



Morphologie Mathématique Segmentation – Ligne de Partage des Eaux

Hugues Talbot (CVN, CentraleSupélec)

Mars 2019

Plan de la séance

- 1 Segmentation : exemples introductifs en imagerie médicale
- 2 Ligne de partage des eaux d'une image : difficultés
- 3 Ligne de partage des eaux d'un graphe pondéré
- 4 Segmentation avec marqueurs

Problème technique

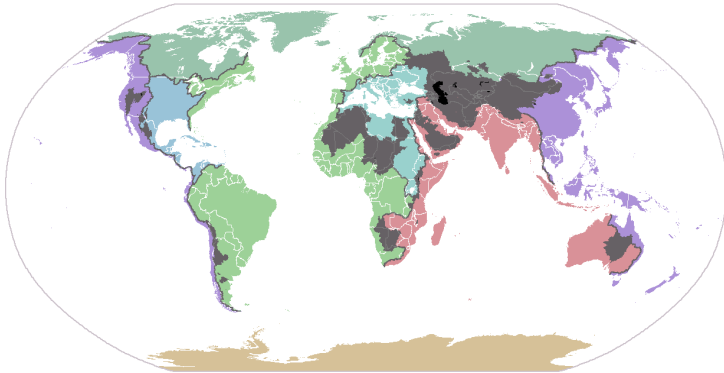
Problème

- **Segmentation** des objets d'intérêt
 - Déterminer l'ensemble des points de l'image appartenant à chaque objet d'intérêt
 - Déterminer les contours de chaque objet d'intérêt

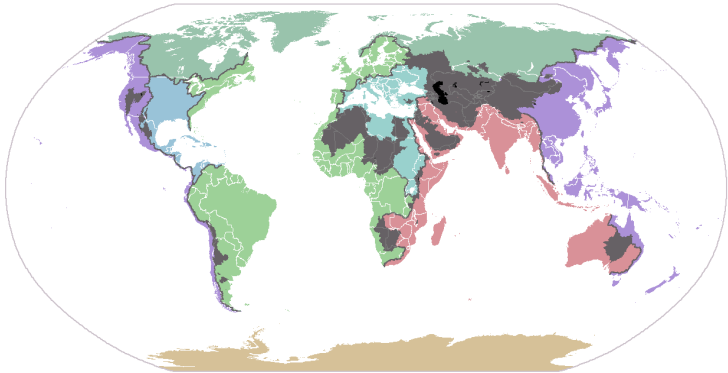
Une solution morphologique

- La **Ligne de Partage des Eaux** (LPE)

LPE : introduction



LPE : introduction



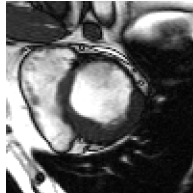
- Pour des raisons topographiques, la LPE a été étudiée depuis le 19ème siècle

LPE : introduction

- Cent ans plus tard, elle a été introduite en segmentation d'image

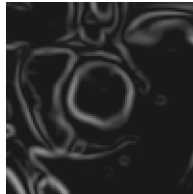
LPE : introduction

- Cent ans plus tard, elle a été introduite en segmentation d'image



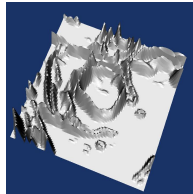
LPE : introduction

- Cent ans plus tard, elle a été introduite en segmentation d'image



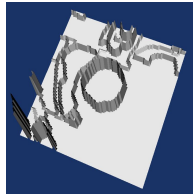
LPE : introduction

- Cent ans plus tard, elle a été introduite en segmentation d'image



LPE : introduction

- Cent ans plus tard, elle a été introduite en segmentation d'image



LPE : introduction

- Cent ans plus tard, elle a été introduite en segmentation d'image



LPE : problème #1

Problème

- *Comment définir la LPE d'un image ?*

LPE : problème #1

Problème

- *Comment définir la LPE d'un image ?*
- *Quel cadre mathématique ?*

LPE : problème #1

Problème

- *Comment définir la LPE d'un image ?*
- *Quel cadre mathématique ?*
- *Quelles propriétés ?*

LPE : problème #1

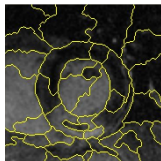
Problème

- *Comment définir la LPE d'un image ?*
- *Quel cadre mathématique ?*
- *Quelles propriétés ?*
- *Quel(s) algorithme(s) ?*

LPE : problème #2

Problème

En pratique : sur-segmentation



Sur-segmentation et fusion de régions

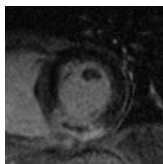
Solution 1

- Les méthodes de fusion de régions consistent à améliorer une solution initiale en fusionnant progressivement des paires de régions voisines

Sur-segmentation et fusion de régions

Solution 1

- Les méthodes de fusion de régions consistent à améliorer une solution initiale en fusionnant progressivement des paires de régions voisines

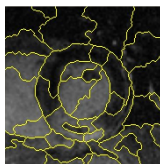
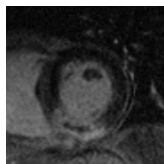


- Exemple : IRM de rehaussement tardif

Sur-segmentation et fusion de régions

Solution 1

- Les méthodes de fusion de régions consistent à améliorer une solution initiale en fusionnant progressivement des paires de régions voisines

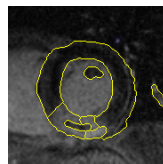
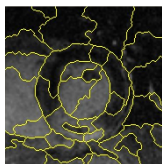
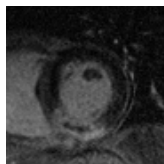


- Exemple : IRM de rehaussement tardif

Sur-segmentation et fusion de régions

Solution 1

- Les méthodes de fusion de régions consistent à améliorer une solution initiale en fusionnant progressivement des paires de régions voisines

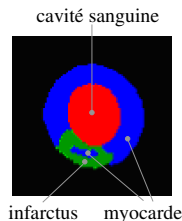
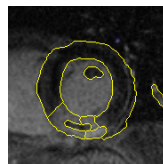
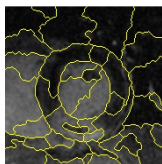
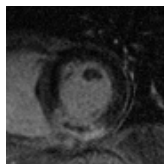


- Exemple : IRM de rehaussement tardif

Sur-segmentation et fusion de régions

Solution 1

- Les méthodes de fusion de régions consistent à améliorer une solution initiale en fusionnant progressivement des paires de régions voisines



- Exemple : IRM de rehaussement tardif

Sur-segmentation

Solution 2

- LPE avec marqueurs

Sur-segmentation

Solution 2

- **LPE avec marqueurs**
- Méthodologie générale en trois étapes
 - 1 **Reconnaissance** de marqueurs
 - 2 **Délimitations** des contours (souvent fermeture par reconstruction + LPE)
 - 3 **Lissage**

Sur-segmentation

Solution 2

- **LPE avec marqueurs**
- Méthodologie générale en trois étapes
 - 1 **Reconnaissance** de marqueurs
 - 2 **Délimitations** des contours (souvent fermeture par reconstruction + LPE)
 - 3 **Lissage**
- **Information sémantique** prise en compte aux étapes 1 et 3

Pouvons nous dessiner une LPE de cette image ?

2	2	2	2	2
40	30	30	30	40
40	20	20	20	40
40	40	20	40	40
1	5	20	5	1

- Image équipée de l'élément structurant Γ_4

Pouvons nous dessiner une LPE de cette image ?

A	A	A	A	A
40	30	30	30	40
40	20	20	20	40
40	40	20	40	40
B	5	20	5	C

- Image équipée de l'élément structurant Γ_4
- Attribuer un label aux pixels en fonction des lettres des bassins d'attraction A, B and C

Dessins possibles

A	A	A	A	A
40	30	30	30	40
40	20	20	20	40
40	40	20	40	40
B	5	20	5	C

A	A	A	A	A
A	A	A	A	A
40	20	20	20	40
B	B	20	C	C
B	B	20	C	C

LPE topographique

Dessins possibles

A	A	A	A	A
40	30	30	30	40
40	20	20	20	40
40	40	20	40	40
B	5	20	5	C

A	A	A	A	A
A	A	A	A	A
C	C	C	C	C
B	B	C	C	C
B	B	C	C	C

Inondation depuis les minima

Dessins possibles

A	A	A	A	A
40	30	30	30	40
40	20	20	20	40
40	40	20	40	40
B	5	20	5	C

A	A	A	A	A
A	A	A	A	A
40	A	A	A	40
B	40	A	40	C
B	B	20	C	C

Inondation avec frontière

Dessins possibles

A	A	A	A	A
40	30	30	30	40
40	20	20	20	40
40	40	20	40	40
B	5	20	5	C

A	A	A	A	A
40	30	30	30	40
B	B	20	C	C
B	B	20	C	C
B	B	20	C	C

LPE topologique

Dessins possibles

A	A	A	A	A
40	30	30	30	40
40	20	20	20	40
40	40	20	40	40
B	5	20	5	C

A	A	A	A	A
40	30	30	30	40
B	B	20	C	C
B	B	20	C	C
B	B	20	C	C

LPE topologique

Conclusion

- Pas facile de définir la LPE d'une image sur la grille \mathbb{Z}^2

LPE dans les graphes à arêtes pondérées

LPE dans les graphes à arêtes pondérées

- Soit $G = (E, \Gamma)$ un graphe
- Soit F une application de E dans \mathbb{R}

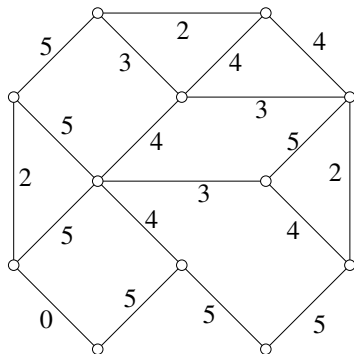


Image et graphes à arêtes pondérées

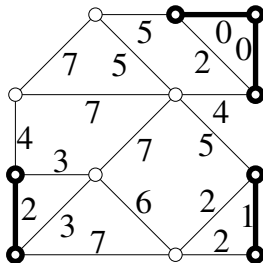
Pour les applications à l'analyse d'image

- E est l'ensemble des *pixels*
- Γ correspond à une *relation d'adjacence* sur E , (e.g., Γ_4 ou Γ_8 en 2D)
- F est un “gradient” de l'image I : l'altitude d'une arête u , liant deux pixels x and y , représente la *dissimilarité entre x et y*
 - $F(u) = |I(x) - I(y)|$.

Notions élémentaires

- Un *sous-graphe de G* est un graphe $X = (E', \Gamma')$ tel que $E' \subseteq E$ et $\bar{\Gamma}' \subseteq \bar{\Gamma}$
- Si X est un sous-graphe de G , on écrit $X \subseteq G$
- Soit S un ensemble d'arête
- Le sous graphe induit par S est le graphe (E_s, S) tel que $E_s = \cup\{u \mid u \in S\}$
- Le *complémentaire de S dans $\bar{\Gamma}$* est l'ensemble $S^c = \bar{\Gamma} \setminus S$

Minima régionaux



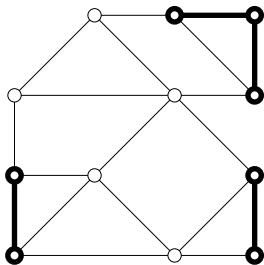
Définition

Un sous graphe X de G est un **minimum de F** (d'altitude k) si :

- X est connexe ; et
- k est l'altitude de toutes les arêtes de X ; et
- toute arête adjacente à X est d'altitude strictement supérieure à k

On désigne par $M(F)$ le graphe composé de tous les minima de F

Extension



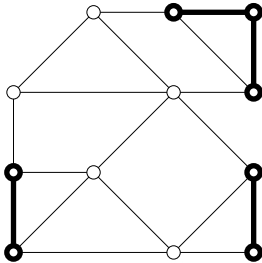
un sous-graphe X

Définition

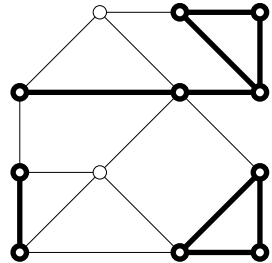
Soient X et Y deux sous-graphes non-vides de G

- Y est une **extension de X** (dans G) si $X \subseteq Y$ et si toute composante connexe de Y contient exactement une composante connexe de X

Extension



un sous-graphe X



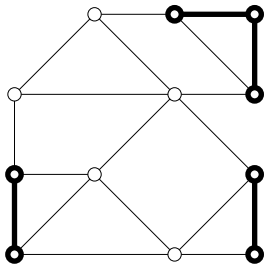
une *extension* Y de X

Définition

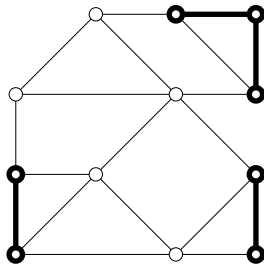
Soient X et Y deux sous-graphes non-vides de G

- Y est une *extension* de X (dans G) si $X \subseteq Y$ et si toute composante connexe de Y contient exactement une composante connexe de X

Extension



un sous-graphe X



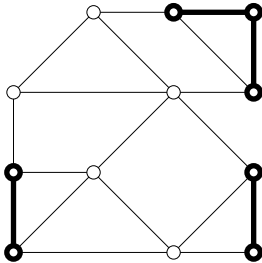
une *extension* Y de X

Définition

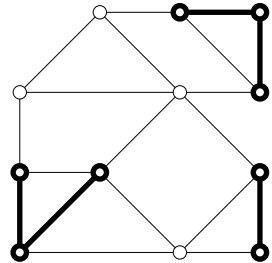
Soient X et Y deux sous-graphes non-vides de G

- Y est une *extension* de X (dans G) si $X \subseteq Y$ et si toute composante connexe de Y contient exactement une composante connexe de X

Extension



un sous-graphe X



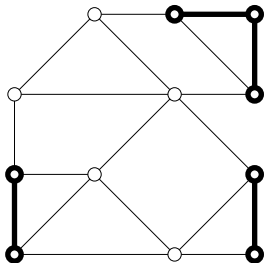
une *extension* Y de X

Définition

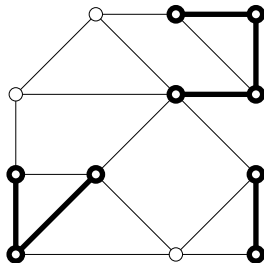
Soient X et Y deux sous-graphes non-vides de G

- Y est une *extension* de X (dans G) si $X \subseteq Y$ et si toute composante connexe de Y contient exactement une composante connexe de X

Extension



un sous-graphe X



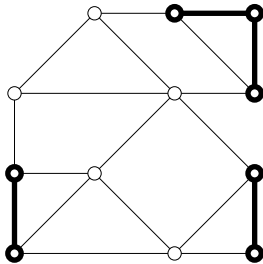
une *extension* Y de X

Définition

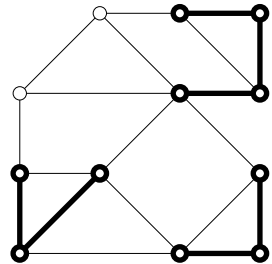
Soient X et Y deux sous-graphes non-vides de G

- Y est une *extension* de X (dans G) si $X \subseteq Y$ et si toute composante connexe de Y contient exactement une composante connexe de X

Extension



un sous-graphe X



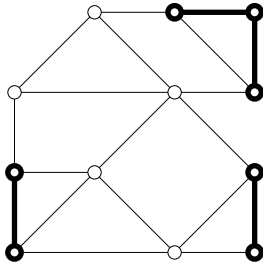
une *extension* Y de X

Définition

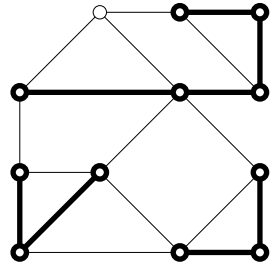
Soient X et Y deux sous-graphes non-vides de G

- Y est une *extension* de X (dans G) si $X \subseteq Y$ et si toute composante connexe de Y contient exactement une composante connexe de X

Extension



un sous-graphe X



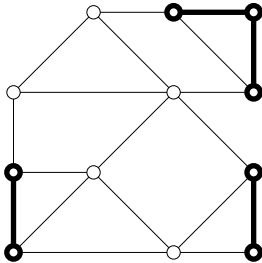
une *extension* Y de X

Définition

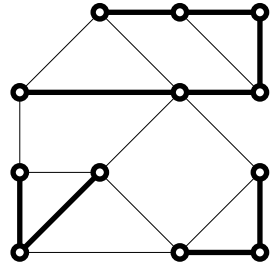
Soient X et Y deux sous-graphes non-vides de G

- Y est une *extension* de X (dans G) si $X \subseteq Y$ et si toute composante connexe de Y contient exactement une composante connexe de X

Extension



un sous-graphe X



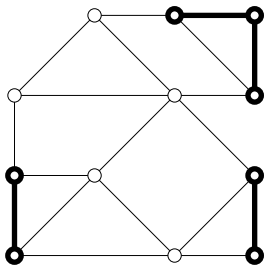
une *extension* Y de X

Définition

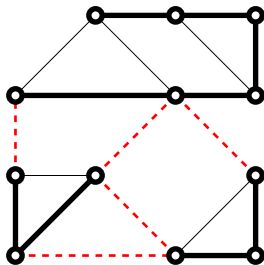
Soient X et Y deux sous-graphes non-vides de G

- Y est une *extension* de X (dans G) si $X \subseteq Y$ et si toute composante connexe de Y contient exactement une composante connexe de X

Coupure



un sous-graphe X



une *coupure* S pour X

Définition (Coupure)

Soit X un sous-graphe de G et $S \subseteq \bar{\Gamma}$ un ensemble d'arêtes

- S est une *coupure relative à X* s'il existe une extension Y de X telle que S est la coupure induite par Y

Coupure par LPE

- *L'église de Sorbier*
(une intuition topographique)

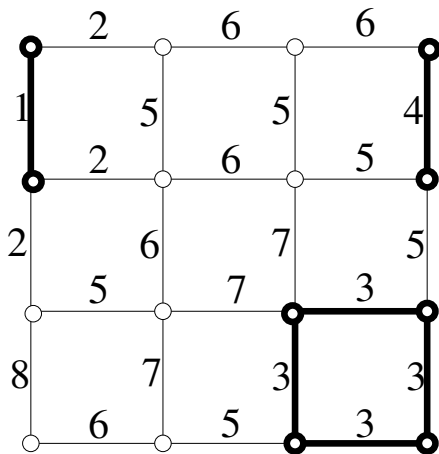


Définition (principe de la goutte d'eau)

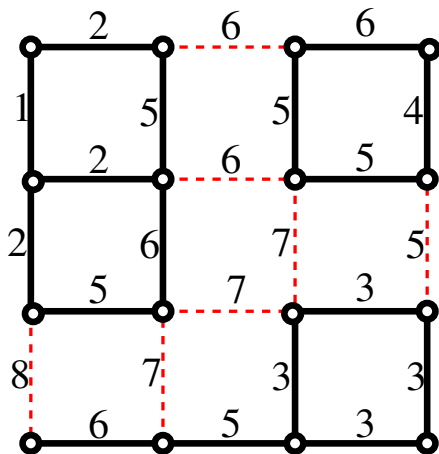
L'ensemble $S \subseteq \bar{\Gamma}$ est une **coupure par LPE de F** si S est une coupure relative à $M(F)$ et si pour tout $u = \{x_0, y_0\} \in S$, il existe deux chemins (x_0, \dots, x_n) et (y_0, \dots, y_m) descendants dans S^C tels que :

- 1 x_n et y_m sont des sommets de deux minima distincts de F ; et
- 2 $F(u) \geq F(\{x_0, x_1\})$ si $n > 0$ et $F(u) \geq F(\{y_0, y_1\})$ si $m > 0$

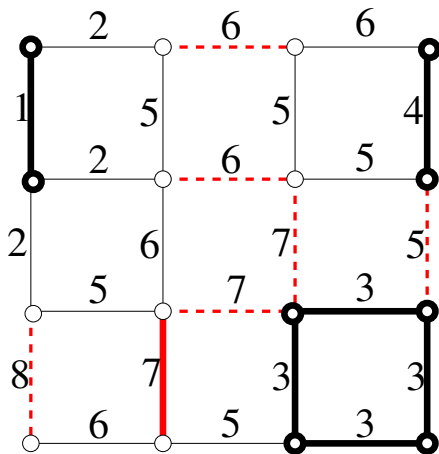
Coupure par LPE : exemple



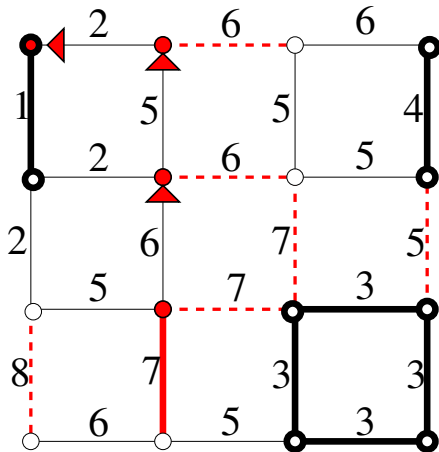
Coupure par LPE : exemple



Coupure par LPE : exemple



Coupure par LPE : exemple



Coupure par LPE : exemple

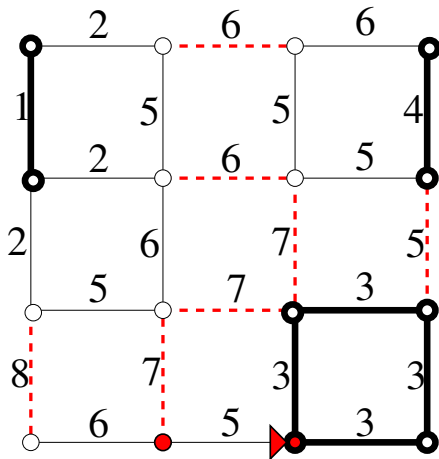


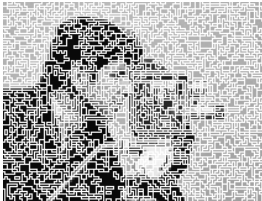
Illustration à la segmentation d'images en niveaux de gris



I



représentation de F

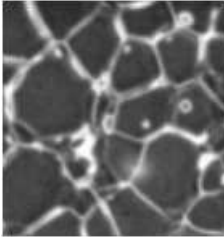


coupure par LPE de F

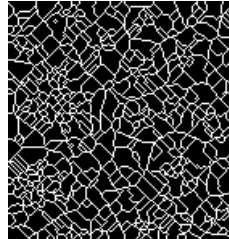


coupure par LPE de $\gamma_\lambda^\alpha(F)$

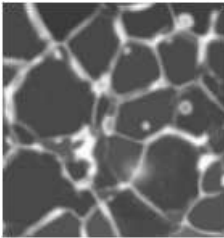
Illustration à la segmentation d'images en niveaux de gris



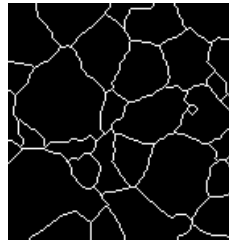
F



coupure par LPE



version filtrée de F



version filtrée

LPE ?

Problem

- *Une LPE est-elle une segmentation optimale ?*
- *Comment peut on calculer une coupure par LPE ?*

LPE ?

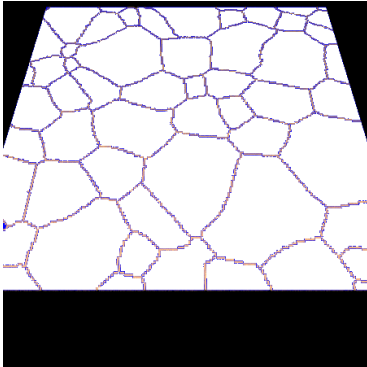
Problem

- *Une LPE est-elle une segmentation optimale ?*
- *Comment peut on calculer une coupure par LPE ?*

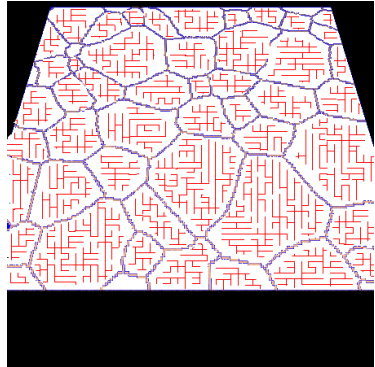
Solution

- *Forêt de poids minimum*

Forêt relative de poids minimum : une intuition en image

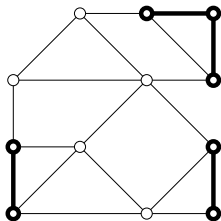


coupure

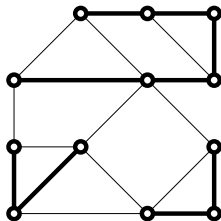


forêt couvrant les régions

Forêt relative



un sous-graphe X



une *forêt Y relative à X*

Définition

Soient X et Y deux sous-graphes non-vides de G

Y est une *forêt relative à X* si :

- 1 Y est une extension de X ; et
- 2 tout cycle dans Y est aussi un cycle dans X

Forêt de poids minimum

- Le *poids d'une forêt* Y est la somme des poids de ses arêtes *i.e.* $\sum_{u \in E(Y)} F(u)$.

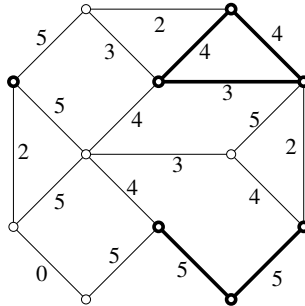
Forêt de poids minimum

- Le *poids d'une forêt* Y est la somme des poids de ses arêtes *i.e.* $\sum_{u \in E(Y)} F(u)$.

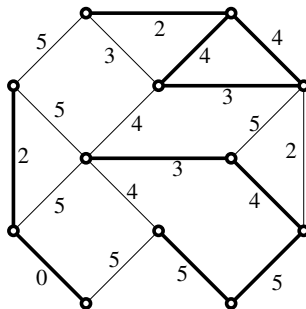
Définition

- Y est une forêt de poids minimum (FPmin) relative à X si
 - Y est une forêt couvrante relative à X , et
 - le poids de Y est inférieur ou égal au poids de toute autre forêt couvrante relative à X

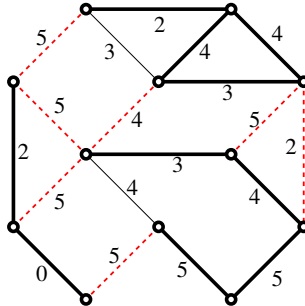
Forêt de poids minimum : exemple



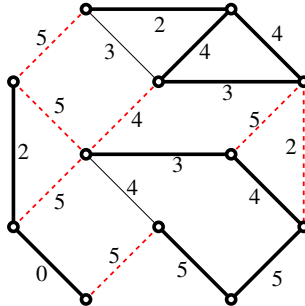
Forêt de poids minimum : exemple



Forêt de poids minimum : exemple

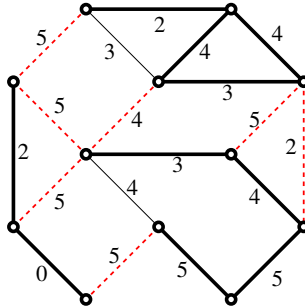


Forêt de poids minimum : exemple



- Si Y est une FPmin relative à X , la coupure S induite par Y est une coupure relative à X ;

Forêt de poids minimum : exemple



- Si Y est une FPmin relative à X , la coupure S induite par Y est une coupure relative à X ;
- Dans ce cas, S est appelée une *coupure par FPmin relative à X* .

Optimalité des LPE

Theorem

- *Un ensemble d'arêtes $S \subseteq \bar{\Gamma}$ est une coupure par FPmin relative à $M(F)$ (les minima de F) si et seulement si S est une coupure par LPE de F*

Arbre de poids minimum

- Calculer une FPmin \Leftrightarrow calculer un APmin

Arbre de poids minimum

- Calculer une FPmin \Leftrightarrow calculer un APmin
- Il existe un algorithme compliqué quasi-linéaire pour

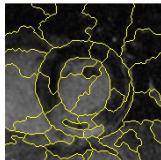
Arbre de poids minimum

- Calculer une FPmin \Leftrightarrow calculer un APmin
- Il existe un algorithme compliqué quasi-linéaire pour
- Il existe un algorithme linéaire très simple pour calculer des coupures par LPE

LPE : problème pratique #2

Problème

En pratique : sur-segmentation



Sur-segmentation

Solution 2

- LPE avec marqueurs

Sur-segmentation

Solution 2

- **LPE avec marqueurs**
- Méthodologie générale en trois étapes
 - 1 **Reconnaissance** de marqueurs
 - 2 **Délimitation** des contours (souvent fermeture par reconstruction + LPE)
 - 3 **Lissage**

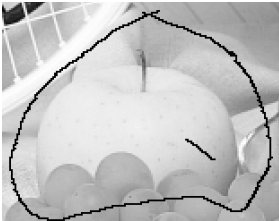
Sur-segmentation

Solution 2

- **LPE avec marqueurs**
- Méthodologie générale en trois étapes
 - 1 **Reconnaissance** de marqueurs
 - 2 **Délimitation** des contours (souvent fermeture par reconstruction + LPE)
 - 3 **Lissage**
- **Information sémantique** prise en compte aux étapes 1 et 3

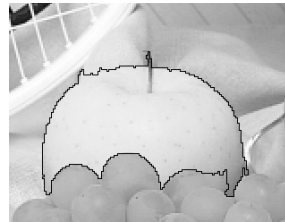
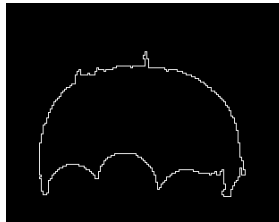
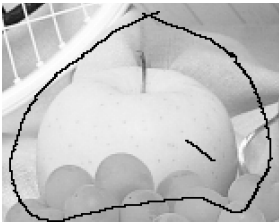
LPE avec marqueurs

- La segmentation avec marqueurs est très utilisée
 - Un **utilisateur** marque les objets à segmenter



LPE avec marqueurs

- La segmentation avec marqueurs est très utilisée
 - Un **utilisateur** marque les objets à segmenter
- Les coupures par FPmin font parties de cette catégorie



LPE avec marqueurs

- La segmentation avec marqueurs est très utilisée
 - Une **procédure automatique** marque les objets à segmenter
- Les coupures par FPmin font parties de cette catégorie

LPE avec marqueurs

- La segmentation avec marqueurs est très utilisée
 - Une **procédure automatique** marque les objets à segmenter
- Les coupures par FPmin font parties de cette catégorie

Remarque

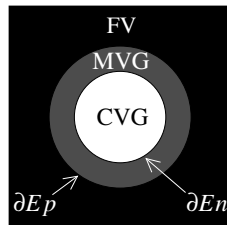
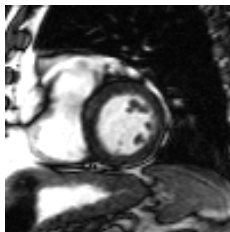
- *La morphologie mathématique fournit un ensemble d'outils intéressants pour reconnaître automatiquement des marqueurs*

LPE avec marqueurs : application

- *Segmentation du myocarde dans des IRM ciné 3D+t*

LPE avec marqueurs : application

- *Segmentation du myocarde dans des IRM ciné 3D+t*
- Acquisition coupe par coupe



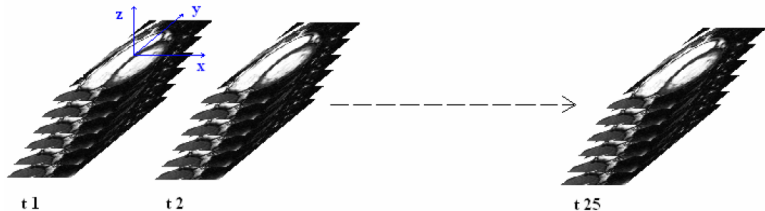
LPE avec marqueurs : application

- *Segmentation du myocarde dans des IRM ciné 3D+t*
- Acquisition coupe par coupe
- D'abord, au cours du temps (recalée sur l'ECG)

im

LPE avec marqueurs : application

- *Segmentation du myocarde dans des IRM ciné 3D+t*
- Acquisition coupe par coupe
- D'abord, au cours du temps (recalée sur l'ECG)
- Puis, dans l'espace

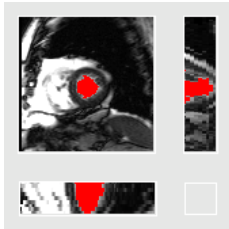


LPE avec marqueurs : application

- *Segmentation de l'endocarde :*

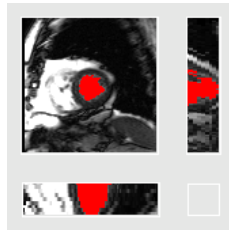
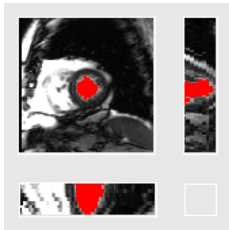
LPE avec marqueurs : application

- *Segmentation de l'endocarde :*
- Seuil haut (reconnaissance)



LPE avec marqueurs : application

- *Segmentation de l'endocarde :*
- Seuil haut (reconnaissance)
- Dilatation géodésique dans un seuil bas (délimitation)

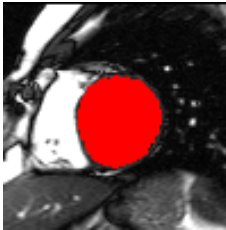


LPE avec marqueurs : application

■ *Segmentation épicardique :*

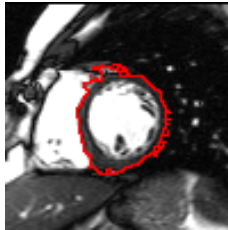
LPE avec marqueurs : application

- *Segmentation épicardique :*
- Marqueurs internes et externes (reconnaissance) :
 - Dilatation réulsive
 - Dilatation homotopique



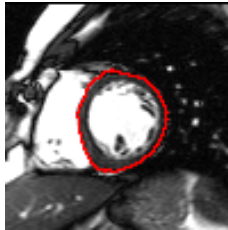
LPE avec marqueurs : application

- *Segmentation épicardique :*
- Marqueurs internes et externes (reconnaissance) :
 - Dilatation réulsive
 - Dilatation homotopique
- Coupure par LPE dans l'espace à 4 dimensions

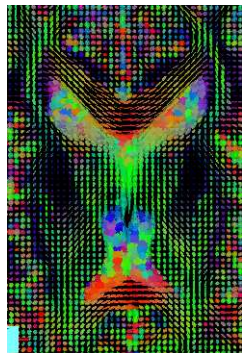


LPE avec marqueurs : application

- *Segmentation épicardique :*
- Marqueurs internes et externes (reconnaissance) :
 - Dilatation réulsive
 - Dilatation homotopique
- Coupure par LPE dans l'espace à 4 dimensions
- Lissage (filtres alternés séquentiels)



LPE avec marqueurs dans des images de tenseurs de diffusion (DTI)



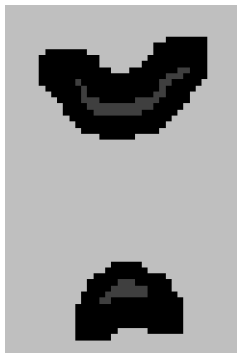
DTI

- DTI 3D équipée de l'adjacence directe (extension de Γ_4 à \mathbb{Z}^3)
- Arêtes pondérées par la distance log-euclidienne entre tenseurs

LPE avec marqueurs dans des images de tenseurs de diffusion (DTI)



DTI



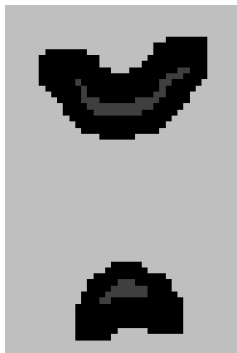
marqueurs

- DTI 3D équipée de l'adjacence directe (extension de Γ_4 à \mathbb{Z}^3)
- Arêtes pondérées par la distance log-euclidienne entre tenseurs

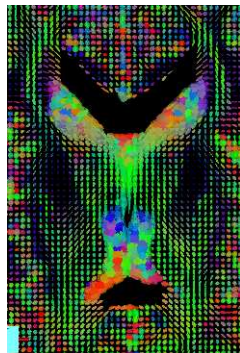
LPE avec marqueurs dans des images de tenseurs de diffusion (DTI)



DTI



marqueurs



Coupure par FPmin

- DTI 3D équipée de l'adjacence directe (extension de Γ_4 à \mathbb{Z}^3)
- Arêtes pondérées par la distance log-euclidienne entre tenseurs
- Marqueurs obtenus automatiquement par un atlas statistique