

树形DP

胡船长

初航我带你，远航靠自己

一、树形DP分类

1. 单纯型：3道题目
2. 跨越型：2道题目
3. 背包型：3道题目
4. 覆盖型：2道题目

二、树形DP-课后实战题

1. HZOJ-361：没有上司的舞会
2. P1131：[ZJOI2007] 时态同步
3. P2018：消息传递
4. B4016：树的直径
5. P3174：[HAOI2009] 毛毛虫
6. P1757：通天之分组背包
7. HZOJ-362：选课
8. P2015：二叉苹果树
9. HZOJ-363：Strategic_game
10. P2279：[HNOI2003] 消防局的设立

一、树形DP分类

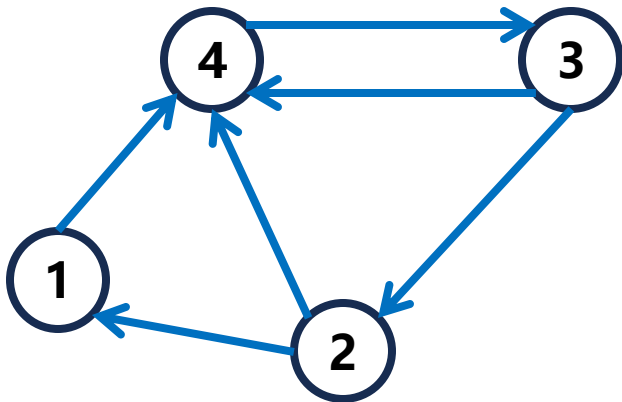
1. 单纯型：3道题目

2. 跨越型：2道题目

3. 背包型：3道题目

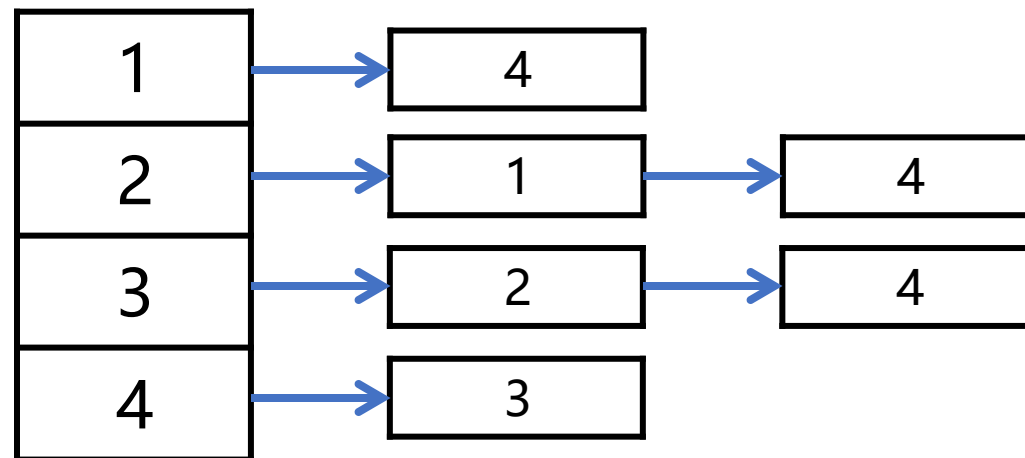
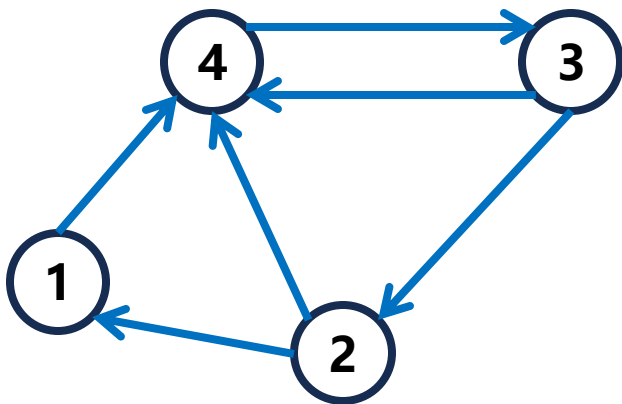
4. 覆盖型：2道题目

图结构存储：邻接矩阵

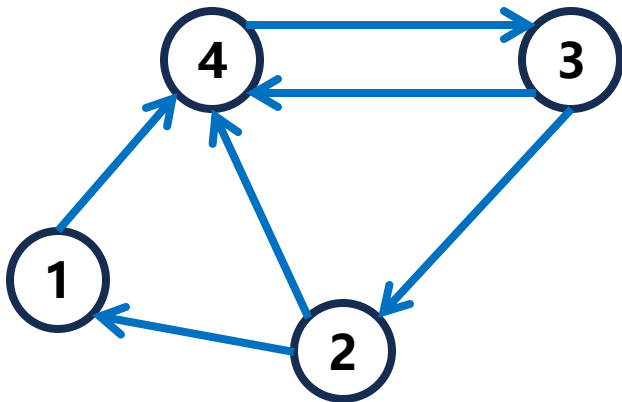


	1	2	3	4
1	0	0	0	1
2	1	0	0	1
3	0	1	0	1
4	0	0	1	0

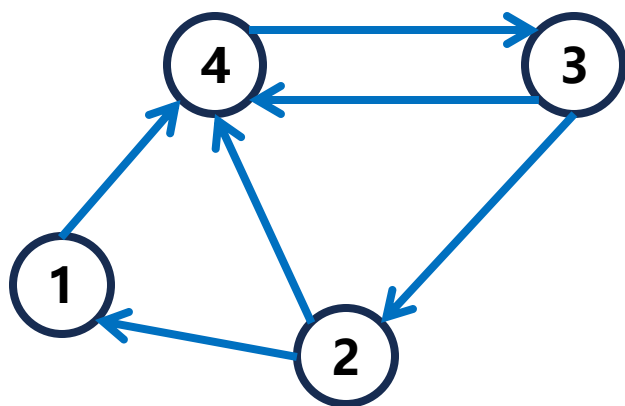
图结构存储：邻接表



图结构存储：链式前向星

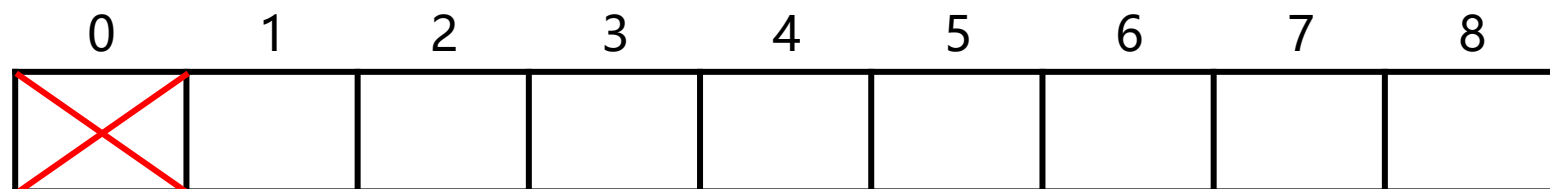
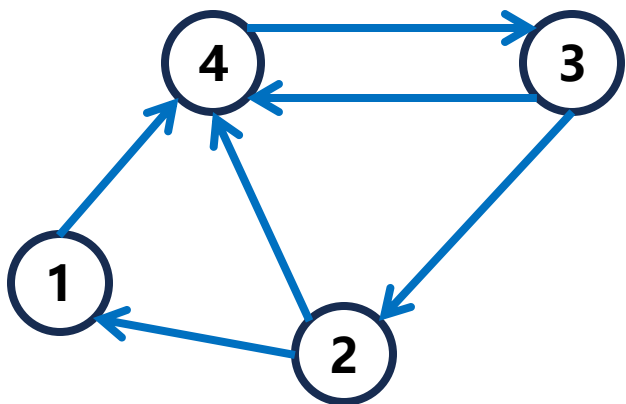


图结构存储：链式前向星

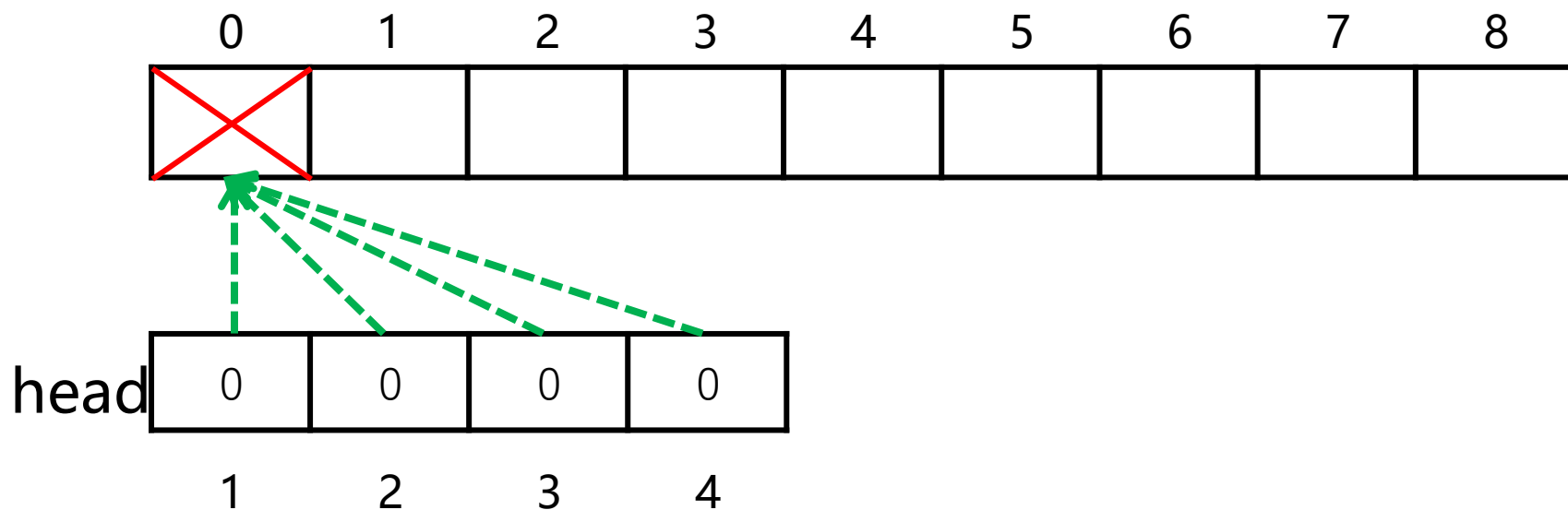
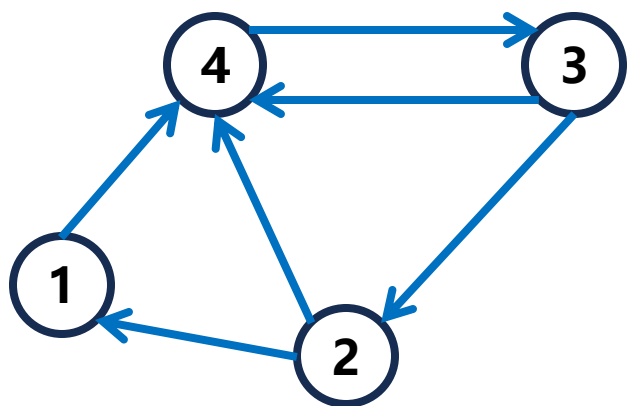


0	1	2	3	4	5	6	7	8

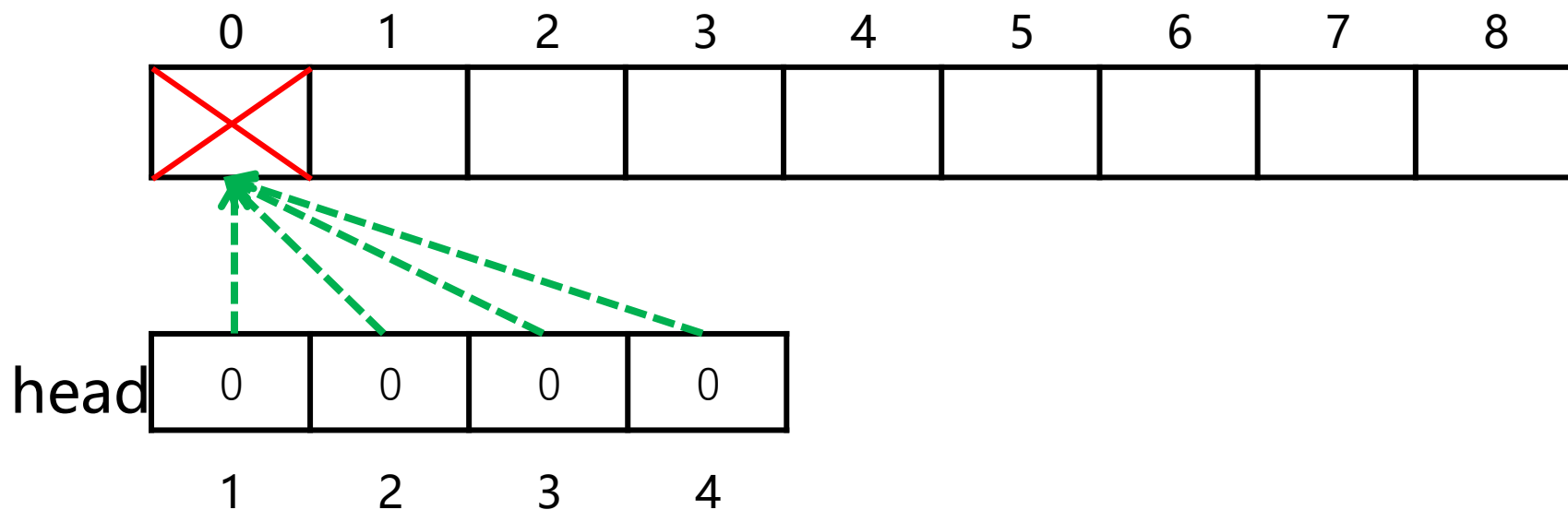
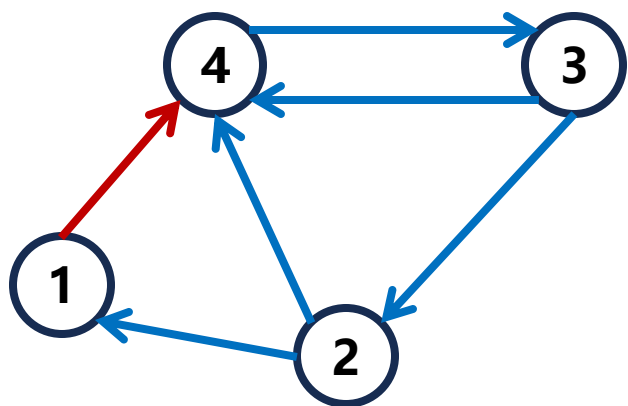
图结构存储：链式前向星



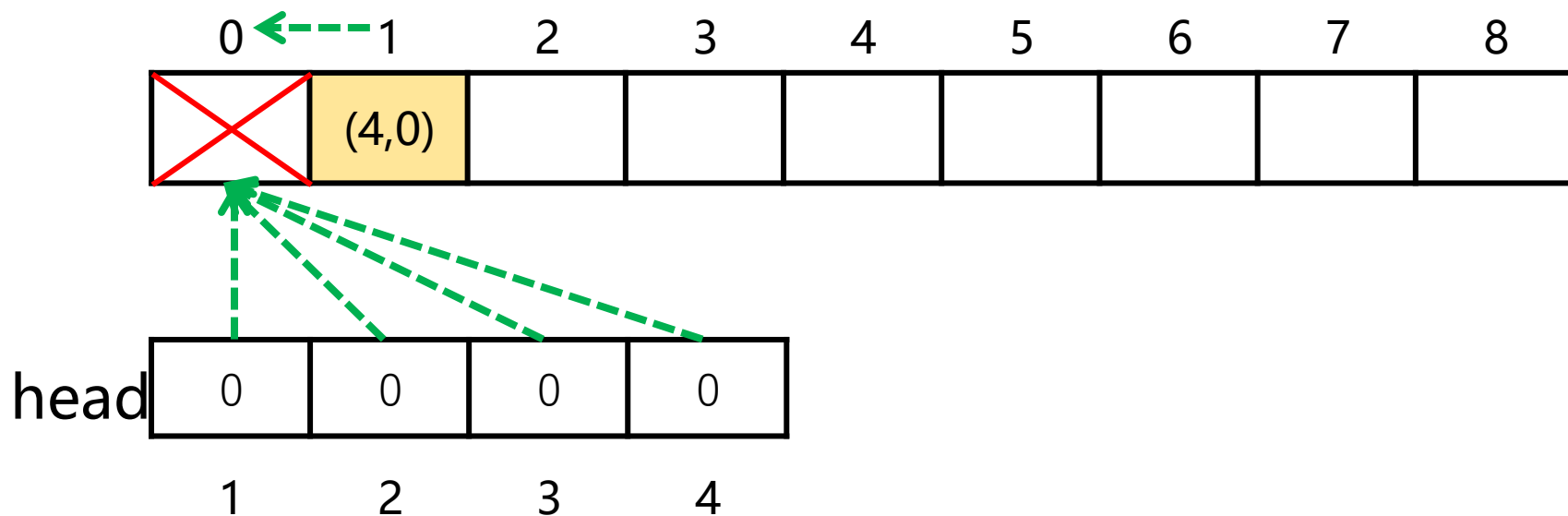
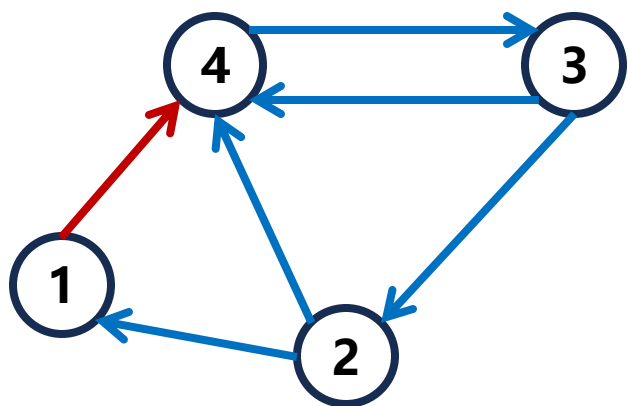
图结构存储：链式前向星



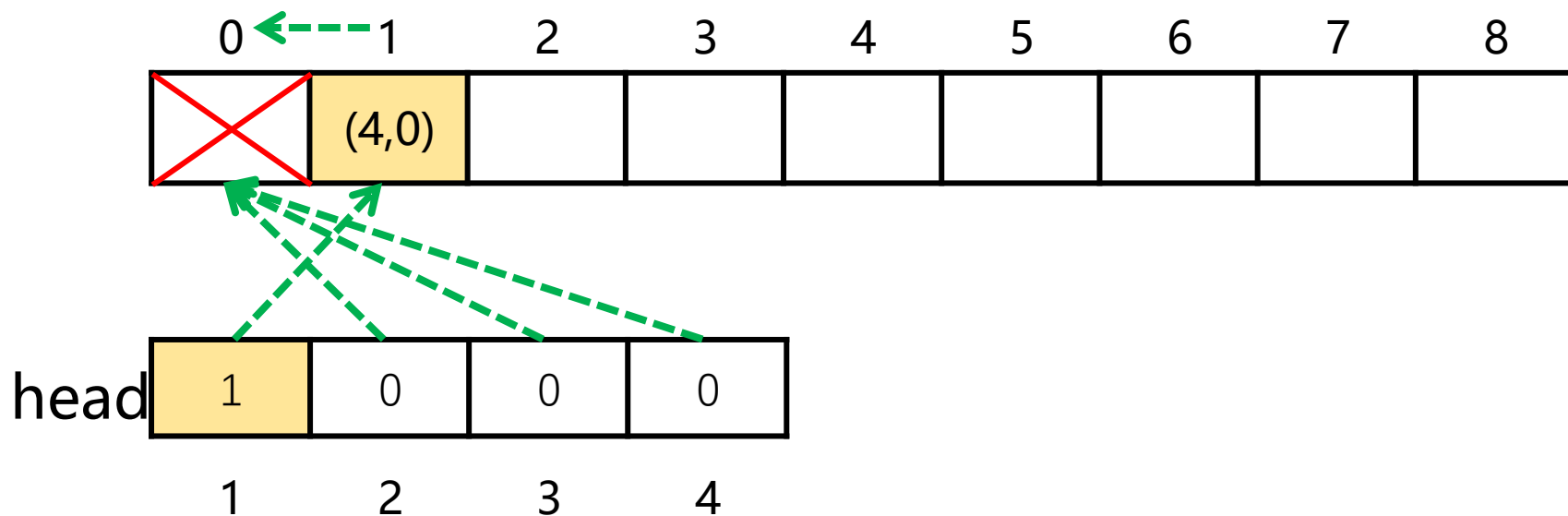
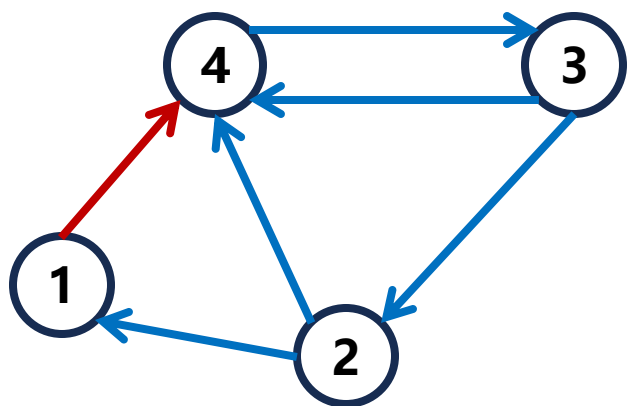
图结构存储：链式前向星



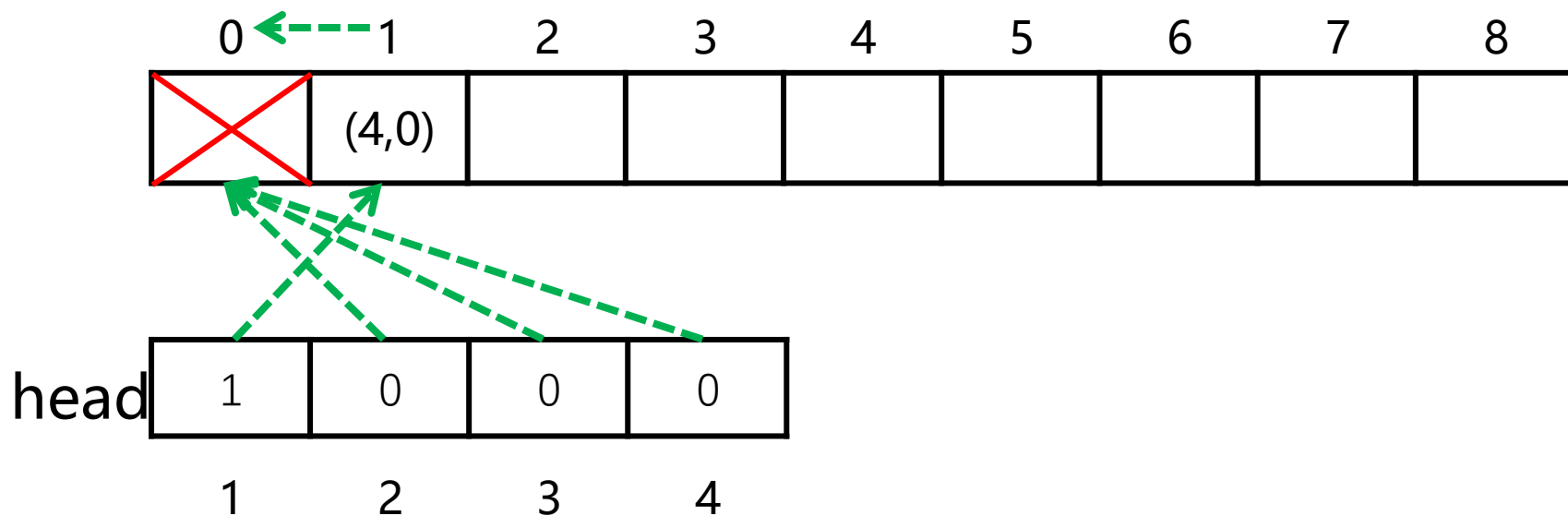
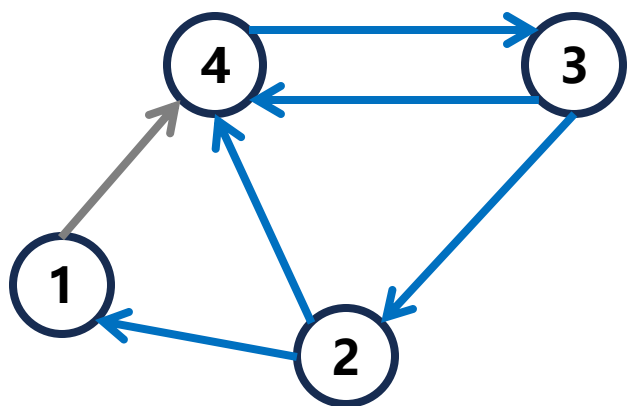
图结构存储：链式前向星



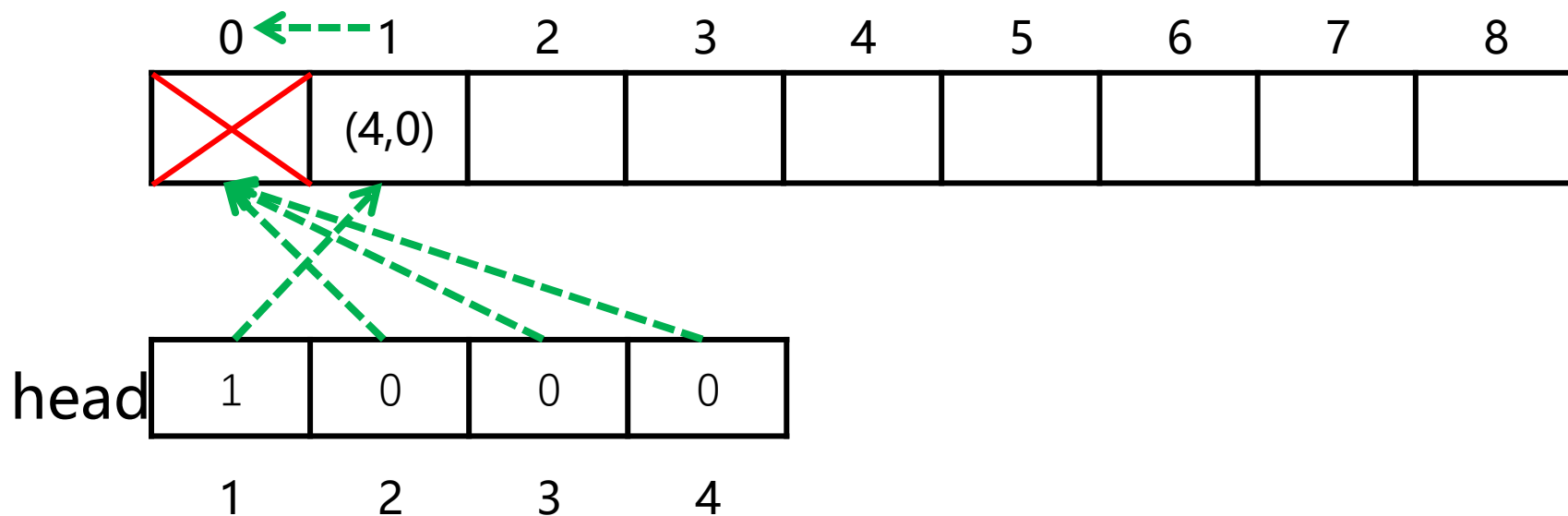
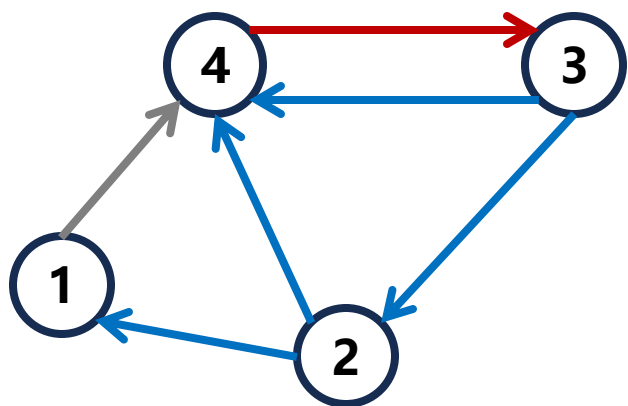
图结构存储：链式前向星



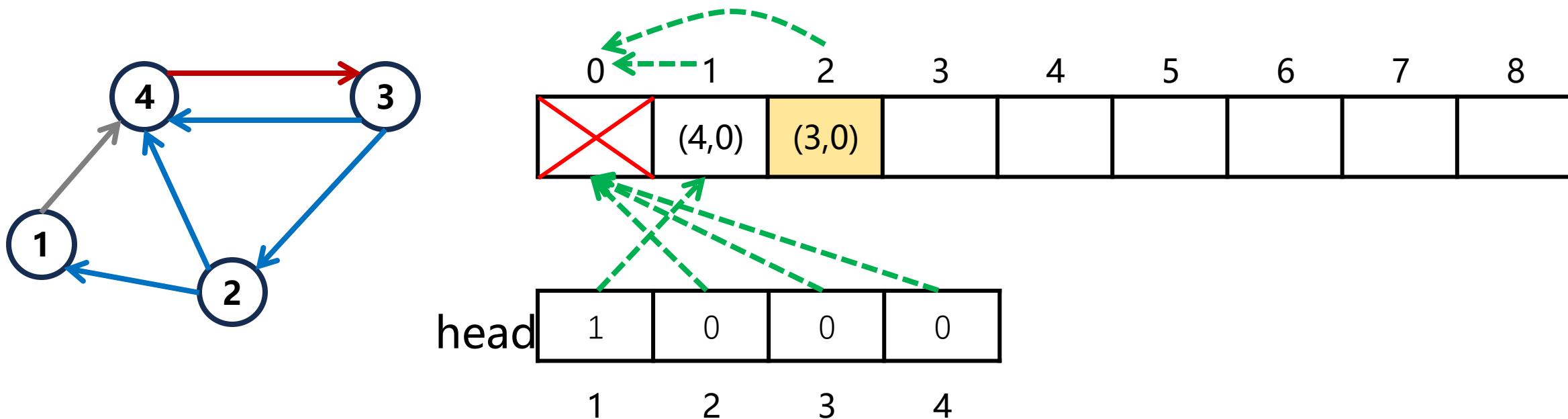
图结构存储：链式前向星



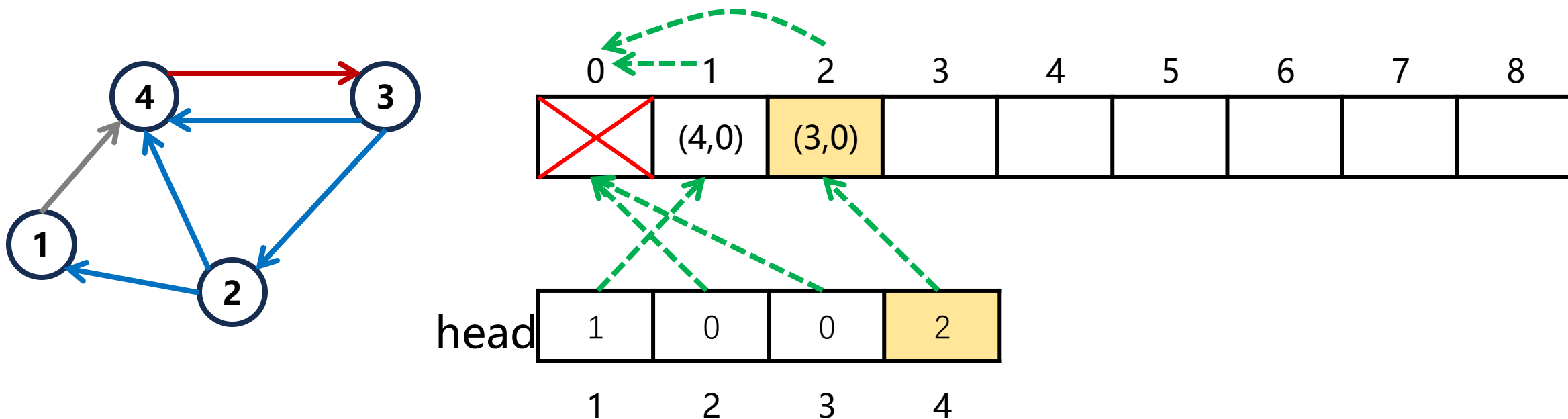
图结构存储：链式前向星



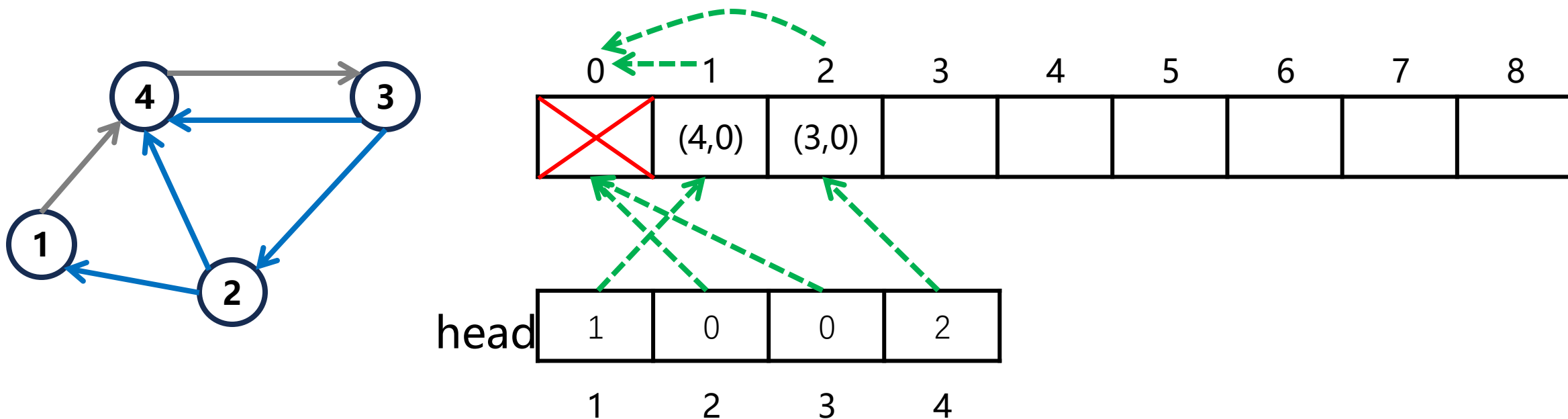
图结构存储：链式前向星



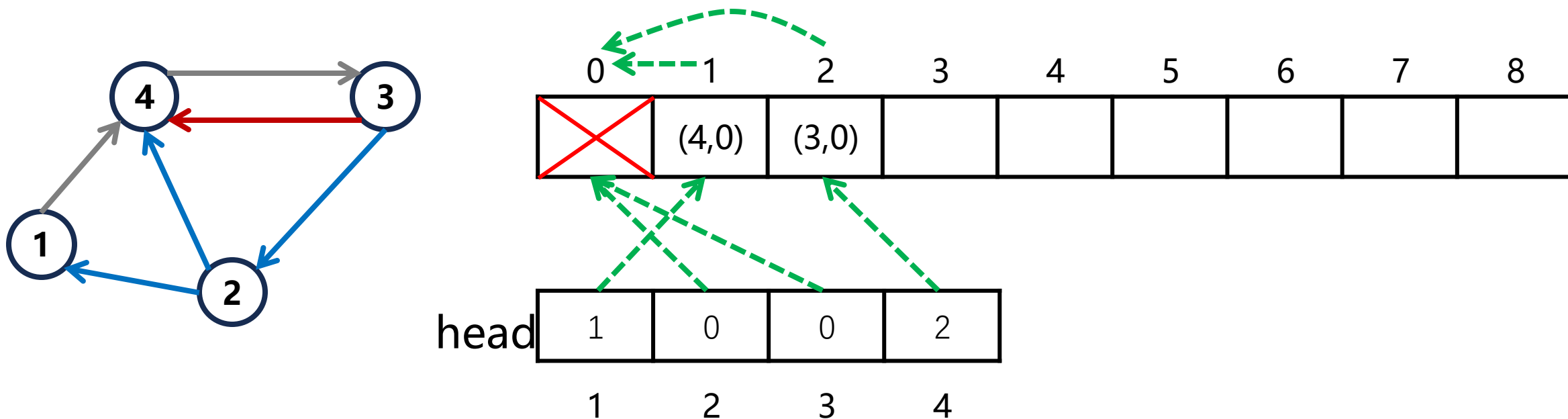
图结构存储：链式前向星



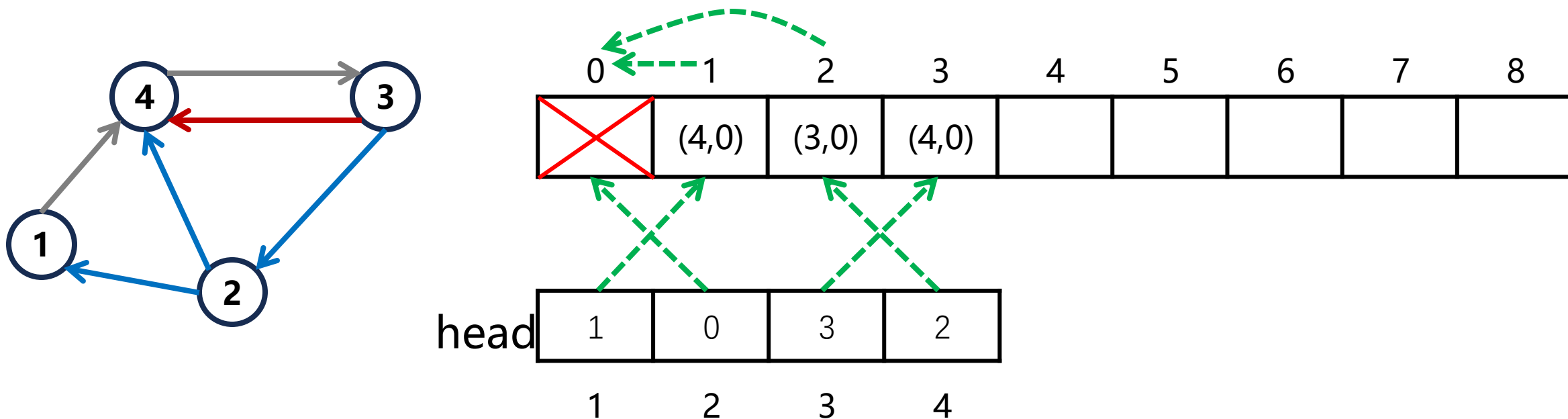
图结构存储：链式前向星



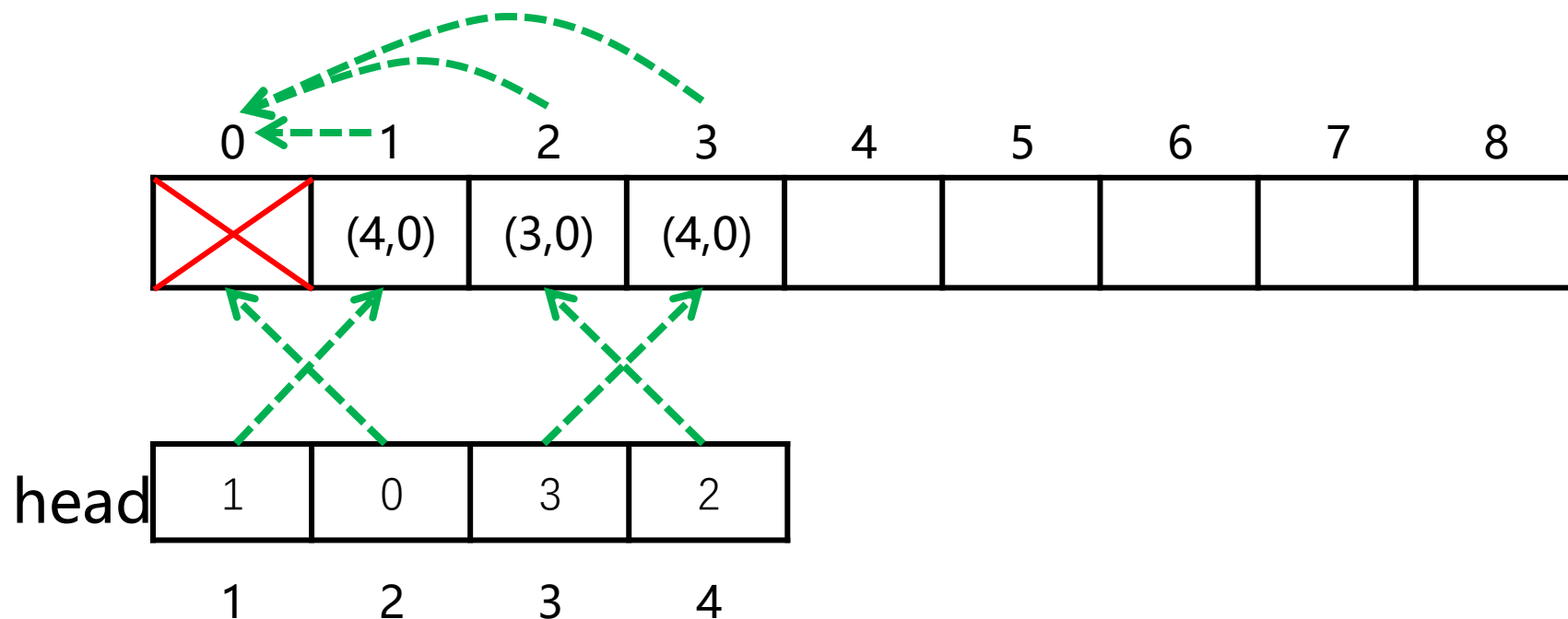
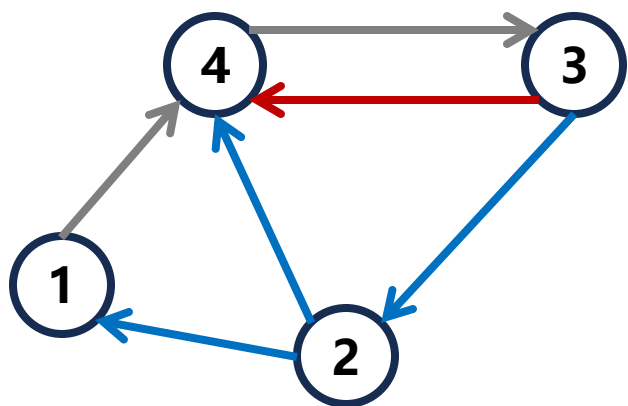
图结构存储：链式前向星



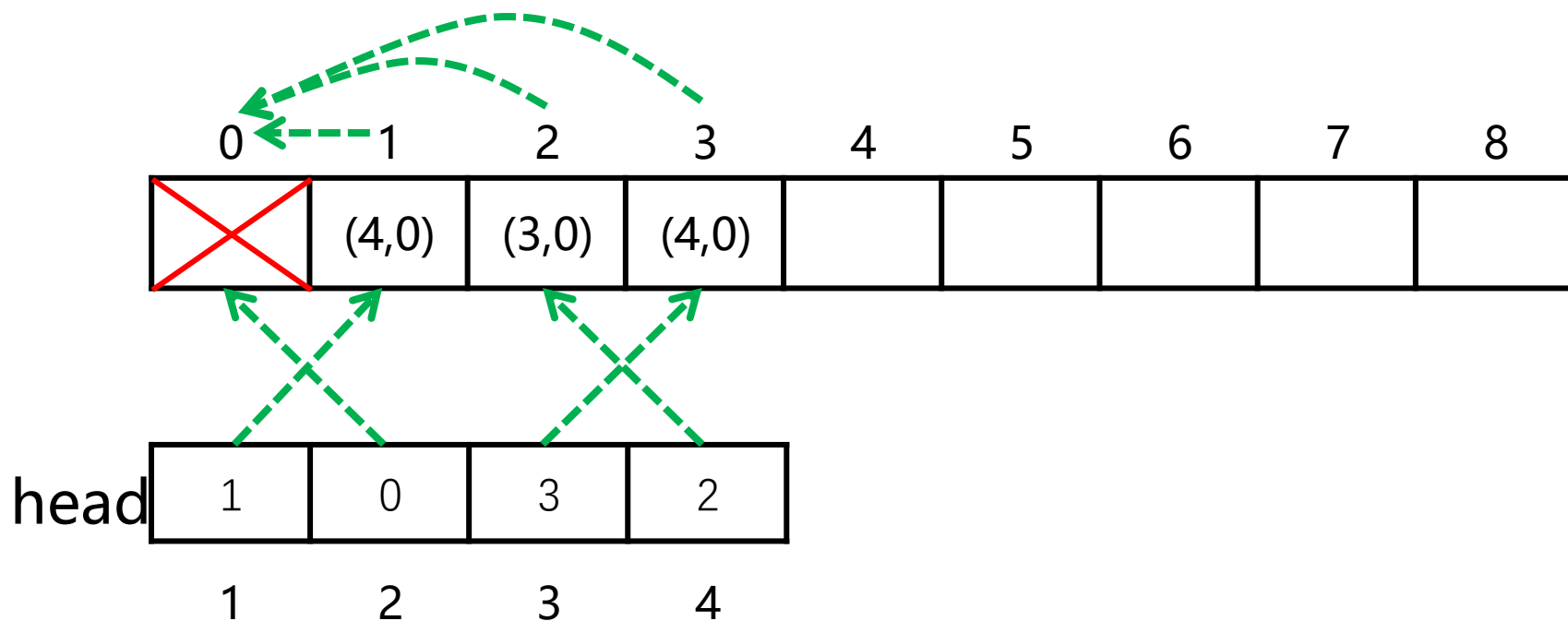
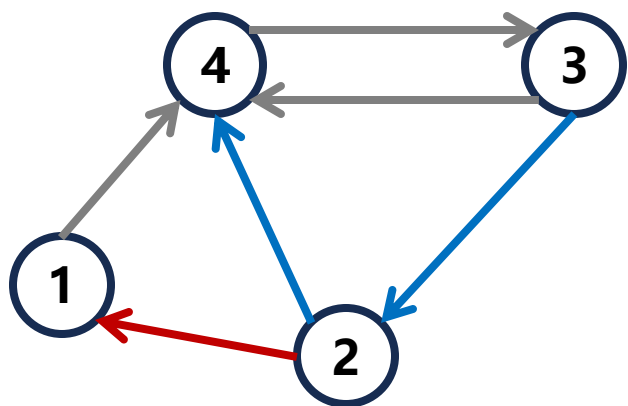
图结构存储：链式前向星



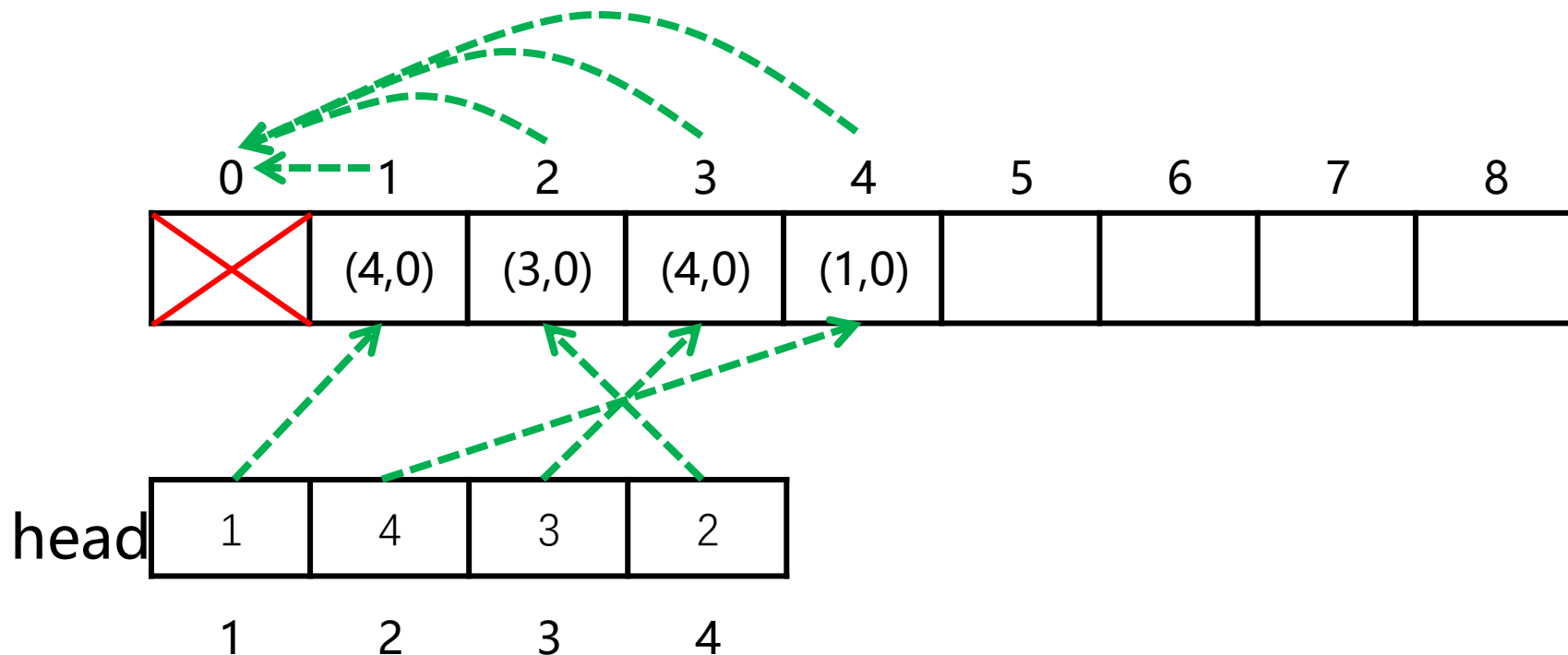
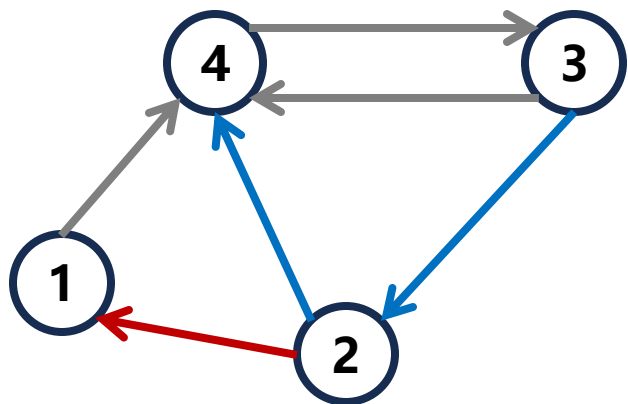
图结构存储：链式前向星



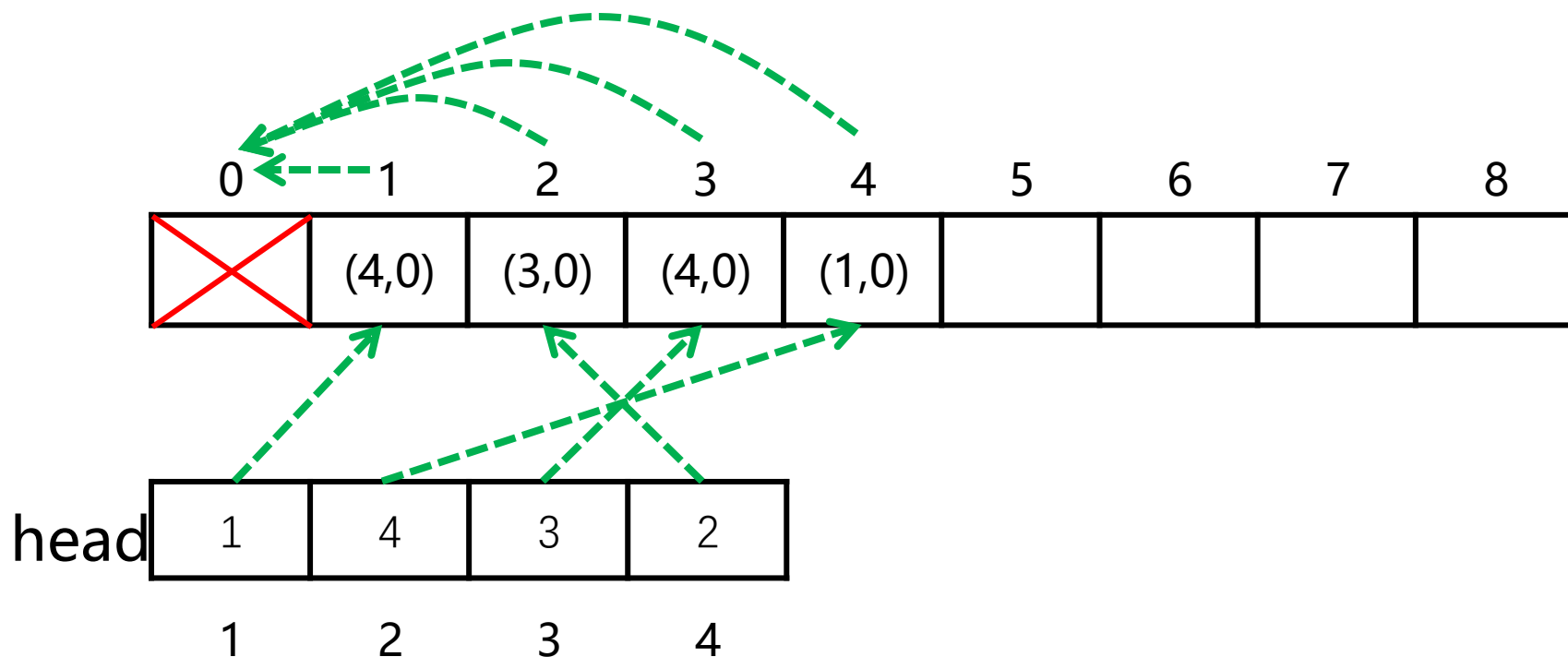
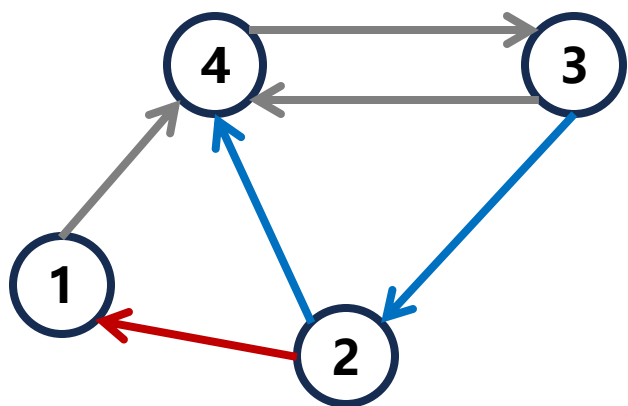
图结构存储：链式前向星



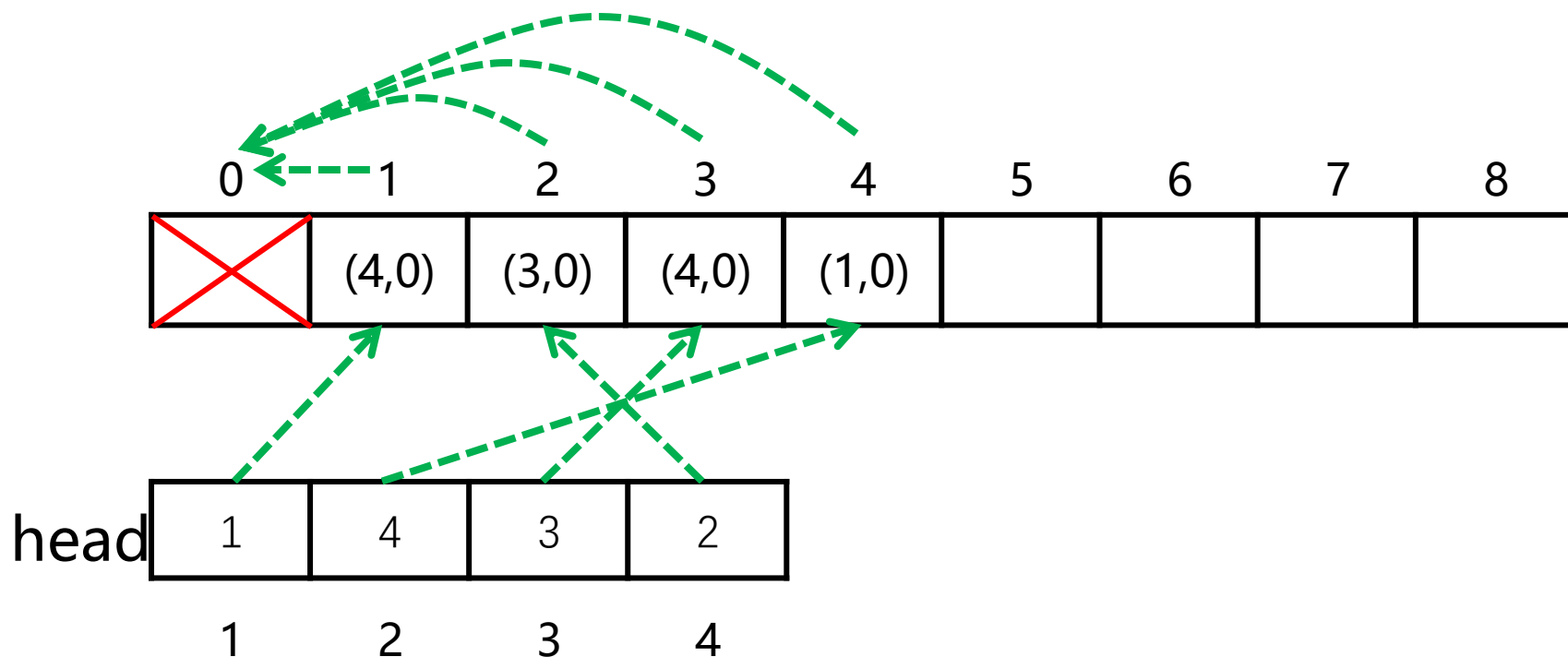
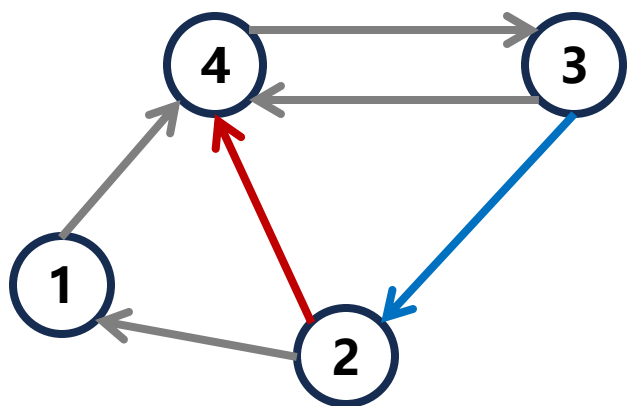
图结构存储：链式前向星



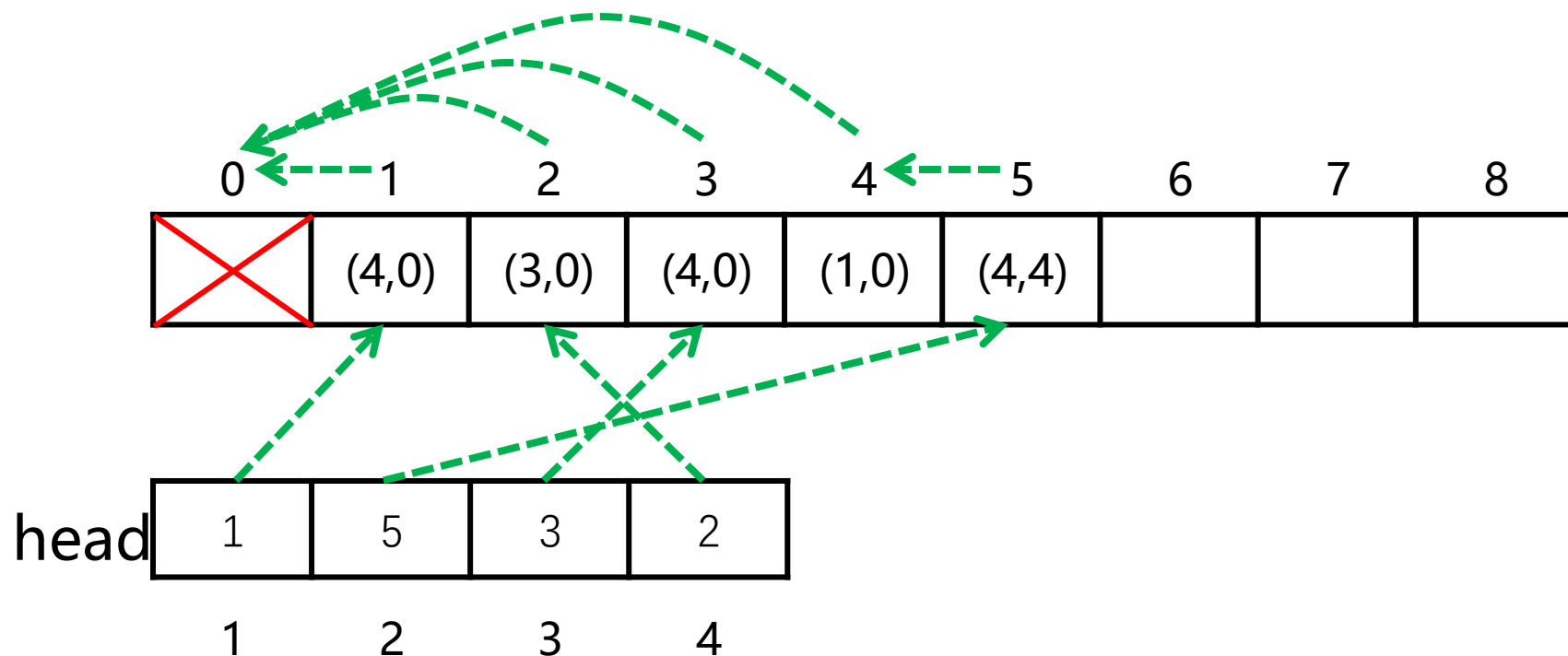
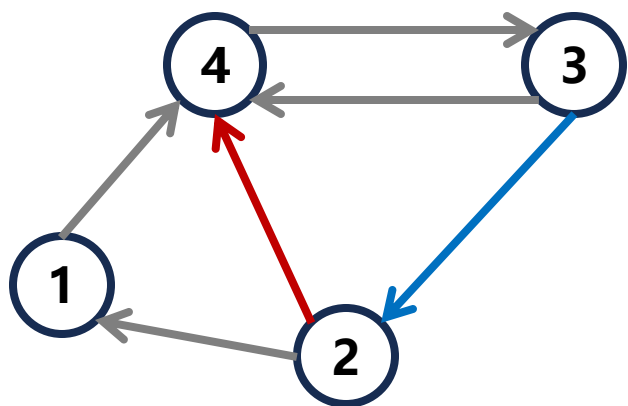
图结构存储：链式前向星



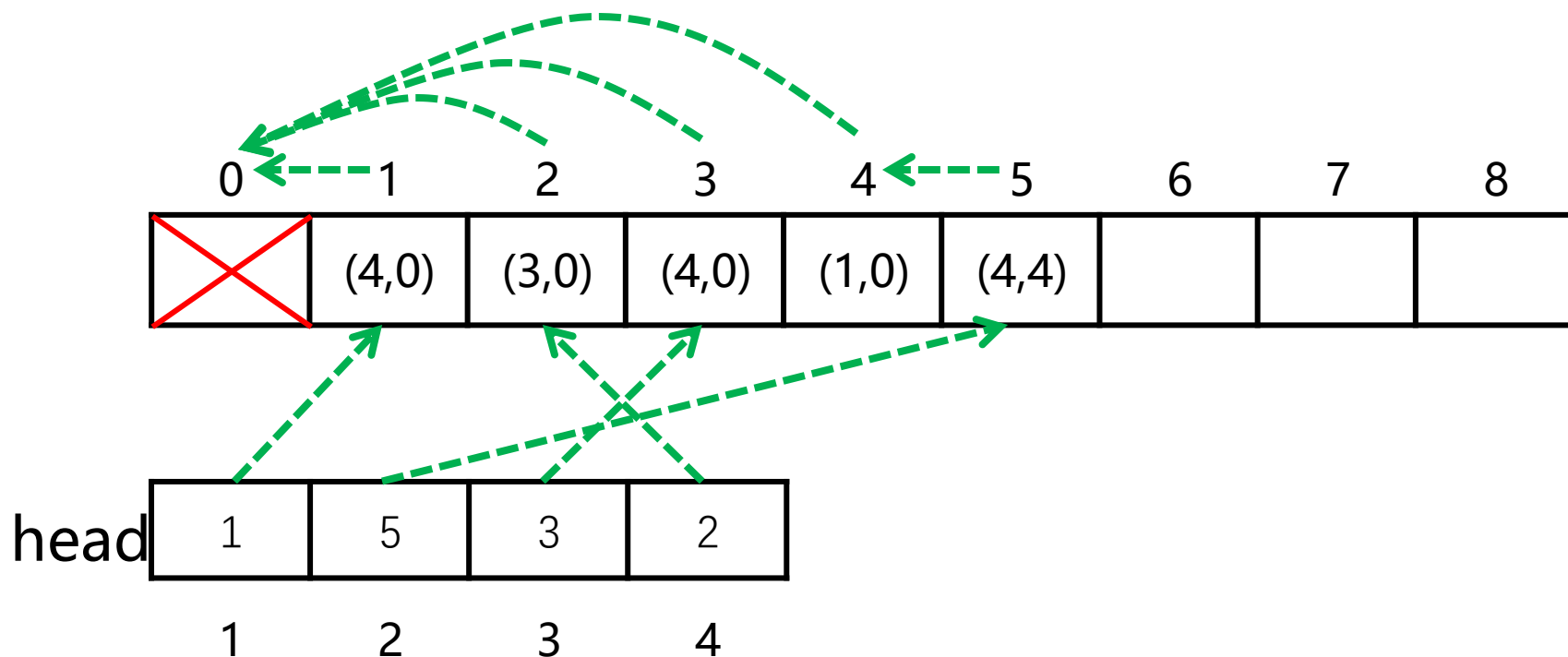
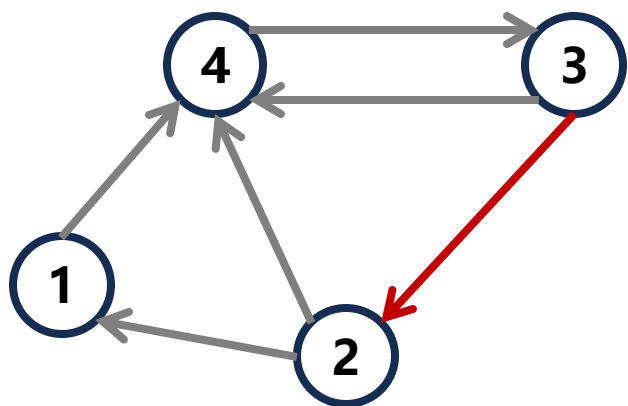
图结构存储：链式前向星



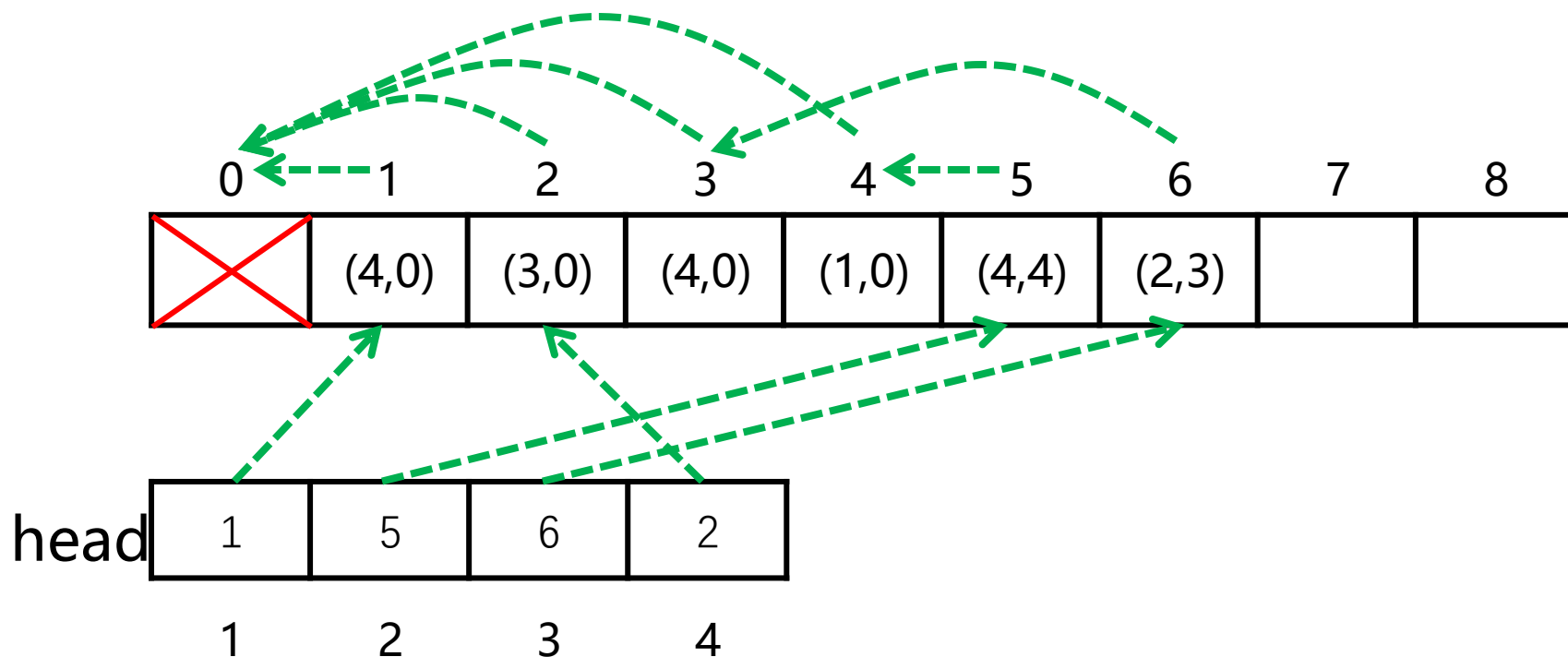
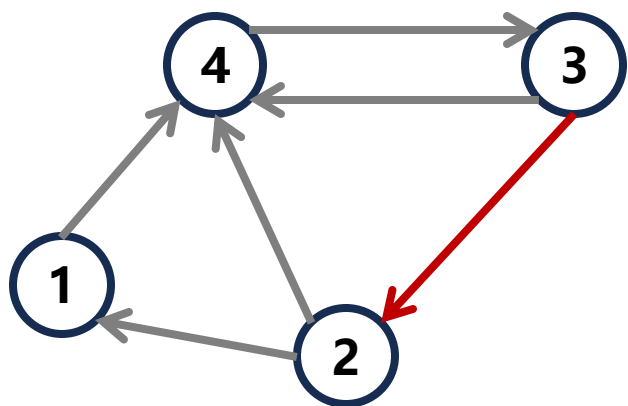
图结构存储：链式前向星



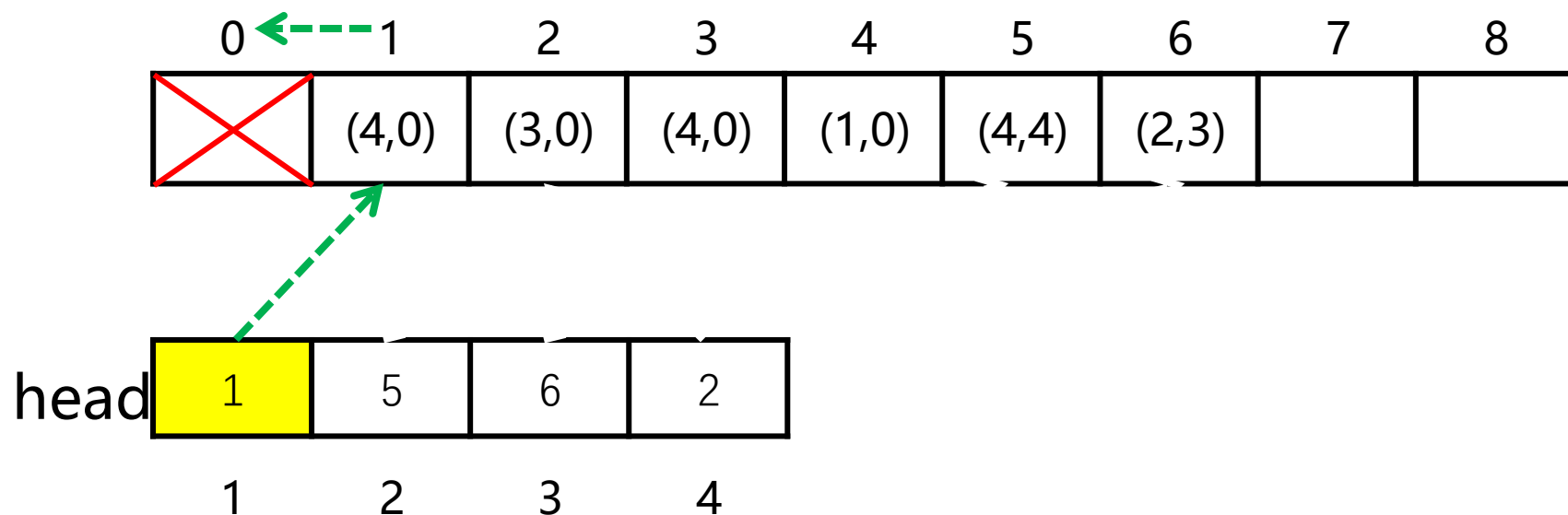
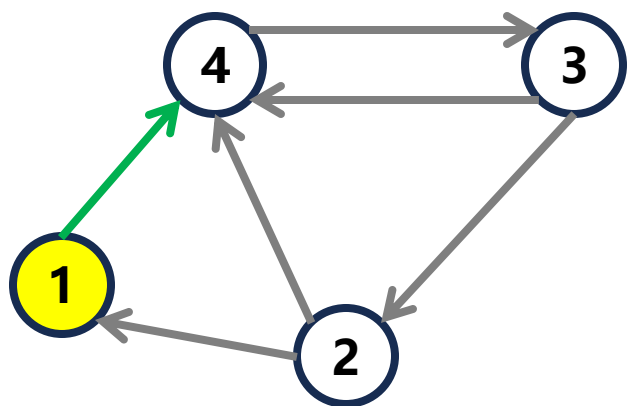
图结构存储：链式前向星



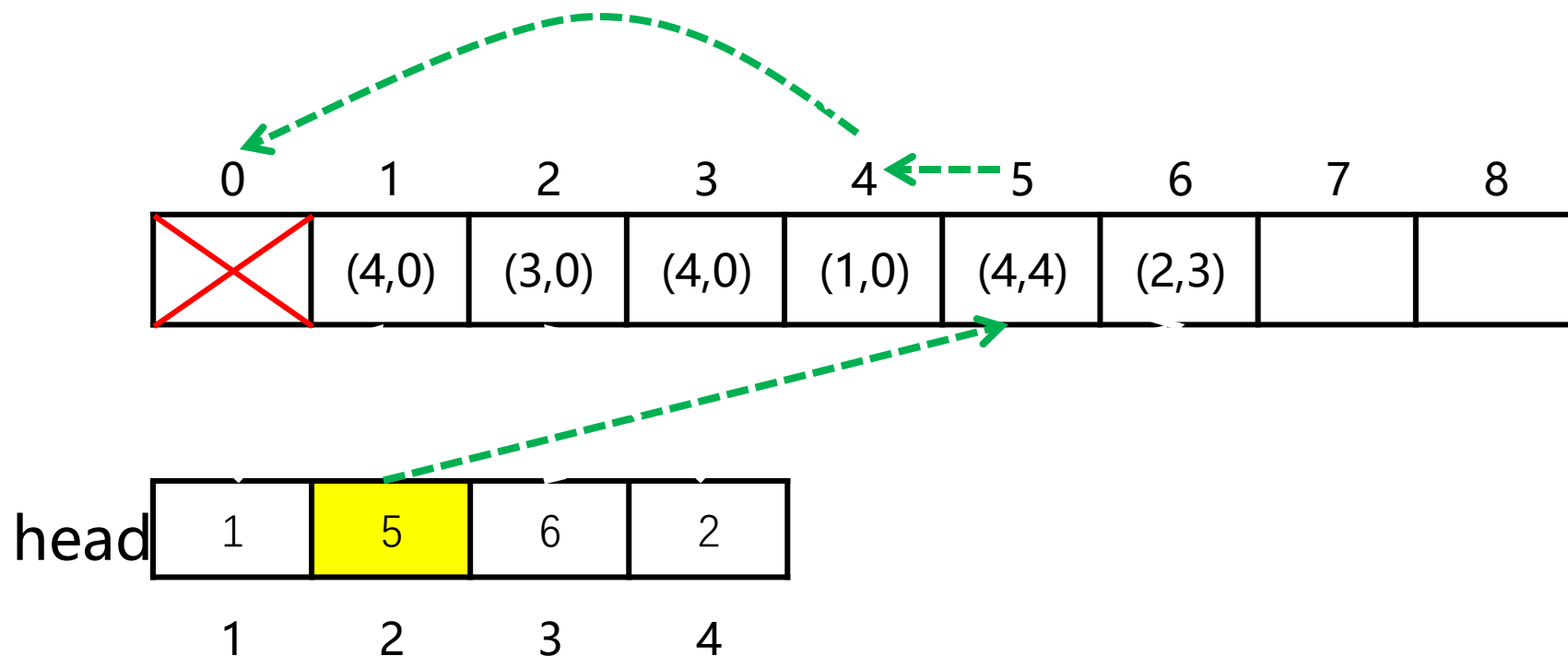
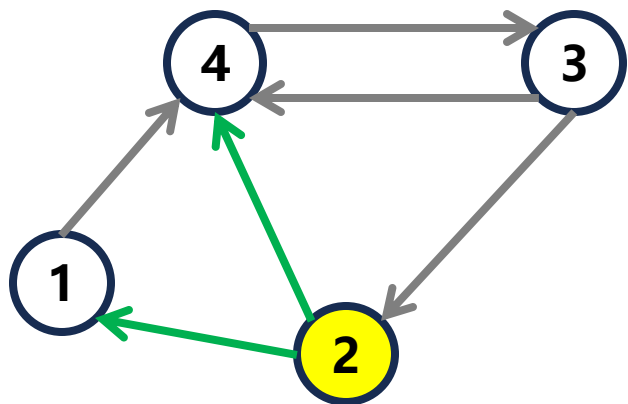
图结构存储：链式前向星



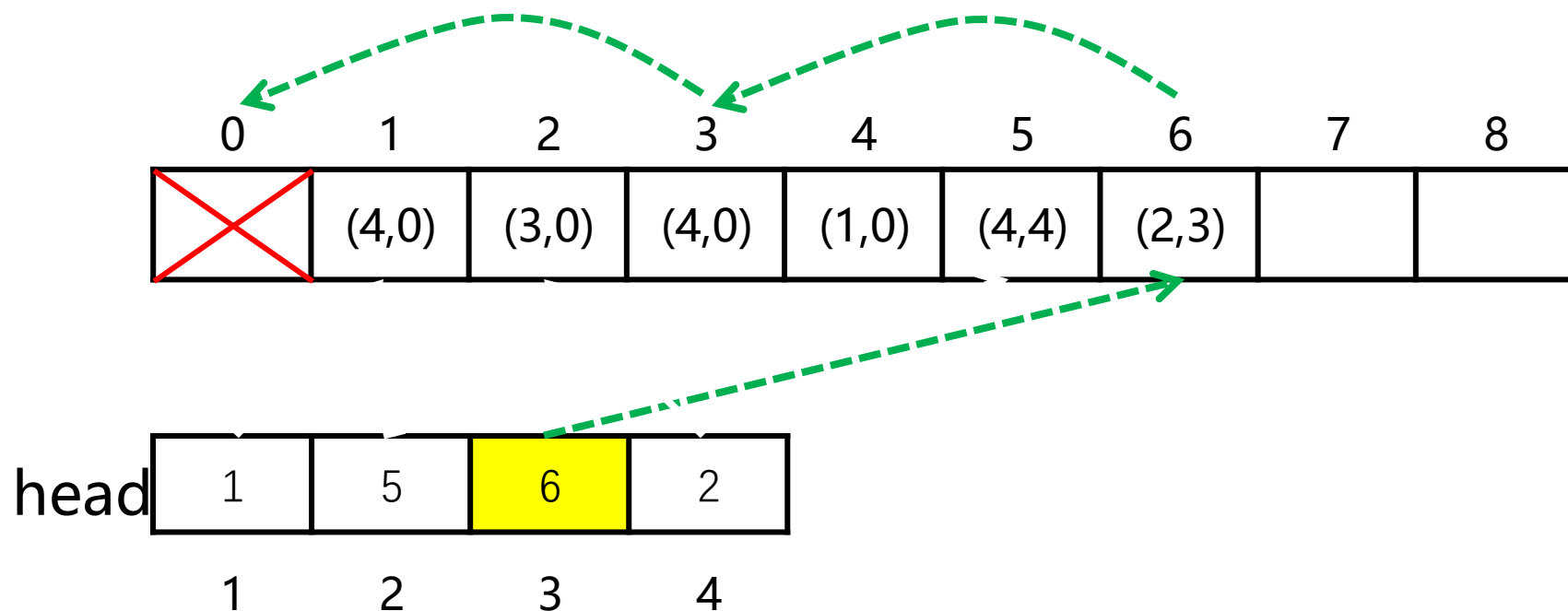
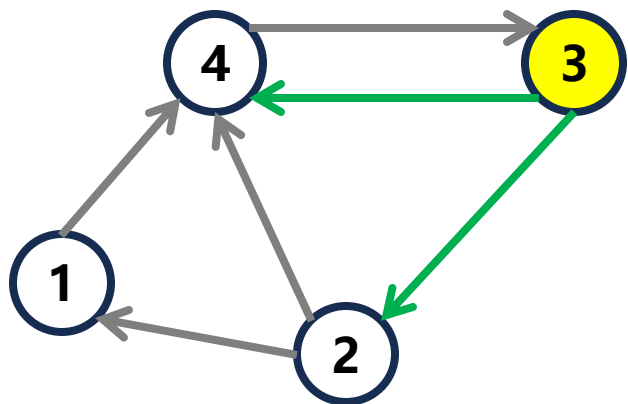
图结构存储：链式前向星



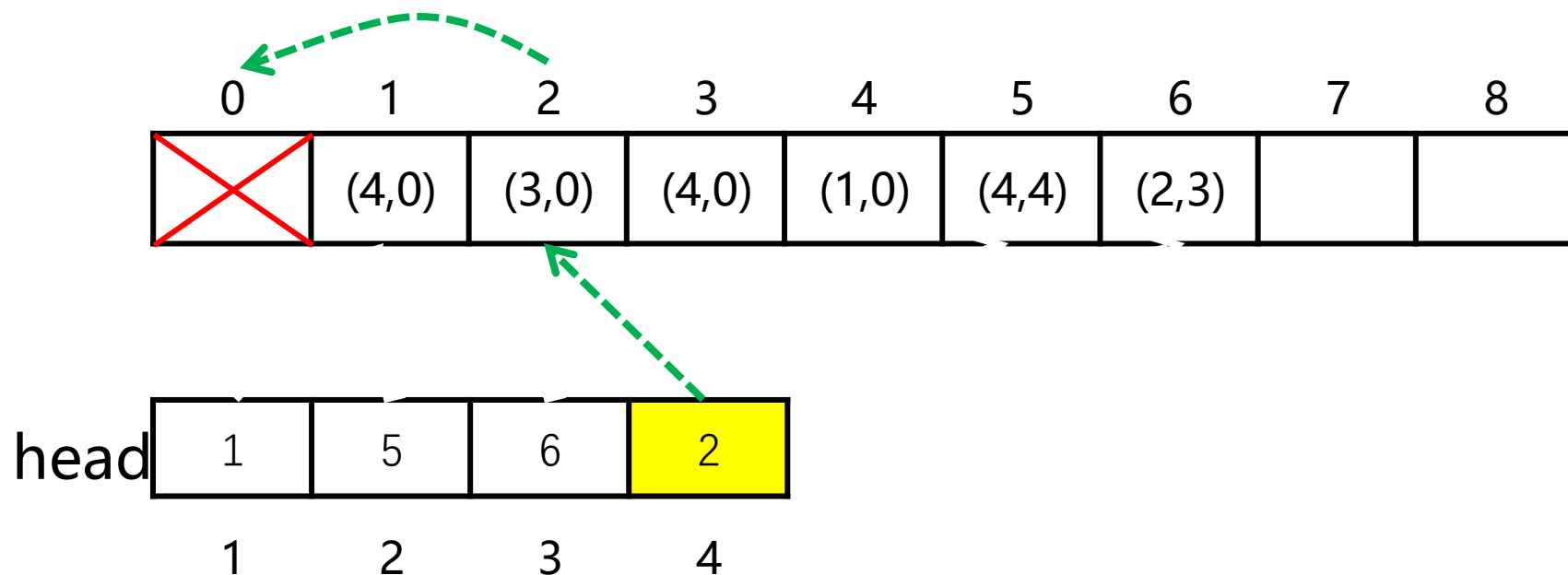
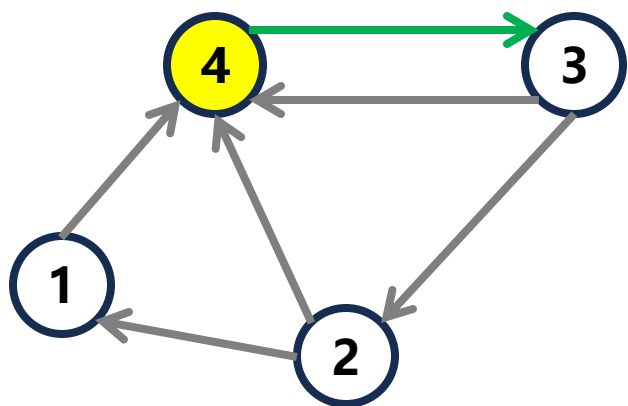
图结构存储：链式前向星



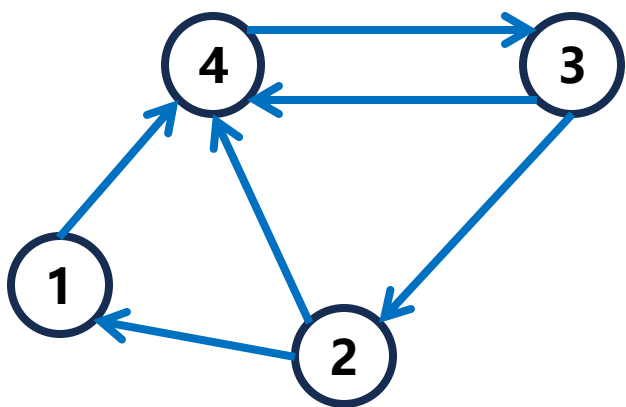
图结构存储：链式前向星



图结构存储：链式前向星



图结构存储：链式前向星

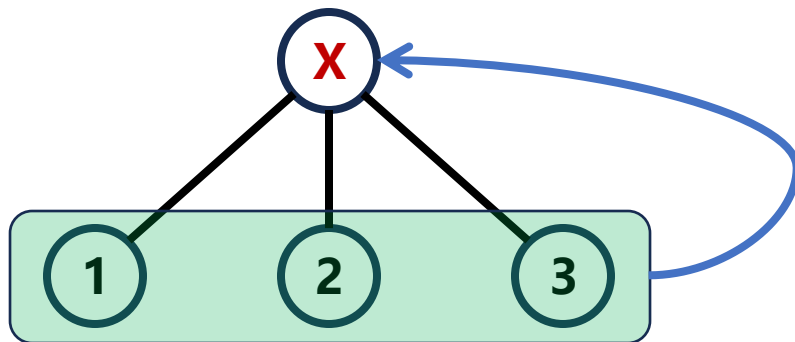


0	1	2	3	4	5	6	7	8
	(4,0)	(3,0)	(4,0)	(1,0)	(4,4)	(2,3)		

head	1	5	6	2
	1	2	3	4

树形DP：单纯型

只需要考虑：子节点到父节点的转移关系



二、树形DP-课后实战题

1. HZOJ-361：没有上司的舞会

2. P1131：[ZJOI2007] 时态同步

3. P2018：消息传递

4. B4016：树的直径

5. P3174：[HAOI2009] 毛毛虫

6. P1757：通天之分组背包

7. HZOJ-362：选课

8. P2015：二叉苹果树

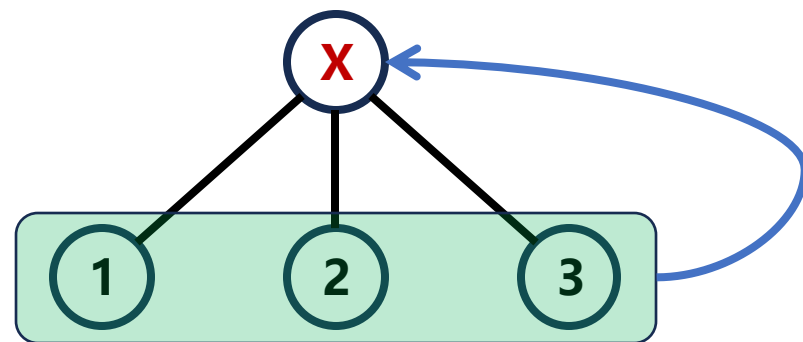
9. HZOJ-363：Strategic_game

10. P2279：[HNOI2003] 消防局的设立

单纯型: HZ0J-361-没有上司的舞会

1、确定动归状态

2、确定状态转移方程



子节点到父节点的转移关系

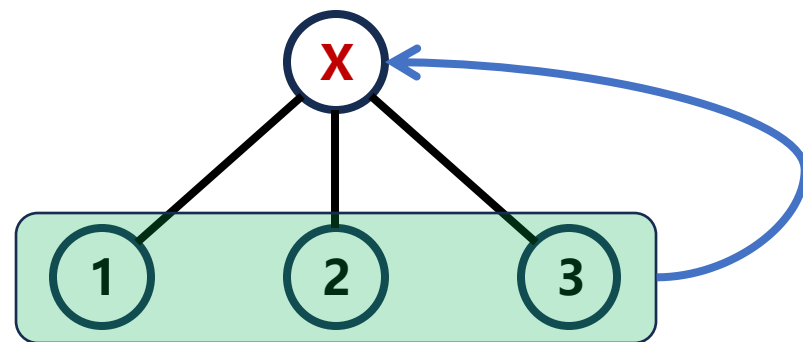
单纯型: HZ0J-361-没有上司的舞会

1、确定动归状态

$dp[x][0]$: 代表 x 不参加舞会的子树最大值

$dp[x][1]$: 代表 x 参加舞会的子树最大值

2、确定状态转移方程



子节点到父节点的转移关系

单纯型: HZ0J-361-没有上司的舞会

1、确定动归状态

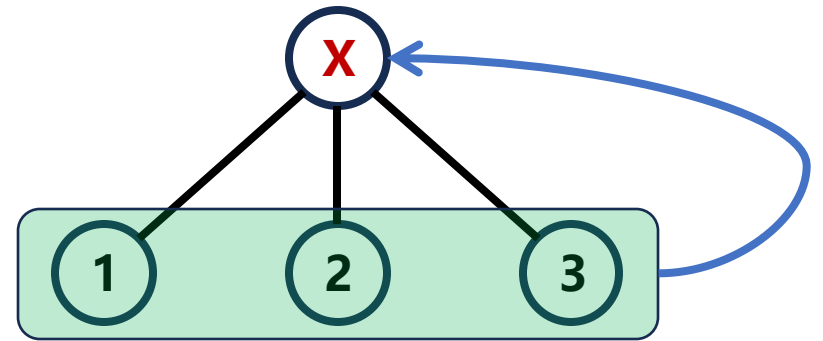
$dp[x][0]$: 代表 x 不参加舞会的子树最大值

$dp[x][1]$: 代表 x 参加舞会的子树最大值

2、确定状态转移方程

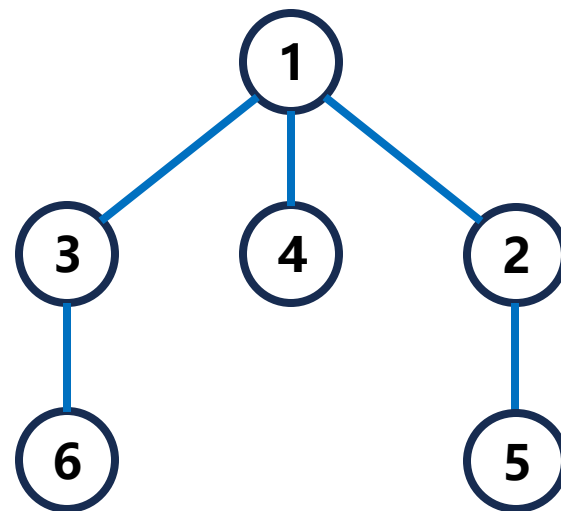
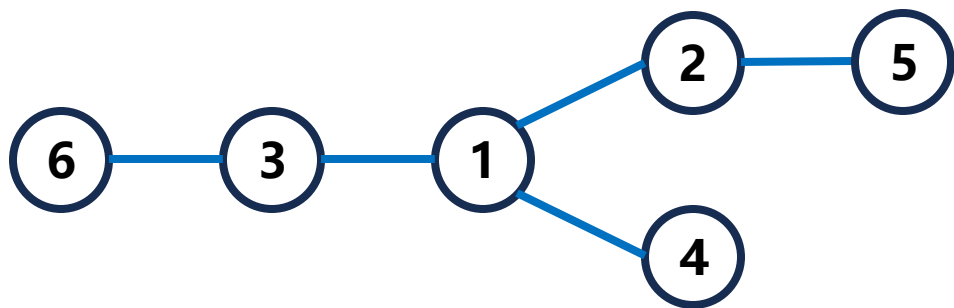
$dp[x][0] = \sum_{xson} \max(dp[xson][0], dp[xson][1])$

$dp[x][1] = \sum_{xson} dp[xson][0] + H_x$



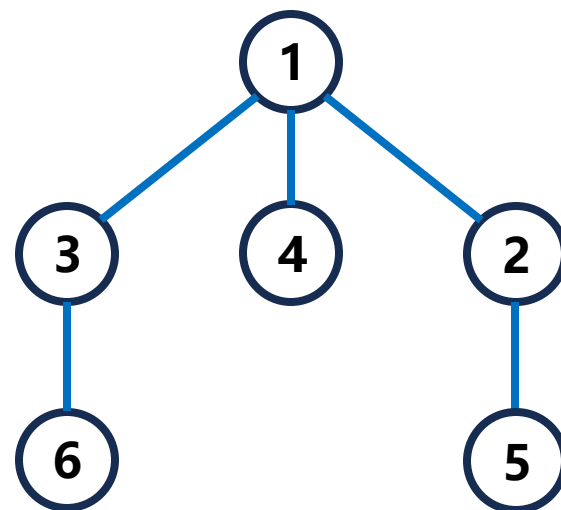
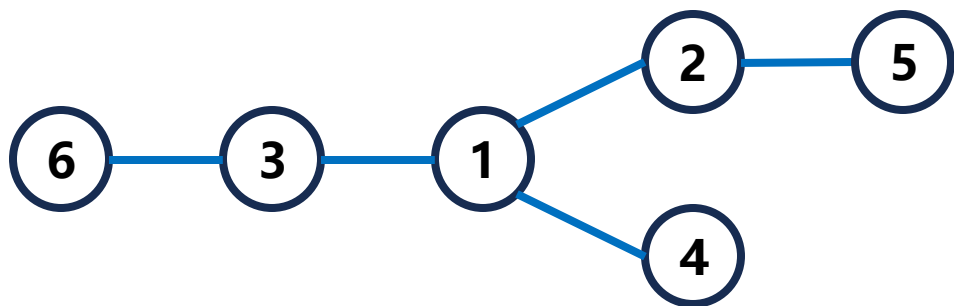
子节点到父节点的转移关系

【无根树】转【有根树】



【无根树】转【有根树】

P2052.[NOI2011]道路修建



二、树形DP-课后实战题

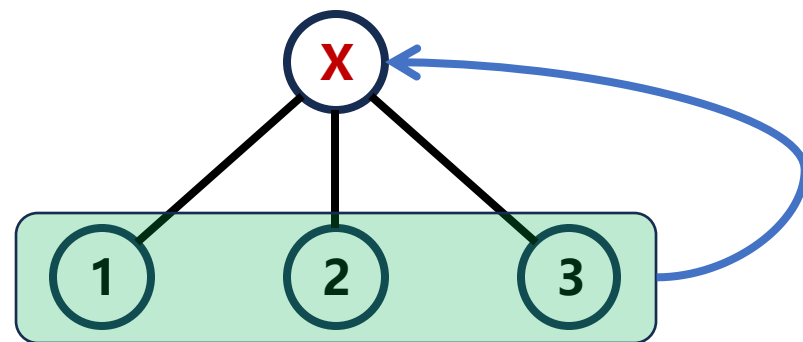
1. HZOJ-361：没有上司的舞会
- 2. P1131：[ZJOI2007] 时态同步**
3. P2018：消息传递
4. B4016：树的直径
5. P3174：[HAOI2009] 毛毛虫

6. P1757：通天之分组背包
7. HZOJ-362：选课
8. P2015：二叉苹果树
9. HZOJ-363：Strategic_game
10. P2279：[HNOI2003] 消防局的设立

单纯型：P1131-[ZJOI2007] 时态同步

1、确定动归状态

2、确定状态转移方程



子节点到父节点的转移关系

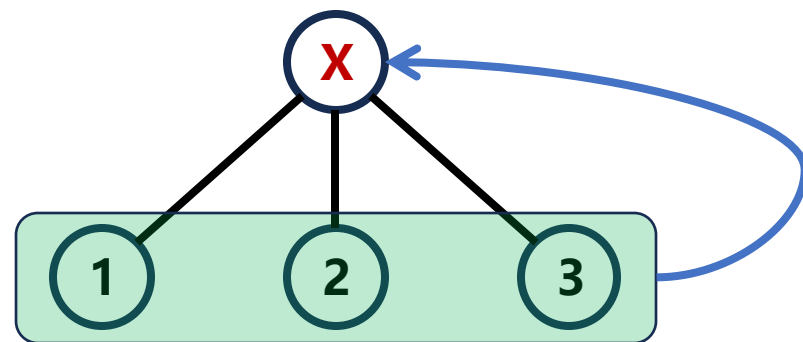
单纯型：P1131-[ZJOI2007] 时态同步

1、确定动归状态

$t[x]$: 时态同步下，从 x 到所有终止节点的最短时间

$dp[x]$: 将 x 子树调整成为时态同步的最小代价

2、确定状态转移方程



子节点到父节点的转移关系

单纯型:P1131-[ZJOI2007] 时态同步

1、确定动归状态

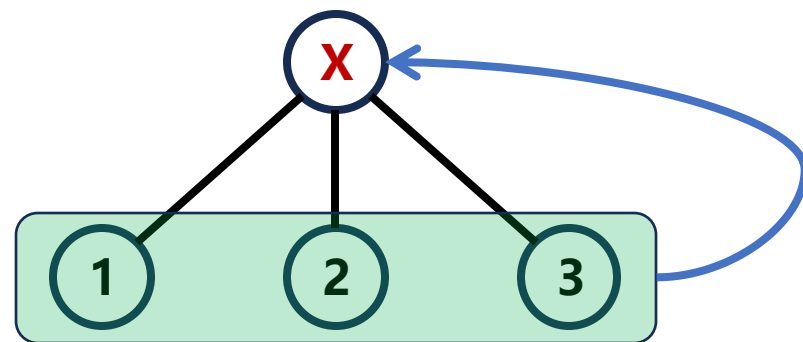
$t[x]$: 时态同步下, 从 x 到所有终止节点的最短时间

$dp[x]$: 将 x 子树调整成为时态同步的最小代价

2、确定状态转移方程

$$t[x] = \max(t[xson] + t_{x \rightarrow xson})$$

$$dp[x] = \sum_{xson} (t[x] - t[xson] - t_{x \rightarrow xson} + dp[xson])$$



子节点到父节点的转移关系

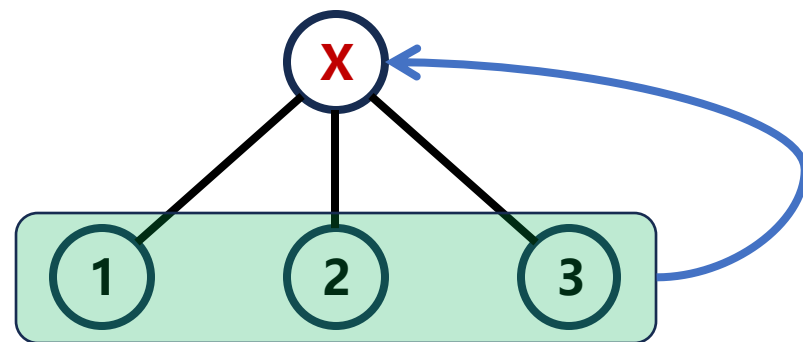
二、树形DP-课后实战题

1. HZOJ-361：没有上司的舞会
2. P1131：[ZJOI2007] 时态同步
- 3. P2018：消息传递**
4. B4016：树的直径
5. P3174：[HAOI2009] 毛毛虫
6. P1757：通天之分组背包
7. HZOJ-362：选课
8. P2015：二叉苹果树
9. HZOJ-363：Strategic_game
10. P2279：[HNOI2003] 消防局的设立

单纯型：P2018-消息传递

1、确定动归状态

2、确定状态转移方程



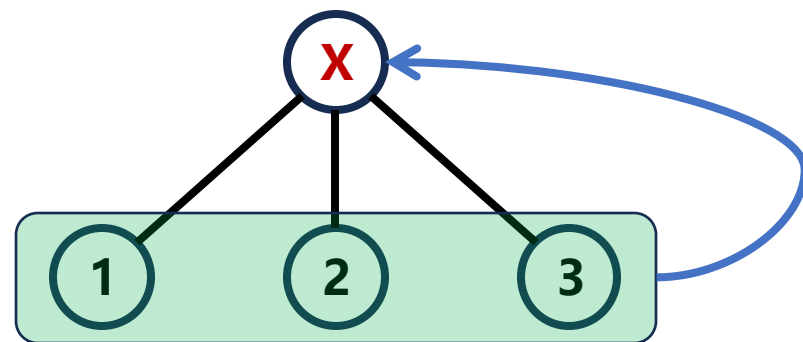
子节点到父节点的转移关系

单纯型：P2018-消息传递

1、确定动归状态

$dp[x]$: 代表 x 子树同步消息的最短时间

2、确定状态转移方程



子节点到父节点的转移关系

单纯型：P2018-消息传递

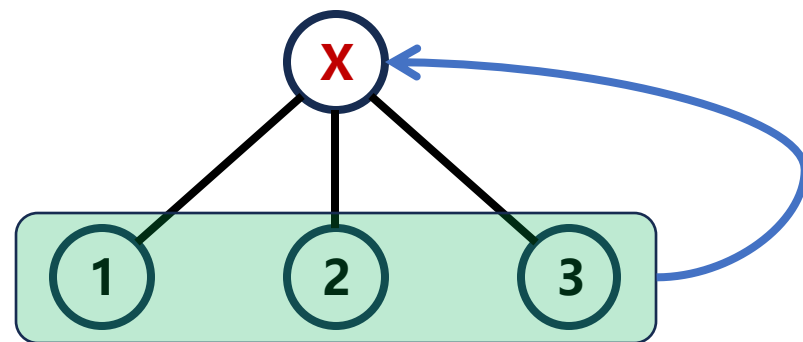
1、确定动归状态

$dp[x]$: 代表 x 子树同步消息的最短时间

2、确定状态转移方程

特殊处理：对于所有 $dp[xson]$ 从大到小排序

$dp[x] = \max(dp[xson] + ind)$



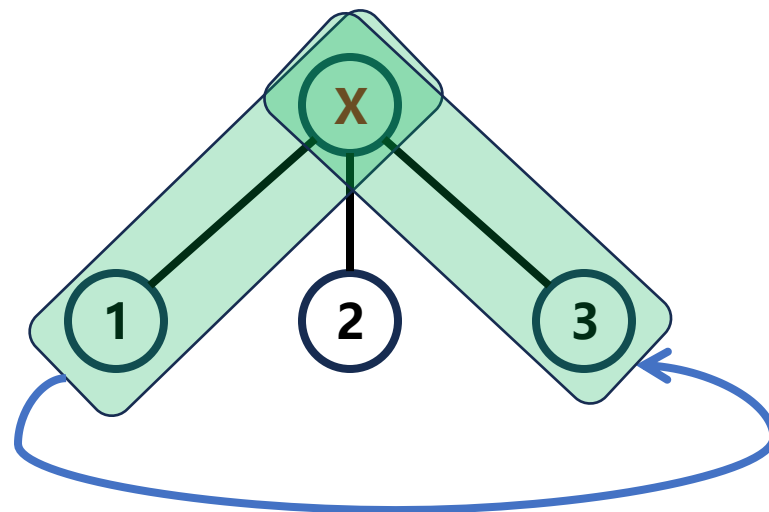
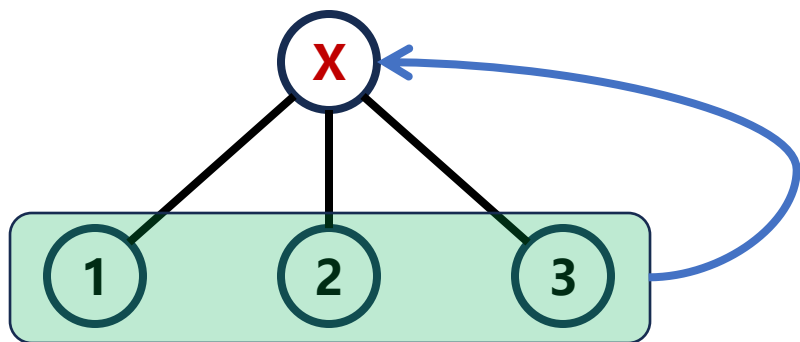
子节点到父节点的转移关系

一、树形DP分类

- 1. 单纯型：3道题目
- 2. 跨越型：2道题目**
- 3. 背包型：3道题目
- 4. 覆盖型：2道题目

树形DP：跨越型

在单纯型的基础上，考虑子节点跨越父节点到其他子树中的情况



二、树形DP-课后实战题

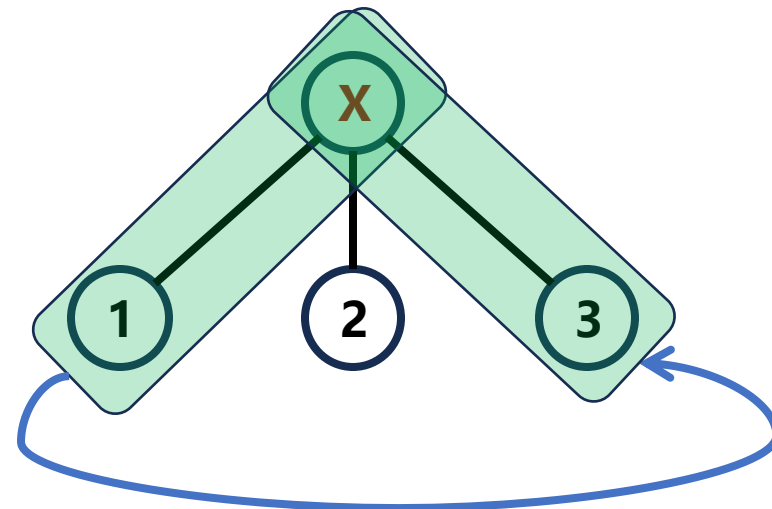
1. HZOJ-361：没有上司的舞会
2. P1131：[ZJOI2007] 时态同步
3. P2018：消息传递
- 4. B4016：树的直径**
5. P3174：[HAOI2009] 毛毛虫
6. P1757：通天之分组背包
7. HZOJ-362：选课
8. P2015：二叉苹果树
9. HZOJ-363：Strategic_game
10. P2279：[HNOI2003] 消防局的设立

跨越型：B4016-树的直径

1、确定动归状态

$dp[x]$: 代表 x 为端点, 向下的最长路径长度

2、确定状态转移方程



子节点跨越父节点

跨越型：B4016-树的直径

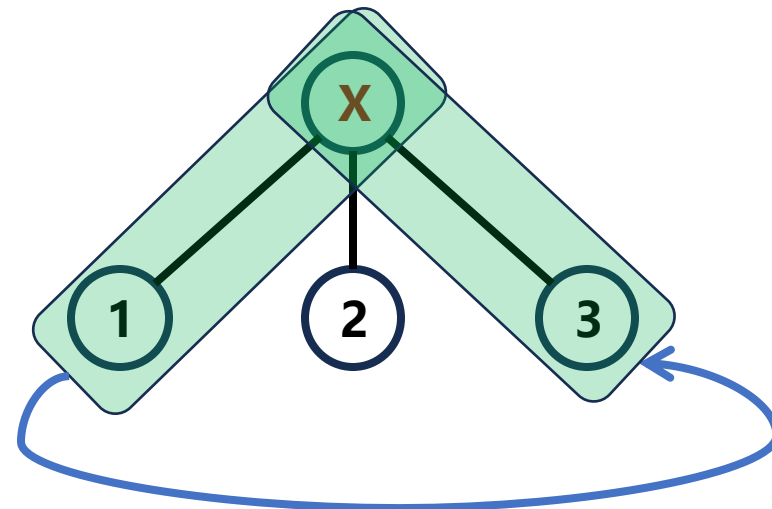
1、确定动归状态

$dp[x]$: 代表 x 为端点，向下的最长路径长度

2、确定状态转移方程

非跨越: $dp[x] = \max(dp[xson] + 1)$

跨越: $ans = \max(ans, dp[x1] + dp[x2] + 2)$



子节点跨越父节点

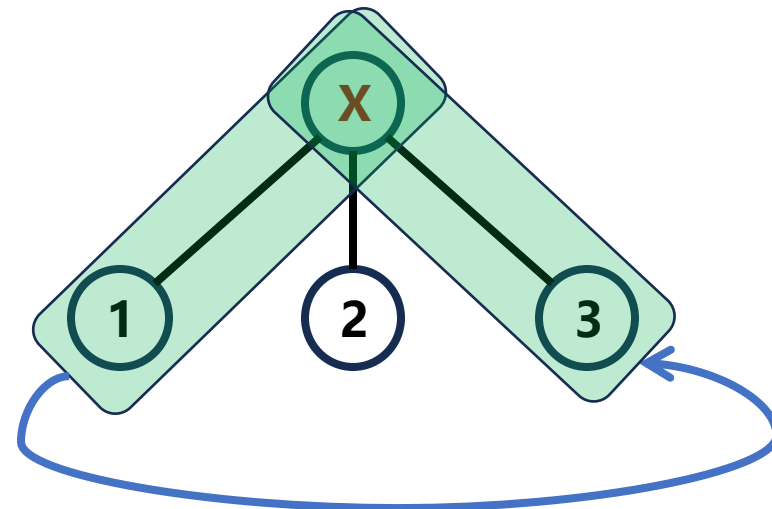
二、树形DP-课后实战题

1. HZOJ-361：没有上司的舞会
2. P1131：[ZJOI2007] 时态同步
3. P2018：消息传递
4. B4016：树的直径
- 5. P3174：[HAOI2009] 毛毛虫**
6. P1757：通天之分组背包
7. HZOJ-362：选课
8. P2015：二叉苹果树
9. HZOJ-363：Strategic_game
10. P2279：[HNOI2003] 消防局的设立

跨越型：P3174-[HAOI2009]毛毛虫

1、确定动归状态

2、确定状态转移方程



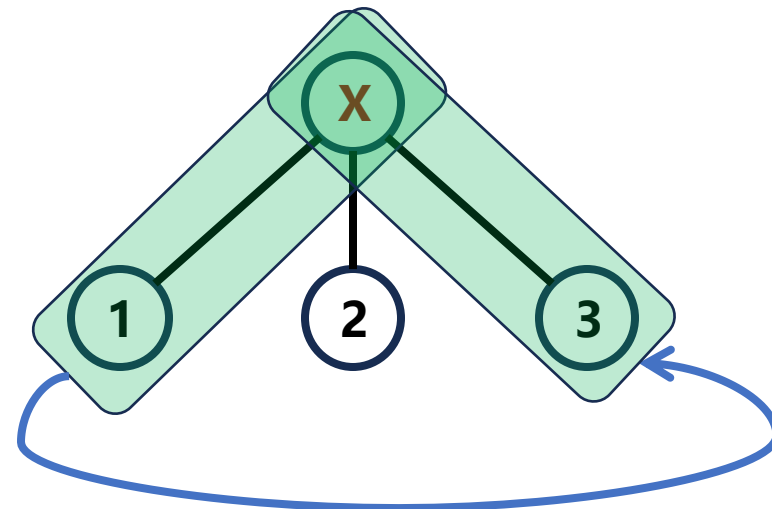
子节点跨越父节点

跨越型：P3174-[HAOI2009]毛毛虫

1、确定动归状态

$dp[x]$: 代表 x 为端点, 最大毛毛虫的大小

2、确定状态转移方程



子节点跨越父节点

跨越型：P3174-[HAOI2009]毛毛虫

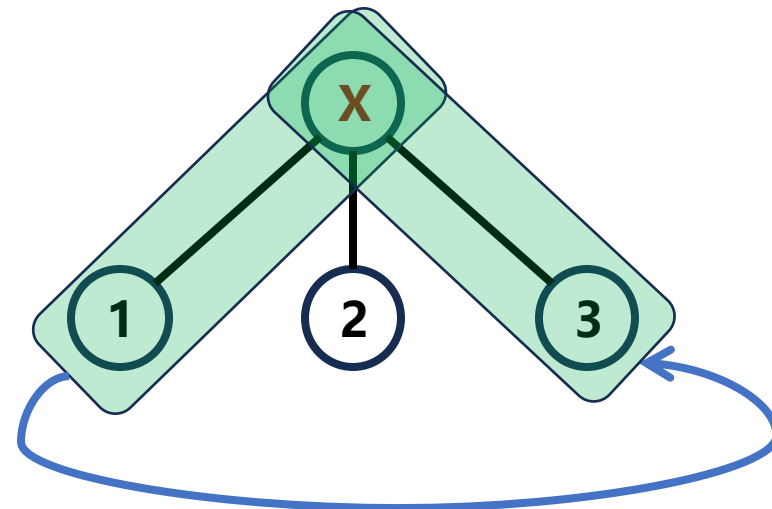
1、确定动归状态

$dp[x]$: 代表 x 为端点, 最大毛毛虫的大小

2、确定状态转移方程

非跨越: $dp[x] = \max(dp[xson] + cnt_son)$

跨越: $ans = \max(ans, dp[x] + dp[x2] + cnt_son - 2 +$
1?)



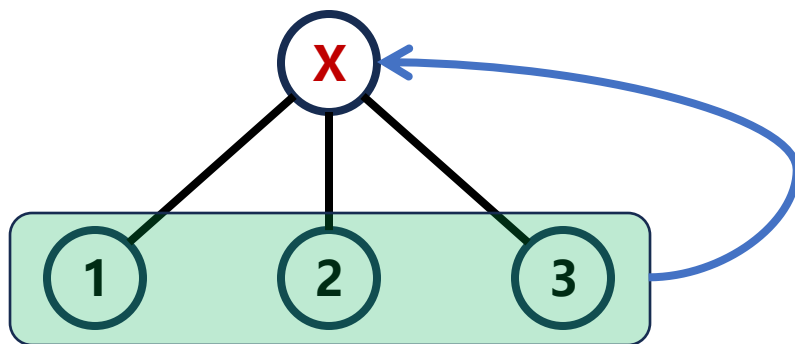
子节点跨越父节点

一、树形DP分类

- 1. 单纯型：3道题目
- 2. 跨越型：2道题目
- 3. 背包型：3道题目**
- 4. 覆盖型：2道题目

树形DP：背包型

子节点到父节点的转移关系类似『背包问题』



二、树形DP-课后实战题

1. HZOJ-361：没有上司的舞会
2. P1131：[ZJOI2007] 时态同步
3. P2018：消息传递
4. B4016：树的直径
5. P3174：[HAOI2009] 毛毛虫

6. P1757：通天之分组背包

7. HZOJ-362：选课
8. P2015：二叉苹果树
9. HZOJ-363：Strategic_game
10. P2279：[HNOI2003] 消防局的设立

P1757：通天之分组背包

1、确定动归状态

$dp[i][j]$ ：代表前 i 组，背包重量上限为 j 的情况下，能得到的最大价值。

2、确定状态转移方程

$$dp[i][j] = \max(dp[i-1][j], dp[i-1][j - v_{i,k}] + w_{i,k})$$

$v_{i,k}$ 第 i 组第 k 个物品的重量

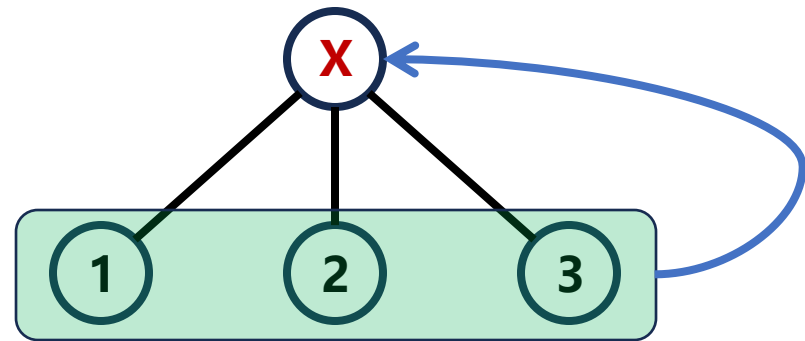
$w_{i,k}$ 第 i 组第 k 个物品的价值

二、树形DP-课后实战题

1. HZOJ-361：没有上司的舞会
2. P1131：[ZJOI2007] 时态同步
3. P2018：消息传递
4. B4016：树的直径
5. P3174：[HAOI2009] 毛毛虫
6. P1757：通天之分组背包
- 7. HZOJ-362：选课**
8. P2015：二叉苹果树
9. HZOJ-363：Strategic_game
10. P2279：[HNOI2003] 消防局的设立

背包型：HZ0J-362-选课

1、确定动归状态



2、确定状态转移方程

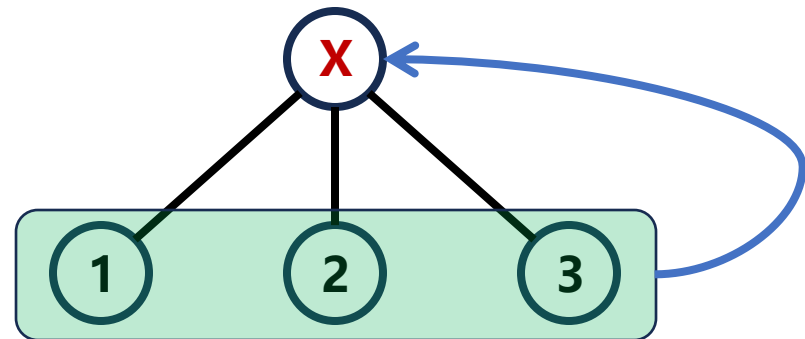
背包型：HZ0J-362-选课

1、确定动归状态

$dp1[x][i][y]$: 以 x 作为根节点的树形结构中，在其前 i 个子树中，一共选择 y 门课程能获得的最大学分。

$dp2[x][y]$: 以 x 作为根节点的树形结构中，一共选择 y 门课程能获得的最大学分。

2、确定状态转移方程



背包型：HZ0J-362-选课

1、确定动归状态

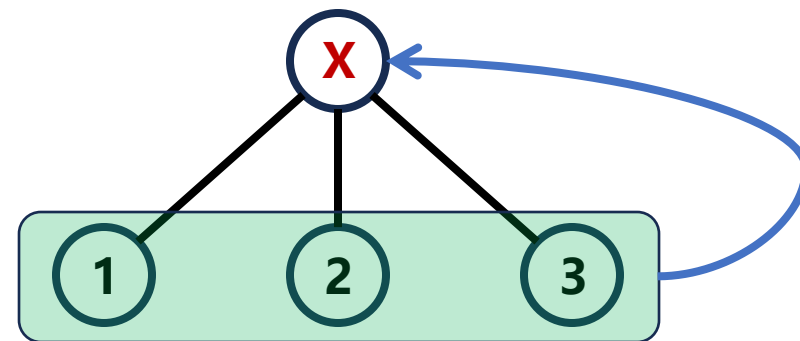
$dp1[x][i][y]$: 以 x 作为根节点的树形结构中, 在其前 i 个子树中, 一共选择 y 门课程能获得的最大学分。

$dp2[x][y]$: 以 x 作为根节点的树形结构中, 一共选择 y 门课程能获得的最大学分。

2、确定状态转移方程

$$dp1[x][i][y] = \max(dp1[x][i-1][y-k] + dp2[xson_i][k])$$

$$dp2[x][y] = dp1[x][cnt_son][y]$$

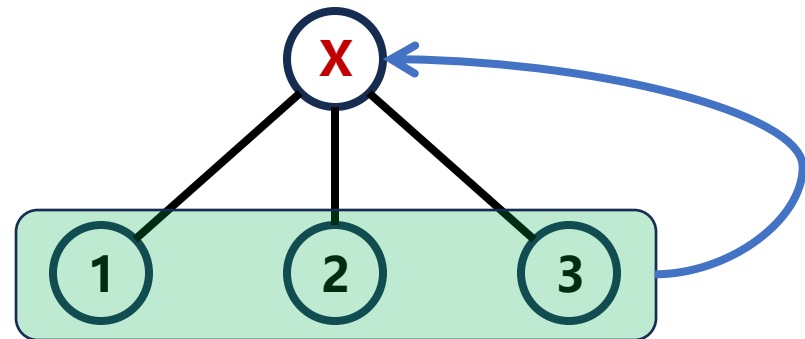


二、树形DP-课后实战题

1. HZOJ-361：没有上司的舞会
2. P1131：[ZJOI2007] 时态同步
3. P2018：消息传递
4. B4016：树的直径
5. P3174：[HAOI2009] 毛毛虫
6. P1757：通天之分组背包
7. HZOJ-362：选课
- 8. P2015：二叉苹果树**
9. HZOJ-363：Strategic_game
10. P2279：[HNOI2003] 消防局的设立

背包型：P2015-二叉苹果树

1、确定动归状态



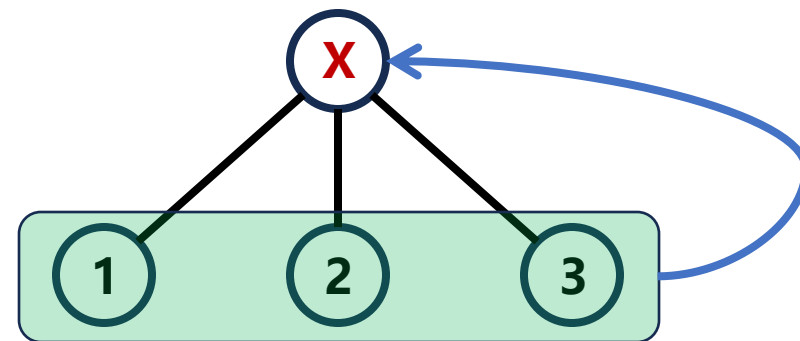
2、确定状态转移方程

背包型：P2015-二叉苹果树

1、确定动归状态

$dp1[x][i][y]$: 以 x 作为根节点，在前 i 个子树中，一共保留 y 个树枝，能留下的最多苹果数量。

$dp2[x][y]$: 以 x 作为根节点，一共保留 y 个树枝，能留下的最多苹果数量。



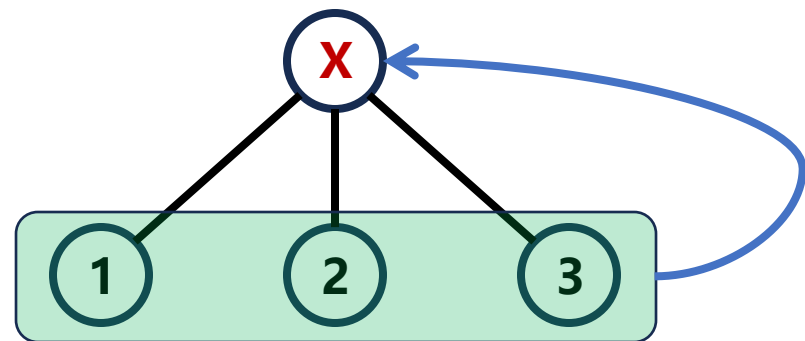
2、确定状态转移方程

背包型：P2015-二叉苹果树

1、确定动归状态

$dp1[x][i][y]$: 以 x 作为根节点，在前 i 个子树中，一共保留 y 个树枝，能留下的最多苹果数量。

$dp2[x][y]$: 以 x 作为根节点，一共保留 y 个树枝，能留下的最多苹果数量。



2、确定状态转移方程

选 i 子树: $dp1[x][i][y] = \max(dp1[x][i-1][y-k-1] + dp2[xson_i][k] + c)$

不选 i 子树: $dp1[x][i][y] = dp1[x][i-1][y]$

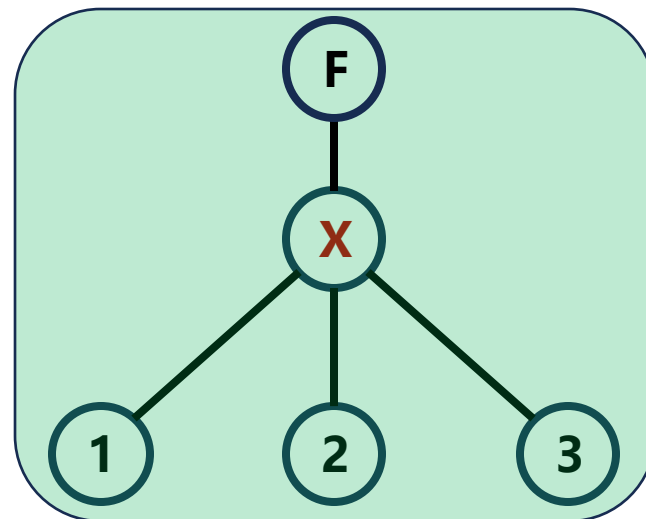
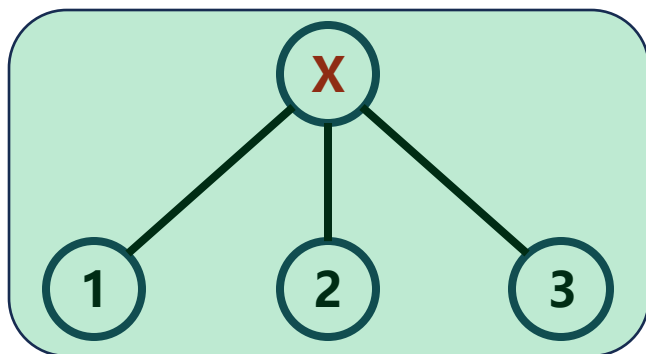
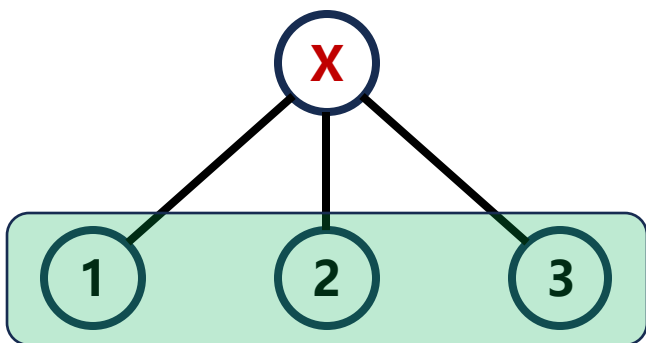
$dp2[x][y] = dp1[x][cnt_son][y]$

一、树形DP分类

- 1. 单纯型：3道题目
- 2. 跨越型：2道题目
- 3. 背包型：3道题目
- 4. 覆盖型：2道题目**

树形DP：覆盖型

重点考虑：以 x 为参考点的『覆盖范围』



二、树形DP-课后实战题

1. HZOJ-361：没有上司的舞会
2. P1131：[ZJOI2007] 时态同步
3. P2018：消息传递
4. B4016：树的直径
5. P3174：[HAOI2009] 毛毛虫

6. P1757：通天之分组背包
7. HZOJ-362：选课
8. P2015：二叉苹果树

9. HZOJ-363：Strategic_game

10. P2279：[HNOI2003] 消防局的设立

覆盖型:HZ0J-363-Strategic_game

1、确定动归状态

覆盖型: HZ0J-363-Strategic_game

1、确定动归状态

dp[x][0]: 以 x 为参考, 覆盖到 x 向上数 1 层

dp[x][1]: 以 x 为参考, 覆盖到 x 节点

dp[x][2]: 以 x 为参考, 覆盖到 x 向下数 1 层

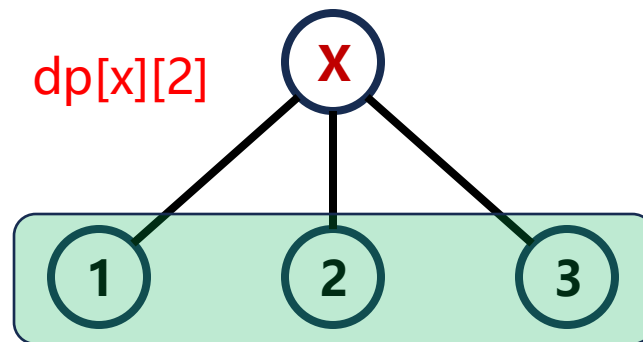
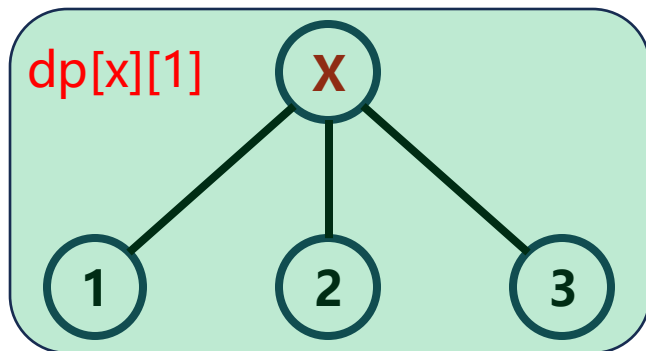
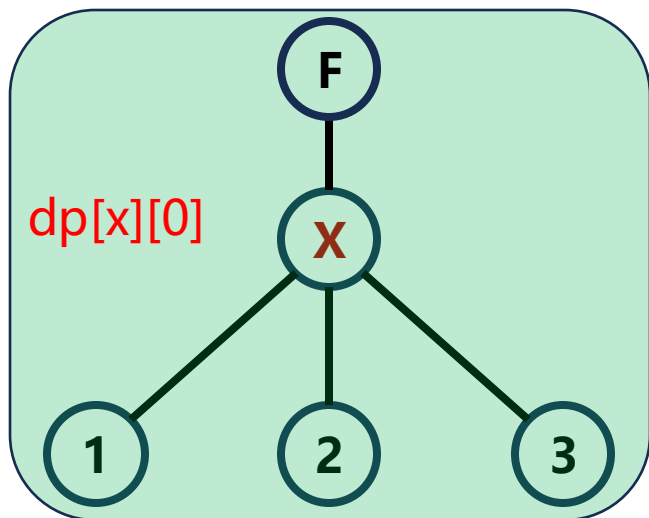
覆盖型: HZ0J-363-Strategic_game

1、确定动归状态

$dp[x][0]$: 以 x 为参考, 覆盖到 x 向上数 1 层

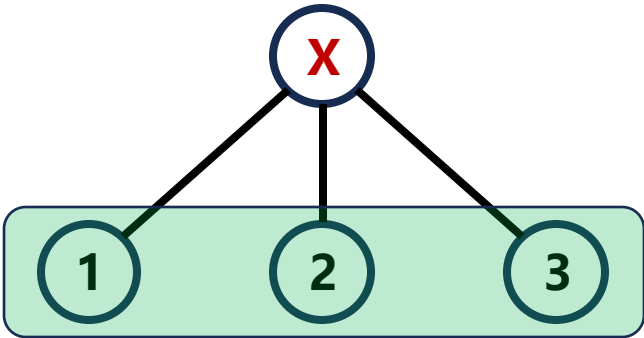
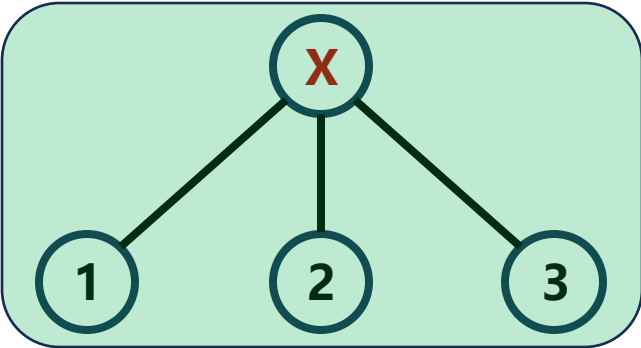
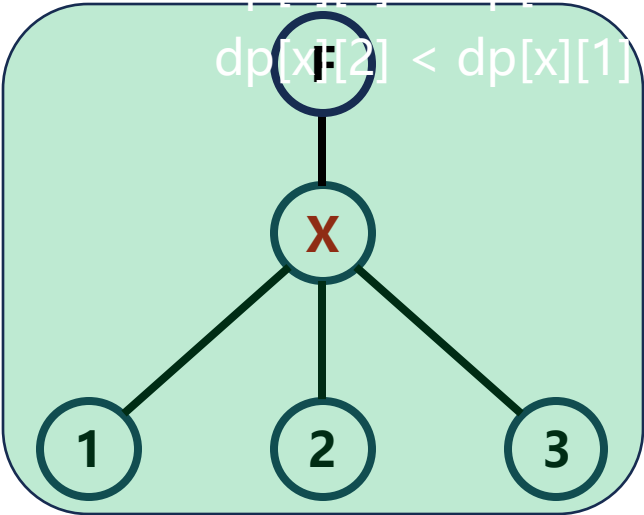
$dp[x][1]$: 以 x 为参考, 覆盖到 x 节点

$dp[x][2]$: 以 x 为参考, 覆盖到 x 向下数 1 层



覆盖型: HZ0J-363-Strategic_game

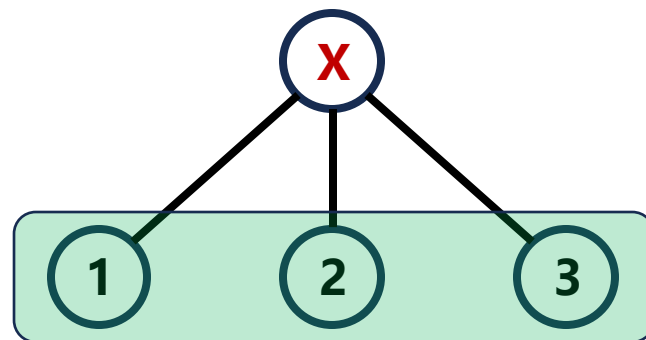
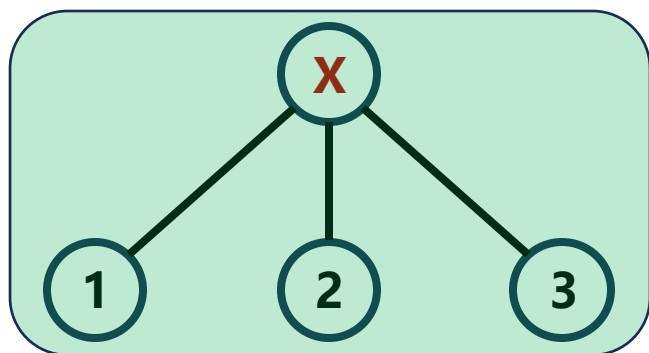
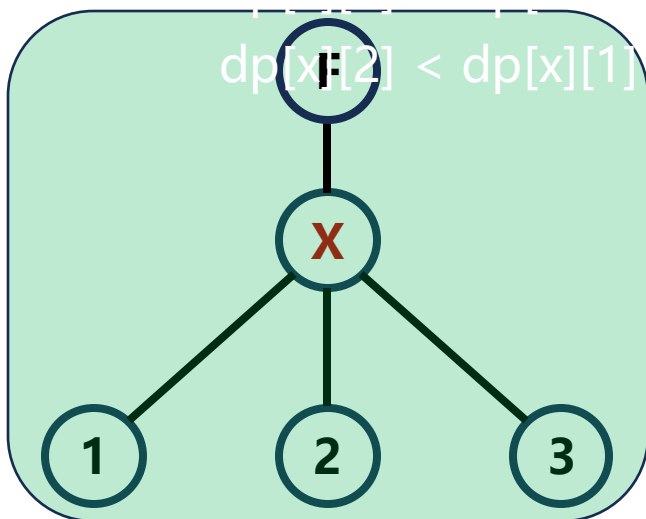
2、确定状态转移方程



覆盖型: HZ0J-363-Strategic_game

2、确定状态转移方程

$$\text{dp}[x][0] = \mathbf{1} + \text{dp}[\text{son}_1][2] + \text{dp}[\text{son}_2][2] + \dots + \text{dp}[\text{son}_k][2]$$

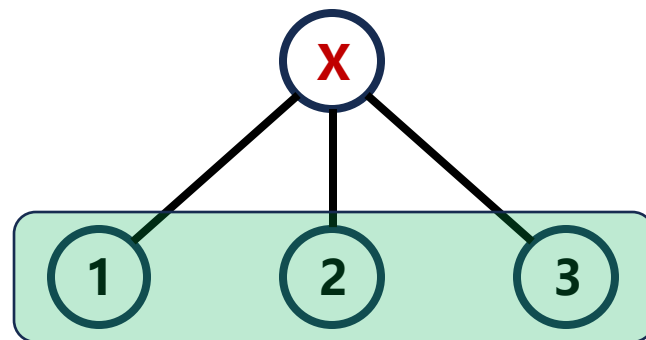
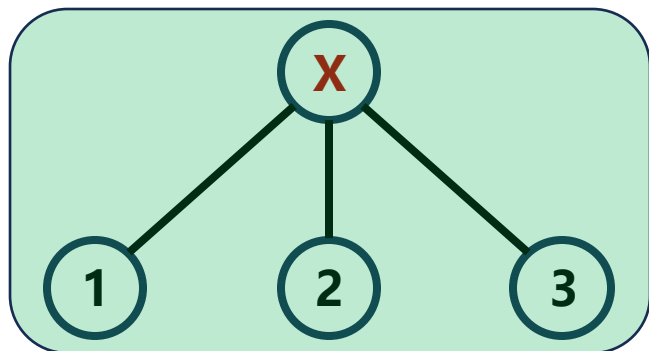
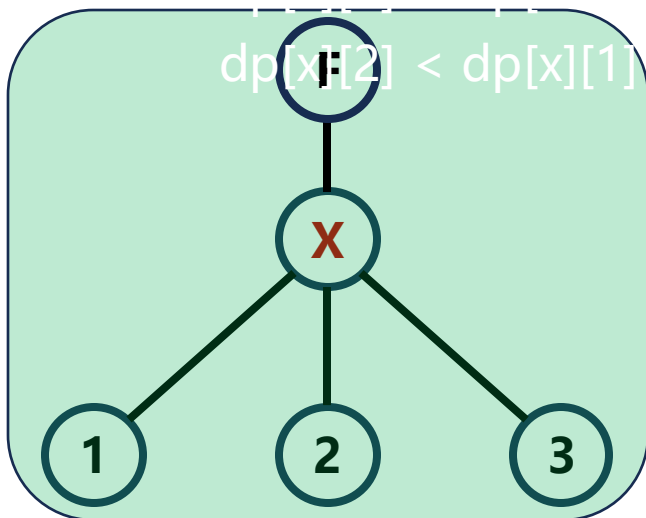


覆盖型: HZ0J-363-Strategic_game

2、确定状态转移方程

$$dp[x][0] = \textcolor{red}{1} + dp[son_1][2] + dp[son_2][2] + \dots + dp[son_k][2]$$

$$dp[x][1] = dp[son_1][1] + dp[son_2][1] + \dots + dp[son_k][1] + \textcolor{red}{1}?$$



覆盖型: HZ0J-363-Strategic_game

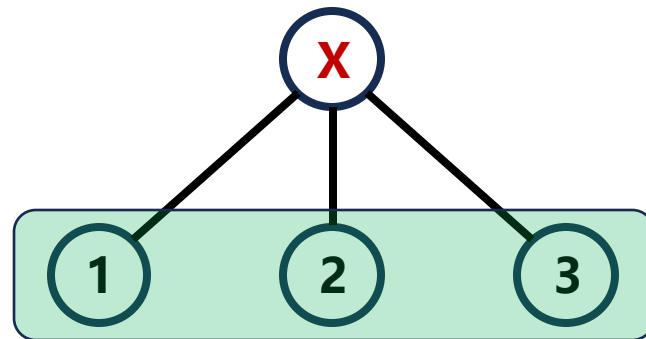
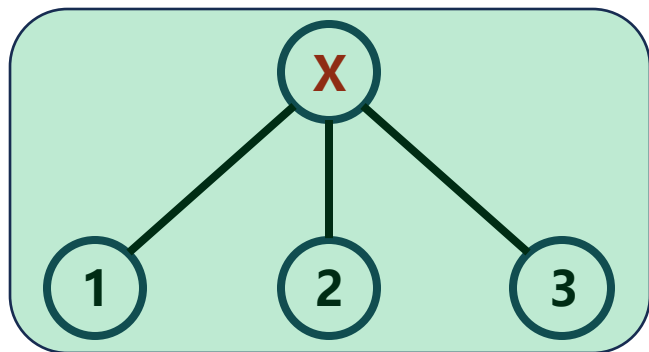
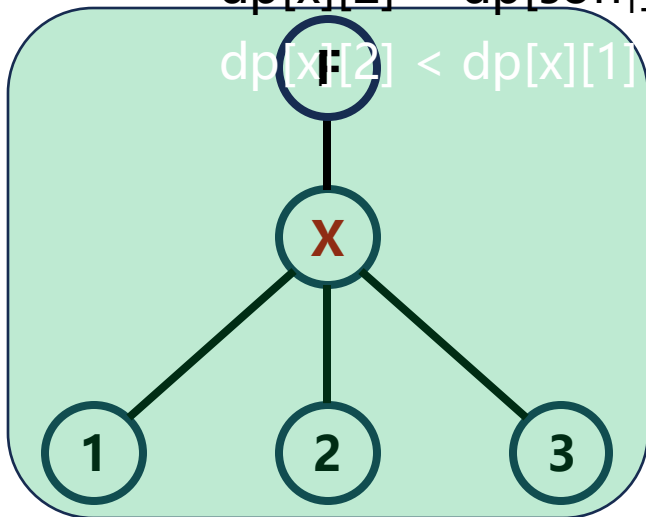
2、确定状态转移方程

$$dp[x][0] = 1 + dp[son_1][2] + dp[son_2][2] + \dots + dp[son_k][2]$$

$$dp[x][1] = dp[son_1][1] + dp[son_2][1] + \dots + dp[son_k][1] + 1?$$

$$dp[x][2] = dp[son_1][1] + dp[son_2][1] + \dots + dp[son_k][1]$$

$$if\ dp[x][2] < dp[x][1]$$



覆盖型: HZ0J-363-Strategic_game

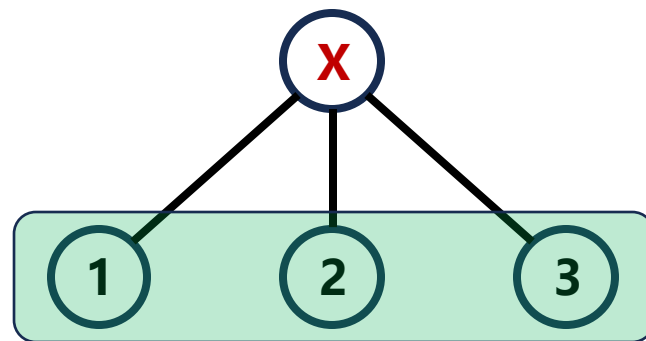
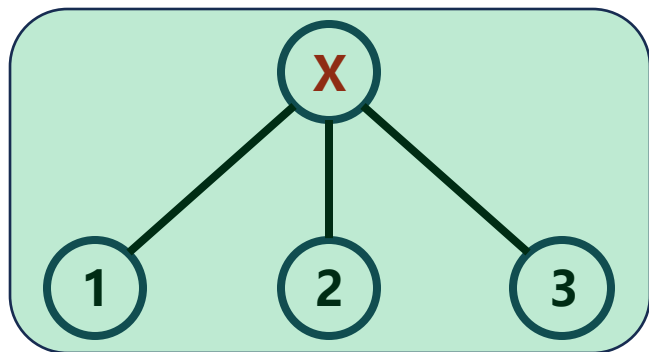
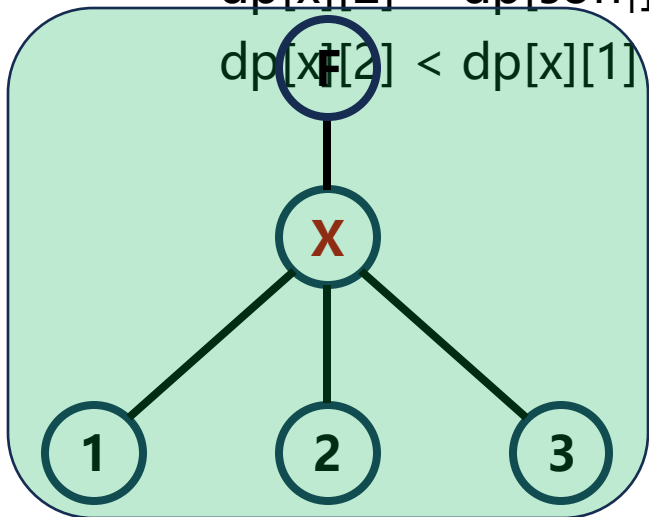
2、确定状态转移方程

$$dp[x][0] = \mathbf{1} + dp[son_1][2] + dp[son_2][2] + \dots + dp[son_k][2]$$

$$dp[x][1] = dp[son_1][1] + dp[son_2][1] + \dots + dp[son_k][1] + \mathbf{1?}$$

$$dp[x][2] = dp[son_1][1] + dp[son_2][1] + \dots + dp[son_k][1]$$

$$dp[x][2] < dp[x][1] < dp[x][0]$$



二、树形DP-课后实战题

1. HZOJ-361：没有上司的舞会
2. P1131：[ZJOI2007] 时态同步
3. P2018：消息传递
4. B4016：树的直径
5. P3174：[HAOI2009] 毛毛虫
6. P1757：通天之分组背包
7. HZOJ-362：选课
8. P2015：二叉苹果树
9. HZOJ-363：Strategic_game
- 10. P2279：消防局的设立**

覆盖型：P2279-消防局的设立

1、确定动归状态

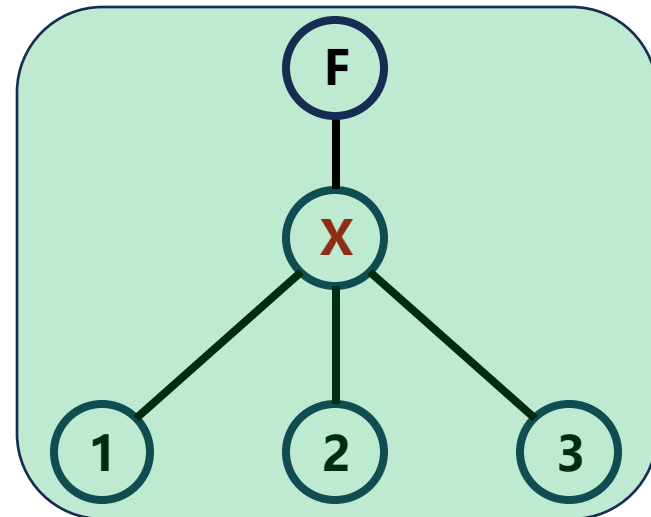
$dp[x][0]$: 以 x 为参考, 覆盖到 x 向上数 2 层

$dp[x][1]$: 以 x 为参考, 覆盖到 x 向上数 1 层

$dp[x][2]$: 以 x 为参考, 覆盖到 x 节点

$dp[x][3]$: 以 x 为参考, 覆盖到 x 向下数 1 层

$dp[x][4]$: 以 x 为参考, 覆盖到 x 向下数 2 层



覆盖型：P2279-消防局的设立

2、确定状态转移方程

$$dp[x][0] = \mathbf{1} + dp[son_1][4] + dp[son_2][4] + \dots + dp[son_k][4]$$

$$dp[x][1] = dp[son_1][3] + dp[son_2][3] + \dots + dp[son_k][3] +$$

1?

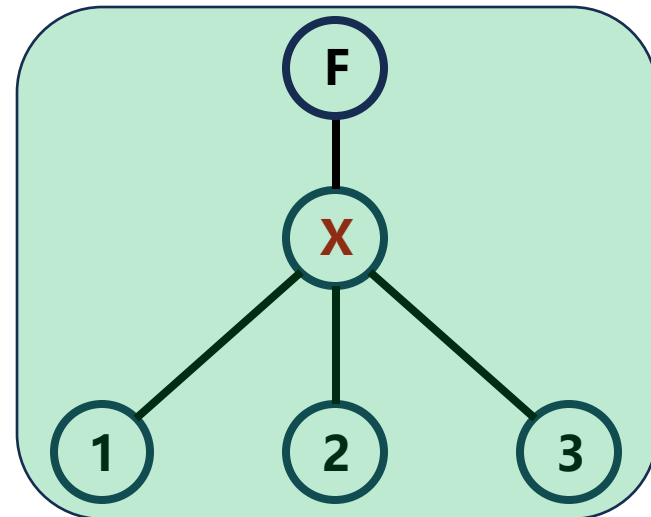
$$dp[x][2] = dp[son_1][2] + dp[son_2][2] + \dots + dp[son_k][2] +$$

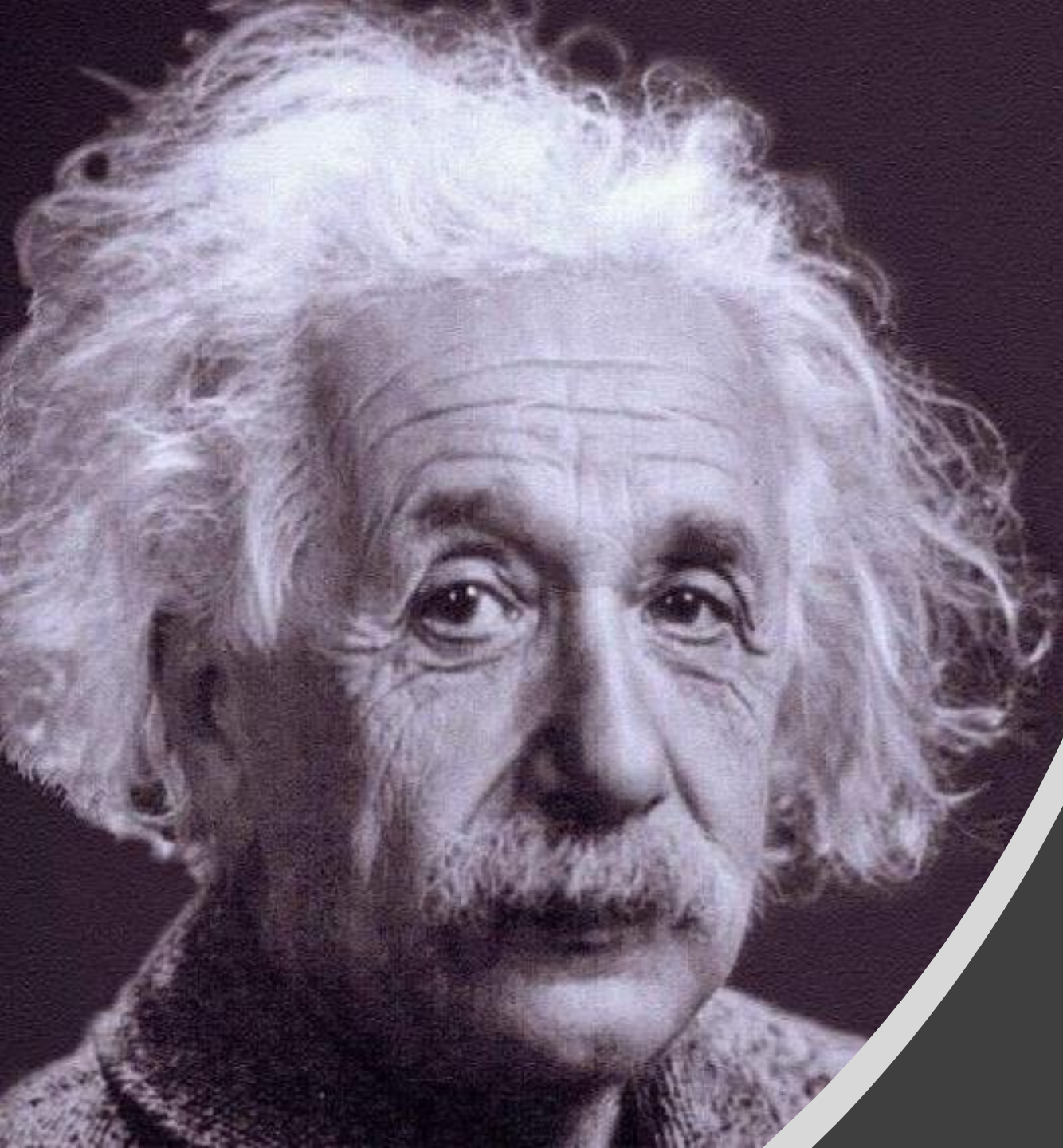
1?

$$dp[x][3] = dp[son_1][2] + dp[son_2][2] + \dots + dp[son_k][2]$$

$$dp[x][4] = dp[son_1][3] + dp[son_2][3] + \dots + dp[son_k][3]$$

$$dp[x][4] \leq dp[x][3] \leq dp[x][2] \leq dp[x][1] \leq dp[x][0]$$





为什么
会出一样的题目？