



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ - UFPI  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA - CCN  
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO - DC  
CURSO DE EXTENSÃO: SISTEMAS FUZZY  
PROFESSOR: RICARDO DE ANDRADE/PEDRO DE  
ALCANTARA

Lista de Exercícios – Unidade V (Operações e Agregações de Conjuntos Fuzzy)

Exercícios de Fixação

- 1 – Considere os conjuntos fuzzy  $F$ ,  $G$  e  $H$ , definidos no universo de discurso  $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , como segue:  $F = 0,4/1 + 1,0/2 + 1,0/3 + 0,4/4$ ;  $G = 0,3/3_1 + 0,5/4 + 0,9/5 + 0,4/6 + 0,1/7$ ;  $H = \frac{x}{x+1}/x$ .
- a) Determine  $F \cap G$ ,  $F \cap H$  e  $H \cap G$ , usando as  $t$ -normas mínimo, produto, Lukasiewicz e produto drástico;
- b) Determine  $F \cup G$ ,  $F \cup H$  e  $H \cup G$ , usando as  $s$ -normas máximo, soma probabilística, Lukasiewicz e soma drástica;
- c) Calcule a cardinalidade dos conjuntos  $F$ ,  $G$  e  $H$ ;
- d) Determine o conjunto resultante da agregação de  $F$ ,  $G$  e  $H$ , usando os operadores medianos (média aritmética, média harmônica, média geométrica, mínimo e máximo);
- e) Determine o conjunto complemento dos conjuntos  $F$ ,  $G$  e  $H$ , usando os operadores padrão (complemento de um), *threshold* (para  $a = 0,6$  e  $a = 0,95$ ), Sugeno (para  $\lambda = 0,5$  e  $\lambda = 2$ ) e Yager (para  $w = 4$ ).

Exercícios Propostos

- 2 – Considere os conjuntos fuzzy  $F$ ,  $G$  e  $H$  definidos no universo de discurso  $U = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 10\}$ , os quais são representados pelas seguintes funções de pertinência.

$$\mu_F^{(x)} = \begin{cases} x - 4, & \text{se } 4 \leq x \leq 5 \\ -x + 6, & \text{se } 5 < x \leq 6 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\mu_G^{(x)} = \begin{cases} 0,5x - 1,5, & \text{se } 3 \leq x \leq 5 \\ -0,5x + 3,5, & \text{se } 5 < x \leq 7 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\mu_H^{(x)} = \begin{cases} (x - 1, 0)/2, & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ 1, 0, & \text{se } 3 < x \leq 4 \\ (-x + 6, 0)/2, & \text{se } 4 < x \leq 6 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- a) Discretize o universo de discurso em 21 pontos de discretização. Para o universo de discurso discretizado, determine os conjuntos fuzzy por meio da representação/notação adequada ( $F = \sum_x \mu_F(x)/x$ ). A partir desse momento, considere os conjuntos fuzzy  $F$ ,  $G$  e  $H$ , definidos em  $U$  discretizado;
- b) Esboce o gráfico da função de pertinência dos conjuntos  $F$ ,  $G$  e  $H$ ;
- c) Verifique quais dos conjuntos fuzzy são conjuntos convexos;
- d) Determine  $F \cap G$ ,  $F \cap H$  e  $H \cap G$ , usando as  $t$ -normas mínimo, produto, Lukasiewicz e produto drástico;



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ - UFPI  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA - CCN  
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO - DC  
CURSO DE EXTENSÃO: SISTEMAS FUZZY  
PROFESSOR: RICARDO DE ANDRADE/PEDRO DE  
ALCANTARA

- e) Determine  $F \cup G$ ,  $F \cup H$  e  $H \cup G$ , usando as  $s$ -normas máximo, soma probabilística, Lukasiewicz e soma drástica;
- f) Calcule a cardinalidade dos conjuntos  $F$ ,  $G$  e  $H$ ;
- g)  $F \subseteq G$ ?  $G \subseteq F$ ?  $H \subseteq F$ ?  $H \subseteq G$ ?
- h)  $F = G$ ?  $H = F$ ?  $H = G$ ?
- i) Determine o grau de igualdade de  $F$  e  $G$ , de  $F$  e  $H$ , e de  $G$  e  $H$ ;
- j) Determine o grau de inclusão de  $F$  e  $G$  ( $|F \subseteq G|$ ), de  $F$  e  $H$  ( $|F \subseteq H|$ ), e de  $G$  e  $H$  ( $|G \subseteq H|$ );
- k) Determine o conjunto resultante da agregação de  $F$ ,  $G$  e  $H$ , usando os operadores medianos (média aritmética, média harmônica, média geométrica, mínimo e máximo);
- l) Determine o conjunto complemento dos conjuntos  $F$ ,  $G$  e  $H$ , usando os operadores padrão (complemento de um), *threshold* (para  $a = 0,3$  e  $a = 0,75$ ), Sugeno (para  $\lambda = -0,5$  e  $\lambda = 1$ ) e Yager (para  $w = 2$ ).
- 3 - Verifique se a função  $N(x) = \frac{1}{2} \cdot \left\{ 1 + \sin\left[(2x + 1) \cdot \frac{\pi}{2}\right] \right\}$  pode ser usada (ou seja, satisfaz os requisitos) para generalizar a noção de complemento.
- 4 - Considere a função  $g: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$  que define os operadores medianos de agregação:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[p]{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i)^p}; p \in R, p \neq 0.$$

- a) Demonstre que para  $p \rightarrow 0$ , tem-se:  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N x_i}$ ;
- b) Demonstre que para  $p \rightarrow -\infty$ , tem-se:  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;
- c) Demonstre que para  $p \rightarrow \infty$ , tem-se:  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .
- 5 - Dados dois conjuntos *fuzzy* convexos  $F$  e  $G$ . Determine se a interseção ( $F \cap G$ ) e/ou a união ( $F \cup G$ ) dos conjuntos resultam em conjuntos *fuzzy* convexos.

---

Exercícios para Implementação Computacional

- 6 - Elabore os procedimentos computacionais para determinar a interseção, a união e o complemento de conjuntos *fuzzy*. Adicionalmente, elabore os procedimentos computacionais para realizar a agregação de conjuntos *fuzzy*. Para a operação de interseção, implemente computacionalmente as  $t$ -normas mínimo, produto, Lukasiewicz e produto drástico. Para a operação de união, implemente computacionalmente as  $s$ -normas máximo, soma probabilística, Lukasiewicz e soma drástica. Para a operação de complemento, considere os operadores padrão (complemento de um), *threshold*, Sugeno e Yager. Para a operação de agregação, considere os operadores medianos (média aritmética, média



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ - UFPI**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA - CCN**  
**DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO - DC**  
**CURSO DE EXTENSÃO: SISTEMAS *FUZZY***  
**PROFESSOR: RICARDO DE ANDRADE/PEDRO DE**  
**ALCANTARA**

harmônica, média geométrica, mínimo e máximo) e operadores compensatórios (produto compensatório e soma compensatória).

7 – Sejam o universo de discurso  $U = [0,10]$ , e os conjuntos *fuzzy* definidos pelas seguintes funções de pertinência:

$F_1 = (x, 1, 3, 5)$ , função de pertinência triangular;

$F_2 = (x, 1, 2, 4)$ , função de pertinência triangular;

$F_3 = (x, 1, 4, 6)$ , função de pertinência triangular;

$F_4 = (x, 3, 4, 5, 7)$ , função de pertinência trapezoidal;

$F_5 = (x, 1, 3, 2)$ , função de pertinência gaussiana.

a) Imprima os gráficos das funções de pertinência cada um dos cinco conjuntos *fuzzy*, considerando 50, 500 e 1000 discretizações realizadas (um gráfico para cada conjunto *fuzzy* para cada discretização);

b) Considerando 50 pontos de discretização, imprima o gráfico da função de pertinência do conjunto *fuzzy* resultante da união dos cinco conjuntos *fuzzy* utilizando as s-normas (máximo, soma probabilística, Lukasiewicz e soma drástica). Gere um gráfico para a aplicação de cada s-norma, ou seja, um gráfico para cada conjunto *fuzzy* resultante da união;

c) Considerando 50 pontos de discretização, imprima o gráfico da função de pertinência do conjunto *fuzzy* resultante da interseção dos cinco conjuntos *fuzzy* utilizando as t-normas (mínimo, produto, Lukasiewicz e produto drástico). Gere um gráfico para a aplicação de cada t-norma, ou seja, um gráfico para cada conjunto *fuzzy* resultante da interseção;

d) Considerando 50 pontos de discretização, imprima o gráfico da função de pertinência do conjunto *fuzzy* resultante da operação de complemento dos cinco conjuntos *fuzzy* utilizando o operador padrão/complemento de um. Gere um gráfico para cada conjunto *fuzzy* resultante do complemento (inclua o conjunto *fuzzy* original e o seu complemento no mesmo gráfico);

e) Considerando 50 pontos de discretização, imprima o gráfico da função de pertinência do conjunto *fuzzy* resultante da agregação dos cinco conjuntos *fuzzy* utilizando os operadores medianos (média aritmética, média geométrica, mínimo e máximo). Gere um gráfico para a aplicação de cada operador mediano de agregação.

8 – Considere os conjuntos *fuzzy*  $F$ ,  $G$  e  $H$  definidos no universo de discurso  $U = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 10\}$ , os quais são representados pelas seguintes funções de pertinência.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ - UFPI  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA - CCN  
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO - DC  
CURSO DE EXTENSÃO: SISTEMAS FUZZY  
PROFESSOR: RICARDO DE ANDRADE/PEDRO DE  
ALCANTARA

$$\mu_F^{(x)} = \begin{cases} x - 4, & \text{se } 4 \leq x \leq 5 \\ -x + 6, & \text{se } 5 < x \leq 6 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\mu_G^{(x)} = \begin{cases} 0,5x - 1,5, & \text{se } 3 \leq x \leq 5 \\ -0,5x + 3,5, & \text{se } 5 < x \leq 7 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\mu_H^{(x)} = \begin{cases} (x - 1, 0)/2, & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ 1, 0, & \text{se } 3 < x \leq 4 \\ (-x + 6, 0)/2, & \text{se } 4 < x \leq 6 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Discretize o universo de discurso em 500 pontos de discretização. Esboce o gráfico da função de pertinência dos conjuntos  $F$ ,  $G$  e  $H$ ; (imprima um único gráfico contemplando os 03 conjuntos *fuzzy*)
- Verifique quais dos conjuntos *fuzzy* são conjuntos convexos;
- Determine  $F \cap G$ ,  $F \cap H$  e  $H \cap G$ , usando as  $t$ -normas mínimo, produto, Lukasiewicz e produto drástico. Imprima o gráfico da função de pertinência do conjunto *fuzzy* resultante da interseção dos conjuntos *fuzzy*. Gere um gráfico para a aplicação de cada  $t$ -norma, ou seja, um gráfico para cada conjunto *fuzzy* resultante da interseção;
- Determine  $F \cup G$ ,  $F \cup H$  e  $H \cup G$ , usando as  $s$ -normas máximo, soma probabilística, Lukasiewicz e soma drástica. Imprima o gráfico da função de pertinência do conjunto *fuzzy* resultante da união dos conjuntos *fuzzy*. Gere um gráfico para a aplicação de cada  $s$ -norma, ou seja, um gráfico para cada conjunto *fuzzy* resultante da união;
- Calcule a cardinalidade dos conjuntos  $F$ ,  $G$  e  $H$ ;
- $F \subseteq G$ ?  $G \subseteq F$ ?  $H \subseteq F$ ?  $H \subseteq G$ ?
- $F = G$ ?  $H = F$ ?  $H = G$ ?
- Determine o grau de igualdade de  $F$  e  $G$ , de  $F$  e  $H$ , e de  $G$  e  $H$ ;
- Determine o grau de inclusão de  $F$  e  $G$  ( $|F \subseteq G|$ ), de  $F$  e  $H$  ( $|F \subseteq H|$ ), e de  $G$  e  $H$  ( $|G \subseteq H|$ );
- Determine o conjunto resultante da agregação de  $F$ ,  $G$  e  $H$ , usando os operadores medianos (média aritmética, média harmônica, média geométrica, mínimo e máximo). Imprima o gráfico da função de pertinência do conjunto *fuzzy* resultante da agregação dos conjuntos *fuzzy* utilizando os operadores medianos (média aritmética, média harmônica, média geométrica, mínimo e máximo). Gere um gráfico para a aplicação de cada operador mediano de agregação;
- Determine o conjunto complemento dos conjuntos  $F$ ,  $G$  e  $H$ , usando os operadores padrão (complemento de um), *threshold* (para  $\alpha = 0,3$  e  $\alpha = 0,75$ ), Sugeno (para  $\lambda = -0,5$  e  $\lambda = 1$ ) e Yager (para  $w = 2$ ). Imprima o gráfico da função de pertinência do conjunto *fuzzy* resultante da operação de complemento dos conjuntos *fuzzy*. Gere um gráfico para a aplicação de cada operador complemento;



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ - UFPI**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA - CCN**  
**DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO - DC**  
**CURSO DE EXTENSÃO: SISTEMAS *FUZZY***  
**PROFESSOR: RICARDO DE ANDRADE/PEDRO DE**  
**ALCANTARA**

---

**OBSERVAÇÕES:**

1. As folhas contendo os resultados dos Exercícios devem ser entregue em seqüência e grampeadas (não use clips). A lista de exercícios pode ser realizada (resolvida) em duplas. Se for o caso, entregar somente uma resolução com o nome dos dois integrantes. Os alunos devem assinar (ou rubricar) em todas as folhas de resolução.
2. Em se tratando de Lista de Exercícios que tenha implementação computacional, anexe (de forma impressa) o programa fonte referente à implementação computacional.