Problema de oscilador amortiguado crítico

La entrada a un centro comercial tiene una puerta batiente de 15 kg con un resorte en su eje que hace que al apartarla de la posición de equilibrio (puerta cerrada) aparezca una fuerza recuperadora que la vuelve a dicha posición. Comprobamos que tirando del pomo, situado a 90 cm del eje de la puerta, necesitamos hacer una fuerza de 18 N para abrirla un ángulo de 10º. Para evitar que la puerta quede batiendo de un lado a otro cada vez que alguien la abra, se le instala un amortiguador de forma que el sistema se encuentre en condiciones de amortiguamiento crítico. Suponiendo que el muelle se comporta de forma ideal:

(a) Calcule el periodo de oscilación de la puerta en ausencia de amortiguación.
(b) Calcule el coeficiente de amortiguación del sistema.
(c) Si la puerta se encuentra abierta un ángulo de 20º, ¿Qué velocidad mínima tendremos que imprimir al pomo de la puerta, en dirección a la posición de equilibrio, para que esta pase por debajo de su marco? Esto es, que cruce por la posición de equilibrio antes de volver para cerrarse.

a) Calcule el periodo de oscilación de la puerta en ausencia de amortiguación.

Para calcular la constante k, usamos la ley de Hooke y la onda armónica simple.
No es un movimiento lineal así que x = θ

$$k = \frac{F}{r\theta}$$

$$k = \frac{18\ \mathrm{N}}{0.9\ \mathrm{m} \cdot \frac{\pi}{18}} = \frac{18 \times 18}{0.9 \times \pi} = 114.6\ \mathrm{N/m}$$

$$F = -kx$$

$$F = ma$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Mediante la ecuación diferencial de la ecuación armónica sacar la velocidad angular.

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$-m\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) = -kA\cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{15}{114,59}} = 2,2733s$$

b) Calcule el coeficiente de amortiguación del sistema.

El coeficiente de amortiguación se define como:

$$\gamma \equiv \frac{b}{2m}$$

despejamos y sustituimos

$$\gamma = 2\sqrt{k \cdot m}$$

$$\gamma = 2\sqrt{114.6 \cdot 15} = 82.92 \text{ kg/s}$$

c) Si la puerta se encuentra abierta un ángulo de 20º, ¿Qué velocidad mínima tendremos que imprimir al pomo de la puerta, en dirección a la posición de equilibrio, para que esta pase por debajo de su marco? Esto es, que cruce por la posición de equilibrio antes de volver para cerrarse.

La velocidad mínima de la puerta para que y cruza la posición de equilibrio desde un ángulo de $20^\circ = \frac{\pi}{9}$rad.

La energía potencial elástica del resorte cuando la puerta está en un ángulo θ es:

$$\text{E}_{\text{pe}} = \frac{1}{2} k r^2 \theta^2$$

Sustituimos

$$\text{E}_{\text{pe}} = \frac{1}{2} \cdot 114.6 \cdot (0.9)^2 \cdot \left(\frac{\pi}{9}\right)^2 = 5.63 \text{ J}$$

Esta energía potencial se convierte en energía cinética cuando la puerta cruza la posición de equilibrio. La energía cinética está dada por:

$$\text{E}_{\text{c}} = \frac{1}{2} m v^2$$

Igualamos

$$5.63 \text{ J} = \frac{1}{2} \cdot 15 \text{ kg} \cdot v^2$$

Despejamos v :

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 5.63}{15}} = 0.87 \text{ m/s}$$

La velocidad mínima que se debe imprimir al pomo de la puerta para que cruce la posición de equilibrio es $v = 0.87$ m/s.