CENTER FOR VISUAL COMPUTING
CentraleSupélec / INRIA

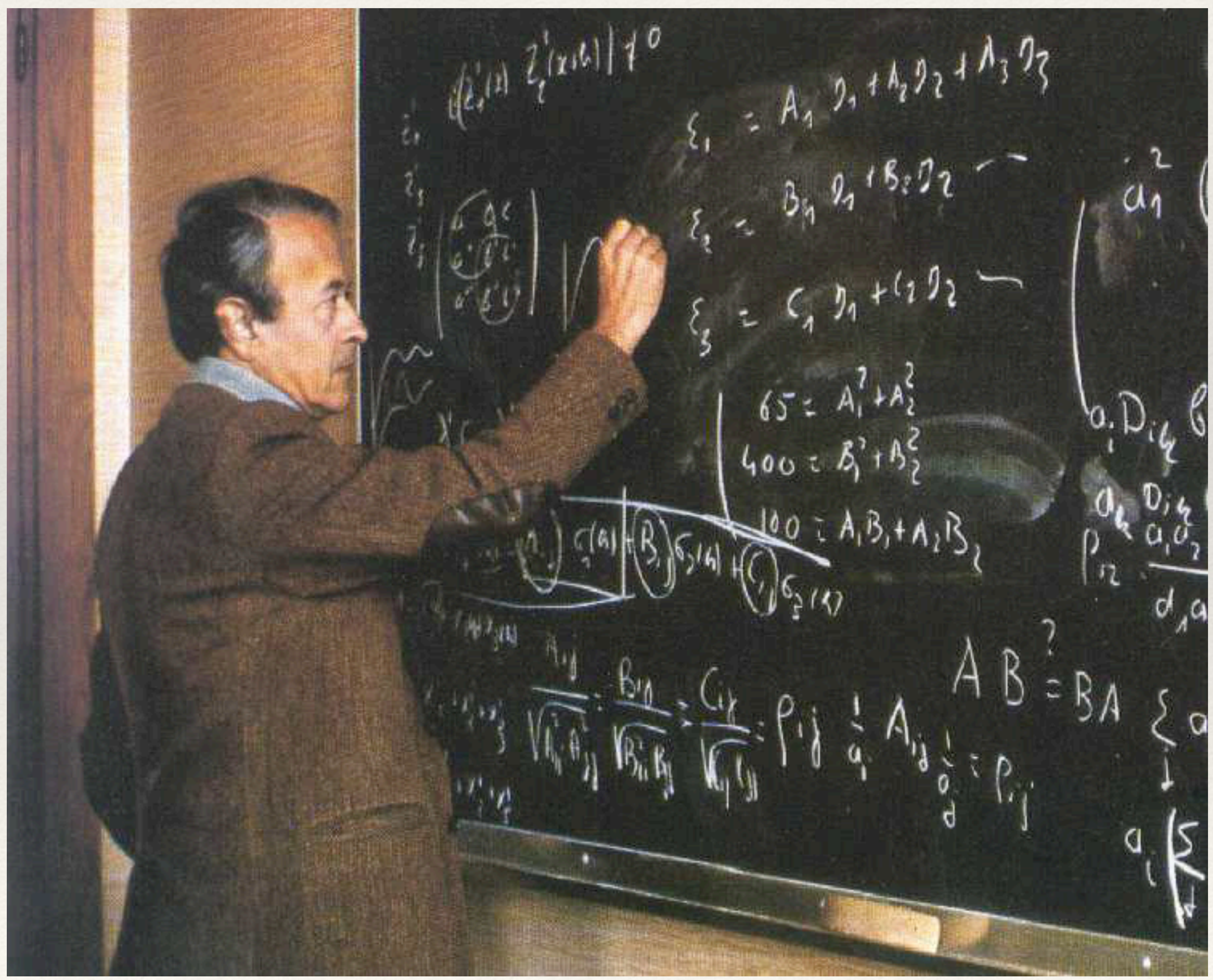
# Morphologie Mathématique graphes et opérateurs : dilatation et érosion

Hugues Talbot (CVN, CentraleSupelec)

Février. 2019

# Histoire de la MM

- La morphologie mathématique a été inventée dans les année 1960 à l'École des Mines
- Inventeurs principaux: Georges Matheron et Jean Serra



# Principes très généraux

- La MM est très particulière:
  - Basée sur la notion d'ordre et de théorie des ensembles élémentaire
  - Non-linéaire, non-differentiable, non-vectorielle, non-bijective: "lossy"
  - Algorithmique: rapide et efficace.

# Notations ensemblistes

- Soit $E$ un ensemble fini

# Notations ensemblistes

- Soit $E$ un ensemble fini
- Un ensemble $S$ est appelé un *sous-ensemble* ou *une partie de $E$* si tout élément de $S$ est aussi un élément de $E$

# Notations ensemblistes

- Soit $E$ un ensemble fini
- Un ensemble $S$ est appelé un *sous-ensemble* ou *une partie de $E$* si tout élément de $S$ est aussi un élément de $E$
- Si $S$ est un sous-ensemble de $E$, on écrit $S \subseteq E$

# Notations ensemblistes

- Soit $E$ un ensemble fini
- Un ensemble $S$ est appelé un *sous-ensemble* ou *une partie de $E$* si tout élément de $S$ est aussi un élément de $E$
- Si $S$ est un sous-ensemble de $E$, on écrit $S \subseteq E$
- L'ensemble des parties de $E$ est désigné par $\mathcal{P}(E)$

# Notations ensemblistes

- Soit $E$ un ensemble fini
- Un ensemble $S$ est appelé un *sous-ensemble* ou *une partie de $E$* si tout élément de $S$ est aussi un élément de $E$
- Si $S$ est un sous-ensemble de $E$, on écrit $S \subseteq E$
- L'ensemble des parties de $E$ est désigné par $\mathcal{P}(E)$

## Exemple

- *Si* $E = \{1, 2, 3\}$
- *alors* $\mathcal{P}(E) =$

# Notations ensemblistes

- Soit $E$ un ensemble fini
- Un ensemble $S$ est appelé un *sous-ensemble* ou *une partie de $E$* si tout élément de $S$ est aussi un élément de $E$
- Si $S$ est un sous-ensemble de $E$, on écrit $S \subseteq E$
- L'ensemble des parties de $E$ est désigné par $\mathcal{P}(E)$

## Exemple

- *Si* $E = \{1, 2, 3\}$
- *alors* $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

# Notations ensemblistes

- Soit $E$ un ensemble fini
- Un ensemble $S$ est appelé un *sous-ensemble* ou *une partie de $E$* si tout élément de $S$ est aussi un élément de $E$
- Si $S$ est un sous-ensemble de $E$, on écrit $S \subseteq E$
- L'ensemble des parties de $E$ est désigné par $\mathcal{P}(E)$

## Exemple

- *Si* $E = \{1, 2, 3\}$
- *alors* $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

- *Remarque.* $S \in \mathcal{P}(E)$ signifie que $S$ est un sous-ensemble de $E$

# Notations ensemblistes

- Soit $E$ un ensemble fini
- Un ensemble $S$ est appelé un *sous-ensemble* ou *une partie de $E$* si tout élément de $S$ est aussi un élément de $E$
- Si $S$ est un sous-ensemble de $E$, on écrit $S \subseteq E$
- L'ensemble des parties de $E$ est désigné par $\mathcal{P}(E)$

## Exemple

- *Si* $E = \{1, 2, 3\}$
- *alors* $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

- *Remarque.* $S \in \mathcal{P}(E)$ signifie que $S$ est un sous-ensemble de $E$
- La proposition $S \in \mathcal{P}(E)$ peut donc aussi s'écrire de manière équivalente $S \subseteq E$

# Graphe

## Définition

- *Un* graphe *est un couple* $G = (E, \Gamma)$ *où* $E$ *est un ensemble fini et où* $\Gamma$ *est une application de* $E$ *dans* $\mathcal{P}(E)$

# Graphe

## Définition

- *Un* graphe *est un couple* $G = (E, \Gamma)$ *où* $E$ *est un ensemble fini et où* $\Gamma$ *est une application de* $E$ *dans* $\mathcal{P}(E)$

## Exemple

- $G = (E, \Gamma)$
- *avec* $E = \{1, 2, 3, 4\}$ *et*
- $\Gamma$ *définie par*
  - $\Gamma(1) = \{1, 2, 4\}$
  - $\Gamma(2) = \{3, 1\}$
  - $\Gamma(3) = \{4\}$
  - $\Gamma(5) = \emptyset$

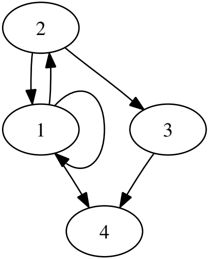
# Graphe

## Définition

- *Un graphe est un couple $G = (E, \Gamma)$ où $E$ est un ensemble fini et où $\Gamma$ est une application de $E$ dans $\mathcal{P}(E)$*

## Exemple

- $G = (E, \Gamma)$
- *avec* $E = \{1, 2, 3, 4\}$ *et*
- $\Gamma$ *définie par*
  - $\Gamma(1) = \{1, 2, 4\}$
  - $\Gamma(2) = \{3, 1\}$
  - $\Gamma(3) = \{4\}$
  - $\Gamma(5) = \emptyset$




Représentation sous forme d'arcs fléchés

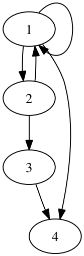
# Graphe

## Définition

- *Un* graphe *est un couple* $G = (E, \Gamma)$ *où* $E$ *est un ensemble fini et où* $\Gamma$ *est une application de* $E$ *dans* $\mathcal{P}(E)$

## Exemple

- $G = (E, \Gamma)$
- *avec* $E = \{1, 2, 3, 4\}$ *et*
- $\Gamma$ *définie par*
  - $\Gamma(1) = \{1, 2, 4\}$
  - $\Gamma(2) = \{3, 1\}$
  - $\Gamma(3) = \{4\}$
  - $\Gamma(5) = \emptyset$



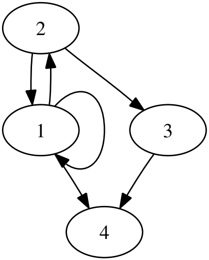

Représentation sous forme d'arcs fléchés

# Vocabulaire usuel

- Tout élément de $E$ est appelé *un sommet (du graphe $G$)*

### Exemple

- 1 *est un sommet de $G$*

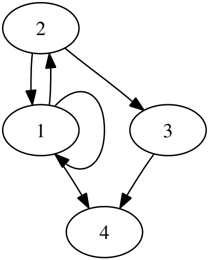


# Vocabulaire usuel

- Tout élément de $E$ est appelé *un sommet (du graphe $G$)*
- Soient $x$ et $y$ deux sommets dans $E$, si $y \in \Gamma(x)$,
  - $y$ est *un successeur de $x$*

## Exemple

- 1 *est un sommet de* $G$
- 4 *est un successeur de* 3

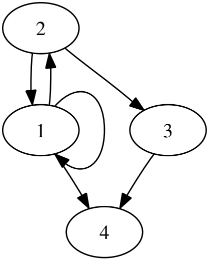


# Vocabulaire usuel

- Tout élément de $E$ est appelé *un sommet (du graphe $G$)*
- Soient $x$ et $y$ deux sommets dans $E$, si $y \in \Gamma(x)$,
  - $y$ est *un successeur de $x$* et $x$ est *un prédécesseur de $y$*

## Exemple

- 1 *est un sommet de* $G$
- 4 *est un successeur de* 3
- 2 *est un prédécesseur de* 3

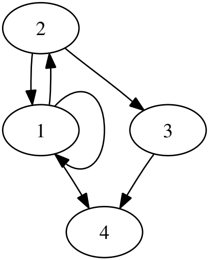


# Vocabulaire usuel

- Tout élément de $E$ est appelé *un sommet (du graphe $G$)*
- Soient $x$ et $y$ deux sommets dans $E$, si $y \in \Gamma(x)$,
  - $y$ est *un successeur de $x$* et $x$ est *un prédécesseur de $y$*
  - le couple ordonné $(x, y)$ est un *arc (du graphe $G$)*

## Exemple

- 1 *est un sommet de G*
- 4 *est un successeur de* 3
- 2 *est un prédécesseur de* 3
- *Donc,* $(3, 4)$ *et* $(2, 3)$ *sont des arcs de G*

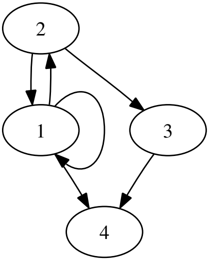


# Ensemble d'arcs

- Le symbole $\overrightarrow{\Gamma}$ désigne l'ensemble des arcs du graphe $(E, \Gamma)$

## Exemple

- $\overrightarrow{\Gamma} = \{(1,1),(1,2),(1,4),$
$(2,3),(2,1),(3,4)\}$

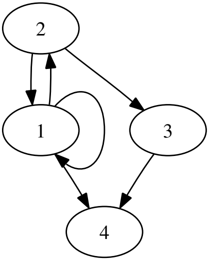


# Ensemble d'arcs

- Le symbole $\overrightarrow{\Gamma}$ désigne l'ensemble des arcs du graphe $(E, \Gamma)$
- $\overrightarrow{\Gamma}$ est un sous-ensemble du produit cartésien $E \times E = \{(x, y) \mid x \in E, y \in E\}$ : $\overrightarrow{\Gamma} \in \mathcal{P}(E \times E)$

## Exemple

- $\overrightarrow{\Gamma} = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,3), (2,1), (3,4)\}$

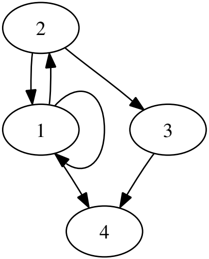


# Ensemble d'arcs

- Le symbole $\overrightarrow{\Gamma}$ désigne l'ensemble des arcs du graphe $(E, \Gamma)$
- $\overrightarrow{\Gamma}$ est un sous-ensemble du produit cartésien $E \times E = \{(x, y) \mid x \in E, y \in E\}$ : $\overrightarrow{\Gamma} \in \mathcal{P}(E \times E)$
- $\overrightarrow{\Gamma} = \{(x, y) \in E \times E \mid y \in \Gamma(x)\}$

## Exemple

- $\overrightarrow{\Gamma} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 1), (3, 4)\}$



# Représentations équivalentes d'un graphe

## Remarque

- *On peut représenter $G$ par $(E, \Gamma)$ ou par $(E, \overrightarrow{\Gamma})$ car les données de ces deux couples sont équivalentes :*

# Représentations équivalentes d'un graphe

## Remarque

- *On peut représenter $G$ par $(E, \Gamma)$ ou par $(E, \overrightarrow{\Gamma})$ car les données de ces deux couples sont équivalentes :*
  - *Plus précisément,* $\forall x, y \in E, y \in \Gamma(x) \Leftrightarrow (x, y) \in \overrightarrow{\Gamma}$

# Représentations équivalentes d'un graphe

## Remarque

- *On peut représenter G par* $(E, \Gamma)$ *ou par* $(E, \overrightarrow{\Gamma})$ *car les données de ces deux couples sont équivalentes :*
  - *Plus précisément,* $\forall x, y \in E, y \in \Gamma(x) \Leftrightarrow (x, y) \in \overrightarrow{\Gamma}$
- *Le couple* $(E, \overrightarrow{\Gamma})$ *est aussi appelé un graphe*

# Représentations équivalentes d'un graphe

## Remarque

- *On peut représenter $G$ par $(E, \Gamma)$ ou par $(E, \overrightarrow{\Gamma})$ car les données de ces deux couples sont équivalentes :*
  - *Plus précisément, $\forall x, y \in E, y \in \Gamma(x) \Leftrightarrow (x, y) \in \overrightarrow{\Gamma}$*
- *Le couple $(E, \overrightarrow{\Gamma})$ est aussi appelé un graphe*

## Notation

- *On pose $n = |E|$ et $m = |\overrightarrow{\Gamma}|$*

# Représentations équivalentes d'un graphe

## Remarque

- *On peut représenter $G$ par* $(E, \Gamma)$ *ou par* $(E, \overrightarrow{\Gamma})$ *car les données de ces deux couples sont équivalentes :*
  - *Plus précisément,* $\forall x, y \in E, y \in \Gamma(x) \Leftrightarrow (x, y) \in \overrightarrow{\Gamma}$
- *Le couple* $(E, \overrightarrow{\Gamma})$ *est aussi appelé un graphe*

## Notation

- *On pose* $n = |E|$ *et* $m = |\overrightarrow{\Gamma}|$
- *La taille du graphe* $G = (E, \Gamma)$ *est la somme* $n + m$

# Exercice : Union de graphes

- Soit $E = \{a, b, c, d, e\}$,
- Soit $\overrightarrow{\Gamma_1} = \{(a, c), (c, d), (d, e)\}$
- Soit $\overrightarrow{\Gamma_2} = \{(b, a), (a, d), (d, c), (c, e)\}$
- Soit $\overrightarrow{\Gamma_3} = \overrightarrow{\Gamma_1} \cup \overrightarrow{\Gamma_2}$

# Exercice : Union de graphes

- Soit $E = \{a, b, c, d, e\}$,
- Soit $\overrightarrow{\Gamma_1} = \{(a, c), (c, d), (d, e)\}$
- Soit $\overrightarrow{\Gamma_2} = \{(b, a), (a, d), (d, c), (c, e)\}$
- Soit $\overrightarrow{\Gamma_3} = \overrightarrow{\Gamma_1} \cup \overrightarrow{\Gamma_2}$
- Que valent $\Gamma_1(a)$, $\Gamma_2(a)$, $\Gamma_3(a)$, $\Gamma_1(b)$, $\Gamma_2(b)$, $\Gamma_3(b)$, $\Gamma_1(d)$, $\Gamma_2(d)$, et $\Gamma_3(d)$ ?

# Exercice : Union de graphes

- Soit $E = \{a, b, c, d, e\}$,
- Soit $\overrightarrow{\Gamma_1} = \{(a, c), (c, d), (d, e)\}$
- Soit $\overrightarrow{\Gamma_2} = \{(b, a), (a, d), (d, c), (c, e)\}$
- Soit $\overrightarrow{\Gamma_3} = \overrightarrow{\Gamma_1} \cup \overrightarrow{\Gamma_2}$
- Que valent $\Gamma_1(a)$, $\Gamma_2(a)$, $\Gamma_3(a)$, $\Gamma_1(b)$, $\Gamma_2(b)$, $\Gamma_3(b)$, $\Gamma_1(d)$, $\Gamma_2(d)$, et $\Gamma_3(d)$ ?

*Propriété.* Quels que soient $\overrightarrow{\Gamma_1}, \overrightarrow{\Gamma_2}, \overrightarrow{\Gamma_3} \in \mathcal{P}(E \times E)$ tels que $\overrightarrow{\Gamma_3} = \overrightarrow{\Gamma_1} \cup \overrightarrow{\Gamma_2}$ :
$\forall x \in E$, $\Gamma_3(x) = \Gamma_1(x) \cup \Gamma_2(X)$

# Plan de la séance

# Représentations des graphes en mémoire

- Par un ensemble de sommets et un ensemble d'arcs (représentation $(E, \overrightarrow{\Gamma})$)
- Par un ensemble des sommets et des ensembles de successeurs (représentation $(E, \Gamma)$)

# Représentations des graphes en mémoire

- Par un ensemble de sommets et un ensemble d'arcs (représentation $(E, \overrightarrow{\Gamma})$)
- Par un ensemble des sommets et des ensembles de successeurs (représentation $(E, \Gamma)$)

## Problème

- *Représentation d'un ensemble en mémoire*
- *Représentation d'un sous-ensemble $S$ de $E = \{1, \ldots, n\}$*

# Représentation de $S$ par une liste chaînée (LC)

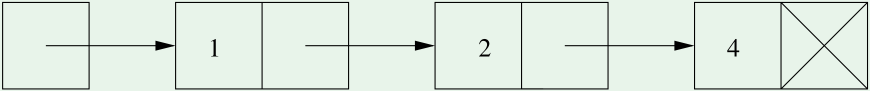
- La LC est composée de maillons
- Chaque maillon représente un élément de $S$
- Chaque maillon contient deux champs
  1. Un élément de $S$
  2. Un pointeur vers le maillon suivant dans la LC

# Représentation de $S$ par une liste chaînée (LC)

- La LC est composée de maillons
- Chaque maillon représente un élément de $S$
- Chaque maillon contient deux champs
  1. Un élément de $S$
  2. Un pointeur vers le maillon suivant dans la LC

## Exemple

- *Soit* $S = \{1, 2, 4\}$



# Tableau de booléens

- Un tableau de booléens de taille $n$
- La case $i$ vaut VRAI (1) si $i \in S$
- La case $i$ vaut FAUX (0) si $i \notin S$

# Tableau de booléens

- Un tableau de booléens de taille $n$
- La case $i$ vaut $\textsc{Vrai}$ (1) si $i \in S$
- La case $i$ vaut $\textsc{Faux}$ (0) si $i \notin S$

## Exemple

- *Soit* $E = \{1, \ldots, 9\}$, *et* $S = \{1, 2, 4\}$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

# Opérations sur un ensemble

| Opération | | LC | TB |
|---|---|---|---|
| Initialisation | $S = \emptyset$ | $O(1)$ | $O(n)$ |
| Existence/sélection | $\exists\, x \in S?$ | $O(1)$ | $O(n)$ |
| Recherche | $x \in S?$ | $O(n)$ | $O(1)$ |
| Insertion | $S = S \cup \{x\}$ | $O(n)/O(1)$ | $O(1)$ |
| Suppression | $S = S \setminus \{x\}$ | $O(1)$ | $O(1)$ |
| Parcours | $\forall x \in S$ | $O(n)$ | $O(n)$ |

# Représentation d'un graphe $(E, \overrightarrow{\Gamma})$

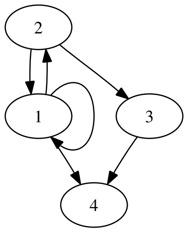
- $E$ est composé des entiers de 1 à $n$
- $\overrightarrow{\Gamma}$ est représenté par 2 tableaux $I$ et $T$ de taille $m = |\overrightarrow{\Gamma}|$
- $I[i]$ est le sommet initial de l'arc numéro $i$
- $T[i]$ est le sommet terminal de l'arc numéro $i$

# Représentation d'un graphe $(E, \overrightarrow{\Gamma})$

- $E$ est composé des entiers de 1 à $n$
- $\overrightarrow{\Gamma}$ est représenté par 2 tableaux $I$ et $T$ de taille $m = |\overrightarrow{\Gamma}|$
- $I[i]$ est le sommet initial de l'arc numéro $i$
- $T[i]$ est le sommet terminal de l'arc numéro $i$

## Exemple

- *Donner les tableaux $I$ et $T$ pour le graphe suivant*



# Représentation d'un graphe $(E, \Gamma)$

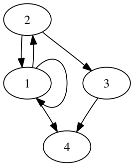
- Par un tableau $T$ de listes chaînées - TLC
  - $T[i]$ pointe sur une liste chaînée représentant l'ensemble $\Gamma(i)$ des successeurs du sommet $i$

# Représentation d'un graphe $(E, \Gamma)$

- Par un tableau $T$ de listes chaînées - TLC
  - $T[i]$ pointe sur une liste chaînée représentant l'ensemble $\Gamma(i)$ des successeurs du sommet $i$

## Exemple

- *Donner les représentations du graphe suivant par TLC*

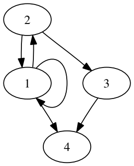


# Représentation d'un graphe $(E, \Gamma)$

- Par un tableau $T$ de listes chaînées - TLC
  - $T[i]$ pointe sur une liste chaînée représentant l'ensemble $\Gamma(i)$ des successeurs du sommet $i$
- Par une matrice $M$ de booléens - MB
  - Tableau bidimensionnel de booléens
  - La ligne $i$ est la représentation de $\Gamma(i)$ par un tableau de booléens
  - $M[i][j] = 1 \Leftrightarrow j \in \Gamma(i)$

## Exemple

- *Donner les représentations du graphe suivant par TLC*

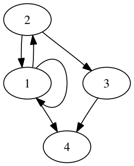


# Représentation d'un graphe $(E, \Gamma)$

- Par un tableau $T$ de listes chaînées - TLC
  - $T[i]$ pointe sur une liste chaînée représentant l'ensemble $\Gamma(i)$ des successeurs du sommet $i$
- Par une matrice $M$ de booléens - MB
  - Tableau bidimensionnel de booléens
  - La ligne $i$ est la représentation de $\Gamma(i)$ par un tableau de booléens
  - $M[i][j] = 1 \Leftrightarrow j \in \Gamma(i)$

## Exemple

- *Donner les représentations du graphe suivant par TLC et MB*



# Plan de la séance

# Symétrique d'un graphe

## Définition

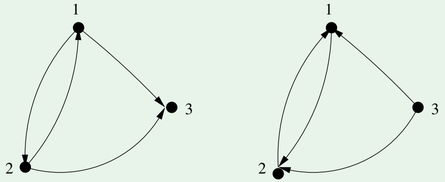
- *Soit* $G = (E, \Gamma)$ *un graphe*
- *Le* symétrique *de* $G$ *est le graphe* $G^{-1} = (E, \Gamma^{-1})$ *défini par*
  - $\forall x \in E$, $\Gamma^{-1}(x) = \{y \in E \mid x \in \Gamma(y)\}$

# Symétrique d'un graphe

## Définition

- *Soit $G = (E, \Gamma)$ un graphe*
- *Le* symétrique *de $G$ est le graphe $G^{-1} = (E, \Gamma^{-1})$ défini par*
  - $\forall x \in E$, $\Gamma^{-1}(x) = \{y \in E \mid x \in \Gamma(y)\}$

## Exemple




Graphe G    Symétrique de G

# Application $\Gamma^{-1}$

## Remarque

- $\Gamma^{-1}$ *est l'application qui met en correspondance tout sommet du graphe à l'ensemble de ses prédécesseurs*
- $y \in \Gamma^{-1}(x) \Leftrightarrow x \in \Gamma(y)$

# Algorithme de calcul du symétrique

**Algorithme SYM_1 (Données :** $(E, \Gamma)$ ; **Résultat** : $\Gamma^{-1}$)

1 **Pour chaque** $x \in E$ **Faire** $\Gamma^{-}1(x) := \emptyset$ ;

2 **Pour chaque** $y \in E$ **Faire**

  3 **Pour chaque** $x \in \Gamma(x)$ **Faire**

    4 $\Gamma^{-1}(x) := \Gamma^{-1}(x) \cup \{y\}$ ;

# Algorithme de calcul du symétrique

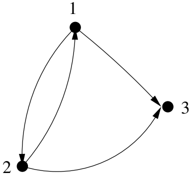
**Algorithme SYM_1 (Données :** $(E, \Gamma)$ ; **Résultat** : $\Gamma^{-1}$)

**Pour chaque** $x \in E$ **Faire** $\Gamma^{-}1(x) := \emptyset$ ;

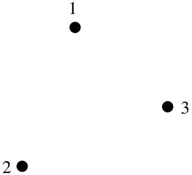
**Pour chaque** $y \in E$ **Faire**

  **Pour chaque** $x \in \Gamma(x)$ **Faire**

    $\Gamma^{-1}(x) := \Gamma^{-1}(x) \cup \{y\}$ ;




$(E, \Gamma)$

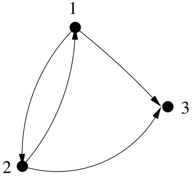



$(E, \Gamma^{-1})$

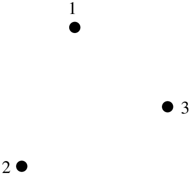
# Algorithme de calcul du symétrique

**Algorithme SYM_1 (Données :** $(E, \Gamma)$ ; **Résultat** : $\Gamma^{-1}$)

**Pour chaque** $x \in E$ **Faire** $\Gamma^-1(x) := \emptyset$ ;
**Pour chaque** $y \in E$ **Faire**
  **Pour chaque** $x \in \Gamma(x)$ **Faire**
    $\Gamma^{-1}(x) := \Gamma^{-1}(x) \cup \{y\}$ ;




$(E, \Gamma)$
$y = 1$




$(E, \Gamma^{-1})$

# Algorithme de calcul du symétrique

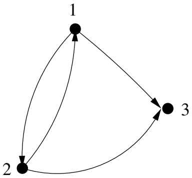
**Algorithme SYM_1 (Données :** $(E, \Gamma)$ ; **Résultat** : $\Gamma^{-1}$)

**Pour chaque** $x \in E$ **Faire** $\Gamma^{-}1(x) := \emptyset$ ;

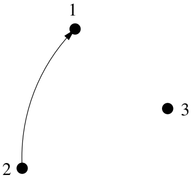
**Pour chaque** $y \in E$ **Faire**

  **Pour chaque** $x \in \Gamma(x)$ **Faire**

    $\Gamma^{-1}(x) := \Gamma^{-1}(x) \cup \{y\}$ ;




$(E, \Gamma)$
$y = 1$




$(E, \Gamma^{-1})$
$x = 2$

# Algorithme de calcul du symétrique

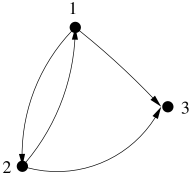
**Algorithme SYM_1 (Données :** $(E, \Gamma)$ ; **Résultat :** $\Gamma^{-1}$)

**Pour chaque** $x \in E$ **Faire** $\Gamma^{-}1(x) := \emptyset$ ;

**Pour chaque** $y \in E$ **Faire**

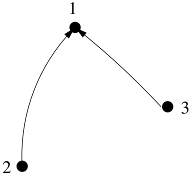
    **Pour chaque** $x \in \Gamma(x)$ **Faire**

        $\Gamma^{-1}(x) := \Gamma^{-1}(x) \cup \{y\}$ ;




$(E, \Gamma)$

$y = 1$



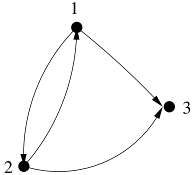

$(E, \Gamma^{-1})$

$x = 3$

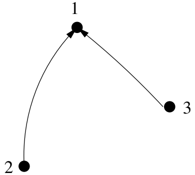
# Algorithme de calcul du symétrique

**Algorithme SYM_1 (Données :** $(E, \Gamma)$ ; **Résultat** : $\Gamma^{-1}$)

1 **Pour chaque** $x \in E$ **Faire** $\Gamma^{-}1(x) := \emptyset$ ;
2 **Pour chaque** $y \in E$ **Faire**
  3 **Pour chaque** $x \in \Gamma(x)$ **Faire**
    4 $\Gamma^{-1}(x) := \Gamma^{-1}(x) \cup \{y\}$ ;




$(E, \Gamma)$
$y = 2$

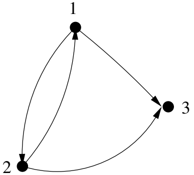



$(E, \Gamma^{-1})$

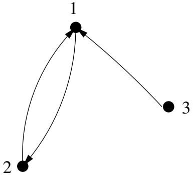
# Algorithme de calcul du symétrique

**Algorithme SYM_1 (Données :** $(E, \Gamma)$ ; **Résultat :** $\Gamma^{-1}$)

**Pour chaque** $x \in E$ **Faire** $\Gamma^{-}1(x) := \emptyset$ ;
**Pour chaque** $y \in E$ **Faire**
    **Pour chaque** $x \in \Gamma(x)$ **Faire**
        $\Gamma^{-1}(x) := \Gamma^{-1}(x) \cup \{y\}$ ;




$(E, \Gamma)$
$y = 2$

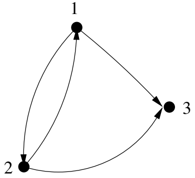



$(E, \Gamma^{-1})$
$x = 1$

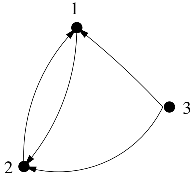
# Algorithme de calcul du symétrique

**Algorithme SYM_1 (Données :** $(E, \Gamma)$ ; **Résultat** : $\Gamma^{-1}$)

**Pour chaque** $x \in E$ **Faire** $\Gamma^{-}1(x) := \emptyset$ ;
**Pour chaque** $y \in E$ **Faire**
  **Pour chaque** $x \in \Gamma(x)$ **Faire**
    $\Gamma^{-1}(x) := \Gamma^{-1}(x) \cup \{y\}$ ;




$(E, \Gamma)$
$y = 2$




$(E, \Gamma^{-1})$
$x = 3$

# Algorithme de calcul du symétrique

**Algorithme SYM_1 (Données :** $(E, \Gamma)$ ; **Résultat** : $\Gamma^{-1}$)

1 **Pour chaque** $x \in E$ **Faire** $\Gamma^{-}1(x) := \emptyset$ ;

2 **Pour chaque** $y \in E$ **Faire**

  3 **Pour chaque** $x \in \Gamma(x)$ **Faire**

    4 $\Gamma^{-1}(x) := \Gamma^{-1}(x) \cup \{y\}$ ;

**Complexité (Si $\Gamma$ et $\Gamma^{-1}$ sont implémentés par MB)**

- *Ligne 1 :* $O(n^2)$

# Algorithme de calcul du symétrique

**Algorithme SYM_1 (Données :** $(E, \Gamma)$ ; **Résultat** : $\Gamma^{-1}$)

1 **Pour chaque** $x \in E$ **Faire** $\Gamma^{-}1(x) := \emptyset$ ;

2 **Pour chaque** $y \in E$ **Faire**

  3 **Pour chaque** $x \in \Gamma(x)$ **Faire**

    4 $\Gamma^{-1}(x) := \Gamma^{-1}(x) \cup \{y\}$ ;

Complexité (Si $\Gamma$ et $\Gamma^{-1}$ sont implémentés par MB)

- *Ligne 1 :* $O(n^2)$
- *Ligne 2 :* $O(n)$

# Algorithme de calcul du symétrique

**Algorithme SYM_1 (Données :** $(E, \Gamma)$ ; **Résultat** : $\Gamma^{-1}$)

1 **Pour chaque** $x \in E$ **Faire** $\Gamma^{-}1(x) := \emptyset$ ;

2 **Pour chaque** $y \in E$ **Faire**

  3 **Pour chaque** $x \in \Gamma(x)$ **Faire**

    4 $\Gamma^{-1}(x) := \Gamma^{-1}(x) \cup \{y\}$ ;

Complexité (Si $\Gamma$ et $\Gamma^{-1}$ sont implémentés par MB)

- *Ligne 1 :* $O(n^2)$
- *Ligne 2 :* $O(n)$
- *Ligne 3 :* $O(n^2)$

# Algorithme de calcul du symétrique

## Algorithme SYM_1 (Données : $(E, \Gamma)$ ; Résultat : $\Gamma^{-1}$)

1 **Pour chaque** $x \in E$ **Faire** $\Gamma^{-}1(x) := \emptyset$ ;

2 **Pour chaque** $y \in E$ **Faire**

  3 **Pour chaque** $x \in \Gamma(x)$ **Faire**

    4 $\Gamma^{-1}(x) := \Gamma^{-1}(x) \cup \{y\}$ ;

## Complexité (Si $\Gamma$ et $\Gamma^{-1}$ sont implémentés par MB)

- *Ligne 1 :* $O(n^2)$
- *Ligne 2 :* $O(n)$
- *Ligne 3 :* $O(n^2)$
- *Ligne 4 :* $O(m)$

# Algorithme de calcul du symétrique

## Algorithme SYM_1 (Données : $(E, \Gamma)$ ; Résultat : $\Gamma^{-1}$)

1 **Pour chaque** $x \in E$ **Faire** $\Gamma^{-}1(x) := \emptyset$ ;

2 **Pour chaque** $y \in E$ **Faire**

  3 **Pour chaque** $x \in \Gamma(x)$ **Faire**

    4 $\Gamma^{-1}(x) := \Gamma^{-1}(x) \cup \{y\}$ ;

## Complexité (Si $\Gamma$ et $\Gamma^{-1}$ sont implémentés par MB)

- *Ligne 1 :* $O(n^2)$
- *Ligne 2 :* $O(n)$
- *Ligne 3 :* $O(n^2)$
- *Ligne 4 :* $O(m)$
- **Complexité globale** $O(n^2 + m) = O(n^2)$

# Algorithme de calcul du symétrique

**Algorithme SYM_1 (Données :** $(E, \Gamma)$ ; **Résultat** : $\Gamma^{-1}$)

1 **Pour chaque** $x \in E$ **Faire** $\Gamma^{-}1(x) := \emptyset$ ;

2 **Pour chaque** $y \in E$ **Faire**

  3 **Pour chaque** $x \in \Gamma(x)$ **Faire**

    4 $\Gamma^{-1}(x) := \Gamma^{-1}(x) \cup \{y\}$ ;

Complexité (Si $\Gamma$ et $\Gamma^{-1}$ sont implémentés par TLC)

- *Ligne 1* : $O(n)$
- *Ligne 2* : $O(n)$
- *Ligne 3* : $O(n+m)$
- *Ligne 4* : $O(m)$
- **Complexité globale** $O(n+m)$

# Algorithme de calcul du symétrique

**Algorithme SYM_2 (Données :** $(E, \overrightarrow{\Gamma})$ ; **Résultat** : $\overrightarrow{\Gamma^{-1}}$)

$\overrightarrow{\Gamma^{-1}} := \emptyset$ ;

**Pour chaque** $(x, y) \in \overrightarrow{\Gamma}$ **Faire**

    $\Gamma^{-1} := \Gamma^{-1} \cup \{(y, x)\}$ ;

# Algorithme de calcul du symétrique

**Algorithme SYM_2 (Données :** $(E, \overrightarrow{\Gamma})$ ; **Résultat** : $\overrightarrow{\Gamma^{-1}}$)

1 $\overrightarrow{\Gamma^{-1}} := \emptyset$ ;

2 **Pour chaque** $(x, y) \in \overrightarrow{\Gamma}$ **Faire**

  3 $\Gamma^{-1} := \Gamma^{-1} \cup \{(y, x)\}$ ;

Complexité (Si $\Gamma$ et $\Gamma^{-1}$ sont implémentés par MB)

# Algorithme de calcul du symétrique

**Algorithme SYM_2 (Données :** $(E, \overrightarrow{\Gamma})$ ; **Résultat** : $\overrightarrow{\Gamma^{-1}}$)

1 $\overrightarrow{\Gamma^{-1}} := \emptyset$ ;

2 **Pour chaque** $(x, y) \in \overrightarrow{\Gamma}$ **Faire**

  3 $\Gamma^{-1} := \Gamma^{-1} \cup \{(y, x)\}$ ;

Complexité (Si $\Gamma$ et $\Gamma^{-1}$ sont implémentés par MB)

- *Ligne 1 :* $O(1)$

# Algorithme de calcul du symétrique

**Algorithme SYM_2 (Données :** $(E, \overrightarrow{\Gamma})$ ; **Résultat** : $\overrightarrow{\Gamma^{-1}}$)

1 $\overrightarrow{\Gamma^{-1}} := \emptyset$ ;

2 **Pour chaque** $(x, y) \in \overrightarrow{\Gamma}$ **Faire**

  3 $\Gamma^{-1} := \Gamma^{-1} \cup \{(y, x)\}$ ;

Complexité (Si $\Gamma$ et $\Gamma^{-1}$ sont implémentés par MB)

- *Ligne 1 :* $O(1)$
- *Ligne 2 :* $O(m)$

# Algorithme de calcul du symétrique

**Algorithme SYM_2 (Données :** $(E, \overrightarrow{\Gamma})$ ; **Résultat** : $\overrightarrow{\Gamma^{-1}}$)

1 $\overrightarrow{\Gamma^{-1}} := \emptyset$ ;

2 **Pour chaque** $(x, y) \in \overrightarrow{\Gamma}$ **Faire**

   3 $\Gamma^{-1} := \Gamma^{-1} \cup \{(y, x)\}$ ;

## Complexité (Si $\Gamma$ et $\Gamma^{-1}$ sont implémentés par MB)

- *Ligne 1 :* $O(1)$
- *Ligne 2 :* $O(m)$
- *Ligne 3 :* $O(m)$

# Algorithme de calcul du symétrique

**Algorithme SYM_2 (Données :** $(E, \overrightarrow{\Gamma})$ ; **Résultat :** $\overrightarrow{\Gamma^{-1}}$)

1 $\overrightarrow{\Gamma^{-1}} := \emptyset$ ;

2 **Pour chaque** $(x, y) \in \overrightarrow{\Gamma}$ **Faire**

  3 $\Gamma^{-1} := \Gamma^{-1} \cup \{(y, x)\}$ ;

Complexité (Si $\Gamma$ et $\Gamma^{-1}$ sont implémentés par MB)

- *Ligne 1 :* $O(1)$
- *Ligne 2 :* $O(m)$
- *Ligne 3 :* $O(m)$
- **Complexité globale** $O(m)$

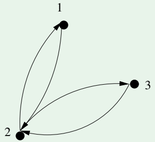
# Plan de la séance

# Graphes symétriques et asymétriques

## Définition

- *Un graphe* $G = (E, \Gamma)$ *est un* graphe symétrique *si* $\overrightarrow{\Gamma^{-1}} = \overrightarrow{\Gamma}$
  - *Autrement dit,* $G$ *est un graphe symétrique si :* $\forall x, y \in E$
    $x \in \Gamma(y) \Leftrightarrow y \in \Gamma(x)$

## Exemple



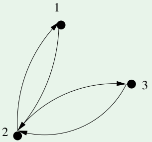

*Graphe symétrique*

# Graphes symétriques et asymétriques

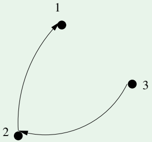
## Définition

- *Un graphe* $G = (E, \Gamma)$ *est un* graphe symétrique *si* $\overrightarrow{\Gamma^{-1}} = \overrightarrow{\Gamma}$
  - *Autrement dit,* $G$ *est un graphe symétrique si :* $\forall x, y \in E$ $x \in \Gamma(y) \Leftrightarrow y \in \Gamma(x)$
- *Un graphe* $G = (E, \Gamma)$ *est* asymétrique *si* $\overrightarrow{\Gamma} \cap \overrightarrow{\Gamma^{-1}} = \emptyset$
  - $G$ *est asymétrique si :* $\forall x, y \in E$, $(x, y) \in \overrightarrow{\Gamma} \implies (y, x) \notin \overrightarrow{\Gamma}$

## Exemple




*Graphe symétrique*



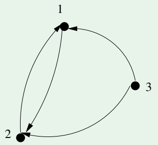

*Graphe asymétrique*

# Fermeture symétrique

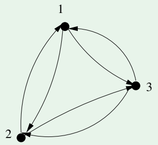
## Définition

- *Soit* $G = (E, \overrightarrow{\Gamma})$ *un graphe*
- *La* fermeture symétrique *de* $G$ *est le graphe* $G_s = (E, \overrightarrow{\Gamma_s})$ *défini par* $\overrightarrow{\Gamma_s} = \overrightarrow{\Gamma} \cup \overrightarrow{\Gamma^{-1}}$

## Exemple




*Graphe G*




*Fermeture symétrique de G*

# Graphe non-orienté

## Définition

- *Un* graphe non-orienté *est un couple* $(E, \overline{\Gamma})$ *où* $E$ *est un ensemble fini et où* $\overline{\Gamma}$ *est un sous-ensemble de* $\{\ \{x, y\} \mid x \in E,\ y \in E\ \}$

# Graphe non-orienté

## Définition

- *Un* graphe non-orienté *est un couple* $(E, \overline{\Gamma})$ *où* $E$ *est un ensemble fini et où* $\overline{\Gamma}$ *est un sous-ensemble de* $\{\ \{x, y\} \mid x \in E,\ y \in E\ \}$

## Exemple

- $E = \{a, b, c, d\}$ *et* $\overline{\Gamma} = \{\ \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}\ \}$

# Graphe non-orienté

## Définition

- *Un* graphe non-orienté *est un couple* $(E, \overline{\Gamma})$ *où* $E$ *est un ensemble fini et où* $\overline{\Gamma}$ *est un sous-ensemble de* $\{\ \{x, y\} \mid x \in E,\ y \in E\ \}$
- *Tout élément de* $\overline{\Gamma}$ *est une* arête *du graphe*

## Exemple

- $E = \{a, b, c, d\}$ *et* $\overline{\Gamma} = \{\ \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}\ \}$

# Graphe non-orienté

## Définition

- *Un* graphe non-orienté *est un couple* $(E, \overline{\Gamma})$ *où* $E$ *est un ensemble fini et où* $\overline{\Gamma}$ *est un sous-ensemble de* $\{\ \{x, y\} \mid x \in E,\ y \in E\ \}$
- *Tout élément de* $\overline{\Gamma}$ *est une* arête *du graphe*
- *L'arête* $\{x, y\} \in \overline{\Gamma}$ *est* adjacente *aux sommets* $x$ *et* $y$

## Exemple

- $E = \{a, b, c, d\}$ *et* $\overline{\Gamma} = \{\ \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}\ \}$

# Graphes non-orientés & graphes symétriques

- Soit $(E, \overline{\Gamma})$ un graphe non -orienté,
- On associe à $\overline{\Gamma}$ l'application $\Gamma_{n.o} : E \to \mathcal{P}(E)$ définie par $\Gamma_{n.o}(x) = \left\{y \in E \mid \{x, y\} \in \overline{\Gamma}\right\}$

# Graphes non-orientés & graphes symétriques

- Soit $(E, \overline{\Gamma})$ un graphe non -orienté,
- On associe à $\overline{\Gamma}$ l'application $\Gamma_{n.o} : E \to \mathcal{P}(E)$ définie par $\Gamma_{n.o}(x) = \left\{ y \in E \mid \{x, y\} \in \overline{\Gamma} \right\}$

## Remarque

- *Le graphe* $(E, \Gamma_{n.o})$ *est symétrique*

# Graphes non-orientés & graphes symétriques

- Soit $(E, \overline{\Gamma})$ un graphe non -orienté,
- On associe à $\overline{\Gamma}$ l'application $\Gamma_{n.o} : E \to \mathcal{P}(E)$ définie par $\Gamma_{n.o}(x) = \left\{ y \in E \mid \{x, y\} \in \overline{\Gamma} \right\}$

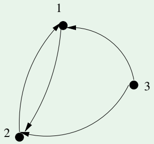
## Remarque

- *Le graphe $(E, \Gamma_{n.o})$ est symétrique*
- *La donnée d'un graphe symétrique est équivalente à la donnée d'un graphe non-orienté*

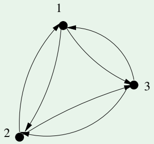
# Graphe non-orienté associé à un graphe orienté

- On associe à tout graphe orienté $(E, \Gamma)$, le graphe non-orienté $(E, \overline{\Gamma})$ défini par
  - $\{x, y\} \in \overline{\Gamma} \Leftrightarrow (x, y) \in \overrightarrow{\Gamma}$ ou $(y, x) \in \overrightarrow{\Gamma}$

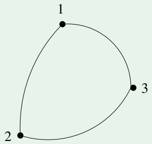
## Exemple




*un graphe*




*sa fermeture symétrique*



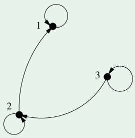

*son graphe non-orienté associé*

# Graphes Réflexifs

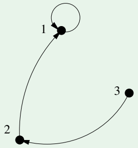
## Définition

- *Soit* $G = (E, \Gamma)$ *un graphe*
- $G$ *est un* graphe réflexif *si* $\forall x \in E$, $x \in \Gamma(x)$
- $G$ *est un* graphe antiréflexif *si* $\forall x \in E$, $x \notin \Gamma(x)$
- *Tout arc* $(x, x) \in \Gamma$ *est appelé une* boucle de $G$

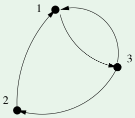
## Exemple




*Graphe réflexif*




*Graphe non réflexif et non antiréflexif*



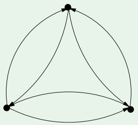

*Graphe antiréflexif (sans boucle)*

# Graphe complet

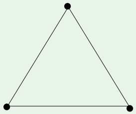
## Définition

- *Un graphe* $(E, \overrightarrow{\Gamma})$ *est un* graphe complet *si pour tout couple de sommets* $(x, y)$ *distincts, on a* $(x, y) \in \overrightarrow{\Gamma}$

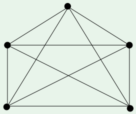
## Exemple



*Graphe complet (orienté) sur trois sommets*



*Graphe complet (non-orienté) sur trois sommets*



*Graphe complet (non-orienté) sur cinq sommets*

# Opérateur

- $E$ désigne un ensemble quelconque
- Soit $X \subseteq E$, on désigne par $\overline{X}$, le *complémentaire de $X$*
  - $\overline{X} = E \setminus X$
  - On remarque que $\overline{(\overline{X})} = X$

# Opérateur

- $E$ désigne un ensemble quelconque
- Soit $X \subseteq E$, on désigne par $\overline{X}$, le *complémentaire de $X$*
  - $\overline{X} = E \setminus X$
  - On remarque que $\overline{(\overline{X})} = X$

## Définition

- *Un opérateur (sur $E$) est une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$*
- *Dans la suite $\psi$ désigne un opérateur sur $E$*

# Dual

## Définition

- *Le* dual *de* $\psi$ *est l'opérateur* $\psi^\star$ *défini par*
  - $\forall X \subseteq E,\ \psi^\star(X) = \overline{\psi(\overline{X})}$

# Dual

## Définition

- *Le* dual *de* $\psi$ *est l'opérateur* $\psi^\star$ *défini par*
  - $\forall X \subseteq E,\ \psi^\star(X) = \overline{\psi(\overline{X})}$

## Propriété

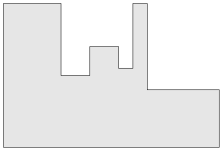
- $\psi^{\star\star} = (\psi^\star)^\star = \psi$

# Dual : Exemple 1

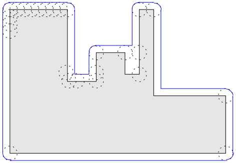
- Soit $E$ un espace métrique, c'est à dire un ensemble $E$ muni d'une certaine distance $d$
- Soit $\psi_r$ l'opérateur défini par
  - $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $\psi_r(X) = \{x \in E \mid \exists y \in X, d(x, y) \leq r\}$

# Dual : Exemple 1

- Soit $E$ un espace métrique, c'est à dire un ensemble $E$ muni d'une certaine distance $d$
- Soit $\psi_r$ l'opérateur défini par
  - $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $\psi_r(X) = \{x \in E \mid \exists y \in X, d(x,y) \leq r\}$



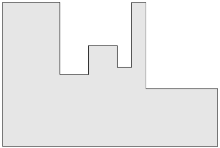
$X$



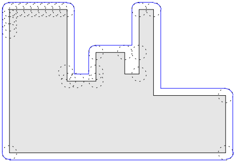
$\psi_r(X)$

# Dual : Exemple 1

- Soit $E$ un espace métrique, c'est à dire un ensemble $E$ muni d'une certaine distance $d$
- Soit $\psi_r$ l'opérateur défini par
  - $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $\psi_r(X) = \{x \in E \mid \exists y \in X, d(x,y) \leq r\}$
- On voit que $\psi_r^\star(X) = \{x \in E \mid \forall y \in \overline{X}, d(x,y) > r\}$



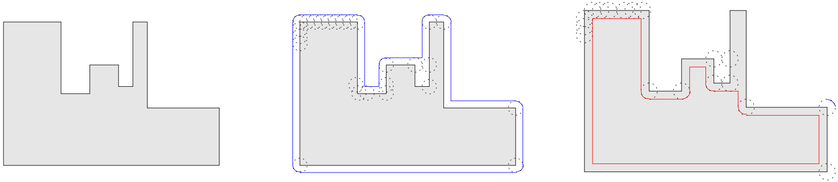
$X$



$\psi_r(X)$

# Dual : Exemple 1

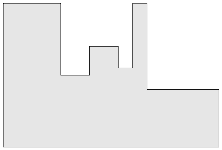
- Soit $E$ un espace métrique, c'est à dire un ensemble $E$ muni d'une certaine distance $d$
- Soit $\psi_r$ l'opérateur défini par
  - $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $\psi_r(X) = \{x \in E \mid \exists y \in X, d(x,y) \leq r\}$
- On voit que $\psi_r^\star(X) = \{x \in E \mid \forall y \in \overline{X}, d(x,y) > r\}$



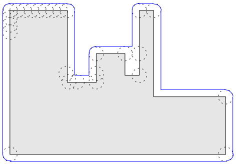
$X$ $\psi_r(X)$ $\psi_r^\star(X)$

# Dual : Exemple 1

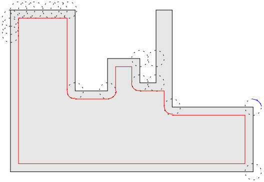
- Soit $E$ un espace métrique, c'est à dire un ensemble $E$ muni d'une certaine distance $d$
- Soit $\psi_r$ l'opérateur défini par
  - $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $\psi_r(X) = \{x \in E \mid \exists y \in X, d(x,y) \leq r\}$
- On voit que $\psi_r^\star(X) = \{x \in E \mid \forall y \in \overline{X}, d(x,y) > r\}$
- L'ensemble $\psi_r(X)$ peut être considéré comme un voisinage de $X$ (de taille $r$) et $\psi^\star(X)$ comme un intérieur de $X$



$X$



$\psi_r(X)$



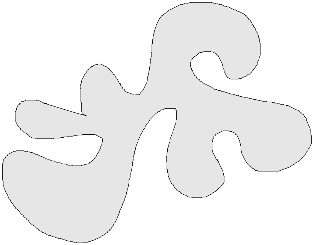
$\psi_r^\star(X)$

# Dual : exemple 2 - enveloppe convexe

- Soit $E$ le plan euclidien $E = \mathbb{R}^2$.
- Soit $X \subseteq E$ l'*enveloppe convexe de $X$* est l'ensemble
  - $ec(X) = \cup\{xy \mid x \in X, y \in X\}$
  - $xy$ désignant le segment de droite dont les extrémités sont $x$ et $y$

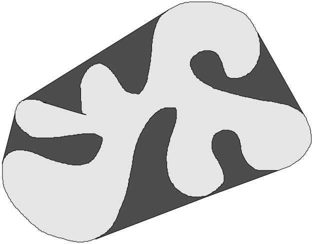
# Dual : exemple 2 - enveloppe convexe

- Soit $E$ le plan euclidien $E = \mathbb{R}^2$.
- Soit $X \subseteq E$ l'*enveloppe convexe de $X$* est l'ensemble
  - $ec(X) = \cup\{xy \mid x \in X, y \in X\}$
  - $xy$ désignant le segment de droite dont les extrémités sont $x$ et $y$



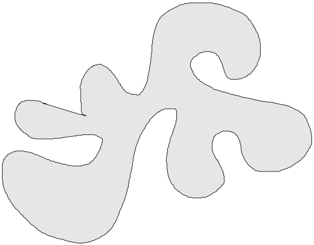
# Dual : exemple 2 - enveloppe convexe

- Soit $E$ le plan euclidien $E = \mathbb{R}^2$.
- Soit $X \subseteq E$ l'*enveloppe convexe de $X$* est l'ensemble
  - $ec(X) = \cup\{xy \mid x \in X, y \in X\}$
  - $xy$ désignant le segment de droite dont les extrémités sont $x$ et $y$



# Dual : exemple 2 - enveloppe convexe

- Soit $E$ le plan euclidien $E = \mathbb{R}^2$.
- Soit $X \subseteq E$ l'*enveloppe convexe de $X$* est l'ensemble
  - $ec(X) = \cup\{xy \mid x \in X, y \in X\}$
  - $xy$ désignant le segment de droite dont les extrémités sont $x$ et $y$



## Propriété

- *Si $X \subseteq E$ est borné , alors $ec^{\star}(X) = \emptyset$.*
- *La réciproque est-elle vraie ?*

NB : $X$ borné $\Leftrightarrow$ $\exists$ un disque de rayon fini contenant $X$

# Opérateur extensif

## Définition

- *Un opérateur* $\psi$ *est* extensif *si*
  - $\forall X \subseteq E$, $X \subseteq \psi(X)$
- *Un opérateur* $\psi$ *est* anti-extensif *si*
  - $\forall X \subseteq E$, $\psi(X) \subseteq X$

# Opérateur extensif

## Définition

- *Un opérateur $\psi$ est* extensif *si*
  - $\forall X \subseteq E,\ X \subseteq \psi(X)$
- *Un opérateur $\psi$ est* anti-extensif *si*
  - $\forall X \subseteq E,\ \psi(X) \subseteq X$

## Propriété

- *Un opérateur $\psi$ est extensif si et seulement si $\psi^\star$ est anti-extensif*

*Preuve.* $\psi$ extensif $\Leftrightarrow \underline{\forall X \subseteq E}, \overline{X} \subseteq \psi(\overline{X})$

Donc, $\forall X \subseteq E,\ X \supseteq \overline{\psi(\overline{X})}$, ce qui signifie que $\psi^\star$ est anti-extensif. □

# Opérateurs croissants et idempotents

## Définition

- *Un opérateur* $\psi$ *est* croissant *si*
  - $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E),\ X \subseteq Y \implies \psi(X) \subseteq \psi(Y)$
- *Un opérateur* $\psi$ *est* idempotent *si*
  - $\forall X \in \mathcal{P}(E),\ \psi(\psi(X)) = \psi(X)$

# Opérateurs croissants et idempotents

## Définition

- *Un opérateur* $\psi$ *est* croissant *si*
  - $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E),\ X \subseteq Y \implies \psi(X) \subseteq \psi(Y)$
- *Un opérateur* $\psi$ *est* idempotent *si*
  - $\forall X \in \mathcal{P}(E),\ \psi(\psi(X)) = \psi(X)$

## Propriété

- $\psi$ *est croissant* $\Leftrightarrow$ $\psi^\star$ *est croissant*
- $\psi$ *est idempotent* $\Leftrightarrow$ $\psi^\star$ *est idempotent*

*Exemple.* Les opérateurs des exemples précédents sont-ils extensifs, croissants et idempotents ?

# Dilatation et érosion algébriques

## Définition

- *Soient $\delta$ et $\epsilon$ deux opérateurs*
- *$\delta$ est une* dilatation (algébrique) *s'il commute avec l'union :*
  - $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E)$, $\delta(X) \cup \delta(Y) = \delta(X \cup Y)$
- *$\epsilon$ est une* érosion (algébrique) *s'il commute avec l'intersection :*
  - $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E)$, $\epsilon(X) \cap \epsilon(Y) = \epsilon(X \cap Y)$

# Dilatation et érosion algébriques

## Définition

- *Soient $\delta$ et $\epsilon$ deux opérateurs*
- *$\delta$ est une* dilatation (algébrique) *s'il commute avec l'union :*
  - $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E)$, $\delta(X) \cup \delta(Y) = \delta(X \cup Y)$
- *$\epsilon$ est une* érosion (algébrique) *s'il commute avec l'intersection :*
  - $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E)$, $\epsilon(X) \cap \epsilon(Y) = \epsilon(X \cap Y)$

## Propriété

- *$\delta$ est une dilatation si et seulement si $\delta^\star$ est une érosion*
- *$\delta$ et $\epsilon$ sont croissants*

# Exemple

- L'opérateur $\psi_r$ de voisinage de taille $r$ est une dilatation

# Exemple

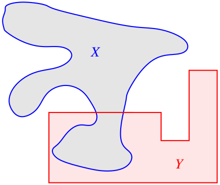
- L'opérateur $\psi_r$ de voisinage de taille $r$ est une dilatation
- Donc, l'opérateur d'intérieur $\psi_r^\star$ est une érosion

# Exemple

- L'opérateur $\psi_r$ de voisinage de taille $r$ est une dilatation
- Donc, l'opérateur d'intérieur $\psi_r^\star$ est une érosion

*Exercice.*

1. Vérifier la propriété de dilatation de $\psi_r$ et d'érosion de $\psi_r^\star$ sur l'exemple ci-dessous

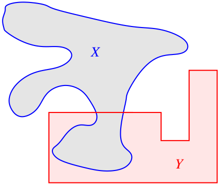


# Exemple

- L'opérateur $\psi_r$ de voisinage de taille $r$ est une dilatation
- Donc, l'opérateur d'intérieur $\psi_r^\star$ est une érosion
- L'opérateur *ec* d'enveloppe convexe n'est pas une dilatation

*Exercice.*

1. Vérifier la propriété de dilatation de $\psi_r$ et d'érosion de $\psi_r^\star$ sur l'exemple ci-dessous

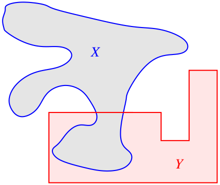


# Exemple

- L'opérateur $\psi_r$ de voisinage de taille $r$ est une dilatation
- Donc, l'opérateur d'intérieur $\psi_r^\star$ est une érosion
- L'opérateur *ec* d'enveloppe convexe n'est pas une dilatation

*Exercice.*

1. Vérifier la propriété de dilatation de $\psi_r$ et d'érosion de $\psi_r^\star$ sur l'exemple ci-dessous
2. Donnez un contre exemple

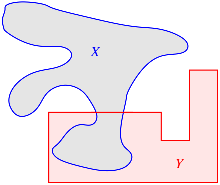


# Exemple

- L'opérateur $\psi_r$ de voisinage de taille $r$ est une dilatation
- Donc, l'opérateur d'intérieur $\psi_r^\star$ est une érosion
- L'opérateur $ec$ d'enveloppe convexe n'est pas une dilatation
- Donc, l'opérateur $ec^\star$ n'est pas une érosion

*Exercice.*

1. Vérifier la propriété de dilatation de $\psi_r$ et d'érosion de $\psi_r^\star$ sur l'exemple ci-dessous
2. Donnez un contre exemple



# Dilatation morphologique

## Définition

- *Soit* $\Gamma$ *une application de* $E$ *dans* $\mathcal{P}(E)$
  - $(E, \Gamma)$ *est donc un graphe*

# Dilatation morphologique

## Définition

- *Soit* $\Gamma$ *une application de* $E$ *dans* $\mathcal{P}(E)$
  - $(E, \Gamma)$ *est donc un graphe*
- *La* dilatation (morphologique) $\delta_\Gamma$ par $\Gamma$ *est l'opérateur qui à tout* $X \in \mathcal{P}(E)$ *fait correspondre l'ensemble*
  - $\delta_\Gamma(X) = X \oplus \Gamma = \cup\{\Gamma(x) \mid x \in X\}$

# Dilatation morphologique

## Définition

- *Soit* $\Gamma$ *une application de* $E$ *dans* $\mathcal{P}(E)$
  - $(E, \Gamma)$ *est donc un graphe*
- *La* dilatation (morphologique) $\delta_\Gamma$ par $\Gamma$ *est l'opérateur qui à tout* $X \in \mathcal{P}(E)$ *fait correspondre l'ensemble*
  - $\delta_\Gamma(X) = X \oplus \Gamma = \cup\{\Gamma(x) \mid x \in X\}$
- *Dans un contexte morphologique, l'application* $\Gamma$ *est aussi appelée un* élément structurant

# Dilatation morphologique

## Définition

- *Soit* $\Gamma$ *une application de* $E$ *dans* $\mathcal{P}(E)$
  - $(E, \Gamma)$ *est donc un graphe*
- *La* dilatation (morphologique) $\delta_\Gamma$ par $\Gamma$ *est l'opérateur qui à tout* $X \in \mathcal{P}(E)$ *fait correspondre l'ensemble*
  - $\delta_\Gamma(X) = X \oplus \Gamma = \cup\{\Gamma(x) \mid x \in X\}$
- *Dans un contexte morphologique, l'application* $\Gamma$ *est aussi appelée un* élément structurant

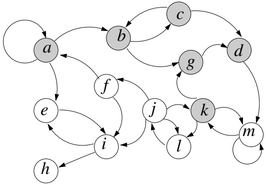
*Remarque.* Toute dilatation morphologique est une dilatation algébrique

*Propriétés immédiates.*

$\delta_\Gamma$ est extensif si et seulement si $(E, \Gamma)$ est réflexif

Donc, $\delta^\star_\Gamma$ est anti-extensif si et seulement si $\Gamma$ est réflexif

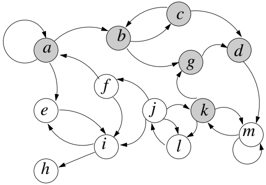
# Exemple dans un graphe quelconque

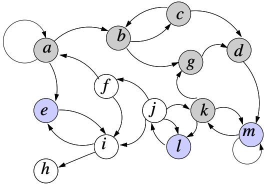



$X = \{a, b, c, d, g, k\}$

- $\delta_\Gamma(X) = ?$

# Exemple dans un graphe quelconque

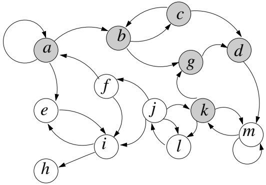


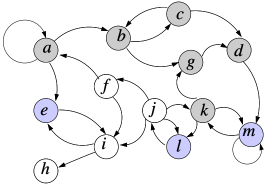

$X = \{a, b, c, d, g, k\}$ $\delta_\Gamma(X) = X \cup \{e, l, m\}$

- $\delta_\Gamma(X) = ?$

# Exemple dans un graphe quelconque



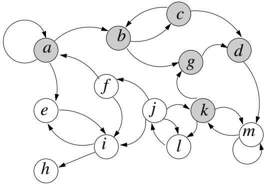

$X = \{a, b, c, d, g, k\}$



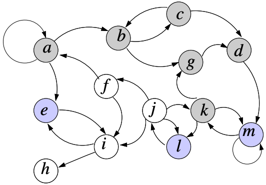

$\delta_\Gamma(X) = X \cup \{e, l, m\}$

- $\delta_\Gamma(X) = ?$
- $\delta_\Gamma(X)^\star = ?$

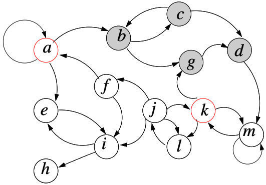
# Exemple dans un graphe quelconque




$X = \{a, b, c, d, g, k\}$



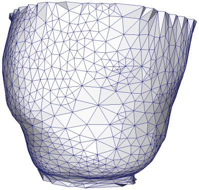

$\delta_\Gamma(X) = X \cup \{e, l, m\}$

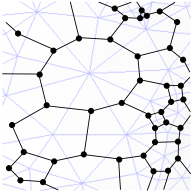



$\delta_\Gamma(X)^\star = X \setminus \{k, a\}$

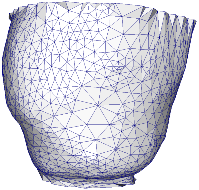
- $\delta_\Gamma(X) = ?$
- $\delta_\Gamma(X)^\star = ?$

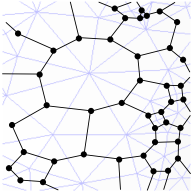
# Maillage : exemple





# Maillage : exemple





# Elément structurant invariant par translation

- Soit $E$ un sous ensemble d'un espace muni d'une translation $\mathcal{T}$

# Elément structurant invariant par translation

- Soit $E$ un sous ensemble d'un espace muni d'une translation $\mathcal{T}$
- Soient $x \in E$ et $\overrightarrow{yz} \in E \times E$, on désigne par $\mathcal{T}_{\overrightarrow{yz}}(x)$ le translaté de $x$ par le vecteur $\overrightarrow{yz}$
- Soit $X \in \mathcal{P}(E)$, le translaté de $X$ par $\overrightarrow{yz}$ est l'ensemble :
  - $\mathcal{T}_{\overrightarrow{yz}}(X) = \{\mathcal{T}_{\overrightarrow{yz}}(x) \mid x \in X\}$

# Elément structurant invariant par translation

- Soit $E$ un sous ensemble d'un espace muni d'une translation $\mathcal{T}$
- Soient $x \in E$ et $\overrightarrow{yz} \in E \times E$, on désigne par $\mathcal{T}_{\overrightarrow{yz}}(x)$ le translaté de $x$ par le vecteur $\overrightarrow{yz}$
- Soit $X \in \mathcal{P}(E)$, le translaté de $X$ par $\overrightarrow{yz}$ est l'ensemble :
  - $\mathcal{T}_{\overrightarrow{yz}}(X) = \{\mathcal{T}_{\overrightarrow{yz}}(x) \mid x \in X\}$
- Un élément structurant $\Gamma$ sur $E$ est *invariant par translation* si
  - $\forall x, y \in E, \Gamma(y) = \mathcal{T}_{\overrightarrow{xy}}(\Gamma(x))$

# Elément structurant invariant par translation

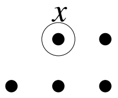
- Soit $E$ un sous ensemble d'un espace muni d'une translation $\mathcal{T}$
- Soient $x \in E$ et $\overrightarrow{yz} \in E \times E$, on désigne par $\mathcal{T}_{\overrightarrow{yz}}(x)$ le translaté de $x$ par le vecteur $\overrightarrow{yz}$
- Soit $X \in \mathcal{P}(E)$, le translaté de $X$ par $\overrightarrow{yz}$ est l'ensemble :
  - $\mathcal{T}_{\overrightarrow{yz}}(X) = \{\mathcal{T}_{\overrightarrow{yz}}(x) \mid x \in X\}$
- Un élément structurant $\Gamma$ sur $E$ est *invariant par translation* si
  - $\forall x, y \in E$, $\Gamma(y) = \mathcal{T}_{\overrightarrow{xy}}(\Gamma(x))$

*Remarque.*

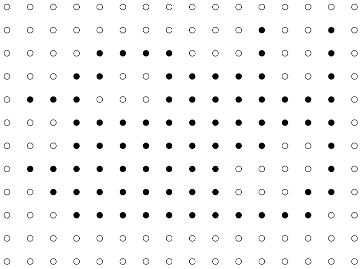
1. Pour définir un élément structurant invariant par translation, il suffit de définir $\Gamma(x)$ pour un unique élément $x \in E$
2. Si $\Gamma$ est invariant par translation, alors $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $\forall \overrightarrow{v} \in E \times E$, $\delta_\Gamma(\mathcal{T}_{\overrightarrow{v}}(X)) = \mathcal{T}_{\overrightarrow{v}}(\delta_\Gamma(X))$

# Exemple en maille carré

- Soit $E = \mathbb{Z}^2$ et $\Gamma$ défini par $\forall x = (i,j) \in \mathbb{Z}^2$,
  $\Gamma(x) = \{(i,j), (i+1,j), (i+1,j-1), (i,j-1), (i-1,j-1)\}$




$\Gamma$



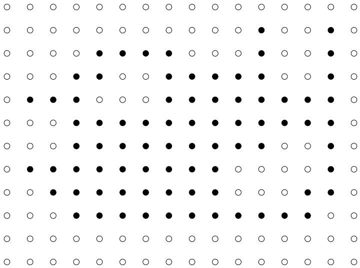
$X$ (noir)

*Questions.*

1. Représenter de la même manière que ci-dessus les éléments structurants $\Gamma^{-1}$ et $\Gamma_s$ (fermeture symétrique de $\Gamma$).
2. Dessiner $\delta_\Gamma(X)$, $\delta_{\Gamma^{-1}}(X)$, $\delta_{\Gamma_s}(X)$, $\delta^\star_\Gamma(X)$, $\delta^\star_{\Gamma^{-1}}(X)$, et $\delta^\star_{\Gamma_s}(X)$.

# Exemple en maille carré

- Soit $E = \mathbb{Z}^2$ et $\Gamma$ défini par $\forall x = (i,j) \in \mathbb{Z}^2$,
  $\Gamma(x) = \{(i,j), (i+1,j), (i+1,j-1), (i,j-1), (i-1,j-1)\}$



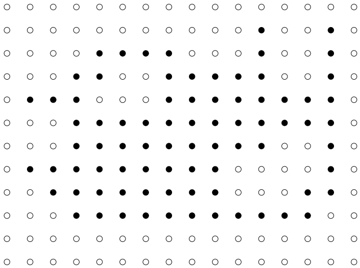
$\Gamma$ $\quad$ $X$ (noir)

*Questions.*

1. Représenter de la même manière que ci-dessus les éléments structurants $\Gamma^{-1}$ et $\Gamma_s$ (fermeture symétrique de $\Gamma$).
2. Dessiner $\delta_\Gamma(X)$, $\delta_{\Gamma^{-1}}(X)$, $\delta_{\Gamma_s}(X)$, $\delta^\star_\Gamma(X)$, $\delta^\star_{\Gamma^{-1}}(X)$, et $\delta^\star_{\Gamma_s}(X)$.

# Exemple en maille carré

- Soit $E = \mathbb{Z}^2$ et $\Gamma$ défini par $\forall x = (i,j) \in \mathbb{Z}^2$,
  $\Gamma(x) = \{(i,j), (i+1,j), (i+1,j-1), (i,j-1), (i-1,j-1)\}$



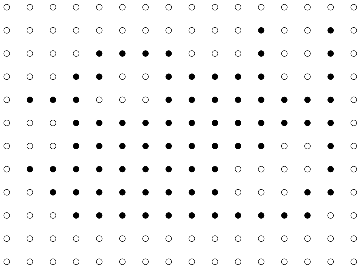
$\Gamma$ $\qquad$ $X$ (noir)

*Questions.*

1. Représenter de la même manière que ci-dessus les éléments structurants $\Gamma^{-1}$ et $\Gamma_s$ (fermeture symétrique de $\Gamma$).
2. Dessiner $\delta_\Gamma(X)$, $\delta_{\Gamma^{-1}}(X)$, $\delta_{\Gamma_s}(X)$, $\delta^\star_\Gamma(X)$, $\delta^\star_{\Gamma^{-1}}(X)$, et $\delta^\star_{\Gamma_s}(X)$.

# Exemple en maille carré

- Soit $E = \mathbb{Z}^2$ et $\Gamma$ défini par $\forall x = (i,j) \in \mathbb{Z}^2$,
  $\Gamma(x) = \{(i,j), (i+1,j), (i+1,j-1), (i,j-1), (i-1,j-1)\}$



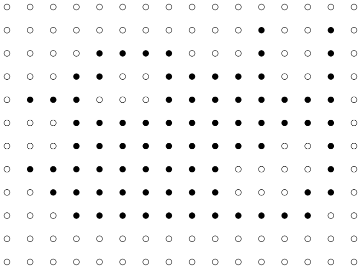
$\Gamma$ $\quad$ $X$ (noir)

*Questions.*

1. Représenter de la même manière que ci-dessus les éléments structurants $\Gamma^{-1}$ et $\Gamma_s$ (fermeture symétrique de $\Gamma$).
2. Dessiner $\delta_\Gamma(X)$, $\delta_{\Gamma^{-1}}(X)$, $\delta_{\Gamma_s}(X)$, $\delta^\star_\Gamma(X)$, $\delta^\star_{\Gamma^{-1}}(X)$, et $\delta^\star_{\Gamma_s}(X)$.

# Exemple en maille carré

- Soit $E = \mathbb{Z}^2$ et $\Gamma$ défini par $\forall x = (i,j) \in \mathbb{Z}^2$,
  $\Gamma(x) = \{(i,j), (i+1,j), (i+1,j-1), (i,j-1), (i-1,j-1)\}$



$\Gamma$

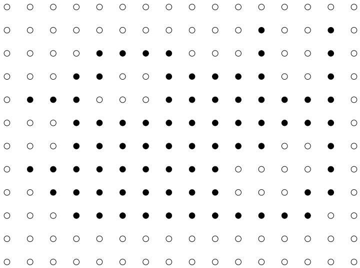
$X$ (noir)

*Questions.*

1. Représenter de la même manière que ci-dessus les éléments structurants $\Gamma^{-1}$ et $\Gamma_s$ (fermeture symétrique de $\Gamma$).
2. Dessiner $\delta_\Gamma(X)$, $\delta_{\Gamma^{-1}}(X)$, $\delta_{\Gamma_s}(X)$, $\delta^\star_\Gamma(X)$, $\delta^\star_{\Gamma^{-1}}(X)$, et $\delta^\star_{\Gamma_s}(X)$.

# Exemple en maille carré

- Soit $E = \mathbb{Z}^2$ et $\Gamma$ défini par $\forall x = (i,j) \in \mathbb{Z}^2$,
  $\Gamma(x) = \{(i,j),(i+1,j),(i+1,j-1),(i,j-1),(i-1,j-1)\}$

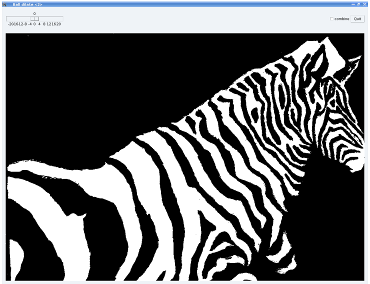


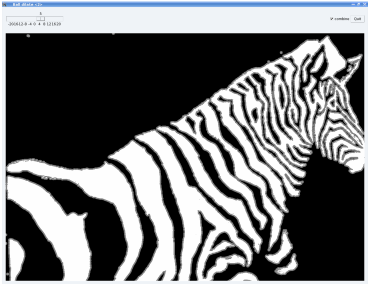
$\Gamma$ $\qquad$ $X$ (noir)

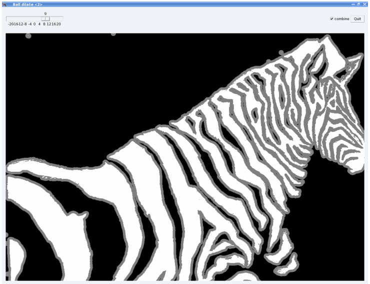
*Questions.*

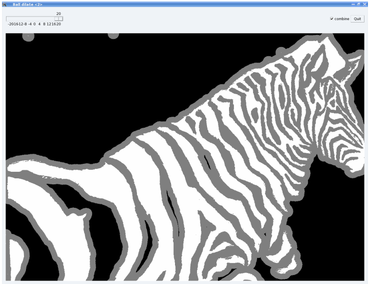
1. Représenter de la même manière que ci-dessus les éléments structurants $\Gamma^{-1}$ et $\Gamma_s$ (fermeture symétrique de $\Gamma$).
2. Dessiner $\delta_\Gamma(X)$, $\delta_{\Gamma^{-1}}(X)$, $\delta_{\Gamma_s}(X)$, $\delta^\star_\Gamma(X)$, $\delta^\star_{\Gamma^{-1}}(X)$, et $\delta^\star_{\Gamma_s}(X)$.

# Imagerie 2D : exemple

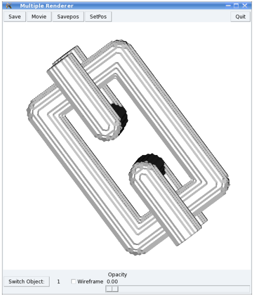


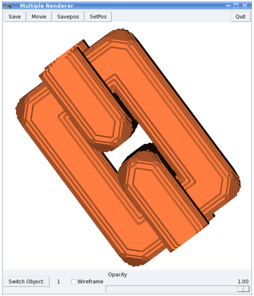



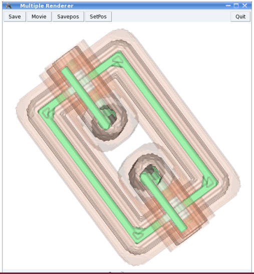



# Imagerie 3D : exemple







# Dilatation et érosion morphologiques : caractérisations

## Propriété

- *Soient* $\Gamma$ *un élément structurant et* $X \subseteq E$
  1. $\delta_\Gamma(X) = \{x \in E \mid \Gamma^{-1}(x) \cap X \neq \emptyset\}$

# Dilatation et érosion morphologiques : caractérisations

## Propriété

- *Soient* $\Gamma$ *un élément structurant et* $X \subseteq E$
  1. $\delta_\Gamma(X) = \{x \in E \mid \Gamma^{-1}(x) \cap X \neq \emptyset\}$

*Preuve.*

1. $\delta_\Gamma(X) = \cup\{\Gamma(x) \mid x \in E\} = \{y \in \ \mid \exists x \in X, y \in \Gamma(x)\}$
   $= \{y \in \ \mid \exists x \in X, x \in \Gamma^{-1}(y)\} = \{y \in E \mid \Gamma^{-1}(y) \cap X \neq \emptyset\}$

# Dilatation et érosion morphologiques : caractérisations

## Propriété

- *Soient $\Gamma$ un élément structurant et $X \subseteq E$*
  1. $\delta_\Gamma(X) = \{x \in E \mid \Gamma^{-1}(x) \cap X \neq \emptyset\}$
  2. $\delta^\star_\Gamma(X) = \{x \in E \mid \Gamma^{-1}(x) \subseteq X\}$

*Preuve.*

1. $\delta_\Gamma(X) = \cup\{\Gamma(x) \mid x \in E\} = \{y \in \mid \exists x \in X, y \in \Gamma(x)\}$
$= \{y \in \mid \exists x \in X, x \in \Gamma^{-1}(y)\} = \{y \in E \mid \Gamma^{-1}(y) \cap X \neq \emptyset\}$

# Dilatation et érosion morphologiques : caractérisations

## Propriété

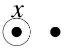
- *Soient $\Gamma$ un élément structurant et $X \subseteq E$*
  1. $\delta_\Gamma(X) = \{x \in E \mid \Gamma^{-1}(x) \cap X \neq \emptyset\}$
  2. $\delta^\star_\Gamma(X) = \{x \in E \mid \Gamma^{-1}(x) \subseteq X\}$

*Preuve.*

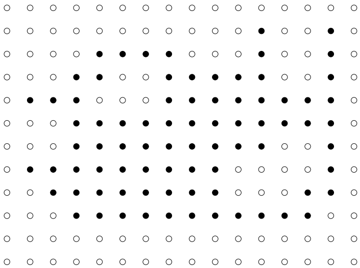
1. $\delta_\Gamma(X) = \cup\{\Gamma(x) \mid x \in E\} = \{y \in \mid \exists x \in X, y \in \Gamma(x)\}$
   $= \{y \in \mid \exists x \in X, x \in \Gamma^{-1}(y)\} = \{y \in E \mid \Gamma^{-1}(y) \cap X \neq \emptyset\}$
2. $\delta^\star_\Gamma(X) = \overline{\delta(\overline{X})}$. Donc d'après 1, on déduit :
   $\delta^\star_\Gamma(X) = \overline{\{x \in E \mid \Gamma^{-1}(x) \cap \overline{X} \neq \emptyset\}} = \{x \in E \mid \Gamma^{-1}(x) \cap \overline{X} = \emptyset\}$
   $\delta^\star_\Gamma(X) = \{x \in E \mid \Gamma^{-1}(x) \subseteq X\}$

# Influence de l'élément structurant

*Question.* Eroder l'ensemble $X$ en noir avec l'élément structurant $\Gamma$, c.a.d. dessiner $\delta^{\star}_{\Gamma}(X)$




$\Gamma$

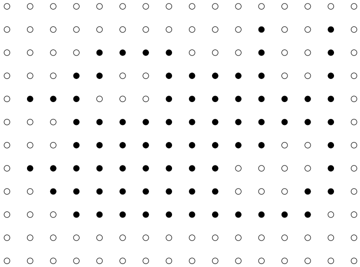


$X$ (noir)

# Influence de l'élément structurant

*Question.* Eroder l'ensemble $X$ en noir avec l'élément structurant $\Gamma$, c.a.d. dessiner $\delta^{\star}_{\Gamma}(X)$

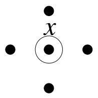

$\Gamma$



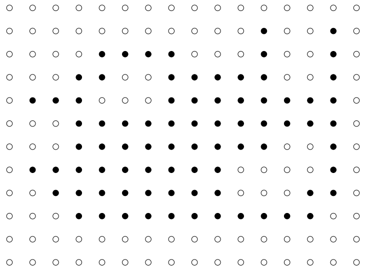
$X$ (noir)

# Influence de l'élément structurant

*Question.* Eroder l'ensemble $X$ en noir avec l'élément structurant $\Gamma$, c.a.d. dessiner $\delta^\star_\Gamma(X)$




$\Gamma$



$X$ (noir)

# Eléments structurants

- Le résultat d'une dilatation et d'une érosion dépend fortement de l'élément structurant utilisé qui peut
  - avoir différentes **formes**
  - avoir différentes **tailles**
  - être **isotrope** ou non
  - être **symétrique** ou non
  - être **réflexif** ou non
  - être **convexe** ou non
  - être **invariant par translation** ou non

# Algorithme de dilatation

**Algorithme DIL (Données :** $(E, \Gamma)$, $X \subseteq E$ ; **Résultat :** $Y = \delta_\Gamma(X)$)

- $Y := \emptyset$ ;
- **Pour chaque** $x \in X$ **Faire**
    - **Pour chaque** $y \in \Gamma(x)$ **Faire** $Y := Y \cup \{y\}$ ;

# Algorithme de dilatation

**Algorithme DIL (Données : $(E, \Gamma)$, $X \subseteq E$ ; Résultat : $Y = \delta_\Gamma(X)$)**

- $Y := \emptyset$ ;
- **Pour chaque** $x \in X$ **Faire**
  - **Pour chaque** $y \in \Gamma(x)$ **Faire** $Y := Y \cup \{y\}$ ;

## Complexité

- *L'algorithme DIL peut être implémenté en temps* $O(n+m)$ *où* $n = |E|$ *et* $m = |\Gamma|$
- *Pour cela, quelles structures de données doit-on choisir pour représenter* $(E, \Gamma)$, $X$ *et* $Y$ *?*

# Union d'éléments structurants

## Propriété

- *Soient* $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ *et* $\Gamma_3$ *trois éléments structurants tels que* $\overrightarrow{\Gamma_3} = \overrightarrow{\Gamma_1} \cup \overrightarrow{\Gamma_2}$
- $\forall X \in \mathcal{P}(E)$,
  1. $\delta_{\Gamma_3}(X) = \delta_{\Gamma_1}(X) \cup \delta_{\Gamma_2}(X)$
  2. $\delta^\star_{\Gamma_3}(X) = \delta^\star_{\Gamma_1}(X) \cap \delta^\star_{\Gamma_2}(X)$

# Union d'éléments structurants

## Propriété

- *Soient* $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ *et* $\Gamma_3$ *trois éléments structurants tels que* $\overrightarrow{\Gamma_3} = \overrightarrow{\Gamma_1} \cup \overrightarrow{\Gamma_2}$
- $\forall X \in \mathcal{P}(E)$,
  1. $\delta_{\Gamma_3}(X) = \delta_{\Gamma_1}(X) \cup \delta_{\Gamma_2}(X)$
  2. $\delta^\star_{\Gamma_3}(X) = \delta^\star_{\Gamma_1}(X) \cap \delta^\star_{\Gamma_2}(X)$

*Preuve.*

1. $\delta_{\Gamma_3}(X) = \cup\{\Gamma_3(x) \mid x \in X\}$ Donc, par union de graphes,
   $\delta_{\Gamma_3}(X) = \cup\{\Gamma_1(x) \cup \Gamma_2(x) \mid x \in X\}$
   $= [\cup\{\Gamma_1(x) \mid x \in X\}] \cup [\cup\{\Gamma_2(x) \mid x \in X\}] = \delta_{\Gamma_1}(X) \cup \delta_{\Gamma_2}(X)$
2. Par dualité, $\delta^\star_{\Gamma_3}(X) = \overline{\delta_{\Gamma_3}(\overline{X})}$. Donc, d'après la relation 1.,
   $\delta^\star_{\Gamma_3}(X) = \overline{\delta_{\Gamma_1}(\overline{X}) \cup \delta_{\Gamma_2}(\overline{X})\}} = \overline{\delta_{\Gamma_1}(\overline{X})} \cap \overline{\delta_{\Gamma_2}(\overline{X})\}}$. Ainsi par dualité,
   $\delta^\star_{\Gamma_3}(X) = \delta^\star_{\Gamma_1}(X) \cap \delta^\star_{\Gamma_2}(X)$ □

# Dilatés d'éléments structurants

## Définition

- *Soient* $\Gamma_1$ *et* $\Gamma_2$ *deux éléments structurants*
- *On désigne par* $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$ *l'élément structurant tel que*
  - $\forall x \in E, \Gamma_1 \oplus \Gamma_2(x) = \delta_{\Gamma_2}(\Gamma_1(x))$

# Dilatation par dilaté d'éléments structurants

## Propriété

- *Soient $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ deux éléments structurants*
  1. $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $\delta_{\Gamma_1 \oplus \Gamma_2}(X) = \delta_{\Gamma_2}(\delta_{\Gamma_1}(X))$
  2. $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $\delta^\star_{\Gamma_1 \oplus \Gamma_2}(X) = \delta^\star_{\Gamma_2}(\delta^\star_{\Gamma_1}(X))$

*Preuve.*

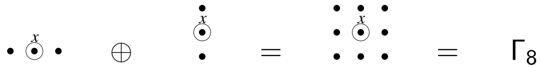
1. $\delta_{\Gamma_1 \oplus \Gamma_2}(X) = \cup\{\Gamma_1 \oplus \Gamma_2(x) \mid x \in X\} = \cup\{\delta_{\Gamma_2}(\Gamma_1(x)) \mid x \in X\}$. Comme $\delta_{\Gamma_2}$ est une dilatation algébrique, $\delta_{\Gamma_2}$ commute avec l'union. Donc, $\delta_{\Gamma_1 \oplus \Gamma_2}(X) = \delta_{\Gamma_2}(\cup\{\Gamma_1(x) \mid x \in X\}) = \delta_{\Gamma_2}(\delta_{\Gamma_1})(X))$
2. La deuxième relation se déduit de la première par dualité. $\square$

# Décomposition d'éléments structurants

- Les deux propriétés précédentes indiquent qu'une dilatation par un élément structurant peut être décomposée en une combinaison de dilatations par des éléments structurants plus simples
- Cela peut avoir des conséquences importantes sur l'efficacité d'algorithmes de dilatations

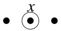
# Décomposition d'éléments structurants

- Les deux propriétés précédentes indiquent qu'une dilatation par un élément structurant peut être décomposée en une combinaison de dilatations par des éléments structurants plus simples
- Cela peut avoir des conséquences importantes sur l'efficacité d'algorithmes de dilatations

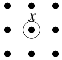


# Décomposition d'éléments structurants

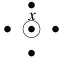
- Les deux propriétés précédentes indiquent qu'une dilatation par un élément structurant peut être décomposée en une combinaison de dilatations par des éléments structurants plus simples
- Cela peut avoir des conséquences importantes sur l'efficacité d'algorithmes de dilatations



$\oplus$


$=$


$= \Gamma_8$

**Mais** $\Gamma_4 =$


**ne peut pas être décomposé**

# Opérateurs itérées

## Définition

- *Soit* $\psi$ *un opérateur et* $i \in \mathbb{N}$
- *On désigne par* $\psi_i$ *l'opérateur défini par*
  1. $\psi_i = \psi\psi_{i-1}$
  2. $\psi_0 = Id$ $(c.a.d\ \forall X \subseteq E, \psi_0(X) = X)$

# Opérateurs itérées

## Définition

- *Soit* $\psi$ *un opérateur et* $i \in \mathbb{N}$
- *On désigne par* $\psi_i$ *l'opérateur défini par*
  1. $\psi_i = \psi\psi_{i-1}$
  2. $\psi_0 = Id$ *(c.a.d* $\forall X \subseteq E, \psi_0(X) = X$*)*

## Propriété

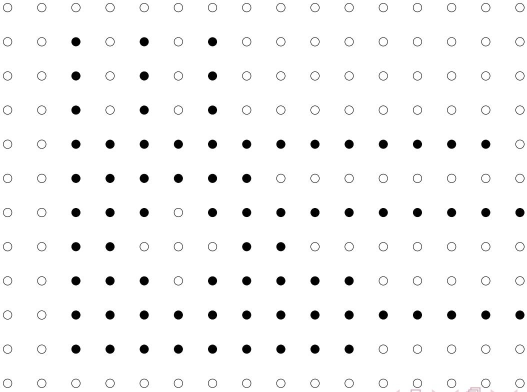
- $[\psi_i]^\star = [\psi^\star]_i$
- *Soit* $\Gamma$ *un élément structurant,* $[\delta_\Gamma]^i = \delta_{\Gamma\oplus\ldots\oplus\Gamma}$

# Exercice

- Soit $E = \mathbb{Z}^2$ et $\Gamma_4$ défini par
  $\forall x = (i,j) \in E, \Gamma(x) = \{(i,j),(i-1,j),(i,j-1),(i+1,j),(i,j+1)\}$
- Combien y-a-t-il d'éléments dans $\Gamma \oplus \Gamma \oplus \Gamma$ ?
- Comparer approximativement les nombres d'opérations nécessaires pour calculer $\delta_{\Gamma \oplus \Gamma \oplus \Gamma}$ et $[\delta_\Gamma]^3$ en utilisant uniquement l'algorithme DIL
- Indication : vous pouvez considérer que DIL a besoin de $n + m$ opérations pour effectuer une dilatation par un élément structurant $\Gamma$ (avec $n = |E|$ et $m = |\overrightarrow{\Gamma}|$)

# Exercice

- Soit l'objet noir $X \subseteq \mathbb{Z}^2$ ci-dessous
- Quel opérateur (ou combinaison d'opérateurs) pouvez-vous appliquer pour supprimer les "fils" horizontaux et préserver les "fils" verticaux ?
- Quel opérateur (ou combinaison d'opérateurs) permet de boucher le "trou" de $X$, tout en en minimisant la différence entre le résultat et $X$ ?



# Exercice

- Soit $E = \mathbb{Z}^2$, soit $X \subseteq E$, Soit $\overrightarrow{xy} \in E \times E$ un vecteur quelconque de $\mathbb{Z}^2$, avec $x = (i_x, j_x)$ et $y = (i_y, j_y)$
- La machine morphologique est capable d'effectuer uniquement les opérations suivantes
  - dilatation par un élément structurant quelconque
  - complémentation
- Est-il possible de calculer le translaté de $X$ par $\overrightarrow{xy}$ avec la machine morphologique ?
- Même question, pour une machine morphologique restreinte qui a la contrainte supplémentaire : tout élément structurant doit être inclus dans $\Gamma_4$

# Adjonction

## Problème

- *Existe-t-il un opérateur inverse* $\delta'$ *pour toute dilatation* $\delta$ *?*
- *En d'autre terme peut-on trouver* $\delta'$ *tel que* $\forall X \in \mathcal{P}(E), \delta'(\delta(X)) = X$ *?*

# Ensemble $\delta$-inférieur

## Définition

- *Soient $\delta$ une dilatation et $X, X' \in \mathcal{P}(E)$*
- *$X'$ est* $\delta$-inférieur à $X$ *si*
  - $\delta(X') \subseteq X$

## Propriété

- *Soient $\delta$ une dilatation et $X \in \mathcal{P}(E)$*
- *Parmi les ensembles $\delta$-inférieurs à $X$, il existe un un plus grand élément $\dot{X}$*
- *De plus,*
  - $\dot{X} = \cup\{X' \in \mathcal{P}(E) \mid X' \text{ est } \delta\text{-inférieur à } X\}$

# Preuve

Par définition de l'union, $\dot{X}$ est le plus petit ensemble qui contient tous les $\delta$-inférieurs à $X$. Pour compléter la démonstration, il suffit donc de prouver que $\dot{X}$ est aussi $\delta$-inférieur à $X$, c'est-à-dire que $\delta(\dot{X}) \subseteq X$.
D'après la définition d'un ensemble $\delta$-inférieur, on peut écrire $\dot{X} = \cup\{X' \in \mathcal{P}(E) \mid \delta(X') \subseteq X\}$.
Donc, $\delta(\dot{X}) = \delta(\cup\{X' \in \mathcal{P}(E) \mid \delta(X') \subseteq X\})$. Comme l'opérateur de dilatation commute avec l'union, on peut également écrire $\delta(\dot{X}) = \cup\{\delta(X') \mid X' \in \mathcal{P}(E), \delta(X') \subseteq X\}$. Ainsi, par définition de l'union, on obtient la relation $\delta(\dot{X}) \subseteq X$, ce qui complète la preuve de la propriété. $\square$

# Preuve

Par définition de l'union, $\dot{X}$ est le plus petit ensemble qui contient tous les $\delta$-inférieurs à $X$. Pour compléter la démonstration, il suffit donc de prouver que $\dot{X}$ est aussi $\delta$-inférieur à $X$, c'est-à-dire que $\delta(\dot{X}) \subseteq X$.
D'après la définition d'un ensemble $\delta$-inférieur, on peut écrire $\dot{X} = \cup\{X' \in \mathcal{P}(E) \mid \delta(X') \subseteq X\}$.
Donc, $\delta(\dot{X}) = \delta(\cup\{X' \in \mathcal{P}(E) \mid \delta(X') \subseteq X\})$. Comme l'opérateur de dilatation commute avec l'union, on peut également écrire $\delta(\dot{X}) = \cup\{\delta(X') \mid X' \in \mathcal{P}(E), \delta(X') \subseteq X\}$. Ainsi, par définition de l'union, on obtient la relation $\delta(\dot{X}) \subseteq X$, ce qui complète la preuve de la propriété. $\square$

*Exercice.* Montrer qu'en général il n'existe pas de plus petit élément parmi les ensembles $\delta$-supérieurs à $X$.

# Erosion adjointe

## Définition

- *Soit $\delta$ un dilatation, l'*érosion adjointe de $\delta$ *est l'opérateur $\dot{\delta}$ qui à tout $X \in \mathcal{P}(E)$ associe le plus grand ensemble qui est $\delta$-inférieur à $X$ : $\dot{\delta}(X) = \cup\{X' \mid \delta(X') \subseteq X\}$*

## Propriété

- *Soit $\delta$ une dilatation. Alors $\dot{\delta}$ commute avec l'intersection : $\dot{\delta}$ est une érosion*

*Preuve.* Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

$\dot{\delta}(A \cap B) = \cup\{X' \in \mathcal{P}(E) \mid \delta(X') \subseteq [A \cap B]\}$

$= \cup\{X' \in \mathcal{P}(E) \mid \delta(X') \subseteq A \text{ et } \delta(X') \subseteq B\}$

$= [\cup\{X' \in \mathcal{P}(E) \mid \delta(X') \subseteq A\}] \cap [\cup\{X' \in \mathcal{P}(E) \mid \delta(X') \subseteq B\}]$

$= \dot{\delta}(A) \cap \dot{\delta}(B)$ $\square$

# Dilatation adjointe

- On peut faire le même raisonnement que précédemment en partant de l'opérateur d'érosion au lieu de celui de dilatation. Pour cela, il faut inverser la relation $\subseteq$ et intervertir les symboles $\cup$ et $\cap$
- Si $\epsilon$ est une érosion, sa dilatation adjointe $\dot{\epsilon}$ est définie par
  - $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $\dot{\epsilon}(X) = \cap\{X' \mid X \subseteq \epsilon(X')\}$
- La relation d'adjonction est une bijection entre dilatations et érosions
  - $\epsilon = \dot{\delta} \Leftrightarrow \delta = \dot{\epsilon}$

# Adjonction et opérateurs par élément structurant

## Propriété

- *Soit* $\Gamma$ *un élément structurant*
- $\dot{\delta}_\Gamma = \delta^\star_{\Gamma^{-1}}$

*Question.* Donner, lorsque cela est possible, une paire d'opérateurs adjoints $(\delta, \dot{\delta})$ vérifiant chacune des propriétés suivantes

1. $\delta(\dot{\delta}(X)) = X$
2. $\delta(\dot{\delta}(X)) \subset X$
3. $X \subset \delta(\dot{\delta}(X))$
4. $\dot{\delta}(\delta(X)) \subset X$
5. $X \subset \dot{\delta}(\delta(X))$

# Notions fondamentales

- Opérateurs croissant, extensif, anti-extensif, idempotent
- Opérateurs duaux
- Dilatation/érosion algébrique
- Dilatation/érosion morphologique (par un élément structurant)
- Opérateurs adjoints

# Exercice

- Soit $(E, \overline{\Gamma})$ le graphe complet non orienté dont l'ensemble de sommets est $E = \{1, 2, \ldots, n, n+1\}$.
- Question 1. Décrivez deux façons différentes de compter les arêtes de $G$
- Question 2. En déduire l'égalité $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$