



*Trabalho de Conclusão de Curso*

# Resolução de Redundância Aplicada à Cinemática Inversa de Manipuladores Planares

de Hugo Tallys Martins Oliveira

orientado por

Prof. Dr., UFAL Ícaro Bezerra Queiroz de Araújo

Universidade Federal de Alagoas  
Instituto de Computação  
Maceió, Alagoas  
01 de Fevereiro de 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
Instituto de Computação

**RESOLUÇÃO DE REDUNDÂNCIA APLICADA À  
CINEMÁTICA INVERSA DE MANIPULADORES  
PLANARES**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido  
ao Instituto de Computação da Universidade  
Federal de Alagoas como requisito parcial  
para a obtenção do grau de Engenheiro de  
Computação.

Hugo Tallys Martins Oliveira

*Orientador: Prof. Dr., UFAL Ícaro Bezerra Queiroz de Araújo*

**Banca Avaliadora:**

Glauber Rodrigues Leite      Dr., UFAL  
Arthur Costa Vangasse      Eng., UFMG

Maceió, Alagoas  
01 de Fevereiro de 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
Instituto de Computação

**RESOLUÇÃO DE REDUNDÂNCIA APLICADA À  
CINEMÁTICA INVERSA DE MANIPULADORES  
PLANARES**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Instituto de Computação  
da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para a ob-  
tenção do grau de Engenheiro de Computação.

Aprovado em 01 de Fevereiro de 2024:

---

Ícaro Bezerra Queiroz de Araújo,  
Prof. Dr., UFAL, Orientador

---

Glauber Rodrigues Leite,  
Dr., UFAL

---

Arthur Costa Vangasse,  
Eng., UFMG

## Dedicatória

**LOREM IPSUM DOLOR SIT AMET, CONSECTETUER ADIPISCING ELIT.**

*Nome, abreviatura, ou nada, etc*

# Agradecimentos

  Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Data, Local

*Nome, abreviatura, nada, etc*

*Study hard what interests you the most in the most undisciplined, irreverent and original manner possible. — Richard Feynmann*

# Resumo

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

*Palavras-chave:*  $KW_1$ ;  $KW_2$ ;  $KW_3$ ;  $KW_4$ ;  $KW_5$ .

# Abstract

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

*Keywords:*  $KW_1$ ;  $KW_2$ ;  $KW_3$ ;  $KW_4$ ;  $KW_5$ .

# **Lista de Figuras**

2.1	Dois sistemas de coordenadas, um ponto P e vetores que o representam. . . . .	3
2.2	Braço planar do tipo 3R. . . . .	9
2.3	Elipsoide de manipulabilidade para diferentes configurações do manipulador planar 3R. . . . .	19
3.1	Elipsoide de manipulabilidade para diferentes configurações do manipulador planar 3R. . . . .	22
3.2	Elipsoide de manipulabilidade para diferentes configurações do manipulador planar 3R. . . . .	22
4.1	Resultados . . . . .	24
4.2	Resultados . . . . .	25
4.3	Resultados . . . . .	26
4.4	Resultados . . . . .	27

# **Lista de Tabelas**

2.1	Descrição dos parâmetros Denavit-Hartenberg . . . . .	8
2.2	Parâmetros DH para o braço planar 3R da figura 2.2. . . . .	9

# **Lista de Símbolos**

$\mathbb{R}$  Conjunto dos números reais.

# **Lista de Abreviaturas**

**IC** Instituto de Computação.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação . . . . .	1
1.2	Objetivos . . . . .	1
1.3	Estrutura do texto . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Fundamentação teórica</b>	<b>2</b>
2.1	Poses no espaço . . . . .	2
2.1.1	Representando posições e orientações no espaço . . . . .	2
2.1.2	Transformações homogêneas . . . . .	4
2.2	Cinemática Direta . . . . .	5
2.2.1	Cadeias cinemáticas . . . . .	5
2.2.2	Convenção de Denavit-Hartenberg . . . . .	7
2.2.3	Cinemática direta de um braço planar . . . . .	8
2.3	Cinemática Diferencial . . . . .	10
2.3.1	A Jacobiana do Manipulador . . . . .	10
2.3.2	Singularidades . . . . .	14
2.3.3	Cinemática Inversa Diferencial . . . . .	15
2.4	Manipuladores redundantes . . . . .	16
2.4.1	Pseudo-Inversa da Jacobiana . . . . .	16
2.4.2	Medida de Manipulabilidade . . . . .	17
2.4.3	Resolução de Redundância . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Metodologia</b>	<b>21</b>
3.1	Python robotics toolbox . . . . .	21
3.2	ROS2 . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>23</b>
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>28</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>29</b>

# **Capítulo 1**

## **Introdução**

### **1.1 Motivação**

### **1.2 Objetivos**

- Devise a kinematic model for a redundant manipulator
- Stabilish a kinematic control scheme to generate cartesian trajectories and null space motion

Specific objectives:

- Simulate the task on the denso vp6242 robot - test on the real robot (if possible)  
(use ROS on both simulated environemnt and real robot to a seamless integration)

### **1.3 Estrutura do texto**

# Capítulo 2

## Fundamentação teórica

### 2.1 Poses no espaço

O estudo da cinemática na robótica envolve principalmente o estabelecimento de sistemas de coordenadas (em inglês, *frames*) para representar posições e orientações de corpos rígidos, além da caracterização das transformações entre esses frames. Nesta seção, definiremos uma forma precisa para representar translações e rotações no espaço por meio de matrizes e vetores. Em seguida, apresentaremos as transformações homogêneas, que combinam as operações de rotação e translação em uma única multiplicação matricial, proporcionando uma maneira concisa de estabelecer a relação entre dois frames distintos.

#### 2.1.1 Representando posições e orientações no espaço

Um sistema de coordenadas ou *frame* é definido por um ponto e um conjunto de vetores ortonormais que formam uma base no espaço considerado (dois vetores no plano e três vetores no espaço tridimensional). No contexto da robótica é muito comum a especificação de uma tarefa com base em coordenadas cartesianas relativas a algum frame de referência como ilustrado na figura 2.1. Podemos tomar o *frame*  $o_0x_0y_0z_0$  como referência e expressar qualquer ponto  $P$  do espaço através de um vetor com origem em  $o_0$  e extremidade em  $P$  de modo que escreveríamos:

$$p^0 = v_0^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

onde o expoente 0 indica que o vetor é expresso com coordenadas referentes ao *frame*  $o_0x_0y_0z_0$ . Contudo, ainda observando a figura 2.1, podemos expressar o mesmo ponto  $P$  com coordenadas referentes ao *frame*  $o_1x_1y_1z_1$  através do vetor  $v_1^1$  de modo que, teríamos por exemplo:

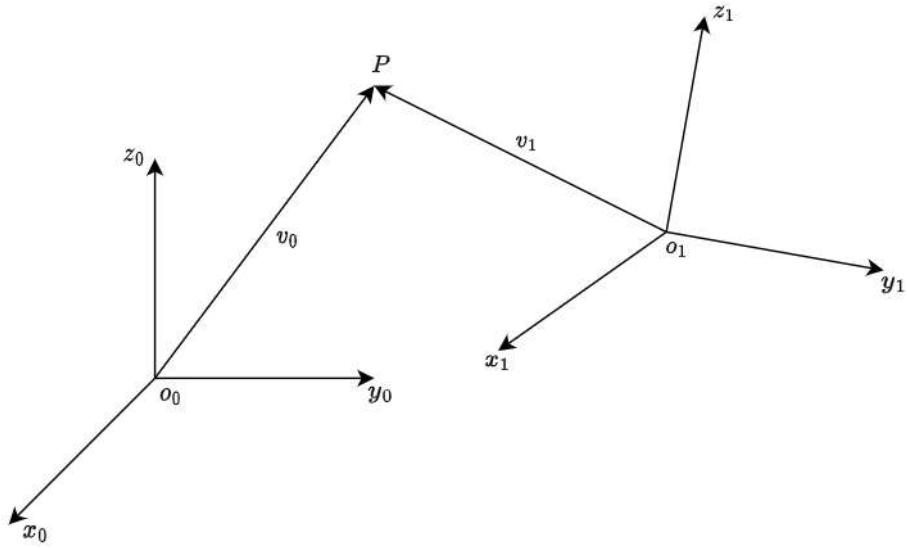


Figura 2.1: Dois sistemas de coordenadas, um ponto P e vetores que o representam.

$$p^1 = v_1^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1.5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Além disso, poderíamos também calcular  $v_1^0$  e  $v_0^1$  de modo que as coordenadas do vetor dependem do sistema de referência utilizado.

Para estabelecer a relação completa entre os dois *frames* precisamos também considerar a orientação de um com relação ao outro. Podemos expressar relação de orientação entre os *frames* {0} e {1} utilizando a matriz de mudança de base  $R_1^0$  dada por:

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_0 & y_1 \cdot x_0 & z_1 \cdot x_0 \\ x_1 \cdot y_0 & y_1 \cdot y_0 & z_1 \cdot y_0 \\ x_1 \cdot z_0 & y_1 \cdot z_0 & z_1 \cdot z_0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

onde  $(\cdot)$  denota o produto escalar entre dois vetores.

A matriz  $R_1^0$  faz parte de um conjunto de matrizes denominado grupo especial ortogonal de ordem 3 ( $SO(3)$ ) que possui algumas propriedades interessantes dentre elas a facilidade de se calcular sua inversa:

$$(R_1^0)^{-1} = (R_1^0)^\top = R_0^1 \quad (2.4)$$

Se a relação entre os *frames* é composta apenas por uma rotação de  $\theta$  radianos em torno de cada eixo ordenado, podemos calcular as seguintes matrizes de transformação elementares:

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

### 2.1.2 Transformações homogêneas

Um deslocamento rígido no espaço pode ser representado por uma translação pura seguida de uma rotação pura. De maneira mais precisa, podemos defini-lo como um par ordenado  $(R, d)$  onde  $R \in SO(3)$  e  $d \in \mathbb{R}^3$ . O grupo de todas as transformações rígidas no espaço tridimensional é denominado grupo especial euclidiano de ordem 3 ( $SE(3)$ ) onde vemos claramente que  $SE(3) = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$ .

Seja  $R_1^0$  a matriz de rotação que especifica a orientação do sistema de coordenadas  $\{1\}$  com relação ao sistema de coordenadas  $\{0\}$  e  $o_1^0$  o vetor de deslocamento une suas origens. Como visto na seção anterior, se  $P$  é um ponto fixado ao sistema de coordenadas  $\{1\}$  com coordenadas locais dadas por  $p^1$  então, podemos expressar as coordenadas de  $P$  com relação ao sistema de coordenadas  $\{0\}$  usando o seguinte deslocamento rígido:

$$p^0 = R_1^0 p^1 + o_1^0 \quad (2.8)$$

A equação (2.8) pode ser reescrita de maneira mais compacta utilizando-se a seguinte formulação matricial:

$$\begin{bmatrix} p^0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^0 & o_1^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^1 \\ 1 \end{bmatrix}, R_1^0 \in SO(3), o_1^0 \in \mathbb{R}^3 \quad (2.9)$$

onde vemos que os elementos de  $SE(3)$  são matrizes de dimensão  $4 \times 4$  e os vetores  $p^i$  são representados em *coordenadas homogêneas* com uma dimensão extra. A matriz  $T_1^0$  é denominada matriz de *transformação homogênea* e utilizando o fato de que  $R_1^0$  é uma matriz ortogonal, podemos facilmente calcular sua inversa:

$$(T_1^0)^{-1} = \begin{bmatrix} R_1^0 & o_1^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (R_1^0)^\top & -(R_1^0)^\top o_1^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

## 2.2 Cinemática Direta

O problema da cinemática em manipuladores consiste em descrever o movimento do manipulador sem considerar as forças e torques atuantes sob o mesmo tratando-se, portanto, de uma descrição puramente geométrica. Neste contexto, uma pergunta natural que surge é como podemos determinar a posição e orientação do efetuador final na cadeia cinemática dado um conjunto arbitrário de ângulos articulados. Este problema é conhecido na robótica como a cinemática direta de um manipulador e pode ser facilmente resolvido se associarmos a cada corpo rígido da cadeia um sistema de coordenadas (*frame*), expressando também as relações entre esses *frames* como transformações homogêneas. A pose do efetuador final fica determinada através de uma série de multiplicações matriciais. A colocação de *frames* pode ser feita de maneira sistemática através da utilização da convenção de Denavit-Hartenberg a qual fornece uma abordagem concisa para representar a estrutura geométrica do manipulador.

### 2.2.1 Cadeias cinemáticas

Na robótica, uma cadeia cinemática pode ser definida como uma série de corpos rígidos, também denominados *elos*, conectados por *juntas* que permitem um movimento relativo das diferentes partes móveis de um manipulador. Cadeias cinemáticas formam a base do estudo de manipuladores robóticos e geralmente são representadas através de um grafo onde seus nós constituem os elos e as arestas as juntas.

Dependendo da topologia desse grafo, podemos classificar uma cadeia cinemática de diferentes formas. Numa cadeia serial aberta seu grafo consiste numa árvore onde cada nó possui apenas um único filho e o nó terminal da árvore usualmente representa o efetuador final (onde uma pinça ou garra robótica ficaria acoplada, por exemplo). Outros casos incluem grafos com ramificações (existe mais de um nó terminal) onde denominamos de cadeia paralela ou quando há a presença de ciclos onde temos uma cadeia fechada. Neste trabalho, iremos nos limitar à análise de cadeias abertas, as mais comuns no âmbito de manipuladores robóticos utilizados em aplicações industriais.

Os tipos de juntas presentes no cadeia também são importantes na definição do alcance e natureza do movimento do manipulador. As mais simples são as juntas prismáticas e de revolução, cada uma introduzindo um único grau de liberdade ao sistema. Juntas prismáticas permitem o movimento translacional ao longo de uma única direção enquanto que juntas de revolução possibilitam um movimento rotacional ao redor de um eixo específico.

Ademais das juntas básicas, tipos mais complexos incluem juntas esféricas, que introduzem dois graus de liberdade (rotação ao redor de dois eixos perpendiculares) e punhos esféricos, compostos por três juntas revolutas dispostas ortogonalmente, introduzindo três graus de liberdade ao sistema. Vale ressaltar que independente da complexidade da junta,

a maior parte pode ser reduzida a uma combinação dos dois tipos mais simples tornando suficiente a descrição de cadeias cinemáticas por meio de uma combinação de juntas prismáticas ou de revolução.

Um manipulador robótico com  $n$  juntas terá  $n+1$  clos, uma vez que cada junta conecta exatamente dois clos. Iremos enumerar as juntas de 1 até  $n$  e clos de 0 a  $n$  sendo que o elo de número 0 representará a base do manipulador e elo  $n$  seu efetuador final. De acordo com essa convenção a junta  $i$  conecta os clos  $i-1$  ao  $i$  e tem sua posição fixa com respeito ao elo anterior. Quando a junta  $i$  é atuada, o elo  $i$  se movimenta de modo que a base permanece fixa independente de qual junta é movimentada.

Iremos associar à  $i$ -ésima junta uma variável  $q_i$  representando no caso de uma junta de revolução o ângulo de rotação e no caso de uma junta prismática o deslocamento linear:

$$q_i = \begin{cases} \theta_i & \text{se a junta } i \text{ é de revolução} \\ d_i & \text{se a junta } i \text{ é prismática} \end{cases} \quad (2.11)$$

A análise cinemática é feita anexando ao elo  $i$  da cadeia o sistema de coordenadas  $o_i x_i y_i z_i$ . O *frame*  $o_0 x_0 y_0 z_0$  associado à base do manipulador é denominado *frame* da base, inercial ou do mundo. Se  $A_i(q_i)$  é a matriz de transformação homogênea que fornece a posição e orientação de  $o_i x_i y_i z_i$  com relação a  $o_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$  então podemos dizer que a mesma é função unicamente da variável  $q_i$  de modo que:

$$A(q_i) = A_i = \begin{bmatrix} R_i^{i-1} & o_i^{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Dessa forma, para  $i < j$ , a matriz  $T_j^i$  dada por:

$$T_j^i = A_{i+1} \cdots A_j = \begin{bmatrix} R_j^i & o_j^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

expressa a orientação  $R_j^i$  e posição  $o_j^i$  de  $o_j x_j y_j z_j$  com relação a  $o_i x_i y_i z_i$ . Vale ressaltar que a matriz  $R_j^i$  é calculada através da multiplicação matricial:

$$R_j^i = R_{i+1}^i \cdots R_j^{j-1} \quad (2.14)$$

e o vetor de posição utilizando-se a seguinte equação recursiva:

$$o_j^i = o_{j-1}^i + R_{j-1}^i o_j^{j-1} \quad (2.15)$$

O problema da cinemática direta pode ser então formulado como o simples cálculo da matriz  $T_n^0$  que expressa a pose do efetuador final com relação ao *frame* da base:

$$T_n^0 = A_1 A_2 \cdots A_n = \begin{bmatrix} R_n^0 & o_n^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Tendo em vista a infinidade de possibilidades de se anexar os *frames* em cada elo, para poder calcular as matrizes  $A_i$  de forma mais precisa, vamos estabelecer uma convenção utilizando para isso os parâmetros introduzidos por Denavit e Hartenberg.

### 2.2.2 Convenção de Denavit-Hartenberg

A fixação de frames em cada elo pode ser feita de maneira arbitrária para se obter as matrizes de transformação  $A_i$ , permitindo assim o cálculo da cinemática direta. Contudo, o processo de determinação das mesmas matrizes para um manipulador com  $n$  elos começa a ser tornar cada vez mais complexo a medida que  $n$  cresce. A a convenção de Denavit-Hartenberg consiste numa abordagem sistemática para a obtenção das matrizes  $A_i$  de modo a representar a relação entre frames consecutivos da forma mais concisa o possível além de propiciar uma padronização de como pesquisadores descrevem a estrutura cinemática de um manipulador robótico.

De maneira geral, para especificar a matriz de transformação homogênea seriam necessários 6 parâmetros: três deslocamentos para a componente de translação e três ângulos para a rotação. Na convenção de Denavit-Hartenberg, a matriz de transformação  $A_i$  associada ao  $i$ -ésimo elo é descrita através de apenas 4 parâmetros. Isso é obtido através da introdução de duas restrições na colocação dos frames em cada elo:

- (DH1)  $x_i$  intersecta o eixo  $z_{i-1}$
- (DH2)  $x_i$  é perpendicular ao eixo  $z_{i-1}$

adicionar figura dh

O cálculo da matriz  $A_i$  fica condicionado à determinação dos parâmetros:  $\theta_i$  (joint angle),  $d_i$  (link offset),  $a_i$  (link length) e  $\alpha_i$  (link twist). Como  $A_i$  é função da única variável da junta, três parâmetros são sempre fixos, dependendo apenas da geometria existente entre os frames, enquanto o quarto parâmetro é livre:  $\theta_i$ , no caso de uma junta de revolução e  $d_i$ , no caso de uma junta prismática. Em posse dos parâmetros obtidos para cada par de elos consecutivos, o cálculo da matriz  $A_i$  é obtido através da relação:

$$A_i = \text{Rot}_z(\theta_i) \cdot \text{Trans}_z(d_i) \cdot \text{Trans}_x(a_i) \cdot \text{Rot}_x(\alpha_i) \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} A_i &= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A_i &= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde  $c.$  e  $s.$  denotam  $\cos(\cdot)$  e  $\sin(\cdot)$ , respectivamente. A tabela 2.1 descreve de maneira detalhada a definição de cada parâmetro de Denavit-Hartenberg.

Parâmetro	Definição
$\theta_i$	O ângulo entre os eixos $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_{i+1}$ em torno do eixo $\mathbf{z}_{i-1}$
$d_i$	A distância da origem do sistema de coordenadas $\{i\}$ até o eixo $\mathbf{x}_{i+1}$ ao longo do eixo $\mathbf{z}_i$
$a_i$	A distância entre os eixos $\mathbf{z}_i$ e $\mathbf{z}_{i+1}$ ao longo do eixo $\mathbf{x}_{i+1}$ ; para eixos que se intersectam, é paralela a $\mathbf{z}_i \times \mathbf{z}_{i+1}$
$\alpha_i$	O ângulo entre o eixo $\mathbf{z}_i$ e o eixo $\mathbf{z}_{i+1}$ em torno do eixo $\mathbf{x}_{i+1}$

Tabela 2.1: Descrição dos parâmetros Denavit-Hartenberg

### 2.2.3 Cinemática direta de um braço planar

Um braço planar é um tipo de manipulador serial cujo espaço de trabalho se limita a um plano. A figura 2.2 mostra um braço planar do tipo 3R, o qual possui três eixos e três juntas de revolução acoplados em série. A escolha da colocação do frame da base  $o_0x_0y_0z_0$  é totalmente arbitrária e ao tomar como indicado na figura (com o eixo  $z$  apontando para fora do papel) a fixação dos frames subsequentes na cadeia cinemática fica restrita a convenção de Denavit-Hartenberg adotada. A tabela DH para esse manipulador é dada por:

Dados os valores fixos  $a_i$  que indicam o comprimento do elo  $i$ , as únicas variáveis livres

Elo	$\theta$	$d$	$a$	$\alpha$
1	$\theta_1$	0	$a_1$	0
2	$\theta_2$	0	$a_2$	0
3	$\theta_3$	0	$a_3$	0

Tabela 2.2: Parâmetros DH para o braço planar 3R da figura 2.2.

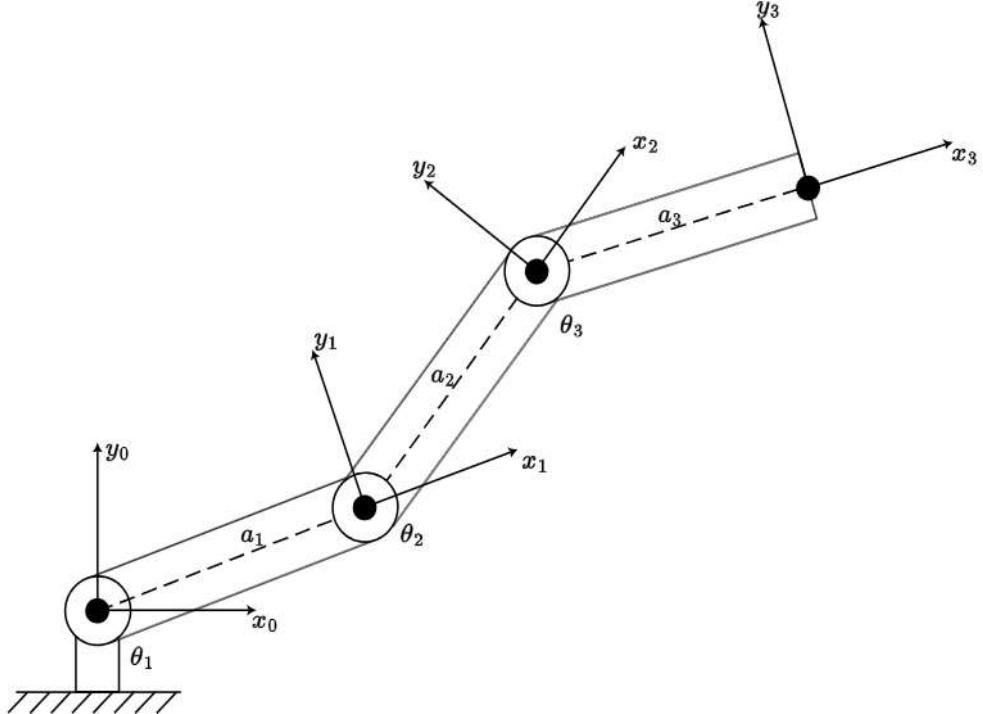


Figura 2.2: Braço planar do tipo 3R.

no cálculo da cinemática direta são os ângulos das juntas ( $q_i = \theta_i$ ), desse modo, vamos denotar  $\theta_1 + \theta_2 = \theta_{12}$ ,  $\cos(\theta_1 + \theta_2) = c_{12}$  e assim por diante. Para  $i = 1, 2, 3$  as matrizes  $A_i$  são calculadas com o auxílio da equação 2.18:

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Já para as matrizes  $T_i^0$ , utilizamos a equação 2.16:

$$\mathbf{T}_1^0 = \mathbf{A}_1 \quad (2.20)$$

$$\mathbf{T}_2^0 = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{T}_3^0 = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

As três primeiras entradas da última coluna da matriz  $\mathbf{T}_3^0$  dão a posição  $\mathbf{P} = [x \ y \ z]^\top$  do efetuador final em função da configuração do manipulador. Note que  $z = 0$  quaisquer que sejam os ângulos das juntas pois, como esperado, o manipulador é planar. Além disso, analisando a componente de rotação, fica evidente que a orientação do efetuador final com relação ao frame da base é dada pela soma dos ângulos das juntas:  $\psi = \theta_{123}$ .

## 2.3 Cinemática Diferencial

Na seção anterior vimos como podemos estabelecer uma relação entre a configuração de um manipulador com  $n$  juntas com a pose do efetuador final no espaço SE3. Nesta seção, iremos investigar de que forma se dá a relação de um vetor de velocidades no espaço das juntas com a velocidade do efetuador final no espaço de trabalho. Iremos ver que a matriz Jacobiana, atuando como uma generalização da derivada para o caso multidimensional, é responsável por estabelecer um mapeamento linear entre as velocidades e tem papel crucial na caracterização da qualidade do movimento de um manipulador através da análise das singularidades cinemáticas. Por fim, iremos analisar o problema da cinemática inversa diferencial, uma aplicação direta do mapeamento estabelecido pela matriz Jacobiana, proporcionando a geração eficiente de trajetórias cartesianas (retilíneas) no espaço de trabalho do manipulador.

### 2.3.1 A Jacobiana do Manipulador

Dado um manipulador com  $n$  juntas vamos considerar

$$\mathbf{T}_n^0(q) = \begin{bmatrix} R_n^0(q) & o_n^0(q) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

a transformação homogênea que expressa a pose do efetuador final com relação ao *frame* da base que, como já vimos, é função apenas da configuração  $q = [q_1 \ \cdots \ q_n]^\top$ .

Buscamos estabelecer relações da seguinte forma:

$$v_n^0 = J_v \dot{q} \quad (2.24)$$

$$\omega_n^0 = J_\omega \dot{q} \quad (2.25)$$

onde  $v_n^0$  e  $\omega_n^0$  expressam respectivamente as velocidades linear e angular do efetuador final e  $J_v$ ,  $J_\omega$  são matrizes de dimensão  $3 \times n$ . De maneira mais compacta, podemos escrever

$$\xi = J \dot{q} \quad (2.26)$$

onde teremos:

$$\xi = \begin{bmatrix} v_n^0 \\ \omega_n^0 \end{bmatrix} \text{ e } J = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

O vetor  $\xi$  de dimensão  $6 \times 1$  é denominado de velocidade do corpo rígido (em inglês *body velocity ou twist*). Note também que a matriz  $J$ , chamada *jacobiana do manipulador* ou simplesmente jacobiana, é usualmente uma matriz de dimensão  $6 \times n$ .

O cálculo da jacobiana, pode ser feito de maneira simples e sistemática ao analisarmos as componentes angular e linear separadamente. No primeiro caso, sabemos que a velocidade angular do efetuador final pode ser obtida através da soma sucessiva das velocidades angulares de cada elo:

$$\omega_n^0 = \omega_1^0 + \omega_2^0 + \cdots + \omega_n^0 \quad (2.28)$$

Se a junta  $i$  é prismática não há rotação em torno do eixo  $z_{i-1}$  de modo que  $\omega_i^{i-1} = 0$ . Caso contrário, se a junta  $i$  é de revolução a rotação dá se em torno do eixo  $z_{i-1}$  com magnitude  $\dot{q}_i$  de modo que:

$$\omega_i^0 = \dot{q}_i z_{i-1}^0 \quad (2.29)$$

onde obviamente teremos  $z_0^0 = k = [0 \ 0 \ 1]^\top$

A orientação do eixo  $z_i$  com relação ao *frame* da base é dada por  $z_i^0 = R_i^0 k$ , então substituindo na equação (2.28) podemos escrever:

$$\omega_n^0 = \rho_1 \dot{q}_1 k + \rho_2 \dot{q}_2 R_1^0 k + \cdots + \rho_n \dot{q}_n R_{n-1}^0 k \quad (2.30)$$

onde  $\rho_i = 0$  se a junta  $i$  é prismática e  $\rho_i = 1$  caso contrário. Fica claro então que a metade inferior da jacobiana é dada por:

$$J_\omega = [\rho_1 k \ \rho_2 R_1^0 k \ \cdots \ \rho_n R_{n-1}^0 k] \quad (2.31)$$

A metade superior da jacobiana é obtida calculando-se o vetor  $\dot{o}_n^0$ . Aplicando a regra da cadeia, temos:

$$\dot{o}_n^0 = \frac{\partial o_n^0}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial o_n^0}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial o_n^0}{\partial q_n} \dot{q}_n \quad (2.32)$$

onde fica claro que a i-ésima coluna de  $J_v$  é dada por:

$$J_{v_i} = \frac{\partial o_n^0}{\partial q_i} \quad (2.33)$$

Para obter a expressão de  $J_{v_i}$  vamos analisar novamente o caso de juntas prismáticas e de revolução separadamente. No caso de uma única junta prismática, então o efetuador final apresenta apenas translação ao longo do eixo  $z_{i-1}$  de modo que:

$$\dot{o}_n^0 = \dot{q}_i R_{i-1}^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \dot{q}_i z_{i-1}^0 \quad (2.34)$$

Comparando com a (2.28) vemos que:

$$J_{v_i} = z_{i-1}^0 \quad (2.35)$$

Já para o caso de uma junta de revolução, a velocidade linear do efetuador final devido ao movimento do elo  $i$  é da forma  $\omega \times r$  dada pela sua componente tangencial ao círculo de centro no ponto  $o_{i-1}$  e extremidade no ponto  $o_n$  onde:

$$\begin{aligned} \omega &= \dot{q}_i z_{i-1}^0 \\ r &= o_n^0 - o_{i-1}^0 \end{aligned}$$

onde finalmente chegamos à expressão:

$$J_{v_i} = z_{i-1}^0 \times (o_n^0 - o_{i-1}^0) \quad (2.36)$$

Resumindo as equações obtidas acima, podemos calcular a jacobiana de qualquer manipulador serial utilizando o seguinte procedimento:

A parte superior da matriz jacobiana  $J_v$  será:

$$J_v = \begin{bmatrix} J_{v_1} & J_{v_2} & \cdots & J_{v_n} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

onde a i-ésima coluna  $J_{v_i}$  é dada por:

$$J_{v_i} = \begin{cases} z_{i-1}^0 \times (o_n^0 - o_{i-1}^0) & \text{se a junta } i \text{ é de revolução} \\ z_{i-1} & \text{se a junta } i \text{ é prismática} \end{cases} \quad (2.38)$$

Já a parte inferior da matriz jacobiana  $J_\omega$  será:

$$J_\omega = \begin{bmatrix} J_{\omega_1} & J_{\omega_2} & \cdots & J_{\omega_n} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

onde a  $i$ -ésima coluna  $J_{\omega_i}$  é dada por:

$$J_{\omega_i} = \begin{cases} z_{i-1}^0 & \text{se a junta } i \text{ é de revolução} \\ 0 & \text{se a junta } i \text{ é prismática} \end{cases} \quad (2.40)$$

Note que o cálculo da jacobiana torna-se possível apenas com o conhecimento da função de cinemática direta  $T_n^0$  mostrando-se uma maneira simples e sistemática para calcular não só a velocidade do efetuador final mas também a velocidade de qualquer ponto da estrutura cinemática do manipulador.

Como exemplo, considere o manipulador planar 3R introduzido na seção anterior. Com base no procedimento descrito acima, a jacobiana do manipulador é dada por:

$$J(q) = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (o_3^0 - o_0^0) & z_1^0 \times (o_3^0 - o_1^0) & z_2^0 \times (o_3^0 - o_2^0) \\ z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

onde os termos envolvidos são:

$$\begin{aligned} o_0^0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & o_1^0 &= \begin{bmatrix} a_1c_1 \\ a_1s_1 \\ 0 \end{bmatrix} & o_2^0 &= \begin{bmatrix} a_1c_1 + a_2c_{12} \\ a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} & o_3^0 &= \begin{bmatrix} a_1c_1 + a_2c_{12} + a_3c_{123} \\ a_1s_1 + a_2s_{12} + a_3s_{123} \\ 0 \end{bmatrix} \\ z_0^0 &= z_1^0 = z_2^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Desenvolvendo as expressões acima, obtemos:

$$J(q) = \begin{bmatrix} -a_1s_1 - a_2s_{12} - a_3s_{123} & -a_2s_{12} - a_3s_{123} & -a_3s_{123} \\ a_1c_1 + a_2c_{12} + a_3c_{123} & a_2c_{12} + a_3c_{123} & a_3c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Note que o manipulador planar não provoca qualquer translação ao longo do eixo  $z$

uma vez que qualquer contribuição de  $J_{v_i}$  é nula na terceira componente. Além disso, a única componente de rotação influenciada pelo movimento das juntas é a rotação em torno também do eixo do eixo  $z$  evidenciado pela terceira componente de  $J_{\omega_i}$  igual a 1.

### 2.3.2 Singularidades

A matriz jacobiana, de dimensão  $6 \times n$ , estabelece o mapeamento linear entre as velocidades das juntas e do efetuador final através da relação:

$$\xi = J(q)\dot{q} \quad (2.43)$$

que coloca de forma explícita a dependência da configuração atual do manipulador no cálculo de  $J$ . Tal mapeamento implica que qualquer vetor de velocidades do efetuador final é uma combinação linear das colunas da matriz jacobiana:

$$\xi = J_1\dot{q}_1 + J_2\dot{q}_2 + \cdots + J_n\dot{q}_n \quad (2.44)$$

Uma vez que  $\xi \in \mathbb{R}^6$  o manipulador só conseguirá desempenhar uma velocidade arbitrária se todas as colunas de  $J$  forem linearmente independentes, ou seja, quando o posto da matriz jacobiana for igual a 6. Para uma matriz  $J \in \mathbb{R}^{6 \times n}$  é sempre verdade que  $\text{posto}(J) \leq \min(6, n)$ . Com efeito, no caso do manipulador planar 3R tínhamos  $n = 3$  e desse modo  $\text{posto}(J) \leq 3$  evidenciando o fato de que o manipulador não consegue desenvolver qualquer velocidade no espaço de trabalho.

Configurações para as quais o posto da matriz jacobiana é menor que o máximo possível (em inglês *rank deficiency*) são denominadas de *singularidades* ou configurações singulares. Identificar configurações singulares é de grande importância para o controle de manipuladores por diversos motivos, entre eles:

- Singularidades representam configurações nas quais a mobilidade do manipulador é reduzida, ou seja, não é possível impor um movimento arbitrário ao efetuador final.
- Quando o manipulador está em uma singularidade, pode haver infinitas soluções para o problema de cinemática inversa.
- Nas proximidades de uma singularidade, pequenas variações nas velocidades no espaço operacional podem causar velocidades ilimitadas no espaço das juntas.

Quando a matriz jacobiana é quadrada, podemos usar o fato de que seu determinante se anula em configurações singulares, contudo ainda assim o problema de determinar o conjunto de configurações é difícil, pois precisamos resolver a equação

$$\det(J(q)) = 0 \quad (2.45)$$

que geralmente envolve termos com alto grau de não linearidade. Nas próximas seções, examinaremos técnicas que viabilizam um esquema de controle capaz de se afastar de configurações singulares ao explorar a redundância presente em manipuladores planares. Isso se refere a casos em que a matriz Jacobiana é retangular, apresentando mais velocidades no espaço das juntas (colunas) do que velocidades possíveis no espaço de trabalho (linhas).

### 2.3.3 Cinemática Inversa Diferencial

Se a matriz jacobiana definida na equação (2.43) é quadrada e não singular, podemos resolver o problema de cinemática inversa através da simples inversão da mesma:

$$\dot{q} = J^{-1}(q)\xi \quad (2.46)$$

Se a configuração inicial do manipulador  $q(0)$  é conhecida as posições das juntas podem ser calculadas integrando as velocidades no tempo:

$$q(t) = q(0) + \int_0^t \dot{q}(\tau)d\tau \quad (2.47)$$

A integração em tempo discreto pode ser feita utilizando técnicas de métodos numéricos. A abordagem mais simples consiste na integração pelo método de Euler, onde as posições das juntas no instante atual  $t_k$  são utilizadas para calcular a configuração do manipulador no instante posterior  $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ :

$$q(t_{k+1}) = q(t_k) + \dot{q}(t_k)\delta_t \quad (2.48)$$

onde  $\delta_t$  é um intervalo de integração apropriado (tempo de amostragem).

O esquema de controle descrito acima é conhecido como *resolved rate control*, o qual consegue de maneira simples e elegante o solucionar o problema de gerar movimentos no efetuador final de velocidade constante sem recorrer à soluções numéricas ou analíticas para o cálculo da cinemática inversa. Tal esquema é útil na geração de trajetórias retilíneas no espaço de trabalho, conhecidas como trajetórias cartesianas, uma vez que a componente translacional da velocidade do efetuador final tem direção constante ao longo de todo o trajeto pode ser tratada de maneira independente da componente rotacional.

Como exemplo, ainda considerando o manipulador planar 3R, poderíamos apenas especificar um vetor de velocidades  $\xi$  que leva em conta as componentes do plano  $xy$  da velocidade linear e a componente de rotação angular em torno do eixo  $z$  de modo que:

$$\xi = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Assim a matriz jacobiana se torna livre das linhas que possuem apenas zeros:

$$J(q) = \begin{bmatrix} -a_1s_1 - a_2s_{12} - a_3s_{123} & -a_2s_{12} - a_3s_{123} & -a_3s_{123} \\ a_1c_1 + a_2c_{12} + a_3c_{123} & a_2c_{12} + a_3c_{123} & a_3c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

e contanto que não seja singular pode ser facilmente invertida. Desse modo, se quisermos por exemplo, gerar um movimento retilíneo no eftuador final paralelo ao eixo  $x$  do plano  $xy$  com velocidade constante, basta tomar  $\xi = [v_x \ 0 \ 0]^\top$  com  $0 < v_x \ll 1$ .

## 2.4 Manipuladores redundantes

Manipuladores cinematicamente redundantes, são aqueles que possuem mais juntas do que o número estritamente necessário para a execução de uma determinada tarefa. Este excedente de juntas confere a esses manipuladores um nível aumentado de destreza, permitindo-lhes navegar em ambientes complexos com maior flexibilidade. Nesta seção vamos introduzir uma solução geral para o problema da cinemática inversa diferencial quando o matriz jacobiana é retangular, envolvendo o conceito da sua *pseudo-inversa*. Em seguida, utilizando a decomposição em valores singulares de  $J$  iremos fornecer uma descrição geométrica e qualitativa da destreza associada à uma dada configuração através dos conceitos do elipsoide e da medida de manipulabilidade. Por fim, vamos ver como podemos utilizar a solução geral fornecida pela pseudo-inversa para otimizar diferentes índices de performance com o objetivo de evitar singularidades e limites mecânicos das juntas.

### 2.4.1 Pseudo-Inversa da Jacobiana

Num manipulador cinematicamente redundante, a matriz jacobiana de dimensão  $m \times n$  será retangular ( $m < n$ ). Isso significa que  $J$  possui mais colunas do que linhas e nesse caso existem infinitas soluções para o problema de cinemática inversa diferencial. Uma solução possível nesse caso é tratar o problema como um de otimização, onde buscamos uma solução que minimize por exemplo  $\|\dot{q}\|^2$ . Pode ser mostrado que tal solução é dada por:

$$\dot{q} = J^\dagger \xi + (I_n - J^\dagger J)\dot{q}_0 \quad (2.51)$$

onde  $\dot{q}_0$  é um vetor de velocidades arbitrário e a matriz  $J^\dagger$  é conhecida como *matriz inversa de Moore-Penrose* ou apenas *pseudo-inversa* de  $J$  e é dada por:

$$J^\dagger = J^\top (JJ^\top)^{-1} \quad (2.52)$$

Vale notar que o termo  $I_n - J^\dagger J$  atua projetando o vetor  $\dot{q}_0$  no espaço nulo de  $J$ . Com efeito, aplicando a jacobiana à esquerda na equação (2.51) temos:

$$\begin{aligned} J\dot{q} &= JJ^\dagger\xi + J(I_n - J^\dagger J)\dot{q}_0 \\ &= JJ^\top(JJ^\top)^{-1}\xi + (J - JJ^\top(JJ^\top)^{-1}J)\dot{q}_0 \\ &= \xi + (J - J)\dot{q}_0 \\ J\dot{q} &= \xi \end{aligned}$$

permitindo que o manipulador realize movimentos internos no espaço das juntas que não afetam a velocidade  $\xi$  do efetuador final.

#### 2.4.2 Medida de Manipulabilidade

Uma maneira de investigar mais a fundo o mapeamento linear estabelecido pela jacobiana é entender como a mesma “deforma” o vetor  $\dot{q}$  de entradas para produzir o vetor  $\xi$  de saídas. Para isso, podemos considerar o disco formado pelo conjunto de velocidades com norma unitária:

$$\|\dot{q}\|^2 = q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_n^2 \leq 1 \quad (2.53)$$

Substituindo a solução de menor norma  $\dot{q} = J^\dagger\xi$ :

$$\begin{aligned} \|\dot{q}\|^2 &= \dot{q}^\top \dot{q} \\ &= (J^\dagger\xi)^\top J^\dagger\xi \\ &= \xi^\top (J^\top (JJ^\top)^{-1})^\top J^\top (JJ^\top)^{-1}\xi \\ &= \xi^\top (JJ^\top)^{-1} (JJ^\top) (JJ^\top)^{-1}\xi \\ \|\dot{q}\|^2 &= \xi^\top (JJ^\top)^{-1}\xi \leq 1 \end{aligned} \quad (2.54)$$

A equação (2.54) define uma região no espaço de trabalho conhecido como *elipsoide de manipulabilidade* que representa todas as velocidades possíveis do efetuador final para uma dada configuração do manipulador. Esse fato pode ser facilmente verificado ao considerarmos a decomposição em valores singulares (SVD) da jacobiana  $J = U\Sigma V^\top$ :

$$\begin{aligned}
\|\dot{q}\|^2 &= \xi^\top (U\Sigma V^\top V\Sigma^\top U^\top)^{-1} \xi \\
&= \xi^\top (U\Sigma^2 U^\top)^{-1} \xi \\
&= \xi^\top U\Sigma^{-2} U^\top \xi \\
\|\dot{q}\|^2 &= (U^\top \xi)^\top \Sigma^{-2} (U^\top \xi)
\end{aligned} \tag{2.55}$$

onde sabemos que  $U$  e  $V$  são matrizes ortogonais, isto é  $U^{-1} = U^\top$  e  $V^{-1} = V^\top$ . Além disso a matriz

$$\Sigma^{-2} = \begin{bmatrix} \sigma_1^{-2} & & & \\ & \sigma_2^{-2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_m^{-2} \end{bmatrix} \tag{2.56}$$

é diagonal e os termos que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m$  são os valores singulares de  $J$ . Por fim, ao fazermos a substituição  $w = U^\top \xi$  podemos reescrever a equação (2.55) como:

$$w^\top \Sigma^{-2} w = \sum_{i=1}^m \frac{w_i^2}{\sigma_i^2} \leq 1 \tag{2.57}$$

evidenciado que o disco é mapeado num elipsoide com eixos alinhados a um sistema de coordenadas rotacionado por  $U^\top$ . No sistema de coordenadas original, os semi-eixos do elipsoide são dados pelos vetores  $\sigma_i u_i$ .

A medida de manipulabilidade  $\mu$  é definida como o produto dos valores singulares de  $J$ :

$$\mu = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m \tag{2.58}$$

que é proporcional ao volume do elipsoide de manipulabilidade. Ao passo que nos aproximamos de uma singularidade, um ou mais dos valores singulares de  $J$  se aproximam de zero, reduzindo o volume do elipsoide e consequentemente a destreza do manipulador. Isso pode ser visualizado na figura 2.3 onde para o braço planar 3R, o elipsoide de manipulabilidade é mostrado para diferentes configurações do manipulador e vai se tornando cada vez mais achatado à medida que nos aproximamos do limite do espaço de trabalho.

### 2.4.3 Resolução de Redundância

Ao estabelecermos a solução geral dada pela equação (2.51), dissemos que o vetor  $\dot{q}_0$  pode ser escolhido arbitrariamente. Uma possibilidade é tomá-lo de forma a maximizar algum índice de performance  $w$ , para isso escolhendo o vetor na direção do gradiente:

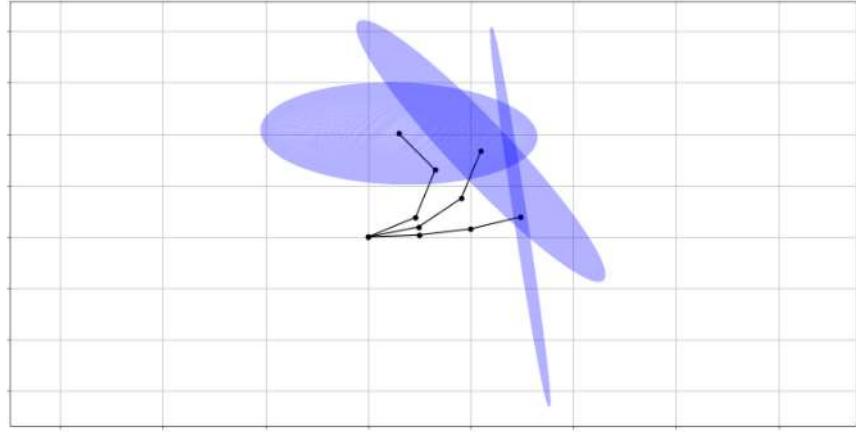


Figura 2.3: Elipsoide de manipulabilidade para diferentes configurações do manipulador planar 3R.

$$\dot{q}_0 = k_0 \left( \frac{\partial w(q)}{\partial q} \right)^\top \quad (2.59)$$

onde  $k_0 > 0$  é uma constante positiva que determina o tamanho do passo.

Uma escolha natural para o índice de performance  $w$  é a *medida de manipulabilidade de Yoshikawa*:

$$w(q) = \sqrt{\det(J(q)J(q)^\top)} \quad (2.60)$$

onde vale ressaltar que é equivalente àquela definida na equação (2.58) uma vez que se  $\lambda_i$  são os autovalores de  $JJ^\top$  então  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ .

Apesar do cálculo da manipulabilidade ser relativamente simples, o mesmo não se pode dizer para o cálculo do seu gradiente devido à complexidade das expressões envolvidas. Uma alternativa é utilizar uma métrica mais simples como a *distância para os limites mecânicos das juntas* dada por:

$$w(q) = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{q_i - \bar{q}_i}{q_{iM} - q_{im}} \right)^2 \quad (2.61)$$

Ao maximizar tal índice, espera-se que o manipulador mantenha-se próximo ao ponto central de atuação de cada junta, evitando assim configurações singulares no limite do espaço de trabalho. Além disso, o vetor gradiente pode ser calculado de maneira analítica onde cada coordenada é dada por:

$$\frac{\partial w(q)}{\partial q_i} = -\frac{1}{n} \frac{q_i - \bar{q}_i}{(q_{iM} - q_{im})^2} \quad (2.62)$$

Outro ponto a salientar é que a escolha do tamanho do passo  $k_0$  é crucial para a performance do algoritmo. Se  $k_0$  for muito pequeno o processo de otimização pode se tornar muito lento, enquanto que se  $k_0$  for muito grande isso pode levar até mesmo uma diminuição ou até mesmo não convergência do valor de  $w$  devido a oscilações em torno do ponto de máximo local.

No próximo capítulo, iremos utilizar os conceitos apresentados até agora na concepção de um simulador minimalista do manipulador planar 3R denominado *Snakesim*. O objetivo principal será explorar a resolução de redundância presente na execução de trajetórias cartesianas no plano  $xy$  do espaço de trabalho para maximizar os índices tanto de manipulabilidade quanto de distância para os limites das juntas introduzidos nessa seção.

# Capítulo 3

## Metodología

3.1 Python robotics toolbox

3.2 ROS2

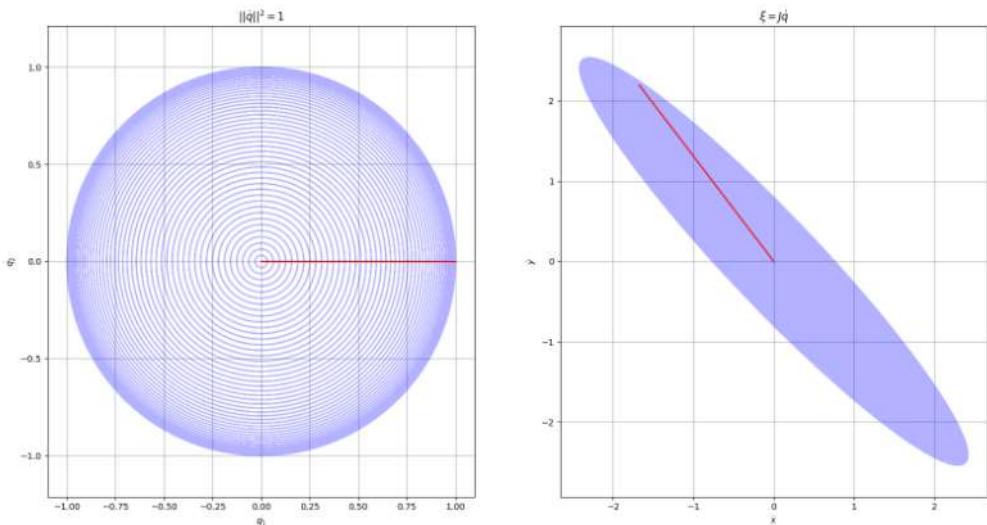


Figura 3.1: Elipsoide de manipulabilidade para diferentes configurações do manipulador planar 3R.

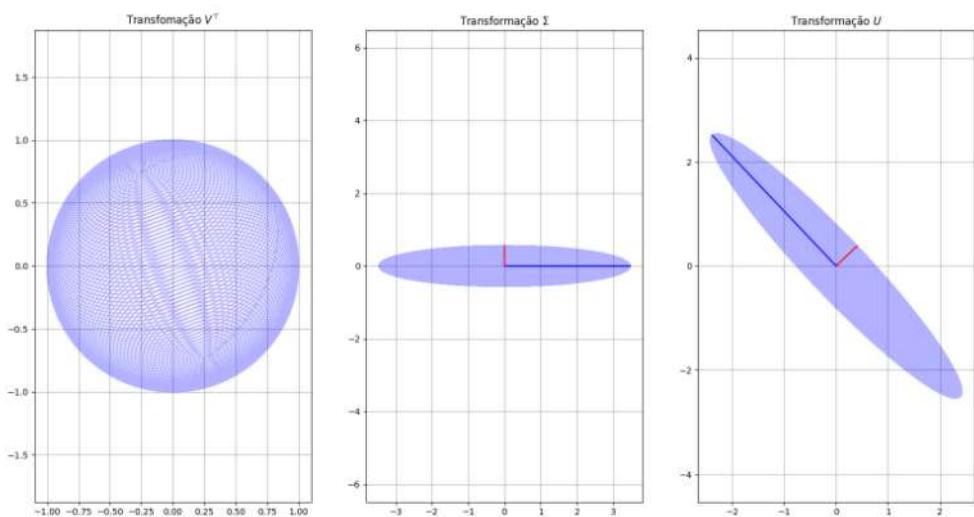


Figura 3.2: Elipsoide de manipulabilidade para diferentes configurações do manipulador planar 3R.

# **Capítulo 4**

## **Resultados**

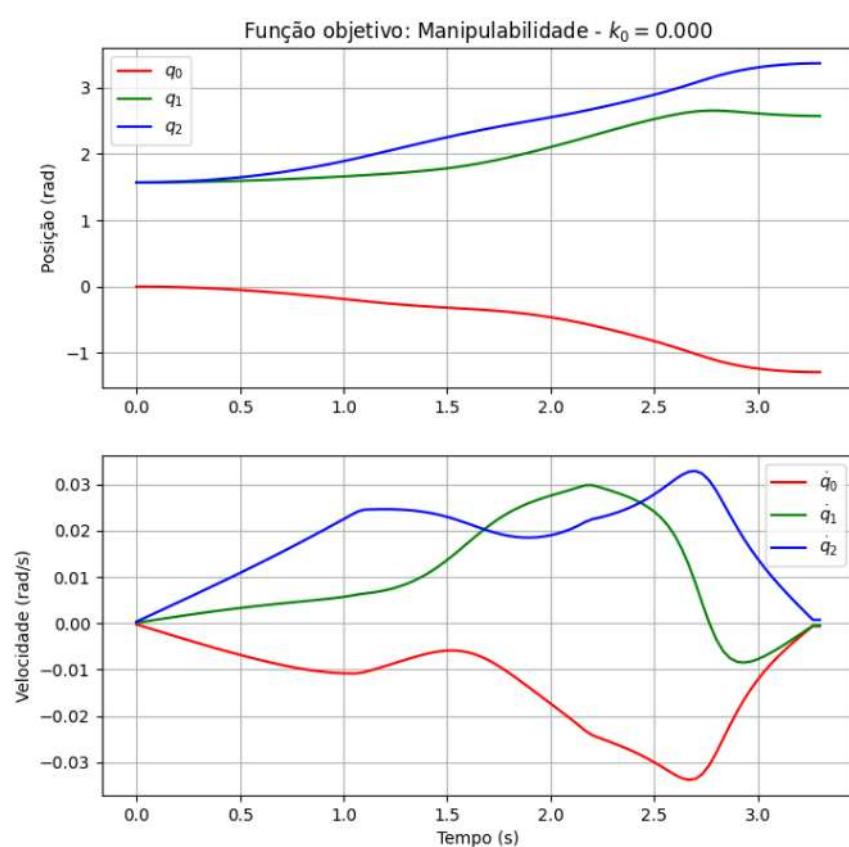


Figura 4.1: Resultados

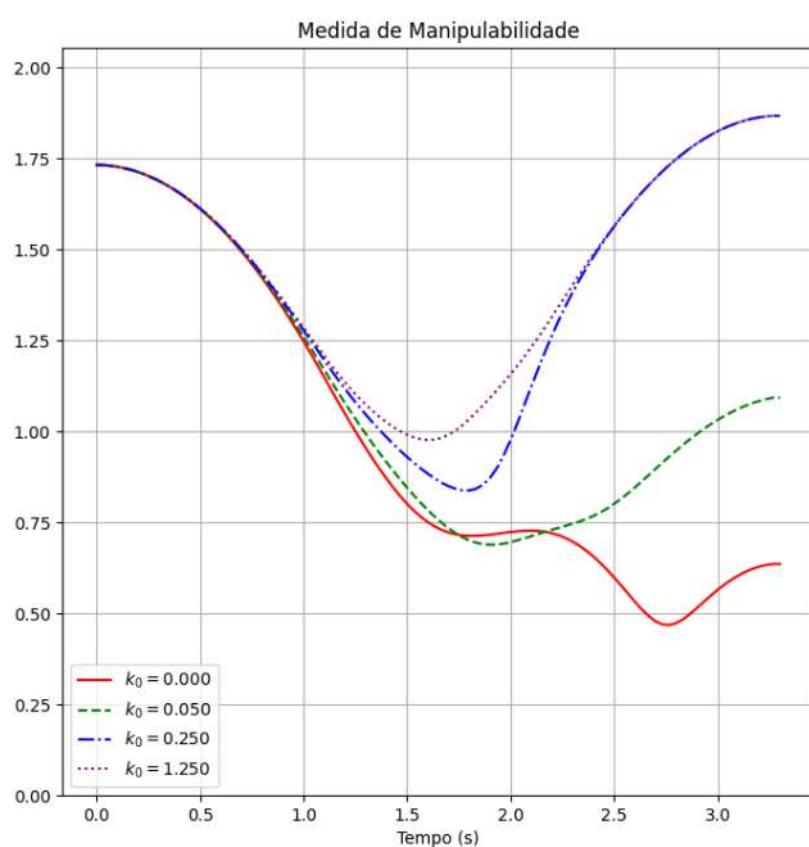


Figura 4.2: Resultados

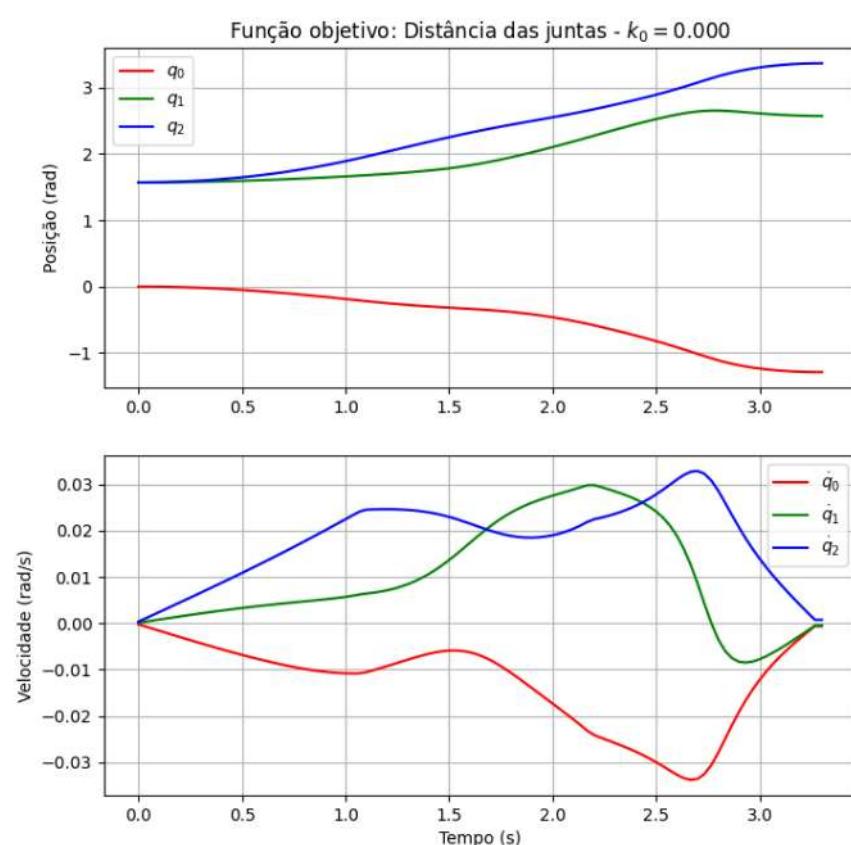


Figura 4.3: Resultados

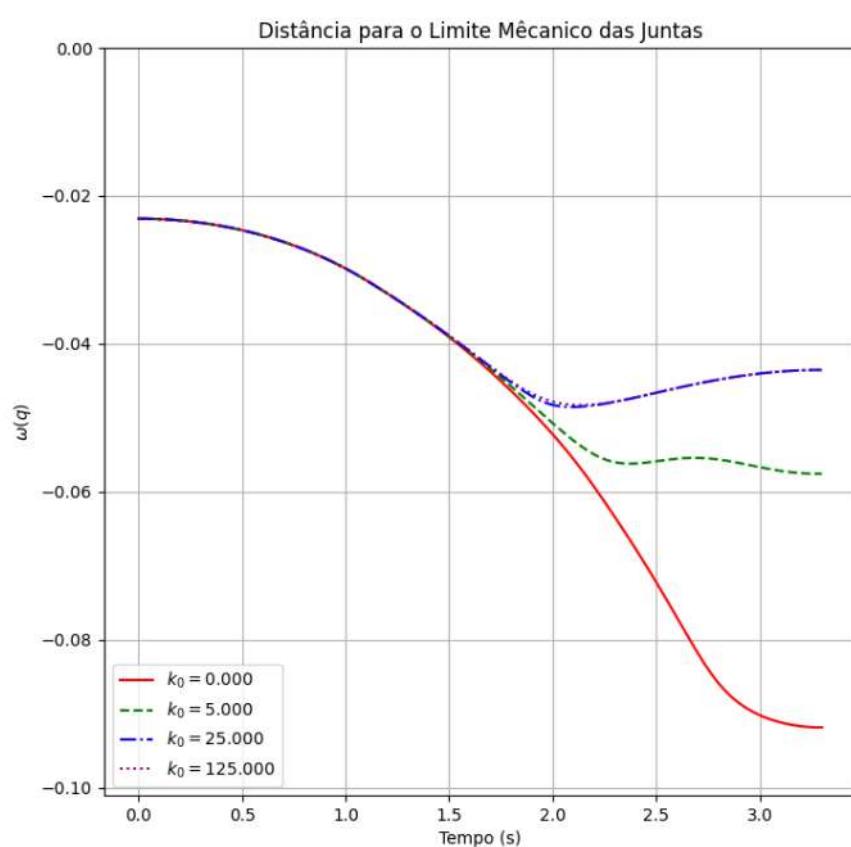


Figura 4.4: Resultados

# Capítulo 5

## Conclusão

# Bibliografia

