}} \right)^{2x-1} e^{x-u^2} du = \int_{-\sqrt{x}}^\infty 2 \left(1 + \frac{v}{\sqrt{x}} \right)^{2x-1} e^{-2v\sqrt{x}} e^{-v^2} dv,$$

donde para llegar a la segunda integral hacemos el cambio $u = \sqrt{x} + v$ (así que $x - u^2 = -2v\sqrt{x} - v^2$). Es decir,

$$\frac{\Gamma(x)}{x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}} = \int_{-\infty}^\infty \chi_{[-\sqrt{x}, +\infty)}(x) 2 \left(1 + \frac{v}{\sqrt{x}} \right)^{2x-1} e^{-2v\sqrt{x}} e^{-v^2} dv. \quad (3.5)$$

Queremos hacer $x \rightarrow +\infty$ usando el teorema de la convergencia dominada, para lo cual debemos encontrar una acotación y hallar un límite del integrando. En todo lo que sigue podemos suponer que $2x-1 > 0$. Empezamos con la acotación: usando la desigualdad

$$1+t \leq e^t, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

que se demuestra muy fácilmente, deducimos que

$$\left(1 + \frac{v}{\sqrt{x}}\right)^{2x-1} \leq e^{2v\sqrt{x} - \frac{v}{\sqrt{x}}}$$

y, por lo tanto,

$$0 \leq 2 \left(1 + \frac{v}{\sqrt{x}}\right)^{2x-1} e^{-2v\sqrt{x}} \leq 2e^{-v/\sqrt{x}} \leq 2e, \quad \text{si } v \in [-\sqrt{x}, +\infty).$$

Así que

$$0 \leq \chi_{[-\sqrt{x}, +\infty)}(x) 2 \left(1 + \frac{v}{\sqrt{x}}\right)^{2x-1} e^{-2v\sqrt{x}} e^{-v^2} \leq 2e e^{-v^2}.$$

Ya tenemos la acotación. Ahora, fijado $v \in [-\sqrt{x}, +\infty)$,

$$2 \left(1 + \frac{v}{\sqrt{x}}\right)^{2x-1} e^{-2v\sqrt{x}} = 2e^{(2x-1)\log(1+\frac{v}{\sqrt{x}}) - 2v\sqrt{x}},$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((2x-1)\log\left(1 + \frac{v}{\sqrt{x}}\right) - 2v\sqrt{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x\log\left(1 + \frac{v}{\sqrt{x}}\right) - 2v\sqrt{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2v^2 \frac{\log\left(1 + \frac{v}{\sqrt{x}}\right) - \frac{v}{\sqrt{x}}}{\frac{v^2}{x}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} 2v^2 \frac{\log(1+y) - y}{y^2} = -v^2 \end{aligned}$$

(por el desarrollo de Young de $\log(1+y)$ o por la regla de L'Hôpital). Es decir, para todo $v \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \chi_{[-\sqrt{x}, +\infty)}(x) 2 \left(1 + \frac{v}{\sqrt{x}}\right)^{2x-1} e^{-2v\sqrt{x}} e^{-v^2} = 2e^{-v^2}.$$

Llevando todo a (3.5), obtenemos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(x)}{x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}} = \int_{-\infty}^{+\infty} 2e^{-2v^2} dv.$$

Esta integral se calcula de varias maneras. Por ejemplo, usando coordenadas polares,

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} 2e^{-2v^2} dv \right)^2 &= \iint_{\mathbb{R}^2} 4e^{-2(u^2+v^2)} du dv = \int_{(0,+\infty)} \int_{-\pi}^{\pi} 4e^{-2r^2} r d\varphi dr \\ &= \int_{(0,+\infty)} 8\pi r e^{-2r^2} dr = \left[-2\pi e^{-2r^2} \right]_{r=0}^{r \rightarrow +\infty} = 2\pi, \end{aligned}$$

de donde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2e^{-2v^2} dv = \sqrt{2\pi}.$$

Así que finalmente obtenemos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(x)}{x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}} = \sqrt{2\pi},$$

que es la fórmula de Stirling. Otra manera equivalente de escribirla, más habitual, es esta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\Gamma(x)}{x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} \sqrt{2\pi}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(x)}{x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \sqrt{2\pi}} = 1.$$

Bibliografía

- [1] AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, *Abbreviations of names of serials*, <http://www.ams.org/msnhtml/serials.pdf>.
- [2] AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, *MathSciNet* (servidor de Estrasburgo), <http://ams.u-strasbg.fr/mathscinet/>.
- [3] A. ARENAS, E. LABARGA Y J. L. VARONA, *Una breve guía para redactar un trabajo de fin de grado con contenido matemático utilizando LaTeX*, https://www.unirioja.es/facultades_escuelas/fct/TFG/guia-TFG-matematicas.pdf, disponible en https://www.unirioja.es/facultades_escuelas/fct/TFG/guias_manuales.shtml.
- [4] J. BEZOS, *Ortotipografía y notaciones matemáticas*, <http://www.texnia.com/archive/ortomatem.pdf>, disponible en <http://www.texnia.com/>.
- [5] J. BRUNA Y J. CUFÍ, *Anàlisi complexa*, Colección Manuals, Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra, 2008.
- [6] B. CASCALES, P. LUCAS, J. M. MIRA, A. PALLARÉS Y S. SÁNCHEZ-PEDREÑO, *LaTeX, una imprenta en tus manos*, Aula Documental de Investigación, Madrid, 2000.
- [7] B. CUARTERO, *Fundamentos de análisis matemático*, Colección Textos Docentes, Prensas Universitarias de Zaragoza, 2009.
- [8] FACULTAD DE CIENCIAS DE LA UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA, *Directrices propias para la elaboración del trabajo fin de grado en Matemáticas*, disponible en <https://ciencias.unizar.es/trabajo-fin-de-grado-en-matematicas>.
- [9] INTERNATIONAL STANDARD SERIAL NUMBER, *International identifier for serials*, <http://www.issn.org/services/online-services/access-to-the-ltwa/>.
- [10] F. MITTELBAACH, M. GOOSSENS, J. BRAAMS, D. CARLISLE Y C. ROWLEY, *The L^AT_EX Companion*, 2.^a ed., Addison-Wesley, 2004.
- [11] J. M. PATIN, A very short proof of Stirling's formula, *Amer. Math. Monthly* **96** (1) (1989), 41–42.
- [12] REAL ACADEMIA ESPAÑOLA, <http://www.rae.es/>.
- [13] R. WEBSTER, *Convexity*, Oxford University Press, Oxford, 1994.