概率论选讲

huhao

February 6, 2023

测度论

~~这阴间玩意要讲吗。~~

~~这阴间玩意的 PPT 是人写的吗。~~

重要等式

若 $X_1 \dots X_n$ 是独立的，则:

$$\mathrm{var}(\sum X_i) = \sum \mathrm{var} X_i$$

大数定理

若 $X_1 \ldots$ 有相同分布且是独立的（简称 i.i.d.），且 $E|X_1| < \infty$，则:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to EX_1$$

~~很符合直觉~~

例

$X_1 \ldots$ 是 i.i.d.，且 $P(X_1 = 2^{-n} - k) = 2^{-n}, n \in Z^+$，估计：

$$n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

例

$X_1 \ldots$ 是 i.i.d.，且 $P(X_1 = 2^{-n} - k) = 2^{-n}, n \in Z^+$，估计：

$$n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

显然会趋近于 ∞，但是上面的定理不能直接用，可以通过删去 $X > 2^{k+2}$ 部分来使用定理。

当然有更加精确的估计：

$$\frac{1}{n \log_2 n} \sum_{i=1}^{n} X_i \to 1$$

切比雪夫不等式

对于任意集合 A 和函数 ϕ，有：

$$P(X \in A) \inf_{y \in A} \phi(y) \leq E\phi(X)$$

最为常用的特例是：$a^2 P(|X| \geq a) \leq EX^2$。

例

连续投一个硬币 n 次，估计投出正面次数的范围。

例

连续投一个硬币 n 次，估计投出正面次数的范围。

定义 X_i 根据第 i 次投出的正反决定是 $+1/-1$，那么：

$$EX_i^2 = 1$$

所以：

$$P(|\sum X| \geq m) \leq m^2 n$$

若要它小于 ϵ，令 $m = \sqrt{n\epsilon^{-1}}$ 即可。

所以可以发现投出正面的次数几乎都在以 $\frac{n}{2}$ 为中心 $O(\sqrt{n})$ 的区间内。

例

你若通过蒙特卡洛算法去求一个 $\mathrm{var} X = \sigma^2$ 的 X 的期望，那么你运行 n 次，可以得到：

$$P(|\frac{1}{n}\sum X - EX| \geq m) \leq m^2 n\sigma^2$$

所以每多运行 100 倍的 n 你就能多信任一位的数字。

(这是一个比较松的下界，但是中心极限定理会告诉你上面那句话不能再紧了)

Kolmogorov’s maximal inequality

对于 $X_1 \ldots$，它们相互独立且 $EX_i = 0$，则：

$$P(\max_i |S_i| \geq x) \leq x^{-2} \mathrm{var} S_i$$

中心极限定理

若 $X_1 \ldots$ 是 i.i.d.，且 $EX_1 = \mu, \mathrm{var} X_1 = \sigma^2 \in (0, \infty)$，则:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) \Rightarrow \chi$$

这个渐进式是不是比切比雪夫不等式的特例强很多？

中心极限定理

若 $X_1 \ldots$ 是 i.i.d.，且 $EX_1 = \mu, \mathrm{var} X_1 = \sigma^2 \in (0, \infty)$，则：

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) \Rightarrow \chi$$

这个渐进式是不是比切比雪夫不等式的特例强很多？

~~你敢直接认为 $a_i = \lim_{n\to\infty} a_n$ 吗。~~

例题可以看 SDOI2017 龙与地下城。