杂题水讲

huhao

August 5, 2021

前言

- juju 都会，不会的可以问 juju。
- 一共 道题，全是 CF 的，难度平均值为 。

CF1007 C. Guess two numbers

交互，两个数 $a, b \in [1, 10^{18}]$，你每次可以询问 x, y，会根据条件回答（满足多个只会回答一个）：

1. $x < a$
2. $y < b$
3. $x > a$ 或 $y > b$

你询问 $x = a, y = b$ 时通过此题，次数限制 600。

显然，一开始满足所有询问的是一个正方形，然后若干次询问后变为一个长方形或一个 L 型，二分求解是 $O(\log^2)$ 的。

注意到有些询问二分的话对面积的消减比较小，可以在 0.8 处询问，这样可以让常数变得比较小，足以通过。

CF1491 H. Yuezheng Ling and Dynamic Tree

给定 $n-1$ 个数 $f_{2\dots n}$，有两个操作（共 q 次）:

- 给定 l,r,x，令 $f_{l\dots r}$ 减去 x，并对 1 取较大值。
- 给定 u,v，将 i,f_i 连边，形成 1 作为根的树，求 u,v 的 lca。

$n,q\le 10^5$，1.5s。

solution (*3400)

似乎没有好的 $O(n\,\mathrm{poly}(\log))$ 做法，考虑 $O(n^{1.5})$。

lca 可以 $O(\sqrt{n})$ 求，不妨记两个数组：f, F，f 是父亲，F 是一个祖先。

分为 $\sqrt{n}$ 块，同时记 F 为不在同一块内的最深的祖先，不难发现求 lca 是 $O(\sqrt{n})$ 的。

考虑对一整个块求 F 是 $O(\sqrt{n})$ 的，这个过程记为 1 次 build。

修改时，对两个散块进行 build，复杂度是 $O(q\sqrt{n})$ 的。

考虑到每一个块，如果对整块修改了 $\sqrt{n}$ 次，那么 $F = f$，就只要维护 f 了。

均摊下来，一共进行 $\sqrt{n} \times \sqrt{n} = n$ 次 build，总复杂度 $O((n+q)\sqrt{n})$。

CF1548 E. Gregor and the Two Painters

给定 $n, m, a_{1\dots n}, b_{1\dots m}, x$，生成一个 $n \times m$ 的黑白矩阵，(i, j) 为黑当且仅当 $a_i + b_j \leq x$。

求黑色连通块数。

$n, m, a, b \in [1, 200000]$。

solution (*3400)

对于一个连通块只在 $a_i + b_j$ 最小的格子处统计，相等统计 i, j 最大的。

如果一个格子 (i, j) 所在连通块 (x, y) 被统计到，一定有 (i, y) 或 (x, j) 的值大于 (i, j)，且与 (i, j) 联通。

不难发现，可以得到 $n + m$ 个区间 $B_{1\dots n}, A_{1\dots m}$，$(i, j)$ 被统计当且仅当 $a_i \in A_j, b_j \in B_i$，扫描线 + 简单数据结构维护即可。

CF891 E. Lust

n 个数，m 次操作，每次选 1 个数，记录下除它外所有数的乘积，并将它减 1。

对所有操作方案所有记录下的数求和，模 10^9+7。

$n \leq 5000, k \leq 10^9$

solution (*3000)

不妨先考虑这些数等于 0 的情况，令 $f_{m,n}$ 表示所有数成绩的和（除以 $(-1)^m n!$）。

$$f_{m,n} = \sum_i \frac{i}{i!} f_{m-1,n-i}$$

不难发现：

$$e^x x = \sum_i \frac{1}{i!} x^{i+1} = \sum_i \frac{i}{i!} x^i$$

令 $[x^n]F_m(x) = f_{m,n}$，则：

$$F_m(x) = F_{m-1}(x) e^x x = x^m e^{mx}$$

solution

也就是说 $f_{m,n} = m^{n-m}$。

然后令最终数组 $c_i = a_i - b_i$，只要考虑乘多少个 b_i，可以通过 dp 来确定系数。

然后枚举不计入乘积的数，通过上面 dp 的逆过程算出其它的数的 dp 值即可。

另外需要注意一些细节，复杂度 $O(n^2)$。

CF1336 F. Journey

一棵树，若干条路径，求有多少对路径交点数 $\geq k+1$。

$n, q \leq 1.5 \times 10^5, k \leq n$,4s。

不会可以想一想下面两个简化版：

1. 树是条链。
2. $k \leq 10$。

solution 1

考虑两条路径的交点，如果点数为 x，那么有:

长为 k 的公共路径有 $x-k+1$ 条。

长为 $k+1$ 的公共路径有 $x-k$ 条。

但 $x<k$ 时，上述两个都为 0。

不难发现，用上述两个值相减，就等于 $[x \geq k]$。

solution 1

问题转化为，求每两条路径的长为 k 的公共路径的数量和。

不难发现，如果一条路径是 $a_{1\ldots m}$，那么将它拆成两条路径 $a_{1\ldots k}, a_{2\ldots m}$，答案不变。同理，拆成 $m-k+1$ 条路径 $a_{i\ldots i+k-1}$ 答案也不变。

对链上每个位置记录一下这有多少条路径即可。

solution 2

同理，可以拆成若干条直上直下的路径和一条长为 $2k-1$ 的路径。

k 很小，暴力拆开即可。

solution (*3500)

现在的问题是 lca 处长为 $2k-1$ 的路径不好处理。

之前所有推论都没有指定根，不妨指定重心为根。

先把所有路径尽可能拆开，剩下的分为两种：lca 为重心的和不为重心的。

lca 不为重心的路径都在同一颗子树内，可以递归子树，这和点分治是一样的。

只要处理 lca 为重心的即可。

显然，可以在遍历树时用启发式合并。

复杂度 $O(n\log^2 n)$。