

Curso 1: Teoría de inversión y programación en Python

H. Sánchez-Reyes

ISTerre, Université de Grenoble Alpes, France
IRD - UGA-ISTerre BQR Project

7-18 de Agosto de 2023
Lima, Perú



¡Gracias por la bienvenida!

Recordando algebra lineal

Vectores:

$$v = [2, 4, 5] \quad \text{or,} \quad n = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Vectores:

$$v = [2, 4, 5] \quad \text{or,} \quad n = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es la dimensión de estos vectores?

Vectores:

$$v = [2, 4, 5] \quad \text{or,} \quad n = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es la dimensión de estos vectores?

$$v = [2, 4, 5]_{1 \times 3} \quad \text{or,} \quad n = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

Vectores:

$$v = [2, 4, 5] \quad \text{or,} \quad n = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es la dimensión de estos vectores?

$$v = [2, 4, 5]_{1 \times 3} \quad \text{or,} \quad n = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

También definimos los transpuestos:

Vectores:

$$v = [2, 4, 5] \quad \text{or,} \quad n = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es la dimensión de estos vectores?

$$v = [2, 4, 5]_{1 \times 3} \quad \text{or,} \quad n = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

También definimos los transpuestos:

$$v^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad \text{or,} \quad n^T = [1, 5, 7]_{1 \times 3}$$

Matrix:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Matrix:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Matrices con definiciones importantes

Identidad:

Matrix:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Matrices con definiciones importantes

Identidad: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, es decir, $I_{ij} = 1$, si $i = j$, sino $I_{ij} = 0$

Matrix:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Matrices con definiciones importantes

Identidad: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, es decir, $I_{ij} = 1$, si $i = j$, sino $I_{ij} = 0$

Matrix:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Matrices con definiciones importantes

Identidad: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, es decir, $I_{ij} = 1$, si $i = j$, sino $I_{ij} = 0$

Simétricas:

Matrix:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Matrices con definiciones importantes

Identidad: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, es decir, $I_{ij} = 1$, si $i = j$, sino $I_{ij} = 0$

Simétricas: siendo X una matriz $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$

X es simétrica sí, $x_{ij} = x_{ji}$

Invertible:

Invertible: si, $\det(M) \neq 0$ entonces, M^{-1} (la inversa de M) existe, tal que

$$M^{-1}M = I = MM^{-1}$$

Invertible: si, $\det(M) \neq 0$ entonces, M^{-1} (la inversa de M) existe, tal que

$$M^{-1}M = I = MM^{-1}$$

$$\underbrace{M^{-1}}_{\text{pre-multiplicar}} M = I = M \underbrace{M^{-1}}_{\text{post-multiplicar}}$$

Sumas (y restas):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ then}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{M} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+0 & 2-1 \\ 0+0 & 1+2 & 0+0 \\ 2-1 & 0+0 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Sumas (y restas):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{then}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{M} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+0 & 2-1 \\ 0+0 & 1+2 & 0+0 \\ 2-1 & 0+0 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

es decir, $S_{ij} = M_{ij} + N_{ij}$ y $D_{ij} = M_{ij} - N_{ij}$

Sumas (y restas):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{then}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{M} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+0 & 2-1 \\ 0+0 & 1+2 & 0+0 \\ 2-1 & 0+0 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

es decir, $S_{ij} = M_{ij} + N_{ij}$ y $D_{ij} = M_{ij} - N_{ij}$

Multiplicaciones:

Sumas (y restas):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ then}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{M} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+0 & 2-1 \\ 0+0 & 1+2 & 0+0 \\ 2-1 & 0+0 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

es decir, $S_{ij} = M_{ij} + N_{ij}$ y $D_{ij} = M_{ij} - N_{ij}$

Multiplicaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 1 + 2 \times 2 & 1 \times 2 + 1 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 1 \\ 2 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 1 + 3 \times 2 & 2 \times 2 + 2 \times 1 + 3 \times 2 + 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 15 & 15 \end{pmatrix}$$

Sumas (y restas):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ then}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{M} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+0 & 2-1 \\ 0+0 & 1+2 & 0+0 \\ 2-1 & 0+0 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

es decir, $S_{ij} = M_{ij} + N_{ij}$ y $D_{ij} = M_{ij} - N_{ij}$

Multiplicaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 1 + 2 \times 2 & 1 \times 2 + 1 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 1 \\ 2 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 1 + 3 \times 2 & 2 \times 2 + 2 \times 1 + 3 \times 2 + 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 15 & 15 \end{pmatrix}$$

es decir,

$$P_{ij} = \sum_{k=1}^K M_{ik} N_{kj}$$

Determinante de una matriz M :

Determinante de una matriz M :

$$\det(M) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \cdots \sum_{q=1}^N e^{ijk\dots q} M_{1i} M_{2j} M_{3k} \dots M_{Nq}$$

siendo $e^{ijk\dots q} + 1$ cuando (i, j, k, \dots, q) son permutaciones pares de $(1, 2, 3, \dots, N)$, y -1 cuando son permutaciones impares, y cero en otro caso.

Determinante de una matriz M :

$$\det(M) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \cdots \sum_{q=1}^N e^{ijk\dots q} M_{1i} M_{2j} M_{3k} \dots M_{Nq}$$

siendo $e^{ijk\dots q} = +1$ cuando (i, j, k, \dots, q) son permutaciones pares de $(1, 2, 3, \dots, N)$, y -1 cuando son permutaciones impares, y cero en otro caso.

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Y la matriz adjunta de la matriz A es:

La matriz adjunta es aquella en la que cada elemento a_{ij} de la matriz A se sustituye por su adjunto. Se llama adjunto del elemento a_{ij} al menor complementario anteponiendo:

- El signo es $+$ si $i+j$ es par.
- El signo es $-$ si $i+j$ es impar.

¿Cuál es la matriz adjunta de A ? Siendo A :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Y la matriz adjunta de la matriz A es:

La matriz adjunta es aquella en la que cada elemento a_{ij} de la matriz A se sustituye por su adjunto. Se llama adjunto del elemento a_{ij} al menor complementario anteponiendo:

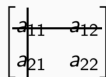
- El signo es $+$ si $i+j$ es par.
- El signo es $-$ si $i+j$ es impar.

¿Cuál es la matriz adjunta de A ? Siendo A :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

El primer elemento de $\text{adj}(A)$ se encuentra sustituyendo a a_{11} por su menor complementario: El menor complementario de a_{11}

siendo $i=1$ y $j=1$
 $i+j=2$, es par, entonces


$$\begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} +a_{22} & \\ & \end{bmatrix}$$

suponiendo que:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

¿Cuál es la matriz A^{-1} ? (tienen 5 min):

suponiendo que:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

¿Cuál es la matriz A^{-1} ? (tienen 5 min):

suponiendo que:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

¿Cuál es la matriz A^{-1} ? (tienen 5 min):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Para demostrar que un sistema es lineal, se deben cumplir las siguientes propiedades:

Aditividad:

Para demostrar que un sistema es lineal, se deben cumplir las siguientes propiedades:

Aditividad: Para cualquier par de matrices **A** y **B** y cualquier escalar α

$$f(A + B) = f(A) + f(B)$$

$$f(\alpha A) = \alpha f(A)$$

Homogeneidad:

Para demostrar que un sistema es lineal, se deben cumplir las siguientes propiedades:

Aditividad: Para cualquier par de matrices **A** y **B** y cualquier escalar α

$$f(A + B) = f(A) + f(B)$$

$$f(\alpha A) = \alpha f(A)$$

Homogeneidad:

$$f(\alpha A + \beta A) = \alpha f(A) + \beta f(A)$$

Más in Menke (2018)

I. Problema directo / Forward problem

II. Problema inverso / Inverse problem

III. Problema lineal / Linear problem

IV. Problema no-lineal / Non-linear problem

Podemos encontrar m^{est} que minimice $L = m^T m = \sum m_i^2$, sujeto a la condición límite de mínimo error $e = d - Gm = 0$. Este problema se puede fácilmente resolver con el método de los multiplicadores de Lagrange. Sólo se requiere minimizar la función:

$$\phi(m) = L + \sum_{i=1}^N \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^M m_i^2 + \sum_{i=1}^N \lambda_i \left[d_i - \sum_{j=1}^M G_{ij} m_j \right] \quad (1)$$

Para solucionar este problema de minimización, derivamos la ecuación e igualamos a cero,

$$\frac{\partial \phi}{\partial m_q} = \sum_{i=1}^M 2 \frac{\partial m_i}{\partial m_q} m_i - \sum_{i=1}^N \lambda_i \sum_{j=1}^M G_{ij} \frac{\partial m_j}{\partial m_q} = 2m_q - \sum_{i=1}^N \lambda_i G_{iq} \quad (2)$$

e igualando a cero,

$$2m = G^T \lambda \quad (3) \quad 11$$

Dicha ecuación, $2m = G^T \lambda$, debe ser resuelta junto con la ecuación que conocemos $Gm = d$. Sustituyendo la primera ecuación en la segunda, obtenemos que

$$m^{est} = G^T (GG^T)^{-1} d \quad (4)$$

Idealmente, otra posibilidad sería que nos gustaría clasificar los parámetros del modelo desconocidos en dos grupos: aquellos que están sobredeterminados y aquellos que están indeterminados. Para lograr esto, necesitamos formar un nuevo conjunto de parámetros del modelo que sean combinaciones lineales de los anteriores.

Por ejemplo, querríamos realizar esta partición a partir de una ecuación arbitraria $Gm = d \rightarrow G'm' = d'$, donde m' se divide en una parte superior m'^o que está sobredeterminada y una parte inferior m'^u que está indeterminada:

$$\begin{bmatrix} G'^o & 0 \\ 0 & G'^u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m'^o \\ m'^u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d'^o \\ d'^u \end{bmatrix} \quad (5)$$

En lugar de dividir m en partes, supongamos que determinamos una solución que minimiza alguna combinación ϕ del error de predicción y la longitud de la solución para los parámetros del modelo no divididos:

$$\phi(m) = E + \epsilon^2 L = e^T e + \epsilon^2 m^T m \quad (6)$$

donde el factor de ponderación ϵ^2 determina la importancia relativa que se le da al error de predicción y la longitud de la solución. Si ϵ se hace lo suficientemente grande, este procedimiento claramente minimizará la parte indeterminada de la solución.

Desafortunadamente, también tiende a minimizar la parte sobredeterminada de la solución. Como resultado, la solución no minimizará el error de predicción y no se obtendrá una muy buena estimación de los verdaderos parámetros del modelo que se busca. Si ϵ es igual a cero, se minimizará el error de predicción, pero no se proporcionará información previa para distinguir los parámetros del modelo indeterminados.

Sin embargo, puede ser posible encontrar algún valor de compromiso para ϵ que minimice aproximadamente E y al mismo tiempo minimice aproximadamente la longitud de la parte indeterminada de la solución. No existe un método simple para determinar qué valor de ϵ debe ser (sin resolver el problema dividido); este debe ser determinado mediante prueba y error. Al minimizar $\phi(m)$ con respecto a los parámetros del modelo de una manera exactamente análoga a la derivación de mínimos cuadrados, obtenemos:

$$[G^T G + \epsilon^2 I] m^{est} = G^T d \quad (7)$$

lo cuál nos lleva a que

$$m^{est} = [G^T G + \epsilon^2 I]^{-1} G^T d. \quad (8)$$

Norma L_1 :

$$\|\mathbf{e}\|_1 = \left[\sum_i |e_i|^1 \right]$$

Norma L_2 :

$$\|\mathbf{e}\|_2 = \left[\sum_i |e_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Norma L_n :

$$\|\mathbf{e}\|_n = \left[\sum_i |e_i|^n \right]^{\frac{1}{n}}$$

References

Menke, W. (2018). *Geophysical data analysis: Discrete inverse theory*. Academic press.