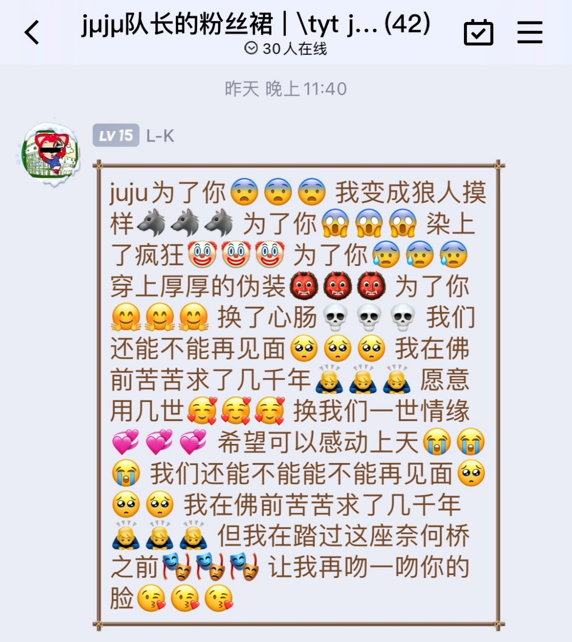
杂谈

huhao

April 2, 2022

隔离期间，讲点简单的让大家放松一下。~~（下图当事人已打码）~~



行列式相关 I

行列式定义:

$$\sum_i \operatorname{sgn}(i) \prod_j a_{j,i_j}$$

其中 sgn 为逆序对数。

行列式相关 II

试证明：

- 第 i 行乘以常数 k，则行列式乘 k。
- $$\begin{aligned} &\det\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_{i,1}+\vec{a}_{i,2} & \dots & \vec{a}_n\end{bmatrix} = \\ &\det\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_{i,1} & \dots & \vec{a}_n\end{bmatrix} \\ +&\det\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_{i,2} & \dots & \vec{a}_n\end{bmatrix}\end{aligned}$$
- 第 i 行加上第 j 行，或是第 i 列加上第 j 列，行列式不变。

这提供了一种 $O(n^3)$ 计算行列式的办法。

行列式相关 III

试证明:

- 若 A, B 分别是 $n \times m, m \times n$ 的矩阵，则:

$$\det AB = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_n \le m} \det \begin{bmatrix} a_{\cdot, i_1} & a_{\cdot, i_2} \dots & a_{\cdot, i_n} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} b_{i_1, \cdot} \\ b_{i_2, \cdot} \\ \vdots \\ b_{i_n, \cdot} \end{bmatrix}$$

行列式相关 III

试证明:

- 若 A, B 分别是 $n \times m, m \times n$ 的矩阵，则:

$$\det AB = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_n \leq m} \det \begin{bmatrix} a_{\cdot,i_1} & a_{\cdot,i_2} \ldots & a_{\cdot,i_n} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} b_{i_1,\cdot} \\ b_{i_2,\cdot} \\ \vdots \\ b_{i_n,\cdot} \end{bmatrix}$$

提示，考虑下面这个行列式:

$$\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ I_m & B \end{bmatrix}$$

行列式相关 IV

给定一张无向图，求它的生成树个数。

行列式相关 IV

给定一张无向图，求它的生成树个数。

先给每一条边随机定向，然后求出它的关联矩阵 A：第 i 行 j 列非 0 当且仅当 v_i 是 e_j 的一个顶点，且若是 v_i 连出的 $A_{i,j}=1$，否则 $A_{i,j}-1$。

然后删去 v_1 所在行，试证明：

- 当且仅当这个矩阵的第 $i_1, i_2, \ldots i_{n-1}$ 列组成的子矩阵秩为 $n-1$，则 $e_{i_1}, e_{i_2} \ldots, e_{i_{n-1}}$ 组成一棵生成树。
- 这个子矩阵行列式为 1 或 -1。
- 生成树个数为 $\det AA^T$。

行列式相关 V

对于有向图，求出它的以 v_k 为根的生成树个数。

行列式相关 V

对于有向图，求出它的以 v_k 为根的生成树个数。

删去关联矩阵 v_k 所在行，试证明：

- 对于一个子矩阵，如果通过行列式的定义式求解，仅有一个排列 j 使得乘积非 0，且所有元素皆为 -1。
- 如果令 $\hat{A}$ 表示将 A 中所有的 1 变为 0，则生成树个数为 $\det \hat{A}A^T$。

行列式相关 VI

求:

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & a & a & \dots & a \\ b & x_2 & a & \dots & a \\ b & b & x_3 & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & x_n \end{bmatrix}$$

令 E 表示全 1 的矩阵，令:

$$f(\lambda) = \det(A + \lambda E) - \det A$$

讨论 f 的性质。

行列式相关 VIII

令矩阵 $P_{i,j,k}$ 满足 $PA_{x,\cdot} = \begin{cases} A_{i,\cdot} + kA_{j,\cdot} & x = i \\ A_{x,\cdot} & x \neq i \end{cases}$

令矩阵 $Q_{i,j,k}$ 满足 $QA_{\cdot,x} = \begin{cases} A_{\cdot,i} + kA_{\cdot,j} & x = i \\ A_{\cdot,x} & x \neq i \end{cases}$

通常所说的对矩阵作用行/列变换就是作用 P, Q。

也就是说：$\det A = \det PA = \det QA$。

行列式相关 IX

令 $S=\prod_{i\neq n}P_{i,n,-1}Q_{i,n,-1}$，不难发现：

$SA-S(A+\lambda E)$ 只有 (n,n) 处非 0（且为 λ）。

令 T 为若干 P,Q 的乘积，且可使 A 消为上三角矩阵。通过高斯消元法可以知道：这样的 T 一定存在，且不包含任何的 $P_{n,\cdot,\cdot},Q_{n,\cdot,\cdot}$。

也就是说：$TSA-TS(A+\lambda E)$ 只有 (n,n) 处非 0（且为 λ），又 $TSA, TS(A+\lambda E)$ 都是上三角矩阵，所以他们行列式的差为 λ 的常数倍。

也就是说：$f(\lambda)=k\lambda$。

行列式相关 X

令 $A=\begin{bmatrix} x_1 & a & a & \dots & a \\ b & x_2 & a & \dots & a \\ b & b & x_3 & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & x_n \end{bmatrix}$。

所以

$$
\begin{aligned}
\det(A-aE) &= \prod_i (x_i - a) = \det A - ak \\
\det(A-bE) &= \prod_i (x_i - b) = \det A - bk \\
\det A &= \frac{1}{b-a}\left(b\prod_i (x_i - a) - a\prod_i (x_i - b)\right)
\end{aligned}
$$

行列式相关 XI

- 给定 n 个点的带权有根树和序列 $a_{1\ldots m}$，令矩阵 A 的第 i 行 j 列的值为 $\operatorname{lca}(v_{a_i}, v_{a_j})$ 的权值，求 $\det A$。$n \le 10^6$。
- 给定一张图，最大点双大小不大于 25，求邻接矩阵行列式。图点数不超过 10^5。

行列式相关 XI

- 给定 n 个点的带权有根树和序列 $a_{1\dots m}$，令矩阵 A 的第 i 行 j 列的值为 $\mathrm{lca}(v_{a_i}, v_{a_j})$ 的权值，求 $\det A$。$n \le 10^6$。
- 给定一张图，最大点双大小不大于 25，求邻接矩阵行列式。图点数不超过 10^5。

可以考虑行列式的定义。

矩阵对角化 I

一个 $n \times n$ 的矩阵 A 可以看做是一个 $R^n \to R^n$ 的线性变换，$A\vec{v}$ 就是对 $\vec{v}$ 作用 A 的结果。

如果 $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ 那么 $\vec{x}$ 在 A 作用下方向不变（或恰好相反），称这样地 $\vec{x}$ 为特征向量，这样地 λ 为特征值。

矩阵对角化 II

$$A\vec{x} - \lambda x = (A - \lambda I)\vec{x} = 0$$

因为如果 $\det(A - \lambda I) \neq 0$ 的话，$\vec{x}$ 就没有非 0 解了。

所以解 $\det(A - \lambda I) = 0$，然后解不定方程就可以得到 $\vec{x}$。

试证明：

- 对于确定的 λ，所有 $\vec{x}$ 都在同一个线性空间中。
- 对于不同的若干个 λ 解出的 $\vec{x}$，它们线性无关。

矩阵对角化 III

如果 A 有 n 个线性无关的特征向量 $\vec{x}_{1 \ldots n}$，则令 $X = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]$，观察：

$$\Lambda = X^{-1} A X$$

的性质。

矩阵对角化 IV

试求 $f_0 = f_1 = 1, f_i = f_{i-1} + f_{i-2}$ 的通项公式。

Project Euler 791

求所有无序四元组的和，满足他们平均值是方差的两倍，且所有元素均在 $[1, 10^8]$ 间。

1h 内求解。

solution

枚举平均值和每一个元素的差，只要枚举三个元素就行了，然后由方差可以推出平均值，这样就是 $O(n^{1.5})$。

这样 1h 能跑出来吗？

solution

枚举平均值和每一个元素的差，只要枚举三个元素就行了，然后由方差可以推出平均值，这样就是 $O(n^{1.5})$。

这样 1h 能跑出来吗？

为啥 CPU 使用率 10%？

因为一般来说你的程序是单核的，可以通过若干个 thread 来实现多核：

std::thread t(func,args) 就会在一个新线程里执行 func(args)

然后调用 t.join() 主程序就会等待 func(args) 完成。

如果你想要避免多个 thread 同时修改一个变量：

std::mutex m

然后调用 m.lock() 和 m.unlock() 锁定。

除了提交答案题不要在任何程序中使用。