赌徒破产问题

huhao

February 6, 2023

Consider a game that gives a probability α of winning 1 dollar and a probability $\beta = 1 - \alpha$ of losing 1 dollar. If a player begins with (say) 10 dollars, and intends to play the game repeatedly until he either goes broke or increases his holdings to N dollars, what is his probability of reaching his desired goal before going broke.[1]

[1] www.mathpages.com/

考虑一组 i.i.d 随机变量 $X_1 \ldots X_n$，其中 $P(\nu \leq X \leq \mu) = 1$，且 $P(X = \nu) > 0, P(X = \mu) > 0$，令 $S_n = \sum_{i \leq n} X_n, T = \min\{n \geq 1 : S_n \leq -L \vee S_n \geq H\}$，求:

$$P(S_T \leq -L)$$

在下面，一般只考虑 $X \in Z$ 的情况。

例

$P(X=-1)=p, P(X=1)=q, P(X=0)=1-p-q$，求：

$$P(S_T=1), ET$$

如果 $P(X=-2)=p$ 呢

不妨令 $u(i)$ 为 $S_0 = i$ 时（即令 $S_n = i + \sum X_j$），$P(S_T \geq H)$ 的值。
不难发现：

$$u(i) = \sum_j P(X = j) u(i + j) \tag{1}$$

以及

$$u(i) = 0, i \leq -L \tag{2}$$

$$u(i) = 0, i \geq H \tag{3}$$

不妨考虑 $1 = \sum_i x^i P(X = i)$，显然它的解和：

$$f(x) = x^\nu - \sum_i x^{i+\nu} P(X = i)$$

零点相同，不妨令 λ_i 为这些零点，且 k_i 为重数，则：

$$u(x) = \lambda_i^x$$

显然可以满足 (1)。

更为一般的，若 $f(x) = (x - \lambda_i)^j g(x)$，则有：

$$u(x) = x^j \lambda_i^x$$

也满足 (1)。

令

$$u(x) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^j \lambda_i^x$$

那么显然 u 满足 (1)。

又因为 a 一共有 $\nu + \mu$ 个变元，而边界条件可以看作又 $\nu + \mu$ 个等式，所以可以通过解出 $a_{i,j}$ 求出 u 的表达式。

例

$P(X = 2) = p, P(X = -1) = q$，解 u。

类似的，可以发现，若要求 EN，则有：

$$v(i) = 1 + \sum_j P(X = j)v(i + j)$$

于是 $v = v_g + v_p$，v_g 是齐次方程的解，v_p 是任一特解。

如果 $EX \neq 0$，那么 $v_p(x) = cx$ 能解出一特解。（否则可以试试 $v_p = cx^2$，再否则试试 $v_p = cx^3 \cdots\cdots$）

再来考虑一下 $H = +\infty$ 的情况，一般来说，只需要使用上面的方法，令 $H \to \infty$ 即可。

但是，有一种更为简便的方法。

当然，如果 $EX \le 0$，那么显然赌徒一定会破产。

考虑之前的那个 f，显然它在 $|z| < 1$ 有 ν 个零点 $\eta_1 \dots \eta_\nu$。

则：

$$P_{ruin}(M) = \sum_{n=1}^{\nu} \Phi_{n,M-n+1}(\eta_1 \dots \eta_n) \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \eta_j)$$

其中 Φ 是完全齐次对称多项式：

$$\Phi_{n,r}(z_1 \dots z_n) = \sum_{i_j \geq 0, \sum i_j = r} \prod_{j=1}^{n} z_j^{i_j}$$

若 η 互不相同，则：

$$P_{ruin}(M) = \sum_{j=1}^{\nu} \eta_j^M \prod_{i \neq j} \frac{1 - \eta_i}{\eta_j - \eta_i}$$

例

$$P(X=-2)=P(X=1)=\frac{1}{2}$$

例

$$P(X=-2)=P(X=1)=\frac{1}{2}$$

$$1=\frac{1}{2}(x+x^{-2})$$

解得:

$$\{x \to 0.877439 - 0.744862i\}, \{x \to 0.877439 + 0.744862i\}, \{x \to -0.754878\}$$

~~所以答案是 -0.754878^{M}。~~

例

$$P(X=-2)=P(X=3)=\frac{1}{2}$$

例

$P(X=-2)=P(X=3)=\frac{1}{2}$

不难发现：

$$\{\{x \to 0.848375\}, \{x \to -0.660993\}\}$$

直接代回那个式子即可。

St. Petersburg Lottery

$P(X=-m+2^k)=2^{k-1}, k \in Z$，求 $m=15$ 时：

$$P_{ruin}(10^9)$$

保留 7 为小数。