0.1. Estrategias conservadoras y máximo asegurable

0.1.1. Definición

Para un jugador en particular, se dice que "x" es el valor *asegurable* de una de sus estrategias cuando, sin importar qué hagan los demás jugadores, su ganancia con la estrategia elegida es al menos "x". Dicho de otra forma, el asegurable de una estrategia, es lo peor que le puede suceder al jugador en turno si elige dicha estrategia.

Ahora bien, el jugador tiene varias estrategias disponibles para elegir, por lo que que para cada estrategia tendrá un asegurable. Si se agrupan todos esos asegurables se tendrá el *conjunto de valores asegurables* para el jugador.

Consecuencia de lo anterior, en el conjunto habrá un asegurable que sea mayor o igual a todos los demás. Ese valor es el *máximo asegurable*.

Finalmente, hay que recordar que el máximo asegurable del jugador es el asegurable de una o varias estrategias del jugador. Esa o esas estrategias se les denomina *estrategia conservadora*.

Las nociones anteriores se definen formalmente a continuación.

Definición 0.1.1.1. .

Se dice que x es asegurable en EP para j si

$$\exists \hat{\sigma}^j \in D_j : \varphi_j(\ \sigma|\hat{\sigma}^j)\ \geq x, \forall \sigma \in D, x \in R$$

Adicionalmente, se define al conjunto de los valores asegurables para j, correspondientes a todos los $\sigma^j \in D_j$, como

$$A'_j = \{x \in R | x \textit{ es asegurable en EP para } j\}$$

A'_j es un subconjunto de los reales no vacío y acotado superiormente, por lo que tiene un supremo que se denomina máximo asegurable en EP, se expresa como v'_j y se define como:

$$v'_j = \max_{\sigma^j \in D_j} \min_{\sigma \in D} \varphi_j(\ \sigma|\sigma^j)$$

Finalmente $\hat{\sigma}^j$ es una estrategia conservadora en EP para el jugador j, si:

$$\varphi_j(\ \sigma|\hat{\sigma}^j)\ \geq v'_j, \hat{\sigma}^j \in D_j, \forall \sigma \in D$$

Existen estrategias conservadoras para cualquier juego y para cada jugador participante.

0.1.2. Contexto de un problema

Para esta sección se vuelve a emplear el ejemplo *Empresas tecnológicas y política.*

Retomando, el conflicto se describe con la siguiente matriz de pagos:
Ganancias del año pasado: 6 para "G" y 3 para "H".

$$\begin{array}{ll} \mathrm{G}\backslash\mathrm{H} & \begin{array}{cc} \quad Competir & \quad No\ Competir \end{array} \\ \begin{array}{l} Vetar \\ No\ Vetar \end{array} & \begin{pmatrix} (-2,-2) & (6,-2) \\ (4,4) & (5,3) \end{pmatrix} \end{array}$$

** Todas las unidades representan miles de millones de dolares.*

Dado que el juego ya ha sido cargado, se puede visualizar en R en forma matricial.

```
> repMatr(empresasTec)

     J1\\J2  Competir  No Competir
     Vetar   (-2,-2)        (6,-2)
No Vetar       (4,4)          (5,3)
```

0.1.3. Solución del problema en forma teórica

Se encontrarán los asegurables para el jugador 1, que es "G".

$$\varphi_1(\ \sigma|\hat{\sigma}^1 = \text{“Vetar”})\ = \{-2, 6\} \geq -2, \forall \sigma \in D$$

$$\therefore\ \text{-2 es el asegurable para la estrategia “Vetar”.}$$

$$\varphi_1(\ \sigma|\hat{\sigma}^1 = \text{“No Vetar”})\ = \{4, 5\} \geq 4, \forall \sigma \in D$$

$$\therefore\ \text{4 es el asegurable para la estrategia “No Vetar”.}$$

Como consecuencia inmediata, se tiene el conjunto de valores asegurables para el jugador 1, "G", y el máximo asegurable.

$$A_1' = \{-2, 4\}$$

$$\therefore v'_1 = max(\ A'_1)\ = 4$$

Finalmente, la estrategia conservadora se comprueba por la definición:

$$\varphi_1(\ \sigma|\hat{\sigma}^1 = \text{“No Vetar”})\ = \{4,5\} \geq 4 = v'_1, \forall \sigma \in D$$

$\therefore \hat{\sigma}^1 =$ “No Vetar” es la estrategia conservadora de “G” para el juego dado.

Se encontrarán los asegurables para el jugador 2, que es “H”.

$$\varphi_2(\ \sigma|\hat{\sigma}^1 = \text{“Competir”})\ = \{-2,4\} \geq -2, \forall \sigma \in D$$

$\therefore$ -2 es el asegurable para la estrategia “Competir”.

$$\varphi_2(\ \sigma|\hat{\sigma}^1 = \text{“No Competir”})\ = \{-2,3\} \geq -2, \forall \sigma \in D$$

$\therefore$ -2 es el asegurable para la estrategia “No Competir”.

Como consecuencia inmediata, se tiene el conjunto de valores asegurables para el jugador 2, “H”, y el máximo asegurable.

$$A'_2 = \{-2,-2\}$$

$$\therefore v'_2 = max(\ A'_2)\ = -2$$

Finalmente, se tienen dos estrategias conservadoras, las cuales se comprueban por la definición:

$$\varphi_2(\ \sigma|\hat{\sigma}^2 = \text{“Competir”})\ = \{-2,4\} \geq -2 = v'_2, \forall \sigma \in D$$

$$\varphi_2(\ \sigma|\hat{\sigma}^2 = \text{“No Competir”})\ = \{-2,3\} \geq -2 = v'_2, \forall \sigma \in D$$

$\therefore \hat{\sigma}^2_1 =$ “Competir” $\wedge\ \hat{\sigma}^2_2 =$ “No Competir” son estrategias conservadoras de “G”

0.1.4. Solución del problema con programación

Resolviendo ordenadamente se tienen los siguientes comandos y sus respectivos resultados. Hay que recordar que se consideró a “G” como el jugador 1 y a “H” como el jugador 2.

- Se obtiene el asegurable para el jugador 1, si elige la estrategia “Vetar”

```
> asegurable(empresasTec,1,"Vetar")
    -2
```

- Se obtiene el asegurable para el jugador 1, si elige la estrategia "No Vetar"

```
> asegurable(empresasTec,1,"No Vetar")
    4
```

- Se obtiene el asegurable para el jugador 2, si elige la estrategia "Competir"

```
> asegurable(empresasTec,2,"Competir")
    -2
```

- Se obtiene el asegurable para el jugador 2, si elige la estrategia "No Competir"

```
> asegurable(empresasTec,2,"No Competir")
    -2
```

- Se obtiene el conjunto de asegurables para el jugador 1

```
> conjAseg_j(empresasTec,1)
    conj    estr
    -2       Vetar
     4      No Vetar
```

- Se obtiene el conjunto de asegurables para el jugador 2

```
> conjAseg_j(empresasTec,2)
    conj        estr
    -2        Competir
    -2     No Competir
```

- Se obtiene el máximo asegurable para el jugador 1

```
> maxAseg(empresasTec,1)
    4
```

- Se obtiene el máximo asegurable para el jugador 2

```
> maxAseg(empresasTec,2)
    -2
```

- Se obtiene la estrategia conservadora para el jugador 1

```
> estraConserv(empresasTec,1)
    "No Vetar"
```

- Se obtiene la estrategia conservadora para el jugador 2

```
> estraConserv(empresasTec,2)
    "Competir"    "No Competir"
```

0.1.5. Otros problemas para ampliar

El juego que sirvió de ejemplo para presentar las capacidades de los programas permite probar que la rutina es eficaz en juegos dónde hay múltiples *estrategias asegurables* para algún jugador, es decir, encontrará tantas *estrategias asegurables* como existan en el juego. En particular para este juego se observa que para el segundo jugador sus dos estrategias posibles resultan ser *estrategias conservadoras*.

Adicionalmente, es de especial atención probar las rutinas con aquellos juegos en los que hay más de dos jugadores, como por ejemplo, el “Disparejo”, entre otros.