

# 杂题选讲

---

huhao

January 3, 2023

给定  $n, m$  和  $m$  给个区间，令长为  $m$  的序列  $x$  合法，当且仅当存在长为  $n$  的排列，且对于所有  $i$ ， $p_{x_i} = \max\{p_{l_i}, p_{l_i+1}, \dots, p_{r_i-1}, p_{r_i}\}$ 。

求有多少合法的排列。

$n \leq 300$ 。

---

<sup>1</sup>[https://atcoder.jp/contests/agc056/tasks/agc056\\_b](https://atcoder.jp/contests/agc056/tasks/agc056_b)

可以考虑  $n$  在哪个位置，然后就把这个序列划分为了两半，dp 下去。

但是会发现：[1, 2], [2, 3], [3, 4] 当 4 在 1, 3 在 4 时， $x$  序列和 3 在 1, 4 在 4 情况相同。

具体的，有交换  $n$  和另一个比较大的数答案不变的情况出现。

不妨强制交换，使得  $n$  的位置尽可能靠右。

不难发现，此时在  $n$  的右侧的下一个  $n'$  必须和  $n$  被同一个区间包含，dp 即可，复杂度  $O(n^4)$ 。

给定若干区间，构造出一个 01 序列，满足所有区间中 01 个数相同。  
求字典序最小的方案。

---

<sup>2</sup>[https://atcoder.jp/contests/agc056/tasks/agc056\\_c](https://atcoder.jp/contests/agc056/tasks/agc056_c)

---

<sup>3</sup><https://codeforces.com/problemset/problem/1299/E>

---

<sup>4</sup><https://codeforces.com/problemset/problem/1548/E>

---

<sup>5</sup>[https://atcoder.jp/contests/agc032/tasks/agc032\\_e](https://atcoder.jp/contests/agc032/tasks/agc032_e)

显然是划分为两半，前面一半对称连边，后面一半也是。  
显然划分点越前越好，找到最前的划分点即可。



# THE LIGHTS OF THE ROUND TABLE

$n$  个灯泡分布在一个环上，一开始有部分亮并有部分暗，你每次可以指定某些位置灯泡，并改变它们的通电情况。

不巧的是，在改变前，这个环都会以某种方式旋转若干角度，你必须依然改变那些位置上的灯泡。

求是否有方案使得所有灯泡变亮。

$$\sum_i \binom{m}{2i} \binom{m-2i}{n-i} 2^{2i}$$

## 简单证明题

$f_{i,j} = \max\{f_{i-1,j-1}, f_{i-1,j}, f_{i-1,j+1}\} + a_{i,j}$ ,  $f_{1,x} = [x=1]a_{1,x}$ ,  $f_{0,x} = f_{x,0} = f_{n+1,x} = f_{x,n+1} = \infty$ ,  $\sum_j a_{m,j} = 1$ ,  $F = \min_i \{f_{n,i}\}$ , 求  $F$  的最大值 (并证明)。

---

<sup>6</sup>[https://atcoder.jp/contests/agc044/tasks/agc044\\_c](https://atcoder.jp/contests/agc044/tasks/agc044_c)

---

<sup>7</sup>[https://atcoder.jp/contests/agc030/tasks/agc030\\_d](https://atcoder.jp/contests/agc030/tasks/agc030_d)

---

<sup>8</sup>[https://atcoder.jp/contests/agc027/tasks/agc027\\_d](https://atcoder.jp/contests/agc027/tasks/agc027_d)

---

<sup>9</sup>[https://atcoder.jp/contests/agc023/tasks/agc023\\_e](https://atcoder.jp/contests/agc023/tasks/agc023_e)

---

<sup>10</sup>[https://atcoder.jp/contests/agc045/tasks/agc045\\_b](https://atcoder.jp/contests/agc045/tasks/agc045_b)



$$\sum_{\langle i,j \rangle \in [1,n]^2} \sigma_1(i,j)$$

---

<sup>11</sup><https://projecteuler.net/problem=439>

---

<sup>12</sup><https://codeforces.com/problemset/problem/1292/E>

---

<sup>13</sup><https://codeforces.com/contest/848/problem/E>

给定序列，求快排中 swap 次数。

$$n \leq 5 \times 10^5$$

有三种技能，你有  $n$  天时间训练，每天只能训练一个技能，第  $i$  天训练技能  $j$  加  $a_{i,j}$  熟练度。

如果一个技能最近  $k$  天都没有训练，那么熟练度减  $k$ ，熟练度低于 0 时会变为 0。

$$n \leq 1000, 0 \leq a_{i,j} \leq 10000$$

给定一棵  $n$  个点的树，有  $m$  次询问，每次询问  $l, r$ ，需要回答：

$$\min_{l \leq i < j \leq r} \text{dist}(i, j)$$