UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Probeklausur Logik

10. Juli 2025

$$\varphi = A_1 \vee (\neg A_2 \to (A_1 \vee A_3))$$

A_1	A_2	A_3	$A_1 \vee A_3$	$\neg A_2$	$\neg A_2 \to (A_1 \vee A_3)$	φ
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

$$\varphi = A_1 \vee (\neg A_2 \rightarrow (A_1 \vee A_3))$$

A_1	A_2	A_3	$A_1 \vee A_3$	$\neg A_2$	$\neg A_2 \rightarrow (A_1 \vee A_3)$	φ
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1

- Was sind Hornformeln?
- Wie kann man überprüfen, ob φ äquivalent zu einer Hornformel ist?

Wie kann man überprüfen ob φ äquivalent zu einer Hornformel ist?

- mittels Schnitteigenschaft: Wenn $I_1, I_2 \in Mod(\varphi)$ dann auch $I_1 \cap I_2 \in Mod(\varphi)$
- φ äquivalent zu einer Hornformel gdw. φ besitzt die Schnitteigenschaft

Hat $A_1 \vee (\neg A_2 \rightarrow (A_1 \vee A_3))$ die Schnitteigenschaft?

- Wann gilt $\varphi \models \psi$?

- Wann gilt $\varphi \models \psi$?
- Wie können wir Modelle von φ und ψ bestimmen?

Gilt $\neg(A_1 \wedge \neg A_2) \wedge (\neg A_1 \rightarrow A_2) \wedge \neg A_2 \models A_3$?

Wie können wir die Interpolante zweier Formeln φ und ψ bestimmen?

Wie können wir die Interpolante zweier Formeln φ und ψ bestimmen?

for $A_i \in s(\varphi) \setminus s(\psi)$ **do**

$\quad \varphi \leftarrow \varphi[\top/A_i] \vee \varphi[\bot/A_i]$

$$\varphi = (\neg A_3 \to (\neg A_1 \land \neg A_2)) \land (A_3 \to (A_1 \leftrightarrow A_2))$$
$$\mathrm{s}(\varphi) \setminus \mathrm{s}(\psi) = \{A_3\}$$

$$\begin{aligned}
\xi =& \varphi[\bot/A_3] \lor \varphi[\top/A_3] \\
=& \Big((\neg\bot \to (\neg A_1 \land \neg A_2)) \land (\bot \to (A_1 \leftrightarrow A_2))\Big) \\
& \lor \Big((\neg\top \to (\neg A_1 \land \neg A_2)) \land (\top \to (A_1 \leftrightarrow A_2))\Big) \\
\equiv& (\neg\bot \to (\neg A_1 \land \neg A_2)) \lor (\top \to (A_1 \leftrightarrow A_2)) \\
\equiv& (\neg A_1 \land \neg A_2) \lor (A_1 \leftrightarrow A_2)
\end{aligned}$$

Allgemeines Vorgehen bei strukturellen Induktionen:

Allgemeines Vorgehen bei strukturellen Induktionen:

IA: Zeigt die Aussage für atomare Formeln.

IV: Nehmt an, dass die Aussage für Formeln φ und ψ gelten.

IS: Zeigt die Aussage für Formeln, die φ und ψ mit einem Junktor verknüpfen.

Allgemeines Vorgehen bei strukturellen Induktionen:

für $\mathcal{X}$

IA: Zeigt die Aussage für atomare Formeln.

$$A \in \mathcal{A}$$

IV: Nehmt an, dass die Aussage für Formeln φ und ψ gelten.

IS: Zeigt die Aussage für Formeln, die φ und ψ mit einem Junktor verknüpfen.

$$\varphi \oplus \psi$$

Allgemeines Vorgehen bei strukturellen Induktionen:

für aussagenlogische Formeln

IA: Zeigt die Aussage für atomare Formeln.

$$A \in \mathcal{A}$$

IV: Nehmt an, dass die Aussage für Formeln φ und ψ gelten.

IS: Zeigt die Aussage für Formeln, die φ und ψ mit einem Junktor verknüpfen.

$$\neg\varphi,\ \varphi \vee \psi,\ \text{und } \varphi \wedge \psi$$

Allgemeines Vorgehen bei strukturellen Induktionen:

für prädikatenlogische Formeln

IA: Zeigt die Aussage für atomare Formeln.

$$P(t_1, \ldots, t_n) \qquad t_1 = t_2$$

IV: Nehmt an, dass die Aussage für Formeln φ und ψ gelten.

IS: Zeigt die Aussage für Formeln, die φ und ψ mit einem Junktor verknüpfen.

$\neg\varphi,\ \varphi \vee \psi,$ und $\varphi \wedge \psi$, sowie $\exists x \varphi$ und $\forall x \varphi$.

Allgemeines Vorgehen bei strukturellen Induktionen:

für $\mathcal{X}$

IA: Zeigt die Aussage für atomare Formeln.

$$A \in \mathcal{A}$$

IV: Nehmt an, dass die Aussage für Formeln φ und ψ gelten.

IS: Zeigt die Aussage für Formeln, die φ und ψ mit einem Junktor verknüpfen.

$$\varphi \oplus \psi$$

Existiert in $\mathcal{X}$ eine Formel äquivalent zu $\neg A_1$?

Existiert in $\mathcal{X}$ eine Formel äquivalent zu $\neg A_1$?

Nein. Sei I die Interpretation, die alle Atome zu falsch auswertet.
Es gilt $I(\neg A_1) = 1$ und wir wissen, dass für alle Formeln φ in $\mathcal{X}$

$$I(\varphi) = 0.$$

$$\varphi = \exists y \Big(R(x,y) \land \exists z R(y,z) \Big) \to \exists y \Big(P(y) \land R(y,x) \Big).$$

Sei $\mathfrak{A}$ folgende Struktur:

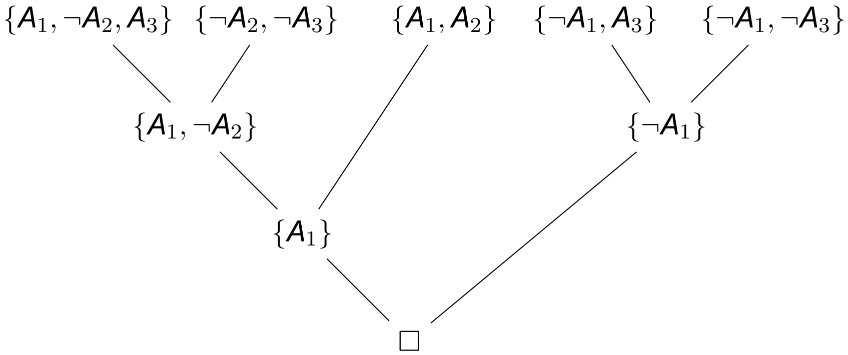
- $U^{\mathfrak{A}} = \{a, b, c, d\}$,
- $R^{\mathfrak{A}} = \{(a,b), (b,c), (c,d)\}$,
- $P^{\mathfrak{A}} = \{a, b, c\}$.

Sei $\beta(x) = \beta(y) = \beta(z) = b$.

1. Ist $(\mathfrak{A}, \beta)$ ein Modell von φ?
2. Geben Sie eine Belegung γ an, sodass $(\mathfrak{A}, \gamma)$ kein Modell von φ ist.
3. Überführen Sie φ in Negationsnormalform.

Wendet den Resolutionsalgorithmus an:

$$\{\{A_1, A_2\}, \{A_1, \neg A_2, A_3\}, \{\neg A_1, A_3\}, \{\neg A_1, \neg A_3\}, \{\neg A_2, \neg A_3\}\}.$$


$\{A_1, \neg A_2, A_3\}$
$\{\neg A_2, \neg A_3\}$
$\{A_1, A_2\}$
$\{\neg A_1, A_3\}$
$\{\neg A_1, \neg A_3\}$
$\{A_1, \neg A_2\}$
$\{\neg A_1\}$
$\{A_1\}$
$\square$

Wendet den Unifikationsalgorithmus an:

$$R(z, y, g(y, z)) \qquad \text{und} \qquad R(c, f(v), g(f(v), v)).$$

Bildet eine Resolvente:

$$\{P(z, f(y)), R(z, y, g(y, z)), \neg Q(z, z)\}$$

$$\{\neg R(c, f(v), g(f(v), v)), Q(v, f(v))\}$$

Sei $x \notin \mathrm{frei}(\varphi)$ und $y \notin \mathrm{frei}(\psi)$. Zeigt, dass

$$\forall x \exists y (\varphi \wedge \psi) \equiv \exists y \forall x (\varphi \wedge \psi).$$

Beweisen oder widerlegen Sie: Es existiert ein erfüllbarer prädikatenlogischer Satz φ dessen Modelle alle überabzählbar sind.

Beweisen oder widerlegen Sie: Es existiert ein erfüllbarer prädikatenlogischer Satz φ dessen Modelle alle überabzählbar sind.

Gilt nicht. Angenommen φ ist ein prädikatenlogischer Satz, der nur überabzählbare Modelle besitzt. Dann existiert nach Löwenheim-Skolem auch ein abzählbares Modell. (Widerspruch)

Überprüft, dass bei euch im Moodle mindestens 60 Punkte eingetragen sind.

Klausur am 25. Juli 8:30 - 9:30.

Noch Fragen?

Moodle-Forum
schoenherr@informatik.uni-leipzig.de