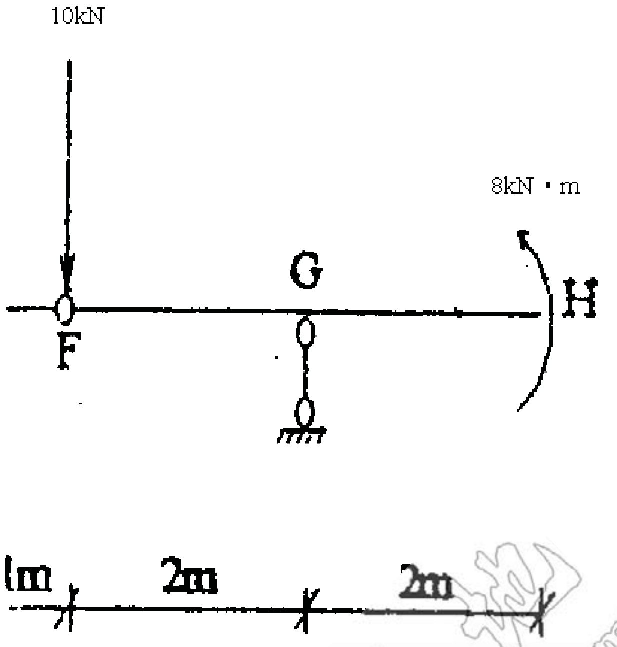
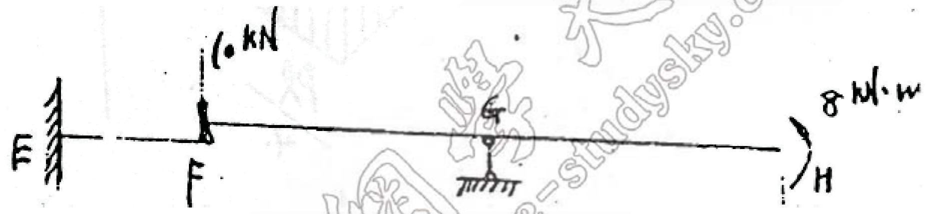
1、求作图示结构的弯矩、剪力图。



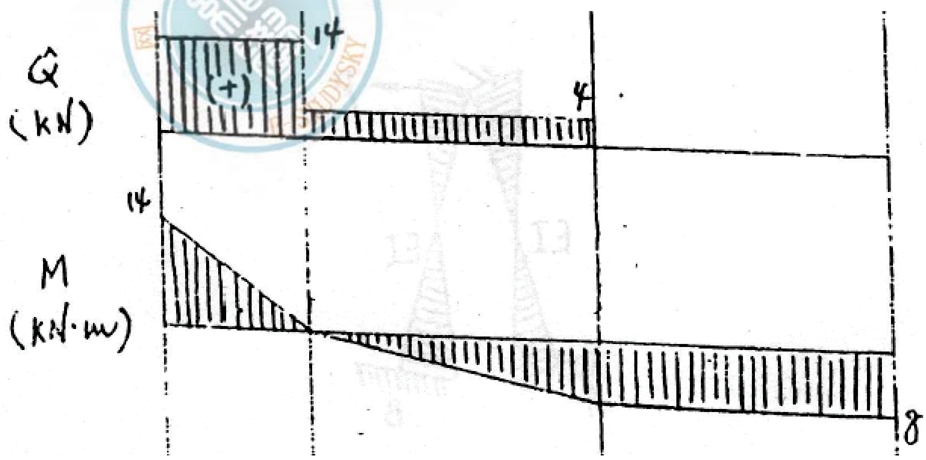
解：求支座反力。将结构从 F 点断开，受力图如下所示：



据此，由静力平衡条件可求出支座反力：

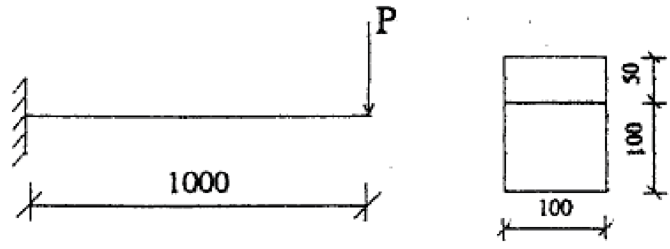
$F_{\mathrm{G}}=4\mathrm{KN}$（向下），$F_{\mathrm{Ey}}=14\mathrm{KN}$（向上），$M_{\mathrm{E}}=14\mathrm{KN{\bullet}m}$（逆时针）

这样，可以绘出剪力图和弯矩图如下所示：



【2-1】（同济大学 2005 年硕士研究生入学考试试题）

由两块木条（两木条的材质相同）胶合而成的悬臂梁，截面尺寸如图。悬臂梁自由端作用有竖直向下的集中力 P。木条胶合面上的许用剪应力 $[\tau']=3.2\times10^5 Pa$；木材的许用正应力 $[\sigma]=1\times10^7 Pa$，木材的许用剪应力 $[\tau]=1\times10^6 Pa$。求许可荷载 $[P]$。



(a) (b)

解：悬臂梁在 P 的作用下，在梁内部存在着剪力和弯矩，因此要从两个方面求解。首先以正应力为标准校核：

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}=\frac{P_1 l}{\frac{1}{6}bh^2}\le[\sigma]，即\frac{P_1\times1000}{\frac{1}{6}100\times150^2}\le10$$

解得：$[P]_1=3750\mathrm{N}$

以剪应力为标准校核：

$$\tau_{\max}=1.5\frac{Q_{\max}}{A}=1.5\frac{P_2}{bh}\le[\tau]\ 即\ 1.5\frac{P_2}{100\times150}\le1$$

解得：$[P]_2=10000\mathrm{N}$

因为两块木板是粘合而成，因此要校核粘合面上的强度，即：

$$\tau_{\max}^{胶}=\frac{Q_{\max}\delta_z^{*胶}}{bI_z}=\frac{P_3(50\times100\times50)}{100\times\frac{1}{12}100\times150^3}\le[\tau']，即\frac{P_3\times12\times25\times10^4}{10^4\times150^3}\le0.32$$

解得：$[P]_3=3600\mathrm{N}$

综上所述，应该以粘合面上的强度为标准，即取许用应力为3600N。

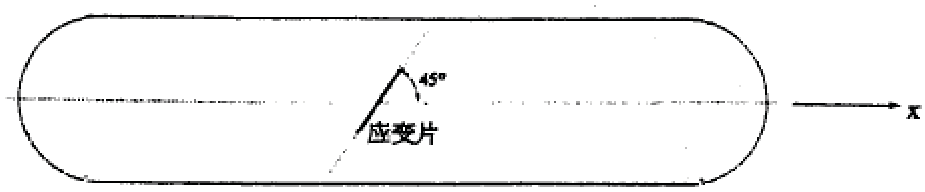
【7-1】（同济大学2005年硕士研究生入学考试试题）

承受内压的密闭圆柱形薄壁容器，其轴向长度远大于容器直径。该圆柱形容器直径为400mm，厚度为4mm，薄壁材料的泊松比为0.3，弹性模量$E=2.1\times10^{11}Pa$；若在密闭圆柱形薄壁容器中段、与x轴成$\alpha=45^0$方向测得应变$\varepsilon_{45^0}=350\times10^{-6}$。试求：

（1）容器的内压力 P。

（2）容器壁中的最大正应力 $\sigma_{\max}$。

（3）最大表面应变 $\varepsilon_{\max}$。



解：由薄壁圆筒的应力应变特点可知：

$$\sigma_x = \frac{pD}{4t} = 25p \quad , \quad \sigma_y = \frac{pD}{2t} = 50p$$

所以 45°方向应变片上的应力为：

$$\sigma_{45^o} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha = \frac{25k + 50k}{2} + \frac{25k - 50k}{2}\cos 90^o = 37.5p$$

$$\sigma_{-45^o} = \sigma_x + \sigma_y - \sigma_{45^o} = 37.5p$$

由胡克定理可得：

$$\varepsilon_{45} = \frac{\sigma_{45}}{E} - \nu\frac{\sigma_{-45}}{E} = 350\times10^{-6}$$

代入相关公式，解得：$k = 2.8MPa$

最大正应力即为 y 方向的应力，即：

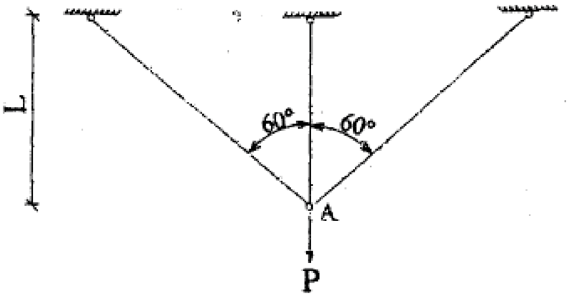
$$\sigma_{max} = \sigma_y = \frac{pd}{2t} = 50p = 140mpa$$

最大表面应变就是主应力 σ_1 对应的应变，即：

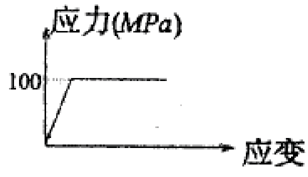
$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu(\frac{\sigma_2}{E} + \frac{\sigma_3}{E}) = \frac{140}{2.1\times10^5} - 0.3(\frac{70}{2.1\times10^5} + 0)$$

【 2-1 】（ 同 济 大 学 2005 年 硕 士 研 究 生 入 学 考 试 试 题 ）

如图(a)所示杆系。其中$L=3m$，每根杆的横截面面积$A=10cm^2$，弹性模量$E=7\times10^{10}Pa$。材料的应力-应变关系如图(b)所示。试求，当力$P=125kN$时，结点A的位移。（分数 20 分）



(a)



(b)

解：由图示结构可知，该体系为一次超静定体系，在P的作用下，三个杆件都伸长，而且存在如下关系：

$$\Delta L_{AC}=\frac{\Delta L_{AD}}{\cos60^\circ}$$

即：

$$\frac{N_{AC}L_{AC}}{ea}=\frac{N_{AD}L_{AD}}{EA\cos60^\circ}$$

化简可得：

$$N_{AD}=N_{AC}\cos^2 60^\circ=\frac{N_{AC}}{4}$$

在A点由静力平衡条件可得：

$$N_{AB}=N_{AD}$$

$$2N_{AD}\cos60^\circ+N_{AC}=P$$

与变形协调条件联立可得：

$$N_{ac}=\frac{4}{5}p \qquad N_{AB}=N_{AD}=\frac{1}{5}P$$

所以三杆的拉应力分别为：

$$\sigma_{AC} = \frac{N_{AC}}{A} = \frac{\frac{4}{5}125\times10^3}{10\times100} = 100Mpa$$

$$\sigma_{AB} = \sigma_{AD} = \frac{N_{AB}}{A} = \frac{\frac{1}{5}125\times10^3}{10\times100} = 25Mpa$$

可以看出，AC 杆已经达到了屈服，因此 A 点的位移为：

$$\Delta L_{AC} = \frac{N_{AC}L}{EA} = \frac{\sigma_S}{E}L = \frac{100}{7\times10^4}\times3000 = 4.29$$

【6-1】（同济大学 2005 年硕士研究生入学考试试题）

已知横截面为正方形（边长为 a）的等直梁 AB 的挠曲线方程为

$$y(x) = q_0x(7L^4 - 10L^2x^2 + 3x^4)/(360LEI)$$

其中，q_0 为最大荷载集度，L 为梁跨度，EI 为抗弯刚度。计算整根梁横截面上的最大正应力 $\sigma_{\max}$ 和最大剪应力 $\tau_{\max}$。

解：由挠曲线方程可得梁的转角方程为：

$$\theta(x) = \frac{q_0}{360LEI}(7L^4 - 30L^2x^2 + 15x^4)$$

进行二次求导可得到弯矩方程，即：

$$-M(x) = \frac{q_0}{360L}(-60L^2x + 60x^3)$$

三次求导后就是剪力方程，即：

$$-Q(x) = \frac{q_0}{360L}(-60L^2 + 180x^2)$$

对剪力方程再进行求导即可得到荷载的分布规律：

$$-q(x) = \frac{q_0}{L}x$$

由弯矩方程可知，当 x=0 和 1 时，转角不为 0，而弯矩为 0，说明梁两端简支，并且当

$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}L=0.578L$ 时弯矩最大，且最大弯矩为：

$$M_{\max}=\frac{1}{6}q_0 l\times\frac{l}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\frac{q_0}{l}\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2\times\frac{1}{3}\frac{l}{\sqrt{3}}=\frac{q_0 l^2}{9\sqrt{3}}$$

由剪力方程可知，当 $x=L$ 时，剪力最大，最大剪力为：

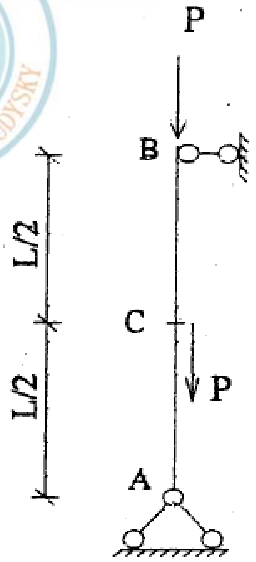
$$Q_{\max}=\frac{q_0}{3}L$$

综上述，最大正应力和最大剪应力分别为

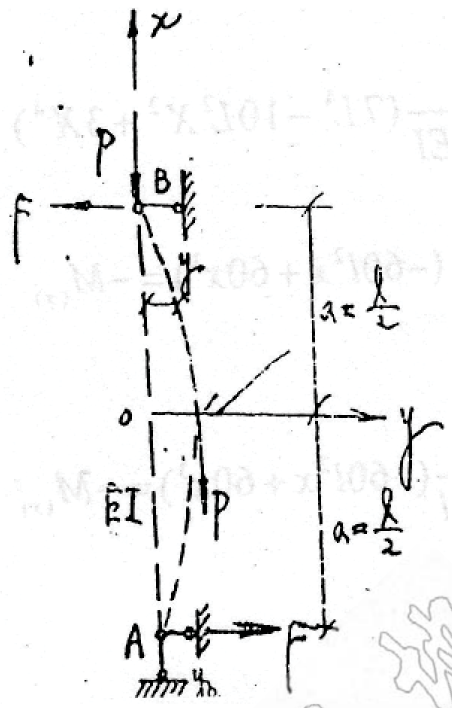
$$\text{最大正应力}=\frac{M_{\max}}{W_z}=\frac{\dfrac{q_0 l^2}{9\sqrt{3}}}{\dfrac{1}{6}a^3}=\frac{2q_0 l^2}{9\sqrt{3}}=0.385\frac{q_0 l^2}{a^3}$$

$$\text{最大剪应力}=1.5\frac{M_{\max}}{A}=1.5\frac{\dfrac{1}{3}q_0 l}{a^2}=\frac{q_0 l}{2a^2}$$

【9-1】（同济大学 2005 年硕士研究生入学考试试题）两端铰支均匀细长杆 AB，B 端作用有轴向压力 P，细长杆 AB 中点 C 作用相同数值的压力 P，如图所示。杆件的 EI 已知。试求压力 P 的临界值（写出计算临界压力 P_{cr} 的超越方程即可）



解：杆件在力 P 作用下的微变形图如下图示：



对 A 取矩，则由静力平衡可得：

$$F \cdot 2a = p \cdot y_0$$

即：

$$F = \frac{py_0}{2a}$$

则 $0<x<a$ 时，弯矩方程为：

$$M_{(x_1)} = py + F(a-x) = py + \frac{py_0}{2a}(a-x)$$

即：

$$EIY'' = M_{(Y)} = -Py - \frac{Py_0}{2a}(a-x)$$

令 $k^2 = \dfrac{p}{EI}$，则方程可以化成：

$$y'' + k^2 y = -k^2 \frac{y_0}{2a}(a-x)$$

解得：

$$Y = A_1 \sin kx + B_1 \cos kx - \frac{y_0}{2a}(a-x)$$

同理当 $a<x<2a$ 时，有：

$$y'' + 2k^2 y = 2k^2 \frac{y_0}{4a}(a+x)$$

解得：

$$Y = A_2\sqrt{2}\sin kx + B_2\sqrt{2}\cos kx + \frac{y_0}{4a}(a+x)$$

由 x=0 y=y₀ 得 $B_1 - \frac{y_0}{2} = y_0$ 和 $B_2 + \frac{y_0}{4} = y_0$

解得：

$$B_1 = \frac{3}{2}Y_0 \text{ 和 } B_2 = \frac{3}{4}Y_0$$

由 x=a y=0 得 $A_1\sin kxa + B_1\cos kxa = 0$

解得：

$$A_1 = -\frac{B_1\cos kxa}{\sin kxa} = \frac{\frac{3}{2}y_0}{tgka}$$

由 x=-a y=0 得 $-A_2\sin\sqrt{2}kxa + B_2\cos\sqrt{2}kxa = 0$，

又 x=0 $y'_{+0} = y'_{-0}$(即转角连续 $\theta_{+0} = \theta_{-0}$)

当 $x \geq 0$ $y' = \theta = A_1K\cos kx - B_1K\sin kx + \frac{y_0}{2a}$

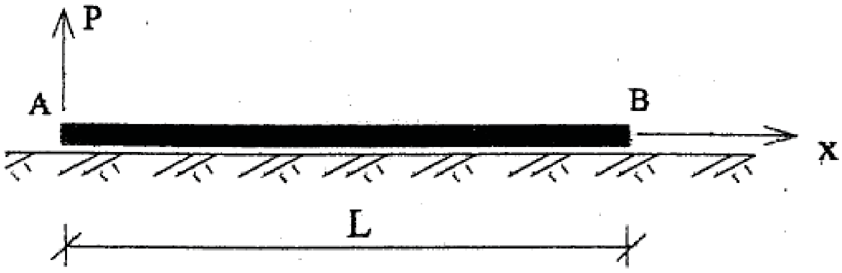
当 $x \leq 0$ $y' = \theta = A_2\sqrt{2}K\cos\sqrt{2}kx - B_2\sqrt{2}K\sin\sqrt{2}kx + \frac{y_0}{4a}$

$$y'_{+0} = A_1k + \frac{y_0}{2a} = -\frac{\frac{3}{2}ky_0}{tgka} + \frac{y_0}{2a} \quad y'_{-0} = A_2\sqrt{2}k + \frac{y_0}{4a} = -\frac{\frac{3}{4}\sqrt{2}ky_0}{tg\sqrt{2}ka} + \frac{y_0}{4a}$$

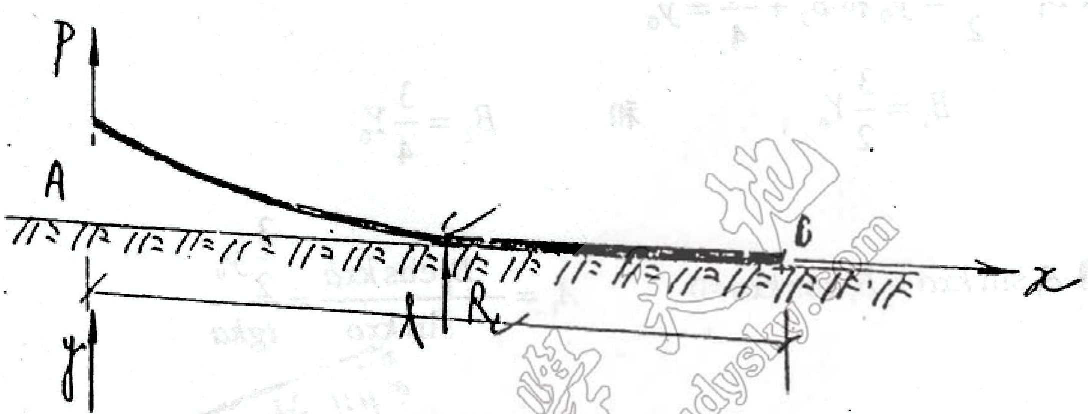
根据 $y'_{+0} = y'_{-0}$ 整理可得：

$$3\left(\frac{\sqrt{2}ka}{tg\sqrt{2}ka} + \frac{2kd}{tgka}\right) = 1$$

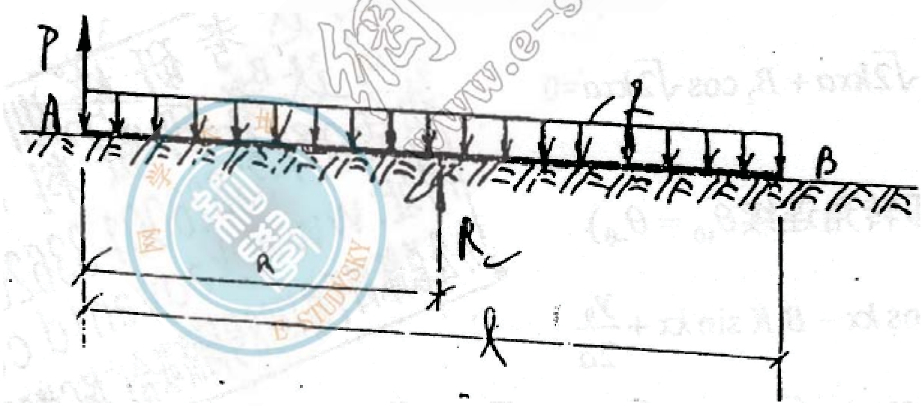
【6-1】（同济大学 2005 年硕士研究生入学考试试题）有一菱形截面杆 AB 放置在水平刚性平面上（如图所示），在其 A 端作用有铅直力 P，如设 P 小于杆重 qL 的一半时（q 是单位长度杆的重量），杆件的抗弯刚度为 EI。计算 A 端的挠度和转角。



解：假设在 P 的作用下杆 AB 能弯起到 C 点，长度为 a，如下图所示：



将 AB 杆简化成均布荷载，则荷载作用示意图如下所示：



对 C 点取矩，则：

$$M_C = pu - \frac{1}{2}ya^2 = 0$$

解得：

$$a = \frac{2p}{q}$$

则 A 点的挠度为：

$$y_A = \frac{Pa^3}{3EI} - \frac{qa^4}{8EI} = \frac{P(\frac{2p}{q})^3}{3EI} - \frac{q(\frac{2p}{q})^4}{8EI} = \frac{2P^4}{3q^3EI}$$

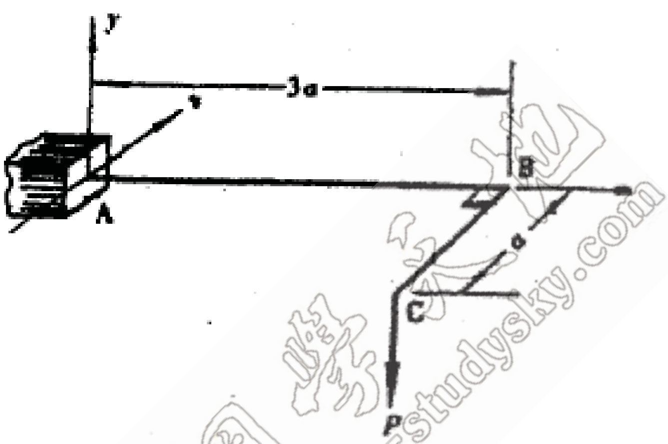
转角为：

$$\theta_A=\frac{Pa^2}{2EI}-\frac{qa^3}{6EI}=\frac{P(\frac{2p}{q})^2}{2EI}-\frac{q(\frac{2p}{q})^3}{6EI}=\frac{2P^3}{3q^2EI}$$

【8-1】（同济大学 2005 年硕士研究生入学考试试题）园形截面直杆 AB 的 A 端与基础固定连接，B 端与手柄 BC 刚性连结。P 力垂直作用于 AB 杆和手柄变形前所在平面。园杆 AB 和手柄的 E、G、I 相同，园杆 AB 的半径为 r，其它尺寸如图，AB 杆长为 3a，BC 杆长为 a。试计算：

（1）P 力作用点的位移。

（2）危险横截面上的最大剪应力。



解：

（1）C 点的竖直位移由弯矩引起的位移和扭矩引起的位移两部分组成，即：

$$\Delta cy=\Delta_{BY}^{AB}+\varphi_{BA}\times a+\Delta_{ey}^{bc}$$

代入相关数据可得：

$$\Delta cy=\frac{p(3a)^3}{3EI}+\frac{pa\cdot 3a}{GI}\times a+\frac{pa^3}{3EI}$$

$$=\frac{27pa^3}{3EI}+\frac{3Pa^3}{2GI}+\frac{Pa^3}{3EI}$$

$$=\frac{28Pa^3}{3EI}+\frac{Pa^2}{2GI}$$

危险点显然在 A 截面上，剪应力由扭矩和剪力两部分组成，即：

$$\tau_{max}=\tau_{max}^{Q}+\tau_{max}^{M_T}$$

解得：

$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{Q_{max}}{A} + \frac{M_T}{W} = \frac{4}{3}\frac{p}{\pi r^2} + \frac{pa}{\frac{\pi r^3}{2}}$$

$$= \frac{p}{\pi r^2}\left(\frac{4}{3} + \frac{2a}{r}\right)$$