水题讨论

huhao

June 4, 2020

Prologue

题目大家可能见过，~~见过可以重开一遍。~~

Prologue

题目大家可能见过，~~见过可以重开一遍。~~

题目不涉及高深算法/数据结构。

Prologue

题目大家可能见过，~~见过可以重开一遍。~~

题目不涉及高深算法/数据结构。

由于题目设计转化、构造等，一眼秒了可以略微给其它同学一些思考时间。

Prologue

题目大家可能见过，~~见过可以重开一遍。~~

题目不涉及高深算法/数据结构。

由于题目设计转化、构造等，一眼秒了可以略微给其它同学一些思考时间。

~~应该有需要画图的部分，可能需要一位好心人拍下黑板。~~

1.1 AGC040F Two Pieces

你有两个棋子，若某时刻棋子位置为：(a, b) $(a \leq b)$，那么你可以让它们位置变为：$(b, b), (a+1, b), (a, b+1)$

棋子不作区分，问 t 时刻后棋子位置为 (x, y) 的方案

两方案不同当且仅当某时刻棋子位置不同

$1 \leq t \leq 10^7, 0 \leq x \leq y \leq t$

Sample Input 1 Copy

```
5 1 3
```

Copy

Sample Output 1 Copy

```
4
```

Copy

Shown below are the four ways to move the pieces, where (x, y) represents the state where the two pieces are at coordinates x and y.

- $(0,0) \to (0,0) \to (0,1) \to (0,2) \to (0,3) \to (1,3)$
- $(0,0) \to (0,0) \to (0,1) \to (0,2) \to (1,2) \to (1,3)$
- $(0,0) \to (0,0) \to (0,1) \to (1,1) \to (1,2) \to (1,3)$
- $(0,0) \to (0,1) \to (1,1) \to (1,1) \to (1,2) \to (1,3)$

1.2 AGC040F solution

记状态 (a, b) 表示位置 $(a, a-b)$，那么每一次可以变为：
$(a+1, b+1), (a, b-1), (a, 0)$

为了去重，第二个操作要求 $b \geq 2$

1.2 AGC040F solution

记状态 (a, b) 表示位置 $(a, a-b)$，那么每一次可以变为：
$(a+1, b+1), (a, b-1), (a, 0)$

为了去重，第二个操作要求 $b \geq 2$

于是我们可以记一个由 $\{1, 2, 3\}$ 组成的操作序列，表示第 i 次的操作

那么操作序列长为 t，且 1 出现 y 次

1.2 AGC040F solution

记状态 (a, b) 表示位置 $(a, a-b)$，那么每一次可以变为：
$(a+1, b+1), (a, b-1), (a, 0)$

为了去重，第二个操作要求 $b \geq 2$

于是我们可以记一个由 $\{1, 2, 3\}$ 组成的操作序列，表示第 i 次的操作

那么操作序列长为 t，且 1 出现 y 次

于是可以只考虑 b 的值，考虑枚举 3 出现次数 t_0

1.2 AGC040F solution

记状态 (a,b) 表示位置 $(a,a-b)$，那么每一次可以变为：
$(a+1,b+1),(a,b-1),(a,0)$

为了去重，第二个操作要求 $b\geq 2$

于是我们可以记一个由 $\{1,2,3\}$ 组成的操作序列，表示第 i 次的操作

那么操作序列长为 t，且 1 出现 y 次

于是可以只考虑 b 的值，考虑枚举 3 出现次数 t_0

若 $t_0=0$，则是一个经典的格路计数题：求由 $(0,0)$ 走到 $(t-y,y-x)$，每一次可以走向量 $(1,-1)$ 或 $(1,1)$，不经过 $y=0,x>0$ 的方案数

1.2 AGC040F solution

记状态 (a, b) 表示位置 $(a, a-b)$，那么每一次可以变为：
$(a+1, b+1), (a, b-1), (a, 0)$

为了去重，第二个操作要求 $b \geq 2$

于是我们可以记一个由 $\{1, 2, 3\}$ 组成的操作序列，表示第 i 次的操作

那么操作序列长为 t，且 1 出现 y 次

于是可以只考虑 b 的值，考虑枚举 3 出现次数 t_0

若 $t_0 = 0$，则是一个经典的格路计数题：求由 $(0, 0)$ 走到 $(t-y, y-x)$，每一次可以走向量 $(1, -1)$ 或 $(1, 1)$，不经过 $y = 0, x > 0$ 的方案数

考虑推广，不考虑 3 的话会是一个到 $(t, y-(t-y-t_0))$ 的路径，只要在纵坐标为 $y-(t-y-t_0)-(y-x)$ 时执行一次 3 操作即可

1.2 AGC040F solution

记状态 (a, b) 表示位置 $(a, a-b)$，那么每一次可以变为：
$(a+1, b+1), (a, b-1), (a, 0)$

为了去重，第二个操作要求 $b \geq 2$

于是我们可以记一个由 $\{1, 2, 3\}$ 组成的操作序列，表示第 i 次的操作

那么操作序列长为 t，且 1 出现 y 次

于是可以只考虑 b 的值，考虑枚举 3 出现次数 t_0

若 $t_0 = 0$，则是一个经典的格路计数题：求由 $(0, 0)$ 走到 $(t-y, y-x)$，每一次可以走向量 $(1, -1)$ 或 $(1, 1)$，不经过 $y = 0, x > 0$ 的方案数

考虑推广，不考虑 3 的话会是一个到 $(t, y-(t-y-t_0))$ 的路径，只要在纵坐标为 $y-(t-y-t_0)-(y-x)$ 时执行一次 3 操作即可

另外如果一个位置可以插入 3 当且仅当后面的纵坐标都比它大，所以转化为：一共 $y-(t-y-t_0)-(y-x)+1$ 个位置，且最后一个必须放，前面的可放可不放，问方案数

2.1 IOI2018 机械娃娃

这~~不~~是一道交互题

有 3 种机械娃娃，分别为**起点**，**触发器**，**开关**。**起点**有 1 个（编号为 0），**触发器**有 m 个（编号 $1 \sim m$），**开关**有 s 个（编号 $-s \sim -1$），$1, m$ 为题目给定的，s 为你给定的。

运行过程可以理解为一个**球**在机械娃娃里运动，一开始**球**在**起点**，**开关**有 2 个出口（编号 X, Y），其它的有 1 个出口，每个出口都通向另一个娃娃。

当球在非**开关**的娃娃处时，球沿出口运动到下一娃娃；球在**开关**处时，若球是奇数次来到这个娃娃处，球沿 X 运动到下一娃娃，否则沿 Y。

当球经过**触发器**时，会记录下此**触发器**编号。

2.1 IOI2018 机械娃娃

给定 m，并给定一个长度为 n 的数组 A，你需要设计一个合法的管路（即确定出口编号），满足：

球会再次经过**起点**，且再次经过时：

- 所有**开关**经过偶数次，且经过的总次数不大于 2×10^7。
- 经过**触发器** n 次，且记录下的恰好为数组 A

$n \leq 2 \times 10^5$，**要求** $s \leq n + \lceil \log_2 n \rceil$

2.1 IOI2018 机械娃娃

给定 m，并给定一个长度为 n 的数组 A，你需要设计一个合法的管路（即确定出口编号），满足：

球会再次经过**起点**，且再次经过时：

- 所有**开关**经过偶数次，且经过的总次数不大于 2×10^7。
- 经过**触发器** n 次，且记录下的恰好为数组 A

$n \leq 2 \times 10^5$，**要求** $s \leq n + \lceil \log_2 n \rceil$

Hint: **想想** $n = 3/n = 7$

2.2 IOI2018 机械娃娃 Hint

显然的思路：新增一个“起点”，经过起点第 $i(i \leq n)$ 次后会过 A_i 并再次回到“起点”，经过第 $n+1$ 次后回到起点

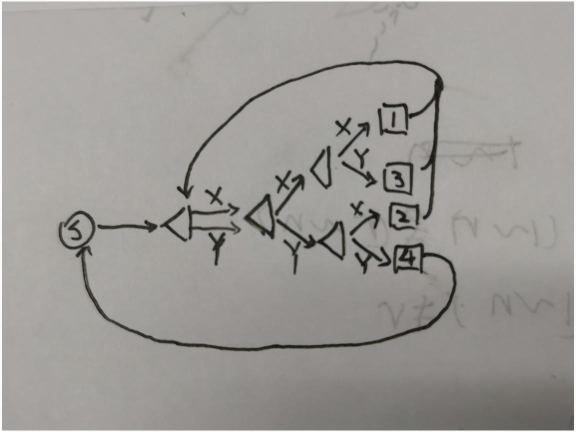
显然的思路：新增一个“起点”，经过起点第 $i(i \leq n)$ 次后会过 A_i 并再次回到“起点”，经过第 $n+1$ 次后回到起点

由此，可以手玩出 $n = 4, m = 4, A$ is unique 的情况

2.2 IOI2018 机械娃娃 Hint

显然的思路：新增一个“起点”，经过起点第 $i(i \le n)$ 次后会过 A_i 并再次回到“起点”，经过第 $n+1$ 次后回到起点

由此，可以手玩出 $n = 4, m = 4, A$ is unique 的情况



2.3 IOI2018 机械娃娃 solution

于是对于 $n = 2^k - 1$ 的情况，可以建一颗线段树，叶子就是每一个触发器，起点可以视为第 2^k 个叶子。

2.3 IOI2018 机械娃娃 solution

于是对于 $n = 2^k - 1$ 的情况，可以建一颗线段树，叶子就是每一个触发器，起点可以视为第 2^k 个叶子。

对于其它情况，可以视为连了一个空叶子（即直接连向“起点”），这样可以用 $s = 4n$ 解出此题。

2.3 IOI2018 机械娃娃 solution

于是对于 $n = 2^k - 1$ 的情况，可以建一颗线段树，叶子就是每一个触发器，起点可以视为第 2^k 个叶子。

对于其它情况，可以视为连了一个空叶子（即直接连向“起点”），这样可以用 $s = 4n$ 解出此题。

如果一个开关两条边都连向“起点”，可以删去这个点，又有触发器只与相对顺序有关，只有代表开关的叶子固定了位置。

2.3 IOI2018 机械娃娃 solution

于是对于 $n = 2^k - 1$ 的情况，可以建一颗线段树，叶子就是每一个触发器，起点可以视为第 2^k 个叶子。

对于其它情况，可以视为连了一个空叶子（即直接连向“起点”），这样可以用 $s = 4n$ 解出此题。

如果一个开关两条边都连向“起点”，可以删去这个点，又有触发器只与相对顺序有关，只有代表开关的叶子固定了位置。

于是可以尽可能地用靠近这个叶子的点（也就是最后面的 $n + 1$ 个点，其中代表开关的叶子在倒数第 1 号点），可以证明，这只用到 $n + \lceil \log_2 n \rceil$ 的开关

Thanks for listening!