Curso 1: Teoría de inversión y programación en Python

H. Sánchez-Reyes

ISTerre, Université de Grenoble Alpes, France
IRD - UGA-ISTerre BQR Project

¡Gracias por la bienvenida!

7-18 de Agosto de 2023
Lima, Perú

Recordando algebra lineal

Vectores, matrices, elementos y operaciones básicas

Vectores:

$$v = [2, 4, 5] \qquad \text{or,} \qquad n = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Vectores, matrices, elementos y operaciones básicas

Vectores:

$$v = [2, 4, 5] \qquad \text{or,} \qquad n = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es la dimensión de estos vectores?

Vectores:

$$v = [2, 4, 5] \qquad \text{or,} \qquad n = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es la dimensión de estos vectores?

$$v = [2, 4, 5]_{1\times 3} \qquad \text{or,} \qquad n = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

Vectores:

$$v = [2, 4, 5] \qquad \text{or,} \qquad n = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es la dimensión de estos vectores?

$$v = [2, 4, 5]_{1\times 3} \qquad \text{or,} \qquad n = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

También definimos los transpuestos:

Vectores, matrices, elementos y operaciones básicas

Vectores:

$$v = [2, 4, 5] \qquad \text{or,} \qquad n = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es la dimensión de estos vectores?

$$v = [2, 4, 5]_{1\times 3} \qquad \text{or,} \qquad n = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

También definimos los transpuestos:

$$v^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}_{3\times 1} \qquad \text{or,} \qquad n^T = [1, 5, 7]_{1\times 3}$$

Matrix:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Vectores, matrices, elementos y operaciones básicas

Matrix:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Matrices con definiciones importantes

Identidad:

Matrix:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Matrices con definiciones importantes

Identidad: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matrix:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Matrices con definiciones importantes

Identidad: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Simétricas:

Vectores, matrices, elementos y operaciones básicas

Matrix:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Matrices con definiciones importantes

Identidad: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Simétricas: $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$ si, $x_{ij} = x_{ji}$

Vectores, matrices, elementos y operaciones básicas

Matrix:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Matrices con definiciones importantes

Identidad: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Simétricas: $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$ si, $x_{ij} = x_{ji}$

Invertible:

Matrix:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Matrices con definiciones importantes

Identidad: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Simétricas: $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$ si, $x_{ij} = x_{ji}$

Invertible: si, $\det(M) > 0$ entonces, M^{-1} existe, tal que

$$M^{-1}M = I = MM^{-1}$$

Matrix:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Matrices con definiciones importantes

$$\text{Identidad:} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Simétricas:} \quad X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \quad \text{si}, x_{ij} = x_{ji}$$

Invertible: si, $\det(M) > 0$ entonces, M^{-1} existe, tal que

$$M^{-1}M = I = MM^{-1}$$

$$\underbrace{M^{-1}}_{pre-multiplicar} \quad M = I = M \quad \underbrace{M^{-1}}_{post-multiplicar}$$

Sumas (y restas):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ then}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{M} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+0 & 2-1 \\ 0+0 & 1+2 & 0+0 \\ 2-1 & 0+0 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Vectores, matrices, elementos y operaciones básicas

Sumas (y restas):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ then}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{M} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+0 & 2-1 \\ 0+0 & 1+2 & 0+0 \\ 2-1 & 0+0 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

es decir, $S_{ij} = M_{ij} + N_{ij}$ y $D_{ij} = M_{ij} - N_{ij}$

Vectores, matrices, elementos y operaciones básicas

Sumas (y restas):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ then}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{M} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+0 & 2-1 \\ 0+0 & 1+2 & 0+0 \\ 2-1 & 0+0 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

es decir, $S_{ij} = M_{ij} + N_{ij}$ y $D_{ij} = M_{ij} - N_{ij}$

Multiplicaciones:

Vectores, matrices, elementos y operaciones básicas

Sumas (y restas):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ then}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{M} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+0 & 2-1 \\ 0+0 & 1+2 & 0+0 \\ 2-1 & 0+0 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

es decir, $S_{ij} = M_{ij} + N_{ij}$ y $D_{ij} = M_{ij} - N_{ij}$

Multiplicaciones:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 1 \quad 2 \quad 2} \\ 2 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1\times1+1\times2+2\times1+2\times2} & 1\times2+1\times1+2\times2+2\times1 \\ 2\times1+2\times2+3\times1+3\times2 & 2\times2+2\times1+3\times2+3\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{9} & 9 \\ 15 & 15 \end{pmatrix}$$

Vectores, matrices, elementos y operaciones básicas

Sumas (y restas):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ then}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{M} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+0 & 2-1 \\ 0+0 & 1+2 & 0+0 \\ 2-1 & 0+0 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

es decir, $S_{ij} = M_{ij} + N_{ij}$ y $D_{ij} = M_{ij} - N_{ij}$

Multiplicaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1{\times}1+1{\times}2+2{\times}1+2{\times}2} & 1{\times}2+1{\times}1+2{\times}2+2{\times}1 \\ 2{\times}1+2{\times}2+3{\times}1+3{\times}2 & 2{\times}2+2{\times}1+3{\times}2+3{\times}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{9} & 9 \\ 15 & 15 \end{pmatrix}$$

es decir,

$$P_{ij} = \sum_{k=1}^{K} M_{ik} N_{kj}$$

Determinante:

Determinante:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\cdots\sum_{q=1}^{N} e^{ijk\ldots q} M_{1i} M_{2j} M_{3k} \ldots M_{Nq}$$

siendo $e^{ijk\ldots q}$ $+1$ cuando (i, j, k, ... , q) son permutations pares de (1, 2, 3, ... , N), y -1 cuando son permutaciones impares, y cero en otro caso.

Determinante:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\cdots\sum_{q=1}^{N} e^{ijk\ldots q} M_{1i} M_{2j} M_{3k} \ldots M_{Nq}$$

siendo $e^{ijk\ldots q}+1$ cuando (i, j, k, ... , q) son permutations pares de (1, 2, 3, ... , N), y -1 cuando son permutaciones impares, y cero en otro caso.

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Más in Menke (2018)

I. Problema directo / Forward problem

II. Problema inverso / Inverse problem

III. Problema lineal / Linear problem

IV. Problema no-lineal / Non-linear problem

References

Menke, W. (2018). *Geophysical data analysis: Discrete inverse theory*. Academic press.