



*Trabalho de Conclusão de Curso*

# Resolução de Redundância aplicada a um manipulador robótico com cinco graus de liberdade

de Hugo Tallys Martins Oliveira

orientado por

Prof. Dr., UFAL Glauber Rodrigues Leite

Universidade Federal de Alagoas  
Instituto de Computação  
Maceió, Alagoas  
23 de Julho de 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
Instituto de Computação

**RESOLUÇÃO DE REDUNDÂNCIA APLICADA A UM  
MANIPULADOR ROBÓTICO COM CINCO GRAUS DE  
LIBERDADE**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido  
ao Instituto de Computação da Universidade  
Federal de Alagoas como requisito parcial  
para a obtenção do grau de Engenheiro de  
Computação.

Hugo Tallys Martins Oliveira

***Orientador: Prof. Dr., UFAL Glauber Rodrigues Leite***

**Banca Avaliadora:**

|                                 |                 |
|---------------------------------|-----------------|
| Ícaro Bezerra Queiroz de Araújo | Prof. Dr., UFAL |
| Arthur Costa Vangasse           | Msc., UFMG      |

Maceió, Alagoas  
23 de Julho de 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
Instituto de Computação

## **RESOLUÇÃO DE REDUNDÂNCIA APLICADA A UM MANIPULADOR ROBÓTICO COM CINCO GRAUS DE LIBERDADE**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Instituto de Computação da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para a obtenção do grau de Engenheiro de Computação.

Aprovado em 23 de Julho de 2024:

---

Glauber Rodrigues Leite,  
Prof. Dr., UFAL, Orientador

---

Ícaro Bezerra Queiroz de Araújo,  
Prof. Dr., UFAL

---

Arthur Costa Vangasse,  
Msc., UFMG

# Dedicatória

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit.

*Nome, abreviatura, ou nada, etc*

# Agradecimentos

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Data, Local

*Nome, abreviatura, nada, etc*

*Study hard what interests you the most in the most undisciplined, irreverent and original manner possible. — Richard Feynmann*

# Resumo

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

***Palavras-chave:***  $KW_1$ ;  $KW_2$ ;  $KW_3$ ;  $KW_4$ ;  $KW_5$ .

# Abstract

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

***Keywords:***  $KW_1$ ;  $KW_2$ ;  $KW_3$ ;  $KW_4$ ;  $KW_5$ .



# Lista de Figuras

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 2.1 | Representação de um ponto $p$ em diferentes frames. . . . .  | 5  |
| 2.2 | Atribuição de <i>frames</i> de acordo com a convenção de Denavit-Hartenberg.<br>Adaptado de [Spong et al., 2020]. . . . .  | 6  |
| 2.3 | Braço planar do tipo 3R. . . . .   | 8  |
| 2.4 | Elipsoide de manipulabilidade para diferentes configurações do manipula-<br>dor planar 3R. . . . .                         | 16 |
| 3.1 | Modelo virtual do manipulador no Webots. . . . .   | 19 |
| 3.2 | Cadeia cinemática visualizada no RViz. . . . .   | 21 |
| 3.3 | Geometria de colisão do modelo virtual do manipulador. . . . .   | 22 |
| 3.4 | Componentes que constituem uma ação dentro do ROS. Adaptado de<br>[Bassa, 2023, p. 36]. . . . .                            | 23 |
| 3.5 | Arquitetura de comunicação proposta para controle do manipulador. . . . .  | 24 |
| 3.6 | Diagrama de blocos do controlador RRMC . . . . .   | 25 |
| 3.7 | Etapas seguidas na execução de um experimento. . . . .   | 27 |
| 4.1 | Diminuição da distância para o limite mecânico das juntas ao longo tempo. . . . .  | 29 |
| 4.2 | Diferentes valores do ganho, influenciam diretamente na velocidade de con-<br>vergência para a solução particular. . . . . | 29 |
| 4.3 | Posição do efetuador final mantém-se constante ao longo do tempo, devido<br>à restrição primária. . . . .                  | 30 |
| 4.4 | Manipulabilidade em função do tempo para cada trajetória executada no<br>segundo cenário. . . . .                          | 31 |
| 4.5 | Otimizando distância das juntas no segundo cenário. . . . .  | 32 |
| 4.6 | Em determinadas trajetórias, o impacto do ganho na velocidade das juntas<br>é significativo. . . . .                       | 33 |
| 4.7 | Erro da posição ao longo do tempo para o segundo cenário. . . . .  | 33 |

# Lista de Tabelas

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Descrição dos parâmetros Denavit-Hartenberg . . . . .   | 7  |
| 2.2 | Parâmetros DH para o braço planar 3R da figura 2.3. . . . .   | 7  |
| 3.1 | Parâmetros DH para o manipulador 5R. . . . .  | 20 |
| 4.1 | Valores de desempenho obtidos na execução dos experimentos do primeiro cenário. . . . .                               | 28 |
| 4.2 | Valores de desempenho obtidos na execução dos experimentos do segundo cenário. . . . .                                | 32 |
| 4.3 | Valores de desempenho (métrica distância das juntas) obtidos na execução dos experimentos no segundo cenário. . . . . | 32 |

# Lista de Símbolos

$\mathbb{R}^3$  Espaço tridimensional real.

$SO(3)$  Grupo especial ortogonal de ordem 3.

$SE(3)$  Grupo especial euclidiano de ordem 3.

$q$  Vetor de configuração das juntas.

$\dot{q}$  Vetor de velocidades das juntas.

$\dot{q}_0$  Vetor arbitrário de velocidades das juntas.

$q_{iM}$  Limite superior de operação da junta.

$q_{im}$  Limite inferior de operação da junta.

$\bar{q}_i$  Valor médio de operação da junta.

$A_i(q_i)$  Matriz de transformação homogênea associada ao elo  $i$ .

$T_n^0$  Matriz de transformação homogênea da cinemática direta.

$J$  Matriz jacobiana.

$J^\dagger$  Pseudo-inversa da matriz jacobiana.

$\xi$  Velocidade do efetuador final.

$\mu$  Medida de manipulabilidade.

$w$  Índice de performance.

$I(w)$  Pontuação da métrica de desempenho.

$E_0$  Posição inicial do efetuador.

$E_f$  Posição final do efetuador.

# Lista de Abreviaturas

**UFAL**    Universidade Federal de Alagoas.

**IC**    Instituto de Computação.

**DH**    Denavit-Hartenberg.

**RRMC**    *Resolved Rate Motion Control.*

**SVD**    *Singular Value Decomposition.*

**ROS**    *Robot Operating System.*

**RTB**    *Robotics Toolbox for Python.*

**RViz**    *ROS Visualization* (ferramenta de visualização do ROS).

**PLA**    Ácido Polilático.

# Sumário

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1      | Motivação . . . . .                                       | 2         |
| 1.2      | Objetivos . . . . .                                       | 2         |
| 1.2.1    | Objetivos Gerais . . . . .                                | 2         |
| 1.2.2    | Objetivos Específicos . . . . .                           | 2         |
| 1.3      | Estrutura do texto . . . . .                              | 3         |
| <b>2</b> | <b>Fundamentação teórica</b>                              | <b>4</b>  |
| 2.1      | Representação de Poses no espaço . . . . .                | 4         |
| 2.2      | Cinemática Direta . . . . .                               | 5         |
| 2.2.1    | Cinemática direta de um braço planar . . . . .            | 7         |
| 2.3      | Cinemática Diferencial . . . . .                          | 8         |
| 2.3.1    | A Jacobiana do Manipulador . . . . .                      | 9         |
| 2.3.2    | Singularidades . . . . .                                  | 11        |
| 2.3.3    | Cinemática Inversa Diferencial . . . . .                  | 12        |
| 2.4      | Manipuladores redundantes . . . . .                       | 13        |
| 2.4.1    | Pseudo-Inversa da Jacobiana . . . . .                     | 13        |
| 2.4.2    | Medida de Manipulabilidade . . . . .                      | 14        |
| 2.4.3    | Resolução de Redundância . . . . .                        | 15        |
| <b>3</b> | <b>Implementação</b>                                      | <b>18</b> |
| 3.1      | Simulação de manipuladores robóticos . . . . .            | 18        |
| 3.2      | Arquitetura de comunicação . . . . .                      | 21        |
| 3.3      | O Algoritmo <i>Resolved Rate Motion Control</i> . . . . . | 24        |
| <b>4</b> | <b>Resultados</b>   | <b>28</b> |
| 4.1      | Cenário 1 . . . . .                                       | 28        |
| 4.2      | Cenário 2 . . . . .                                       | 31        |
| <b>5</b> | <b>Conclusão</b>  | <b>34</b> |
|          | <b>Bibliografia</b>                                       | <b>35</b> |

# Capítulo 1

## Introdução

A redundância cinemática na robótica refere-se ao uso de graus de liberdade (DOF) adicionais além do mínimo necessário para executar uma tarefa específica. Em robôs industriais e manipuladores, singularidades cinemáticas ocorrem quando a configuração do robô resulta na perda de um ou mais DOFs, reduzindo sua capacidade de movimento. De maneira mais precisa, isso significa que há alguma direção (ou subespaço) no espaço cartesiano ao longo da qual é impossível mover o efetuador final, independentemente das velocidades empenhadas nas juntas [Craig, 2004]. A importância da redundância está na capacidade de fornecer caminhos alternativos para o planejamento de movimentos, permitindo que o robô manobre ao redor de configurações singulares, mantendo a eficiência operacional e a segurança. Essa flexibilidade assegura que o robô continue a executar suas tarefas mesmo próximo a pontos singulares, comuns em tarefas complexas. Além disso, a resolução de redundância possibilita a otimização de outros critérios de desempenho, como minimizar o consumo de energia, reduzir o desgaste, melhorar a precisão e aumentar a capacidade de evasão de obstáculos.

Recentemente, [Li et al., 2023] propuseram um esquema baseado em pseudo-inversa para controle de movimento em nível de aceleração, demonstrando a viabilidade do método através de simulações com o manipulador robótico PA10. Por outro lado, [Kuri et al., 2023] abordaram a resolução de redundância através da combinação de Mapas Auto-Organizáveis (SOM) e uma matriz de Norma Mínima Ponderada (WLN), mostrando melhorias significativas no controle de trajetória espacial para um manipulador robótico de 5 graus de liberdade.

[Hammond, 2011] explorou o aumento da resolução de movimento eficaz através da configuração de manipuladores cinemáticos redundantes, onde a redundância cinemática é usada para otimizar a resolução de movimento para tarefas específicas, destacando o potencial dessas abordagens em aplicações de micromanipulação e montagem de precisão.

## 1.1 Motivação

A abordagem tradicional no projeto de manipuladores teve como foco principal a minimização de custos e manutenção, utilizando o número mínimo de juntas necessárias para executar uma determinada tarefa levando, por exemplo, ao desenvolvimento dos robôs *Selective Compliance Assembly Robot Arm* (SCARA) para operações de *pick-and-place* [Siciliano and Khatib, 2008]. No entanto, essa abordagem minimalista apresenta uma série de limitações em aplicações do mundo real, onde fatores como limites de juntas, singularidades e obstáculos no espaço de trabalho estão presentes. Ao ter DOFs do que o estritamente necessário, os manipuladores redundantes podem alcançar maior destreza e versatilidade, tornando-os mais adequados para ambientes complexos e dinamicamente mutáveis.

Para além das restrições cinemáticas, a redundância permite a otimização de métricas de desempenho, como a minimização do torque ou do consumo de energia, melhorando a eficiência geral do sistema. Vale ressaltar que projetar manipuladores com juntas adicionais e garantir sua confiabilidade operacional é um processo complexo e custoso. Esquemas eficazes de resolução de redundância são críticos para o sucesso do planejamento e controle de movimentos, especialmente em ambientes dinâmicos. Apesar desses desafios, os benefícios da redundância cinemática em aumentar a destreza, versatilidade e eficiência fazem dela uma abordagem interessante em sistemas robóticos avançados.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivos Gerais

Estudar e implementar a modelagem de cinemática inversa diferencial em manipuladores seriais redundantes, possibilitando a execução de trajetórias no espaço de trabalho que levam em conta não só as restrições cinemáticas do movimento mas também critérios de desempenho do manipulador.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

- Estudar a modelagem de cadeias cinemáticas em manipuladores robóticos seriais
- Investigar o uso da cinemática direta e inversa diferenciais para execução de trajetórias cartesianas
- Implementar a lei de controle utilizando a cinemática direta diferencial e esquemas de resolução de redundância utilizando a pseudo inversa da matriz jacobiana
- Propor um ambiente simulado para execução de experimentos utilizando o modelo virtual do manipulador robótico com 5 graus de liberdade

- Analisar o desempenho do esquema de controle em diferentes cenários de execução de trajetórias e critérios de desempenho.

## 1.3 Estrutura do texto

Este trabalho está estruturado de modo a introduzir os conceitos já difundidos da cinemática diferencial em manipuladores redundantes, bem como apresentar uma abordagem prática para resolução de redundância de um manipulador planar simples, com cinco graus de liberdade. No capítulo 2, é apresentada a fundamentação teórica, abordando conceitos essenciais como a representação de poses no espaço, transformações homogêneas, cinemática direta, cinemática diferencial, e a resolução de redundância. O capítulo 3 descreve a implementação prática, detalhando a simulação de manipuladores robóticos, a arquitetura de comunicação proposta e o algoritmo *Resolved Rate Motion Control*. No capítulo 4, são apresentados os resultados experimentais divididos em dois cenários distintos, seguidos pela conclusão no capítulo 5, onde são discutidos os principais pontos abordados e sugestões para trabalhos futuros.



# Capítulo 2

## Fundamentação teórica

### 2.1 Representação de Poses no espaço

A representação de poses no espaço na robótica envolve o uso de sistemas de coordenadas, ou *frames*, para descrever as posições e orientações de corpos rígidos, além das transformações entre esses frames. Um frame é composto por um ponto e um conjunto de vetores ortonormais que formam uma base do  $\mathbb{R}^3$ . No contexto da robótica fixa, é comum especificar tarefas utilizando coordenadas cartesianas relativas a um frame de referência. Por exemplo, um ponto  $o_1^0$ , representando uma translação, pode ser expresso como um vetor com origem em um frame  $o_0x_0y_0z_0$  e extremidade em outro frame  $o_1x_1y_1z_1$ , onde o expoente indica em relação a qual frame as coordenadas são escritas. A orientação entre esses mesmos frames pode ser representada por uma matriz de rotação  $R_1^0$ , pertencente ao grupo especial ortogonal de ordem 3 ( $SO(3)$ ), que possui a útil propriedade no cálculo da sua inversa:  $(R_1^0)^{-1} = (R_1^0)^\top = R_0^1$ .

O grupo especial euclidiano de ordem 3 ( $SE(3)$ ) combina rotações e translações em uma única representação, facilitando a descrição de deslocamentos rígidos no espaço tridimensional. Um deslocamento rígido é definido por um par ordenado  $(R, d)$ , onde  $R$  é uma matriz de rotação em  $SO(3)$  e  $d$  é um vetor de translação em  $\mathbb{R}^3$ . Observando a figura 2.1, podemos ver que a posição de um ponto  $p$  com relação a um frame de referência  $o_0x_0y_0z_0$  pode ser expressa como:

$$p^0 = R_1^0 p^1 + o_1^0 \quad (2.1)$$

Assim, a equação 2.1 descreve um deslocamento rígido (rotação e translação) de um vetor fixado entre os dois frames. Podemos representá-la no formato matricial, utilizando coordenadas homogêneas (com uma dimensão extra igual à unidade), como segue:

$$\begin{bmatrix} p^0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^0 & o_1^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

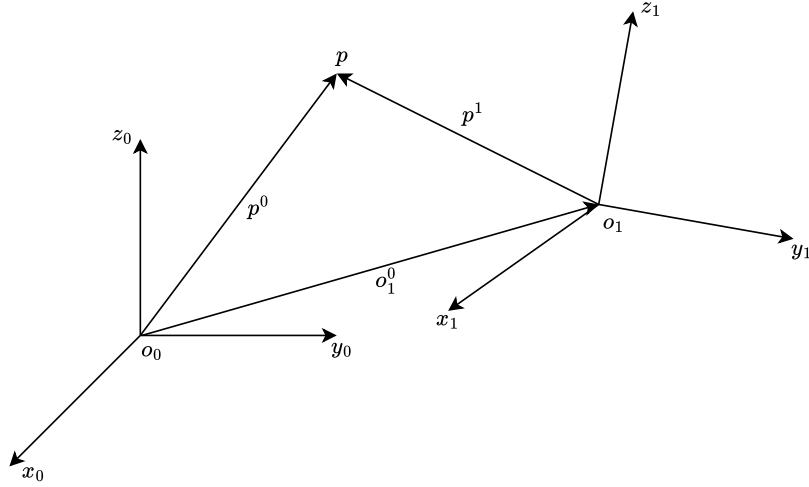


Figura 2.1: Representação de um ponto  $p$  em diferentes frames.

ou numa notação mais compacta:

$$\tilde{p}^0 = T_1^0 \tilde{p}^1 \quad (2.3)$$

A matriz  $T_1^0$  de dimensão  $4 \times 4$  é denominada *matriz de transformação homogênea* e tem a característica de que a sua inversa pode ser calculada através das componentes de rotação e translação que compõe o deslocamento rígido:

$$(T_1^0)^{-1} = \begin{bmatrix} R_1^0 & o_1^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (R_1^0)^\top & -(R_1^0)^\top o_1^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

## 2.2 Cinemática Direta

Na robótica, uma cadeia cinemática é uma série de corpos rígidos conectados por juntas que permitem movimento relativo das partes móveis de um manipulador. Cadeias cinemáticas formam a base do estudo de manipuladores robóticos e geralmente são representadas por um grafo onde nós representam os elos e as arestas representam as juntas. As cadeias podem ser classificadas como seriais abertas, paralelas ou fechadas, dependendo da topologia do grafo. Neste trabalho, focamos em cadeias abertas, as mais comuns em manipuladores robóticos industriais.

As juntas prismáticas e de revolução são os tipos mais simples e introduzem um único grau de liberdade ao sistema. Juntas prismáticas permitem movimento translacional ao longo de uma direção, enquanto juntas de revolução possibilitam movimento rotacional ao redor de um eixo específico. Independentemente da complexidade das juntas, a maioria pode ser reduzida a uma combinação de juntas prismáticas e de revolução, facilitando a

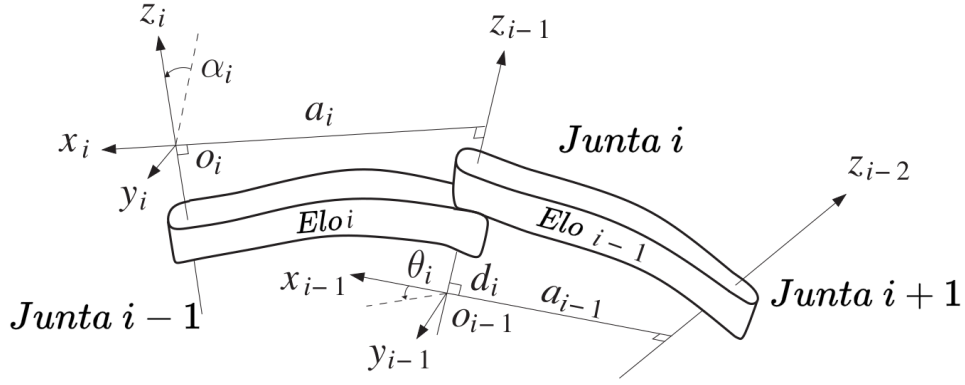


Figura 2.2: Atribuição de *frames* de acordo com a convenção de Denavit-Hartenberg. Adaptado de [Spong et al., 2020].

descrição das cadeias cinemáticas.

Para calcular a cinemática direta, associamos a cada elo  $i$  um frame  $o_i x_i y_i z_i$  e usamos a matriz de transformação homogênea  $A_i(q_i)$ , que fornece a posição e orientação de  $o_i x_i y_i z_i$  em relação a  $o_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ . Para um manipulador com  $n$  juntas a sua configuração é dada pelo vetor  $q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^\top$  e a matriz de transformação homogênea  $T_n^0$  que expressa a pose do efetuador final em relação ao frame da base é dada pela multiplicação matricial:

$$T_n^0(q) = A_1(q_1)A_2(q_2) \cdots A_n(q_n) = \begin{bmatrix} R_n^0 & o_n^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Apesar da colocação de frames em cada elo ser arbitrária, Jacques Denavit e Richard Hartenberg introduziram uma convenção padronizada para fixação dos frames fornecendo uma representação mínima das transformações utilizando apenas 4 parâmetros [Denavit and Hartenberg, 1955]: ângulo da junta ( $\theta_i$ ), deslocamento do elo ( $d_i$ ), comprimento do elo ( $a_i$ ) e torção do elo ( $\alpha_i$ ).

$$A_i = Rot_z(\theta_i) \cdot Trans_z(d_i) \cdot Trans_x(a_i) \cdot Rot_x(\alpha_i) \quad (2.6)$$

Tal representação mínima só é possível devido a introdução de duas restrições na colocação dos frames em cada elo [Spong et al., 2020]:

- (DH1)  $x_i$  intersecta o eixo  $z_{i-1}$
- (DH2)  $x_i$  é perpendicular o eixo  $z_{i-1}$

A tabela 2.1 descreve de maneira detalhada a definição de cada parâmetro na *convenção Denavit-Hartenberg* (DH).

| Parâmetro  | Definição   |
|------------|---|
| $\theta_i$ | O ângulo entre os eixos $\mathbf{x}_{i-1}$ e $\mathbf{x}_i$ em torno do eixo $\mathbf{z}_{i-1}$   |
| $d_i$      | A distância da origem do sistema de coordenadas $\{i-1\}$ até o eixo $\mathbf{x}_i$ ao longo do eixo $\mathbf{z}_{i-1}$   |
| $a_i$      | A distância entre os eixos $\mathbf{z}_{i-1}$ e $\mathbf{z}_i$ ao longo do eixo $\mathbf{x}_i$ ; para eixos que se intersectam, é paralela a $\mathbf{z}_{i-1} \times \mathbf{z}_i$ |
| $\alpha_i$ | O ângulo entre o eixo $\mathbf{z}_{i-1}$ e o eixo $\mathbf{z}_i$ em torno do eixo $\mathbf{x}_i$  |

Tabela 2.1: Descrição dos parâmetros Denavit-Hartenberg

### 2.2.1 Cinemática direta de um braço planar

Um braço planar é um tipo de manipulador serial cujo espaço de trabalho se limita a um plano. A figura 2.3 mostra um braço planar do tipo 3R, o qual possui três elos e três juntas de revolução acoplados em série. A escolha da colocação do frame da base  $o_0x_0y_0z_0$  é totalmente arbitrária e ao tomar como indicado na figura (com o eixo  $z$  apontando para fora do papel) a fixação dos frames subsequentes na cadeia cinemática fica restrita a convenção de Denavit-Hartenberg adotada. A tabela DH para esse manipulador é dada por:

| Elo | $\theta$   | $d$ | $a$   | $\alpha$ |
|-----|------------|-----|-------|----------|
| 1   | $\theta_1$ | 0   | $a_1$ | 0        |
| 2   | $\theta_2$ | 0   | $a_2$ | 0        |
| 3   | $\theta_3$ | 0   | $a_3$ | 0        |

Tabela 2.2: Parâmetros DH para o braço planar 3R da figura 2.3.

Dados os valores fixos  $a_i$  que indicam o comprimento do elo  $i$ , as únicas variáveis livres no cálculo da cinemática direta são os ângulos das juntas ( $q_i = \theta_i$ ), desse modo, vamos denotar  $\theta_1 + \theta_2 = \theta_{12}$ ,  $\cos(\theta_1 + \theta_2) = c_{12}$  e assim por diante. Para  $i = 1, 2, 3$  as matrizes  $A_i$  são calculadas com o auxílio da equação 2.6:

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Já para as matrizes  $T_i^0$ , utilizamos a equação 2.5:

$$\mathbf{T}_1^0 = \mathbf{A}_1 \quad (2.8)$$

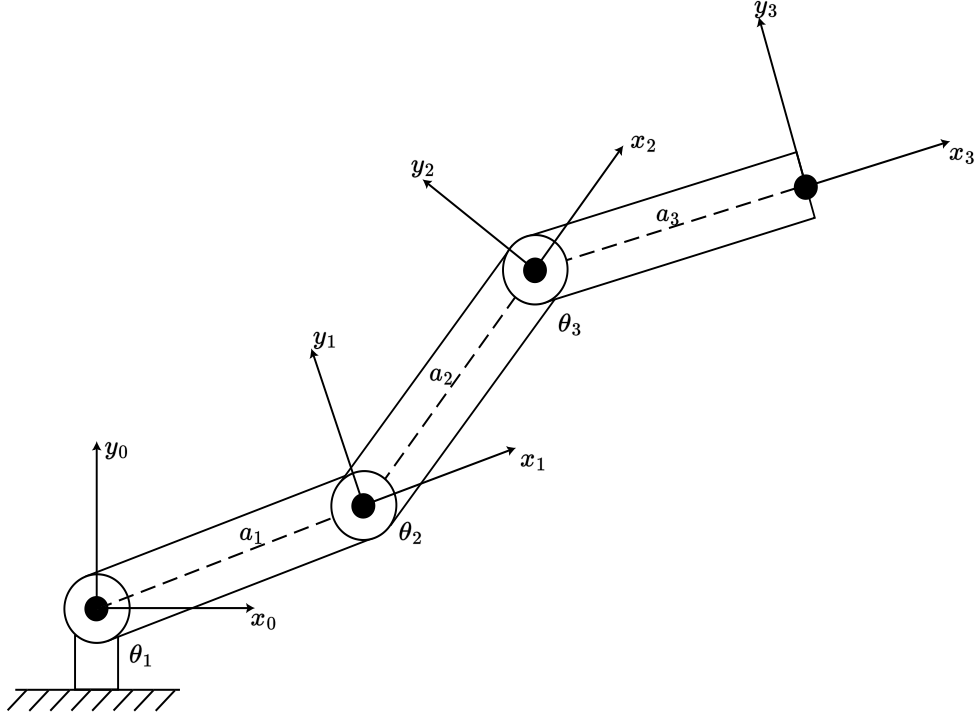


Figura 2.3: Braço planar do tipo 3R.

$$\mathbf{T}_2^0 = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{T}_3^0 = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

As três primeiras entradas da última coluna da matriz  $\mathbf{T}_3^0$  dão a posição  $\mathbf{P} = [x \ y \ z]^\top$  do efetuador final em função da configuração do manipulador. Note que  $z = 0$  quaisquer que sejam os ângulos das juntas pois, como esperado, o manipulador é planar. Além disso, analisando a componente de rotação, fica evidente que a orientação do efetuador final com relação ao frame da base é dada pela soma dos ângulos das juntas:  $\psi = \theta_{123}$ .

## 2.3 Cinemática Diferencial

Na seção anterior vimos como podemos estabelecer uma relação entre a configuração de um manipulador com  $n$  juntas e a pose do efetuador final no espaço SE3. Nesta seção iremos ver como a matriz jacobiana, uma generalização da derivada para o caso multidimensional, é responsável por estabelecer um mapeamento linear entre um vetor de

velocidades no espaço das juntas com a velocidade do efetuador no espaço de trabalho. Por fim, iremos analisar o problema da cinemática inversa diferencial, proporcionando a geração de trajetórias cartesianas, no espaço de trabalho do manipulador.

### 2.3.1 A Jacobiana do Manipulador

Dado um manipulador com  $n$  juntas vamos considerar

$$T_n^0(q) = \begin{bmatrix} R_n^0(q) & o_n^0(q) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

a transformação homogênea que expressa a pose do efetuador final com relação ao *frame* da base que, como já vimos, é função apenas da configuração  $q = [q_1 \ \cdots \ q_n]^\top$ .

Buscamos estabelecer relações da seguinte forma:

$$v_n^0 = J_v \dot{q} \quad (2.12)$$

$$\omega_n^0 = J_\omega \dot{q} \quad (2.13)$$

onde  $v_n^0$  e  $\omega_n^0$  expressam respectivamente as velocidades linear e angular do efetuador final e  $J_v$ ,  $J_\omega$  são matrizes de dimensão  $3 \times n$ . De maneira mais compacta, podemos escrever

$$\xi = J \dot{q} \quad (2.14)$$

onde teremos:

$$\xi = \begin{bmatrix} v_n^0 \\ \omega_n^0 \end{bmatrix} \text{ e } J = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

O vetor  $\xi$  de dimensão  $6 \times 1$  é denominado de velocidade do corpo rígido (em inglês *body velocity* ou *twist*). Note também que a matriz  $J$ , chamada *jacobiana do manipulador* ou simplesmente jacobiana, é usualmente uma matriz de dimensão  $6 \times n$ .

A parte superior da matriz jacobiana  $J_v$  será:

$$J_v = \begin{bmatrix} J_{v_1} & J_{v_2} & \cdots & J_{v_n} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

onde a  $i$ -ésima coluna  $J_{v_i}$  é dada por:

$$J_{v_i} = \begin{cases} z_{i-1}^0 \times (o_n^0 - o_{i-1}^0) & \text{se a junta } i \text{ é de revolução} \\ z_{i-1} & \text{se a junta } i \text{ é prismática} \end{cases} \quad (2.17)$$

Já a parte inferior da matriz jacobiana  $J_\omega$  será:

$$J_\omega = \begin{bmatrix} J_{\omega_1} & J_{\omega_2} & \cdots & J_{\omega_n} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

onde a  $i$ -ésima coluna  $J_{\omega_i}$  é dada por:

$$J_{\omega_i} = \begin{cases} z_{i-1}^0 & \text{se a junta } i \text{ é de revolução} \\ 0 & \text{se a junta } i \text{ é prismática} \end{cases} \quad (2.19)$$

Note que o cálculo da jacobiana torna-se possível apenas com o conhecimento da função de cinemática direta  $T_n^0$  mostrando-se uma maneira eficiente para calcular não só a velocidade do efetuador final mas também a velocidade de qualquer ponto da estrutura cinemática do manipulador.

Como exemplo, considere o manipulador planar 3R introduzido na seção anterior. Com base no procedimento descrito acima, a jacobiana do manipulador é dada por:

$$J(q) = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (o_3^0 - o_0^0) & z_1^0 \times (o_3^0 - o_1^0) & z_2^0 \times (o_3^0 - o_2^0) \\ z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

onde as termos envolvidos são:

$$\begin{aligned} o_0^0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & o_1^0 &= \begin{bmatrix} a_1 c_1 \\ a_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix} & o_2^0 &= \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} & o_3^0 &= \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 \end{bmatrix} \\ z_0^0 &= z_1^0 = z_2^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Desenvolvendo as expressões acima, obtemos:

$$J(q) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Note que o manipulador planar não provoca qualquer translação ao longo do eixo  $z$  uma vez que qualquer contribuição de  $J_{v_i}$  é nula na terceira componente. Além disso, a única componente de rotação influenciada pelo movimento das juntas é a rotação em torno também do eixo do eixo  $z$  evidenciado pela terceira componente de  $J_{\omega_i}$  igual a 1.

### 2.3.2 Singularidades

A matriz jacobiana, de dimensão  $6 \times n$ , estabelece o mapeamento linear entre as velocidades das juntas e do efetuador final através da relação:

$$\xi = J(q)\dot{q} \quad (2.22)$$

que coloca de forma explícita a dependência da configuração atual do manipulador no cálculo de  $J$ . Tal mapeamento implica que qualquer vetor de velocidades do efetuador final é uma combinação linear das colunas da matriz jacobiana:

$$\xi = J_1\dot{q}_1 + J_2\dot{q}_2 + \cdots + J_n\dot{q}_n \quad (2.23)$$

Uma vez que  $\xi \in \mathbb{R}^6$  o manipulador só conseguirá desempenhar uma velocidade arbitrária se todas as colunas de  $J$  forem linearmente independentes, ou seja, quando o posto da matriz jacobiana for igual a 6. Para uma matriz  $J \in \mathbb{R}^{6 \times n}$  é sempre verdade que  $\text{posto}(J) \leq \min(6, n)$ . Com efeito, no caso do manipulador planar 3R tínhamos  $n = 3$  e desse modo  $\text{posto}(J) \leq 3$  evidenciando o fato de que o manipulador não consegue desenvolver qualquer velocidade no espaço de trabalho.

Configurações para as quais o posto da matriz jacobiana é menor que o máximo possível (em inglês *rank deficiency*) são denominadas de *singularidades* ou configurações singulares. Identificar configurações singulares é de grande importância para o controle de manipuladores por diversos motivos, entre eles [Spong et al., 2020]:

- Singularidades representam configurações nas quais a mobilidade do manipulador é reduzida, ou seja, não é possível impor um movimento arbitrário ao efetuador final.
- Quando o manipulador está em uma singularidade, pode haver infinitas soluções para o problema de cinemática inversa.
- Nas proximidades de uma singularidade, pequenas variações nas velocidades no espaço operacional podem causar velocidades ilimitadas no espaço das juntas.

Quando a matriz jacobiana é quadrada, podemos usar o fato de que seu determinante se anula em configurações singulares, contudo ainda assim o problema de determinar o conjunto de configurações é difícil, pois precisamos resolver a equação

$$\det(J(q)) = 0 \quad (2.24)$$

que geralmente envolve termos com alto grau de não linearidade. Nas próximas seções, examinaremos técnicas que viabilizam um esquema de controle capaz de se afastar de configurações singulares ao explorar a redundância presente em manipuladores planares. Isso se refere a casos em que a matriz Jacobiana é retangular, apresentando mais velocidades no espaço das juntas (colunas) do que velocidades possíveis no espaço de trabalho (linhas).



### 2.3.3 Cinemática Inversa Diferencial

Se a matriz jacobiana definida na equação (2.22) é quadrada e não singular, podemos resolver o problema de cinemática inversa através da simples inversão da mesma:

$$\dot{q} = J^{-1}(q)\xi \quad (2.25)$$

Se a configuração inicial do manipulador  $q(0)$  é conhecida as posições das juntas podem ser calculadas integrando as velocidades no tempo:

$$q(t) = q(0) + \int_0^t \dot{q}(\tau) d\tau \quad (2.26)$$

A integração em tempo discreto pode ser feita utilizando técnicas de métodos numéricos. A abordagem mais simples consiste na integração pelo método de Euler, onde as posições das juntas no instante atual  $t_k$  são utilizadas para calcular a configuração do manipulador no instante posterior  $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ :

$$q(t_{k+1}) = q(t_k) + \dot{q}(t_k)\delta_t \quad (2.27)$$

onde  $\delta_t$  é um intervalo de integração apropriado (tempo de amostragem).

O esquema de controle descrito acima é conhecido como *Resolved Rate Motion Control* (RRMC), o qual consegue de maneira simples e elegante o solucionar o problema de gerar movimentos no efetuador final de velocidade constante sem recorrer à soluções numéricas ou analíticas para o cálculo da cinemática inversa [Corke, 2023]. Tal esquema é útil na geração de trajetórias cartesianas no espaço de trabalho, conhecidas como trajetórias cartesianas, uma vez que a componente translacional da velocidade do efetuador final tem direção constante ao longo de todo o trajeto pode ser tratada de maneira independente da componente rotacional.

Como exemplo, ainda considerando o manipulador planar 3R, poderíamos apenas especificar um vetor de velocidades  $\xi$  que leva em conta as componentes do plano  $xy$  da velocidade linear e a componente de rotação angular em torno do eixo  $z$  de modo que:

$$\xi = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Assim a matriz jacobiana se torna livre das linhas que possuem apenas zeros:

$$J(q) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

e contanto que não seja singular pode ser facilmente invertida. Desse modo, se quisermos por exemplo, gerar um movimento retilíneo no efetuador final paralelo ao eixo  $x$  do plano  $xy$  com velocidade constante, basta tomar  $\xi = \begin{bmatrix} v_x & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ .

## 2.4 Manipuladores redundantes

Manipuladores cinematicamente redundantes, são aqueles que possuem mais juntas do que o número estritamente necessário para a execução de uma determinada tarefa. Este excedente de juntas confere a esses manipuladores um nível aumentado de destreza, permitindo-lhes navegar em ambientes complexos com maior flexibilidade. Nesta seção vamos introduzir uma solução geral para o problema da cinemática inversa diferencial quando a matriz jacobiana é retangular, envolvendo o conceito da sua *pseudo-inversa*. Em seguida, utilizando a decomposição em valores singulares de  $J$  iremos fornecer uma descrição geométrica e qualitativa da destreza associada à uma dada configuração através dos conceitos do elipsoide e da medida de manipulabilidade. Por fim, vamos ver como podemos utilizar a solução geral fornecida pela pseudo-inversa para otimizar diferentes índices de performance com o objetivo de evitar singularidades e limites mecânicos das juntas.

### 2.4.1 Pseudo-Inversa da Jacobiana

Num manipulador cinematicamente redundante, a matriz jacobiana de dimensão  $m \times n$  será retangular ( $m < n$ ). Isso significa que  $J$  possui mais colunas do que linhas e nesse caso existem infinitas soluções para o problema de cinemática inversa diferencial. Uma solução viável é formular o problema como um de otimização linear com restrições, onde a solução ótima é obtida minimizando o custo quadrático das velocidades das juntas:

$$\min_{\dot{q}} \|\dot{q} - \dot{q}_0\|^2 \text{ sujeito a } J\dot{q} = \xi \quad (2.30)$$

onde  $\dot{q}_0$  é um vetor de velocidades arbitrário. Pode ser mostrado que nesse caso, a solução ótima é dada por [Siciliano, 2009]:

$$\dot{q} = J^\dagger \xi + (I_n - J^\dagger J) \dot{q}_0 \quad (2.31)$$

onde a matriz  $J^\dagger$  é conhecida como *matriz inversa de Moore-Penrose* ou apenas *pseudo-inversa* de  $J$  e é dada por:

$$J^\dagger = J^\top (JJ^\top)^{-1} \quad (2.32)$$

Vale notar que o termo  $I_n - J^\dagger J$  atua projetando o vetor  $\dot{q}_0$  no espaço nulo de  $J$ . Com efeito, aplicando a jacobiana à esquerda na equação (2.31) temos:

$$\begin{aligned}
J\dot{q} &= JJ^\dagger \xi + J(I_n - J^\dagger J)\dot{q}_0 \\
&= JJ^\top (JJ^\top)^{-1} \xi + (J - JJ^\top (JJ^\top)^{-1} J)\dot{q}_0 \\
&= \xi + (J - J)\dot{q}_0 \\
J\dot{q} &= \xi
\end{aligned}$$

permitindo que o manipulador realize movimentos internos no espaço das juntas que que não afetam a velocidade  $\xi$  do efetuador final.

### 2.4.2 Medida de Manipulabilidade

Uma maneira de investigar mais a fundo o mapeamento linear estabelecido pela jacobiana é entender como a mesma “deforma” o vetor  $\dot{q}$  de entradas para produzir o vetor  $\xi$  de saídas. Para isso, podemos considerar o disco formado pelo conjunto de velocidades com norma unitária:

$$\|\dot{q}\|^2 = q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_n^2 \leq 1 \quad (2.33)$$

Substituindo a solução de menor norma  $\dot{q} = J^\dagger \xi$ :

$$\begin{aligned}
\|\dot{q}\|^2 &= \dot{q}^\top \dot{q} \\
&= (J^\dagger \xi)^\top J^\dagger \xi \\
&= \xi^\top (J^\top (JJ^\top)^{-1})^\top J^\top (JJ^\top)^{-1} \xi \\
&= \xi^\top (JJ^\top)^{-1} (JJ^\top) (JJ^\top)^{-1} \xi \\
\|\dot{q}\|^2 &= \xi^\top (JJ^\top)^{-1} \xi \leq 1
\end{aligned} \quad (2.34)$$

A equação (2.34) define uma região no espaço de trabalho conhecido como *elipsoide de manipulabilidade* que representa todas as velocidades possíveis do efetuador final para uma dada configuração do manipulador. Esse fato pode ser verificado ao considerarmos a decomposição em valores singulares (SVD) da jacobiana  $J = U\Sigma V^\top$ :

$$\begin{aligned}
\|\dot{q}\|^2 &= \xi^\top (U\Sigma V^\top V\Sigma^\top U^\top)^{-1} \xi \\
&= \xi^\top (U\Sigma^2 U^\top)^{-1} \xi \\
&= \xi^\top U\Sigma^{-2} U^\top \xi \\
\|\dot{q}\|^2 &= (U^\top \xi)^\top \Sigma^{-2} (U^\top \xi)
\end{aligned} \quad (2.35)$$

onde sabemos que  $U$  e  $V$  são matrizes ortogonais, isto é  $U^{-1} = U^\top$  e  $V^{-1} = V^\top$ . Além disso a matriz

$$\Sigma^{-2} = \begin{bmatrix} \sigma_1^{-2} & & & \\ & \sigma_2^{-2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_m^{-2} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

é diagonal e os termos que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m$  são os valores singulares de  $J$ . Por fim, ao fazermos a substituição  $w = U^\top \xi$  podemos reescrever a equação (2.35) como:

$$w^\top \Sigma^{-2} w = \sum_{i=1}^m \frac{w_i^2}{\sigma_i^2} \leq 1 \quad (2.37)$$

evidenciado que o disco é mapeado num elipsoide com eixos alinhados a um sistema de coordenadas rotacionado por  $U^\top$ . No sistema de coordenadas original, os semi-eixos do elipsoide são dados pelos vetores  $\sigma_i u_i$ .

A medida de manipulabilidade  $\mu$  é definida como o produto dos valores singulares de  $J$ :

$$\mu = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m \quad (2.38)$$

que é proporcional ao volume do elipsoide de manipulabilidade. Ao passo que nos aproximamos de uma singularidade, um ou mais dos valores singulares de  $J$  se aproximam de zero, reduzindo o volume do elipsoide e consequentemente a destreza do manipulador. Isso pode ser visualizado na figura 2.4 onde para o braço planar 3R, o elipsoide de manipulabilidade é mostrado para diferentes configurações do manipulador e vai se tornando cada vez mais achatado à medida que nos aproximamos do limite do espaço de trabalho.

### 2.4.3 Resolução de Redundância

Ao estabelecermos a solução geral dada pela equação (2.31), dissemos que o vetor  $\dot{q}_0$  pode ser escolhido arbitrariamente. Uma possibilidade é tomá-lo de forma a maximizar algum índice de performance  $w$ , para isso escolhendo o vetor na direção do gradiente [Siciliano, 2009]:

$$\dot{q}_0 = k_0 \left( \frac{\partial w(q)}{\partial q} \right)^\top \quad (2.39)$$

onde  $k_0 > 0$  é uma constante positiva que determina o tamanho do passo.

Uma escolha natural para o índice de performance  $w$  é a *medida de manipulabilidade de Yoshikawa* [Yoshikawa, 1983]:

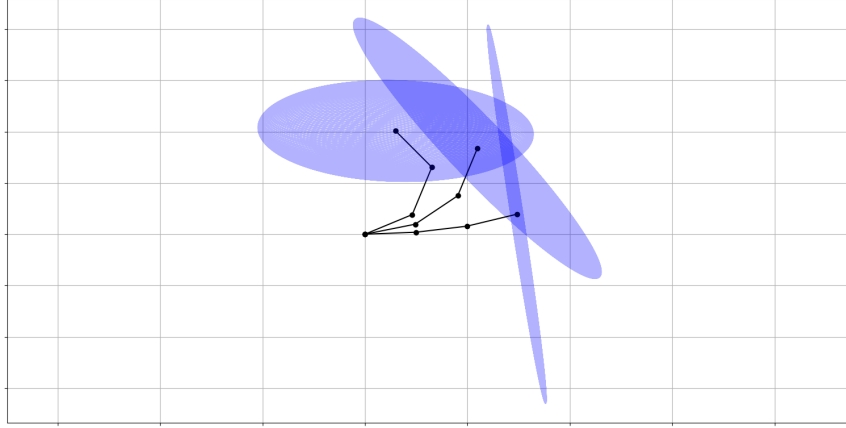


Figura 2.4: Elipsoide de manipulabilidade para diferentes configurações do manipulador planar 3R.

$$w(q) = \sqrt{\det(J(q)J(q)^\top)} \quad (2.40)$$

onde vale ressaltar que é equivalente àquela definida na equação (2.38) uma vez que se  $\lambda_i$  são os autovalores de  $JJ^\top$  então  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ .

Uma alternativa ao cálculo da 2.40 é utilizar uma métrica mais simples como a *distância para os limites mecânicos das juntas* dada por:

$$w(q) = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{q_i - \bar{q}_i}{q_{iM} - q_{im}} \right)^2 \quad (2.41)$$

Ao maximizar tal índice, espera-se que o manipulador mantenha-se próximo ao ponto central de atuação de cada junta, evitando assim configurações singulares no limite do espaço de trabalho. Além disso, o vetor gradiente pode ser calculado de maneira analítica onde cada coordenada é dada por:

$$\frac{\partial w(q)}{\partial q_i} = -\frac{1}{n} \frac{q_i - \bar{q}_i}{(q_{iM} - q_{im})^2} \quad (2.42)$$

Outro ponto a salientar é que a escolha do tamanho do passo  $k_0$  é crucial para a performance do algoritmo [Siciliano and Khatib, 2008]. Se  $k_0$  for muito pequeno o processo de otimização pode se tornar muito lento, enquanto que se  $k_0$  for muito grande isso pode a uma diminuição ou até mesmo não convergência do valor de  $w$  devido a oscilações em torno do ponto de máximo local.

No próximo capítulo, iremos aplicar os conceitos apresentados até agora na concepção de um ambiente simulado para um manipulador redundante com cinco graus de liberdade. O objetivo principal será a execução de trajetórias cartesianas no espaço de trabalho

$\mathcal{T} \in \text{SE}(3)$  que levam apenas em consideração a posição do efetuador e com isso explorar a resolução de redundância para otimizar diferentes índices relacionados a configuração do manipulador durante a execução da trajetória.

# Capítulo 3

## Implementação

Neste capítulo, iremos explorar as ferramentas e métodos utilizados na concepção de um ambiente robótico simulado para um manipulador com cinco graus de liberdade do tipo 5R. O manipulador tem uma cadeia cinemática simples que pode ser entendida como a composição de dois outros braços planares, mas que permite que a posição do efetuador final não esteja limitada, por exemplo, a um plano de altura constante. Começaremos explorando a modelagem da cadeia cinemática e também a representação do modelo virtual do robô dentro do simulador *Webots*. Em seguida, iremos definir a arquitetura de comunicação proposta para se controlar o manipulador utilizando o conceito de *Actions* presente no framework *Robot Operating System* (ROS), o qual permitiu uma implementação modularizada para execução dos experimentos. Por fim, iremos detalhar o esquema de controle e bibliotecas utilizadas na implementação do algoritmo RRMC para execução de trajetórias retilíneas bem como os experimentos realizados para se avaliar a resolução de redundância na execução de tais trajetórias.

### 3.1 Simulação de manipuladores robóticos

Simuladores de física tornam possível a pesquisa e desenvolvimento na robótica, pois permitem que os pesquisadores testem e validem métodos teóricos inicialmente ou exclusivamente em um simulador, uma vez que os robôs em si são frequentemente caros, frágeis e escassos [Collins et al., 2021]. Os simuladores oferecem um ambiente acessível e barato de prototipação com uma variedade de robôs disponíveis e prontos para uso, sem o risco de danificar o equipamento físico economizando assim tempo e recursos. A simulação pode ser executada mais rápido do que em tempo real (o que é especialmente importante para abordagens baseadas em aprendizado ou análises de natureza estatística), é paralelizável e não requer intervenção física para reiniciar um ambiente.

Para se implementar um ambiente simulado diversas características do simulador devem ser levadas em conta, tais como: o modelo do robô a ser simulado, os sensores e atuadores disponíveis, o ambiente físico a ser simulado (por exemplo, correntes de ar, am-

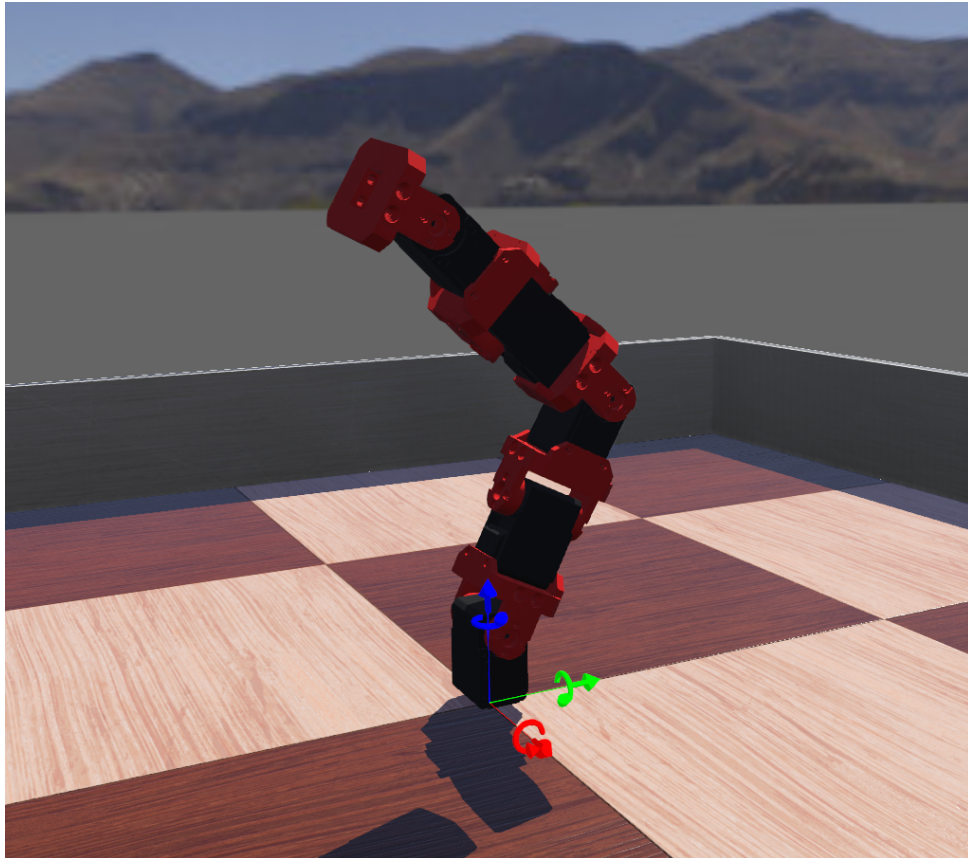


Figura 3.1: Modelo virtual do manipulador no Webots.

bientes aquáticos), linguagens de programação disponíveis para controle do robô, formatos suportados, extensibilidade, documentação entre outros.

Neste trabalho, optamos por utilizar a linguagem de programação *Python* devido à disponibilidade de pacotes para computação numérica e visualização (*Numpy*, *Pandas* e *Matplotlib*) bem como voltadas exclusivamente para a aplicações relacionadas à robótica como *Robotics Toolbox for Python* [Corke and Haviland, 2021]. O simulador escolhido foi o Webots [Michel, 2004] devido a possibilidade de prototipar o modelo virtual do manipulador do zero aliado a testes rápidos de diversos designs. Além disso, o Webots oferece suporte oficial ao ROS, o que permitiu a implementação de um sistema modularizado, onde cada componente executa uma tarefa específica, facilitando a manutenção e a extensão do mesmo, inclusive para o interfaceamento com um robô real.

## Modelagem da Cadeia Cinemática

A estrutura cinemática do manipulador 5R foi pensada de modo a ser uma simples cadeia de juntas rotacionais, permitindo uma fácil construção do robô real, como por exemplo, sendo composto por uma sequência de servo motores conectados por soquetes como ilustrado na figura 3.1. A cadeia cinemática é similar ao que já vimos no exemplo dos braço planar 3R, contudo juntas consecutivas possuem eixos de rotação ortogonais



entre si. Com isso, a posição do efetuador final não fica restrita a um plano perpendicular ao eixo de rotação das juntas, o que permite especificarmos no espaço de trabalho, vetores com três coordenadas para compor a trajetória a ser seguida. Como  $n = 5$  e  $m = 3$  o manipulador tem grau de redundância de duas juntas excedentes. A tabela 3.1 resume os parâmetros DH utilizados para modelar a cadeia cinemática.

| Elo | $\theta$   | $d$ | $a$  | $\alpha$ |
|-----|------------|-----|------|----------|
| 1   | $\theta_1$ | 0   | 0.06 | $\pi/2$  |
| 2   | $\theta_2$ | 0   | 0.06 | $-\pi/2$ |
| 3   | $\theta_3$ | 0   | 0.06 | $\pi/2$  |
| 4   | $\theta_4$ | 0   | 0.06 | $-\pi/2$ |
| 5   | $\theta_5$ | 0   | 0.02 | $\pi/2$  |

Tabela 3.1: Parâmetros DH para o manipulador 5R.

A fixação de frames imposta pela convenção DH nem sempre permite que o frame da base do manipulador coincida com o frame do mundo, introduzindo nesse caso a utilização de *offsets* nos parâmetros variáveis das juntas, ou transformações fixas entre os frames que não mudam conforme as juntas são atuadas. Optamos por adotar uma abordagem mais direta, onde introduzimos a transformação  $\mathbf{T}_0^w$  que relaciona o frame do mundo  $\{w\}$  com o frame da base do manipulador  $\{0\}$ :

$$\mathbf{T}_0^w = Trans_z(0.04) \cdot Rot_z(\pi) \cdot Rot_y(\pi/2) \quad (3.1)$$

Assim, para se calcular a cinemática direta do manipulador, prosseguimos de maneira usual na cadeia cinemática adicionando a transformação  $\mathbf{T}_0^w$  ao início da multiplicação matricial:

$$\mathbf{T}_5^w = \mathbf{T}_0^w \cdot \mathbf{T}_1^0 \cdot \mathbf{T}_2^1 \cdot \mathbf{T}_3^2 \cdot \mathbf{T}_4^3 \cdot \mathbf{T}_5^4 \quad (3.2)$$

Por outro lado, durante a etapa da cinemática inversa diferencial, precisamos especificar vetores livres  $\xi^w$  que indicam a velocidade cartesiana do efetuador no mundo em termos do frame da base do manipulador. Para isso, utilizamos a matriz de rotação da transformação inversa (do frame  $\{0\} \rightarrow \{w\}$ ), isto é:

$$\xi^0 = Rot(\mathbf{T}_0^w)^\top \xi^w \quad (3.3)$$

## Modelo dinâmico do manipulador

Com o intuito de conferir um caráter mais realista para a simulação, um modelo dinâmico para o robô foi construído especificando as propriedades físicas e geometrias de colisão de cada elo no simulador. A figura 3.3 mostra as formas primitivas do tipo *Box*

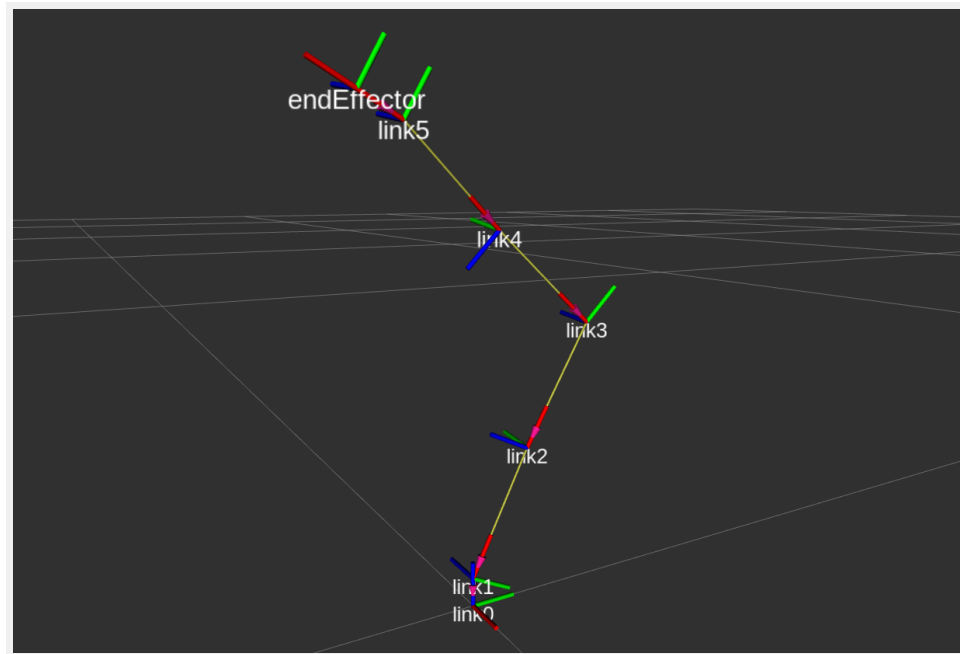


Figura 3.2: Cadeia cinemática visualizada no RViz.

(caixas) que foram usadas para compor a geometria de cada par servo-soquete que compõe um elo da cadeia. Para o simulador computar o modelo dinâmico ao longo do tempo, foram fornecidas as informações de massa do servo-motor (disponível na especificação do fabricante) e no caso dos soquetes, a densidade do material PLA foi utilizada para estimar sua massa com base no volume da geometria modelada (conjunto de caixas). Além disso, a definição das matrizes de inércia ficou por conta do próprio simulador, que estima seu valor com base na massa fornecida e na posição e orientação das primitivas utilizadas durante a modelagem. Vale ressaltar que a adição das propriedades dinâmicas tem caráter apenas de aproximação de um cenário mais real, tendo em vista que o esquema de controle proposto atua apenas na velocidade das juntas ao passo que a posição do motor é controlada de maneira automática pelo simulador através de um PID intrínseco à simulação de um dispositivo como o motor.

## 3.2 Arquitetura de comunicação

A comunicação do controlador com o ambiente simulado do robô foi feita através do uso do framework ROS, que consiste num conjunto de bibliotecas e pacotes de software que facilitam a troca de mensagens entre diferentes componentes de um sistema robótico. O próprio simulador Webots oferece suporte nativo ao ROS, com uma documentação detalhada de como configurar um projeto e o uso básico de troca de mensagens entre diferentes processos.

A arquitetura de comunicação do ROS é baseada em uma estrutura de grafo, onde nós

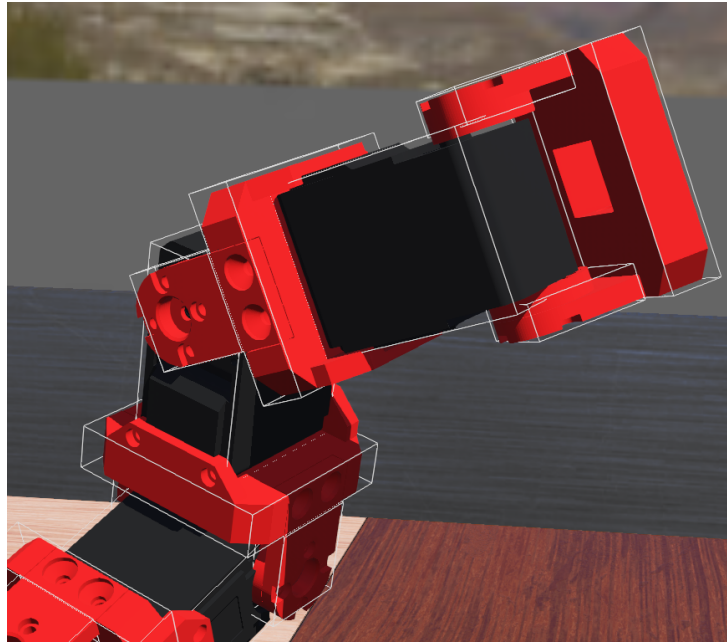


Figura 3.3: Geometria de colisão do modelo virtual do manipulador.

representam processos individuais que interagem com outros nós recebendo e enviando mensagens, através de tópicos. Idealmente, um nó deve ser responsável por uma única tarefa modular, como controlar os motores do robô ou enviar dados coletados por um sensor de distância.

Os tópicos são os canais pelos quais os nós trocam mensagens e seguem um modelo *publisher/subscriber*, onde nós publicam mensagens em um tópico e outros nós se inscrevem para receber essas mensagens, de maneira completamente anônima. As mensagens passadas nos tópicos podem variar amplamente e geralmente são definidas pelo usuário, cobrindo dados de sensores, comandos de controle de motores, informações de estado, comandos de atuadores entre outros.

## Serviços e Ações no ROS

Serviços e ações constituem outras formas de comunicação entre nós no grafo do ROS e implementam uma abordagem de troca de mensagens do tipo cliente/servidor. Serviços representam ações que um nó pode executar com um início e fim definidos, retornando um único resultado e são normalmente usados para tarefas que possuem requisição e retorno, como por exemplo capturar uma imagem de um único quadro, dispensando o processamento contínuo. Por outro lado, ações são destinadas a tarefas de longa duração e são construídas com base em diferentes tópicos e serviços. Ações consistem em três partes: um objetivo, um *feedback* e um resultado. Um nó do tipo cliente de ação envia um objetivo para um nó servidor de ação, que reconhece a requisição, retorna um fluxo continua de dados através de um feedback até que a ação seja concluída ou cancelada,

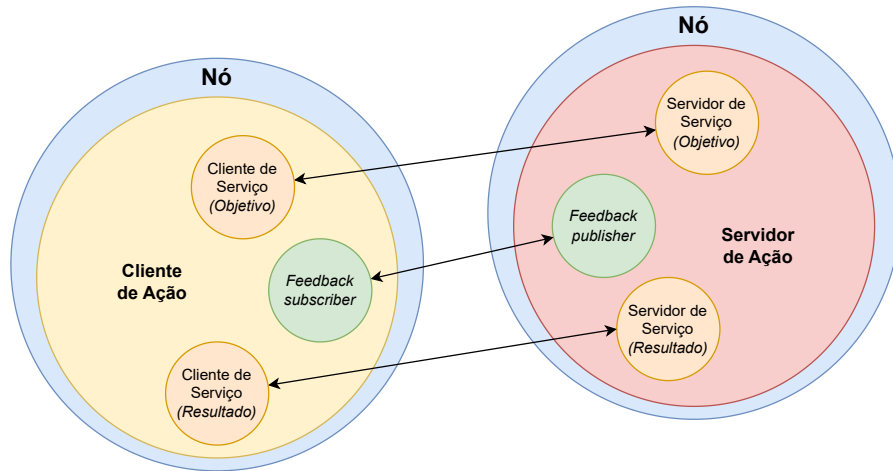


Figura 3.4: Componentes que constituem uma ação dentro do ROS. Adaptado de [Bassa, 2023, p. 36].

quando por fim retorna um resultado.

## Grafo de comunicação no ROS

Com o objetivo de se executar trajetórias no espaço de trabalho do manipulador, a arquitetura de comunicação foi projetada de modo especificar um objetivo através de uma ação do tipo **trajectory\_action** (nós *trajectory\_action\_server* e *trajectory\_action\_client*) e controlar o manipulador (nós *snake\_driver* e *snake\_controller*). A arquitetura de comunicação proposta para o controle do manipulador é ilustrada no grafo da figura 3.5, onde temos nós, tópicos e ações associados a execução de uma trajetória. A seguir temos uma breve descrição do funcionamento de cada nó.

- **snake\_driver** - Nó instanciado pelo simulador, responsável por controlar os motores do manipulador. Está inscrito no tópico **target\_joint\_states** que recebe a configuração das juntas desejada para o manipulador e publica no tópico **joint\_states** os valores lidos pelos sensores de posição de cada motor. Este nó pode ser substituído por um nó que se comunique com um robô real, bastando que a interface de comunicação seja mantida, garantindo uma transferência natural do ambiente simulado para testes físicos.
- **snake\_controller** - Nó responsável por implementar a lógica de controle do manipulador. Este nó está inscrito/publica nos dois tópicos anteriores para interação com o *driver* do manipulador. Além disso, se inscreve num tópico **rrc\_input**, recebendo parâmetros de controle do algoritmo 1 e publica no tópico **rrc\_output** dados relativos à posição do efetuador final e métricas de desempenho.
- **trajectory\_action\_server** - Nó responsável por receber um objetivo de posição e

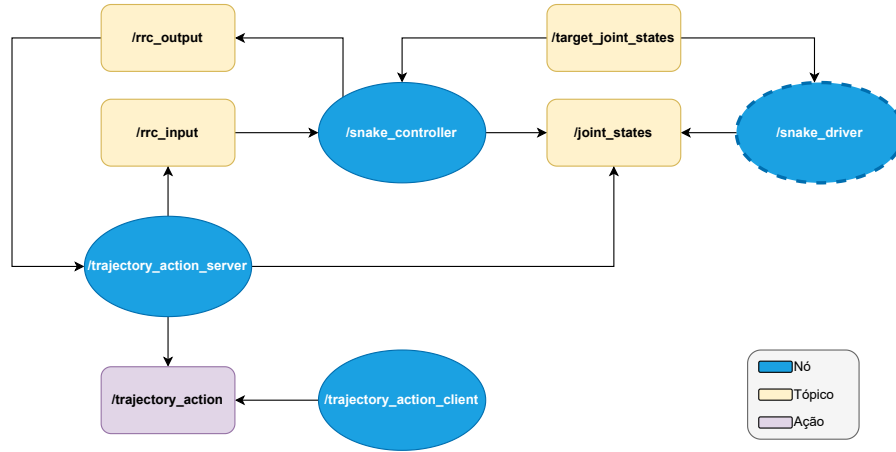


Figura 3.5: Arquitetura de comunicação proposta para controle do manipulador.

informações do efetuador final para execução de uma trajetória no espaço de trabalho do manipulador, publicando no tópico `rrc_input` os parâmetros de controle.

- **trajectory\_action\_client** - Nó responsável por enviar um objetivo de posição para o servidor de ação `trajectory_action_server` e receber o resultado da execução da trajetória. Através da interface de ação, o cliente recebe feedback do progresso da execução da trajetória e o resultado final, salvando todos os dados em um arquivo de *log*, para posterior análise.

### 3.3 O Algoritmo *Resolved Rate Motion Control*

Para realizar o controle da trajetória do manipulador e também a resolução da redundância, foi utilizado o esquema de controle *Resolved Rate Motion Control* (RRMC) definido no capítulo anterior. A figura 3.6 ilustra o diagrama de blocos do controlador RRMC implementado pelo nó `snake_controller`. Dada uma taxa de variação da posição do efetuador final  $\xi$  e um vetor de velocidades das juntas  $\dot{q}_0$ , o controlador atua atualizando a configuração do manipulador de acordo com a equação 2.31.

Para a realização dos experimentos, foi implementado o algoritmo 1 (código disponível em <https://github.com/hugotallys/snakesim>) que escolhe o vetor  $\dot{q}_0$  de acordo com o gradiente dado pela equação 2.39. As duas métricas apresentadas anteriormente foram calculadas: *distância para os limites mecânicos das juntas* e *medida de manipulabilidade de Yoshikawa*. No primeiro caso, o gradiente é calculado analiticamente de acordo com a equação 2.42. Já para a manipulabilidade, o gradiente é estimado numericamente através de diferenças finitas, considerando um passo  $h$  suficientemente pequeno.

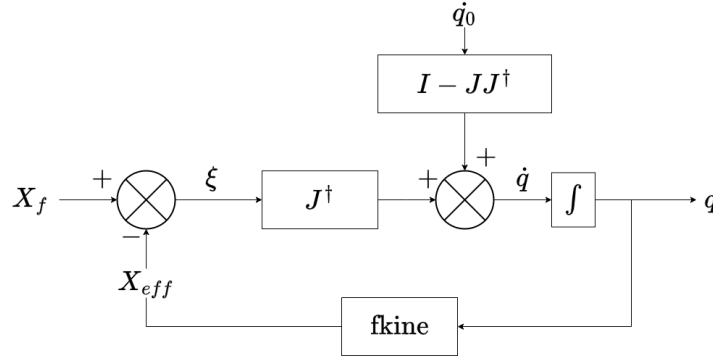


Figura 3.6: Diagrama de blocos do controlador RRM

**Algoritmo 1** *Resolved Rate Motion Controller* - Atualizando o estado das juntas

---

```

1: procedure UPDATEJOINTPOSITION( $q, \xi, k_0, \delta_t, \text{metricName}$ )
2:    $\xi \leftarrow \text{Rot}(\mathbf{T}_0^w)^\top \xi$ 
3:    $J \leftarrow \text{Jacobian}(q)$ 
4:    $J^\dagger \leftarrow J^\top (JJ^\top)^{-1}$ 
5:    $n \leftarrow \text{length}(q)$ 
6:    $\dot{q}_0 \leftarrow \text{array}(\text{size} : n)$ 
7:   for  $i \leftarrow 0$  to  $n - 1$  do ▷ Calculando o gradiente da métrica
8:     if  $\text{metricName} = \text{joint\_distance}$  then
9:        $q_{mid} \leftarrow 0.5 \times (q_{\max}[i] + q_{\min}[i])$ 
10:       $\dot{q}_0[i] \leftarrow (-k_0/n) \times (q[i] - q_{mid}) \div (q_{\max}[i] - q_{\min}[i])^2$ 
11:    else if  $\text{metricName} = \text{manipulability}$  then
12:       $q_+, q_- \leftarrow \text{copy}(q), \text{copy}(q)$ 
13:       $q_+[i] \leftarrow q_+[i] + h$ 
14:       $q_-[i] \leftarrow q_-[i] - h$ 
15:       $\dot{q}_0[i] \leftarrow k_0 \times (\text{manipulability}(q_+) - \text{manipulability}(q_-)) \div (2 \times h)$ 
16:    end if
17:  end for
18:   $\dot{q} \leftarrow J^\dagger \xi + (I - J^\dagger J) \dot{q}_0$ 
19:  return  $\text{clipLimits}(q + \dot{q} \delta_t, q_{\max}, q_{\min})$  ▷ Restringe aos limites das juntas
20: end procedure

```

---

## Experimentos

Os experimentos focaram na avaliação da resolução de redundância sob valores variados do ganho ( $k_0$ ) e envolveram dois cenários. No primeiro cenário, o manipulador foi controlado de modo a otimizar a distância para o limite mecânico das juntas, executando movimentos internos no seu espaço nulo, mantendo a posição do efetuador final  $E_0$  estacionária. No segundo cenário, além de movimentos internos para otimizar seu índice de manipulabilidade, o manipulador seguiu uma trajetória cartesiana entre a posição atual  $E_0$  e um outro ponto no seu espaço de trabalho  $E_f$ . Os índices de desempenho, configuração das juntas e a posição do efetuador final foram registrados na simulação de modo a se avaliar a eficácia do esquema da resolução de redundância na execução de tais experimentos.

Em cada iteração do *loop de trajetória*, o vetor de velocidade é calculado e fornecido como entrada para o controlador RRMC. A execução da trajetória para sempre que o número máximo de iterações é atingido (em ambos os cenários, definido como 500) ou se a norma do vetor de erro de posição se torna menor que 0,01 (apenas no segundo cenário). Para avaliar o desempenho em cada trajetória, calculamos a pontuação:

$$I(w) = \int_0^t |w(q(\tau))| d\tau \quad (3.4)$$

a fim de capturar informações não apenas sobre o estado final da trajetória, mas também ao longo de toda a sua execução.

O fluxograma da figura 3.7 detalha o processo geral para a execução das trajetórias do manipulador robótico. Inicialmente, são escolhidas duas configurações ( $q_0$  e  $q_f$ ). Em seguida, calcula-se as posições iniciais e finais ( $E_0$  e  $E_f$ ) do efetuador final em ambas as configurações. Verifica-se se há colisão com o chão (plano  $z = 0$ ): caso positivo, retorna-se à escolha das configurações. Se não há colisão, escolhe-se um ganho  $k_0$  e calcula-se o erro de posição  $\xi$ . Avalia-se se há condições de parada da trajetória; se sim, os resultados são salvos e a trajetória é reiniciada com um novo ganho  $k_0$ . Se não, atualiza-se  $E_0$  conforme o RRMC e o processo continua até não haver mais ganhos  $k_0$  para escolher, concluindo o experimento.

Vale ressaltar que devido a natureza complexa da determinação do espaço de trabalho do manipulador, procurou-se simplesmente escolher os pontos iniciais e finais de modo que sejam posições atingíveis, deixando a cargo do controlador a execução da melhor trajetória cartesiana entre os dois pontos. Além disso, a escolha de tais pontos foi feita de maneira aleatória ao longo de diversos experimentos de modo a não privilegiar nenhuma configuração específica do manipulador.

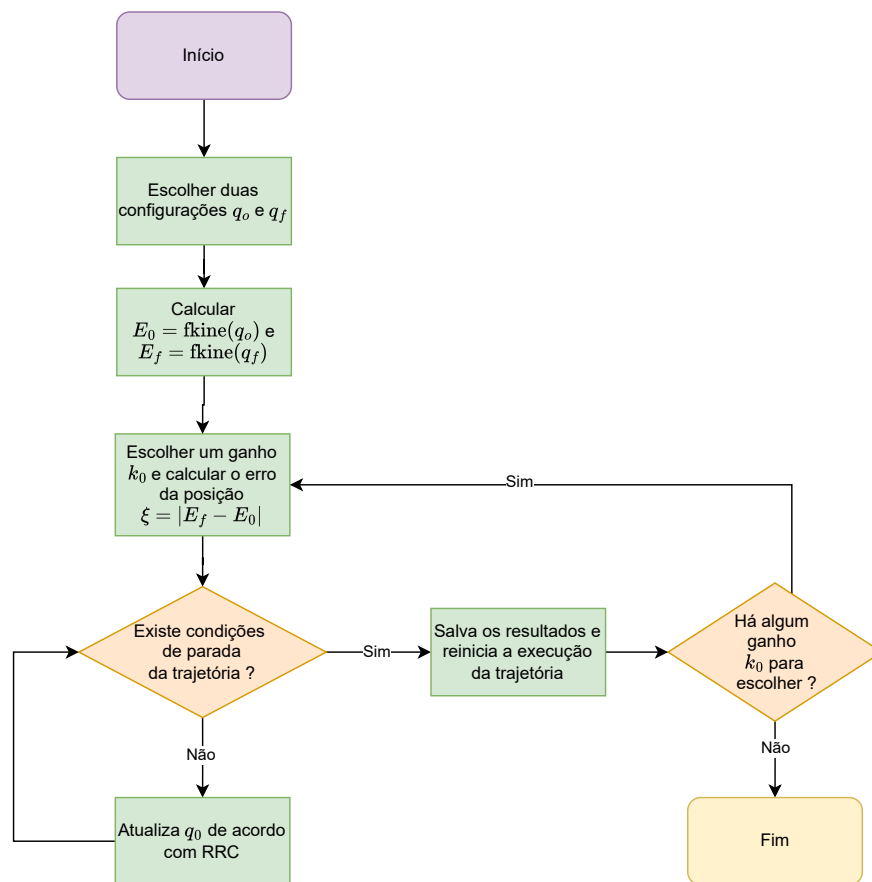


Figura 3.7: Etapas seguidas na execução de um experimento.



# Capítulo 4

## Resultados

Este capítulo apresenta os resultados obtidos a partir da simulação da execução de trajetórias cartesianas para o manipulador 5R utilizando o esquema de controle RRMC. Em cada cenário, foi realizado um conjunto de 4 execuções de uma mesma trajetória variando-se o ganho  $k_0$ , com o objetivo de avaliar a eficácia do controlador em otimizar os índices de desempenho fornecidos, submetido a diferentes restrições cinemáticas.

### 4.1 Cenário 1

No primeiro cenário, a configuração do manipulador muda para trazer algumas posições das juntas o mais próximo possível de zero, enquanto a restrição primária imposta pela velocidade do efetuador final  $\xi = 0$  mantém a configuração final do manipulador numa solução particular, como podemos ver na figura 4.2. A medida que aumentamos o ganho  $k_0$ , a configuração do manipulador converge mais rapidamente para a solução final e na figura 4.1 podemos ver os valores menores da distância para os limites mecânicos das juntas sendo obtidos, ao custo de um valor de erro ligeiramente maior, como indicado na tabela 4.1. Por fim, a figura 4.3 mostra a posição do efetuador final constante ao longo de todo o experimento, mostrando que a restrição primária não é violada.

| $k_0$ | $I(w)$        | Erro posição (m)  |
|-------|---------------|-------------------|
| 0     | 0.8729        | <b>1.8535e-06</b> |
| 200   | 0.4829        | 0.0013            |
| 400   | 0.4488        | 0.0023            |
| 800   | <b>0.4435</b> | 0.0048            |

Tabela 4.1: Valores de desempenho obtidos na execução dos experimentos do primeiro cenário.

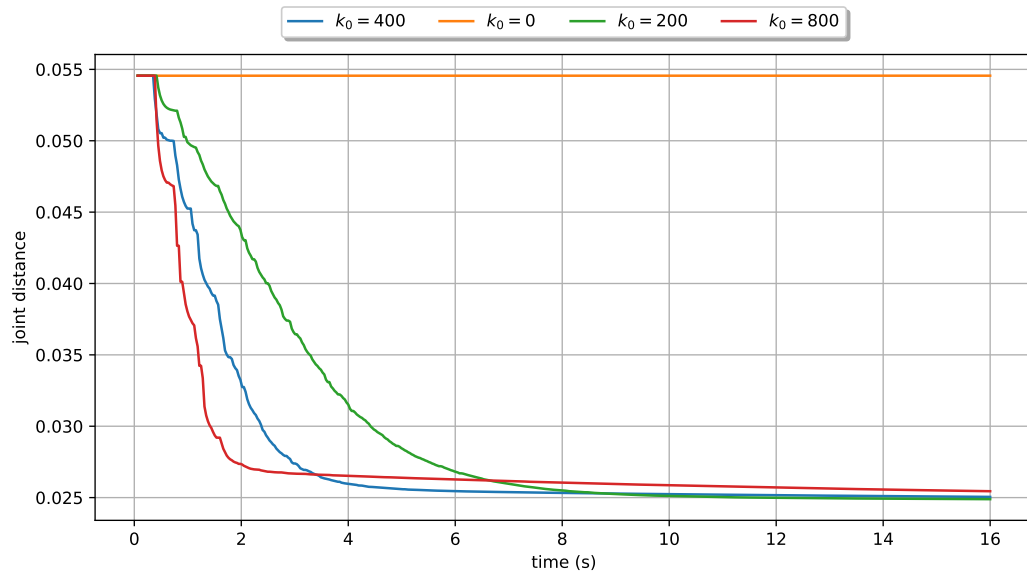


Figura 4.1: Diminuição da distância para o limite mecânico das juntas ao longo tempo.

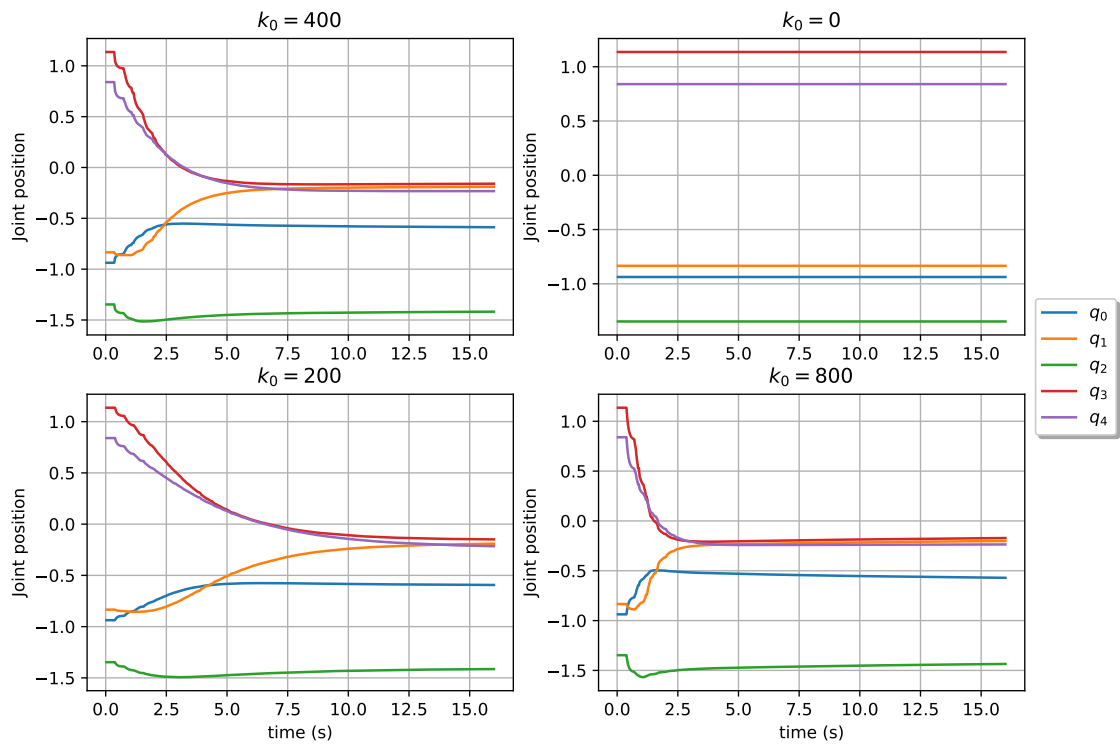


Figura 4.2: Diferentes valores do ganho, influenciam diretamente na velocidade de convergência para a solução particular.

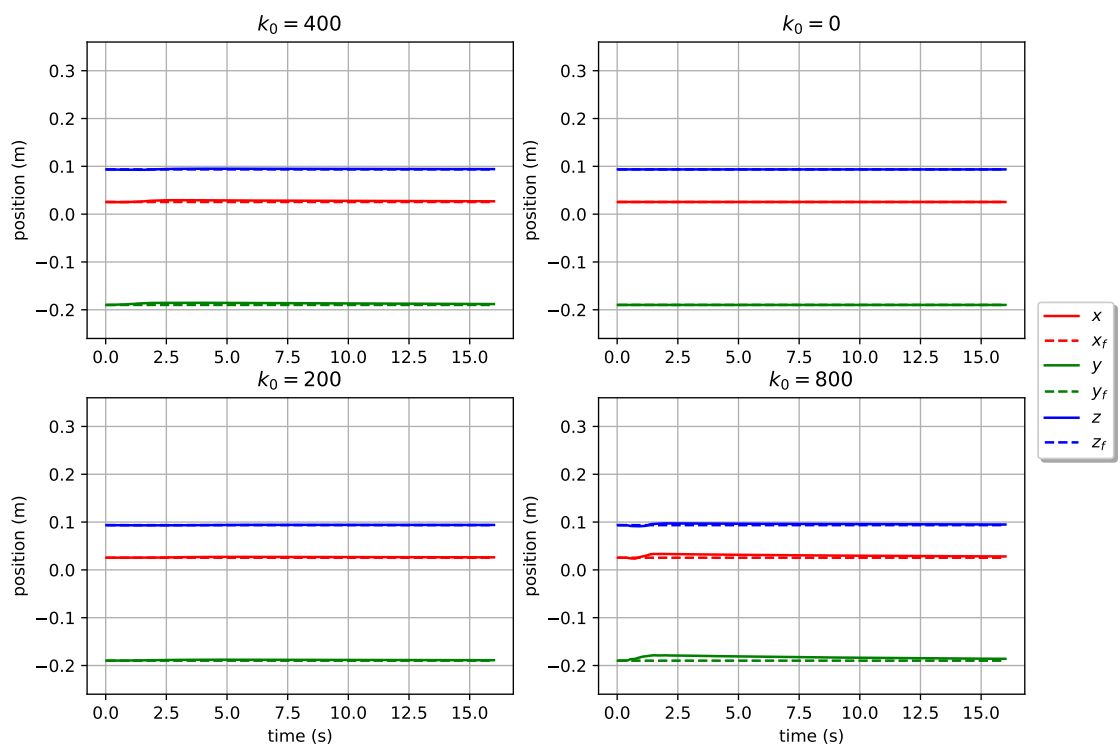


Figura 4.3: Posição do efetuador final mantém-se constante ao longo do tempo, devido à restrição primária.

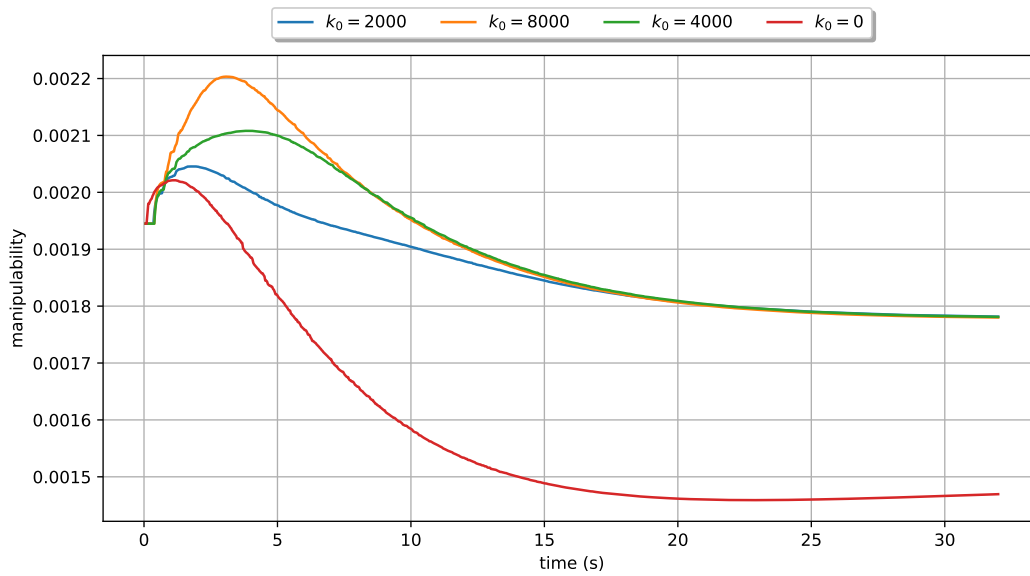


Figura 4.4: Manipulabilidade em função do tempo para cada trajetória executada no segundo cenário.

## 4.2 Cenário 2

No segundo cenário, com a introdução de uma velocidade inicial não nula do efetuador final, isto é  $\|\xi\| > 0$ , a manipulabilidade muda ao longo da execução da trajetória, aproximando-se de um valor mínimo no seu final (figura 4.4). A resolução de redundância atualiza a configuração do manipulador de modo manter a manipulabilidade o mais alta possível, sem violar a restrição primária.

Observamos novamente que o efeito de introduzir valores crescentes do ganho afeta o erro de posição com um pequeno *trade-off* entre a otimização da métrica e a precisão no controle da posição do efetuador final (tabelas 4.2 e 4.3), tendo em vista o aumento das velocidades das juntas. Esse fenômeno pode ser melhor observado nas figuras 4.6 e 4.7, onde a velocidade das juntas aumenta significativamente ao longo da execução da trajetória, e o erro se mantém maior a medida que o ganho  $k_0$  aumenta. Isso pode ser explicado pelo fato de que a métrica de desempenho, nesse caso a distância das juntas (figura 4.5), é otimizada como um objetivo secundário à restrição imposta por  $\xi$ , e a escolha de trajetórias onde os valores da métricas estão muito distantes do valor ótimo, acabam tornando o processo de otimização mais difícil, necessitando assim um valor de  $k_0$  maior para convergir para a solução ótima.

| $k_0$ | $I(w)$        | Erro posição (m) |
|-------|---------------|------------------|
| 0     | 0.0507        | <b>0.0138</b>    |
| 2000  | 0.0597        | 0.0150           |
| 4000  | 0.0606        | 0.0151           |
| 8000  | <b>0.0609</b> | 0.0149           |

Tabela 4.2: Valores de desempenho obtidos na execução dos experimentos do segundo cenário.

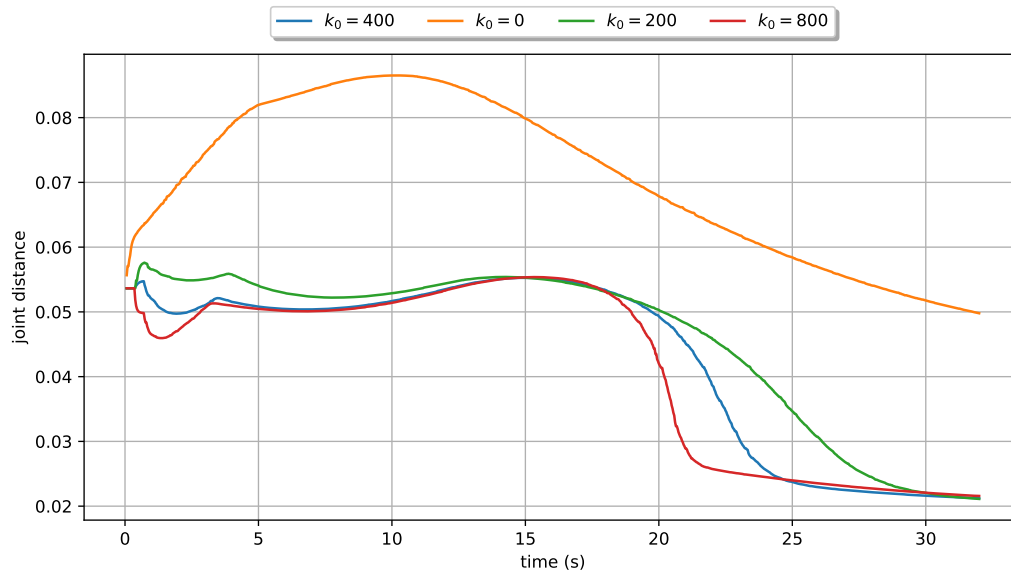


Figura 4.5: Otimizando distância das juntas no segundo cenário.

| $k_0$ | $I(w)$        | Erro posição (m) |
|-------|---------------|------------------|
| 0     | 2.2622        | <b>0.0301</b>    |
| 200   | 1.4727        | 0.0350           |
| 400   | 1.3777        | 0.0379           |
| 800   | <b>1.3251</b> | 0.0418           |

Tabela 4.3: Valores de desempenho (métrica distância das juntas) obtidos na execução dos experimentos no segundo cenário.

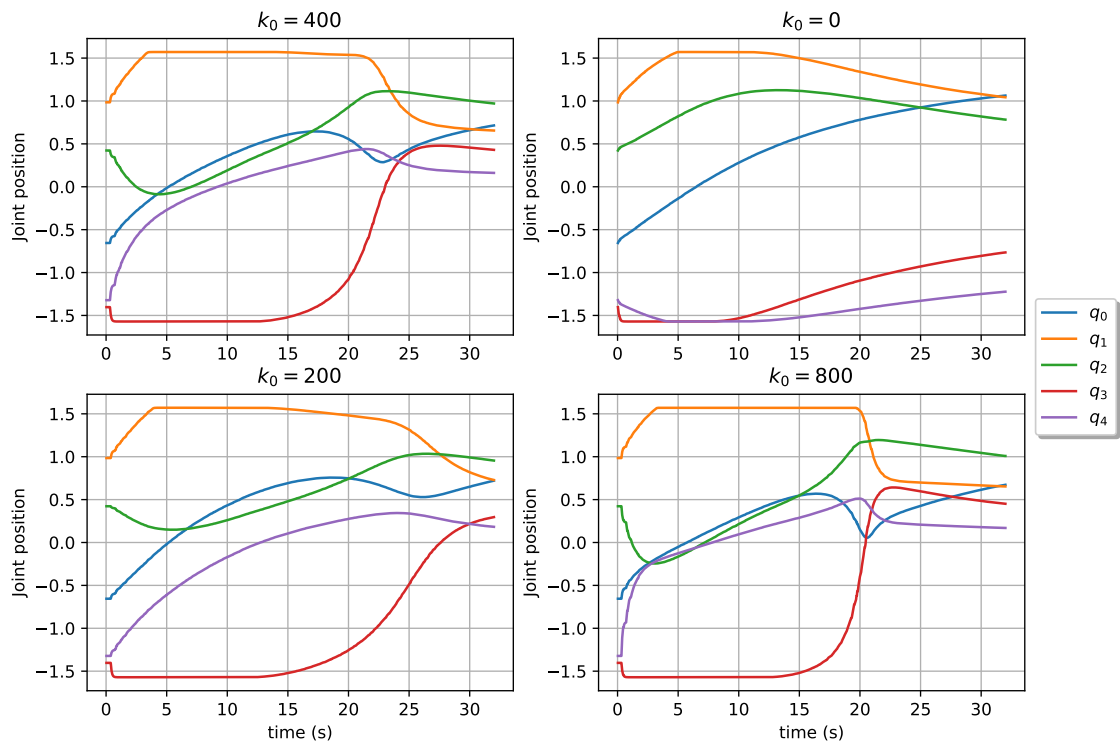


Figura 4.6: Em determinadas trajetórias, o impacto do ganho na velocidade das juntas é significativo.

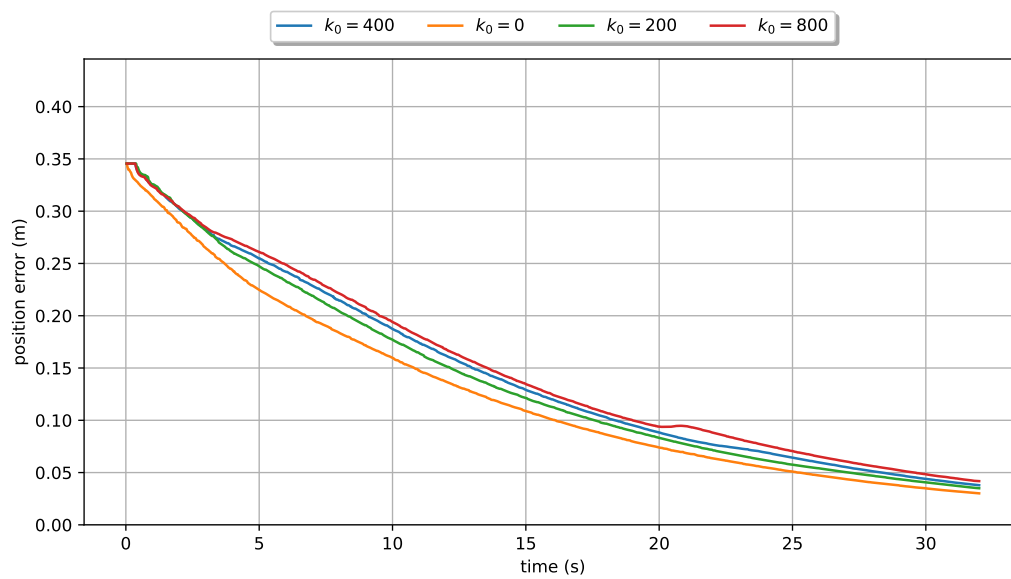


Figura 4.7: Erro da posição ao longo do tempo para o segundo cenário.

# Capítulo 5

## Conclusão

Neste trabalho, discutimos a aplicação de esquemas de controle com resolução de redundância para abordar os desafios impostos pelas singularidades na cinemática diferencial inversa de um manipulador serial com cinco graus de liberdade. Foi proposto ambiente completamente simulado para testar e validar a estratégia de controle, proporcionando também uma comunicação robusta entre controlador e o modelo virtual do manipulador usando o Sistema Operacional de Robôs (ROS). A abordagem foi avaliada em cenários distintos, propiciando uma análise qualitativa da execução de trajetórias em diferentes condições de restrições cinemáticas e de desempenho do manipulador.

Perspectivas futuras para o trabalho, incluem o estudo da escolha ótima de um ganho  $k_0$ , visando otimizar o desempenho do manipulador em diferentes cenários e também uma análise teórica/estatística mais aprofundada dos resultados obtidos, com o objetivo de avaliar a robustez do controlador e a convergência para soluções ótimas. Além disso, é desejável explorar cadeias cinemáticas mais complexas, como as dos manipuladores do tipo *elbow* e *wrist*, que possuem um maior grau de redundância tipicamente maior que 7, permitindo a resolução não só a nível do controle da posição, mas também da orientação do efetuador final. Vale ressaltar também que uma continuidade natural para o trabalho é a transferência dos resultados para um robô real e a integração em um *framework* de planejamento de trajetórias, permitindo a validação do esquema de controle em cenários mais realistas e desafiadores.

# Bibliografia

- [Bassa, 2023] Bassa, M. M. (2023). *A very informal journey through ROS 2*. Leanpub.
- [Collins et al., 2021] Collins, J., Chand, S., Vanderkop, A., and Howard, D. (2021). A review of physics simulators for robotic applications. *IEEE Access*, 9:51416–51431.
- [Corke and Haviland, 2021] Corke, P. and Haviland, J. (2021). Not your grandmother’s toolbox—the robotics toolbox reinvented for python. In *2021 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 11357–11363. IEEE.
- [Corke, 2023] Corke, P. I. (2023). *Robotics, vision and control: fundamental algorithms in Python*. Springer, Cham, 3rd ed., 2023 edition. OCLC: 1378937773.
- [Craig, 2004] Craig, J. J. (2004). *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 3rd edition.
- [Denavit and Hartenberg, 1955] Denavit, J. and Hartenberg, R. S. (1955). A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Journal of Applied Mechanics*, 22(2):215–221.
- [Hammond, 2011] Hammond, F. L. (2011). Configuring kinematically redundant robotic manipulators to increase effective task-specific motion resolution. In *2011 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, pages 34–39. IEEE.
- [Kuri et al., 2023] Kuri, S. K., Halder, K., and Orlando, M. F. (2023). Som network with weighted least norm matrix based redundancy resolution for a 5-dof spatial robotic manipulator. In *2023 7th International Conference on Computer Applications in Electrical Engineering-Recent Advances (CERA)*, pages 1–6. IEEE.
- [Li et al., 2023] Li, Q., Cang, N., Zhang, W., Guo, D., and Zhang, C. (2023). A pseudo-inverse redundancy-based resolution scheme at the acceleration level to control robotic arm motion. In *2023 6th International Conference on Robotics, Control and Automation Engineering (RCAE)*, pages 18–22. IEEE.
- [Michel, 2004] Michel, O. (2004). Cyberbotics ltd. webots™: Professional mobile robot simulation. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 1(1):5.



- [Siciliano, 2009] Siciliano, B., editor (2009). *Robotics: modelling, planning and control*. Advanced textbooks in control and signal processing. Springer, London. OCLC: ocn144222188.
- [Siciliano and Khatib, 2008] Siciliano, B. and Khatib, O., editors (2008). *Springer Handbook of Robotics*. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [Spong et al., 2020] Spong, M. W., Hutchinson, S., and Vidyasagar, M. (2020). *Robot modeling and control*. Wiley, Hoboken, NJ, second edition edition.
- [Yoshikawa, 1983] Yoshikawa, T. (1983). Analysis and control of robot manipulators with redundancy.