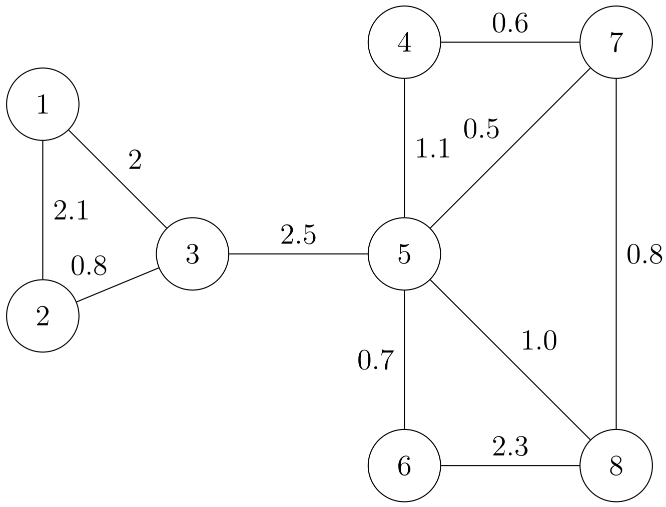
| Universität Leipzig<br>Institut für Informatik<br>Bioinformatik/IZBI | **Algorithmen und Datenstrukturen II**<br>SoSe 2024 – Freiwillige Serie 1 | | |
|---|---|---|---|
| P.F. Stadler, T. Gatter | Ausgabe am<br>02.04.2024 | Lösung am<br>09.04.2024 | Seite<br>1/6 |

# Algorithmen und Datenstrukturen II<br>SoSe 2024 – Serie 1

## 1 Ungerichtete Graphen

Gegeben sei der folgende ungerichtete gewichtete Graph $G$.



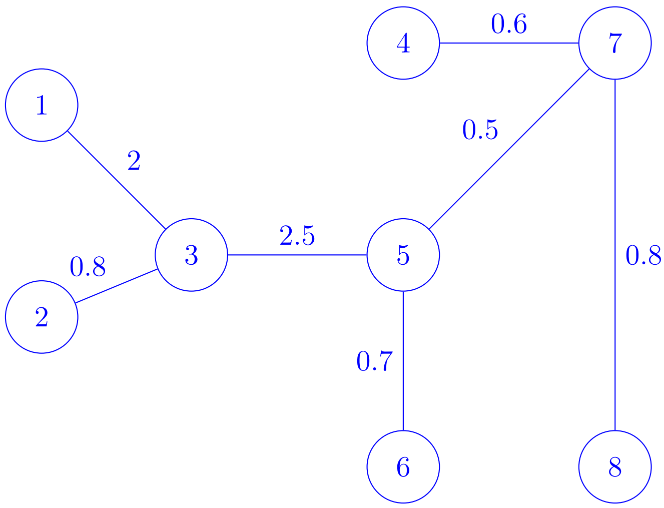

a) Finden Sie einen minimalen Spannbaum von $G$ mit dem Algorithmus von Kruskal (vgl. ADS2-V1 Folie 17ff). Geben Sie die nach Gewichten sortierte Liste L der Kanten aus und schreiben Sie die Kanten des Baums in der Reihenfolge hin, in der sie hinzugefügt werden. Wenn eine Kante aus L <u>nicht</u> in den Spannbaum aufgenommen wird, so geben Sie den bereits im Spannbaum enthaltenen Pfad an, der die beiden Knoten der Kante verbindet (z.B. Kante $\{1, 3\}$ könnte durch den Pfad $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ schon enthalten sein).

**Lösung:**

Sortierte Liste der Kanten $L = [\{5,7\}, \{4,7\}, \{5,6\}, \{2,3\}, \{7,8\}, \{5,8\}, \{4,5\}, \{1,3\}, \{1,2\}, \{6,8\}, \{3,5\}]$

Spannbaum in Reihenfolge des Einfügens:
$\{5,7\}, \{4,7\}, \{5,6\}, \{2,3\}, \{7,8\}, \{1,3\}, \{3,5\}$
Pfade die Einfügen verhindern:
$\{5,8\} = 5 \to 7 \to 8$
$\{4,5\} = 4 \to 7 \to 5$
$\{1,2\} = 1 \to 3 \to 2$
$\{6,8\} = 6 \to 5 \to 7 \to 8$

**Anmerkungen:** Reihenfolge von $\{2,3\}$ und $\{7,8\}$ ist beliebig. Richtung der Pfade ist belieb (z.B. von 5 -> 8 oder 8 -> 5).




Der resultierende Spannbaum musste nicht gemalt worden sein.

b) Ist der in Aufgabenteil a) gefundene minimale Spannbaum eindeutig? Falls ja: begründen Sie dies. Falls nein: wieviele minimale Spannbäume hat $G$?

**Lösung:**

Ja, er ist eindeutig. Die Reihenfolge mit der die Kanten mit Gewicht 0.8 in den Spannbaum aufgenommen werden ist beliebig. Es werden aber alle 0.8-Kanten aufgenommen und alle anderen Kantengewichte sind unterschiedlich und deren Betrachtungsreihenfolge somit wohl definiert.

c) Der Algorithmus von Kruskal werde auf einen nicht-zusammenhängenden gewichteten Graphen $G = (V, E, w)$ mit $n = |V|$ Knoten angewendet und liefere eine Kantenmenge $T$ mit $r = |T|$ Kanten. Ist $(V, T)$ ein Spannbaum von $G$? Begründen Sie ihre Aussage. Welche Information über $G$ entnehmen Sie $r$ und $n$?

**Lösung:**

$(V, T)$ ist kein Spannbaum. Es gibt keinen, denn $G$ ist nicht zusammenhängend. $n-r$ ist die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $G$ (wenn $n - r = 1$ dann ist $(V, T)$ ein Spannbaum).

d) Betrachten Sie nun einen allgemeinen gewichteten Graphen $G = (V, E, w)$, einen minimalen Spannbaum $(V, T)$ von $G$ und einen Zyklus $C$ auf $G$. Sei $e$ eine Kante von $C$ mit strikt maximalem Gewicht. Für alle Kanten $f \in C$, $f \neq e$, gelte also $w(f) < w(e)$. Zeigen Sie: $e \notin T$.

**Lösung:**

per Widerspruchsbeweis: Annahme $e \in T$. Entfernen der Kante $e$ aus $T$ erzeugt die Kantenmenge eines Waldes aus zwei disjunkten Bäumen $(V_1, T_1)$ und $(V_2, T_2)$. Da $C$ ein Zyklus ist, der nur Knoten aus $V_1$ und $V_2$ enthält, muss es ausser $e$ noch mindestens eine weitere Kante $f \in C$ geben, die einen Knoten aus $V_1$ mit einem Knoten aus $V_2$ verbindet. Nun ist $(V, T \cup \{f\} - \{e\})$ wieder ein Spannbaum von $G$, allerdings mit einer echt geringeren (um $w(e) - w(f) > 0$ reduzierten) Summe von Kantengewichten. Widerspruch dazu, dass $(V, T)$ minimaler Spannbaum ist.

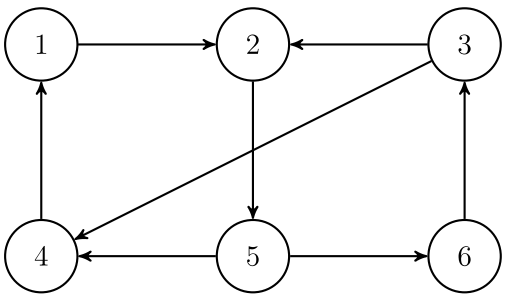
e) Formulieren sie ein möglichst einfaches hinreichendes Kriterium dafür, dass der minimale Spannbaum eindeutig ist. Geben sie ein möglichst kleines Beispiel, dass ihr Kriterium nicht notwendig ist. Letzteres heißt, dass es einen eindeutigen min. Spannbaum geben kann, ohne dass ihr Kriterium erfüllt ist.

**Lösung:**

Es ist hinreichend, dass alle Gewichte unterschiedlich sind. Beispiel für nicht notwendig: “Dreieck”, 2 Kantengewichte sind gleich, das dritte ist größer.

## 2 Gerichtete Graphen

Ein gerichteter Graph sei wie folgt gegeben:




a) Geben sie die Kantenliste des Graphen an.

**Lösung:**

$6, \quad 8, \quad 1,2, \;\; 2,5, \;\; 3,2, \;\; 3,4, \;\; 4,1, \;\; 5,4, \;\; 5,6, \;\; 6,3,$

b) Geben sie die Knotenliste des Graphen an.

**Lösung:**

$6, \quad 8, \quad 1,2, \;\; 1,5, \;\; 2,2,4, \;\; 1,1, \;\; 2,4,6, \;\; 1,3,$

c) Geben sie die Adjazenzmatrix des Graphen an.

**Lösung:**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Beschreiben sie kurz wie sich Ausgangs- und Eingangsgrad der jeweiligen Knoten mit Hilfe der Adjazenzmatrix bestimmen lassen.

**Lösung:**

ag(i) = Zeilensumme(i)
eg(i) = Spaltensumme(i)

e) Besitzt dieser Graph einen Hamiltonschen Zyklus? Falls ja: Geben Sie einen an. Falls nein: Begründen Sie dies möglichst kurz.

**Lösung:**

Ja, es gibt einen Hamiltonschen Zyklus in diesem Graphen. Ein möglicher HZ ist (5,6,3,4,1,2,5) oder man beginnt mit einem beliebigen anderen Knoten und folgt dieser Knotenfolge (z.B. 3,4,1,2,5,6,3 oder 1,2,5,6,3,4,1).

Anmerkung: Fuer die gegebene Definition des Hamiltonschen Zyklus ist entscheidend, dass Zyklen keine Knoten doppelt enthalten (bis auf $v_0 = v_\ell$).

f) Betrachten Sie die Knotenfolgen

(3,2,5,6,3,4), (2,5,4,1,2,5,6), (3,4,1,2,5,6,3), (1,2,3,4)

Geben Sie zu jeder Knotenfolge an, ob sie für den gegebenen Graphen

- eine Kantenfolge
- ein Kantenzug
- ein Pfad
- ein Zyklus

ist.

**Lösung:**

| | (3,2,5,6,3,4) | (2,5,4,1,2,5,6) | (3,4,1,2,5,6,3) | (1,2,3,4) |
|---|---|---|---|---|
| Kantenfolge | ja | ja | ja | nein[1] |
| Kantenzug | ja | nein[2] | ja | nein |
| Pfad | nein[3] | nein[4] | nein[5] | nein |
| Zyklus | nein[6] | nein[6] | ja | nein |

[1] : $2 \to 3$ existiert nicht G
[2] : $2 \to 5$ mehrfach besucht
[3] : 3 zweimal enthalten
[4] : $2, 5$ zweimal enthalten
[5] : 3 zweimal enthalten
[6] : $v_0 \neq v_l$

g) Betrachten den folgenden durch seine Kantenliste gegebenen Graphen:

$$G = \quad 5, \quad 6, \quad 1,2,\ 1,4,\ 1,3,\ 3,5,\ 4,2,\ 4,5,$$

Geben Sie für jeden der folgenden Graphen $G'$, $G''$ und $G'''$ an, ob dieser für $G$ ein

- Teilgraph
- aufspannender Teilgraph
- induzierter Teilgraph

ist.

$$G' = \quad 4, \quad 4, \quad 1,2,\ 1,4,\ 4,2,\ 4,5,$$

$$G'' = \quad 5, \quad 5, \quad 1,2,\ 1,4,\ 1,5,\ 4,2,\ 4,5,$$

$$G''' = \quad 5, \quad 4, \quad 1,2,\ 1,4,\ 3,5,\ 4,5,$$

**Lösung:**

| | $G'$ | $G''$ | $G'''$ |
|---|---|---|---|
| Teilgraph | ja | nein[1] | ja |
| aufspannender Teilgraph | nein[2] | nein | ja |
| induzierter Teilgraph | ja | nein[3] | nein[4] |

[1]: (1,5) nicht in $G$ enthalten
[2]: 3 ist nicht in $G''$ enthalten
[3]: kein Teilgraph
[4] : $(4,2), (1,3)$ fehlen