Algorithmen und Datenstrukturen II
SoSe 2024 – Serie 3

1 Starke Zusammenhangskomponenten

Der gerichtete Graph G sei durch die folgende Kantenliste definiert.

$$6,\ 8,\ \ 1,2,\ 2,3,\ 3,1,\ 3,4,\ 3,6,\ 4,5,\ 5,4,\ 1,6$$

a) Benutzen sie den Tarjan-Algorithmus (wie in der Vorlesung beschrieben) beginnend beim Knoten 1, um die starken Zusammenhangskomponenten von G zu berechnen. In der FOR EACH-Schleife innerhalb von `Tarjan-visit` werden die Kindknoten u des aktuellen Knotens v in aufsteigender Reihenfolge der Indizes bearbeitet. Geben sie in der Reihenfolge der Abarbeitung des Algorithmus an:

   – jeweils nach Beendigung der FOR EACH Schleife: `v`, `in`[v] und `l`[v]

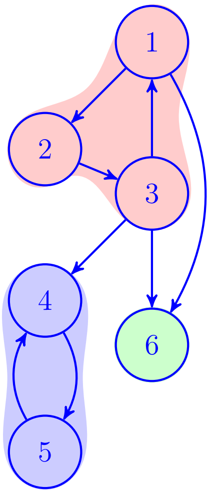
   – die jeweiligen Ausgaben der starken Zusammenhangskomponenten.

Lösung:

`v`	`in`[v]	`l`[v]	Ausgabe
5	5	4	
4	4	4	st. Zshk: 5,4
6	6	6	st. Zshk: 6
3	3	1	
2	2	1	
1	1	1	st. Zshk: 3, 2, 1

b) Zeichnen sie G und dessen Komponentengraphen G^*. Benennen sie dabei die starken Zusammenhangskomponenten von G mit $a, b, \ldots,$ in der Reihenfolge, in der sie vom Tarjan-Algorithmus im vorigen Aufgabenteil ausgegeben werden.

Lösung:



blau = a, gruen = b, und rot = c

2 Mengensysteme

a) Gegeben sind die Menge $E = \{a, b, c, d\}$ und die folgenden Mengen von Mengen:

$\mathcal{M}_1 = \{\, \emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{d\},\ \{a,b\},\ \{c,d\}\,\}$
$\mathcal{M}_2 = \{\, \emptyset,\ \{a\},\ \{b,e\},\ \{c\},\ \{d\},\ \{a,d,e\}\,\}$
$\mathcal{M}_3 = \{\, \emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{d\},\ \{a,b\},\ \{a,d\}\,\}$
$\mathcal{M}_4 = \{\, \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,b\},\ \{b,c\}\,\}$
$\mathcal{M}_5 = \{\, \emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{d\},\ \{a,c\}, \{a,d\}\}$

Geben Sie für jedes $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ an, ob $(E, \mathcal{M}_i)$ ein Mengensystem, ein Unabhängigkeitssystem, ein Matroid ist. Fassen Sie Ihr Ergebnis in Form einer Tabelle mit Einträgen ja/nein zusammen, wobei jedes i eine Spalte und jede der drei Eigenschaften eine Zeile bekommt. Begründen Sie kurz wenn die Eigenschaft nicht gilt (also ein nein eingetragen wird).

Lösung:

i	1	2	3	4	5
Mengensystem	ja	nein[2]	ja	ja	ja
Unabh.System	ja	nein[3]	ja	nein[5]	ja
Matroid	nein[1]	nein[4]	ja	nein[6]	nein[7]

[1] $|\{a,b\} > |\{c\}|; \{a,b\} \setminus \{c\} = \{a,b\} \to \nexists x \in \{a,b\}$ so dass gilt $x \cup \{c\} \in M_1$

[2] $e \notin E$

[3] kein Mengensystem

[4] kein Unabh.System

[5] $\emptyset \notin \mathcal{M}_4$

[6] kein Unabh.System

[7] $|\{a,d\} > |\{b\}|; \{a,d\} \setminus \{b\} = \{a,d\} \to \nexists x \in \{a,d\}$ so dass gilt $x \cup \{b\} \in M_1$

b) Geben Sie für die Fälle aus (a), in denen ein Unabhängigkeitssystem, aber kein Matroid vorliegt, eine Gewichtsfunktion an, bei der der kanonische Greedy-Algorithmus aus der Vorlesung keine optimale Lösung findet. Die Gewichtsfunktion soll nur Werte in $\{1, 2, 3, 4\}$ annehmen.

Lösung:

Fälle 1 und 5. Es gibt mehrere korrekte Lösungen, aber es geht immer so:

1) von den beiden 2-er Mengen ist die, die das Element mit höchstem Gewicht enthält, schlechter als die andere.

5) Menge {b} hat höchstes Element-Gewicht, aber eine der 2-er Mengen ist besser

Zum Beispiel

i	$w(a)$	$w(b)$	$w(c)$	$w(d)$
1	4	1	3	3
5	3	4	3	3

3 Auftragsplanungsmatroid

a Ermitteln Sie für das folgende Autragsproblem die optimale Lösung mittels des in den Vorlesungsfolien beschriebenen Kanonischen Greedy-Algorithmus.

Der Zeitbedarf für jeden Auftrag beträgt einen Tag. Die folgende Tabelle fasst die Aufträge, deren Gewinn und den Abgabetermin zusammen.

Auftrag x	Gewinn w(x)	Termin d(x)
a	12	1
b	6	2
c	4	2
d	3	3
e	9	2
f	2	1

Lösung:

Aufträge sortiert nach w, notiert in der form $(x, [d(x), w(x)]$
$(a, [1, 12])$, $(e, [2, 9])$, $(b, [2, 6])$, $(c, [2, 4])$, $(d, [1, 3])$, $(f, [1, 2])$.
Greedy-Aufbau von A
$A = \emptyset$
$A = \{(a, [1, 12])\}$ ... ist $A \in \mathcal{M}$? ... ja!
$A = \{(a, [1, 12]), (e, [2, 9])\}$ ... ist $A \in \mathcal{M}$? ... ja!
$A = \{(a, [1, 12]), (e, [2, 9]), (b, [2, 6])\}$ ... ist $A \in \mathcal{M}$? ... NEIN!
$A = \{(a, [1, 12]), (e, [2, 9])\}$ behalten
$A = \{(a, [1, 12]), (e, [2, 9]), (c, [2, 4])\}$ ... ist $A \in \mathcal{M}$? ... NEIN!
$A = \{(a, [1, 12]), (e, [2, 9])\}$ behalten
$A = \{(a, [1, 12]), (e, [2, 9]), (d, [3, 3])\}$ ... ist $A \in \mathcal{M}$? ... ja!
$A = \{(a, [1, 12]), (e, [2, 9]), (d, [3, 3]), (f, [1, 2])\}$ ... ist $A \in \mathcal{M}$? ... NEIN!
fertig
$A = \{(a, [1, 12]), (e, [2, 9]), (d, [3, 3])\}$ mit einem Gesamtgewinn von 24

b) Zeigen Sie, dass im Auftragsplanungsproblem – für beliebige Auftragsmengen E und Fristen d – das Mengensystem $(E, \mathcal{M})$ ein Matroid ist.

Hinweis: Verwenden sie dazu, dass (laut Vorlesung) im Auftragsproblem eine Auftragsmenge A zulässig ist (d.h. in $\mathcal{M}$ enthalten ist) genau dann wenn

$$\forall s \in \mathbb{N} : |\{y \in A : d(y) \leq s\}| \leq s. \qquad (*)$$

(bzw. ausformuliert: "eine Auftragsmenge ist zulässig, genau dann wenn sie (für jede beliebige Anzahl von Tagen s) höchstens s Aufträge enthält, die alle nach spätestens s Tagen fertig sein müssen.")

Lösung:

Der Beweis besteht aus zwei Teilen:

a) Unabhängigkeitssystem. $\emptyset \in \mathcal{M}$, denn $\forall s \in \mathbb{N} : |\{y \in \emptyset : d(y) \leq s\}| = 0$. Abgeschlossenheit von $\mathcal{M}$ unter Teilmengenbildung: Sei $A \in \mathcal{M}$ und $B \subseteq A$. Dann ist

$$|\{y \in B : d(y) \leq s\}| \leq |\{y \in A : d(y) \leq s\}| \leq s$$

und deshalb $B \in \mathcal{M}$.

b) Austauscheigenschaft von $\mathcal{M}$. Seien $A, B \in \mathcal{M}$ mit $|B| < |A|$.

Es gibt einen kleinsten Tag r, ab dem A mehr Aufträge y als B enthält, die zu diesem Stichtag fertig sein müssen (also Aufträge y mit $d(y) \leq r$). Inbesondere gilt dann, dass A mehr Aufträge y enthält, die genau eine Frist von r Tagen haben ($d(y) = r$).

Damit gibt es einen Auftrag $x \in A \setminus B$ mit $d(x) = r$. Wir zeigen $B \cup \{x\}$ ist in $\mathcal{M}$, d.h. (*) gilt für beliebige $s \in \mathbb{N}$. (Definiere $N_s(A) := |\{y \in A : d(y) \leq s\}|$).

Falls $s < d(x)$, so

$$N_s(B \cup \{x\}) = N_s(B) \leq s\ .$$

Falls $s \geq d(x) = r$, gilt

$$N_s(B \cup \{x\}) = N_s(B) + 1.$$

Nach Wahl von r gilt $N_s(B) < N_s(A)$, also

$$N_s(B) + 1 \leq N_s(A) \leq s\ .$$