

杂题水讲

huhao

March 10, 2022

一张 n 个点的简单无向图，若没有三元环，边数最多有多少。

显然是 $\frac{n^2}{4}$ ，完全二分图就是一个合法的构造。

但是怎么证明不存在边更多的方案？

引理:

$$\sum_i d_i^2 \leq nm$$

证明: 考虑每一条边两个端点连出的边数和, 显然不大于 n 。

所以:

$$\frac{4m^2}{n} = \sum_i \left(\frac{2m}{n}\right)^2 \leq \sum_i d_i^2 \leq nm$$

所以 $m \leq \frac{n^2}{4}$ 。

大小为 a, b 的两堆石头，每次可以分别在两堆中取出 c, d 个，要求 $|ad - bc| = 1$ ，不能取的输，判断必胜状态。

只考虑 $\gcd(a, b) = 1$: $a < b$ 时, $2|a$ 必败, 否则必胜。

小 l 发明了一种可以在日后与图灵机相提并论的机器，因为他特别强，所以他不需要你帮他设计机器，只需要统计出有多少个 n 个点的机器即可，每一个机器都如下：

- 机器由点、有向边以及无相边构成，有且仅有两个有向边不连接图中两点：一条只有出点，一条只有入点。
- 所有点有且仅有一条出边，一条入边，一条无相边与它相连。
- 所有边均不是自环，由上一条可以发现不可能存在重边。
- 点与点，边与边均不可区分。
- 若将图的有向边视为无相边，则图联通。

$n \leq 5000$ 。

考虑给每一个点一个唯一的标号。

求：

$$(\sum_i \lfloor \frac{n}{i} \rfloor + \lfloor \sqrt{n} \rfloor) \bmod 2$$

在 $(2n)^2$ 的网格里有 $1 \sim (2n)^2$ 的数，AB 两人依次取数，除了第一次外都必须与之前至少一次取数位置相邻。

如果一个人取到的数总和较大，那么他就获胜了。AB 两人足够聪明。
试构造方案，使得 A/B 获胜。

休息一下

<https://www.luogu.com.cn/problem/P1737>

构造简单函数

sgn :

$$-1 + 2 \lim_{t \rightarrow +\infty} s(2^t x) = \text{sgn}(x)$$

$I(x) = x$:

不难发现 $4s(x) = 2 + x + o(x), x \rightarrow 0$ 。

所以

$$c^{-1}(4s(cx) - 2) = x + o(1), c \rightarrow 0$$

$[op]x$:

$$c^{-1}(4s(cx - \infty) - 2) + c^{-1}(4s(cx + \infty) - 2) = 0$$

$|x|$:

组合一下 $\text{sgn}, [op]x$ 即可。

拆一下二进制就做完了吧。

那个乘以 0.1 就找一条斜率 0.1 的切线就好了。

定义一个数是递增的，当且仅当它每一位数字都比前面的大。

给定一个大整数 (10^{10^6} 级别)，输出它最少是几个递增的数的和。

不难发现，一个递增的数可以表示为：

$$\sum_{i=1}^9 \frac{10^{p_i} - 1}{9}$$

简单讨论一下即可。

定义 Rascal 三角为：

- 第 i 行有 i 个元素，第一个和最后一个是 1。
- 位置为 (i, j) 的左上方，右上方，正上方的元素分别为：
 $(i-1, j-1), (i-1, j), (i-2, j-1)$ 。
- 每一个元素都是它左上方乘以右上方加一，然后除以正上方的元素。

试找出 Rascal 三角的通项公式。

定义 $f_{1,i} = f_{i,1} = 1, f_{i,j} = f_{i-1,j} + f_{i,j-1} \ (i, j \leq n)$ 。

求 $\det f$ 。

你有一个数组 $f_1 \dots f_n, f_i = (i \bmod n) + 1$, 你想通过若干次 swap 使得 $f_i = i$ 。

但是对于两个指针只能 swap 一次, 特别的, 一开始 $f_i, f_{(i \bmod n) + 1}$ 间不能使用 swap。

你可以引入若干新的变量来进行辅助, 试找到方案, 使得引入变量个数不超过 2。

solution

2 3 4 5 6 ...k 1 x y

x 3 4 5 6 ...k 1 2 y

x y 4 5 6 ...k 1 2 3

x y 3 5 6 ...k 1 2 4

x y 3 4 6 ...k 1 2 5

x y 3 4 5 ...k 1 2 6

... ..

x y 3 4 5 ...k-1 1 2 k

x y 3 4 5 ...k-1 k 2 1

x 2 3 4 5 ...k-1 k y 1

1 2 3 4 5 ...k-1 k y x

Guess 1

有 2^n 个人，背后都有 $1 \sim 2^n$ 的数，每个人都可以看到别人的数。
构造方案，使得至少一个人可以正确的猜出他背后的数。

有 n 个人，背后都有一个实数，每个人都可以看到别人的数。

每个人可以选择回答 A 或 B，要求从小到大排序后，相邻两个人回答的不同。

有 n 个人 n 个座位，一开始第一个人会随机坐一个座位，然后其他人会依次坐在一个位子上，他们会优先选择与他们编号相同的位置，如果这个位子有人了，那么随机坐一个位置。

求第 n 个人坐在每一个位置上的概率。

有 n 个商品，价格 p_i ，价值 q_i 。

你要依次买若干商品，买入时商品价值可能变为 0，最多变 k 次。

求最大的价值减价格和。

$nk \leq 10^8$ 。

求 1000 组下式的正整数解，要求大小不超过 10^{100} 。

$$a^2 + b^2 + c^2 = k(ab + bc + ca) + 1$$

对于排列 p , 给定若干组限制 a, b, c , 表示 p_b 是 p_a, p_b, p_c 的中位数。

你要求排列 p , 使得至少有一半限制被满足。

特别的, 至少存在一个排列使得所有限制均被满足。

给定字符串，求可以最少通过几次操作从空串变为这个字符串。

1. 在字符串开头或结尾加上一个字符。
2. 翻转字符串，并加在开头或结尾。

AB 两人都有不超过 n 个 $1 \sim n$ 的数，在 AB 交流不超过 $O(\log n)$ bit 的前提下找到中位数。

Coming soon!

一个 n 个点的无权无向图，通过传输不超过 70000bit 信息分别表示出所有点到 1 到 m 号点的距离。

$$n \leq 1000, m \leq 36$$

定义一个括号序列的值，为每一个括号的嵌套层数的乘积。
求所有长度 $2n$ 的括号序列的值的和。

给定 n ，找到两个硬币，可以用来模拟一个 n 面的骰子。
模拟必须在有限步内完成，硬币正反概率不必相同。