Def (Vektorraum)

Sei K ein Körper. Eine Menge V zusammen mit einer inneren Verknüpfung

$$+ : V \times V \to V \quad , \quad (v,w) \mapsto v+w$$

(Addition genannt) und einer äußeren Verknüpfung

$$\cdot : K \times V \to V \quad , \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$$

(Multiplikation mit Skalaren genannt) heißt K-Vektorraum (K-V.R.), falls gilt:

(V1) $(V,+)$ ist eine abelsche Gruppe, d.h.:

(i) $\forall v_1, v_2, v_3 \in V: \quad v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$

(ii) $\exists 0 \in V \; \forall v \in V: \quad v + 0 = v = 0 + v$

(iii) $\forall v \in V \; \exists -v \in V: \quad v + (-v) = 0 = -v + v$

(iv) $\forall v_1, v_2 \in V: \quad v_1 + v_2 = v_2 + v_1$

(V2) Für alle $\lambda, \mu \in K$ und $v_1, v_2 \in V$ gilt:

(1) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$

(2) $\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$

(3) $\lambda \cdot (\mu \cdot v_1) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v_1$

(4) $1 \cdot v_1 = v_1$

Satz:

Sei V ein K-Vektorraum. Dann gilt:

(i) $\forall v \in V: \quad 0 \cdot v = 0$

(ii) $\forall \lambda \in K: \quad \lambda \cdot 0 = 0$

(iii) $\forall v \in V: \quad (-1) \cdot v = -v$

(iv) $\forall \lambda \in K \; \forall v \in V: \quad \lambda \cdot v = 0 \iff \lambda = 0 \lor v = 0$

Bsp.:

(a) $K^n := \{x = (x_1,\ldots,x_n) \mid x_i \in K \ \forall i = 1,\ldots,n\}$ ist ein K-Vektorraum mit den Verknüpfungen:

$+ : K^n \times K^n \to K^n, \quad (x_1,\ldots,x_n) + (y_1,\ldots,y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$

$\cdot : K \times K^n \to K^n, \quad \lambda \cdot (x_1,\ldots,x_n) := (\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_n)$

$0 := (0,\ldots,0) \in K^n.$

$\forall (x_1,\ldots,x_n), (y_1,\ldots,y_n) \in K^n: \ (x_1,\ldots,x_n) = (y_1,\ldots,y_n) :\Leftrightarrow \forall i = 1,\ldots,n: \ x_i = y_i$

(b) $K^{m \times n} = \{(a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \mid a_{ij} \in K\}$ die Menge der $m \times n$-Matrizen mit Koeffizienten aus K ist ein K-Vektorraum mit den Verknüpfungen:

$K^{m \times n} \times K^{m \times n} \to K^{m \times n}, \quad (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} + (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} := (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$

$K \times K^{m \times n} \to K^{m \times n}, \quad \lambda \cdot (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} := (\lambda \cdot a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$

$0 := (0)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$

$\forall (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}, (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in K^{m \times n}:$

$(a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} :\Leftrightarrow \forall 1 \le i \le m, 1 \le j \le n: \ a_{ij} = b_{ij}$

(c) $K[x] := \{f = a_n \cdot X^n + a_{n-1} \cdot X^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot X + a_0 \mid n \in \mathbb{N}_0, a_0,\ldots,a_n \in K\}$

die Menge der Polynome über K ist ein K-Vektorraum mit den folgenden Verknüpfungen:

Seien $f = a_n \cdot X^n + a_{n-1} \cdot X^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot X + a_0 \in K[x]$ und $g = b_m \cdot X^m + \ldots + b_1 \cdot X + b_0 \in K[x]$.

Wir können $n = m$ voraussetzen (ist etwa $m < n$ so setze $b_{m+1},\ldots,b_n := 0$).

$f + g := (a_n + b_n) \cdot X^n + \ldots + (a_1 + b_1) \cdot X + (a_0 + b_0) \in K[x]$

$\lambda \cdot f := (\lambda \cdot a_n) \cdot X^n + \ldots + (\lambda \cdot a_1) \cdot X + (\lambda \cdot a_0) \in K[x] \quad \forall \lambda \in K$

Es gilt: $f = 0 \Leftrightarrow \forall i = 1,\ldots,n: \ a_i = 0$ und

$f = g \Leftrightarrow \forall i = 1,\ldots,n: \ a_i = b_i$

Ist $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ so gilt zusätzlich:

$f = 0 \Leftrightarrow \forall x \in K: f(x) = 0$ und

$f = g \Leftrightarrow \forall x \in K: f(x) = g(x)$

(d) Sei M eine beliebige Menge und

$V := \{f : M \to K\} = \mathrm{Abb}(M, K)$ die Menge aller Abbildungen von M nach K.

Für $f, g \in V$ def.:

$f + g : M \to K, \quad (f+g)(x) := f(x) + g(x)$

$\lambda \cdot f : M \to K, \quad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$

Dann ist V mit diesen Verknüpfungen ein K-Vektorraum.

Es gilt:

$0 : M \to K, \; 0(x) = 0$ ist das Nullelement und

$\forall f, g \in V: \quad f = g \iff \forall x \in K: \; f(x) = g(x)$