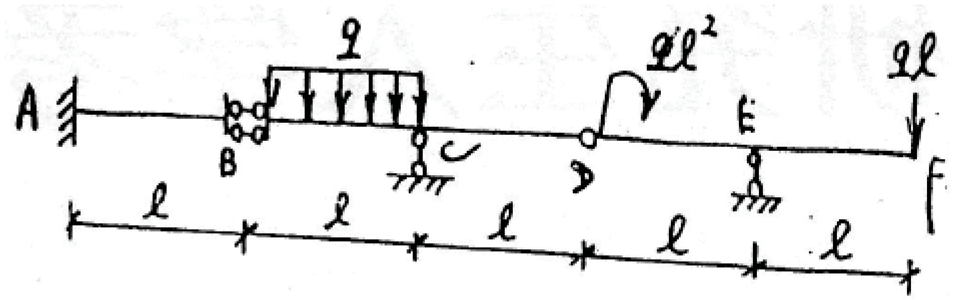
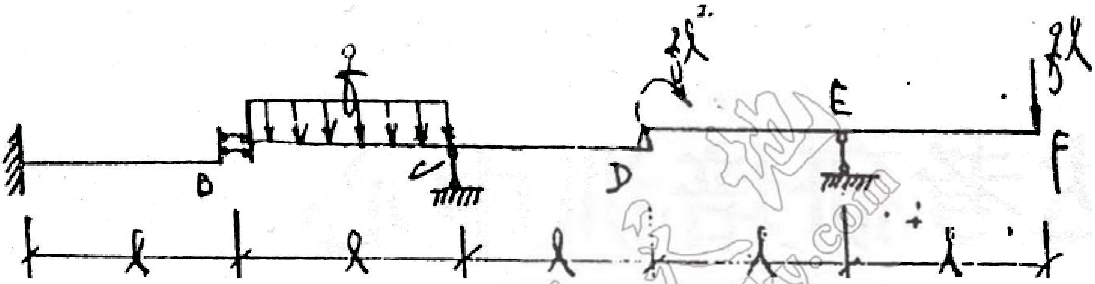
同济大学2006年《材料力学》考研试题与答案

一、画出图示梁的弯矩图和剪力图。（20分）



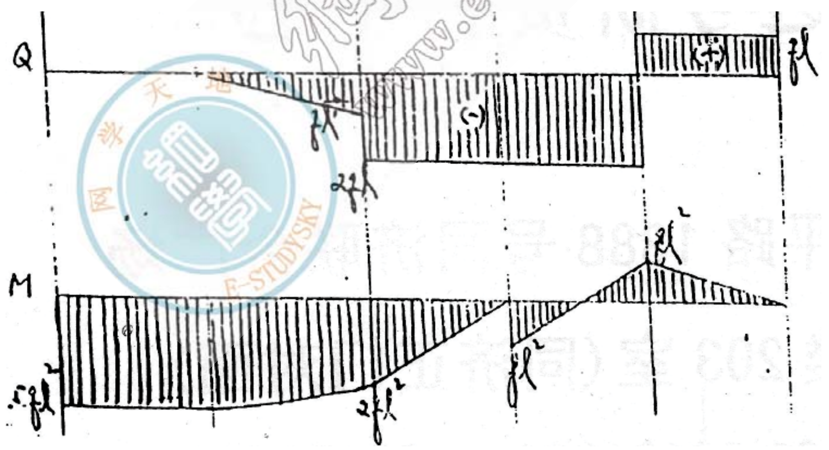
解：图示结构可化简成下图所示计算图：



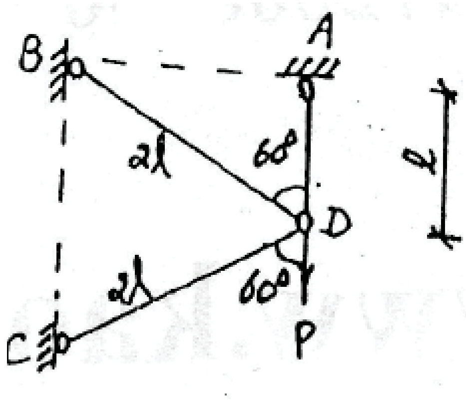
根据平衡条件计算支座反力解得支座反力为：

$$F_{\mathrm{E}}=3ql\ （向上），\ F_{\mathrm{E}}=\frac{11}{2}ql\ （向下）$$

由此，可以画出剪力图和弯矩图如下：



二、具有相同抗拉压刚度 EA 的三根杆 AD、BD 和 CD 形成图示构架。计算由荷载 P 引起的杆件轴力和铰 D 的位移。（22分）



解：很明显，图示结构为一次超静定，设三杆的变形量分别为Δl_{DB}、Δl_{DC}、Δl_{DA}，则由变形协调条件有：

$$\Delta l_{DB} = \Delta l_{DC},\quad \Delta l_{DA} = 2\Delta l_{DC}$$

设三杆的轴力为N_{DB}、N_{DC}、N_{DA}代入物理方程，可化简为：

$$\frac{N_{DA}L}{EA} = 2\frac{N_{DC}2L}{EA}$$

即：

$$N_{DA}L = 4N_{DC} = 4N_{DB}$$

在 D 点满足静力平衡，即：

$$N_{\mathrm{DB}} = N_{1x}$$
$$N_{\mathrm{DA}} = 2N_{\mathrm{DB}}\cos 60^{\circ} = P$$

结合变形协调条件可解得：

$$N_{DB} = \frac{P}{5}(\text{拉力})\qquad N_{1X} = \frac{P}{5}(\text{压力})\qquad N_{DA} = \frac{P}{5}(\text{拉力})$$

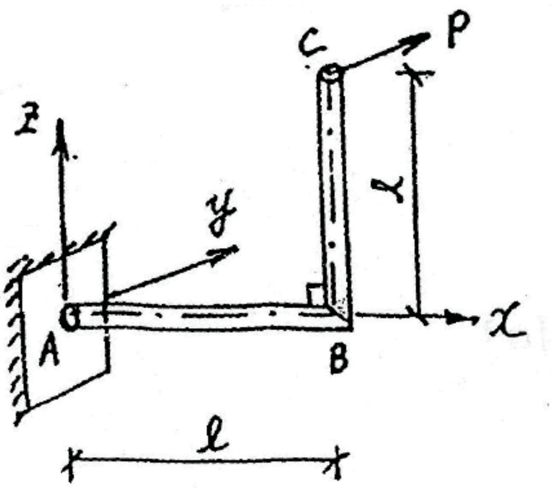
由于 DC 杆和 DB 杆的轴力大小相等，方向相反，因此两杆的水平位移量相互抵消，即：

$$\Delta_{DX} = 0$$

D 点的竖直位移为杆 DA 的变形量，即：

$$\Delta_{DY} = \frac{N_{DA}L}{EA} = \frac{\frac{4}{5}PL}{EA} = \frac{4PL}{5EA}(\downarrow)$$

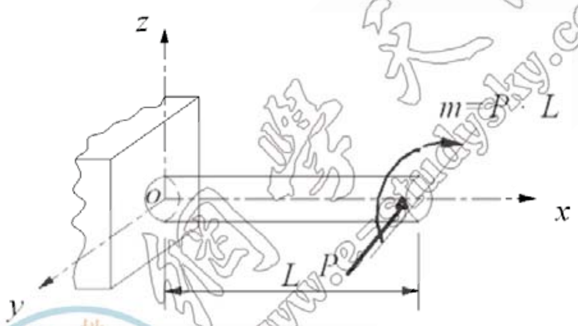
三、AB 和 CD 是材料相同、截面大小相同的园截面杆，界面半径 R，弹性模量为 E，柏松比为 v，AB 和 BC 相互垂直，且杆 AB 和 BC 分别沿水平和竖直方向，A 端固定，C 端受 Y 向的荷载 P 的作用，求 C 端的 Y 向位移。（22 分）



解：首先将 *B* 端固定，则可知 *BC* 杆在集中荷载 P 作用下发生弯曲，此时 *C* 端的位移为：

$$f_{cy1}=\frac{pl^3}{3EI}$$

去掉 *BC* 杆，松开 *B* 端，则可知 *AB* 杆受弯扭组合力的作用，受力示意图如下所示：



AB 杆在力 *P* 作用下的挠度为：

$$f_{cy2}=\frac{pl^3}{3EI}$$

在扭矩 *m* 作用下的转角为：

$$\varphi=\frac{ml}{GI_p}$$

由于转角引起的 *C* 端的位移为：

$$f_{cy3}=\varphi l=\frac{ml^2}{GI_p}$$

所以，*C* 点的 *y* 向位移为：

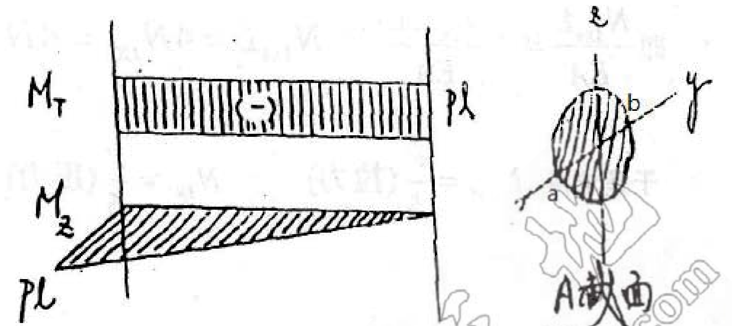
$$f_{cy}=f_{cy1}+f_{cy2}+f_{cy3}=\frac{2pl^3}{3EI}+\frac{pl^3}{GI_p}$$

又 $I=\frac{\pi R^4}{64}$，$I_p=\frac{\pi R^4}{32}$，$G=\frac{E}{2(1+\nu)}$，代入上式，可得 *C* 端的 *y* 向位移：

$$f_{cy} = \frac{128pl^3}{3\pi ER^4} + \frac{64(1+\nu)pl^3}{\pi ER^4}$$

四、若用第一强度理论（最大拉应力理论）校核强度，许用应力为$[\sigma]$，指出第三题结构的最危险点，并求允许的最大荷载 *P*。（17 分）

解：由题目可知，杆 *AB* 受到弯扭组合力的作用，绘制此时的弯矩图和扭矩图，如下图所示



易知 *A* 截面为危险截面，其中“*a*”、“*b*”两点为最危险点，如上图所示，两点的单元体分别如下图（a）、（b）所示：

（a）　　　　（b）

上图中的应力大小分别为

$$\sigma_x = \frac{M_{max}}{W_Z} = \frac{Pl}{\frac{\pi}{32}D^3}，\tau_x = \frac{M_{Tmax}}{W_\sigma} = \frac{Pl}{\frac{\pi}{16}D^3} \quad（W_\sigma = 2W_Z）$$

根据第一强度理论，相当应力为：

$$\sigma_{r1} = \sigma_{max} = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_x^2} \leqslant [\sigma]$$

即：

$$\sigma_{1r} = \frac{M_{max}}{2W_Z} + \sqrt{\left(\frac{M_{max}}{2W_Z}\right)^2 + \left(\frac{M_{Tmax}}{2W_Z}\right)^2} \leqslant [\sigma]$$

即：

$$\frac{M_{max}}{2W_Z} + \frac{\sqrt{\left(\frac{M_{max}}{2W_Z}\right)^2 + \left(\frac{M_{Tmax}}{2W_Z}\right)^2}}{2W_Z} \leqslant [\sigma]$$

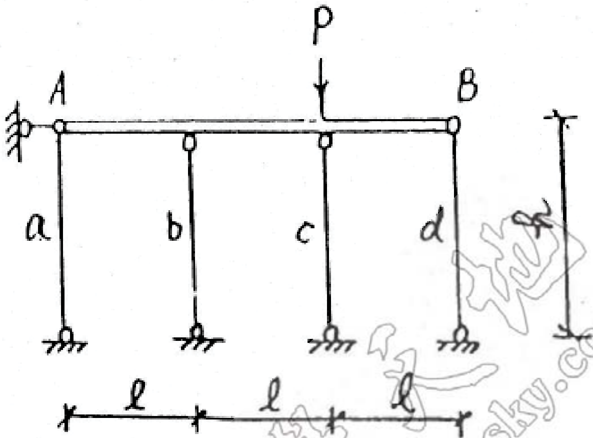
于是有：

$$\frac{Pl+\sqrt{(Pl)^2+(Pl)^2}}{2W_Z}\leqslant[\sigma]$$

解得：

$$(p)\leqslant\frac{2(\sigma)W_Z}{(1+\sqrt{2})l}$$

五、图示结构中，*AB* 为刚性杆，*a*、*b*、*c* 和 *d* 为相同的杆件，抗弯刚度为 *EI*，假定结构由于失稳引起整体破坏，求 P 得临界值。（16 分）



解：由于各杆两端相交，因此各杆件的临界荷载为：

$$P_{cr}^{i}=\frac{\pi^2 EI}{l^2}=\frac{\pi^2 EI}{h^2}$$

P 点达到临界值，需各杆均达相应临界点。由静力平衡条件可得，对 *A* 点取距，则：

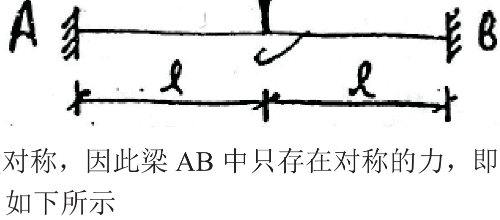
$$\sum M_A=0,\quad 2pl=p_{cr}^{b}\cdot l+p_{cr}^{c}\cdot 2l+p_{cr}^{d}\cdot 3l=p_{cr}^{i}\cdot 6l$$

由此求得 *P* 的临界值为：

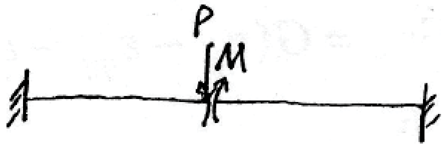
$$P_{cr}=\frac{p_{cr}^{i}\cdot 6l}{2l}=3p_{cr}^{i}=\frac{3\pi^2 EI}{h^2}=\frac{29.6EI}{h^2}$$

$$P_{cr}=\frac{p_{cr}^{i}\cdot 6l}{2l}=3p_{cr}^{i}=\frac{3\pi^2 EI}{h^2}=\frac{29.6EI}{h^2}$$

六、两端固定的等截面梁，跨中 C 处受横向集中力 *P* 作用，画出弯矩图（注：必须要求分析过程）（17 分）



解：结构对称，荷载对称，因此梁 AB 中只存在对称的力，即弯矩。将梁 AB 从中间断开，加一个对称的弯矩，如下所示



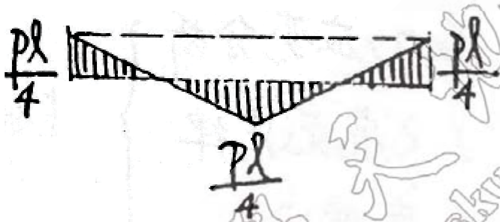
由变形协调条件可得，中间的转角为 0。分别求出在 P 作用下的中间处的转角和在 M 作用下的转角，两者叠加为 0，即：

$$\theta = \frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Ml}{EI} \cdot 2 = 0$$

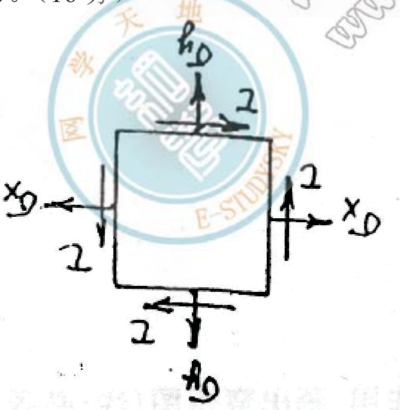
解得：

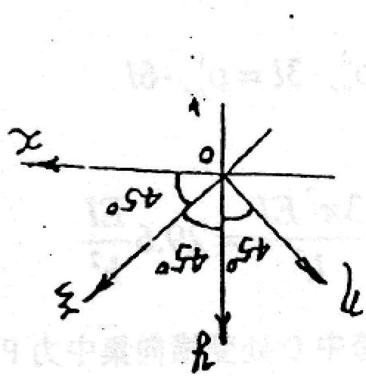
$$M = \frac{Pl}{4}$$

进而可以画出梁 AB 的弯矩图，如下所示：



七、设物体表面上 0 点处没有受外力作用，由时间测出 0 点处 x 向的应变为 ε_x，y 向的应变为 ε_y，ξ 方向的应变为 ε_ξ，求 σ_x、σ_y 和 τ。假定材料是各向同性弹性的，弹性模量为 E，柏松比为 v。（16 分）





解：由上图可得：

$$\varepsilon_{45} = \varepsilon_\xi = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{90}}{2} + \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_{90}}{2}\cos(2\times 45) - \frac{r_{xy}}{2}\sin(2\times 45)$$

化简可得：

$$r_{xy} = \varepsilon_0 - \varepsilon_{90} - 2\varepsilon_{45}$$

即：

$$r_{xy} = \varepsilon_{0^\circ} - \varepsilon_{90^\circ} - 2\varepsilon_\xi$$

则 x 方向的剪应力为：

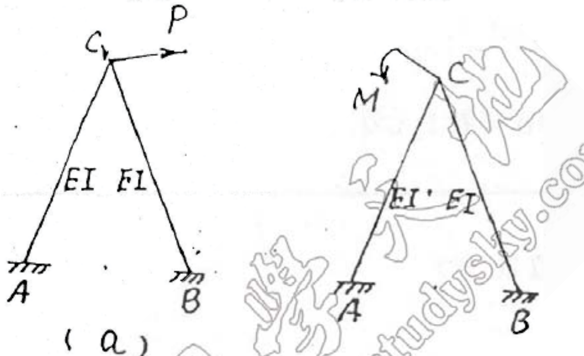
$$\tau_{xy} = Gr_{xy} = G(\varepsilon_{0^\circ} - \varepsilon_{90^\circ} - \varepsilon_{\xi})$$

正应力分别为：

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$$

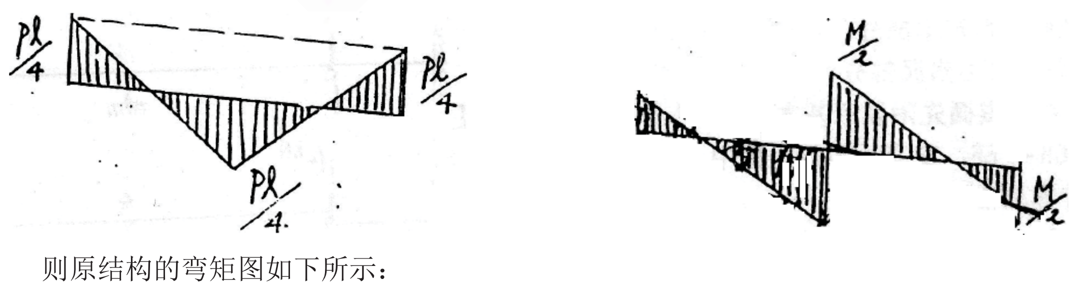
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)$$

八、AC 和 BC 是杆长均为 l 的等截面杆件，抗弯刚度为 EI，画出图（a）和（b）两种情况下的弯矩图。设不设轴向变形。（20 分）

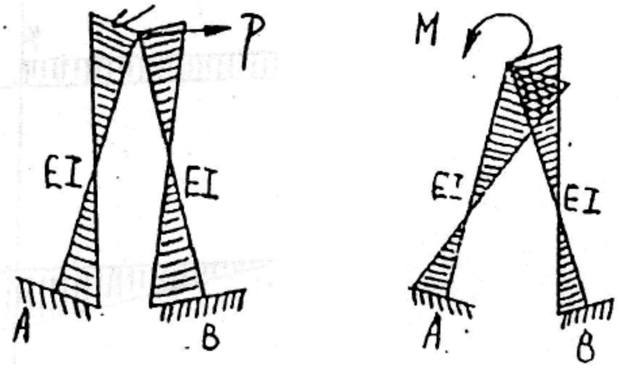


解：平面杆件受到垂直于该平面的外力作用时，只在平面内改变杆件形状不影响垂直平面方向的内力分布，即将上图中的曲杆“弯成”直的，如下图所示：

根据上述受力情形，可画出弯矩图，如下所示：



则原结构的弯矩图如下所示：


P
EI
EI
A
B
M
EI
EI
A
B