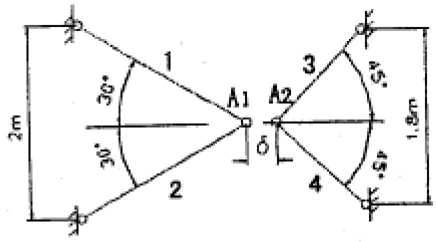
【2-1】（同济大学2003年硕士研究生入学考试试题）

图示结构共有四根钢杆，且各杆的截面面积相同。杆件的尺寸及布置如图所示，$\delta = A_1A_2 = 2$ mm。当把A_1与A_2装配在一起时，求各杆内所产生的应力。已知$E=200GPa$各杆截面积为$F=1cm^2$。



解：设各杆的轴力分别为N_1、N_2、N_3、N_4，当两点装配到一起后，会产生轴力，则由静力平衡条件，有

$$\sum F_x = 0 : (N_1 + N_2)\cos 30° = (N_3 + N_4)\cos 45°$$

由对称可知，$N_1 = N_2$，$N_3 = N_4$，所以上式变为：

$$2N_1 \cos 30 = 2N_3 \cos 45$$

化简求解可得：

$$N_1 = N_3 \frac{\cos 45}{\cos 30} = \sqrt{\frac{2}{3}} N_3 = 0.816 N_3$$

装配后，杆件会产生伸长变形，由对称性可知，1、2杆的伸长相等，3、4杆的变形相等，设分别为Δl_1、Δl_2，由于$A_1A_2 = \delta$，所以变形协调条件为：

$$\frac{\Delta l_2}{\cos 30} + \frac{\Delta l_3}{\cos 45} = \delta$$

即

$$\frac{N_1 l_1}{EA\cos 30^0} + \frac{N_3 l_3}{EA\cos 45^0} = \delta$$

化简可得：

$$2312N_1 + 1800N_3 = 4\times 10^7$$

结合静力平衡条件，可解得：

$$N_3 = 10850N，\ N_1 = 0.816N_3 = 8854\,N$$

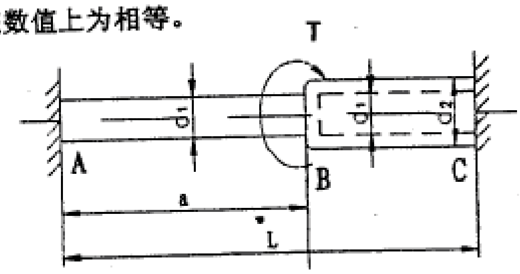
所以，各杆内部产生的应力为：

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{N}{A} = \frac{8854}{100} = 88.54\text{MPa}$$

$$\sigma_3 = \sigma_4 = \frac{N_3}{A} = \frac{10850}{100} = 108.5\text{MPa}$$

【 3-1 】（ 同 济 大 学 2003 年 硕 士 研 究 生 入 学 考 试 试 题 ）

杆 ABC 具有两端固定约束，在 B 截面处承受外扭矩 T。该杆 AB 段为一实心圆截面（直径$=d_1$），BC 段为空心圆截面（外径$=d_2$，内径$=d_1$）。试导出表示 a/L 比值的算式，使在 A 端与 C 端二者之反扭矩在数值上为相等。



解：设 A 端和 C 端的扭矩分别为 T_A、T_C，则由变形协调条件可知：

$$\varphi_{AB} = \varphi_{BC}$$

由物理条件可得：

$$\frac{T_A a}{GI_{\rho_{实}}} = \frac{T_C(l-a)}{GI_{\rho_{空}}}$$

化简可得：

$$T_A = \frac{l-a}{a} \cdot \frac{I_{\rho_{实}}}{I_{\rho_{空}}} \cdot T_C = \frac{l-a}{a} \cdot \frac{d_1^4}{d_2^4 - d_1^4} \cdot T_C$$

又由静力平衡条件可得：

$$T_A + T_C = T$$

要使 $T_A = T_C$，则根据上面的条件可得：

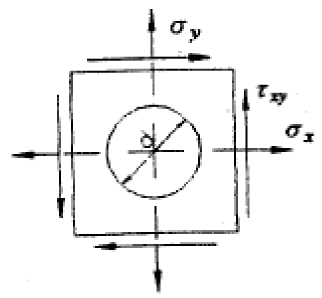
$$\frac{a}{l-a} = \frac{d_1^4}{d_2^4 - d_1^4}$$

解得：

$$\frac{a}{l} = \frac{d_1^4}{d_2^4}$$

【 3-1 】（ 同 济 大 学 2003 年 硕 士 研 究 生 入 学 考 试 试 题 ）

一薄板处于平面应力状态，板上画有直径 $d=20cm$ 的圆形。已知板的四周边承受均匀分布的应力：$\sigma_x=150MPa$，$\sigma_y=50MPa$，$\tau_{xy}=50MPa$，板材料的弹性常数为 $E=200GPa$，$\mu=0.3$。板变形后，板上所画圆形成为椭圆，试求椭圆两主轴的长度。



解：由题意可得，该点的主应力状态为：

$$\sigma_{\frac{1}{2}}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}^2}=\frac{150+50}{2}\pm\sqrt{(\frac{150+50}{2})^2+50^2}$$

$$=100\pm\sqrt{50^2+50^2}=100\pm70.7=^{170.7}_{29.3}\text{ MPa}$$

所以三个主应力分别为：$\sigma_1=170.7\text{MPa}$，$\sigma_1=29.3\text{MPa}$，$\sigma_1=0$

由胡克定理可得，该点的三个主应变为：

$$\varepsilon_1=\frac{\sigma_1}{E}-\nu\frac{\sigma_2}{E}=\frac{170.7}{2\times10^5}-0.3\frac{29.3}{2\times10^5}=0.806\times10^{-3}$$

$$\varepsilon_2=\frac{\sigma_2}{E}-\nu\frac{\sigma_1}{E}=\frac{29.3}{2\times10^5}-0.3\frac{170.7}{2\times10^5}=-0.108\times10^{-3}$$

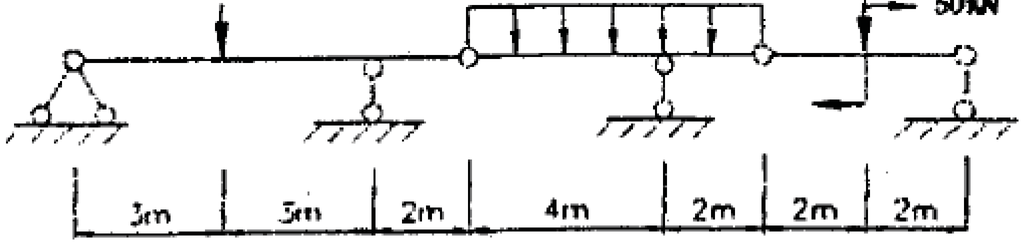
则圆的两轴变化后的长度分别为：

$$a=d(1+\varepsilon_1)=20.016cm$$

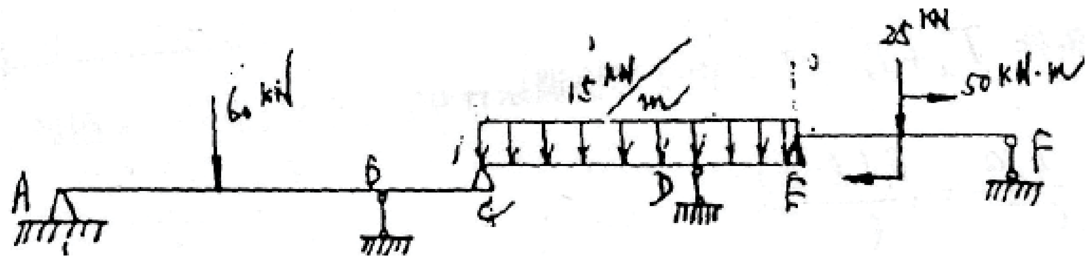
$$b=d(1+\varepsilon_2)=19.998cm$$

即为所求长短轴。

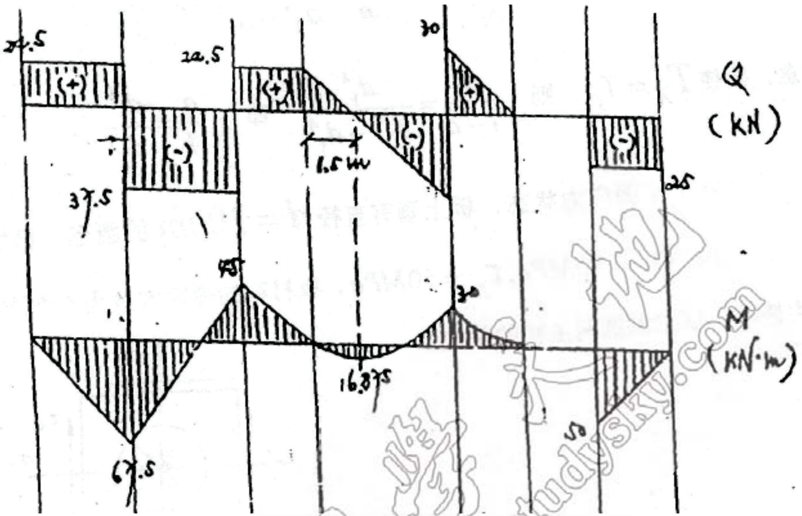
【4-1】（同济大学 2003 年硕士研究生入学考试试题）绘图示梁的弯矩图和剪力图。



解：将原结构化成如下的计算结构，计算顺序从右到左，如下图所示：

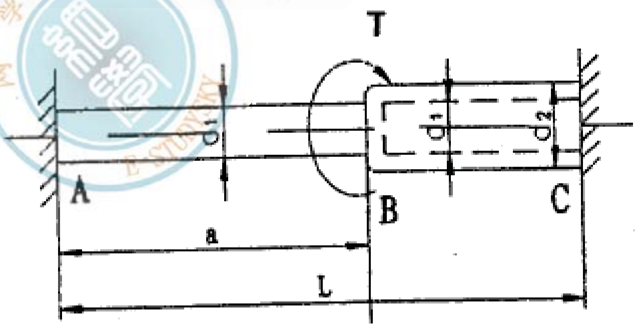


解得各支座的反力为：$F_{\mathrm{F}}=25\mathrm{KN}$，$F_{\mathrm{D}}=33.75\mathrm{KN}$，$F_{\mathrm{B}}=105\mathrm{KN}$，$F_{\mathrm{A}}=31.25\mathrm{KN}$。然后，即可画出弯矩图和剪力图，如下所示：



【4-1】（同济大学 2003 年硕士研究生入学考试试题）

一工字型截面钢梁受力如图，已知材料的许用应力[σ]=142 MPa，[τ]=90 MPa，校核其强度。



解：首先求解支座反力，由静力平衡条件可得：$F_{\mathrm{A}}=40\mathrm{KN}$，$F_{\mathrm{B}}=80\mathrm{KN}$。

则可求出简支梁中最大剪力为$F_{\mathrm{smax}}=80\mathrm{KN}$；CB 段中，最大弯矩为$M_{\max}=32\mathrm{KN\cdot m}$在 C 点。

最大正应力校核：

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{I_{\mathrm{z}}}y_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_{\mathrm{z}}}$$

式中，$I_z=2(\frac{1}{12}100\times11.4^3+100\times11.4\times94.3^2)+\frac{1}{12}7\times177.2^3=2360\text{cm}^3$

所以有：

$$W_z=\frac{I_z}{y_{\max}}=\frac{2360}{10}=236\text{cm}^3$$

最大正应力为：

$$\sigma_{\max}=\frac{32\times10^6}{236\times10^3}=136\text{MPa}<[\sigma]$$

满足强度要求。

最大剪应力校核：

$$\tau_{\max}=\frac{Q_{\max}S^*_{z\max}}{bI_z}=\frac{Q_{\max}}{b\frac{I_z}{S^*_{z\max}}}$$

式中，$S^*_{z\max}=10\times1.14\times9.43+0.7\times8.86\times\frac{8.86}{2}=135\text{cm}^3$

所以：

$$\frac{I_z}{S^*_{z\max}}=\frac{2360}{135}=17.5\text{cm}$$

所以最大剪应力为：

$$\tau_{\max}=\frac{80\times10^3}{7\times175}=65\text{MPa}<[\tau]$$

满足强度要求。

主应力校核。取截面“$C_{右}$”，，腹板与翼缘的交界处“a”点做校核，单元体如题图所示。取界面“$C_{右}$”，腹板与翼缘的交界处“a”点作校核，单元体如图。则有：

$$\sigma_a=\frac{M_{\max}}{I_z}y_a=\frac{32\times10^6}{2360\times10^4}\times88.6=120\text{MPa}$$

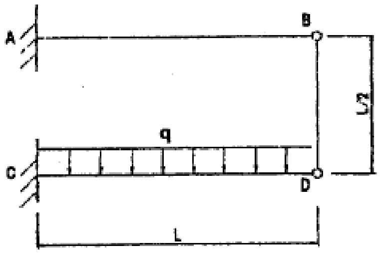
$$\sigma^a_{r_3}=\sqrt{\sigma_a^2+4\tau_a^2}=\sqrt{120^2+4\times52^2}=159\text{MPa}>[\sigma]$$

$$E=\frac{\sigma^a_{r_3}-[\sigma]}{[\sigma]}\times100\%=12\%>5\%$$

可见主应力强度不足。

【 4-1 】（ 同 济 大 学 2003 年 硕 士 研 究 生 入 学 考 试 试 题 ）

求 BD 杆的内力（略去剪切变形的影响）。已知 AB、CD 两梁的抗弯刚度相等为 EI，BD 杆抗拉压刚度为 EF。



解：在图示荷载的作用下，BD 杆会发生拉伸，设变形量为 Δl_{BD}，AB 梁产生向下的挠度，设为 y_B，则由变形协调条件可得，D 点的位移为杆 BD 杆的拉伸变量和 B 点的挠度。即：

$$y_D = y_B + \Delta l_{BD}$$

又：

$$y_B = \frac{N_{BD} l^3}{3EI}, y_D = \frac{ql^4}{8EI} - \frac{N_{BD} l^3}{3EI}, \Delta l_{BD} = \frac{N_{BD}\frac{l}{2}}{EF}$$

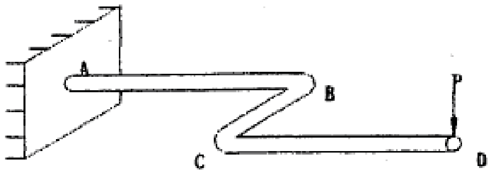
所以有

$$\frac{ql^4}{8EI} - \frac{N_{BD} l^3}{3EI} = \frac{N_{BD} l^3}{3EI} + \frac{N_{BD}\frac{l}{2}}{EF}$$

解得：

$$N_{BD} = \frac{\frac{ql^3}{8I}}{(\frac{2l^2}{3I} + \frac{1}{2F})} = \frac{3qFl^3}{16Fl^2 + 12I}$$

【8-1】（同济大学 2003 年硕士研究生入学考试试题）一水平托架 $ABCD$（如图所示），A 端为固定，D 端为自由。AB 及 CD 段的长度均为 1.5m；BC 与 AB 及 CD 成直角，其长度为 1.2m。该托架系由直径 100mm 的管子制成，其惯性矩为 $I = 3\times10^6\ mm^4$，极惯性矩为 $I_p = 6\times10^6\ mm^4$。试求出由于垂直荷载 P=2 kN 所引起自由端 D 处的垂直挠度及扭转角（假定 E=200 kN/mm^2，G=80 kN/mm^2；不计剪力影响）。

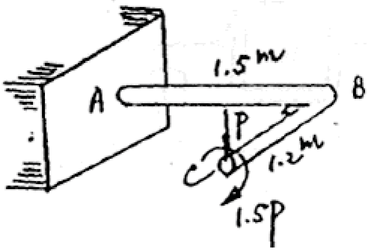


解：水平托架在垂直荷载 P 的作用下，产生复杂的变形，D 点的垂直挠度主要有两部分组成，其中一部分是由于弯曲产生的竖直位移和由于扭转引起的竖直位移，即为：

$$y_D = y_B + y_C + \theta_B \times \ell_{CD} + \varphi_{C-B} \times \ell_{CD} + \frac{P\ell_{CD}^3}{3EI}$$

下面，对上述的挠度和转角进行逐个求解。

将结构进行分解，首先研究 ABC 曲杆，如下所示



假设 B 点的挠度为 0，则 C 点的挠度为由于弯矩引起的垂直位移和 AB 扭转引起的垂直位移，即：

$$y_{\mathrm{C}} = y_{\mathrm{C}}^{P} + \varphi_{\mathrm{B\text{-}A}} \times l_{\mathrm{BC}}$$

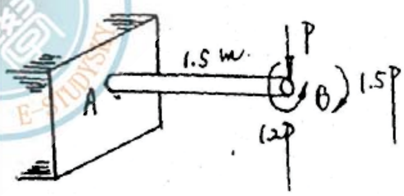
代入可得：

$$y_C = \frac{P1200^3}{3EI} + \frac{P1200 \times 1500}{GI} \times 1200 = \frac{2\times10^3 \times 1200^3}{3\times2\times10^5\times3\times10^6} + \frac{2\times10^3\times1200^2\times1500}{80\times10^3\times6\times10^6}$$
$$= 1.92 + 9 = 10.92mm$$

BC 杆的扭转角为：

$$\varphi_{C-B} = \frac{1.5P\times\ell_{CB}}{GI\rho} = \frac{1500\times2\times10^3\times1200}{80\times10^3\times6\times10^6} = 7.5\times10^{-3} rad$$

然后研究 AB 杆，如下图所示：



B点的位移由力 P 和弯矩引起，即：

$$y_{\mathrm{B}} = y_{\mathrm{B}}^{P} + y_{\mathrm{B}}^{M} = \frac{Pl_{\mathrm{AB}}^2}{3EI} + \frac{1.5Pl_{\mathrm{AB}}^2}{2EI}$$

$$= \frac{2\times10^3\times1500^3}{3\times2\times10^2\times3\times10^6} + \frac{2\times10^3\times1500\times1500^2}{2\times2\times3\times10^6}$$
$$= 3.75 + 5.625 = 9.375\mathrm{mm}$$

B点的转角也是由弯矩和 P 两个引起，即：

$$\theta_{\mathrm{B}} = \theta_{\mathrm{B}}^{P} + \theta_{\mathrm{B}}^{M} = \frac{Pl_{\mathrm{AB}}^2}{2EI} + \frac{1.5Pl_{\mathrm{AB}}^2}{EI}$$

$$= \frac{2\times10^3\times1500^2}{2\times2\times10^5\times3\times10^6} + \frac{2\times10^3\times1500\times1500}{2\times10^5\times3\times10^6}$$
$$= 3.75\times10^3 + 7.5\times10^{-3} = 11.25\times10^{-3}(\mathrm{rad})$$

所以D点垂直位移为：

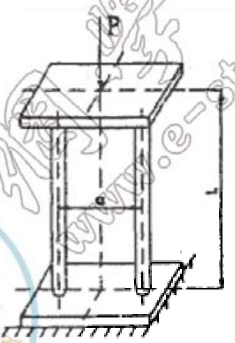
$$y_D = y_B + y_C + \theta_B \times \ell_{CD} + \varphi_{C-B} \times \ell_{CD} + \frac{P\ell_{CD}^3}{3EI}$$
$$= 9.375 + 10.92 + 11.25\times10^{-3}\times1500 + 7.5\times10^{-3}\times1500 + \frac{2\times10^3\times1500^3}{3\times2\times10^5\times3\times10^6}$$
$$= 20.295 + 28.125 + 3.75 = 52.17mm$$

D点的扭转角为：

$$\varphi_D = \varphi_{BA} + \varphi_{BC} = 7.5\times10^{-3}\times2 = 1.5\times10^{-2}$$

【9-1】（同济大学 2003 年硕士研究生入学考试试题）

两根材料、长度及截面尺寸完全相同的立柱（立柱的抗弯刚度 EI、截面积 F 及几何尺寸 L 和 a 均为已知），其上、下端分别与刚性块固结（如图所示）。试分析该结构有哪几种失稳的可能，并求出最小临界荷载的式子。（图中的立柱为对称布置，且荷载 P 作用于上刚性块的几何中心）



解：压杆几种可能的失稳形式：

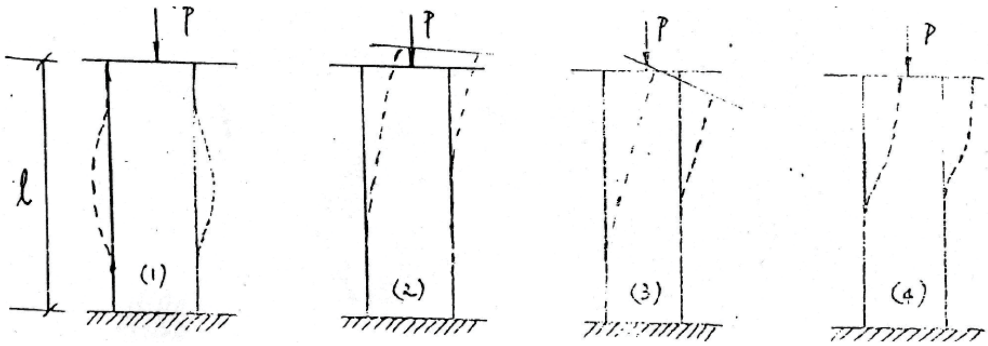
（1）每根压杆作为两端固定的压杆分别失稳；

（2）每根压杆均绕 z 轴失稳，此时杆端的支承视为一端固定，一端自由；

（3）两根压杆均绕 yz 轴平面内通过 0 点的某一轴（z 轴例外）失稳，此时杆端的支承仍为一端固定，一端自由；

（4）两根压杆均产生 z 方向的水平位移，然后每根压杆绕 y 轴失稳，此时压杆的长度系数 $\mu = 1$。

四种失稳形式如下所示：



比较可见，形式（2）比形式（3）容易失稳，而（1）、（4）和（2）失稳形式中的 I 均相等，但（2）失稳形式的长度系数为最大，即 $\mu=2$，故形式（2）最容易失稳，此时结构的最小临界压力为：

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}=\frac{\pi^2 E(2\frac{\pi d^4}{64})}{(2l)^2}=\frac{\pi^3 Ed^4}{128l^2}$$