组合数学选讲

huhao

June 30, 2022

一些组合恒等式

$$\binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m}$$

$$\binom{n}{m} = \frac{n}{m}\binom{n-1}{m-1}$$

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{n-m, m-k, k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

$$\sum_{i=l}^{r}\binom{i}{m} = \binom{r+1}{m+1} - \binom{l}{m+1}$$

$$\sum_{i}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

组合数行求和

二项式定理:

$$f_n(x) = (1+x)^n = \sum_i \binom{n}{i} x^i$$

带入 $x = 1$ 可以知道:

$$f_n(1) = 2^n = \sum_i \binom{n}{i}$$

续

带入 $\omega_k = \cos \frac{2\pi}{k} + i \sin \frac{2\pi}{k}$ 的 $0 \sim k-1$ 次幂:

$$f(\omega_k^j) = (1 + \omega_k^j)^n = \sum_i \binom{n}{i} \omega_k^{ij}$$

对上式所有 j 求和:

$$\sum_j f(\omega_k^j) = \sum_i \sum_j \binom{n}{i} \omega_k^{ij} = \sum_i \binom{n}{i} [k|i]k$$

续

更一般的:

$$\sum_j \omega_k^{jt} f(\omega_k^j) = \sum_i \sum_j \binom{n}{i} \omega_k^{(i+t)j} = \sum_i \binom{n}{i} [k|i+t] k$$

更更一般的，这个方法对于所有收敛半径大于 1 的幂级数都是有效的:

$$\frac{1}{k} \sum_j \omega_k^{tj} g(\omega_k^j) = \sum_i g_i [k|i+t]$$

反演

如果有 $f = Ag$ 那么就有 $g = A^{-1}f$。

例如 $A_{x,y} = \binom{x}{y}$ 因为:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{u}{i}\binom{i}{v}(-1)^{i-v} = [u = v]$$

所以 $A^{-1}_{x,y} = \binom{x}{y}(-1)^{x-y}$，那么就有:

$$f_n = \sum_i \binom{n}{i} g_i \Leftrightarrow g_n = \sum_i (-1)^{n-i}\binom{n}{i} f_i$$

续

再例如 $A_{x,y} = [x \in y], A_{x,y} = [x|y], A_{x,y} = x - y \dots$

斯特林数

第二类斯特林数 $\left\{ {n \atop m} \right\}$ 表示将 n 个不同的元素放入 m 个相同的集合中的方案数。

第一类斯特林数 $\left[{n \atop m} \right]$ 表示将 $1 \sim n$ 的轮换数为 m 的方案数。

根据定义，可以得到递推式：

$$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{Bmatrix} + m\begin{Bmatrix} n-1 \\ m \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}$$

续

不难发现：

$$x^{\overline{n}} = \sum_i x^i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_i x^i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} (-1)^{n-i}$$

$$x^n = \sum_i x^{\underline{i}} \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix}$$

上两式的可以根据递推式得到，下面的可以用给 n 个不同的物体染 x 种颜色推出。

续

又由于:

$$x^n = \sum_i \left\{ n \atop i \right\} \sum_m \left[i \atop m \right] x^m (-1)^{i-m}$$

固定 n, m，则有:

$$[n = m] = \sum_i \left\{ n \atop i \right\} \left[i \atop m \right] (-1)^{i-m}$$

续

不难发现：

$$
\begin{aligned}
&\sum_i {n \brace i} (-1)^{n-i} x^{\overline{i}} \\
=&\sum_i {n \brace i} (-1)^{n-i} \sum_j x^j {i \brack j} \\
=&\sum_{i,j} (-1)^{n-i} x^j {n \brace i} {i \brack j} \\
=&x^n
\end{aligned}
$$

续

若记 $A_{i,j} = \left\{ {i \atop j} \right\}$，那么 $A^{-1}_{i,j} = \left[{i \atop j} \right](-1)^{i-j}$，$A$ 所对应的就是斯特林反演。

习题

2018 雅礼集训方阵

给定 $n \times m$ 的矩阵，每个格子填上 $[1, c]$ 中的数字，求任意两行、两列均不同的方案数。$n, m \leq 5000$。

HNOI2019 白兔之舞

给定矩阵 W 和正整数 L, k，对于 $t \in [0, k)$ 求：

$$\sum_i [k|i+t] W^i \binom{L}{i}$$

$k \leq 10^5$

计算

$$\left(\sum_{k=0}^{n} f(k) \times x^k \times \binom{n}{k}\right) \bmod p$$

的值。其中 n, x, p 为给定的整数，$f(k)$ 为给定的一个 m 次多项式 $f(k) = a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + \cdots + a_m k^m$。

$1 \leq n, x, p \leq 10^9, 0 \leq a_i \leq 10^9, 0 \leq m \leq \min(n, 1000)$。

思考题

$$\sum_k \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}$$

$$\sum_i \binom{m}{2i}\binom{m-2i}{n-i}2^{2i}$$