数学相关选讲

huhao

August 8, 2022

目录

- 数论
  - 模意义下乘法群
  - 积性函数
  - 不定方程
  - 高斯整数
  - 分圆多项式
- 线性代数
  - 行列式
    - 特殊矩阵行列式
    - LGV 引理
  - 线性空间，线性映射
  - 特征向量，特征值，对角化
  - 内积空间

~~常见的就不讲了，都到 NOI 了估计都会。~~

- 群论
  - 群，Abel 群，置换群
- 其它
  - 类欧几里得算法
  - 纳什均衡

群论

定义

- 代数系统 $(A, O_1, O_2, \ldots, O_m)$：若干元素组成的集合 A，以及若干元素间的运算 O_i，满足定义域是 A^k，值域是 A。
- 半群 $(A, \cdot)$：代数系统；$\cdot : A^2 \to A$，且 $x(yz) = (xy)z$。
- 群的积：$(A, \cdot) \times (B, \cdot) = \{A \times B, \cdot\}$，且 $(u, v) \cdot (a, b) = (u \cdot a, v \cdot b)$。
- 含幺半群 $(A, \cdot)$：半群；$\exists e, xe = x$。可以发现，$ex = x$。
- 群 $(A, \cdot)$：含幺半群；$\forall x, \exists y, yx = e$。可以证明，只要任意一个元素存在左逆元，那么它就有唯一的逆元。
- Abel 群 $(A, \cdot)$：群；$xy = yx$。Abel 群一个很重要的性质是 $a^k b^k = (ab)^k$。
- 循环群 $(A, \cdot)$：群；$\exists x, \forall y, \exists k, x = y^k$，不难发现，循环群是 Abel 群。

同构与同态

若 $f\colon A \to B$，$(A,\cdot),(B,\cdot)$ 是代数系统，且 $f(a)+f(b)=f(ab)$ 则称（f 是）A,B（的）同态。

如果 f 是双射，则称为同构。

容易验证，所有 n 维循环群是模 n 意义下加法群（下面简记为 Z_n）的同构。

容易证明，同态与同构会保留上一页中代数系统的性质。

生成元

在群中，定义 $\langle a \rangle = \{x | x = a^k\}$，$O\langle a \rangle = |\langle a \rangle|$ 称为 a 的阶，若 $O\langle x \rangle = |A|$，则称 x 为 A 的生成元。

不难发现。

- $x \in Z_n, O\langle x \rangle | n$。
- $O\langle x \rangle = O\langle -x \rangle$。

Abel 群的性质

所有有限 Abel 群 $(A, \cdot)$ **与** $Z_{i_1} \times Z_{i_2} \times \ldots Z_{i_n}$ **（若干循环群的积）同构**。

记 $|A| = n$，取 $O\langle x\rangle$ 最大的 x，则 $\langle x\rangle$ 构成子群，且可以找出 $n/O\langle x\rangle$ 个大小为 $O\langle x\rangle$ 集合，使得集合中所有元素乘上 $\langle x\rangle$ 中的元素依然在这个集合中（这可以不断找一个元素 u，然后生成集合 $\{u^k\}$，这样不同集合肯定是不交的）。

若 $O\langle x\rangle \neq n$，则有多个集合，若将这些集合间的乘运算规定为各取一个元素相乘，得到的结果在的集合。则这些集合和乘法也构成群 $(B, \cdot)$。

假如 $(B, \cdot)$ 与 $C = Z_{i_1} \times Z_{i_2} \times \ldots Z_{i_n}$ 同构，若能证明 A 与 $C \times Z_{O\langle x\rangle}$ 同构，则可根据归纳法证明。

不妨把 B 中的元素（一个集合），通过同构的函数映射至 C 中的元素，通过 $(j_1, j_2, \ldots j_n), 0 \leq j_k < i_k$ 表示。

续

对于群乘积的每一维 Z_{i_k}，可以在 $(0, 0, \ldots, 1, \ldots 0)$ 对应集合 t_k 中（第 k 位为 1）（暂时）任取一个元素 u_k 作为这个群的代表，假定 $u_k^{i_k} = e_A$（否则下面将在 t_k 中找到一个代替这个 u_k 的元素），因为后续证明需要用到这一点。

如果 $u_k^{i_k} \neq e_A$，那么有 $u_k^{i_k} = x^y$，则（下式用到了 $u_k^r = e_A \Rightarrow i_k|r$，这个可以是根据 t_k 的定义得到的）：

$$O\langle u_k x^l \rangle = i_k \frac{O\langle x \rangle}{(y + l i_k, O\langle x \rangle)}$$

根据 x 的定义，有：$i_k \leq (y + l i_k, O\langle x \rangle)$

取 $l = \lfloor \dfrac{y}{i_k} \rfloor$ 即可得到 $i_k|y$。

则 $u_k' = u_k x^{-\frac{y}{i_k}}$ 满足 $u_k'^{i_k} = e_A$，用 u_k' 代替任取的 u_k 即可。

续

对于集合 $(j_1,\dots j_n)$，不妨用 $r_{j_1,\dots j_n}=\prod_k u_k^{j_k}$ 代表（根据定义，则个元素一定在集合内）。

所以 $(\{r\},\cdot)$ 对运算封闭，它是一个群。可以将 A 中的元素表示为 $(u,v),u\in\{r\},v\in\langle x\rangle$，这样可以唯一的表示出 $|A|=|\{r\}|O\langle x\rangle$ 个元素，如果将这样的一一对应关系记为函数 f，则 f 是 $(A,\cdot)$ 与 $(\{r\},\cdot)\times(\langle x\rangle,\cdot)$ 的同构。

所以 A 与 $C\times Z_{O\langle x\rangle}$ 同构（这里没有证明 $\{r\}$ 与 C 同构，可以尝试自行证明。同时可以发现此部分可以不证明，因为已经可以归纳地找到与 r 同构的若干循环群的积了），证明完毕。

续

更进一步，我们知道了 A 与 $\prod_j Z_{i_j}$ 同构，则有：$|Z_{i_j}| \mid |A|$。

则对于 A 中的元素 x，通过同构映射至 $\prod_j Z_{i_j}$ 中的元素 $(x_1 \dots x_k)$，则 $x^{|A|}$ 可以映射至 $(x_1 \dots x_k)^{|A|} = (x_1^{|A|} \dots x_k^{|A|}) = (e_1 \dots e_k)$，即 $x^{|A|} = e$。

将 Abel 群分解为循环群

和证明中的构造方式一致：

不妨记要分解的 Abel 群为 A，遍历 A 中元素，找到 $O\langle x\rangle$ 最大的 x，提出所有 x^k。

然后将 A 划分为 $\dfrac{|A|}{O\langle x\rangle}$ 个集合，递归的将这些集合划分为循环群。

然后找出每个集合的代表元，这些代表元组成集合 B，就将 A 划分为了 $B \times \langle x\rangle$，$B$ 划分为循环群方式在上一步已经计算出来了。

这样每一次都会使要划分为循环群的元素个数除以 2，这样就可以 $O(n \log n)$ 的时间复杂度内划分开。

循环群性质

Z_{xy} **与** $Z_x \times Z_y$ **同构，其中** $(x, y) = 1$。

如果令 1_A 为 A 的生成元，则：

- $1_{xy} = (1_x, 1_y)$
- $(1_x, 1_y) = (1_{xy}^y, 1_{xy}^x)$

上面分别给出了双向的构造。

循环群 Z_n **生成元个数为** $\varphi(n)$。

考虑一个生成元 g，则可以将其它元素写成 g^k 的形式，$O\langle g^k \rangle = \dfrac{n}{(n, k)}$，则满足 $(n, k) = 1$ 的 g^k 是生成元，则一共是 $\varphi(n)$ 个。

数论

模意义下乘法（半）群

对于模 n 意义下的乘法半群，如果仅考虑 $Z_n^* = \{x|(n,x)=1\}$，那么这就是一个 Able 群（可以通过裴蜀定理证明），可以用 $\varphi(n)$ 来表示出它的元素个数。

由 Abel 群的性质可知：$(n,x)=1 \Rightarrow x^{\varphi(n)}=1$。

Z_p^*

对于奇质数 p，$Z_p^* = ([1, p-1], \times)$ 是 Abel 群。在这个群中，$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 = 0$ 的解的个数不超过 n：

若 x_n 是方程的解，那么 $f(x) = (x - x_n)g(x)$，而 $g(x)$ 最多有 $n-1$ 个解不在这 $1 + (n-1)$ 个解中的元素 y 这会使 $(y - x_n)$ 和 $g(y)$ 都不是 0。

根据这个定理（拉格朗日定理），可以证明上述群是循环群：

根据 Abel 群与若干循环群之积同构，可以得到：对于任意 $x \in [1, p-1]$，有 $O\langle x\rangle | p-1$，因为 $O\langle x\rangle$ 等于在每一个循环群上阶的最小公倍数。

所以不妨令 $S_d = \{x | O\langle x\rangle = d\}$，于是若 d 不是 $p-1$ 的约数，一定有 $S_d = \emptyset$。

又如果有$O\langle x\rangle = d$，那么 $x^k = 1$ 就是 $x^d = 1$ 的解，根据拉格朗日定理，这 d 个数就是唯 d 解，如果 $(k, d) = 1$，那么 $O\langle x^k\rangle = d$，即 $|S_d| = \varphi(d)$。

续

于是有 $S_d = 0$ 或 $S_d = \varphi(d)$（前者是上一页中把红色的字换成“没有”的情况），又有:

$$p - 1 = \sum_i |S_i| \leq \sum_{d|p-1} \varphi(d) = p - 1$$

所以 $|S_d| = \varphi(d)[d|p-1]$。所以 $S_{p-1} \neq \emptyset$，于是就证明了上面讨论的群是循环群。称原根为满足 $O\langle x\rangle = p - 1$ 的 x，即这个群的生成元。

不妨再看看模 p^2 下的情况，现在我们要证明的是存在 $x \in Z_{p^2}^*, O\langle x\rangle = (p-1)p = \varphi(p^2)$。

不妨考虑 p 的原根 g，对于 $g + ip, i \in Z^+$，有：$\varphi(p) | O\langle g + ip\rangle, O\langle g + ip\rangle | \varphi(p^2)$，所以 $O\langle g + ip\rangle \in \{\varphi(p), \varphi(p^2)\}$。

假如 $Z_{p^2}^*$ 不是循环群，则 $O\langle g\rangle = O\langle g + p\rangle = \varphi(p)$，则：

$$1 = (g+p)^{\phi(p)} = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p-1}{i} p^i g^{p-1-i} =$$

$$1 + g^{-1}p(p-1) + 0 + \cdots + 0 = 1 - g^{-1}p$$

则 $p | g^{-1}$，矛盾，所以 $g, g+p$ 一定有一个阶为 $\varphi(p^2)$。

考虑 g 为 $Z_{p^2}^*$ 的原根，则可以通过归纳法：假设 g 为 $Z_{p^{c-1}}^*$ 的原根，则在 $Z_{p^c}^*$ 中有 $O\langle g\rangle \in \{\varphi(p^{c-1}), \varphi(p^c)\}$，不妨设：

$$g^{\varphi(p^{c-2})} = g^{(p-1)p^{c-3}} = 1 + p^{c-2}k \neq 1$$

则：

$$g^{\varphi(p^{c-1})} = (1 + p^{c-2}k)^p = 1 + p^{c-1}k$$

由于 $k \neq 0$，也就是说 $g^{\varphi(p^{c-1})} \neq 1$，所以 $O\langle g\rangle = \varphi(p^c)$

类似的，考虑一下 $Z_{2p^c}^*$，不难证明：$f(x) = x \bmod p^c$ 是 $Z_{2p^c}^*$ 到 $Z_{p^c}^*$ 的同构映射，所以它的性质和 $Z_{p^c}^*$ 一样。

总结

对于奇质数 p，$Z_{p^c}^*, Z_{2p^c}^*$ 都是循环群，即有原根，且恰有 $\varphi(\varphi(p^c))$ 个。

不难验证，Z_2^*, Z_4^* 都有原根，分别是 $1; 1, 3$。

上述群中元素可以用一个正整数来代表，乘法操作就可以变为 $Z_{\varphi(p^c)}$ 上的加操作。

对于其它的整数 n，Z_n^* 是 Abel 群，可以划分为若干循环群之积。群中元素可以用一个数组代表，乘法操作也可以变为若干循环群积上的加操作。

例

给定 n, a, b，满足 $n \le 10^6, (b, n) = 1$，求下式解的个数：

$$x^a \bmod n = b$$

加强版：没有 $(b, n) = 1$ 的限制。

例

给定质数 n，求有多少组 (x, y)，满足：

- $1 \le x, y \le (n-1)n$
- $x^y \equiv y^x \mod n$

思考题：n 不一定是质数，$x, y \le \varphi(n)n$

积性函数

如果对于互质的 u, v，有 $f(u)f(v) = f(uv)$，那么称 f 为积性函数。

狄利克雷卷积:

$$(f * g)(n) = \sum_{i|n} f(i)g(\frac{n}{i})$$

莫比乌斯反演:

$$f = 1 * F \Rightarrow F = \mu * f$$

当然，有时使用下面这个变形会简单些:

$$[n = 1] = \sum_{d|n} \mu(d)$$

杜教筛

你知道 $\sum(f*g)(n), \sum f(n), \forall n \in Z^+$，需要求出 $\sum g(n)$。

$$\sum_{i=1}^{n}(f*g)(i) = \sum_{1\le ij\le n} f(i)g(j) = f(1)\color{red}{\sum_{j=1}^{n} g(j)} + \sum_{i=2}^{n} f(i)\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} g(j)$$

可以发现，只要知道 $\sum_{n=1}^{m}(f*g)(n), \sum_{n=1}^{m} f(n)$，所有 $m \le N^{\frac{2}{3}}, m = \dfrac{N}{d}$ 时的取值，就可以在 $O(N^{\frac{2}{3}})/O(N^{\frac{2}{3}}\log n)$ 的时间复杂度内求出 $\sum_{n=1}^{m} g(n)$ 的取值（m 范围与前文相同）。

值得注意的是，这里没有用到积性函数的性质，所以本页所有函数均不要求积性函数。

续

更进一步的，不难发现，上面的过程可以通过 f, g 的若干前缀和，得到 $f * g^{-1}$ 的前缀和。可以通过两步得到 $f * g$ 的若干前缀和：

$$
\begin{aligned}
I, g &\to g^{-1} \\
f, g^{-1} &\to f * g
\end{aligned}
$$

假如要求 $f * g$ 的前缀和，其中 f 是积性函数且若存在次数为 1 质因子则取值为 0（其它的数则称为 powerful number），g 的前缀和要能快速求出（只需要用到 $\frac{N}{d}$ 的值，但采用杜教筛的话会成为瓶颈）。

这时可以利用：

$$\sum_{i=1}^{n}(f * g)(i) = \sum_{i=1}^{n} f(i) \sum_{j=1}^{\frac{n}{i}} g(j)$$

因为 f 只有 $O(\sqrt{n})$ 处有值，所以能 $O(1)$ 求出 g 的前缀和的话复杂度就是 $O(\sqrt{n})$ 的。

同样的，f 只有 $O(\sqrt{n})$ 种不同的前缀和，所以也可以利用杜教筛求解。

复杂度证明

不难发现，只有形如 a^2b^3 的数才是 powerful number，所以可以用下式确定上界：

$$\sum_{i,j}[i^2j^3 \le n]$$

利用积分来逼近：

$$\int_0^{\sqrt{n}} \sqrt[3]{\frac{n}{x^2}}\mathrm{d}x = O(\sqrt{n})$$

应用

不难发现，如果 $f = g * h$， g, h 是积性函数，且 h 仅在 powerful number 处非 0，那么：

$$f(1) = g(1)h(1) = 1, f(p) = g(1)h(p) + h(1)g(p) = g(p)$$

也就是说，要求一个积性函数 f 的值，如果存在一个“方便求和”的积性函数 g，使得对于任意一个质数 p，有 $f(p) = g(p)$，且 $f(1) = 1$，就可以通过这种方法快速求解。

例

给定 n，对积性函数 f 的前 n 项求和，其中 $f(p^c) = p \oplus c$。

解

令 $g(x)=[x=1]+2[x=2]$，那么 $f=g*\varphi*h$，其中 h 仅在 powerful number 处非 0。

不定方程

形如 $a^2 + b^2 = c^2$ 就是不定方程，一般来说需要求出所有的整数解。

化为参数方程形式

注意到这是齐次的，可以通过两边同时除以 c^2 来变为求有理数解降维：$u^2 + v^2 = 1$。

不难发现 $u = 1$ 时，$v = 0$ 是唯一解，可以令 $u = kv + 1$，转为求 v, k 的解。

现在就变成了求 $k^2v^2 + 2kv + v^2 = 0$ 的解，剔除 $v = 0$ 就是 $(k^2 + 1)v + 2k = 0, v = \dfrac{-2k}{k^2+1}$，就得到了参数方程形式的解！

例：projeteuler785

$$15(x^2 + y^2 + z^2) = 34(xy + yz + zx)$$

枚举因数

求最小的可以表示为 100 组两个五边形数的和的五边形数。

$$\frac{1}{2}a(3a-1)=\frac{1}{2}b(3b-1)+\frac{1}{2}c(3c-1)$$

这可以通过枚举 $c(3c-1)$ 的约数求解：

$$(a-b)(3a+3b-1)=c(3c-1)$$

复杂度未知，但跑得特别快。

高斯整数

定义 $\mathbf{Z}=\{a+bi|a,b\in Z\}$，集合内元素称为高斯整数。

定义高斯整数间的整除为：$a|b\Leftrightarrow\dfrac{b}{a}\in\mathbf{Z}$。定义单位数为 $1,-1,i,-i$。

可以在 $\mathbf{Z}$ 上定义素数：类似 Z 上的定义，如果一个高斯整数的因数只有 1 和它本身，以及乘上一个单位数，就称为高斯素数。不妨记高斯素数的集合为 P。

定义 $\mathbf{Z}$ 上带余除法为：$a=bq+r$，其中 q 通过 $\dfrac{a}{b}$ 四舍五入取到，则 $|r|^2=|tb|^2=|(t_r^2+t_i^2)b^2|\le\dfrac{1}{2}|b|^2$。于是 $\mathbf{Z}$ 上可以进行欧几里得算法，用 exgcd 可以求出 $ax+by=(x,y)$ 的解。

若 $x|yz,x\in P$ 那么 $x|y$ 或 $x|z$：考虑若 x 不是 y 的因数，那么存在 $ax+by=1$，于是 $axz+byz=z$，则 $x|axz+byz=z$。

由此可以证明，$\mathbf{Z}$ 上也有唯一分解定律，不过任意一项都可能会乘以单位数。

高斯素数

如果 $x \in P$，那么一定有 $\overline{x} \in P$，证明：

反证（或者归纳），如果不满足，那么一定有范数最小的 x。

若 $\overline{x} = x_1 x_2$，那么 $x = \overline{x}_1 \overline{x}_2$ 与 $x \in P$ 矛盾。

如果 $|x|^2$ 是质数，那么 $x \in P$，证明：

若 $x = yz$，那么 $|x^2| = |y|^2|z|^2$，那么 y, z 中必有一个是单位数。

续

现在考虑证明找出高斯素数的分布，不妨考虑一个素数 p 会证明被分解：

- $p = 2 = (1+i)(1-i)$。
- $p \bmod 4 = 3$，那么 $|p|^2 = p^2$，若 $p \notin P$ 则 $p = xy$，则 $|x|^2|y|^2 = p^2$，则 $|x|^2 = |y|^2 = p$，又由于两数平方和不可能 $\mathrm{mod} 4 = 3$，所以 $p \in P$。
- $p \bmod 4 = 1$，则 p 是两个互为共轭的高斯素数的乘积，存在性将在下一页证明，唯一性由唯一分解定律保证。

续

对于 $p \bmod 4 = 1$ 的质数 p，令 $t = \dfrac{p-1}{2}$，则:

$$\prod_{i=1}^{t} i \bmod p = \prod_{i=1}^{t} -i \bmod p = s$$

则

$$s^2 \bmod p = \prod_{i=1}^{t} i(p-i) \bmod p = \prod_{i=1}^{p-1} i \bmod p = p-1$$

若 $p \in Z$，则由 $p|s^2+1$ 可知 $p|s+i$ 或 $p|s-i$，而两者均不可能（i 除不尽）。

所以 p 不是高斯质数，考虑到 $|p|^2 = |xy|^2 = p^2$，所以 $|x|^2 = |y|^2 = p$，则 $y = \overline{x}$。

例

有多少范数平方小于 n 的高斯整数没有非单位高斯整数的平方作为因子。

分圆多项式

称以下多项式为分圆多项式

$$\Phi_n(x) = \prod_{(i,n)=1} (x - \omega_n^i)$$

它给出了一个重要的多项式的因式分解：

$$\prod_i (x - \omega_n^i) = x^n - 1$$

续

现在来考察分圆多项式的性质:

$$\prod_{i|n} \Phi_i(x) = x^n - 1$$

证明可以考虑每一个 $(x - \omega_n^k)$ 被乘在了哪里。

分圆多项式系数都是整数。证明:

归纳证明，假如对于 $i < n, \Phi_i(x) \in Z[x]$，则
$\Phi_n(x) = (x^n - 1) \prod_{i<n,(i,n)=1} \Phi_i(x)$ 一定是整系数多项式。

续

分圆多项式不是任意两个整系数多项式的乘积。

这个证明过于繁琐（和前文关于阿贝尔群的证明一样），同时前置知识较难（需要用到高等代数），本文忽略证明。

例

求所有的能整除 $x^n - 1$ 的首项为 1 的整系数多项式的和，并输出带入 $x = 2$ 后的值，$n \leq 10^7$。

例

给定质数 n，求有多少个由 $1 \sim n^2$ 组成的 $n \times n$ 矩阵，可以通过若干次给某行或某列加减同一个数变为全 0 矩阵。

解

先全部减去一个 1，然后考虑第 i 行减了 a_i，第 j 列减了 b_j，则有：

$$\sum_i x^{a_i} \sum_i x^{b_i} = \sum_{i=0}^{n^2-1} x^i = \frac{x^{n^2}-1}{x-1} = \frac{\Phi_1(x)\Phi_n(x)\Phi_{n^2}(x)}{x-1} = \Phi_n(x)\Phi_{n^2}(x)$$

不难发现，$\Phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} x^i, \Phi_{n^2} = \sum_{i=0}^{n-1} x^{ni}$ 都恰有 n 个系数为 1 的，所以 $\sum_i x^{a_i}\Phi_n(x)$ 或是 $\sum_i x^{a_i}\Phi_{n^2}(x)$，且 a 可以是任意一个排列，b 同理，则一共有：

$2(n!)^2$ 种方案。

线性代数

行列式

~~在 OI 中，行列式可以和其它线代知识分开考虑。~~

行列式的定义：

$$\sum_p \operatorname{sgn}(p) \prod_i a_{i,p_i}$$

性质有：

- 某一行/列，加上令一行/列的若干倍，值不变。
- 交换两行/两列，值取相反数。
- 行列式的值等于下面两式的和：
  - 将第一行第一个元素变为 0 后矩阵的行列式。
  - 将第一行第一列删去后矩阵行列式乘以第一行第一个元素。

于是，可以解决：

例：300iq contest 2D

https://codeforces.com/gym/102331/problem/D

特殊行列式

范德蒙德行列式： $a_{i,j} = \hat{a}_i^j$： $\prod_{i<j}(a_j - a_i)$

循环矩阵行列式： $a_{i,j} = \hat{a}_{(i+j) \bmod n}$： $\prod_i f(\omega^i), f(x) = \sum_i \hat{a}_i x^i$

LGV 引理

求两个集合 A, B 间有多少组 n 条两两不相交的路径 $A_i \to B_i$，可以用：

$$\det |c(A_i, B_j)|$$

其中 $c(A_i, B_j)$ 表示从 A_i 到 B_j 的路径数。

线性空间

如果某一个集合 A，满足 $x \in A, y \in A \to x + y \in A$ 和 $x \in A \to \lambda x \in A, \lambda \in R$，就称 A 为线性空间，接下来的线性代数部分全在线性空间上讨论。

称一组元素 $\{x_k\}$ 的张成为：$\mathrm{span}(\{x_k\}) = \{y | y = \sum_i \lambda_i x_i, \lambda_k \in R\}$。

称一组元素 x_k 线性无关，当且仅当 $\sum_i \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \lambda = 0$。

如果 $x_1, x_2 \ldots$ 为 A 的一个张成，且 x 线性无关，则称它们为 A 的一组基。

不难发现，如果 A 有一组元素 $x_1, \ldots x_n$ 作为基，且元素个数是有限的，则称 A 是有限维的，称 $\dim A = n$。

称两个线性空间的直和 $A \oplus B$ 为 $\{u + v | u \in A, v \in B\}$，且要求 $w \in A \oplus B$ 则有唯一的 $u \in A, v \in B$ 使得 $w = u + v$。

如果 $U = A \oplus B$，且 $u + v = w \in U, u \in A, v \in B$，则称 $P_{U,A} w = u, P_{U,B} w = v$ 为一个投影。

线性映射

定义 $L: A \to B$ 为线性映射，当且仅当 A, B 为线性空间，且 $L(u+v) = L(u) + L(v), L(\lambda u) = \lambda L(u)$。

如果线性空间 A, B 是有限维的，若 a, b 分别是它们的基，可以将 L 写成矩阵的形式：$\dim A \times \dim B$ 的矩阵，第 i 列第 j 行的值为 $L_{i,j}$，则代表着 $L(a_i) = \sum_j L_{i,j} b_j$。

一般来说，矩阵需要写为：$M(L, a, b)$，即线性变换和它们的基底，如果 a, b 是明确的，或是在讨论中未曾变过，则可以简写为 $M(L)$。简单起见，下文有关矩阵操作的 L 均表示 $M(L)$。

特征值与特征向量，对角化

如果 $L : A \to A$ 的线性映射，则称 L 是 A 上的算子。

不妨重点关注满足 $B = L(B), B \subset A$ 的 B，称这样的 B 为 L 的不动子空间。

不妨重点关注 1 维的不动子空间，称这个线性空间中的元素为特征向量，如果 $Lv = \lambda v$，那么称 λ 为特征值。不难发现，特征向量可以有无穷多个，但特征值最多只有 $\dim A$ 个。下式给出了特征向量及对应的特征值的关系：

$$Lv = \lambda v, (L - \lambda)v = 0, \det(L - \lambda I) = 0$$

对角化

如果 L 有 $\dim A$ 个线性无关的特征向量 $v_1 \dots v_n$，那么 A 可以选取这些元素作为基，又 $L(v_i) = \lambda_i v_i$，所以这组基对应矩阵只有对角线上元素非 0，称这样的矩阵为对角矩阵。

对于 $x = \sum_i a_i v_i$，有：$L^k(x) = \sum_i a_i v_i \lambda_i^k$，这远远比在任取的基下的矩阵乘法简单。所以选取合适的基，使得矩阵对角化是一个优秀的方法。（但是通常来说，求出特征向量不简单）

更简单的，可以考虑一个每行都是 L 的一个特征向量的矩阵 X，考虑下式：

$$X^{-1} L X$$

对于 $M(L)$ 的基底 l_i，有：

$$X^{-1} L X l_i = X^{-1} L v_i = X^{-1} (\lambda_i v_i) = \lambda_i l_i$$

内积空间

在线性空间 V 中，定义内积 $\langle x, y\rangle$ 其中 $x, y \in V$，则它满足以下性质：

- 双线性：$L_1(x) = \langle x, y\rangle$ 和 $L_2(y) = \langle x, y\rangle$ 都是线性映射。
- 正定：$\langle x, x\rangle \geq 0$，取等条件为 $x = 0$。
- 共轭对称：$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$，在 R 中讨论则无需共轭。

定义 x, y 是正交的，当且仅当 $\langle x, y\rangle = 0$。

定义范数 $||x|| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$。

如果一组基 v_i 是彼此正交的，那么就有一个简单的办法计算范数（本页下文 $x_i = P_{V,v_i}x$ 即在 v_i 上的投影）：

$$||x||^2 = \langle x, x\rangle = \langle\sum_i x_i v_i, \sum_i x_i v_i\rangle = \sum_{i,j} x_i x_j \langle v_i, v_j\rangle = \sum_i x_i^2 ||v_i||^2$$

如果每一个 v_i 都是单位向量，即 $||v_i|| = 1$，那么 $||x||^2 = \sum_i x_i^2$。（即勾股定理）

规范正交基

如上页所述，基底 e_i 是单位的，且是两两正交的，会给使用带来极大的便利，称这一组基底为规范正交基。它还有以下性质（可以通过带入 $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ 理解）：

$$x = \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i$$

如果一个线性空间有基底 v_i，那么它一定有规范正交基：

依次对 $i \in [1, n]$ 执行：

取 $e_i = \dfrac{v_i - \sum_{j<i} \langle v_i, e_j \rangle e_j}{||v_i - \sum_{j<i} \langle v_i, e_j \rangle e_j||}$。

不难证明这还是一组基底，且两两正交，且都是单位的。

正交投影

对于任一元素 v，以及线性空间 U，和它的一组规范正交基 e，令:

$$P_U v = \langle v_i, e_i \rangle e_i$$

称为 v 在 U 上的正交投影（和前文定义的类似，如果 $W = U \oplus V, v \in V$，且 $\forall x \in U, y \in V, \langle x, y \rangle = 0$，那么 $P_{W,U} v = P_u v$)，它有如下性质:

$$\langle P_U, v \rangle = \min_{u \in U} \langle u, v \rangle$$

这类似于" 点到直线/平面/超平面最短的距离等于垂线长度"。

当然这里是在 R 上讨论的，因为没有在 C 上定义偏序关系。

例

上式给在线性空间中求距离（范数）最小值带来了很大的便利，比如：

定义两函数在 $[l, r]$ 上的平方距离为：

$$||f - g|| = \int_l^r ||f(x) - g(x)||^2 \mathrm{d}x$$

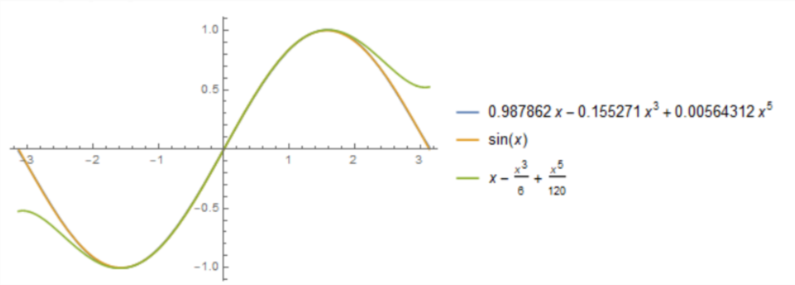
于是可以取内积为下式来使得范数为上式：

$$\langle f, g \rangle = \int_l^r f(x) g(x) \mathrm{d}x$$

如果要在 5 次实多项式中找出与 $\sin x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上平方距离最近的，利用上文的方法，可以得到答案 $f(x)$：

$$f(x) \approx 0.987862x - 0.155271x^3 + 0.00564312x^5$$

续


1.0
0.5
-0.5
-1.0
-3
-2
-1
1
2
3
$0.987862x - 0.155271x^3 + 0.00564312x^5$
$\sin(x)$
$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

例

给定矩阵 A 和向量 y，求向量 x 使得下式取最小值：

$$||Ax - y||$$

其它

类欧几里得算法

求:

$$\sum_i f(x)g(\lfloor\frac{ax+b}{c}\rfloor)$$

一般来说思路是枚举 $y=\lfloor\frac{ax+b}{c}\rfloor$，然后对满足条件的 x 求和。

这样就会将的 a,c 的位置对调，如果能将分子里大于等于于 c 的部分提到外面就可以变为类似欧几里得算法的复杂度:

$$(a,c)\to(a \bmod c, c)\to(c, a \bmod c)\to(c \bmod (a \bmod c), a \bmod c)\to\cdots$$

续

当然，也有一种更加通用的办法：

考虑直线 $y = \dfrac{ax}{b}$，依次考虑它和 $x = z, y = z, z \in N$ 的交点，并记录两个整数 $\hat{x}, \hat{y}$，初始为 0：

1. 和 $x = z, z \in N$ 相交：给 $\hat{x}$ 加一，给答案加上 $f(\hat{x})g(\hat{y})$。
2. 和 $y = z, z \in N$ 相交：给 $\hat{y}$ 加一。

然后从 $(a, b) = (1, 1)$ 开始，也就是操作为：$(21)^\infty$。

如果 $b \leftarrow b + ak$，那么就会 $2 \leftarrow 1^k 2$，例如 $(a, b) = (1, 3)$ 就是 $(1121)^\infty$。

如果 $a \leftarrow a + bk$，那么就会 $1 \leftarrow 2^k 1$，例如 $(a, b) = (7, 3)$ 就是 $(2212212221)^\infty$。

续

然后从就可以得到一棵树，记录了每一个元素是怎么一步步得到最终元素的。

每一层中，0 所衍生出的所有子树和 1 所衍生出的所有子树分别同构，那么就只要知道如下信息就可以很好的完成此题：

- 0 和 1 所衍生出的子树分别会给后面的子树带来的影响 e。
- 前面子树带来的影响为 e 时，0 和 1 所衍生出的子树的具体情况。

注意到如果某一层时 $u \leftarrow v^k u$，那么可以划分为 $u \leftarrow v^{\frac{k}{2}} v^{\frac{k}{2}} u$，在这里进行"快速幂"可以简化分析。

注意到有时操作区间并不是像理想中的那样恰好覆盖一颗完整的树（比如 i 上界不是 c 的倍数，或是 b 不为 0），此时可以像线段树一样查询。具体的：开始位置可以考虑第一次 $(ai + b) \bmod c < (a, c)$（如果 a, c 互质就是 $c | ai + b$）的 i，这是一个整点，往前 i 个 1 就是开始的位置；结束位置就是开始位置往后 $\lfloor \dfrac{a(n-1)+b}{c} \rfloor$ 个 1。

由于这样查询比较复杂，所以尽量使用我所介绍的第一种方法。

例：loj6440 万能欧几里得

$$\sum_{i=1}^{L} A^i B^{\lfloor \frac{ai+b}{c} \rfloor}$$

其中 $a, b, c \in Z$，A, B 是矩阵。

解答

注意到如果需要将 A^uB^v 变为 $A^{u+x}B^{v+y}$，可以通过下式解决：

$$A^x(A^uB^v)B^y = A^{u+x}B^{v+y}$$

再通过记录 (x, y) 就知道做到第二种方法中所需要的信息。

纳什均衡

你和另一个人分别有决策集合 A, B，你和对方需要给出混合策略 f, g，满足：

$$\sum_{a\in A} f(a) = \sum_{b\in B} g(b) = 1$$

纳什均衡就是对于下式：

$$\sum_{a\in A}\sum_{b\in B} f(a)g(b)v_{A/B}(a, b)$$

无论如何改变 f/g，$v_{A/B}$ 的和都不会比现在的大。

例

在下面所表示的收益表下，求纳什均衡：

v_A/v_B	x	y
x	3/-3	-2/+2
y	-2/+2	1/-1

不难发现：$f(x) = g(x) = \dfrac{3}{8}, g(y) = g(y) = \dfrac{5}{8}$。

线性规划求解零和纳什均衡

如果 $v_A + v_B = 0$，则称此博弈是零和的，所以可以认为第二个人想让第一个人的收益最小。

即需要求：

$$\max_f \min_g \sum_{i,j} f(i)g(j)v(i,j)$$

可以证明，上式与下式相等，也就是说一定能求出纳什均衡：

$$\min_g \max_f \sum_{i,j} f(i)g(j)v(i,j)$$

续

也就是说，要求：

$$
\begin{aligned}
& \max V. \\
\text{st.} \quad & \sum_i f(i) = 1 \\
& \sum_i f(i) v(i,j) \geq V, j \in B
\end{aligned}
$$

这就是线性规划问题。