线性代数

huhao

February 6, 2023

基础知识

- ・线性空间
- ・基
- ・线性变换
- ・矩阵、基变换

特征值、特征向量、特征多项式

对于矩阵 A,满足 $Av=\lambda v$ 的 λ 是特征值,v 是特征向量。 不难发现,当且仅当 $\det(A-\lambda I)=0$, λ 是特征向量,不妨称 $f(x)=\det(A-xI)$ 为 A 的特征多项式。

求:

$$\begin{bmatrix} & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

的特征多项式。

Cayley-Hamilton Theorem

若 f 是 A 的特征多项式,则 f(A) = 0。

所以 $A^n = (x^n \mod f)|_{x=A}$ 。

综合此页和上一页的内容可以得到常系数齐次线性递推的做法。

矩阵对角化

如果矩阵 A 有 $n = \dim A$ 个线性无关的特征向量 $\alpha_1 \dots \alpha_n$,那么它在 α 下的矩阵是对角矩阵。

令 P 为所有线性无关的特征向量(列向量)拼接组成的矩阵,则:

$$D = P^{-1}AP$$

为对角矩阵。

对角化:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Jordan 型

不一定所有矩阵都可以找到 n 个线性无关的特征向量。

但是,如果将 $(A-\lambda I)^{\dim A}v=0$ 的 v 称为广义特征向量,那么一定会有 $\dim A$ 个线性无关广义特征向量。

考虑若干个 $v_{1,1} \dots v_{1,m_1} \dots v_{k,1} \dots v_{k,m_k}$ 是 n 个线性无关的广义特征向量,且:

$$(A - \lambda_i I) v_{i,j} = v_{i,j+1}$$

那么 A 在这组基下就是:

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & A_k \end{bmatrix}$$

且 A_i 是大小为 m_i ,对角线和对角线上面一格为 1 其它为 0 的矩阵。 这样子的 A 可以很方便的计算幂。

计算

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}^n$$

```
ln[278] = MatrixForm[A = { {0, 1, 0}, {0, 0, 1}, {-1, -3, -3} }]
         矩阵格式
          i = IdentityMatrix[3]
              单位矩阵
          Solve [ (A + i) \cdot \{x, y, z\} = \{0, 0, 0\}, \{x, y, z\} ]
         解方程
         Solve [(A + i) \cdot \{x, y, z\} = \{1, -1, 1\}, \{x, y, z\}]
         解方程
          Solve [(A + i) \cdot \{x, y, z\} = \{0, 1, -2\}, \{x, y, z\}]
         解方程
          MatrixForm[P = Transpose[\{\{1, -1, 1\}, \{0, 1, -2\}, \{0, 0, 1\}\}]]
         矩阵格式
                            转置
          MatrixForm[D = Inverse[P].A.P]
          矩阵格式 |… |逆
Out[278]//MatrixForm=
 Out[279]= \{\{1,0,0\},\{0,1,0\},\{0,0,1\}\}
 Out[280]= \{ \{ y \rightarrow -x, z \rightarrow x \} \}
 Out[281]= { { y \rightarrow 1 - x, z \rightarrow -2 + x } }
 Out[282]= { {v \rightarrow -x, z \rightarrow 1 + x} }
Out[283]//MatrixForm=
Out[284]//MatrixForm=
```

当然也可以用 mathematica 内置的。

```
ln[291] = MatrixForm[A = {\{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{-1, -3, -3\}\}}]
                矩阵格式
                 {P, d} = JordanDecomposition[A]
                                  约旦分解
                MatrixForm[P]
                矩阵格式
                MatrixForm[d]
                矩阵格式
Out[291]//MatrixForm=

\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
-1 & -3 & -3
\end{pmatrix}

 \texttt{Out}[292] = \left\{ \left\{ \left\{ 1, 2, 3 \right\}, \left\{ -1, -1, -1 \right\}, \left\{ 1, 0, 0 \right\} \right\}, \left\{ \left\{ -1, 1, 0 \right\}, \left\{ 0, -1, 1 \right\}, \left\{ 0, 0, -1 \right\} \right\} \right\}
Out[293]//MatrixForm=

  \begin{pmatrix}
    1 & 2 & 3 \\
    -1 & -1 & -1 \\
    1 & 0 & 0
  \end{pmatrix}

Out[294]//MatrixForm=

\begin{pmatrix}
-1 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & -1
\end{pmatrix}
```

这个幂是很容易算的

$$In[295]:=$$
 MatrixForm[MatrixPower[d, n]]
矩阵格式 矩阵的幂

Out[295]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{1+n} & n & \frac{1}{2} & (-1)^n & (-1+n) & n \\ 0 & (-1)^n & (-1)^{1+n} & n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

A 是上三角矩阵,求 A^k ,其中 n 远小于 $\log k$ 。

QR 分解

矩阵的 QR 分解是一个很重要的算法,对于矩阵 A,要求出正交矩阵 Q 和上三角矩阵 R 使得:

$$A = QR$$

分解方法为对 A 的每一个列向量 a_i 使用 Gram-Schmidt 过程得到 e_i , 然后:

$$Q = [e_i]$$

$$R = [\langle e_i, a_j \rangle]$$

QR 算法

可以参考: https://pi.math.cornell.edu/~web6140/ TopTenAlgorithms/QRalgorithm.html

若要求 A 的特征值,可以令 $A_0 = A$,且: $A_i = Q_i R_i, A_{i+1} = R_i Q_i$,则:

$$A_{i+1} = R_i Q_i = Q_i^{-1} Q_i R_i Q_i = Q_i^{-1} A_i Q_i$$

不难发现, A_{i+1} 和 A_i 相似,有着相同的特征值。

不断这样计算,直到收敛至上三角矩阵。

上海森伯格化

海森伯格矩阵是只有对角线上方,以及对角线下一个元素非 0 的矩阵。 考虑

$$A = \begin{bmatrix} a & A_1 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix}$$

那么如果 T_i 是满足 $TA_2 = e_1$, 那么:

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & T_i \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & \\ & T_i^{-1} \end{bmatrix}$$

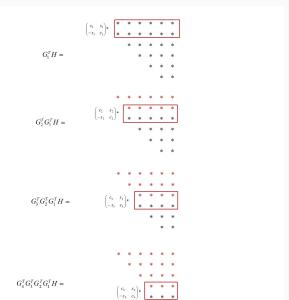
可以将第 1 列 $3 \sim$ 变为 0,然后一次做第 $2 \dots$ 列即可。

令
$$\hat{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & T_i \end{bmatrix}$$
 这样可以得到 $\hat{T} = \hat{T}_{n-2} \dots \hat{T}_1$ 满足 $\hat{T}A\hat{T}^{-1}$ 是

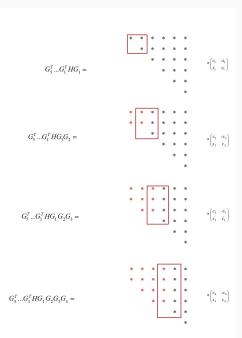
海森伯格矩阵。

上海森伯矩阵的 QR 分解

考虑相邻两行,对这两行应用旋转变换:



可以发现, 逆回来也是上海森伯矩阵:



平移加速

一般来说,A 的特征值间差异越大,QR 算法收敛越快。

不妨令:

$$A_i - \delta I = QR, A_{i+1} = RQ + \delta I$$

那么 A_{i+1} 的特征值和 A_i 的特征值依然是一样的。

一般来说, δ 可以取 A 对角线上的 2×2 的方阵的特征值。