Curso 1: Teoría de inversión y programación en Python

H. Sánchez-Reyes

ISTerre, Université de Grenoble Alpes, France
IRD - UGA-ISTerre BQR Project

¡Gracias por la bienvenida!

7-18 de Agosto de 2023
Lima, Perú

Recordando algebra lineal

Vectores, matrices, elementos y operaciones básicas

Vectores:

$$v = [2, 4, 5] \qquad \text{or,} \qquad n = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Vectores:

$$v = [2, 4, 5] \qquad \text{or,} \qquad n = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es la dimensión de estos vectores?

Vectores, matrices, elementos y operaciones básicas

Vectores:

$$v = [2, 4, 5] \qquad \text{or,} \qquad n = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es la dimensión de estos vectores?

$$v = [2, 4, 5]_{1\times 3} \qquad \text{or,} \qquad n = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

Vectores, matrices, elementos y operaciones básicas

Vectores:

$$v = [2, 4, 5] \qquad \text{or,} \qquad n = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es la dimensión de estos vectores?

$$v = [2, 4, 5]_{1\times 3} \qquad \text{or,} \qquad n = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

También definimos los transpuestos:

Vectores:

$$v = [2, 4, 5] \qquad \text{or,} \qquad n = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es la dimensión de estos vectores?

$$v = [2, 4, 5]_{1\times 3} \qquad \text{or,} \qquad n = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

También definimos los transpuestos:

$$v^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}_{3\times 1} \qquad \text{or,} \qquad n^T = [1, 5, 7]_{1\times 3}$$

Matrix:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Vectores, matrices, elementos y operaciones básicas

Matrix:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Matrices con definiciones importantes

Identidad:

Vectores, matrices, elementos y operaciones básicas

Matrix:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Matrices con definiciones importantes

$$\text{Identidad:} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{es decir}, I_{ij} = 1, \text{si} \;\; i = j, \text{sino} \;\; I_{ij} = 0$$

Vectores, matrices, elementos y operaciones básicas

Matrix:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Matrices con definiciones importantes

Identidad: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, es decir, $I_{ij} = 1$, si $i = j$, sino $I_{ij} = 0$

Simétricas:

Matrix:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Matrices con definiciones importantes

Identidad: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, es decir, $I_{ij} = 1$, si $i = j$, sino $I_{ij} = 0$

Simétricas: siendo X una matríz $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$

X es simétrica sí, $x_{ij} = x_{ji}$

Invertible:

Vectores, matrices, elementos y operaciones básicas

Invertible: si, $\det(M) \neq 0$ entonces, M^{-1} (la inversa de M) existe, tal que

$$M^{-1}M = I = MM^{-1}$$

Vectores, matrices, elementos y operaciones básicas

Invertible: si, $\det(M) \neq 0$ entonces, M^{-1} (la inversa de M) existe, tal que

$$M^{-1}M = I = MM^{-1}$$

$$\underbrace{M^{-1}}_{pre-multiplicar} M = I = M \underbrace{M^{-1}}_{post-multiplicar}$$

Vectores, matrices, elementos y operaciones básicas

Sumas (y restas):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ then}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{M} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+0 & 2-1 \\ 0+0 & 1+2 & 0+0 \\ 2-1 & 0+0 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Sumas (y restas):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ then}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{M} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+0 & 2-1 \\ 0+0 & 1+2 & 0+0 \\ 2-1 & 0+0 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

es decir, $S_{ij} = M_{ij} + N_{ij}$ y $D_{ij} = M_{ij} - N_{ij}$

Vectores, matrices, elementos y operaciones básicas

Sumas (y restas):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ then}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{M} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+0 & 2-1 \\ 0+0 & 1+2 & 0+0 \\ 2-1 & 0+0 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

es decir, $S_{ij} = M_{ij} + N_{ij}$ y $D_{ij} = M_{ij} - N_{ij}$

Multiplicaciones:

Sumas (y restas):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ then}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{M} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+0 & 2-1 \\ 0+0 & 1+2 & 0+0 \\ 2-1 & 0+0 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

es decir, $S_{ij} = M_{ij} + N_{ij}$ y $D_{ij} = M_{ij} - N_{ij}$

Multiplicaciones:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 1 \quad 2 \quad 2} \\ 2 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1{\times}1{+}1{\times}2{+}2{\times}1{+}2{\times}2} & 1{\times}2{+}1{\times}1{+}2{\times}2{+}2{\times}1 \\ 2{\times}1{+}2{\times}2{+}3{\times}1{+}3{\times}2 & 2{\times}2{+}2{\times}1{+}3{\times}2{+}3{\times}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{9} & 9 \\ 15 & 15 \end{pmatrix}$$

Vectores, matrices, elementos y operaciones básicas

Sumas (y restas):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ then}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{M} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+0 & 2-1 \\ 0+0 & 1+2 & 0+0 \\ 2-1 & 0+0 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

es decir, $S_{ij} = M_{ij} + N_{ij}$ y $D_{ij} = M_{ij} - N_{ij}$

Multiplicaciones:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 1 \quad 2 \quad 2} \\ 2 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1\times1+1\times2+2\times1+2\times2} & 1\times2+1\times1+2\times2+2\times1 \\ 2\times1+2\times2+3\times1+3\times2 & 2\times2+2\times1+3\times2+3\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{9} & 9 \\ 15 & 15 \end{pmatrix}$$

es decir,

$$P_{ij} = \sum_{k=1}^{K} M_{ik} N_{kj}$$

Determinante de una matríz M:

Determinante de una matríz M:

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\cdots\sum_{q=1}^{N} e^{ijk\ldots q} M_{1i}M_{2j}M_{3k}\ldots M_{Nq}$$

siendo $e^{ijk\ldots q} + 1$ cuando (i, j, k, ... , q) son permutations pares de (1, 2, 3, ... , N), y -1 cuando son permutaciones impares, y cero en otro caso.

Determinante de una matríz M:

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\cdots\sum_{q=1}^{N} e^{ijk\ldots q} M_{1i} M_{2j} M_{3k} \ldots M_{Nq}$$

siendo $e^{ijk\ldots q} + 1$ cuando (i, j, k, ... , q) son permutations pares de (1, 2, 3, ... , N), y -1 cuando son permutaciones impares, y cero en otro caso.

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Y la matriz adjunta de la matriz A es:

La matriz adjunta es aquella en la que cada elemento a_{ij} de la matriz A se sustituye por su adjunto. Se llama adjunto del elemento a_{ij} al menor complementario anteponiendo:

- El signo es + si i+j es par.
- El signo es - si i+j es impar.

¿Cuál es la matriz adjunta de A? Siendo A:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Y la matriz adjunta de la matriz A es:

La matriz adjunta es aquella en la que cada elemento a_{ij} de la matriz A se sustituye por su adjunto. Se llama adjunto del elemento a_{ij} al menor complementario anteponiendo:

- El signo es + si i+j es par.
- El signo es - si i+j es impar.

¿Cuál es la matriz adjunta de A? Siendo A:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

El primer elemento de adj(A) se encuentra sustituyendo a a_{11} por su menor complementario:

El menor complementario de a a_{11}

$$\begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} \end{bmatrix}$$

siendo i=1 y j=1
i+j=2, es par, entonces

$$\text{adj(A)} = \begin{bmatrix} +a_{22} & \\ & \end{bmatrix}$$

suponiendo que:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

¿Cuál es la matríz A^{-1}? (tienen 5 min):

suponiendo que:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

¿Cuál es la matríz A^{-1}? (tienen 5 min):

suponiendo que:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

¿Cuál es la matríz A^{-1}? (tienen 5 min):

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathrm{A})} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Comprobemos. La inversa de A es:

$$\mathrm{inv}(A) = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A) =$$

Comprobemos. La inversa de A es:

$$\mathrm{inv}(A) = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} =$$

Comprobemos. La inversa de A es:

$$\mathrm{inv}(A) = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Comprobemos. La inversa de A es:

$$\mathrm{inv}(A) = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{inv}(A) = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

Comprobemos. La inversa de A es:

$$\mathrm{inv}(A) = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{inv}(A) = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

Comprobemos que $A^{-1}A = I$,

Comprobemos. La inversa de A es:

$$\text{inv}(A) = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A) = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\text{inv}(A) = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

Comprobemos que $A^{-1}A = I$,

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$$

Vectores, matrices, elementos y operaciones básicas

Comprobemos. La inversa de A es:

$$\text{inv}(A) = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A) = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\text{inv}(A) = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

Comprobemos que $A^{-1}A = I$,

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ad-bc}{da-bc} & \frac{db-bd}{ad-bc} \\ \frac{-ca+ac}{ad-bc} & \frac{-cb+ad}{ad-bc} \end{bmatrix} = I$$

Linealidad de un sistema

Para demostrar que un sistema es lineal, se deben cumplir las siguientes propiedades:

Aditividad:

Linealidad de un sistema

Para demostrar que un sistema es lineal, se deben cumplir las siguientes propiedades:

Aditividad: Para cualquier par de matrices **A** y **B** y cualquier escalar α

$$f(\mathsf{A}+\mathsf{B}) = f(\mathsf{A}) + f(\mathsf{B})$$
$$f(\alpha \mathsf{A}) = \alpha f(\mathsf{A})$$

Linealidad de un sistema

Para demostrar que un sistema es lineal, se deben cumplir las siguientes propiedades:

Aditividad: Para cualquier par de matrices **A** y **B** y cualquier escalar α

$$f(\mathsf{A}+\mathsf{B}) = f(\mathsf{A}) + f(\mathsf{B})$$
$$f(\alpha \mathsf{A}) = \alpha f(\mathsf{A})$$

Homogeneidad:

Linealidad de un sistema

Para demostrar que un sistema es lineal, se deben cumplir las siguientes propiedades:

Aditividad: Para cualquier par de matrices **A** y **B** y cualquier escalar α

$$f(\mathsf{A} + \mathsf{B}) = f(\mathsf{A}) + f(\mathsf{B})$$
$$f(\alpha \mathsf{A}) = \alpha f(\mathsf{A})$$

Homogeneidad:

$$f(\alpha \mathsf{A} + \beta \mathsf{A}) = \alpha f(\mathsf{A}) + \beta f(\mathsf{A})$$

Más in Menke (2018)

I. Problema directo / Forward problem

II. Problema inverso / Inverse problem

III. Problema lineal / Linear problem

IV. Problema no-lineal / Non-linear problem

Podemos encontrar m^{est} que minimice $L = m^T m = \sum {m_i}^2$, sujeto a la condición límite de mínimo error $e = d - Gm = 0$. Este problema se puede fácilmente resolver con el método de los multiplicadores de Lagrange. Sólo se requiere minimar la función:

$$\phi(m) = L + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{M} m_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \left[d_i - \sum_{j=1}^{M} G_{ij} m_j \right] \qquad (1)$$

Para solucionar este problema de minimización, derivamos la ecuación e igualamos a cero,

$$\frac{\partial \phi}{\partial m_q} = \sum_{i=1}^{M} 2 \frac{\partial m_i}{\partial m_q} m_i - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \sum_{j=1}^{M} G_{ij} \frac{\partial m_j}{\partial m_q} = 2 m_q - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i G_{iq} \qquad (2)$$

e igualando a cero,

$$2m = G^T \lambda \qquad (3)$$

Dicha ecuación, $2m = G^T\lambda$, debe ser resulta junto con la ecuación que conocemos $Gm = d$. Sustituyendo la primera ecuación en la segunda, obtenemos que

$$m^{est} = G^T(GG^T)^{-1}d \tag{4}$$

Idealmente, otra posibilidad sería que nos gustaría clasificar los parámetros del modelo desconocidos en dos grupos: aquellos que están sobredeterminados y aquellos que están indeterminados. Para lograr esto, necesitamos formar un nuevo conjunto de parámetros del modelo que sean combinaciones lineales de los anteriores.

Por ejemplo, querríamos realizar esta partición a partir de una ecuación arbitraria $Gm = d \quad \to G'm' = d'$, donde m' se divide en una parte superior m'^o que está sobredeterminada y una parte inferior m'^u que está indeterminada:

$$\begin{bmatrix} G'^o & 0 \\ 0 & G'^u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m'^o \\ m'^u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d'^o \\ d'^u \end{bmatrix} \tag{5}$$

En lugar de dividir m en partes, supongamos que determinamos una solución que minimiza alguna combinación ϕ del error de predicción y la longitud de la solución para los parámetros del modelo no divididos:

$$\phi(m) = E + \epsilon^2 L = e^T e + \epsilon^2 m^T m \tag{6}$$

donde el factor de ponderación ϵ^2 determina la importancia relativa que se le da al error de predicción y la longitud de la solución. Si ϵ se hace lo suficientemente grande, este procedimiento claramente minimizará la parte indeterminada de la solución. Desafortunadamente, también tiende a minimizar la parte sobredeterminada de la solución. Como resultado, la solución no minimizará el error de predicción y no se obtendrá una muy buena estimación de los verdaderos parámetros del modelo que se busca. Si ϵ es igual a cero, se minimizará el error de predicción, pero no se proporcionará información previa para distinguir los parámetros del modelo indeterminados.

Sin embargo, puede ser posible encontrar algún valor de compromiso para ϵ que minimice aproximadamente E y al mismo tiempo minimice aproximadamente la longitud de la parte indeterminada de la solución. No existe un método simple para determinar qué valor de ϵ debe ser (sin resolver el problema dividido); este debe ser determinado mediante prueba y error. Al minimizar $\phi(m)$ con respecto a los parámetros del modelo de una manera exactamente análoga a la derivación de mínimos cuadrados, obtenemos:

$$[G^T G + \epsilon^2 I]m^{est} = G^T d \tag{7}$$

lo cuál nos lleva a que

$$m^{est} = [G^T G + \epsilon^2 I]^{-1} G^T d. \tag{8}$$

Normas de medición del ajuste

Norma L_1:

$$||\mathbf{e}||_1 = \left[\sum_i |e_i|^1\right]$$

Norma L_2:

$$||\mathbf{e}||_2 = \left[\sum_i |e_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Norma L_n:

$$||\mathbf{e}||_n = \left[\sum_i |e_i|^n\right]^{\frac{1}{n}}$$

References

Menke, W. (2018). *Geophysical data analysis: Discrete inverse theory*. Academic press.