Universität Leipzig
Institut für Informatik
Sommersemester 2025

Prof. Dr. Andreas Maletti,
Dr. habil. Karin Quaas,
Fabian Sauer

Aufgaben zur Lehrveranstaltung

Berechenbarkeit

Lösungen zu Serie 2

Übungsaufgabe 2.1 (Turingmaschinen: Satzform und Ableitungsrelation)

Für alle $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, prüfen Sie, ob es möglich ist, die jeweils fehlende Komponente so zu vervollständigen, dass $u_i \vdash v_i$ durch Ausführen der Transition δ_i. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) $\delta_1 = (q, a) \to (q', b, \triangleright)$, $u_1 = baqab$, $v_1 =?$ Ja, mit $v_1 = babq'b$

(b) $\delta_2 = (q, a) \to (q', b, \triangleleft)$, $u_2 = \varepsilon qa$, $v_2 =?$ Ja, mit $v_2 = \varepsilon q' \square b$

(c) $\delta_3 =?$, $u_1 = \varepsilon qa$, $v_1 = \varepsilon q'b$ Ja, mit $\delta_3 = (q, a) \to (q', b, \diamond)$

(d) $\delta_4 = (q, a) \to (q', b, \triangleleft)$, $u_4 =?$, $v_4 = \varepsilon q'baa$ Nein, denn nach Ausführen von δ_4 müsste der 2. Buchstabe nach dem q' ein b sein.

Übungsaufgabe 2.2 (Turingmaschinen: Akzeptierte Sprache)

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und $L \subseteq \Sigma^*$ definiert durch

$$L = \{0^m 1^n \mid n \text{ ist ein Vielfaches von } m\}.$$

Geben Sie eine Turingmaschine M an, welche L akzeptiert, d.h. $L(M) = L$.

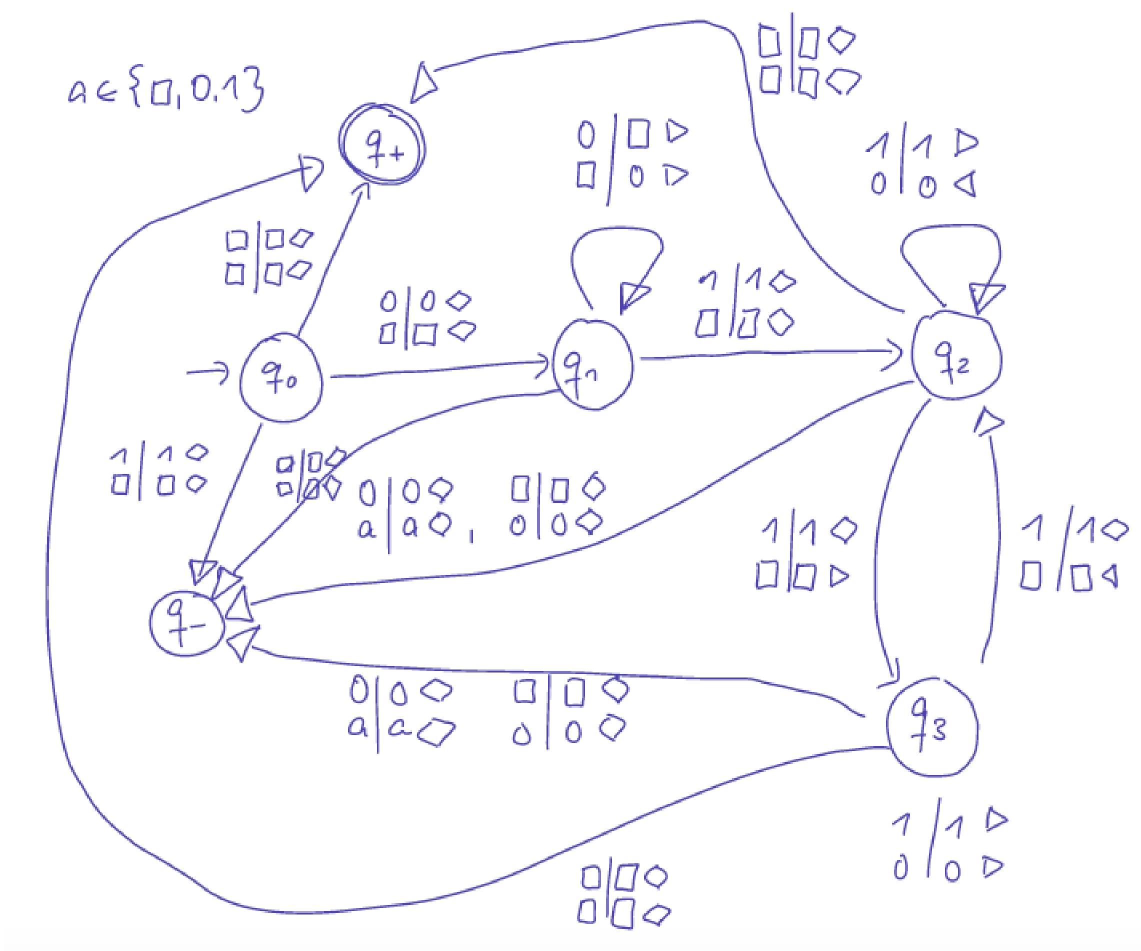
Lösung: Idee: Kopiere alle 0 von Band 1 auf Band 2, dann laufe jeweils auf Band 2 die 0 hin und her, synchron laufe auf Band 1 die 1 entlang, bis sich beide treffen (Band 1 rechts am Ende der 1en, Band 2 links oder rechts am Anfang oder am Ende der 0en).

Definiere die 2-Band-Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, \square, q_0, q_+, q_-)$ mit

- $Q = \{q_0, q_+, q_-, q_1, q_2, q_3\}$
- $\Gamma = \{0, 1, \square\}$
- Δ enthält genau die folgenden Transitionen:
  - $(q_0, \langle 1, \square \rangle) \to (q_-, \langle (1, \diamond), (\square, \diamond) \rangle)$ Falls die Eingabe die Form $0^m 1^n$ mit $m = 0$ und $n \geq 1$ hat, wird abgelehnt, denn $n \geq 1$ kein Vielfaches von 0
  - $(q_0, \langle \square, \square \rangle) \to (q_+, \langle (\square, \diamond), (\square, \diamond) \rangle)$ Falls die Eingabe die Form $0^m 1^n$ mit $m = n = 0$ hat, wird akzeptiert, denn 0 ist Vielfaches von 0

- $(q_0, \langle 0, \square \rangle) \to (q_1, \langle (0, \diamond), (\square, \diamond) \rangle)$
  Falls die Eingabe die Form $0^m 1^n$ mit $m \geq 1$ hat, geht M ohne Bewegung zu Zustand q_1.
- $(q_1, \langle 0, \square \rangle) \to (q_1, \langle (\square, \triangleright), (0, \triangleright) \rangle)$
  In q_1 kopiert M alle 0 von Band 1 auf Band 2, von links nach rechts. Die 0 auf Band 1 werden mit $\square$ überschrieben.
- $(q_1, \langle \square, \square \rangle) \to (q_-, \langle (\square, \diamond), (\square, \diamond) \rangle)$
  Wird in q_1 nun ein $\square$ auf Band 1 gelesen, wird abgelehnt, denn nach einer 0 muss mindestens eine 1 gelesen werden, damit n ein Vielfaches von m ist.
- $(q_1, \langle 1, \square \rangle) \to (q_2, \langle (1, \diamond), (\square, \triangleleft) \rangle)$
  Auf Band 1 wird eine 1 gelesen: der Kopiervorgang ist nun abgeschlossen und M geht zu Zustand q_2, wo nun die eigentliche Eigenschaft geprüft werden wird. Dazu bleibt der Schreiblesekopf von Band 1 auf der ersten 1, und der Schreiblesekopf von Band 2 geht eine Position nach links zur letzten 0.
- für alle $a \in \{0, 1, \square\}$: $(q_2, \langle 0, a \rangle) \to (q_-, \langle 0, \diamond), (a, \diamond) \rangle)$
  Wird in q_2 auf Band 1 eine 0 gelesen, wird abgelehnt, da das Eingabewort nicht die richtige Form $0^m 1^n$ besitzt.
- $(q_2, \langle 1, 0 \rangle) \to (q_2, \langle (1, \triangleright), (0, \triangleleft) \rangle)$
  In q_2 bewegt sich M auf Band 1 für jede gelesene 1 nach rechts und synchron auf Band 2 für jede gelesene 0 nach links, solange bis...
- $(q_2, \langle \square, 0 \rangle) \to (q_-, \langle (\square, \diamond), (0, \diamond) \rangle)$
  ...auf Band 1 ein $\square$ gelesen wird, also alle 1 "konsumiert" wurden, obwohl auf Band 2 noch eine 0 gelesen wird. In diesem Fall wird abgelehnt, da n kein Vielfaches von m sein kann; oder...
- $(q_2, \langle \square, \square \rangle) \to (q_+, \langle (\square, \diamond), (\square, \diamond) \rangle)$
  ...sowohl auf Band 1 als auch auf Band 2 ein $\square$ gelesen wird. In diesem Fall wird akzeptiert, denn n ist Vielfaches von m; oder...
- $(q_2, \langle 1, \square \rangle) \to (q_3, \langle (1, \diamond), (\square, \triangleright) \rangle)$
  ...auf Band 1 wird eine 1 gelesen, aber auf Band 2 ein $\square$. In diesem Fall geht M in den Zustand q_3 ohne Bewegung auf Band 1, aber eine Position vor zum Anfang von Band 2. Der Zustand q_3 macht im Prinzip dasselbe wie q_2, nur dass die Lesebewegung auf Band 2 auch nach rechts geht (vergleiche die nächsten 5 Transitionen mit den jeweiligen Transitionen in q_2). Die TM wechselt also zwischen den Zuständen q_2 und q_3 hin und her.
- für alle $a \in \{0, 1, \square\}$: $(q_3, \langle 0, a \rangle) \to (q_-, \langle 0, \diamond), (a, \diamond) \rangle)$
- $(q_3, \langle 1, 0 \rangle) \to (q_3, \langle (1, \triangleright), (0, \triangleright) \rangle)$
- $(q_3, \langle \square, 0 \rangle) \to (q_-, \langle (\square, \diamond), (0, \diamond) \rangle)$
- $(q_3, \langle \square, \square \rangle) \to (q_+, \langle (\square, \diamond), (\square, \diamond) \rangle)$

- $(q_3, \langle 1, \square \rangle) \rightarrow (q_2, \langle (1, \diamond), (\square, \triangleleft) \rangle)$



Übungsaufgabe 2.3 (Turingmaschinen: Transformationssemantik)
Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Definiere die längenlexikografische Ordnung $\sqsubset$ über Σ^* durch $w \sqsubset w'$ falls $|w| < |w'|$, oder $|w| = |w'|$ und es gibt $u, v, v' \in \Sigma^*$ mit $w = u \cdot a \cdot v$ und $w' = u \cdot b \cdot v'$.

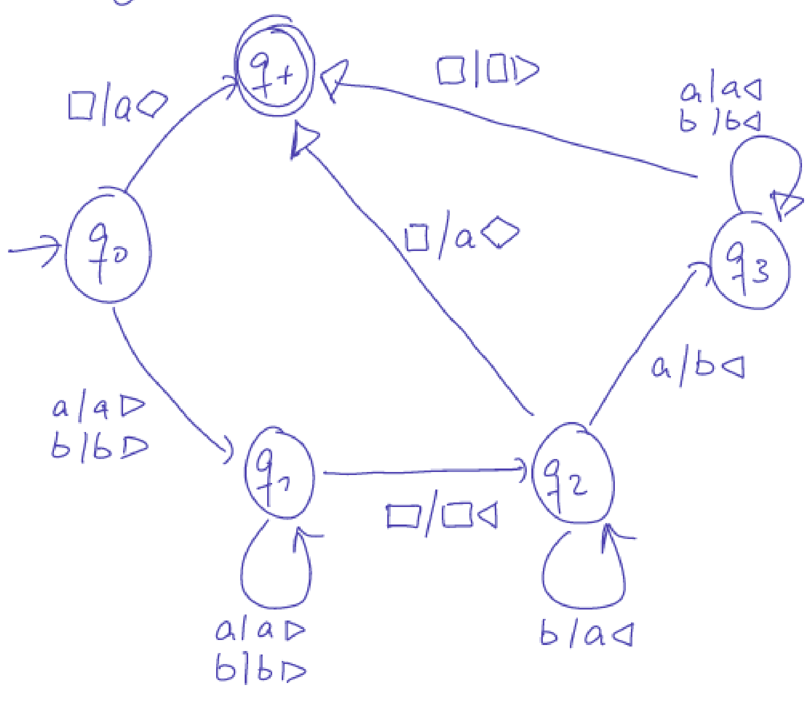
Weiterhin sei $g : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ die Funktion, die jedes Wort $w \in \Sigma^*$ auf seinen eindeutigen längenlexikografischen Nachfolger abbildet. Beispielsweise gilt $g(\varepsilon) = a$, $g(aab) = aba$ und $g(bbb) = aaaa$.

Geben Sie eine Turingmaschine M an sodass $T(M) = g$.

LÖSUNG: Idee: eigentlich wie binäre Addition.
Sei $M = (Q, \{0\}, \{0, 1, \square\}, \Delta, \square, q_0, q_+, q_-)$, wobei

- $Q = \{q_0, q_+, q_-, q_1, q_2, q_3\}$
- Δ besteht aus genau den folgenden Transitionen:
  - $(q_0, \square) \to (q_+, a, \diamond)$
    Leeres Wort hat a als Nachfolger
  - Für alle $c \in \{a, b\}$: $(q_0, c) \to (q_1, c, \triangleright)$
    Falls Eingabewort nichtleer, bewegt sich M von links nach rechts und zu q_1.
  - Für alle $c \in \{a, b\}$: $(q_1, c) \to (q_1, c, \triangleright)$
    Dort bewegt sich M von links nach rechts weiter bis zum Ende des Wortes
  - $(q_1, \square) \to (q_2, \square, \triangleleft)$.
    Am Ende des Wortes eine Position zurück und in Zustand q_2.
  - $(q_2, b) \to (q_2, a, \triangleleft)$ und $(q_2, a) \to (q_3, b, \triangleleft)$
    Von rechts nach links: alle b werden durch a ersetzt, bis endlich ein a gesehen wird. Dieses wird durch b ersetzt und M geht zu q_3.
  - Sollte in q_2 kein a gesehen werden, so wird das erste $\square$ durch ein a ersetzt und akzeptiert: $(q_3, \square) \to (q_+, a, \diamond)$.
  - In q_3 bewegt sich M einfach nur zum Anfang des Wortes, damit der SLK an der richtigen Stelle steht, bevor die M akzeptiert:
    Für alle $c \in \{a, b\}$: $(q_3, c) \to (q_3, c, \triangleleft)$, $(q_3, \square) \to (q_+, \square, \triangleright)$.

$T(M) = g$



Hausaufgabe 2.4 (Turingmaschinen: Satzform und Ableitungsrelation) (4)

Für alle $i \in \{1,2,3,4\}$, prüfen Sie, ob es möglich ist, die jeweils fehlende Komponente so zu vervollständigen, dass $u_i \vdash v_i$ durch Ausführen der Transition δ_i. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) $\delta_1 = (q,b) \to (q',a,\diamond)$, $u_1 = bqbb$, $v_1 = ?$ Ja, mit $v_2 = bq'ab$ ●1

(b) $\delta_2 = (q,a) \to (q',a,\triangleright)$, $u_2 = baqa$, $v_2 = ?$ Ja, mit $v_1 = baaq'\square$ ●2

(c) $\delta_3 = ?$, $u_1 = bqbb$, $v_1 = bbq'b$ Ja, mit $\delta_3 = (q,b) \to (q',b,\triangleright)$ ●3

(d) $\delta_4 = (q,\square) \to (q',a,\triangleright)$, $u_4 = ?$, $v_4 = \varepsilon aq'\square$ Ja, mit $u_4 = \varepsilon q\square$ ●4

Hausaufgabe 2.5 (Turingmaschinen: Akzeptierte Sprache)

(a) Betrachten Sie die folgende Aussage:

Für alle $p \in \mathbb{N}$, sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent.

(i) *Eine Zahl p ist keine Primzahl.*

(ii) *$p \in \{0,1\}$, oder es existieren $m,n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$, $n \geq 1$, n ist Vielfaches von m, und $p = m + n$.*

Beweisen Sie *eine* der beiden Implikationen, d.h. entweder (i)⇒(ii), oder (ii)⇒(i). (4)

(b) Sei $\Sigma = \{0\}$ und $L \subseteq \Sigma^*$ definiert durch

$$L = \{0^p \mid p \text{ ist keine Primzahl}\}.$$

Geben Sie eine Turingmaschine an, welche L akzeptiert, d.h. $L(M) = L$. (8)

Hinweis: Ihre Turingmaschine darf selbstverständlich gemäss Vorlesung 3 aus mehreren Turingmaschinen mittels Verkettung, Iteration oder Vereinigung zusammengesetzt werden. Sie dürfen aus Übung oder Vorlesung bekannte Turingmaschinen verwenden.

LÖSUNG: (a) Eine Zahl c ist eine Primzahl gdw. sie genau zwei Teiler besitzt: 1 und c. Eine Zahl c ist keine Primzahl gdw. sie genau einen Teiler besitzt (d.h. $c = 1$) oder mindestens drei verschiedene Teiler besitzt (d.h. es gibt a,b mit $c = a \cdot b$ und $a \notin \{1,c\}$).

"(i)⇒ (ii)" Angenommen p ist keine Primzahl. Falls $p = 0$ oder $p = 1$, so gilt (ii). Nehmen wir also an, $p \geq 2$. Da p keine Primzahl und $p \neq 1$, gibt es a,b mit $p = a \cdot b$ und $a \notin \{1,p\}$. Da $a \neq p$, gilt $b \neq 1$. Da $p \neq 0$, gilt auch $a \neq 0$ und $b \neq 0$. Also $a \geq 2$ und $b \geq 2$. Setze $m = a$, $n = p - a$. Klar: $p = m + n$. Wir zeigen, dass n ein Vielfaches von m ist:

$$\begin{aligned} p &= a \cdot b \\ p &= a \cdot (b - 1 + 1) \\ p &= a \cdot (b-1) + a \\ p - a &= a \cdot (b-1) \end{aligned}$$

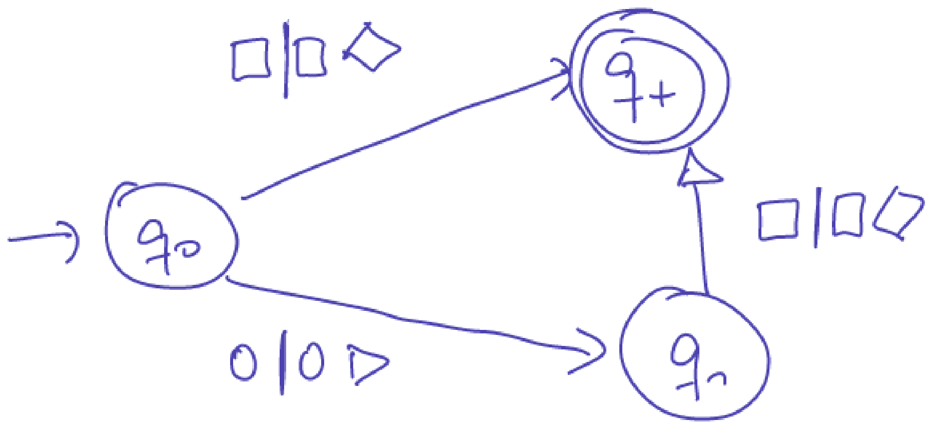
Also $n = m \cdot (b-1)$, d.h. n ist Vielfaches von m. Da $m \geq 2$ und $b - 1 \geq 1$, erhalten wir auch $n \geq 1$.

"(ii)⇒ (i)" Angenommen $p = 0$ oder $p = 1$. Dann ist p keine Primzahl. Sei also $p \geq 2$ und angenommen, es gibt m, n mit $m \geq 2$, $n \geq 1$, $p = m + n$ und n ist Vielfaches von m. Also $n = m \cdot k$ für ein $k \geq 0$. Dann aber $p = m + n = m + (m \cdot k) = m \cdot (1 + k)$. Da $n \geq 1$ und $m + n = p$, gilt $m < p$. Weiterhin gilt $m \geq 2$ und insbesondere $m \neq 1$, also $m \notin \{1, p\}$. p besitzt also mindestens 3 Teiler und ist somit keine Primzahl.

●5 ●6 ●7 ●8

(b) Wir definieren M als $M_0 \cup (M_1; M_2)$; hierbei sei M_2 eine (1-Band-)Turingmaschine, welche der in Aufgabe 2.2 entwickelten 2-Band-Turingmaschine entspricht (wie in der Vorlesung gezeigt: Mehrbandturingmaschinen können in (1-Band-)Turingmaschinen umgewandelt werden, welche dieselbe Sprache akzeptieren). Also akzeptiert M_2 alle Wörter der Form $0^m 1^n$ mit n ist Vielfaches von m akzeptiert. Die Turingmaschine M_0 ist eine Turingmaschine über $\{0\}$, welche genau das leere Wort sowie das Wort 0 akzeptiert. Diese beiden Wörter entsprechen den Sonderfällen $p = 0$ und $p = 1$.

M_0

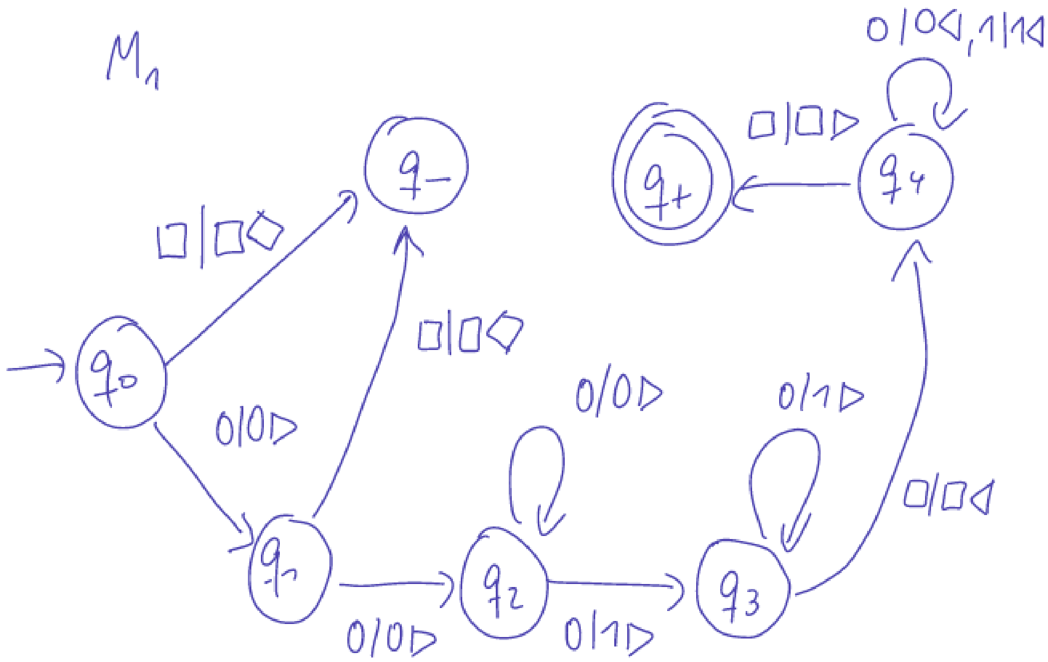


M_1 sei die Turingmaschine $M_1 = (Q, \{0\}, \Gamma, \square, \Delta, q_0, q_+, q_-)$, wobei:

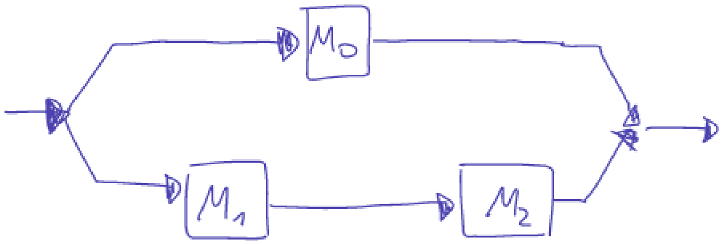
- $Q = \{q_0, q_-, q_+, q_2, q_2, q_3, q_4\}$
- $\Gamma = \{0, 1, \square\}$
- Δ besteht genau aus den folgenden Transitionen:
  - $(q_0, \square) \to (q_-, \square, \diamond)$
    Das leere Wort wird abgelehnt (Sonderfall $p = 0$ wird durch M_0 behandelt).

- $(q_0, 0) \to (q_1, 0, \triangleright)$
  Lese eine 0, geh zu q_1, belasse 0 auf dem Band und bewege Schreiblesekopf (SLK) nach rechts.
- $(q_1, \square) \to (q_-, \square, \diamond)$
  Falls in q_1 ein $\square$ gelesen wird, so entspricht die Eingabe 0. In diesem Fall lehnt die Turingmaschine ab (Sonderfall $p = 1$ wird durch M_0 behandelt).
- $(q_1, 0) \to (q_2, 0, \triangleright)$
  Anderenfalls geht M_1 zum Zustand q_2. Hier beginnt nun die Behandlung aller Nicht-Sonderfälle $p \geq 2$.
- $(q_2, 0) \to (q_2, 0, \triangleright)$, $(q_2, 0) \to (q_3, 1, \triangleright)$, $(q_3, 0) \to (q_3, 1, \triangleright)$
  In q_2 wird nichtdeterministisch eine Position im Eingabewort geraten, ab der wir alle 0 in 1 verwandeln
- $(q_3, \square) \to (q_4, \square, \triangleleft)$, für alle $a \in \{0, 1\} : (q_4, a) \to (q_4, a, \triangleleft)$, $(q_4, \square) \to (q_+, \square, \triangleright)$
  Ist M_1 am Ende des Wortes angekommen, bewegt es den SLK zurück zum Anfang des Bandinhaltes (jetzt von der Form $0^m 1^n$ mit $m \geq 2$, $n \geq 1$) und akzeptiert.

Die Turingmaschine M_1 akzeptiert also alle Eingaben der Form 0^p mit $p \geq 2$, und wandelt sie nichtdeterministisch in ein Wort der Form $0^m 1^n$ mit $m + n = p$, $m \geq 2$, $n \geq 1$ um.



Die finale Turingmaschine definieren wir nun wie folgt. Wir nutzen 1.5(a) um zu zeigen dass $L(M) = L$:



- Falls M akzeptiert, so ist $p = 0$ oder $p = 1$, oder $p = m + n$ mit $m \geq 2$, $n \geq 1$, und n ist ein Vielfaches von m, also ist p keine Primzahl.
- Falls M nicht akzeptiert, so ist $p \neq 0$, $p \neq 1$, und es gibt kein m, n mit $m \geq 2$, $n \geq 2$ und n ist Vielfaches von m. Also p eine Primzahl.

●9 ●10 ●11 ●12 für eine erkennbar richtige Idee ●13 ●14 ●15 ●16 für formal richtige Umsetzung

Hausaufgabe 2.6 (Turingmaschinen: Transformationssemantik) (8)

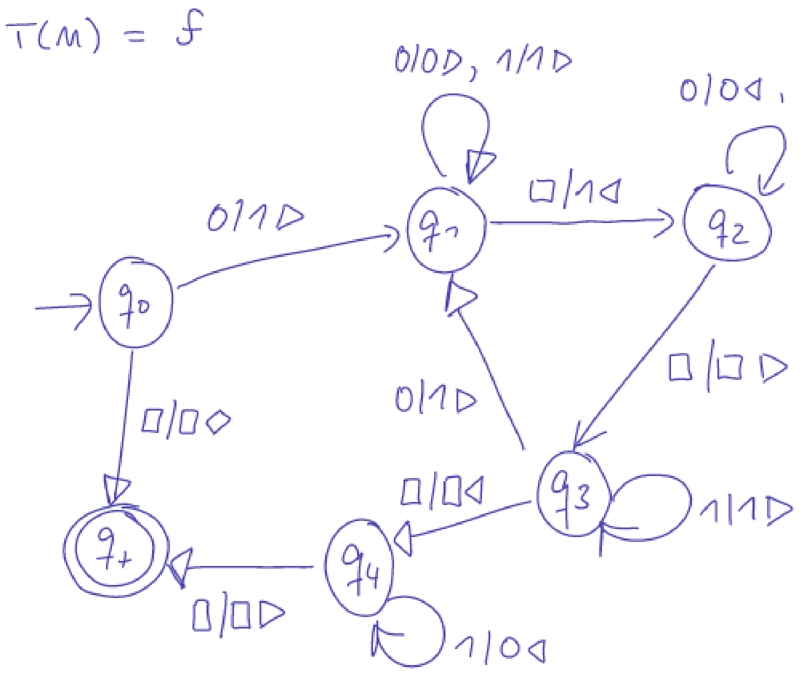
Sei $f : \{0\}^* \to \{0\}^*$ definiert durch $f(0^n) = 0^{2n}$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie eine Turingmaschine M an, sodass $T(M) = f$.

LÖSUNG: Idee: für jede 0 eine neue 0 ans Ende. Damit keine 0 der Eingabe mehr als einmal behandelt wird, markieren wir sie durch eine 1 (und schreiben auch eine 1). Am Ende alle 1 in 0 und zurück zum Anfang des Bandes.

Definiere $M = (Q, \{0\}, \{0, 1, \square\}, \Delta, \square, q_0, q_+, q_-)$, wobei

- $Q = \{q_0, q_+, q_-, q_1, q_2, q_3\}$
- Δ besteht aus genau den folgenden Transitionen:
  - $(q_0, \square) \to (q_+, \square, \diamond)$
    Eingabewort $\varepsilon = 0^0$, und $f(0) = 0$, sodass die M direkt akzeptieren kann.
  - $(q_0, 0) \to (q_1, 1, \triangleright)$
    Die TM markiert eine gelesene 0 durch eine 1, bewegt den SLK nach rechts und geht in den Zustand q_1
  - Für alle $a \in \{0, 1\}$: $(q_1, a) \to (q_1, a, \triangleright)$
    In q_1 wandert M bis zum Ende des aktuellen Bandinhaltes, um...
  - $(q_1, \square) \to (q_2, 1, \triangleleft)$, für alle $a \in \{0, 1\}$: $(q_2, a) \to (q_2, a, \triangleleft)$
    ... dort eine neue 1 aufs Band zu schreiben. Dann geht M in q_2 und bewegt den SLK wieder nach links bis zum Anfang des Wortes.

– $(q_2, \square) \to (q_3, \square, \triangleright)$
  Dort angekommen, bewegt M sich in Zustand q_3.
– $(q_3, 1) \to (q_3, 1, \triangleright)$, $(q_3, 0) \to (q_1, 1, \triangleright)$.
  In q_3 sucht M die erste 0; wenn gefunden, markiert sie sie durch eine 1 und geht wieder in q_1.
– Sollte in q_3 keine 0 mehr gefunden werden, die TM also von links nach rechts zum Ende des Wortes wandert ohne eine 0 gesehen zu haben, so ist der Verdopplungsvorgang beendet. Die TM geht nun mit
  $(q_3, \square) \to (q_4, \square, \triangleleft)$
  in den Zustand q_4, wo alle 1 in 0 umgewandelt werden und der SLK zum Anfang des Wortes bewegt wird: $(q_4, 1) \to (q_4, 0, \triangleleft)$, $(q_4, \square) \to (q_+, \square, \triangleright)$



Punktevergabevorschlag: ●17 ●18 ●19 ●20 für erkennbar richtige Idee ●21 ●22 ●23 ●24 für formal richtige Umsetzung, d.h. $T(M) = f$ und richtiges Aufschreiben