



国外部分杂题选讲

杨骏昭

南京外国语学校

Email: fizzydavid@qq.com

2020 年 8 月 3 日





前言

本次讲课分为三部分。

第一部分 **IOI2019** 题目选讲：选取了 IOI2019 第一天的一道试题。

第二部分波兰题目选讲：题目皆从波兰的一本算法竞赛书中选取。题目来源于波兰的一些算法比赛，如 POI、Algorithmic Engagements 等。

第三部分日本题目选讲：选取了日本知名算法竞赛网站 Atcoder 上的一些题目。题目主要来源于 KUPC (Kyoto University Programming Contest)。





前言

为了照顾大部分选手的听课体验，本次选取的题目风格清新，大部分题目都不是很难。（集训队选手可以自行绕道）题目大多数考察思维，基本不会涉及到高深的知识点，但是其中的一些 idea 希望能给大家带来一些启发。为了防止大家掉线，简单题将会均匀地分布在其中。希望大家能享受思考的乐趣，获得轻松愉快的听课体验。

对于题目中规模相同的变量，分析复杂度时为了简洁易懂可能会进行替换与合并。例如 $O(n + m)$ 可能会写作 $O(n)$ 。



Rect¹

Description

给定一个 n 行 m 列的矩阵，矩阵的每个位置上有一个整数。用 $a_{i,j}$ 表示第 i 行第 j 列的数，行和列从 0 开始编号。一个子矩阵由四个参数 r_1, r_2, c_1, c_2 决定，这个子矩阵合法当且仅当：

- $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq n - 2, 1 \leq c_1 \leq c_2 \leq m - 2$
- 对于每个子矩阵中的格子 $a_{i,j} (r_1 \leq i \leq r_2, c_1 \leq j \leq c_2)$ ，需满足 $a_{i,j} < \min(a_{i,c_1-1}, a_{i,c_2+1}, a_{r_1-1,j}, a_{r_2+1,j})$ 。

求合法的子矩阵个数。 $1 \leq n, m \leq 2500$



¹IOI2019 Day1

Game of tokens²

Description

给定一个 n 行 n 列的矩阵 A , 矩阵中每个位置有一个整数。Alice 和 Bob 正在玩游戏。他们准备了 n 个棋子, 编号为 1 到 n 。他们每次轮流取走一个棋子, Alice 先手, 当没有棋子可以取的时候游戏结束。

假设最终某个人取到的棋子的编号集合为 S , 那么他的得分为 $\sum_{i,j \in S} A_{i,j}$ 。游戏的目标是最大化自己的得分减去对方的得分。你需要用程序实现他们的最优策略。

$$1 \leq n \leq 40, |A_{i,j}| \leq 10^6$$



Chocolate³

Description

一块大巧克力板中有 n 行 m 列共 $n \times m$ 个小巧克力方格。初始这些方格都连在一起。每次你可以选择一块巧克力板，沿着某条横着或竖着的方格线把大的巧克力板切开成两块小巧克力板，且巧克力板被切开后保持原来的位置。不允许切到一半停下。不允许一刀切多个巧克力板。每切一刀都会有一个代价，这个代价与切的位置有关。若切开了原巧克力板的第 i 行与第 $i+1$ 行间的方格线，代价为 r_i 。若切开了原巧克力板的第 j 列与第 $j+1$ 列间的方格线，代价为 c_j 。求将大巧克力板切成 $n \times m$ 个小巧克力方格的最小总代价。

$$1 \leq n, m \leq 1000$$



³10th Polish Olympiad in Informatics

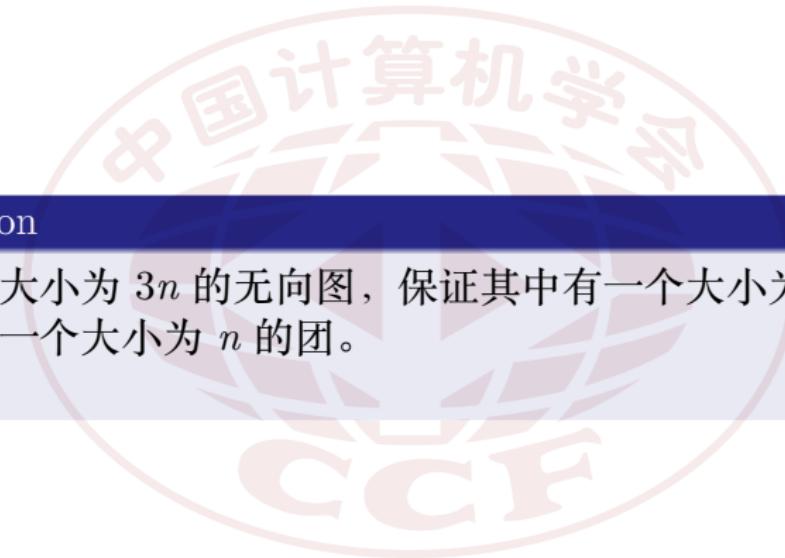


Party⁴

Description

给定一个大小为 $3n$ 的无向图，保证其中有一个大小为 $2n$ 的团，
请你找出一个大小为 n 的团。

$$n \leq 1000$$



Cave⁵

Description

给定一棵 n 个节点的树。Alice 和 Bob 正在玩游戏。Alice 先秘密地选定一个节点，Bob 需要猜出这个节点是哪个。Bob 每次可以询问一个节点，如果猜中了那么游戏结束，否则 Alice 将会告诉她选定的节点与 Bob 询问的节点的相对位置。（如果将询问节点作为根，Alice 会告诉 Bob 她选的节点在根的那个子树内）求 Bob 使用最优策略最坏情况下最少要询问多少次。

$$n \leq 10^5$$



Cave⁵

Description

给定一棵 n 个节点的树。Alice 和 Bob 正在玩游戏。Alice 先秘密地选定一个节点，Bob 需要猜出这个节点是哪个。Bob 每次可以询问一个节点，如果猜中了那么游戏结束，否则 Alice 将会告诉她选定的节点与 Bob 询问的节点的相对位置。（如果将询问节点作为根，Alice 会告诉 Bob 她选的节点在根的那个子树内）求 Bob 使用最优策略最坏情况下最少要询问多少次。

$$n \leq 10^5$$

一句话题意：给定一棵树，求它的点分树的最大深度的最小值。



⁵11th Polish Olympiad in Informatics

Fishes⁶

Description

给定一个 $n \times m$ 网格图，有些格子中有障碍物。给定 q 条橡皮筋，每个橡皮筋可以用一条不经过障碍物的长度 d_i 的有向环路来表示。两个橡皮筋等价是指其中一条橡皮筋可以通过伸缩或移动转化为另外一条橡皮筋。请你找出所有的等价类。

橡皮筋可以自交。橡皮筋可以穿过自己，但是不能穿过障碍物。

$1 \leq n, m, q \leq 1000, d_i \leq 10000$



⁶ Algorithmic Engagements 2009

Fibonacci sums⁷

Description

定义 Fibonacci 数列 $F_0 = F_1 = 1$, $F_i = F_{i-2} + F_{i-1}$ ($i \geq 2$)。每个正整数都可以被表示为一些 Fibonacci 数的和。定义正整数 X 的 **Fibonacci 表示** 为一个下标从 1 开始编号的序列 c , 满足:

- $c_i \in \{0, 1\}$
- $\sum_{i \geq 1} c_i F_i = X$
- 若 $c_i = 1$, 则 $c_{i+1} = 0$ 。

可以证明 Fibonacci 表示是唯一的。给定两个正整数的 Fibonacci 表示, 请你求出他们的和的 Fibonacci 表示。 Fibonacci 表示长度 $\leq 10^6$

⁷12th Polish Olympiad in Informatics



Axes of symmetry⁸

Description

给定一个不自交的 n 个顶点的多边形，求它的对称轴个数。

$$n \leq 10^5$$



⁸14th Polish Olympiad in Informatics

Ploughing⁹

Description

给定一个 $n \times m$ 的矩阵，矩阵中每个位置有一个非负整数。给定参数 K ，每次操作你可以选择将矩阵最左边一列或最右边一列或最上边一行或最下边一行删除，但是要求删除的这一列/行中的数的和不能超过 K 。问将矩阵删光的最小操作次数。

$n, m \leq 1000$

⁹13th Polish Olympiad in Informatics



Circular Game¹⁰

Description

给定一个长度为 L 的环，其中有 n 个格子被放了一个黑棋子或白棋子。Alice 和 Bob 正在玩游戏。Alice 执白，Bob 执黑。

Alice 先手。每回合玩家选择一个自己颜色的棋子，并将其向某个方向（顺时针或逆时针）移动至少一格，移动过程中不可以跳过别的棋子。若无法移动则输。双方使用最优策略，求游戏的结果。（可能平局）

$$L \leq 10^9, n \leq 10^6$$



¹⁰ Algorithmic Engagements 2009

Matching¹¹

Description

给定一个长度为 n 的序列 a , 一个长度为 m 的序列 b 。保证序列中没有相同元素。两个序列等价是指他们离散化后的结果相同。(即相对大小关系相同) 求 a 中有多少个连续子序列与 b 等价。

$$n, m \leq 10^5$$



¹¹Central European Olympiad in Informatics 2011

Termites¹²

Description

给定一个非负整数序列 a 。Alice 和 Bob 正在玩游戏。Alice 先手，他们轮流进行操作。每次操作可以选择一个与 0 相邻的非 0 元素，并将其变为 0。当所有元素都为 0 时游戏结束。最终得分为选择过的元素的和。双方使用最优策略，最大化自己的得分。求游戏结果。

$$n \leq 10^6$$



¹²Algorithmic Engagements 2010

Stamps 1¹³

Descriptions

给定一个 $2n \times 2n$ 的网格图，每个格子初始被染黑或染白。每次操作你可以选择一个大小为 $n \times n$ 的子矩阵并将其染黑，求将整个网格图染黑的最少操作次数。

$$2n \leq 1000$$



¹³https://atcoder.jp/contests/xmascon19/tasks/xmascon19_f



N and K¹⁴

Description

考虑所有值在 1 到 N 之间的单调上升整数序列，序列要满足其中不存在两个不同的数有倍数关系。给定 K ，询问所有最长的满足条件的序列中第 K 大的值最小是多少。多组询问。

#testcase $\leq 10^5$, $1 \leq N, K \leq 10^{18}$



¹⁴https://atcoder.jp/contests/kupc2013/tasks/kupc2013_h

Link-cut twotree¹⁵

Description

给定两棵树，每棵树有 n 个节点， m 个叶子，每条边上有一个权值，保证 1 号节点不是叶子。你需要将这两棵树的叶子一一对应并将对应的叶子合并，接着再选择 m 条边删掉，得到的 $2n - m$ 个节点的新图需要满足：

- 新图中恰好形成了两个联通块，且两个联通块都是树。
- 每棵树的 1 号节点在新图中不在同一个联通块内。

你可以用任意的方法对应叶子，请最小化删除的边的代价。

$$n \leq 10^5$$



¹⁵https://atcoder.jp/contests/kupc2019/tasks/kupc2019_j

べき乗数¹⁶

Description

定义正整数集合 S :

- 1 在集合 S 中。
- 若 x 在集合 S 中，则 $2^x, 3^x, 5^x, 7^x$ 也在集合 S 中。
- 无法由以上两条规则得到的元素都不在集合 S 中。

给定一个集合 S 中的数，求有多少个集合 S 中的数小于给定的数。给定的形式为一个由 2, 3, 5, 7 组成的长度为 n 的序列 a ，设 $b_n = a_n, b_i = a_i^{b_{i+1}} (1 \leq i < n)$ ，给定的数即为 b_1 。

$n \leq 1000$



¹⁶https://atcoder.jp/contests/kupc2014/tasks/kupc2014_1

SOULBLOCK¹⁷

Description

平面上有 n 个互不相交的圆，保证原点不在圆中。从原点处均匀随机地选取某个方向发射一颗子弹，子弹将按照直线行进。子弹碰到圆后，圆会与子弹一起向同一方向以同一速度行进，而碰到子弹的圆在行进过程中如果碰到了其他的圆，其他的圆也将与子弹一起以同一方向同一速度行进。注意这一过程中子弹、圆内区域相互之间都保持着不相交的状态。最终子弹会带着一些圆飞向无限的远方。求子弹带走的圆的数量的期望。

$$n \leq 2000$$



¹⁷https://atcoder.jp/contests/kupc2015/tasks/kupc2015_k

自転車走¹⁸

Description

有一条直线自行车赛道，总长为 L ，用实数 $x(0 \leq x \leq L)$ 来表示赛道中的位置。其中有 n 段不交的区间为地面，第 i 段区间为 $[a_i, b_i](b_i < a_{i+1})$ ，自行车只可以在地面上（即区间内）向终点骑行（不可逆行），无法在非地面的地方骑行。你可以使用若干次特技跳跃，每次使用特技你将会从你当前的位置 x 起跳，在 $x + W$ 处落地。起跳处和落地处必须为地面。保证起点为第一段区间的左端点，终点为最后一段区间的右端点。求从起点到终点所需的最少跳跃次数，或判断无法到达。

$$n \leq 10^5, L \leq 10^9$$



¹⁸https://atcoder.jp/contests/kupc2014/tasks/kupc2014_h

Q & A

谢谢大家。
Questions are welcomed.

