UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Algorithmen und Datenstrukturen II

Vorlesung *fyr*4

Leipzig, 23.04.2024

Peter F. Stadler & Thomas Gatter & Ronny Lorenz

FLÜSSE UND NETZWERKE

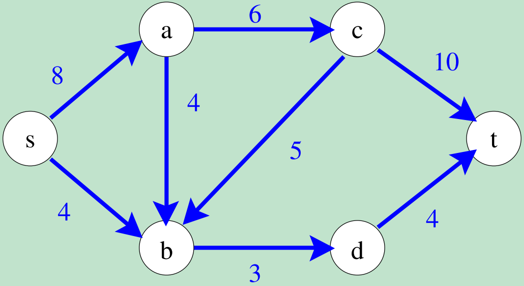
Flüsse in Netzwerken I

Anwendungsprobleme

- Wieviel Autos können durch ein Straßennetz fahren?
- Wieviel Abwasser fasst ein Kanalnetz?
- Wieviel Strom kann durch ein Leitungsnetz fließen?

Flüsse in Netzwerken II

Beispiel



Kantenwert: Kapazität $c(e)$

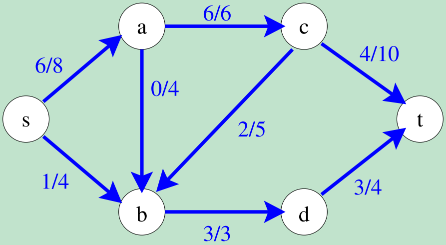
Flüsse in Netzwerken III

Definition

- Ein *(Fluss-) Netzwerk* ist ein gerichteter Graph $G = (V, E, c)$ mit ausgezeichneten Knoten s (Quelle, Source) und t (Senke, Drain), sowie einer Kapazitätsfunktion $c :\rightarrow \mathbb{R}^+$.
- *Ein Fluss* für das Netzwerk ist eine Funktion $f : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, so dass gilt:
  - Kapazitätsbeschränkung: $\forall e \in E : 0 \leq f(e) \leq c(e)$.
  - Symmetriebedingung: $f(u, v) = -f(v, u)$
  - Flusserhaltung/Kirchhoffsches Gesetz: $\forall v \in V \setminus \{s, t\} : \sum_{(v',v)\in E} f(v', v) = \sum_{(v,v')\in E} f(v, v')$
  - Der Wert von f, $w(f)$, ist die Summe der Flusswerte der die Quelle s verlassenden Kanten: $\sum_{(s,v)\in E} f(s, v)$

Flüsse in Netzwerken IV

Beispiel



Kantenbeschriftung: Fluss $f(e)$ / Kapazität $c(e)$

Flüsse in Netzwerken V

Gesucht: Fluss mit maximalem Wert

- begrenzt durch Summe der aus s wegführenden bzw. in t eingehenden Kapazitäten
- jeder weitere “Schnitt” durch den Graphen, der s und t trennt, begrenzt maximalen Fluss

***Wikipedia**: Flüsse und Schnitte (Link)*

Schnitte

Definition

Es sei G ein gerichteter Graph mit Knotenmenge V und Kantenmenge E. Ein **Schnitt** (A, B) in G ist eine Partition von V in zwei nichtleere Teilmengen A und B. Zu jedem Schnitt gehört eine Menge von Schnittkanten

$$E(A, B) = \{e \in E | e = (u, v), u \in A, v \in B\}$$

(A, B) ist ein Schnitt in G wenn $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, and $A \cup B = V$.

Schnitte

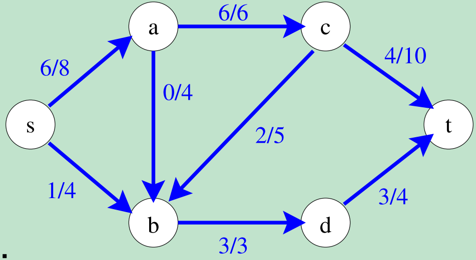
Definition

Für jeden Schnitt mit $s \in A$ und $t \in B$ sei die Kapazität

$$c(A, B) = \sum_{e \in E(A,B)} c(e)$$

Schnitte

Beispiel



In unserem Beispiel:

$c(\{s,a,b\},\{c,d,t\}) = c(a,c) + c(b,d) = 6 + 3 = 9$

$c(\{s,a\},\{b,c,d,t\}) = c(a,c) + c(a,b) + c(s,b) = 6 + 4 + 4 = 14$

Hinweis: es wird hier über die Kapazität summiert und nur Kanten von A nach B berücksichtigt

Restgraph

Definition

Sei f ein zulässiger Fluss für $G = (V, E, c)$:

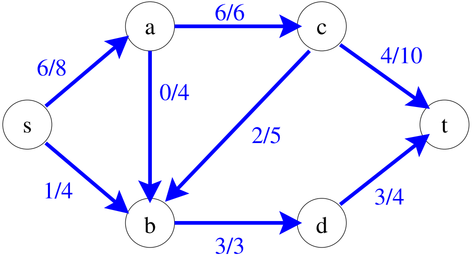
- Für jede Kante $e = (u, v) \in E$ gibt es eine Kante $\bar{e} = (v, u)$ in die umgekehrte Richtung (Rückwärtskante).
- Die Menge der Vorwärts und Rückwärtskanten ist daher $E' = \{(v, w) | (v, w) \in E \vee (w, v) \in E\}$
- Wir definieren die **Restkapazität** einer Kante $e = (v, w) \in E'$ als

$$rest(e) := \begin{cases} c(e) - f(e) & \text{falls } e \in E \\ f(e) & \text{falls } \bar{e} \in E \end{cases}$$

- Der Restgraph G_f von f (bzgl. G) besteht aus den Kanten $e \in E'$ mit Kapazitäten $rest(e)$. Kanten mit $rest(e) == 0$ können ausgelassen werden.

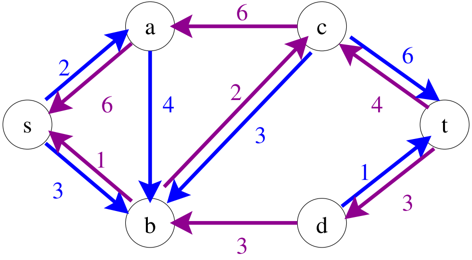
Restgraph

Graph G mit Fluß f



$f(e)/c(e)$

Restgraph



$rest(e)$

Erweiterungspfad I

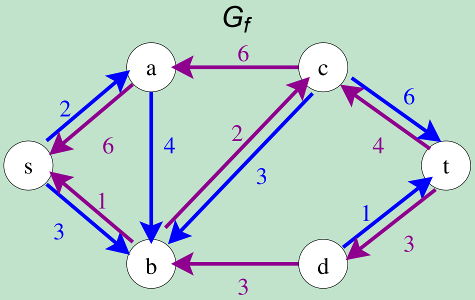
Definition

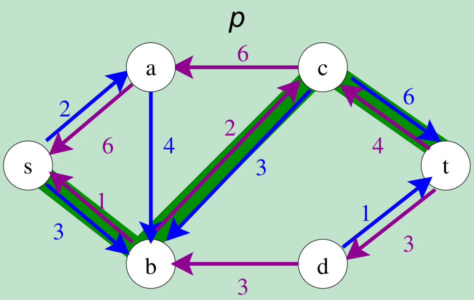
Ein **Erweiterungspfad** ist ein (zyklenfreier) Pfad p in G_f von s nach t. Die **Restkapazität** eines Erweiterungspfades p ist

$$c_f(p) = \min\{(rest(u,v) | (u,v) \text{ liegt auf } p\}$$

Erweiterungspfad II

Beispiel





$c_f(p) = \min\{3, 2, 6\} = 2$

Erweiterungspfad III

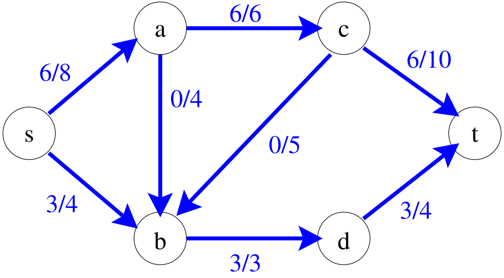
Beobachtung:
Sei G ein Netzwerk, c eine Kapazität und f ein Fluss. Sei G_f das zugehörige Restnetzwerk und $c_f = rest$ die zugehörige Restkapazität. Sei ferner g ein zulässiger Fluss auf G_f. Dann gilt: $(f + g)$ ist ein zulässiger Fluss auf G mit $|(f + g)|$ = $|f|$ + $|g|$

Beobachtung:
Sei p ein Erweiterungspfad in G_f. Dann ist g mit $g(e) = c_f(p)$ für alle Kanten auf p und $g(e) = 0$ ein zulässiger Fluss auf dem Restgraphen.

Erweiterungspfad IV

Idee: Optimierung des Flusses für G:

- entlang eines Erweiterungspfades p
- Verbesserung um $c_f(p)$ für alle Kanten e auf dem Weg p



Ford-Fulkerson-Algorithmus I

Optimierung eines bestehenden Flusses f in einem Netzwerk G mit Kapazität c:

Ablauf des Algorithmus

- bestimme Restnetzwerk G_f
- suche Erweiterungspfad
- bestimme $c_f(p)$
- erhöhe den Fluss um Minimum der verfügbaren Restkapazität der einzelnen Kanten des Erweiterungspfades

Ford-Fulkerson-Algorithmus II

Algorithmus

input : Restgraph G_f zu Graph G mit initialem Fluss f
output: Optimaler Fluss f

---

while *es gibt einen zunehmenden Weg p in Restgraph G* **do**
    r = min {rest(e) | e liegt auf p}
    for *alle e = (v,w) auf p* **do**
        if *e in E* **then**
            f(e) = f(e) + r
        else
            f(w,v) = f(w,v) - r

Ford-Fulkerson-Algorithmus - Laufzeit

- $O(|E|)$ für Konstruktion des Restgraphen
- $O(|E|)$ für Konstruktion eines Erweiterungspfades: Graphtraversierung und Bestimmung des Flusses entlang des Wegs
- in jedem Schritt verbessert sich der Fluss um $r = \min\{rest(e)|e \text{ liegt auf } p\}$

Für *ganzzahlige* Kapazitäten: $O(E) \times \max f$ (jeder Durchlauf erhöht den Fluss um mindestens eins, also gibt es bis zu $|f^*|$ Durchläufe
(f^* maximaler Fluss)

$\Rightarrow$ Für *allgemeine* Kapazitäten: Konvergenz nicht garantiert!

Min-Cut I

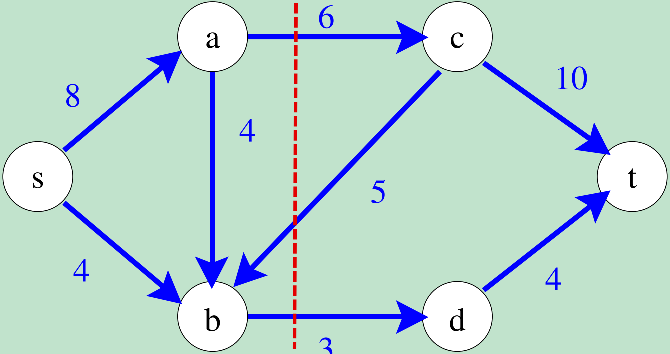
Wenn ein Erweiterungspfad gefunden werden kann, bringt der neue Fluss $(f + g)$ eine Verbesserung.

Aber kann immer ein Erweiterungspfad gefunden werden, wenn der bisherige Fluss f nicht maximal ist?

Beobachtung: Im Graph mit optimalem Fluss existiert im Restgraph kein Weg von Quelle zu Senke!

Min-Cut II

Beispiel



Min-Cut-Max-Flow-Theorem

Theorem (Min-Cut-Max-Flow-Theorem)

Sei f ein zulässiger Fluss für G. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist maximaler Fluss in G.
2. Der Restgraph von f enthält keinen zunehmenden Weg.
3. $w(f) = c(A, B)$ für einen Schnitt (A, B) von G.

Min-Cut-Max-Flow-Theorem -- Beweis

Beweis I

(1) Sei (A, B) ein Schnitt mit $s \in A$ und $t \in B$. Flusserhaltung impliziert, dass $\sum_{e \in (A,B)} f(e) = w(f)$. Dies gilt für jeden Schnitt, der s und t trennt. Da $f(e) \leq c(e)$ erfüllt sein muss, gilt ausserdem $w(f) \leq c(A, B)$ für alle Schnitte die s und t trennen.

(2) ((1) $\Rightarrow$ (2)) Sei f ein maximaler Fluss. Würde der zugehörige Restgraph G_f einen zunehmenden Weg enthalten, könnte der Fluss weiter erhöht werden. Also gibt es keinen zunehmenden Weg.

Min-Cut-Max-Flow-Theorem -- Beweis

Beweis II

(3) ((2) $\Rightarrow$ (3)) Sei A die Menge der Knoten, die in G_f von s aus erreicht werden können, und sei $B = V \setminus A$. Also gilt $s \in A$ und insbesonders $t \in B$. Zudem ist (A, B) ein Schnitt, der s und t trennt.
Es gibt keinen Weg in G_f durch Kanten von $c(A, B)$. (Wenn $e = (u, v) \in (A, B)$ existieren würde, wäre ja nicht nur u von s erreichbar sondern auch v, was der Definition von B widersprechen würde.) Daher gilt für die Restkapaziät entlang jeder Kante von $e \in c(A, B)$, dass $rest(e) = c(e) - f(e) = 0$ verschwindet. Also ist $f(e) = c(e)$ für alle $e \in c(A, B)$.
Wegen (1) gilt $w(f) = \sum_{e \in (A,B)} f(e) = \sum_{e \in (A,B)} c(e) = c(A, B)$.

(4)((3) $\Rightarrow$ (1)) Für alle zulässigen Flüsse f und Schnitte (A, B), die s und t trennen, gilt nach (1) $w(f) \leq c(A, B)$. Wenn also $w(f) = c(A, B)$ ist, dann ist $w(f)$ notwendigerweise maximal. $\square$

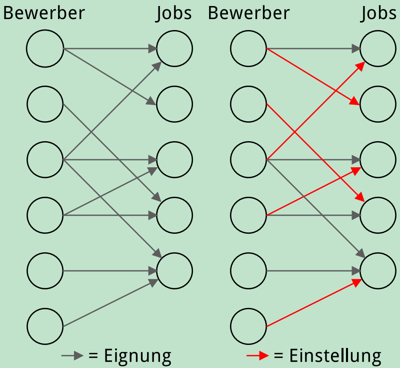
Maximales Bipartites Matching

Beispiel (leicht verallgemeinerbar):

- Eine Gruppe von M Personen bewirbt sich auf N Jobangebote
- Jede Person hat eine Prioritätenliste von präferierten Jobs
- Jeder Arbeitgeber hat eine Proritätenliste von präferierten Kandidaten
- Wieviele Personen können maximal auf die verfügbaren Jobs verteilt werden?

Maximales Bipartites Matching - Beispiel

Beispiel



Verteilung von Bewerbern auf Jobangebote

Maximales Bipartites Matching

Definition

Ein **Matching (Zuordnung)** M für einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge der Kanten, so dass jeder Knoten in V in höchstens einer Kante vorkommt.

- $|M|$ = Größe der Zuordnung
- Perfektes Matching: kein Knoten bleibt “allein” (unmatched), d.h. jeder Knoten ist in einer Kante von M vertreten

Matching M ist **maximal**, wenn es kein Matching M' mit $|M| < |M'|$ gibt

Maximales Bipartites Matching

Definition

Ein **bipartiter Graph** ist ein Graph, dessen Knotenmenge V in zwei disjunkte Teilmengen V_1 und V_2 aufgeteilt ist, und dessen Kanten jeweils einen Knoten aus V_1 mit einem aus V_2 verbinden (also keine Kanten innerhalb von V_1 oder V_2).

Bipartites Matching und maximaler Fluss

Maximales Matching kann auf maximalen Fluss zurückgeführt werden:

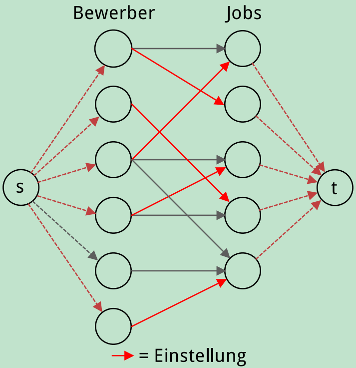
Algorithmus - Ablauf

- Quelle und Senke hinzufügen.
- Kanten von V_1 nach V_2 richten.
- Jeder Knoten in V_1 erhält eingehende Kante von der Quelle.
- Jeder Knoten in V_2 erhält ausgehende Kante zur Senke.
- Alle Kanten erhalten Kapazität $c(e) = 1$

$\rightarrow$ Anwendung des Ford-Fulkerson-Algorithmus

Maximales Bipartites Matching - Beispiel

Beispiel



Verteilung von Bewerbern auf Jobangebote