构造 & 交互

huhao

December 20, 2021

前天的题

三堆石头，每次可以将一堆石头 a 中部分石头移到另一堆 b，移的数量必须与 b 中石头数量相等。

将一堆石头移空。

四个数 x, y, z, w，每次可以选择两个数 a, b，将它们变为 $2b - a, b$。

将它们变为 X, Y, Z, W，顺序不论。

$n+1$ 个栈，栈的大小为 m，前 n 个栈是满的。可以发现，一共有 nm 个数，其中分别有 n 个 $1,\dots,m$。

可以取出一个栈的栈顶，插入另一个栈。

你需要通过若干次操作，使第 $n+1$ 个栈依然为空，前 n 个栈第 i 个栈有 m 个 i。

操作的逆

后面两题显然可逆，第一题**似乎**不满足。

操作可逆的话，就有如果 S 状态是可行的，$S \overset{*}{\Rightarrow} T$，那么有 $T \overset{*}{\Rightarrow} S$，所以 T 也是可行的。

操作的逆

后面两题显然可逆，第一题**似乎**不满足。

操作可逆的话，就有如果 S 状态是可行的，$S \overset{*}{\Rightarrow} T$，那么有 $T \overset{*}{\Rightarrow} S$，所以 T 也是可行的。

思考难度要求会变小：

- 不断简化，依然是可行，后一步可以用到前一步结果所保证的性质。
- 可以尝试用若干操作的复合：$f = \mathrm{op}_1 \circ \mathrm{op}_2 \circ \cdots \circ \mathrm{op}_k$。

有条件的逆操作

第一题先只考虑两堆石头，如果是一奇一偶（或者同时除以 2^k），那么操作后依然是一奇一偶。

一个状态 T，经过操作变为 $f(T)$ 的话，显然不存在 $S \neq T, f(S) = f(T)$，因为每一个 T 都是可以找到唯一的逆（但不一定存在操作）：将偶数除以 2。

所以 f 是一个满射，定义域和值域相等，所以 f 是双射。

这样显然会成为若干个环，在环上绕一圈会回到原点，少走一步会走到 $f^{-1}(T)$，在这种情况下存在逆！

复合操作

第一题可以将 $T \overset{*}{\Rightarrow} f^{-1}(T)$，作为一个复合操作。

第二题可以将对于三个数 a, b, c，把一个数 a，平移 $2|b-c|$ 作为一个复合操作。

第三题可以将保证操作后第 $n+1$ 个栈依然为空的前提下交换两个元素作为一个复合操作。

这些操作保持了可逆性，所以任意操作都不会让本来可行的操作变得不可行。

第一题

一次操作可能会将两个数大小不可控地改变，但是在复合操作中，无论初始如何，最后都会使原来的偶数变为一半。

条件加强的话：如果原来的偶数是 4 的倍数，复合操作后它会变为 2 的倍数，依然是一个偶数。

如果有两个偶数 a, b 和一个奇数 c，如果 $a \geq b$，那么先操作 $f(< a, b >) =< a - b, 2b >$，然后操作 $f^{-1}(< 2b, c >) =< b, b + c >$，这样会保持 a, b, c 的奇偶性，同时让 c 变大。

不断让 c 变大直到 a, b 一个为 0 即可。

其它情况可以通过若干次操作变为两偶一奇的情况。

后两题

留作练习。

优化思路

考虑更加特化的复合操作：步数少/功能强，但是对状态的要求变高。

有 $6k+3$ 个点的完全图，将这 $\frac{(6k+3)(6k+2)}{2}$ 条边划分为 $\frac{(6k+3)(6k+2)}{6}$ 个三角形。

CTT2020 部分分

有 n 个点，连接 k 条边，使得不存在生成子图为左右点数均为 m 的完全二分图。

令 p 为质数，解决：

- $n = p^2, k = p^3, m = 2$。
- $n = p^3, k = p^5, m = 3$。

2021 集训队互测

给定 n, m，满足 $2m \geq n$，令 $f(n,k)$ 为 $0 \sim 2^{n-1}$ 中二进制数为 1 个数为 k 的数的集合。

求单射 $g: f(n, m+1) \to f(n, m)$，满足 $x \text{ and } g(x) = g(x)$。

怎么构造

条件看似不多，但构造间两两相互制约，一不小心就会出错。

优秀的构造

取模系是一个十分优秀的构造：

- 模 k 意义下 $x+0 \sim x+k-1$ 互不相同。
- 模 p 意义下 $0 \sim x(p-1)$ 互不相同（x,p 互质）。

往取模上靠

构造函数 g，然后让所有 $g(S) \equiv 0 \pmod p$ 的 S 成为你的构造。

证明可以固定若干变量然后解另一变量（下面会用例子解释）。

第一题

将 $6k+3$ 个点划分为 3 个大小为 $2k+1$ 的集合，给所有点 $0 \sim 2k$ 标号。

然后令 $f(x,y,z)=x+y-2z$，对于所有 $f\equiv 0$ 的 x,y,z，让第 i 个集合内的编号为 x,y，和第 $i+1$ 个集合内编号为 z 的三个点组成三角形。

可以发现，所有边都只会出现一次：不同集合内的 x,z，都可以解出唯一的 y，同一集合内的 x,y，也会解出唯一的 z。

但是 x,y,z 不能相等，因为只有 $f(k,k,k)=0$，所以所有不合法的三角形，所没连上的边，只有不同集合间的同标号的元素，用一个三角形给这些边连上即可。

深入思考

如果 $f'(x, y, z) = x + y - z$，这也是最直观的想法，不妨想想怎么由 f' 想到 f。

这样会出现边 $(i, 2i)$ 的遗漏，但是 $(1, 2), (2, 4)$ 却没有 $(4, 1)$ 边会使得最后一步进行不了。

但是如果缺的是 (i, i)，就形成了若干个环。

更进一步

如果有 $12k+7$ 个点的话：

给第一个点依次与剩下的点形成 $6k+3$ 个三角形，这样可以得到 $6k+3$ 个两两之间已经有边的二元组。

先求出 $6k+3$ 的一个解，如果 (x,y,z) 在解内，考虑给第 x,y,z 这三个二元组两两间连上边。

$h(u,v,w)=u+v+w$ 即可，解 $u/v/w$ 的过程就是证明。

第二题

只说第一个 subtask，第二个留作练习。

将每个点与一个 $n \times n$ 的矩阵上的格点一一对应，然后:

$g(x, y) = x \cdot y$，$\cdot$ 是点乘。

第三题

~~鸽，~~留作练习。

小总结

猜个生成方式写了就交，反正 IOI 赛制？

交互题

啥都可以出交互题，所以简单讲讲一些常用方法吧。

信息论

试证明仅支持查询偏序关系的情况下排序是 $O(n \log n)$ 的。

证明

k 次询问只能区分出 2^k 个排列，所以最优是 $O(\log n!) = O(n \log n)$ 的。

前两天的题

n 个人，每一个人可以看到前面每个人帽子的颜色，从后往前依次询问每一个人他自己帽子的颜色，回答可以被前面的人听见，最大化回答正确人数。

solution

根据信息论，答案是 $\frac{1}{2}n!$

solution

根据信息论，答案是 $\frac{1}{2}n!$

但总的信息量是 $2n-2$bit，只要让每一个人尽可能多的用上知道的信息即可。

但是如果让后面的人点对点地告诉前面的人信息，就不可能做到 $n-1$，可以通过简单的方式知道思路的可行性。

$n+1$ 个人，每个人有一顶帽子，上面写了长为 n 的 01 串，每个人只能看到别人的。

每一轮，每一个人可以在一张大家都能读写的纸上写 1 的 01 字符，或是说出自己头顶上的帽子的 01 串。

求最少轮数。

solution

留作练习。

提示：答案是 2 轮，考虑每一个人得到的信息。

我的互测题

有根树，每次可以询问若干子树的并中点两两距离和，求出这棵树。

另一道互测题

~~哪道是最水的互测题？~~

一个排列 $p : [0, n-1] \to [0, n-1]$，可以操作使得 $S \leftarrow S + 2^{p_i}$，返回 S 的值为 1 的位数。

solution

放出来给大家乐乐的，~~留作练习。~~

令一个长度为 n 的 01 序列的 f 值为：$f(A)=\sum_{i=0}^{n-1} A_i p_i 2^i$。

保证 $p_{n-1}=1, p_{n-2}=-1$，其它 p 都是 -1 或 1。

你可以询问两个序列 A, B，会返回一个序列 C，满足 $f(A)+f(B)\equiv f(C) \pmod{2^n}$。

6 次询问求出 p。

$f(11111111\dots) + f(100100100\dots) =?$。

互测题

你有 ∞b 的内存，会调用 2^{26} 次，每一次你可以访问修改不超过 6 个位置，返回是否是最后一次。

小总结

交互构造~~不会就是不会~~没有什么普遍有效的方法，这里介绍了几个常用的思考路径，但是记住一个原则：简化问题！