Curvas e Superfícies

35M34 – Sala 3E1

Bruno Motta de Carvalho

DIMAp – Sala 15 – Ramal 227

Introdução

A modelagem e desenho de curvas suaves são necessárias em várias aplicações de computação gráfica, seja na modelagem de objetos já existentes ou na criação de novos objetos

Nós vamos abordar aqui a modelagem de curvas e superfícies e não de sólidos

Superfícies são modeladas usando-se malhas de polígonos, superfícies bicúbicas paramétricas e superfícies quádraticas

Curvas cúbicas paramétricas são utilizadas na modelagem de curvas e são a base das superfícies bicúbicas paramétricas

Malhas de Polígonos

É uma coleção de vértices, arestas e polígonos conectados tal que cada aresta é compartilhada por no máximo dois polígonos, e cada vértice é compartilhado por no mínimo duas arestas

Três representações são possíveis:

- Explícita – Cada polígono é representado por uma lista de coordenadas de vértices
- Ponteiros para uma lista de vértices – Cada vértice é armazenado somente uma vez. Polígono é definido por uma lista de índices de vértices
- Ponteiros para uma lista de arestas – Cada aresta é armazenado somente uma vez. Polígono é definido por uma lista de índices de vértices e arestas

Representações

Representações são avaliadas de acordo com o tempo necessário para realizar tarefas comuns como achar as arestas de um polígono

Representação explícita é simples mas ineficiente e ocupa muito espaço. Exemplo: como achar polígonos que compartilham um vértice?

Ponteiros para uma lista de vértices é mais eficiente, mas como achar polígonos que compartilham uma aresta?

Usando ponteiros para uma lista de arestas, um polígono é descrito por uma lista de arestas, cujas entradas são descritas por uma lista de vértices e dos polígonos a que pertencem

Consistência de Representações

- Malhas de polígonos geralmente são geradas interativamente, logo erros são comuns
- Dependente da aplicação, a checagem pode obrigar que:
  - os polígonos sejam fechados,
  - que cada vértice seja usado pelo menos duas vezes
  - que a malha seja completamente conectada, etc.
- A representação que usa listas de arestas é a mais apropriada a este tipo de checagem pois tem mais informações

Curvas Cúbicas Paramétricas

- Polilinhas e polígonos são aproximações lineares por partes de primeiro grau à curvas e superfícies, respectivamente
- Ineficientes para representação de curvas e superfícies (necessitam de muitos pontos para ter uma precisão aceitável)
- Pode-se usar representações explícitas, implícitas ou paramétricas
- Representações explícitas tem problemas para representar curvas arbitrárias

Curvas Cúbicas Paramétricas

Em representações implícitas é difícil de se controlar tangentes de curvas que se unem, ou a equação pode ter mais soluções que o desejado

As curvas paramétricas são aproximadas por curvas polinomiais por partes. Cada segmento Q da curva é definido por três funções x, y e z, que são polinômios cúbicos no parâmetro t

Polinômios cúbicos são um compromisso entre a representação de curvas arbitrárias em 3D e complexidade computacional na manipulação da representação do objeto

Curvas Cúbicas Paramétricas

Os polinômios cúbicos que definem a curva $Q(t)$ são

$$Q(t)=[x(t)\ y(t)\ z(t)] =$$

$$x(t)=a_x t^3+b_x t^2+c_x t+d_x,$$

$$y(t)=a_y t^3+b_y t^2+c_y t+d_y,$$

$$z(t)=a_z t^3+b_z t^2+c_z t+d_z,\quad 0\le t\le 1$$

ou

$$Q(t)=[x(t)\ y(t)\ z(t)] = T\cdot M\cdot G \quad \text{onde}$$

$$T=[t^3\ t^2\ t\ 1],\ C=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}\ e\ G=\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{bmatrix}$$

Curvas Cúbicas Paramétricas

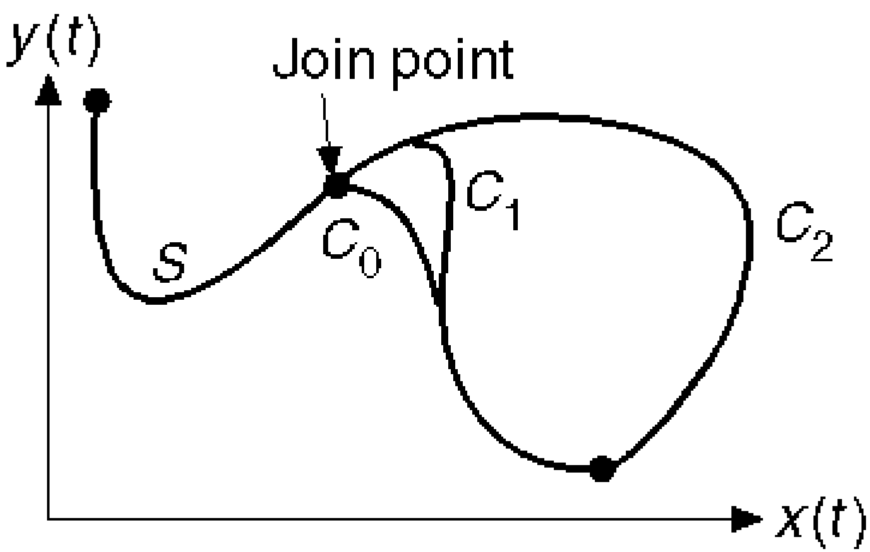
A derivada de $Q(t)$ é o vetor tangente paramétrico da curva

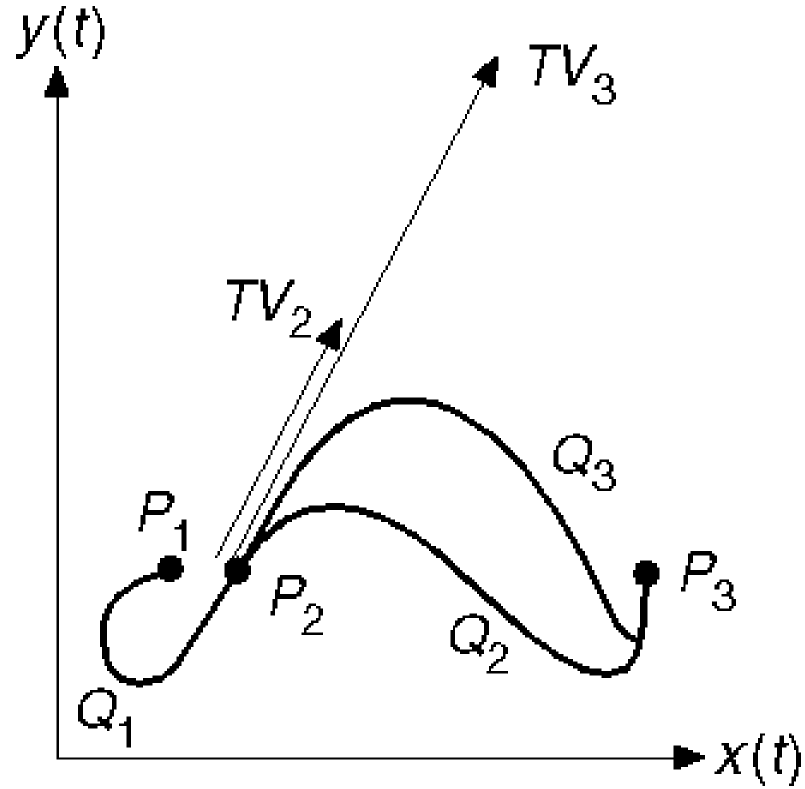
Se dois segmentos de curvas se encontram a curva tem continuidade geométrica G^0, e se a direção de suas tangentes neste ponto tem a mesma direção a curva tem continuidade G^1

Se os vetores tangentes paramétricos são iguais no ponto de encontro das curvas a curva tem continuidade paramétrica C^1

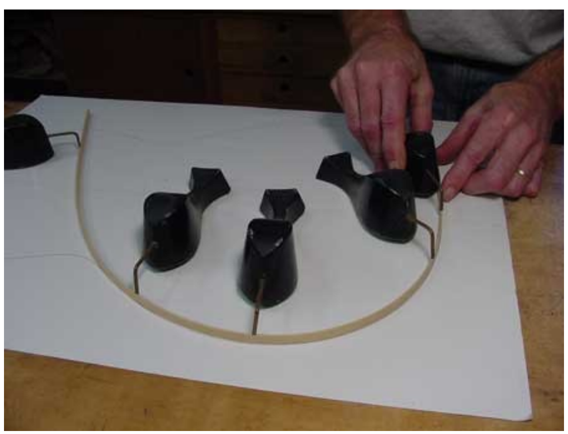
Se os valores de $\frac{d^n}{dt^n}[Q(t)]$ são iguais até a n-ésima derivada, a curva tem continuidade C^n

Curvas Cúbicas Paramétricas





Curvas Cúbicas Paramétricas - História



- Uma *spline* é uma curva paramétrica definida por *pontos de controle*
  - O termo spline vem da área de desenho em engenharia, onde uma spline é um pedao de madeira ou metal flexível usado para desenhar curvas suaves
  - Pontos de controle são ajustados pelo usuário para controlar a forma da curva usando-se pesos (ducks)
- Splines de madeira tem continuidade de segunda ordem e passam obrigatoriamente pelos pontos de controle

Curvas de Bézier

- Segmento de curva definido por quatro pontos de controle
- Primeiro e quarto pontos de controle são interpolados
- Segundo e terceiro pontos definem, junto com primeiro e quarto,respectivamente, tangentes da curva no primeiro e quarto pontos
- As funções de base são sempre positivas e sua soma é sempre 1 (polinômios de Bernstein). Por causa disso, curva está localizada no fecho convexo dos seus pontos de controle

Curvas de Bézier

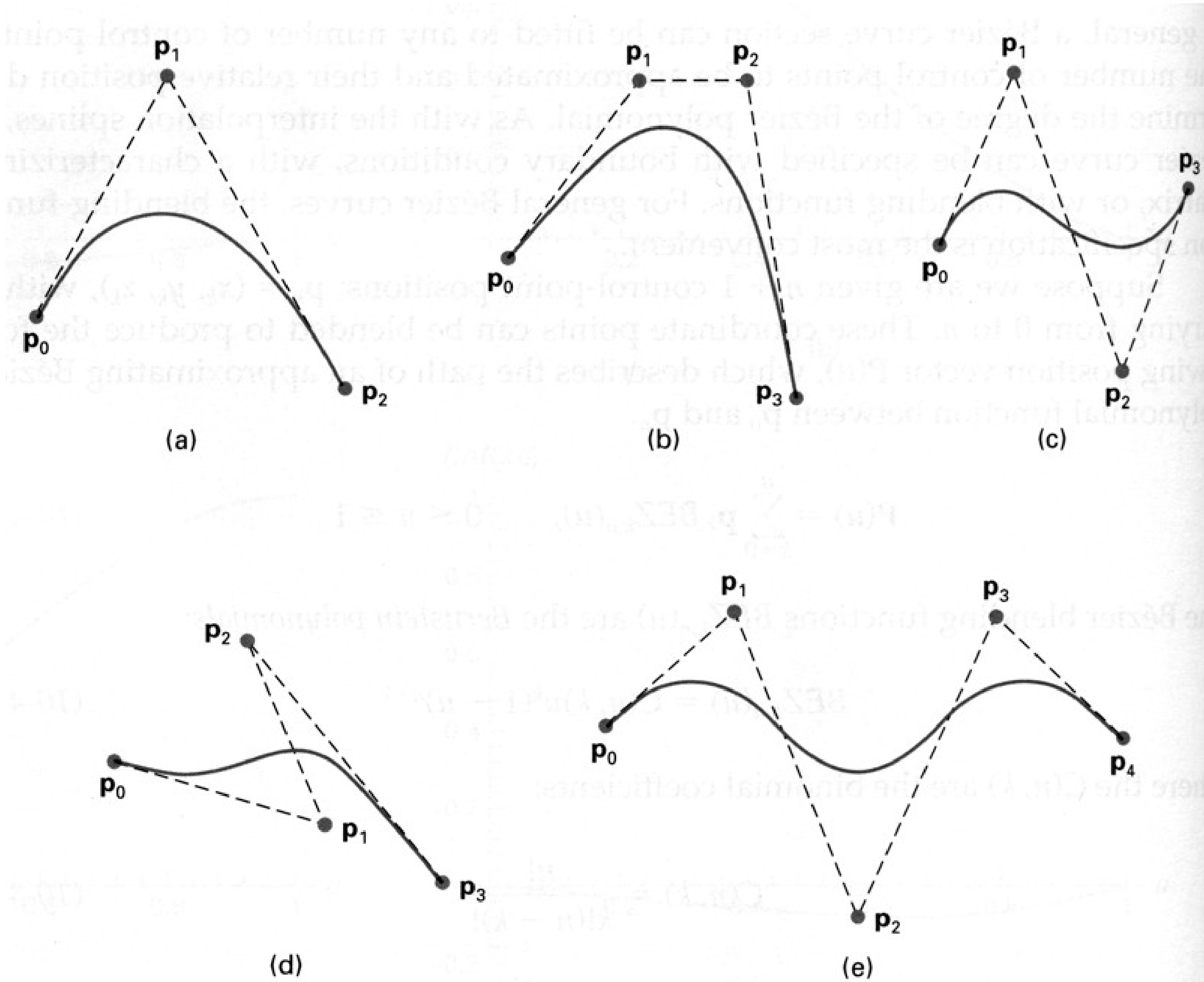
Se dois segmentos de curva são especificados por 7 pontos de controle, a curva tem continuidade G^1 se P_3-P_4=k(P_4-P_5), k>0 (se k=1 a curva tem continuidade C^1)

$$Q(t) = T \cdot M_B \cdot G_B \quad \text{onde} \quad T = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix},$$

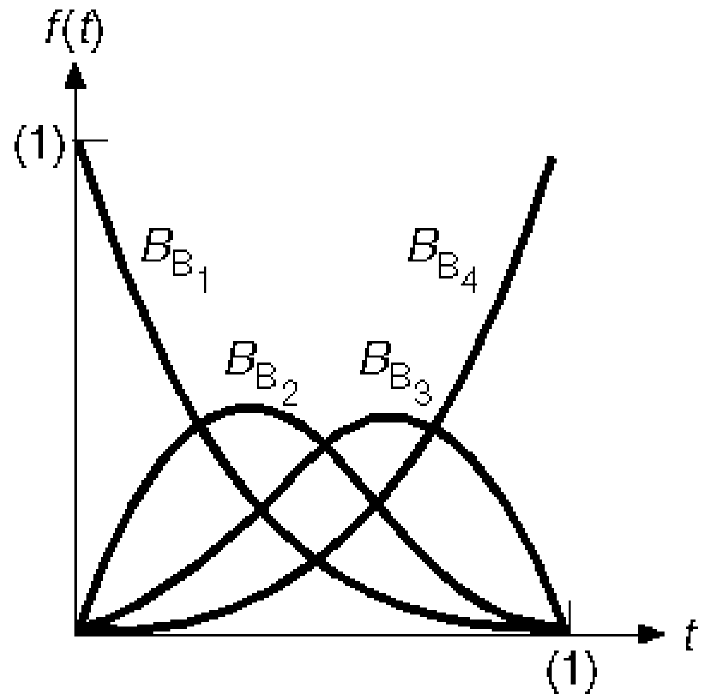
$$M_B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; e \; G_B = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}, \; \text{logo}$$

$$Q(t) = (1-t)^3 P_1 + 3t(1-t)^2 P_2 + 3t^2(1-t) P_3 + t^3 P_4$$

Curvas de Bézier



Curvas de Bézier



Funções de base (blending) de Bézier

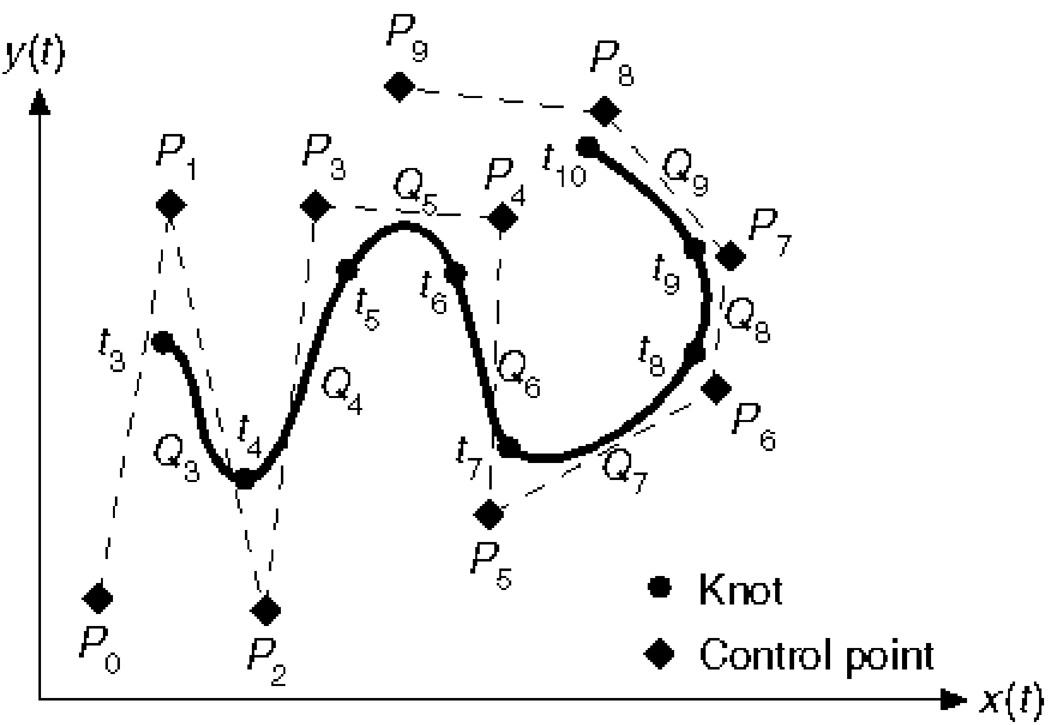
B-Splines Uniformes Não-Racionais

B-splines, ao contrário das splines naturais, tem controle local, isto é, a mudança de um ponto de controle só afeta alguns segmentos da curva

B-splines cúbicas aproximam (ao contrário das splines naturais) uma série de m+1 pontos de controle P_0, ...,P_m, $m \leq 3$, por uma curva com m - 2 segmentos de curvas polinomiais cúbicos Q_3, ..., Q_m

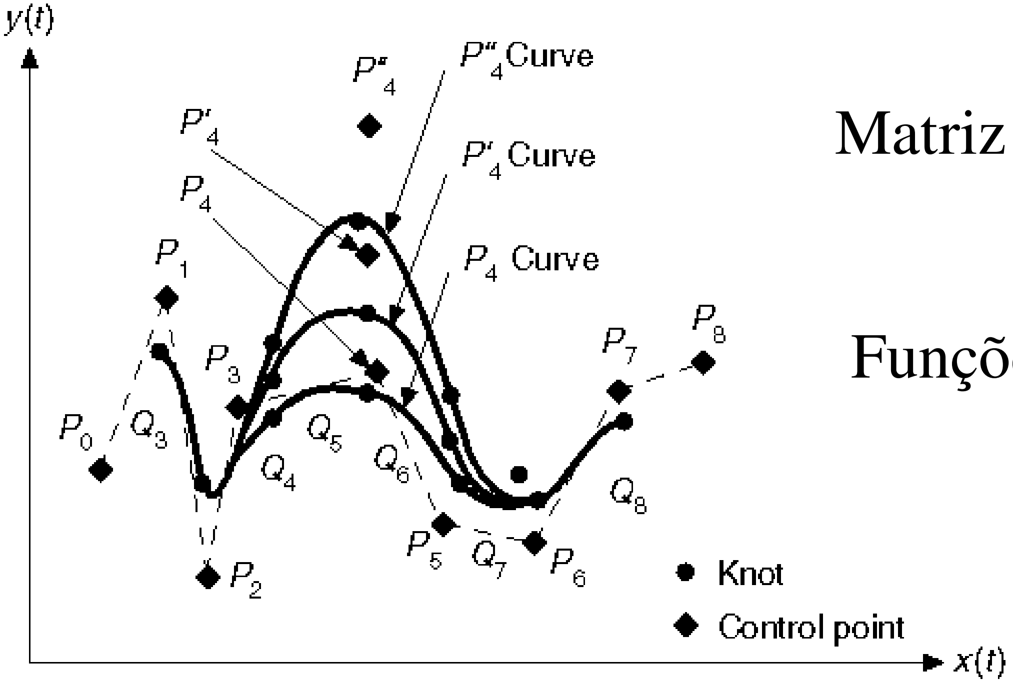
O parâmetro t é definido como $t_i \leq t < t_{i+1}$, para $3 \leq i \leq m$. Nocaso de de m=3, existe uma única curva Q_3 definida no intervalo $t_3 \leq t < t_4$ por quatro pontos de controle P_0 até P_3

B-Splines Uniformes Não-Racionais



- Para cada $i \geq 4$ existe um ponto comum ou nó entre Q_{i-1} e Q_i no valor do parâmetro t_i. Os pontos inicial e final em t_3 e t_{m+1} também são chamados de nós
- O termo uniforme significa que os nós estão espaçados em intervalos iguais do parâmetro t
- Tem continuidade C^0, C^1 e C^2, mas se tem menos controle da curva

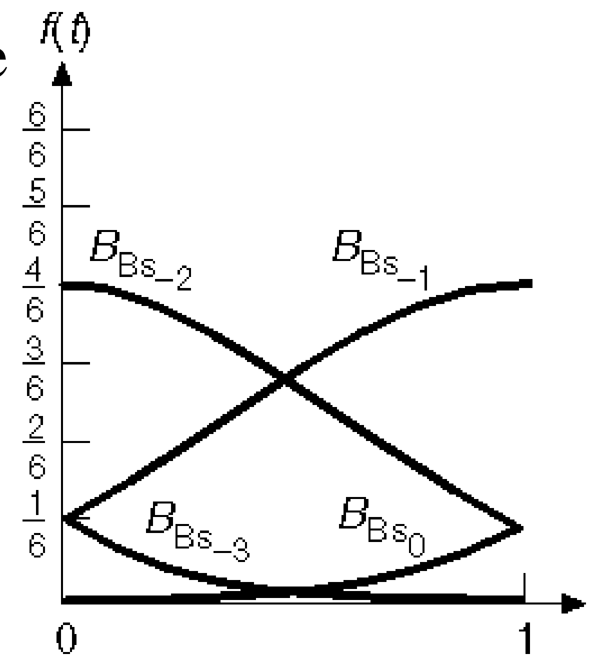
B-Splines Uniformes Não-Racionais



Matriz de base

$$M_{Bs} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Funções de base



Movendo-se um ponto de controle move-se as quatro curvas que ele afeta na mesma direção

B-Splines Não-Uniformes Não-Racionais

Intervalos dos parâmetros *t* não necessitam ser iguais

Vantagens sobre as uniformes:

- Continuidade em pontos de junção selecionados pode ser diminuída de C^2 para C^1, C^0 (interpola ponto de controle sem que se torne uma reta) e nenhuma
- Pontos iniciais e finais podem ser interpolados facilmente
- Mais controle na sua modificação

B-Splines Não-Uniformes Não-Racionais

- Usam a mesma sequência de pontos de controle de P_0, ...,P_m, e uma sequência de valores de nós (não-decrescente) t_0 a t_{m+4}
- Nós podem ter multiplicidade maior que 1, por exemplo (0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5)

$$Q_i(t) = P_{i-3} \cdot B_{i-3,4}(t) + P_{i-2} \cdot B_{i-2,4}(t) + P_{i-1} \cdot B_{i-1,4}(t) + P_i \cdot B_{i,4}(t)$$

$$3 \le i \le m, \quad t_i \le t \le t_{i+1}$$

- Funções de base são definidas recursivamente
- Restringindo-se intervalos de nós como 0 ou 1 pode-se pré-calcular valores das funções de blending (que são positivas e somam 1)

B-Splines Não-Uniformes Não-Racionais

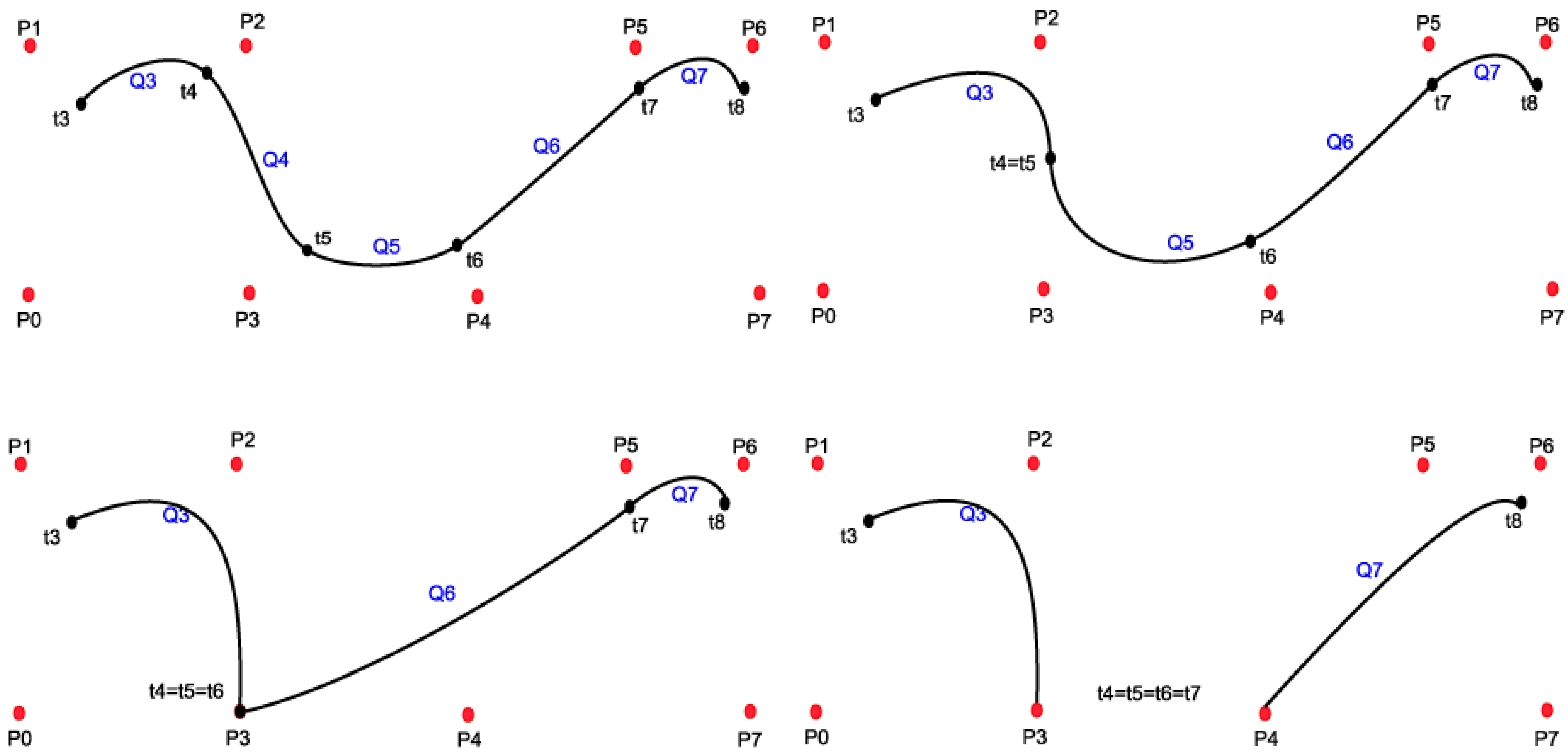
Nós múltiplos (efeitos) reduzem continuidade

- Multiplicidade 2 – de C^2 para C^1
- Multiplicidade 3 – de C^2 para C^0
- Multiplicidade 4 – de C^2 para sem continuidade

e interpolação dos pontos de controle

- Multiplicidade 2 – $t_i=t_{i+1}$: nós devem estar na linha P_{i-2}-P_{i-1}
- Multiplicidade 3 – $t_i=t_{i+1}=t_{i+2}$: nós estão no ponto de controle P_{i-1}
- Multiplicidade 4 – $t_i=t_{i+1}=t_{i+2}=t_{i+3}$: nós devem estar em P_{i-1} e P_i ao mesmo tempo, logo uma descontinuidade é introduzida

B-Splines Não-Uniformes Não-Racionais



B-Splines Não-Uniformes Racionais (NURBS)

Segmentos de curvas cúbicas racionais são razões de polinômios:

$$x(t) = \frac{X(t)}{W(t)}, \quad y(t) = \frac{Y(t)}{W(t)}, \quad z(t) = \frac{Z(t)}{W(t)}$$

Onde *X*(*t*), *X*(*t*), *X*(*t*), *X*(*t*), são curvas polinomiais cúbicas com pontos de controle especificados em coordenadas homogêneas

São invariantes a rotação, translação, scaling e transformações perspectivas

Conseguem representar cônicas precisamente (importante em CAD)

Outras Splines

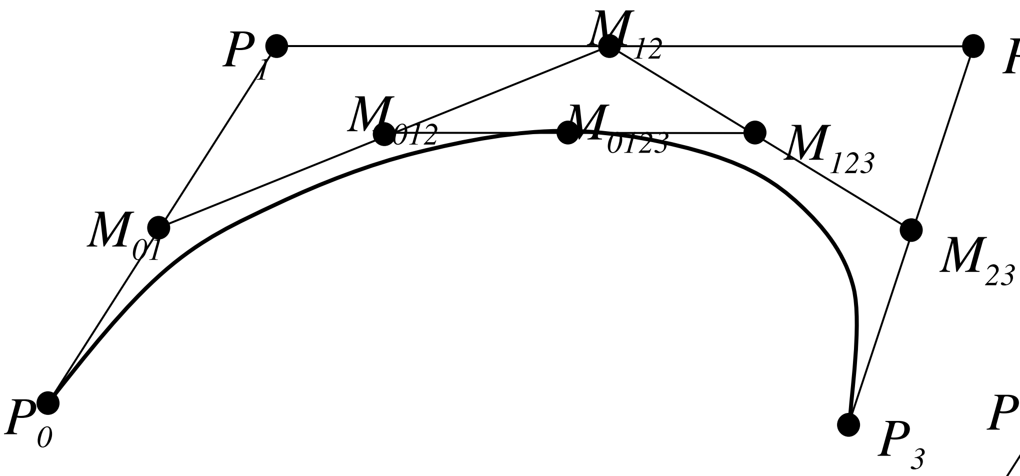
- Splines de Catmull-Rom (ou Overhauser) interpolam pontos de controle, de modo similar às splines naturais
- As β–splines controlam a forma da curva globalmente através das variáveis β_1 (bias) e β_2 (tensão)
- Bias controla influência dos vetores tangentes enquanto que tensão puxa curva para próximo das linhas que conectam os pontos de controle

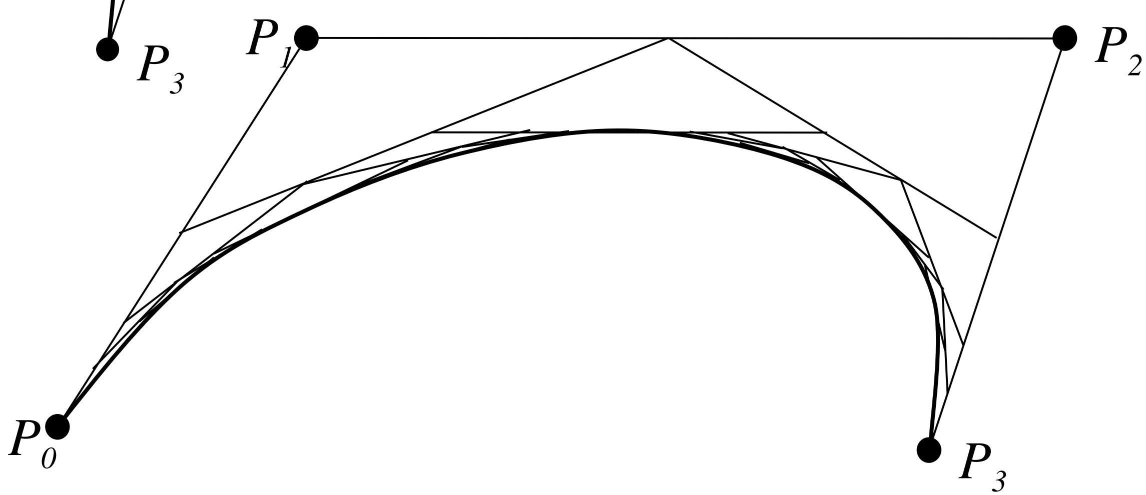
Subdividindo Curvas

Algoritmo para subdizisão de curvas de Bézier:

- Encontre os pontos médios (M_{01}, M_{12}, M_{23}) das linhas que ligam os pontos de controle originais
- Encontre os pontos médios (M_{012}, M_{123}) das linhas que ligam M_{01} a M_{12} e M_{12} a M_{23}
- Encontre o ponto médio da linha que liga M_{012} a M_{123}
- A curva com os pontos de controle P_0, M_{01}, M_{012} e M_{0123} é a parte da curva original no intervalo t=[0, 0.5]
- A curva com os pontos de controle M_{0123}, M_{123}, M_{23} and P_3 é a parte da curva original no intervalo t=[0.5, 1]

Subdividindo Curvas





Conversões Entre Representações

- Conversões são feitas usando-se as matrizes de base
- Subdivisão de B-splines uniformes é feita convertendo-se para Bézier e subdividindo
- No caso das B-splines não-uniformes, adiciona-se múltiplos nós usando o algoritmo de Böhm ou de Oslo e converte-se para Bézier, e posteriormente para outra forma, se necessário

Desenhando Curvas

O método de diferenças usa a fórmula

$$\Delta f(t) = f(t+\delta) - f(t),\ \delta > 0 \qquad \text{como}$$

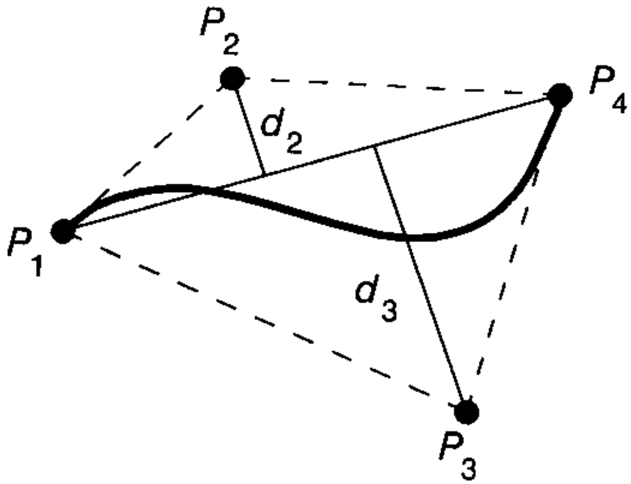
$$f(i) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

$$\Delta f(t) = a(t+\delta)^3 + b(t+\delta)^2 + c(t+\delta) + d - (at^3 + bt^2 + ct + d)$$

$$= 3at^2\delta + t(3a\delta^2 + 2b\delta) + a\delta^3 + b\delta^2 + c\delta$$

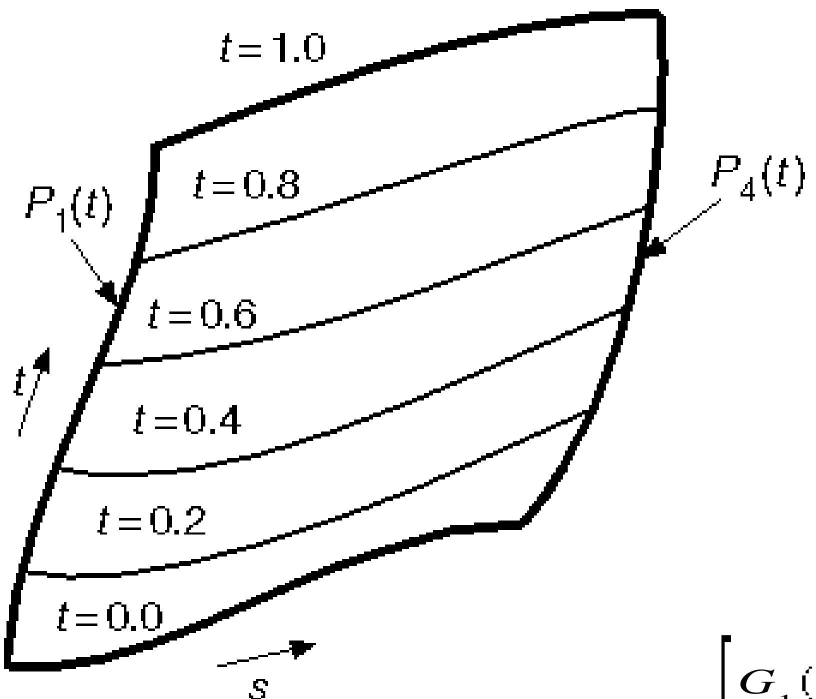
Diferenças são computadas até o terceiro nível, onde são constantes, diminuindo-se o número de multiplicações necessárias para avaliar $f(t)$

Desenhando Curvas



- Outro método para desenho de curvas é a subdivisão recursiva, onde uma curva é subdividida até que um teste de planaridade seja satisfeito, isto é, a curva pode ser aproximada por uma linha
- Subdivisão de curvas de Bézier é rápida (conversão das outras formas antes da subdivisão)
- Evita computações desnecessárias, mas gasta tempo nos testes de planaridade
- Pode-se usar uma abordagem híbrida, combinado as duas técnicas acima

Superfícies Bicúbicas Paramétricas



$$Q(s,t) = S \cdot M \cdot G(t) = S \cdot M \cdot \begin{bmatrix} G_1(t) \\ G_2(t) \\ G_3(t) \\ G_4(t) \end{bmatrix}$$

- Superfícies bicúbicas paramétricas são generalizações de curvas cúbicas paramétricas
- Para um valor t_1 fixo, $Q(s, t_1)$ é uma curva porque $G(t_1)$ é constante
- Variando-se o argumento de G tais que as curvas sejam arbitrariamente próximas define-se uma superfície

Superfícies Bicúbicas Paramétricas

Como $G(t)=T\cdot M\cdot G$, usando a identidade $(A \bullet B \bullet C)^T = A^T \bullet B^T \bullet C^T$ temos que

$$Q(s,t)=S\cdot M\cdot G\cdot M^T\cdot T^T,\quad 0\leq s,t\leq 1$$

onde $G=G^T$

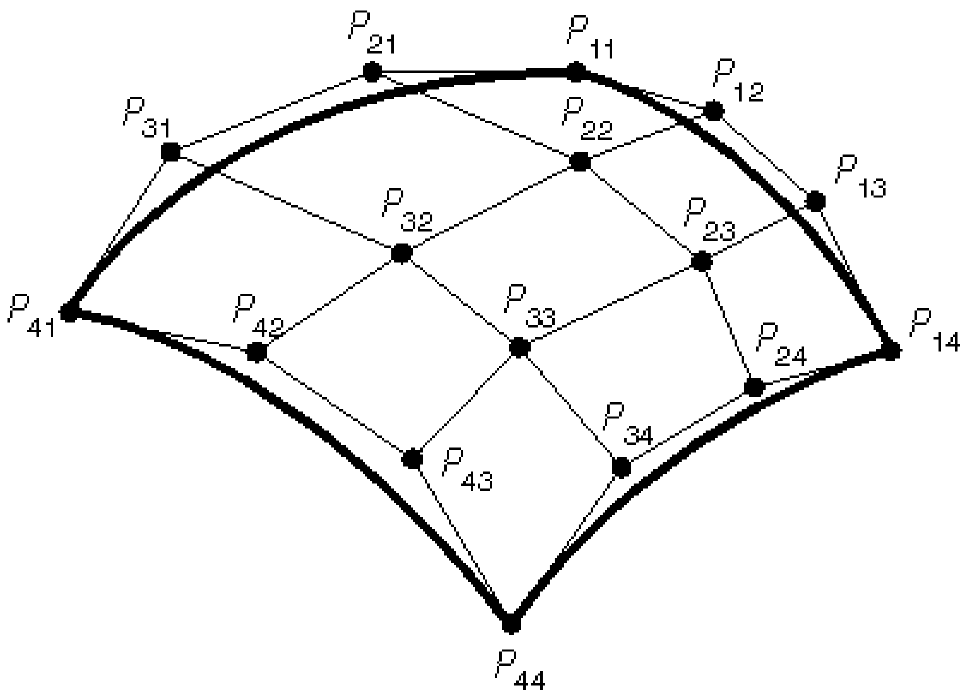
e individualmente

$$x(s,t)=S\cdot M\cdot G_x^T\cdot M^T\cdot T^T,$$

$$y(s,t)=S\cdot M\cdot G_y^T\cdot M^T\cdot T^T,$$

$$z(s,t)=S\cdot M\cdot G_z^T\cdot M^T\cdot T^T,\quad 0\leq s,t\leq 1$$

Superfícies de Bézier



- Superfície de Bézier é dada por

$$x(s,t) = S \cdot M \cdot G_x^T \cdot M^T \cdot T^T,$$

$$y(s,t) = S \cdot M \cdot G_y^T \cdot M^T \cdot T^T,$$

$$z(s,t) = S \cdot M \cdot G_z^T \cdot M^T \cdot T^T,$$

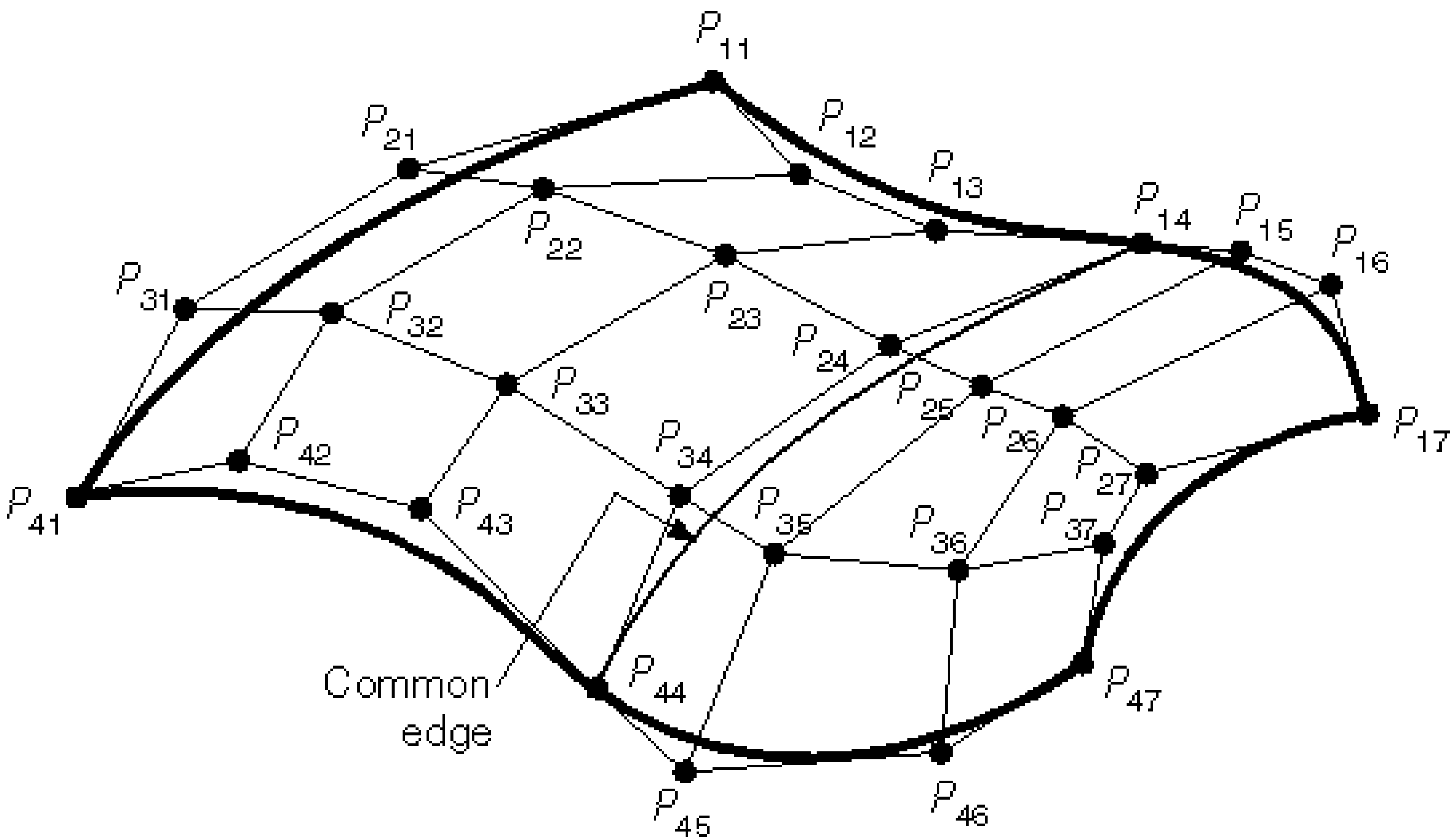
$$0 \leq s,t \leq 1$$

e é definida por 16 pontos de controle (matriz $\boldsymbol{G}$)

Superfícies de Bézier

- Alguns dos pontos de controle interpolam a superfície, e tangentes podem ser controladas explicitamente
- Propriedade do fecho convexo e fácil subdivisão são herdadas das curvas de Bézier
- Continuidades C^0 e G^0 entre patches são garantidas escolhendo-se os 4 pontos de controle iguais na borda
- Continuidade G^1 ocorre quando dois grupos de 4 pontos dos dois lados da borda são colineares com os pontos da borda

Superfícies de Bézier



Superfícies de B-Splines

- As equações para superfícies B-splines são obtidas de modo similar
- Em superfícies B-splines, continuidade C^2 é automática, mas deve-se evitar pontos de controle duplicados, que criam discontinuidades
- Superfícies de B-splines bicúbicas não-uniformes e racionais são análogas a suas formas cúbicas

Normais

Normais a uma superfície bicúbica são calculadas através do produto vetorial das derivadas da superfície *Q*(*s*,*t*) em relação a *s* e *t*

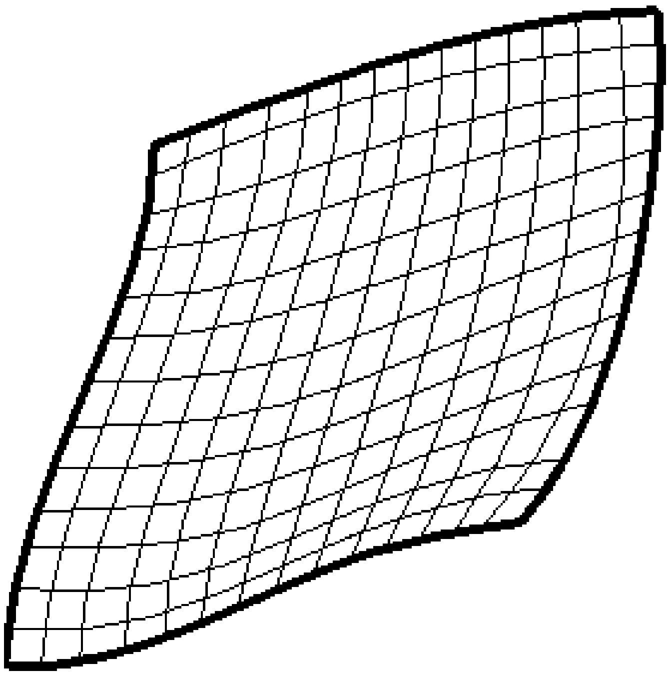
$$\frac{\partial}{\partial s} Q(s,t) = \frac{\partial}{\partial s}\left(S \cdot M \cdot G \cdot M^T \cdot T^T\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(S\right) \cdot M \cdot G \cdot M^T \cdot T^T$$

$$= \left[3s^2 \; 2s \; 1 \; 0\right] \cdot M \cdot G \cdot M^T \cdot T^T$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(s,t) = \frac{\partial}{\partial s}\left(S \cdot M \cdot G \cdot M^T \cdot T^T\right) = \frac{\partial}{\partial s} S \cdot M \cdot G \cdot M^T \cdot \left(T^T\right)$$

$$= S \cdot M \cdot G \cdot M^T \cdot \left[3t^2 \; 2t \; 1 \; 0\right]^T$$

Desenhando Superfícies



- Superfícies podem ser desenhadas por avaliação iterativa dos polinômios bicúbicos ou por subdivisão (avaliação adaptativa dos polinômios)
- Avaliação iterativa é ideal para desenho em wireframes

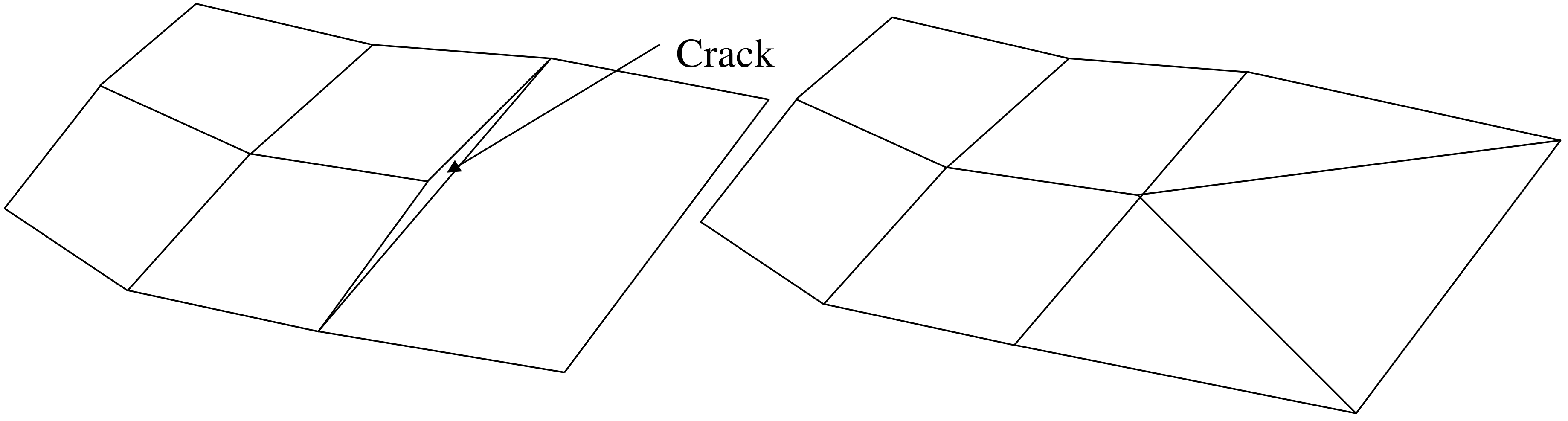
Desenhando Superfícies

- Método das diferenças é bem mais vantajoso no desenho de superfícies do que no desenho de curvas
- Subdivisão de superfícies também é uma extensão do procedimento para desenho de curvas, e é mais simples no caso das curvas de Bézier
- O teste é feito calculando-se um plano que passa por 3 pontos de controle e verificando se os outros 13 pontos estão a uma distância menor que ε do mesmo

Desenhando Superfícies

- Subdivisão geralmente é feita em um dos parâmetros seguida da divisão das duas partes no outro parâmetro, mas pode ser feita somente em um parâmetro se a superfície for plana no outro parâmetro
- Subdivisão pode gerar buracos no caso de patches adjacentes terem diferentes níveis de subdivisão, e podem ser eliminados por subdivisão até um nível fixo ou escolhendo um ε suficientemente pequeno, mas ambos incorrem em subdivisões desnecessárias
- Outra abordagem ajusta quadriláteros vizinhos que tem este problema

Desenhando Superfícies



Resumo

Curvas cúbicas e superfícies bicúbicas paramétricas por partes são muito usadas em CG porque:

- Permitem múltiplos valores para um único valor de *x* ou *y*
- Representam inclinações infinitas
- Possuem controle local
- Podem aproximar ou interpolar pontos de controle
- São computacionalmente eficientes
- Permitem refinamento por subdivisão e adição de nós, facilitando display e manipulação interativa
- São facilmente transformados através da transformação dos pontos de controle

Superfícies Quádraticas

Em aplicações onde somente superfícies quadráticas são utilizadas, como modelagem molecular, pode ser vantajoso utilizar superfícies quádraticas

$$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fxz + 2gx + 2hy + 2jz + k = 0$$

Vantagens:

- Cálculo simples da normal da superfície
- Teste se um ponto está na superfície da quádrica
- Cálculo de *z* dados *x* e *y*
- Cálculo de interseções de duas superfícies