CENTER FOR
VISUAL COMPUTING
CentraleSupélec / INRIA

Morphologie Mathématique
Ouvertures, fermetures, Niveaux de Gris

Hugues Talbot (CVN, CentraleSupelec)

Mars 2019

Plan de la séance

Filtre

Définition

- *Un* filtre (sur E) *est un opérateur* ψ *croissant et idempotent*
  - $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E),\ X \subseteq Y \implies \psi(X) \subseteq \psi(Y)$
  - $\forall X \in \mathcal{P}(E),\ \psi(\psi(X)) = \psi(X)$

Fermeture et ouverture

Définition

- *Une* fermeture (sur E) *est un filtre* ψ *extensif*
  - $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E), X \subseteq Y \implies \psi(X) \subseteq \psi(Y)$
  - $\forall X \in \mathcal{P}(E), \psi(\psi(X)) = \psi(X)$
  - $\forall X \in \mathcal{P}(E), X \subseteq \psi(X)$

Fermeture et ouverture

Définition

- *Une* fermeture (sur E) *est un filtre* ψ *extensif*
  - $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E),\ X \subseteq Y \implies \psi(X) \subseteq \psi(Y)$
  - $\forall X \in \mathcal{P}(E),\ \psi(\psi(X)) = \psi(X)$
  - $\forall X \in \mathcal{P}(E),\ X \subseteq \psi(X)$
- *Une* fermeture (sur E) *est un filtre* ψ *anti-extensif*
  - $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E),\ X \subseteq Y \implies \psi(X) \subseteq \psi(Y)$
  - $\forall X \in \mathcal{P}(E),\ \psi(\psi(X)) = \psi(X)$
  - $\forall X \in \mathcal{P}(E),\ \psi(X) \subseteq X$

Fermeture et ouverture

Définition

- *Une* fermeture (sur E) *est un filtre* ψ *extensif*
  - $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E), X \subseteq Y \implies \psi(X) \subseteq \psi(Y)$
  - $\forall X \in \mathcal{P}(E), \psi(\psi(X)) = \psi(X)$
  - $\forall X \in \mathcal{P}(E), X \subseteq \psi(X)$
- *Une* fermeture (sur E) *est un filtre* ψ *anti-extensif*
  - $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E), X \subseteq Y \implies \psi(X) \subseteq \psi(Y)$
  - $\forall X \in \mathcal{P}(E), \psi(\psi(X)) = \psi(X)$
  - $\forall X \in \mathcal{P}(E), \psi(X) \subseteq X$

Propriété

- ψ *est une fermeture si et seulement* $\psi^\star$ *est une ouverture*

Exemple 1

Exemple 1

Propriété

- *L'opérateur ec d'enveloppe convexe sur* $\mathbb{R}^2$ *est une fermeture*

Exemple 1

Propriété

- *L'opérateur ec d'enveloppe convexe sur $\mathbb{R}^2$ est une fermeture*

Exercice.

- Pouvez cette propriété en démontrant les trois relations suivantes
  - $\forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\ X \subseteq Y \implies ec(X) \subseteq ec(Y)$ (croissance de *ec*)
  - $\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\ ec(X) = ec(ec(X))$ (idempotence de *ec*)
  - $\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\ X \subseteq ec(X)$ (extensivité de *ec*)

Exemple 1

Propriété

- *L'opérateur ec d'enveloppe convexe sur* $\mathbb{R}^2$ *est une fermeture*
- *L'opérateur* $ec^\star$ *est donc une ouverture*

Exercice.

- Pouvez cette propriété en démontrant les trois relations suivantes
  - $\forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\ X \subseteq Y \implies ec(X) \subseteq ec(Y)$ (croissance de *ec*)
  - $\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\ ec(X) = ec(ec(X))$ (idempotence de *ec*)
  - $\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\ X \subseteq ec(X)$ (extensivité de *ec*)

Problématique de l'adjonction

- La notion d'adjonction est centrale en morphologie
- Elle permet de bâtir une ouverture et une fermeture à partir de toute dilatation (*i.e.*, un opérateur qui commute avec l'union)

Problématique de l'adjonction

- La notion d'adjonction est centrale en morphologie
- Elle permet de bâtir une ouverture et une fermeture à partir de toute dilatation (*i.e.*, un opérateur qui commute avec l'union)

Question

- *Existe-t-il un opérateur inverse δ' pour toute dilatation δ ?*
- *En d'autres termes, peut-on trouver δ' tel que*
  - $\forall X \in \mathcal{P}(E), \delta'(\delta(X)) = X$?

Ensemble δ-inférieur

Définition

- *Soient* δ *une dilatation et* $X, X' \in \mathcal{P}(E)$
- X' *est* δ-inférieur à X *si*
    - $\delta(X') \subseteq X$

Ensemble δ-inférieur

Définition

- *Soient δ une dilatation et $X, X' \in \mathcal{P}(E)$*
- *X' est* δ-inférieur à X *si*
  - $\delta(X') \subseteq X$

Propriété

- *Soient δ une dilatation et $X \in \mathcal{P}(E)$*
- *Parmi les ensembles δ-inférieurs à X, il existe un plus grand élément $\dot{X}$*
  - $\dot{X} = \cup\{X' \in \mathcal{P}(E) \mid X' \text{ est } \delta\text{-inférieur à } X\}$

Preuve

Par définition de l'union, $\dot{X}$ est le plus petit ensemble qui contient tous les δ-inférieurs à X. Pour compléter la démonstration, il suffit donc de prouver que $\dot{X}$ est aussi δ-inférieur à X, c'est-à-dire que $\delta(\dot{X}) \subseteq X$.
D'après la définition d'un ensemble δ-inférieur, on peut écrire $\dot{X} = \cup\{X' \in \mathcal{P}(E) \mid \delta(X') \subseteq X\}$.
Donc, $\delta(\dot{X}) = \delta(\cup\{X' \in \mathcal{P}(E) \mid \delta(X') \subseteq X\})$. Comme l'opérateur de dilatation commute avec l'union, on peut également écrire $\delta(\dot{X}) = \cup\{\delta(X') \mid X' \in \mathcal{P}(E), \delta(X') \subseteq X\}$. Ainsi, par définition de l'union, on obtient la relation $\delta(\dot{X}) \subseteq X$, ce qui complète la preuve de la propriété. $\square$

Preuve

Par définition de l'union, $\dot{X}$ est le plus petit ensemble qui contient tous les δ-inférieurs à X. Pour compléter la démonstration, il suffit donc de prouver que $\dot{X}$ est aussi δ-inférieur à X, c'est-à-dire que $\delta(\dot{X}) \subseteq X$.
D'après la définition d'un ensemble δ-inférieur, on peut écrire $\dot{X} = \cup\{X' \in \mathcal{P}(E) \mid \delta(X') \subseteq X\}$.
Donc, $\delta(\dot{X}) = \delta(\cup\{X' \in \mathcal{P}(E) \mid \delta(X') \subseteq X\})$. Comme l'opérateur de dilatation commute avec l'union, on peut également écrire $\delta(\dot{X}) = \cup\{\delta(X') \mid X' \in \mathcal{P}(E), \delta(X') \subseteq X\}$. Ainsi, par définition de l'union, on obtient la relation $\delta(\dot{X}) \subseteq X$, ce qui complète la preuve de la propriété. $\square$

Exercice. Montrer qu'en général il n'existe pas de plus petit élément parmi les ensembles δ-supérieurs à X.

Erosion adjointe

Définition

- *Soit δ une dilatation*
- *L'*érosion adjointe de δ *est l'opérateur $\dot{\delta}$ qui à tout $X \in \mathcal{P}(E)$ associe le plus grand ensemble qui est δ-inférieur à X :*
  - $\dot{\delta}(X) = \cup\{X' \in \mathcal{P}(E) \mid \delta(X') \subseteq X\}$

Erosion adjointe

Définition

- *Soit δ une dilatation*
- *L'érosion adjointe de δ est l'opérateur $\dot{\delta}$ qui à tout $X \in \mathcal{P}(E)$ associe le plus grand ensemble qui est δ-inférieur à X :*
  - $\dot{\delta}(X) = \cup\{X' \in \mathcal{P}(E) \mid \delta(X') \subseteq X\}$

Théorème

- *Si δ est une dilatation, alors $\dot{\delta}$ est une érosion (i.e., $\dot{\delta}$ commute avec l'intersection)*

Preuve du théorème

Preuve. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

$\dot{\delta}(A \cap B) = \cup\{X' \in \mathcal{P}(E) \mid \delta(X') \subseteq [A \cap B]\}$

$= \cup\{X' \in \mathcal{P}(E) \mid \delta(X') \subseteq A \text{ et } \delta(X') \subseteq B\}$

$= [\cup\{X' \in \mathcal{P}(E) \mid \delta(X') \subseteq A\}] \cap [\cup\{X' \in \mathcal{P}(E) \mid \delta(X') \subseteq B\}]$

$= \dot{\delta}(A) \cap \dot{\delta}(B)$ $\square$

Dilatation adjointe

- On peut faire le même raisonnement en partant de l'opérateur d'érosion au lieu de celui de dilatation

Dilatation adjointe

- On peut faire le même raisonnement en partant de l'opérateur d'érosion au lieu de celui de dilatation
- On inverse alors la relation $\subseteq$ et on intervertit $\cup$ et $\cap$

Dilatation adjointe

- On peut faire le même raisonnement en partant de l'opérateur d'érosion au lieu de celui de dilatation
- On inverse alors la relation $\subseteq$ et on intervertit $\cup$ et $\cap$
- Si ϵ est une érosion, sa *dilatation adjointe* $\dot{\epsilon}$ est définie par :
  - $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $\dot{\epsilon}(X) = \cap\{X' \mid X \subseteq \epsilon(X')\}$

Dilatation adjointe

- On peut faire le même raisonnement en partant de l'opérateur d'érosion au lieu de celui de dilatation
- On inverse alors la relation $\subseteq$ et on intervertit $\cup$ et $\cap$
- Si ϵ est une érosion, sa *dilatation adjointe* $\dot{\epsilon}$ est définie par :
  - $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $\dot{\epsilon}(X) = \cap\{X' \mid X \subseteq \epsilon(X')\}$
- La relation d'adjonction est une bijection entre dilatations et érosions
  - $\epsilon = \dot{\delta} \Leftrightarrow \delta = \dot{\epsilon}$

Dilatation adjointe

- On peut faire le même raisonnement en partant de l'opérateur d'érosion au lieu de celui de dilatation
- On inverse alors la relation $\subseteq$ et on intervertit $\cup$ et $\cap$
- Si ϵ est une érosion, sa *dilatation adjointe* $\dot{\epsilon}$ est définie par :
  - $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $\dot{\epsilon}(X) = \cap\{X' \mid X \subseteq \epsilon(X')\}$
- La relation d'adjonction est une bijection entre dilatations et érosions
  - $\epsilon = \dot{\delta} \Leftrightarrow \delta = \dot{\epsilon}$
- $\dot{\delta} \circ \delta = Id \Leftrightarrow \delta = \dot{\delta} = Id$

Adjonction par élément structurant

Propriété

- *Soit* Γ *un élément structurant*
  - $\dot{\delta}_\Gamma = \delta^\star_{\Gamma^{-1}}$

Adjonction par élément structurant

Propriété

- *Soit* Γ *un élément structurant*
  - $\dot{\delta}_\Gamma = \delta^\star_{\Gamma^{-1}}$

Notation importante

- Soit Γ un élément structurant
- On désigne par ϵ_Γ l'érosion adjointe de δ_Γ
  - $\epsilon_\Gamma = \dot{\delta}_\Gamma = \delta^\star_{\Gamma^{-1}}$

Fermeture et ouverture par adjonction

Théorème

- *Soit* δ *une dilatation et* $\epsilon = \dot{\delta}$ *l'érosion adjointe de* δ
- *Soient* $\phi = \epsilon \circ \delta$ *et* $\gamma = \delta \circ \epsilon$

Fermeture et ouverture par adjonction

Théorème

- *Soit* δ *une dilatation et* $\epsilon = \dot{\delta}$ *l'érosion adjointe de* δ
- *Soient* $\phi = \epsilon \circ \delta$ *et* $\gamma = \delta \circ \epsilon$
- ϕ *est une fermeture*
- γ *est une ouverture*

Ouverture et fermeture par un élément structurant

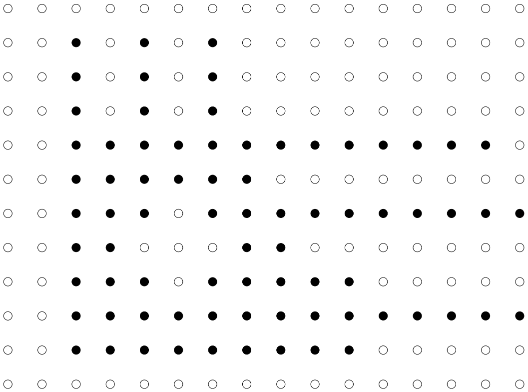
Définition

- *Soit* Γ *un élément structurant*
- *La* fermeture par Γ *est l'opérateur* ϕ_Γ *tel que*
  - $\phi_\Gamma = \delta^\star_{\Gamma^{-1}} \circ \delta_\Gamma$
- *L'*ouverture par Γ *est l'opérateur* γ_Γ *tel que*
  - $\gamma_\Gamma = \delta_\Gamma \circ \delta^\star_{\Gamma^{-1}}$

Exercice 1

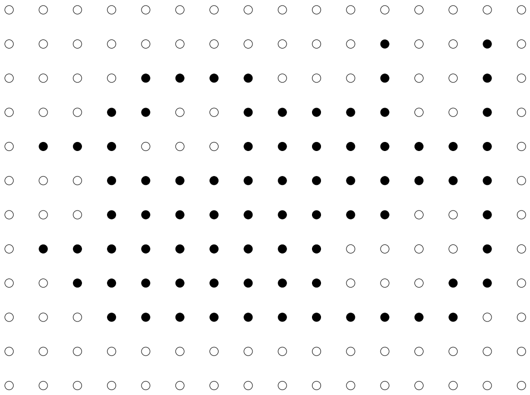
- Soit l'objet noir $X \subseteq \mathbb{Z}^2$ et l'élément structurant Γ ci-dessous
- Représenter l'ensemble $\gamma_\Gamma(X)$

Γ : 



Exercice 2

- Choisissez et appliquer un opérateur qui “rebouche” les trous de l’objet X en noir ci-dessous



Caractérisation d'ouverture/fermeture par élément structurant

Propriété

- *Soit* Γ *un élément structurant*
  - $\forall X \in \mathcal{P}(E),\ \gamma_\Gamma(X) = \cup\{\Gamma(x) \mid x \in E, \Gamma(x) \subseteq X\}$

Caractérisation d'ouverture/fermeture par élément structurant

Propriété

- *Soit* Γ *un élément structurant*
  - $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $\gamma_\Gamma(X) = \cup\{\Gamma(x) \mid x \in E, \Gamma(x) \subseteq X\}$
  - $\phi_\Gamma = \gamma^\star_{\Gamma^{-1}}$

Interprétation topographique

- On dit que $X \in \mathcal{P}(E)$ est *plus mince* que l'élément structurant Γ si $\delta_\Gamma(X)^\star = \emptyset$

Interprétation topographique

- On dit que $X \in \mathcal{P}(E)$ est *plus mince* que l'élément structurant Γ si $\delta_\Gamma(X)^\star = \emptyset$
- L'ouverture de l'ensemble X par Γ a pour effet de supprimer les parties de X qui sont plus minces que Γ, c'est-à-dire
  - des îles (parties isolées)
  - des caps (convexités minces)
  - des isthmes (jonctions entre parties non minces)

Interprétation topographique

- On dit que $X \in \mathcal{P}(E)$ est *plus mince* que l'élément structurant Γ si $\delta_\Gamma(X)^\star = \emptyset$
- L'ouverture de l'ensemble X par Γ a pour effet de supprimer les parties de X qui sont plus minces que Γ, c'est-à-dire
  - des îles (parties isolées)
  - des caps (convexités minces)
  - des isthmes (jonctions entre parties non minces)
- La fermeture supprime les parties non-minces de $\overline{X}$, c'est-à-dire
  - des lacs (trous)
  - des golfes (concavités minces)
  - des détroits (jonctions entre parties non minces de $\overline{X}$)

Plan de la séance

1. Image en niveau de gris
2. Opérateur sur des images en niveaux de gris

Image

Définition

- *Soit* $\mathbb{V}$ *un ensemble de valeurs*
- *Une* image (sur E à valeurs dans $\mathbb{V}$) *est une application* I *de* E *dans* $\mathbb{V}$
- $I(x)$ *est la valeur du point (pixel)* x *pour* I

Image

Définition

- *Soit* $\mathbb{V}$ *un ensemble de valeurs*
- *Une* image (sur E à valeurs dans $\mathbb{V}$) *est une application* I *de* E *dans* $\mathbb{V}$
- $I(x)$ *est la valeur du point (pixel)* x *pour* I

Exemple

- **Image à valeurs dans** $\mathbb{R}^+$ **:** *carte de distance* D_X *à un ensemble* $X \in \mathcal{P}(E)$
- **Image à valeurs dans** $\mathbb{Z}^+$ **:** *carte de distance* D_X *pour une distance géodésique dans un réseau à longueurs uniformes*

Images en niveaux de gris

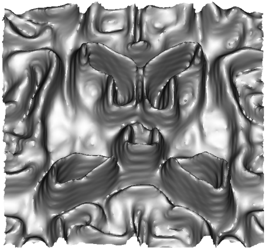
- On désigne par $\mathcal{I}$ l'ensemble des images à valeurs entières sur E
- Une image dans $\mathcal{I}$ est aussi appelée une *image en niveau (ou teinte, ou échelle) de gris*

Images en niveaux de gris

- On désigne par $\mathcal{I}$ l'ensemble des images à valeurs entières sur E
- Une image dans $\mathcal{I}$ est aussi appelée une *image en niveau (ou teinte, ou échelle) de gris*
- On désigne par I une image quelconque dans $\mathcal{I}$
- La valeur $I(x)$ d'un point $x \in E$ est aussi appelée *niveau (de gris) de x*, *teinte (de gris) de x*, *luminosité de x*

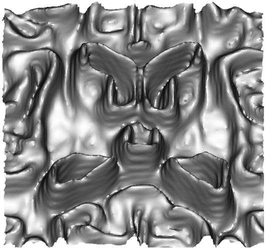
Interprétation topographique

- Une image I peut être vue comme un relief topographique
  - $I(x)$ est appelée l'*altitude de x*



Interprétation topographique

- Une image I peut être vue comme un relief topographique
  - $I(x)$ est appelée l'*altitude de x*
  - Régions claires : montagne, crêtes, colines
  - Régions sombres : bassins, vallées



Ensemble de niveaux

Définition

- *Soit* $k \in \mathbb{Z}$
- *L'*ensemble de niveau k de I, *désigné par* I_k, *est le sous-ensemble de* E *défini par*
  - $I_k = \{x \in E \mid I(x) \geq k\}$

Ensemble de niveaux

Définition

- *Soit* $k \in \mathbb{Z}$
- *L'***ensemble de niveau** k **de** I*, désigné par* I_k*, est le sous-ensemble de* E *défini par*
  - $I_k = \{x \in E \mid I(x) \geq k\}$

I

I_{80}

I_{150}

I_{220}

Reconstruction

Propriété

- $\forall k, k' \in \mathbb{Z},\ k' > k \implies I_{k'} \subseteq I_k$
- $I(x) = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid x \in I_k\}$

Opérateur à niveaux de gris

- Un *opérateur (sur $\mathcal{I}$)* est une application de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{I}$

Opérateur à niveaux de gris

- Un *opérateur (sur $\mathcal{I}$)* est une application de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{I}$

Définition (opérateur plan)

- *Soit ψ un opérateur croissant sur E*
- *L'*extension de ψ à $\mathcal{I}$ *est l'opérateur sur $\mathcal{I}$, également désigné par ψ, qui est défini par*
  - $\forall I \in \mathcal{I}, \forall k \in \mathbb{Z}, [\psi(I)]_k = \psi(I_k)$

Opérateur à niveaux de gris

- Un *opérateur (sur $\mathcal{I}$)* est une application de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{I}$

Définition (opérateur plan)

- *Soit ψ un opérateur croissant sur E*
- *L'*extension de ψ à $\mathcal{I}$ *est l'opérateur sur $\mathcal{I}$, également désigné par ψ, qui est défini par*
  - $\forall I \in \mathcal{I}, \forall k \in \mathbb{Z}, [\psi(I)]_k = \psi(I_k)$

Exercice. Montrer que l'on ne peut pas utiliser la même construction pour étendre un opérateur non croissant

Caractérisation des opérateurs à niveau de gris

Propriété

- *Soit ψ un opérateur croissant sur E*
- $[\psi(I)](x) = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid x \in \psi(I_k)\}$

Caractérisation des opérateurs à niveau de gris

Propriété

- *Soit ψ un opérateur croissant sur E*
- $[\psi(I)](x) = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid x \in \psi(I_k)\}$

Remarque. Tous les opérateurs vus jusque là dans le cours IN3M22 sont croissants

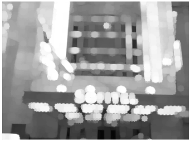
Illustration : dilatation sur $\mathcal{I}$ par Γ

I

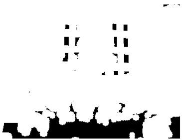
I_{80}

I_{150}

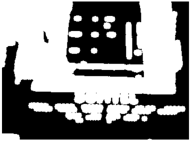
I_{220}



$\delta_\Gamma(I)$



$\delta_\Gamma(I)_{80}$



$\delta_\Gamma(I)_{150}$

$\delta_\Gamma(I)_{220}$

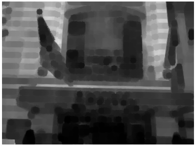
Illustration : erosion sur $\mathcal{I}$ par Γ

I

I_{80}

I_{150}

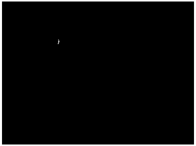
I_{220}



$\varepsilon_\Gamma(I)$

$\varepsilon_\Gamma(I)_{80}$

$\varepsilon_\Gamma(I)_{150}$



$\varepsilon_\Gamma(I)_{220}$

Illustration : ouverture sur $\mathcal{I}$ par Γ

I

I_{80}

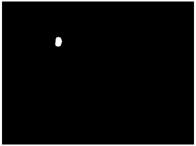
I_{150}

I_{220}

$\gamma_\Gamma(I)$

$\gamma_\Gamma(I)_{80}$

$\gamma_\Gamma(I)_{150}$



$\gamma_\Gamma(I)_{220}$

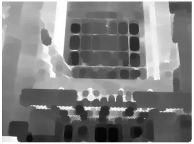
Illustration : fermeture sur $\mathcal{I}$ par Γ

I

I_{80}

I_{150}

I_{220}



$\varphi_\Gamma(I)$

$\varphi_\Gamma(I)_{80}$

$\varphi_\Gamma(I)_{150}$

$\varphi_\Gamma(I)_{220}$

Dilatation/Erosion par élément strcuurant : caractérisation

Propriété (dualité)

- *Soit* Γ *un élément structurant*
- $\varepsilon_\Gamma(I) = -\delta_{\Gamma^{-1}}(-I)$

Dilatation/Erosion par élément strcuurant : caractérisation

Propriété (dualité)

- *Soit* Γ *un élément structurant*
- $\varepsilon_\Gamma(I) = -\delta_{\Gamma^{-1}}(-I)$

Propriété

- *Soit* Γ *un élément structurant*
- $[\delta_\Gamma(I)](x) = \max\{I(y) \mid y \in \Gamma^{-1}(x)\}$
- $[\varepsilon_\Gamma(I)](x) = \min\{I(y) \mid y \in \Gamma(x)\}$

Exercice

- Ecrire un algorithme dont l'entré est un graphe (E, Γ) et image I sur E et dont le résultat est l'image $I' = \delta_\Gamma(I')$