组合数学

diamond_duke

2020 年 7 月 23 日

组合恒等式

- $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$;

组合恒等式

- $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$;
- $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$;

组合恒等式

- $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$;
- $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$;
- $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [2 \mid i] = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [2 \nmid i] = 2^{n-1}$;

组合恒等式

- $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$;
- $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$;
- $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [2 \mid i] = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [2 \nmid i] = 2^{n-1}$;
- k 个非负整数变量和为 n 的方案数（插板法）：$\binom{n+k-1}{k-1}$;

组合恒等式

- $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$；
- $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$；
- $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [2 \mid i] = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [2 \nmid i] = 2^{n-1}$；
- k 个非负整数变量和为 n 的方案数（插板法）：$\binom{n+k-1}{k-1}$；
- $\sum\limits_{i=0}^{m} \binom{n+i}{n} = \binom{n+m+1}{m}$；

组合恒等式

- $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$;
- $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$;
- $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [2 \mid i] = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [2 \nmid i] = 2^{n-1}$;
- k 个非负整数变量和为 n 的方案数（插板法）：$\binom{n+k-1}{k-1}$;
- $\sum_{i=0}^{m} \binom{n+i}{n} = \binom{n+m+1}{m}$;
- $\sum_{i=m}^{n} \binom{i}{m} = \binom{n+1}{m+1}$;

组合恒等式

- $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$；
- $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$；
- $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [2 \mid i] = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [2 \nmid i] = 2^{n-1}$；
- k 个非负整数变量和为 n 的方案数（插板法）：$\binom{n+k-1}{k-1}$；
- $\sum\limits_{i=0}^{m} \binom{n+i}{n} = \binom{n+m+1}{m}$；
- $\sum\limits_{i=m}^{n} \binom{i}{m} = \binom{n+1}{m+1}$；
- $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$；

组合恒等式

- $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$；
- $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$；
- $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [2 \mid i] = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [2 \nmid i] = 2^{n-1}$；
- k 个非负整数变量和为 n 的方案数（插板法）：$\binom{n+k-1}{k-1}$；
- $\sum\limits_{i=0}^{m} \binom{n+i}{n} = \binom{n+m+1}{m}$；
- $\sum\limits_{i=m}^{n} \binom{i}{m} = \binom{n+1}{m+1}$；
- $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$；
- $\sum\limits_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$。

自然数幂之和

- $S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k$。

自然数幂之和

- $S_k(n)=\sum\limits_{i=1}^{n} i^k$。$S_k(n)$ 是关于 n 的 $k+1$ 次多项式。

自然数幂之和

- $S_k(n)=\sum_{i=1}^{n} i^k$。$S_k(n)$ 是关于 n 的 $k+1$ 次多项式。
- 拉格朗日插值：对于 k 次多项式函数 F 以及 $k+1$ 个点值 $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k)$，有 $F(x)=\sum_{i=0}^{k} y_i \prod_{i\neq j} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$。

自然数幂之和

- $S_k(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} i^k$。$S_k(n)$ 是关于 n 的 $k+1$ 次多项式。
- 拉格朗日插值：对于 k 次多项式函数 F 以及 $k+1$ 个点值 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_k, y_k)$，有 $F(x) = \sum\limits_{i=0}^{k} y_i \prod\limits_{i \neq j} \dfrac{x - x_j}{x_i - x_j}$。
- 斯特林数：$S_k(n) = \dfrac{(n+1)^{\underline{k+1}}}{k+1} - \sum\limits_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i} \cdot \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix} \cdot S_i(n)$。

自然数幂之和

- $S_k(n)=\sum\limits_{i=1}^{n} i^k$。$S_k(n)$ 是关于 n 的 $k+1$ 次多项式。
- 拉格朗日插值：对于 k 次多项式函数 F 以及 $k+1$ 个点值 $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k)$，有 $F(x)=\sum\limits_{i=0}^{k} y_i \prod\limits_{i\neq j} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$。
- 斯特林数：$S_k(n)=\frac{(n+1)^{\underline{k+1}}}{k+1}-\sum\limits_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-i}\cdot \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix} \cdot S_i(n)$。
- 伯努利数：$\frac{x}{e^x-1}=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{B_i}{i!}x^i$。

自然数幂之和

- $S_k(n)=\sum\limits_{i=1}^{n} i^k$。$S_k(n)$ 是关于 n 的 $k+1$ 次多项式。
- 拉格朗日插值：对于 k 次多项式函数 F 以及 $k+1$ 个点值 $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k)$，有 $F(x)=\sum\limits_{i=0}^{k} y_i \prod\limits_{i\neq j}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$。
- 斯特林数：$S_k(n)=\frac{(n+1)^{\underline{k+1}}}{k+1}-\sum\limits_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-i}\cdot\begin{bmatrix}k\\i\end{bmatrix}\cdot S_i(n)$。
- 伯努利数：$\frac{x}{e^x-1}=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{B_i}{i!}x^i$。
- 伯努利多项式：$\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{\beta_i(t)}{i!}\cdot x^i=\frac{x}{e^x-1}\cdot e^{tx}$。

自然数幂之和

- $S_k(n)=\sum\limits_{i=1}^{n} i^k$。$S_k(n)$ 是关于 n 的 $k+1$ 次多项式。
- 拉格朗日插值：对于 k 次多项式函数 F 以及 $k+1$ 个点值 $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k)$，有 $F(x)=\sum\limits_{i=0}^{k} y_i \prod\limits_{i\neq j}\dfrac{x-x_j}{x_i-x_j}$。
- 斯特林数：$S_k(n)=\dfrac{(n+1)^{\underline{k+1}}}{k+1}-\sum\limits_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-i}\cdot\begin{bmatrix}k\\i\end{bmatrix}\cdot S_i(n)$。
- 伯努利数：$\dfrac{x}{e^x-1}=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{B_i}{i!}x^i$。
- 伯努利多项式：$\sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{\beta_i(t)}{i!}\cdot x^i=\dfrac{x}{e^x-1}\cdot e^{tx}$。
- $S_k(n)=\dfrac{1}{k+1}\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}\cdot(n+1)^i\cdot B_{k+1-i}$。

自然数幂之和

- $S_k(n)=\sum\limits_{i=1}^{n} i^k$。$S_k(n)$ 是关于 n 的 $k+1$ 次多项式。
- 拉格朗日插值：对于 k 次多项式函数 F 以及 $k+1$ 个点值 $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k)$，有 $F(x)=\sum\limits_{i=0}^{k} y_i \prod\limits_{i\neq j} \dfrac{x-x_j}{x_i-x_j}$。
- 斯特林数：$S_k(n)=\dfrac{(n+1)^{\underline{k+1}}}{k+1}-\sum\limits_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-i}\cdot \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix} \cdot S_i(n)$。
- 伯努利数：$\dfrac{x}{e^x-1}=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{B_i}{i!}x^i$。
- 伯努利多项式：$\sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{\beta_i(t)}{i!}\cdot x^i=\dfrac{x}{e^x-1}\cdot e^{tx}$。
- $S_k(n)=\dfrac{1}{k+1}\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}\cdot(n+1)^i\cdot B_{k+1-i}$。令 $n=0$，则 $\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B_i=0$。

一道热身题

给出 n，求有多少个 n 位数字串是回文的，且奇数位的数字和等于偶数位的数字和。
测试点个数 ≤ 10，$n \leq 10^6$。

另一道热身题

给定 $[n]$ 的排列 A, B, C，求满足 $a_i < a_j$，$b_i < b_j$，$c_i < c_j$ 的 (i, j) 对数。
$n \leq 10^6$。

容斥原理

容斥原理

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}|\right) \tag{1}$$

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{S\subseteq[n]}(-1)^{|S|}\left|\bigcap_{i\in S}\overline{A_i}\right| \tag{2}$$

容斥原理

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}|\right) \tag{1}$$

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{S\subseteq[n]}(-1)^{|S|}\left|\bigcap_{i\in S}\overline{A_i}\right| \tag{2}$$

拓展——$\min - \max$ 容斥：

$$\max\{S\} = \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|+1}\min\{T\} \tag{3}$$

AtCoder Regular Contest 096 E

求有多少个子集族，满足：

- 其中任意一个子集都是 $[n]$ 的子集；
- 任意两个子集互不相同；
- $1, 2, \cdots, n$ 都在其中至少出现了 2 次。

答案对 M 取模。
$2 \le N \le 3000, 10^8 \le M \le 10^9 + 9$，$M$ 是质数。

AtCoder Regular Contest 093 F

有 2^N 个人打锦标赛，他们的过程是随机一个排列，然后按照这个排列站好。每轮是第 $2i-1$ 个人和第 $2i$ 的人比赛，败者淘汰。
你是 1 号选手，你碰到 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 会输，碰到剩下的会赢。如果比赛和你无关，那么编号小的赢。
求有多少个排列，能够使你最后赢。答案对 10^9+7 取模。
$1 \leq N \leq 16, 0 \leq M \leq 16, 2 \leq A_i \leq 2^N$。

【集训队作业 2018】小 Z 的礼物

给定 $n \times m$ 的方格，每个格子里面有一个礼物，其中某些礼物是小 Z 喜欢的。
每次小 Z 会等概率随机地得到某两个相邻的格子中的礼物（得到的礼物可能再次得到），求得到所有小 Z 喜欢的礼物的时间的期望。
$n \leq 6$，$m \leq 100$。

斯特林反演

下降幂

定义

下降幂 $n^{\underline{m}} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$。

下降幂

定义

下降幂 $n^{\underline{m}} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$。

定理

$$n^m = \sum_{i=0}^{m} \left\{ m \atop i \right\} n^{\underline{i}} \tag{4}$$

上升幂

定义

上升幂 $n^{\overline{m}} = n(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)$。

上升幂

定义

上升幂 $n^{\overline{m}} = n(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)$。

定理

$$x^{\overline{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \tag{5}$$

斯特林反演

定理 (斯特林反演)

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}\left\{ n \atop k \right\} g(k) \iff g(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\left[n \atop k \right] f(k) \tag{6}$$

斯特林反演

定理 (斯特林反演)

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}\left\{{n \atop k}\right\}g(k) \iff g(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\left[{n \atop k}\right]f(k) \tag{6}$$

引理 (反转公式)

$$\sum_{k=m}^{n}(-1)^{n-k}\left[{n \atop k}\right]\left\{{k \atop m}\right\}=[m=n] \tag{7}$$

$$\sum_{k=m}^{n}(-1)^{n-k}\left\{{n \atop k}\right\}\left[{k \atop m}\right]=[m=n] \tag{8}$$

斯特林反演

定理 (斯特林反演)

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} g(k) \iff g(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left[{n \atop k} \right] f(k) \tag{6}$$

引理 (反转公式)

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^{n-k} \left[{n \atop k} \right] \left\{ {k \atop m} \right\} = [m = n] \tag{7}$$

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^{n-k} \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop m} \right] = [m = n] \tag{8}$$

引理

$$x^{\underline{n}} = (-1)^n (-x)^{\overline{n}} \quad , \quad x^{\overline{n}} = (-1)^n (-x)^{\underline{n}} \tag{9}$$

【2018 雅礼集训】方阵

给定 $n \times m$ 的矩阵，每个格子填上 $[1,c]$ 中的数字，求任意两行、两列均不同的方案数。
$n, m \leq 5000$。

一道例题

给定 n 个节点的树，从某个点出发开始随机游走：在点 u 时，有 p_u 的概率留在原地，否则等概率的向相邻的点移动，直到移动到 1 号点停下。

求从每个点出发直至停下，所花费的时间的 k 次方的期望。

$n \le 10^5$，$k \le 10^5$，$n \cdot k \le 10^6$。

另一道例题

求 N 个点的带标号无向图的联通块数 K 次幂之和。
$N \leq 10^5$，$K \leq 15$，测试数据组数 10^5。

Burnside 引理

Burnside 引理

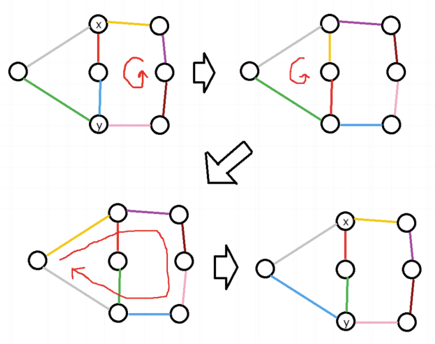
设 G 是一个作用在集合 X 上的有限群。对 $g \in G$，设 X^g 表示 X 中在 g 作用下的不动元素，则轨道数 $|X/G|$ 满足：

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|. \tag{10}$$

AtCoder Regular Contest 062 F

给出无向图 $G=(V,E)$，对边染 K 种颜色之一。
一个环上面的边旋转后得到的染色方案视为相同，求不同的染色方案数。
$1 \le N \le 50$，$1 \le M \le 100$，$1 \le K \le 100$。

AtCoder Regular Contest 062 F Solution



无向图计数

求恰好 n 个点的本质不同的无向图个数对质数 P 取模的结果。
允许自环不允许重边。
$1 \leq n \leq 45$。

例题选讲

LOJ 2058 「TJOI / HEOI2016」求和

给定 n，求

$$f(n)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\left\{{i \atop j}\right\}\cdot 2^j\cdot j!$$

$1\le n\le 10^5$。

一道例题

n 次操作，每次操作从 $[1, k]$ 中等概率随机一个数字。设 a_i 表示随机到 i 的次数，求 $\prod_{i=1}^{L} a_i^F$ 的期望对 2333 取模的结果。

$n, k \le 10^9$，$F \le 1000$，$L \times F \le 5 \times 10^4$。

Thank You!