Berechenbarkeit

Vorlesung 1: Überblick

10. April 2025

Team & Sprechstunden

Hausaufgabenkontrolle

- Laurin Chrystall
- Moritz Fröhlich
- Tristan Schauder
- Lennart Wenzel

Team & Sprechstunden

Hausaufgabenkontrolle

- Laurin Chrystall
- Moritz Fröhlich
- Tristan Schauder
- Lennart Wenzel

Sprechstunden

Andreas Maletti	`maletti@informatik.uni-leipzig.de`	Mo. 18–19 Uhr
Karin Quaas	`quaas@informatik.uni-leipzig.de`	(anfragen)
Fabian Sauer	`sauer@informatik.uni-leipzig.de`	(anfragen)

Veranstaltungen

Vorlesung

- donnerstags, jede Woche, 17:15–18:45 Uhr, Hs. 7 ‣ Andreas Maletti

Übungen

- montags, dienstags & mittwochs, alle 14 Tage

Woche	Wochentag	Zeit	Raum	Übungsleiter
A-Woche	montags	11:15–12:45	SG 3-10	‣ Fabian Sauer
	dienstags	11:15–12:45	SG 3-11	‣ Karin Quaas
	mittwochs	11:15–12:45	SG 3-12	
B-Woche	montags	11:15–12:45	SG 3-10	‣ Fabian Sauer
	dienstags	11:15–12:45	SG 3-11	‣ Karin Quaas
	mittwochs	11:15–12:45	SG 3-12	

Termine — Modul Berechenbarkeit

Übungen	Vorlesung
8.4.	10.4. Überblick (Übungsblatt 1)
15.4. Übung 1 B-Woche	17.4. Turingmaschine I
22.4. Übung 1 A-Woche (Montag Feiertag)	24.4. Turingmaschine II (Übungsblatt 2)
29.4. Übung 2 B-Woche	1.5.
6.5. Übung 2 A-Woche	8.5. Loop-Programme (Übungsblatt 3)
13.5. Übung 3 B-Woche	15.5. While-Programme
20.5. Übung 3 A-Woche	22.5. Rekursion I (Übungsblatt 4)

Übungen	Vorlesung
27.5. Übung 4 B-Woche	29.5.
3.6. Übung 4 A-Woche	5.6. Rekursion II (Übungsblatt 5)
10.6. Übung 5 B-Woche (Montag Feiertag)	12.6. Entscheidbarkeit
17.6. Übung 5 A-Woche	19.6. Unentscheidbarkeit (Übungsblatt 6)
24.6. Übung 6 B-Woche	26.6. Spez. Probleme
1.7. Übung 6 A-Woche	3.7. Klasse P
8.7. Abschlussübung beide Wochen	10.7. NP-Vollständigkeit

Materialien & Literatur

- Ankündigungen, Kursmaterialien & Vorlesungsaufzeichnungen

  ▸ Moodle-Kurs

Materialien & Literatur

- Ankündigungen, Kursmaterialien & Vorlesungsaufzeichnungen

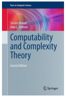
  ‣ Moodle-Kurs

- Literatur zum Selbststudium & zur Vertiefung (Buch in Bibliothek)

Uwe Schöning

‣ Theoretische Informatik — kurz gefasst

Spektrum Akademischer Verlag, 5. Auflage, 2008



Steven Homer, Alan L. Selman

‣ Computability and Complexity Theory

Springer-Verlag, 2. Auflage, 2011

Prüfung

Termine

- Prüfungsabmeldung bis 16. Juni 2025 um 23:59 Uhr

Format

- Klausur, 60 min
- Hilfsmittel: 1 DIN-A4-Blatt mit Notizen (beschrieben, bedruckt, etc.)

Hausaufgaben

- Keine Prüfungsvorleistung
- Zur Selbstkontrolle & für Klausur-Bonuspunkte
  (6 Serien; 4 Serien bis 16. Juni)
- Je 1 Bonuspunkt pro Serie, falls mind. 50% korrekt gelöst

Hausaufgaben

- Keine Prüfungsvorleistung
- Zur Selbstkontrolle & für Klausur-Bonuspunkte
  (6 Serien; 4 Serien bis 16. Juni)
- Je 1 Bonuspunkt pro Serie, falls mind. 50% korrekt gelöst

- Abgabe via Moodle (Informationen & Termin auf Aufgabenblatt)
- Gruppenabgabe (max. Gruppengröße 2) möglich
  (nur ein Gruppenmitglied lädt Lösung hoch
  Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder auf Abgabe)

Überblick

Inhalt

1. Verschiedene (universelle) Berechnungsmodelle
2. Berechenbare Funktionen
3. Komplexitätstheorie

Überblick

Inhalt

1. Verschiedene (universelle) Berechnungsmodelle
2. Berechenbare Funktionen
3. Komplexitätstheorie

Plakative Fragestellungen

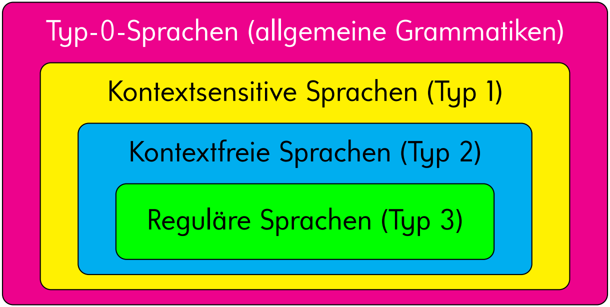
1. Was ist “Berechnung”? (Algorithmus)
2. Was ist “berechenbar”?
3. Wie teuer ist “Berechnung”? (Dimensionen: Zeit und Speicher)

Bitte Fragen direkt stellen!

Chomsky-Hierarchie

Noam Chomsky (* 1928)

- Amer. Linguist & Philosoph
- Verfechter Präzision
- Einführung Chomsky-Hierarchie



Chomsky-Grammatik (VL Automaten & Sprachen)

§1.1 Definition (Grammatik; *grammar*)

Grammatik ist Tupel (N, Σ, S, P)

1. endliche Menge N von **Nichtterminalen** *(nonterminals)*
2. endliche Menge Σ von **Terminalen** *(terminals)* mit $N \cap \Sigma = \emptyset$
3. **Startnichtterminal** $S \in N$ *(initial nonterminal)*
4. endliche Menge P von **Produktionen** *(productions)*
   der Form $\ell \to r$ mit $\ell \in (N \cup \Sigma)^+ \setminus \Sigma^+$ und $r \in \big((N \setminus \{S\}) \cup \Sigma\big)^*$

Chomsky-Grammatik (VL Automaten & Sprachen)

§1.1 Definition (Grammatik; *grammar*)

Grammatik ist Tupel (N, Σ, S, P)

1. endliche Menge N von **Nichtterminalen** *(nonterminals)*
2. endliche Menge Σ von **Terminalen** *(terminals)* mit $N \cap \Sigma = \emptyset$
3. **Startnichtterminal** $S \in N$ *(initial nonterminal)*
4. endliche Menge P von **Produktionen** *(productions)*
   der Form $\ell \to r$ mit $\ell \in (N \cup \Sigma)^+ \setminus \Sigma^+$ und $r \in \big((N \setminus \{S\}) \cup \Sigma\big)^*$

Notizen

- Linke Produktionsseite ℓ = Sequenz Nichtterminale & Terminale
  (mind. 1 Nichtterminal)

Chomsky-Grammatik (VL Automaten & Sprachen)

§1.1 Definition (Grammatik; *grammar*)

Grammatik ist Tupel (N, Σ, S, P)

1. endliche Menge N von **Nichtterminalen** *(nonterminals)*
2. endliche Menge Σ von **Terminalen** *(terminals)* mit $N \cap \Sigma = \emptyset$
3. **Startnichtterminal** $S \in N$ *(initial nonterminal)*
4. endliche Menge P von **Produktionen** *(productions)*
   der Form $\ell \to r$ mit $\ell \in (N \cup \Sigma)^+ \setminus \Sigma^+$ und $r \in \big((N \setminus \{S\}) \cup \Sigma\big)^*$

Notizen

- Linke Produktionsseite ℓ = Sequenz Nichtterminale & Terminale
  (mind. 1 Nichtterminal)
- Rechte Produktionsseite r = Sequenz Nichtterminale & Terminale
  (Startnichtterminal darf nicht vorkommen)

Chomsky-Grammatik (VL Automaten & Sprachen)

§1.2 Definition (kontextsensitiv, kontextfrei, regulär)

Grammatik (N, Σ, S, P) ist

- **kontextsensitiv** *(context-sensitive)* falls $|\ell| \leq |r|$,
- **kontextfrei** *(context-free)* falls $\ell \in N$ und $r \neq \varepsilon$, und
- **regulär** *(regular)* falls $\ell \in N$ und $r \in (\Sigma \times N) \cup \Sigma$

für jede Produktion $(\ell \to r) \in P \setminus \{S \to \varepsilon\}$

Chomsky-Grammatik (VL Automaten & Sprachen)

§1.2 Definition (kontextsensitiv, kontextfrei, regulär)

Grammatik (N, Σ, S, P) ist

- **kontextsensitiv** *(context-sensitive)* falls $|\ell| \leq |r|$,
- **kontextfrei** *(context-free)* falls $\ell \in N$ und $r \neq \varepsilon$, und
- **regulär** *(regular)* falls $\ell \in N$ und $r \in (\Sigma \times N) \cup \Sigma$

für jede Produktion $(\ell \to r) \in P \setminus \{S \to \varepsilon\}$

§1.3 Beispiel

Grammatik $G = \big(\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \quad S \to S' \quad S' \to aS'a \quad S' \to bS'b \quad S' \to aa \quad S' \to bb$$

Chomsky-Grammatik (VL Automaten & Sprachen)

§1.2 Definition (kontextsensitiv, kontextfrei, regulär)

Grammatik (N, Σ, S, P) ist

- **kontextsensitiv** *(context-sensitive)* falls $|\ell| \leq |r|$,
- **kontextfrei** *(context-free)* falls $\ell \in N$ und $r \neq \varepsilon$, und
- **regulär** *(regular)* falls $\ell \in N$ und $r \in (\Sigma \times N) \cup \Sigma$

für jede Produktion $(\ell \to r) \in P \setminus \{S \to \varepsilon\}$

§1.3 Beispiel

Grammatik $G = \big(\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \quad S \to S' \quad S' \to aS'a \quad S' \to bS'b \quad S' \to aa \quad S' \to bb$$

kontextsensitiv	kontextfrei	regulär

Chomsky-Grammatik (VL Automaten & Sprachen)

§1.2 Definition (kontextsensitiv, kontextfrei, regulär)

Grammatik (N, Σ, S, P) ist

- **kontextsensitiv** *(context-sensitive)* falls $|\ell| \leq |r|$,
- **kontextfrei** *(context-free)* falls $\ell \in N$ und $r \neq \varepsilon$, und
- **regulär** *(regular)* falls $\ell \in N$ und $r \in (\Sigma \times N) \cup \Sigma$

für jede Produktion $(\ell \to r) \in P \setminus \{S \to \varepsilon\}$

§1.3 Beispiel

Grammatik $G = \big(\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \quad S \to S' \quad S' \to aS'a \quad S' \to bS'b \quad S' \to aa \quad S' \to bb$$

kontextsensitiv	kontextfrei	regulär
✓		

Chomsky-Grammatik (VL Automaten & Sprachen)

§1.2 Definition (kontextsensitiv, kontextfrei, regulär)

Grammatik (N, Σ, S, P) ist

- **kontextsensitiv** *(context-sensitive)* falls $|\ell| \leq |r|$,
- **kontextfrei** *(context-free)* falls $\ell \in N$ und $r \neq \varepsilon$, und
- **regulär** *(regular)* falls $\ell \in N$ und $r \in (\Sigma \times N) \cup \Sigma$

für jede Produktion $(\ell \to r) \in P \setminus \{S \to \varepsilon\}$

§1.3 Beispiel

Grammatik $G = \big(\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \quad S \to S' \quad S' \to aS'a \quad S' \to bS'b \quad S' \to aa \quad S' \to bb$$

kontextsensitiv	kontextfrei	regulär
✓	✓	

Chomsky-Grammatik (VL Automaten & Sprachen)

§1.2 Definition (kontextsensitiv, kontextfrei, regulär)

Grammatik (N, Σ, S, P) ist

- **kontextsensitiv** *(context-sensitive)* falls $|\ell| \leq |r|$,
- **kontextfrei** *(context-free)* falls $\ell \in N$ und $r \neq \varepsilon$, und
- **regulär** *(regular)* falls $\ell \in N$ und $r \in (\Sigma \times N) \cup \Sigma$

für jede Produktion $(\ell \to r) \in P \setminus \{S \to \varepsilon\}$

§1.3 Beispiel

Grammatik $G = \big(\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \quad S \to S' \quad S' \to aS'a \quad S' \to bS'b \quad S' \to aa \quad S' \to bb$$

kontextsensitiv	kontextfrei	regulär
✓	✓	✗

Chomsky-Grammatik

§1.4 Beispiel

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{cccc}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

Chomsky-Grammatik

§1.4 Beispiel

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{llll}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

kontextsensitiv	kontextfrei	regulär

Chomsky-Grammatik

§1.4 Beispiel

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{llll}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

kontextsensitiv	kontextfrei	regulär
✗		

Chomsky-Grammatik

§1.4 Beispiel

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$S \to S'E \qquad S' \to aS'a \qquad S' \to bS'b \qquad S' \to E$$

$$Ea \to EA \qquad Aa \to aA \qquad Ab \to bA \qquad AE \to Ea$$

$$Eb \to EB \qquad Ba \to aB \qquad Bb \to bB \qquad BE \to Eb$$

$$EE \to \varepsilon$$

kontextsensitiv	kontextfrei	regulär
✗	✗	

Chomsky-Grammatik

§1.4 Beispiel

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{cccc}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

kontextsensitiv	kontextfrei	regulär
✗	✗	✗

§1.5 Definition (Ableitungsschritt; *derivation step*)

Sei $G = (N, \Sigma, S, P)$ Grammatik
Ableitungsrelation $\Rightarrow_G \subseteq (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$ ist

$$\Rightarrow_G = \{(v\ell v', vrv') \mid (\ell \to r) \in P,\ v, v' \in (N \cup \Sigma)^*\}$$

Semantik (VL Automaten & Sprachen)

§1.5 Definition (Ableitungsschritt; *derivation step*)

Sei $G = (N, \Sigma, S, P)$ Grammatik
Ableitungsrelation $\Rightarrow_G \subseteq (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$ ist

$$\Rightarrow_G = \left\{(v\ell v', vrv') \mid (\ell \to r) \in P,\ v, v' \in (N \cup \Sigma)^*\right\}$$

Illustration

- Produktion $\ell \to r \in P$
- Ableitungsschritt $\cdots \ell \cdots \Rightarrow_G \cdots r \cdots$

Semantik

Beispiel (§1.3)

Kontextfreie Grammatik $G = \big(\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \quad S \to S' \quad S' \to aS'a \quad S' \to bS'b \quad S' \to aa \quad S' \to bb$$

Ableitungsschritte

- Ableitung von $v = abbaabba$

$$S \Rightarrow_G S' \Rightarrow_G aS'a \Rightarrow_G abS'ba \Rightarrow_G abbS'bba \Rightarrow_G \underbrace{abbaabba}_{=v}$$

Semantik

Beispiel (§1.3)

Kontextfreie Grammatik $G = \big(\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \quad S \to S' \quad S' \to aS'a \quad S' \to bS'b \quad S' \to aa \quad S' \to bb$$

Ableitungsschritte

- Ableitung von $v = abbaabba$

$$S \Rightarrow_G S' \Rightarrow_G aS'a \Rightarrow_G abS'ba \Rightarrow_G abbS'bba \Rightarrow_G \underbrace{abbaabba}_{=v}$$

Semantik

Beispiel (§1.3)

Kontextfreie Grammatik $G = \big(\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \quad S \to S' \quad S' \to aS'a \quad S' \to bS'b \quad S' \to aa \quad S' \to bb$$

Ableitungsschritte

- Ableitung von $v = abbaabba$

$$S \Rightarrow_G S' \Rightarrow_G aS'a \Rightarrow_G abS'ba \Rightarrow_G abbS'bba \Rightarrow_G \underbrace{abbaabba}_{=v}$$

Semantik

Beispiel (§1.3)

Kontextfreie Grammatik $G = \big(\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \quad S \to S' \quad S' \to aS'a \quad S' \to bS'b \quad S' \to aa \quad S' \to bb$$

Ableitungsschritte

- Ableitung von $v = abbaabba$

$$S \Rightarrow_G S' \Rightarrow_G aS'a \Rightarrow_G abS'ba \Rightarrow_G abbS'bba \Rightarrow_G \underbrace{abbaabba}_{=v}$$

Semantik

Beispiel (§1.3)

Kontextfreie Grammatik $G = \big(\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \quad S \to S' \quad S' \to aS'a \quad S' \to bS'b \quad S' \to aa \quad S' \to bb$$

Ableitungsschritte

- Ableitung von $v = abbaabba$

$$S \Rightarrow_G S' \Rightarrow_G aS'a \Rightarrow_G abS'ba \Rightarrow_G abbS'bba \Rightarrow_G \underbrace{abbaabba}_{=v}$$

Semantik

Beispiel (§1.3)

Kontextfreie Grammatik $G = \big(\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \quad S \to S' \quad S' \to aS'a \quad S' \to bS'b \quad S' \to aa \quad S' \to bb$$

Ableitungsschritte

- Ableitung von $v = abbaabba$

$$S \Rightarrow_G S' \Rightarrow_G aS'a \Rightarrow_G abS'ba \Rightarrow_G abbS'bba \Rightarrow_G \underbrace{abbaabba}_{=v}$$

- Allgemein $S \Rightarrow_G^* ww^R$ für alle $w \in \{a, b\}^*$

Semantik

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \bigl(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\bigr)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{llll}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow_G S'E \Rightarrow_G aS'aE \Rightarrow_G abS'baE \Rightarrow_G abEbaE \\
&\Rightarrow_G abEBaE \Rightarrow_G abEaBE \Rightarrow_G abEaEb \Rightarrow_G abEAEb \\
&\Rightarrow_G abEEab \Rightarrow_G ab\varepsilon ab = abab
\end{aligned}
$$

Allgemein $S \Rightarrow_G^* ww$ für alle $w \in \{a, b\}^*$

Semantik

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{llll}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow_G S'E \Rightarrow_G aS'aE \Rightarrow_G abS'baE \Rightarrow_G abEbaE \\
&\Rightarrow_G abEBaE \Rightarrow_G abEaBE \Rightarrow_G abEaEb \Rightarrow_G abEAEb \\
&\Rightarrow_G abEEab \Rightarrow_G ab\varepsilon ab = abab
\end{aligned}
$$

Allgemein $S \Rightarrow_G^* ww$ für alle $w \in \{a, b\}^*$

Semantik

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{cccc}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow_G S'E \Rightarrow_G aS'aE \Rightarrow_G abS'baE \Rightarrow_G abEbaE \\
&\Rightarrow_G abEBaE \Rightarrow_G abEaBE \Rightarrow_G abEaEb \Rightarrow_G abEAEb \\
&\Rightarrow_G abEEab \Rightarrow_G ab\varepsilon ab = abab
\end{aligned}
$$

Allgemein $S \Rightarrow_G^* ww$ für alle $w \in \{a, b\}^*$

Semantik

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{rlrlrlrl}
S & \to S'E & S' & \to aS'a & S' & \to bS'b & S' & \to E \\
Ea & \to EA & Aa & \to aA & Ab & \to bA & AE & \to Ea \\
Eb & \to EB & Ba & \to aB & Bb & \to bB & BE & \to Eb \\
EE & \to \varepsilon & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow_G S'E \Rightarrow_G aS'aE \Rightarrow_G abS'baE \Rightarrow_G abEbaE \\
&\Rightarrow_G abEBaE \Rightarrow_G abEaBE \Rightarrow_G abEaEb \Rightarrow_G abEAEb \\
&\Rightarrow_G abEEab \Rightarrow_G ab\varepsilon ab = abab
\end{aligned}
$$

Allgemein $S \Rightarrow_G^* ww$ für alle $w \in \{a, b\}^*$

Semantik

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$\begin{array}{rlrlrlrl}
S &\to S'E & S' &\to aS'a & S' &\to bS'b & S' &\to E \\
Ea &\to EA & Aa &\to aA & Ab &\to bA & AE &\to Ea \\
Eb &\to EB & Ba &\to aB & Bb &\to bB & BE &\to Eb \\
EE &\to \varepsilon & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
S &\Rightarrow_G S'E \Rightarrow_G aS'aE \Rightarrow_G abS'baE \Rightarrow_G abEbaE \\
&\Rightarrow_G abEBaE \Rightarrow_G abEaBE \Rightarrow_G abEaEb \Rightarrow_G abEAEb \\
&\Rightarrow_G abEEab \Rightarrow_G ab\varepsilon ab = abab
\end{aligned}$$

Allgemein $S \Rightarrow_G^* ww$ für alle $w \in \{a, b\}^*$

Semantik

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{llll}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow_G S'E \Rightarrow_G aS'aE \Rightarrow_G abS'baE \Rightarrow_G abEbaE \\
&\Rightarrow_G abEBaE \Rightarrow_G abEaBE \Rightarrow_G abEaEb \Rightarrow_G abEAEb \\
&\Rightarrow_G abEEab \Rightarrow_G ab\varepsilon ab = abab
\end{aligned}
$$

Allgemein $S \Rightarrow_G^* ww$ für alle $w \in \{a, b\}^*$

Semantik

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{rlrlrlrl}
S &\to S'E & S' &\to aS'a & S' &\to bS'b & S' &\to E \\
Ea &\to EA & Aa &\to aA & Ab &\to bA & AE &\to Ea \\
Eb &\to EB & Ba &\to aB & Bb &\to bB & BE &\to Eb \\
EE &\to \varepsilon & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow_G S'E \Rightarrow_G aS'aE \Rightarrow_G abS'baE \Rightarrow_G abEbaE \\
&\Rightarrow_G abEBaE \Rightarrow_G abEaBE \Rightarrow_G abEaEb \Rightarrow_G abEAEb \\
&\Rightarrow_G abEEab \Rightarrow_G ab\varepsilon ab = abab
\end{aligned}
$$

Allgemein $S \Rightarrow_G^* ww$ für alle $w \in \{a, b\}^*$

Semantik

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{llll}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow_G S'E \Rightarrow_G aS'aE \Rightarrow_G abS'baE \Rightarrow_G abEbaE \\
&\Rightarrow_G abEBaE \Rightarrow_G abEaBE \Rightarrow_G abEaEb \Rightarrow_G abEAEb \\
&\Rightarrow_G abEEab \Rightarrow_G ab\varepsilon ab = abab
\end{aligned}
$$

Allgemein $S \Rightarrow_G^* ww$ für alle $w \in \{a, b\}^*$

Semantik

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{llll}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow_G S'E \Rightarrow_G aS'aE \Rightarrow_G abS'baE \Rightarrow_G abEbaE \\
&\Rightarrow_G abEBaE \Rightarrow_G abEaBE \Rightarrow_G abEaEb \Rightarrow_G abEAEb \\
&\Rightarrow_G abEEab \Rightarrow_G ab\varepsilon ab = abab
\end{aligned}
$$

Allgemein $S \Rightarrow_G^* ww$ für alle $w \in \{a, b\}^*$

Semantik

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{llll}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow_G S'E \Rightarrow_G aS'aE \Rightarrow_G abS'baE \Rightarrow_G abEbaE \\
&\Rightarrow_G abEBaE \Rightarrow_G abEaBE \Rightarrow_G abEaEb \Rightarrow_G abEAEb \\
&\Rightarrow_G abEEab \Rightarrow_G ab\varepsilon ab = abab
\end{aligned}
$$

Allgemein $S \Rightarrow_G^* ww$ für alle $w \in \{a, b\}^*$

Semantik

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{cccc}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow_G S'E \Rightarrow_G aS'aE \Rightarrow_G abS'baE \Rightarrow_G abEbaE \\
&\Rightarrow_G abEBaE \Rightarrow_G abEaBE \Rightarrow_G abEaEb \Rightarrow_G abEAEb \\
&\Rightarrow_G abEEab \Rightarrow_G ab\varepsilon ab = abab
\end{aligned}
$$

Allgemein $S \Rightarrow_G^* ww$ für alle $w \in \{a, b\}^*$

Erzeugte Sprache (VL Automaten & Sprachen)

§1.6 Definition (Erzeugte Sprache; *generated language*)

Sei $G = (N, \Sigma, S, P)$ Grammatik
Die von G **erzeugte Sprache** $L(G) \subseteq \Sigma^*$ ist

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* w\}$$

Erzeugte Sprache (VL Automaten & Sprachen)

§1.6 Definition (Erzeugte Sprache; *generated language*)

Sei $G = (N, \Sigma, S, P)$ Grammatik
Die von G **erzeugte Sprache** $L(G) \subseteq \Sigma^*$ ist

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* w\}$$

Beispiel (§1.3)

Kontextfreie Grammatik $G = \big(\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \quad S \to S' \quad S' \to aS'a \quad S' \to bS'b \quad S' \to aa \quad S' \to bb$$

Erzeugte Sprache (VL Automaten & Sprachen)

§1.6 Definition (Erzeugte Sprache; *generated language*)

Sei $G = (N, \Sigma, S, P)$ Grammatik
Die von G **erzeugte Sprache** $L(G) \subseteq \Sigma^*$ ist

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* w\}$$

Beispiel (§1.3)

Kontextfreie Grammatik $G = \big(\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \quad S \to S' \quad S' \to aS'a \quad S' \to bS'b \quad S' \to aa \quad S' \to bb$$

Erzeugte Sprache $L(G) = \big\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\big\}$

Erzeugte Sprache

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{cccc}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

Erzeugte Sprache

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{cccc}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

Erzeugte Sprache $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

Sprachklassen (VL Automaten & Sprachen)

§1.7 Definition (Sprachklassen; *language classes*)

Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist

- **regulär** *(regular)*,
  falls reguläre Grammatik G mit $L(G) = L$ existiert
- **kontextfrei** *(context-free)*,
  falls kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L$ existiert
- **kontextsensitiv** *(context-sensitive)*,
  falls kontextsensitive Grammatik G mit $L(G) = L$ existiert

Sprachklassen (VL Automaten & Sprachen)

§1.7 Definition (Sprachklassen; *language classes*)

Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist

- **regulär** *(regular)*,
  falls reguläre Grammatik G mit $L(G) = L$ existiert
- **kontextfrei** *(context-free)*,
  falls kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L$ existiert
- **kontextsensitiv** *(context-sensitive)*,
  falls kontextsensitive Grammatik G mit $L(G) = L$ existiert

Notizen

- Sprache regulär falls erzeugbar von regulärer Grammatik
- Analog für weitere Sprachklassen

Sprachklassen

Beispiel (§1.3)

Kontextfreie Grammatik $G = \big(\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \quad S \to S' \quad S' \to aS'a \quad S' \to bS'b \quad S' \to aa \quad S' \to bb$$

Erzeugte Sprache $L(G) = \big\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\big\}$

Sprachklassen

Beispiel (§1.3)

Kontextfreie Grammatik $G = \big(\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \quad S \to S' \quad S' \to aS'a \quad S' \to bS'b \quad S' \to aa \quad S' \to bb$$

Erzeugte Sprache $L(G) = \big\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\big\}$

- Frage: Ist Sprache $L(G)$ kontextfrei?

Sprachklassen

Beispiel (§1.3)

Kontextfreie Grammatik $G = \big(\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \quad S \to S' \quad S' \to aS'a \quad S' \to bS'b \quad S' \to aa \quad S' \to bb$$

Erzeugte Sprache $L(G) = \big\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\big\}$

- Frage: Ist Sprache $L(G)$ kontextfrei?
- Antwort: Ja, denn kontextfreie Grammatik G erzeugt $L(G)$

Sprachklassen

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{rlrlrlrl}
S & \to S'E & S' & \to aS'a & S' & \to bS'b & S' & \to E \\
Ea & \to EA & Aa & \to aA & Ab & \to bA & AE & \to Ea \\
Eb & \to EB & Ba & \to aB & Bb & \to bB & BE & \to Eb \\
EE & \to \varepsilon & & & & & &
\end{array}
$$

Erzeugte Sprache $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

Sprachklassen

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{rlrlrlrl}
S & \to S'E & S' & \to aS'a & S' & \to bS'b & S' & \to E \\
Ea & \to EA & Aa & \to aA & Ab & \to bA & AE & \to Ea \\
Eb & \to EB & Ba & \to aB & Bb & \to bB & BE & \to Eb \\
EE & \to \varepsilon & & & & & &
\end{array}
$$

Erzeugte Sprache $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

- Frage: Ist $L(G)$ nicht kontextsensitiv, da G nicht kontextsensitiv?

Sprachklassen

Beispiel (§1.4)

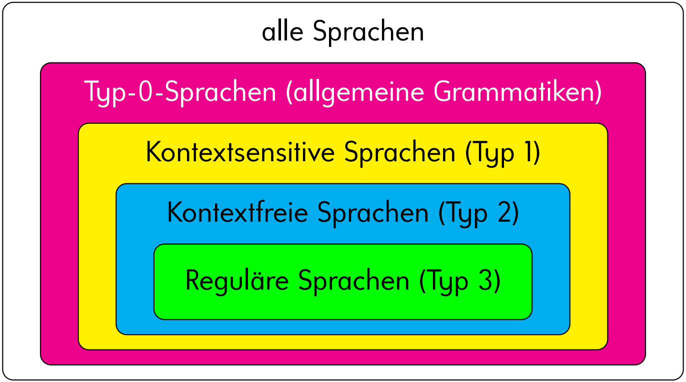
Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{llll}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

Erzeugte Sprache $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

- Frage: Ist $L(G)$ nicht kontextsensitiv, da G nicht kontextsensitiv?
- Antwort: Nein, nur falls keine kontextsen. Grammatik $L(G)$ erzeugt

Chomsky-Sprachklassen



$$\text{Typ-3}(\Sigma) \subseteq \text{Typ-2}(\Sigma) \subseteq \text{Typ-1}(\Sigma) \subseteq \text{Typ-0}(\Sigma) \subseteq \mathcal{P}(\Sigma^*)$$

Reguläre Sprachen (VL Automaten & Sprachen)

Beschreibung

- Reguläre Grammatik
- Endlicher Automat (nichtdeterministisch oder deterministisch)
- Regulärer Ausdruck

Reguläre Sprachen (VL Automaten & Sprachen)

Beschreibung

- Reguläre Grammatik
- Endlicher Automat (nichtdeterministisch oder deterministisch)
- Regulärer Ausdruck

Stichworte

- Normalformen, Determinisierung & Minimierung
- Abschluss- & Entscheidbarkeitsresultate
- Pumping-Lemma

Kontextfreie Sprachen (VL Automaten & Sprachen)

Beschreibung

- Kontextfreie Grammatik
- Kellerautomat (nichtdeterministisch)
- Deterministischer Kellerautomat (strikt schwächer)

Kontextfreie Sprachen (VL Automaten & Sprachen)

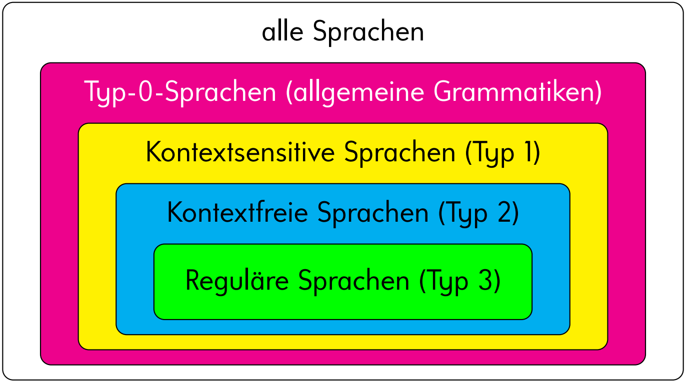
Beschreibung

- Kontextfreie Grammatik
- Kellerautomat (nichtdeterministisch)
- Deterministischer Kellerautomat (strikt schwächer)

Stichworte

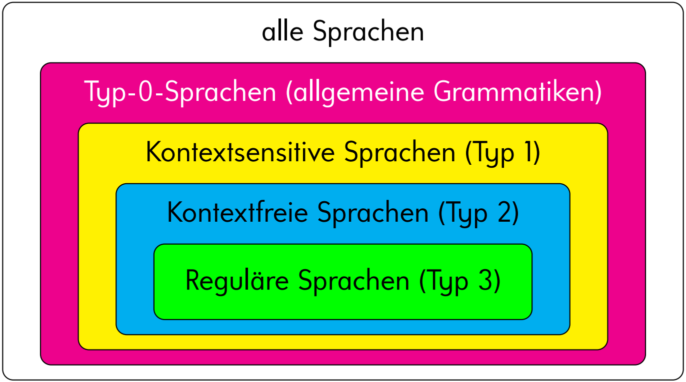
- Normalformen & Parsing-Algorithmen
- Abschluss- & Entscheidbarkeitsresultate
- Pumping-Lemma

Chomsky-Sprachklassen



$$\text{Typ-3}(\Sigma) \subsetneq \text{Typ-2}(\Sigma) \subsetneq \text{Typ-1}(\Sigma) \subseteq \text{Typ-0}(\Sigma) \subseteq \mathcal{P}(\Sigma^*)$$

Chomsky-Sprachklassen



$$\text{Typ-3}(\Sigma) \subsetneq \text{Typ-2}(\Sigma) \subsetneq \text{Typ-1}(\Sigma) \subseteq \text{Typ-0}(\Sigma) \subseteq \mathcal{P}(\Sigma^*)$$

Kontextsensitive Sprachen

Beschreibung

- Kontextsensitive Grammatik
- Linear beschränkte Turingmaschine (nichtdeterministisch)
- Linear beschränkte det. Turingmaschine (Mächtigkeit unklar)

Kontextsensitive Sprachen

Beschreibung

- Kontextsensitive Grammatik
- Linear beschränkte Turingmaschine (nichtdeterministisch)
- Linear beschränkte det. Turingmaschine (Mächtigkeit unklar)

Stichworte

- Normalformen & Parsing-Algorithmus
- Abschluss- & Entscheidbarkeitsresultate

Typ-0-Sprachen

Beschreibung

- Chomsky-Grammatik
- Turingmaschine (nichtdeterministisch oder deterministisch)
- While-Programm, μ-rekursive Funktion (berechenbare Funktion)

Typ-0-Sprachen

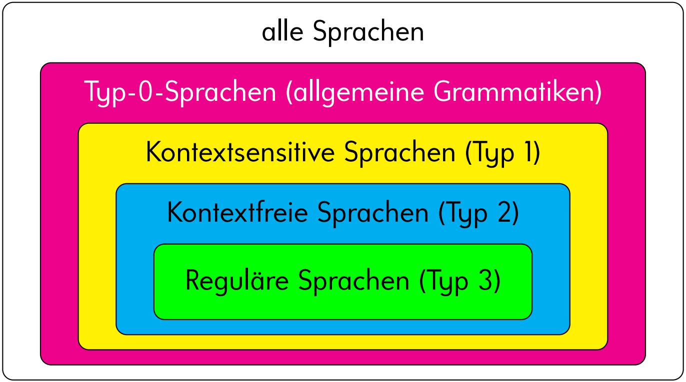
Beschreibung

- Chomsky-Grammatik
- Turingmaschine (nichtdeterministisch oder deterministisch)
- While-Programm, μ-rekursive Funktion (berechenbare Funktion)

Stichworte

- Normalformen & Determinisierung
- Abschluss- & Entscheidbarkeitsresultate

Ausblick — Chomsky-Sprachklassen



$$\text{Typ-3}(\Sigma) \subsetneq \text{Typ-2}(\Sigma) \subsetneq \text{Typ-1}(\Sigma) \subsetneq \text{Typ-0}(\Sigma) \subsetneq \mathcal{P}(\Sigma^*)$$

Ausblick — Chomsky-Sprachklassen

Eigenschaften

- Es gibt Sprachen, die nicht Typ-0 sind

Ausblick — Chomsky-Sprachklassen

Eigenschaften

- Es gibt Sprachen, die nicht Typ-0 sind
- Es gibt Typ-0-Sprachen mit unentscheidbarem Wortproblem

Ausblick — Chomsky-Sprachklassen

Eigenschaften

- Es gibt Sprachen, die nicht Typ-0 sind
- Es gibt Typ-0-Sprachen mit unentscheidbarem Wortproblem

Ausblick — Chomsky-Sprachklassen

Eigenschaften

- Es gibt Sprachen, die nicht Typ-0 sind
- Es gibt Typ-0-Sprachen mit unentscheidbarem Wortproblem

§1.8 Definition (abzählbar; *countable* — VL Diskrete Strukturen)

Menge M ist **abzählbar** falls injektive Funktion $f: M \to \mathbb{N}$ existiert

Ausblick — Chomsky-Sprachklassen

Eigenschaften

- Es gibt Sprachen, die nicht Typ-0 sind
- Es gibt Typ-0-Sprachen mit unentscheidbarem Wortproblem

§1.8 Definition (abzählbar; *countable* — VL Diskrete Strukturen)

Menge M ist **abzählbar** falls injektive Funktion $f\colon M \to \mathbb{N}$ existiert

Notizen

- M abzählbar gdw. jedem $m \in M$ eigene natürliche Zahl zuweisbar
- Natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ abzählbar

Abzählbarkeit

§1.9 Theorem (Abzählbarkeit von $\mathbb{N}^k$)

Menge $\mathbb{N}^k$ abzählbar für alle $k \in \mathbb{N}$

Abzählbarkeit

§1.9 Theorem (Abzählbarkeit von $\mathbb{N}^k$)

Menge $\mathbb{N}^k$ abzählbar für alle $k \in \mathbb{N}$

Beweis

Seien $p_1, \ldots, p_k$ verschiedene Primzahlen.

Abzählbarkeit

§1.9 Theorem (Abzählbarkeit von $\mathbb{N}^k$)

Menge $\mathbb{N}^k$ abzählbar für alle $k \in \mathbb{N}$

Beweis

Seien $p_1, \dots, p_k$ verschiedene Primzahlen. Definiere $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ durch

$$f(n_1, \dots, n_k) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i} = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} \qquad \text{für alle } n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

Abzählbarkeit

§1.9 Theorem (Abzählbarkeit von $\mathbb{N}^k$)

Menge $\mathbb{N}^k$ abzählbar für alle $k \in \mathbb{N}$

Beweis

Seien $p_1, \ldots, p_k$ verschiedene Primzahlen. Definiere $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ durch

$$f(n_1, \ldots, n_k) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i} = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} \qquad \text{für alle } n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$$

Falls $f(m_1, \ldots, m_k) = f(n_1, \ldots, n_k)$ für $m_1, \ldots, m_k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, dann $m_i = n_i$ für alle $1 \leq i \leq k$ da Primfaktorenzerlegung eindeutig.

Abzählbarkeit

§1.9 Theorem (Abzählbarkeit von $\mathbb{N}^k$)

Menge $\mathbb{N}^k$ abzählbar für alle $k \in \mathbb{N}$

Beweis

Seien $p_1, \dots, p_k$ verschiedene Primzahlen. Definiere $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ durch

$$f(n_1, \dots, n_k) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i} = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} \qquad \text{für alle } n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

Falls $f(m_1, \dots, m_k) = f(n_1, \dots, n_k)$ für $m_1, \dots, m_k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, dann $m_i = n_i$ für alle $1 \leq i \leq k$ da Primfaktorenzerlegung eindeutig. Also ist f injektiv und $\mathbb{N}^k$ damit abzählbar. $\square$

Abzählbarkeit

§1.10 Theorem (Abzählbarkeit von $\mathbb{N}^*$)

Menge $\mathbb{N}^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ abzählbar

Abzählbarkeit

§1.10 Theorem (Abzählbarkeit von $\mathbb{N}^*$)

Menge $\mathbb{N}^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ abzählbar

Beweis

Menge $\mathbb{N}^k$ abzählbar via injektiver Funktion $f_k \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ nach Thm §1.9. Sei $f \colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f(w) = f_2\big(|w|, f_{|w|}(w)\big) \qquad \text{für alle } w \in \mathbb{N}^*$$

Abzählbarkeit

§1.10 Theorem (Abzählbarkeit von $\mathbb{N}^*$)

Menge $\mathbb{N}^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ abzählbar

Beweis

Menge $\mathbb{N}^k$ abzählbar via injektiver Funktion $f_k \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ nach Thm §1.9. Sei $f \colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f(w) = f_2\big(|w|, f_{|w|}(w)\big) \qquad \text{für alle } w \in \mathbb{N}^*$$

Falls $f(w) = f(w')$ für $w, w' \in \mathbb{N}^*$, dann folgen aus Injektivität von f_2 sowohl $|w| = |w'|$ als auch $f_{|w|}(w) = f_{|w'|}(w')$.

Abzählbarkeit

§1.10 Theorem (Abzählbarkeit von $\mathbb{N}^*$)

Menge $\mathbb{N}^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ abzählbar

Beweis

Menge $\mathbb{N}^k$ abzählbar via injektiver Funktion $f_k \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ nach Thm §1.9. Sei $f \colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f(w) = f_2\big(|w|, f_{|w|}(w)\big) \qquad \text{für alle } w \in \mathbb{N}^*$$

Falls $f(w) = f(w')$ für $w, w' \in \mathbb{N}^*$, dann folgen aus Injektivität von f_2 sowohl $|w| = |w'|$ als auch $f_{|w|}(w) = f_{|w'|}(w')$. Weiterhin folgt $w = w'$ aus Injektivität von $f_{|w|} = f_{|w'|}$.

Abzählbarkeit

§1.10 Theorem (Abzählbarkeit von $\mathbb{N}^*$)

Menge $\mathbb{N}^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ abzählbar

Beweis

Menge $\mathbb{N}^k$ abzählbar via injektiver Funktion $f_k \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ nach Thm §1.9. Sei $f \colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f(w) = f_2\big(|w|, f_{|w|}(w)\big) \qquad \text{für alle } w \in \mathbb{N}^*$$

Falls $f(w) = f(w')$ für $w, w' \in \mathbb{N}^*$, dann folgen aus Injektivität von f_2 sowohl $|w| = |w'|$ als auch $f_{|w|}(w) = f_{|w'|}(w')$. Weiterhin folgt $w = w'$ aus Injektivität von $f_{|w|} = f_{|w'|}$. Also ist f injektiv und $\mathbb{N}^*$ abzählbar. $\square$

Abzählbarkeit der Grammatiken

1. Kodiere Terminale durch ungerade Zahlen ($a = 1$; $b = 3$)
2. Gerade positive Zahlen für Nichtterminale ($S = 2$; $S' = 4$; $\ldots$)
   (beginnend mit Startnichtterminal)
3. 0 als Trennzeichen

Abzählbarkeit der Grammatiken

1. Kodiere Terminale durch ungerade Zahlen ($a = 1$; $b = 3$)
2. Gerade positive Zahlen für Nichtterminale ($S = 2$; $S' = 4$; $\dots$)
   (beginnend mit Startnichtterminal)
3. 0 als Trennzeichen

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{cccc}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

Abzählbarkeit der Grammatiken

1. Kodiere Terminale durch ungerade Zahlen ($a = 1$; $b = 3$)
2. Gerade positive Zahlen für Nichtterminale ($S = 2$; $S' = 4$; $\ldots$)
   (beginnend mit Startnichtterminal)
3. 0 als Trennzeichen

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$\begin{array}{cccc}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}$$

$$c(G) = \underbrace{2.0.4.10}_{S \to S'E}.0.\underbrace{4.0.1.4.1}_{S' \to aS'a}.0.\underbrace{4.0.3.4.3}_{S' \to bS'b}.0.\cdots$$

Abzählbarkeit Typ-0-Sprachen

§1.11 Theorem (Abzählbarkeit Typ-0-Sprachen)

Typ-0-Sprachen $\text{Typ-0}(\Sigma) \subseteq \mathcal{P}(\Sigma^*)$ über Alphabet Σ abzählbar

Abzählbarkeit Typ-0-Sprachen

§1.11 Theorem (Abzählbarkeit Typ-0-Sprachen)

Typ-0-Sprachen $\text{Typ-0}(\Sigma) \subseteq \mathcal{P}(\Sigma^*)$ über Alphabet Σ abzählbar

Beweis (nutzt Auswahlaxiom)

Jede Grammatik G kann als Element $c(G) \in \mathbb{N}^*$ kodiert werden (c nicht injektiv). Sei Kodierung der Terminale aus Σ fest.

$$c \colon \{G \mid G \text{ Grammatik über } \Sigma\} \to \mathbb{N}^*$$

Abzählbarkeit Typ-0-Sprachen

§1.11 Theorem (Abzählbarkeit Typ-0-Sprachen)

Typ-0-Sprachen $\text{Typ-0}(\Sigma) \subseteq \mathcal{P}(\Sigma^*)$ über Alphabet Σ abzählbar

Beweis (nutzt Auswahlaxiom)

Jede Grammatik G kann als Element $c(G) \in \mathbb{N}^*$ kodiert werden (c nicht injektiv). Sei Kodierung der Terminale aus Σ fest.

$$c\colon \{G \mid G \text{ Grammatik über } \Sigma\} \to \mathbb{N}^*$$

Für alle Grammatiken G und G' mit $c(G) = c(G')$ gilt $L(G) = L(G')$.

Abzählbarkeit Typ-0-Sprachen

§1.11 Theorem (Abzählbarkeit Typ-0-Sprachen)

Typ-0-Sprachen $\text{Typ-0}(\Sigma) \subseteq \mathcal{P}(\Sigma^*)$ über Alphabet Σ abzählbar

Beweis (nutzt Auswahlaxiom)

Jede Grammatik G kann als Element $c(G) \in \mathbb{N}^*$ kodiert werden (c nicht injektiv). Sei Kodierung der Terminale aus Σ fest.

$$c\colon \{G \mid G \text{ Grammatik über } \Sigma\} \to \mathbb{N}^*$$

Für alle Grammatiken G und G' mit $c(G) = c(G')$ gilt $L(G) = L(G')$. Menge $C = \{c(G) \mid G \text{ Grammatik über } \Sigma\}$ abzählbar da $C \subseteq \mathbb{N}^*$ und $\mathbb{N}^*$ abzählbar gemäß Thm §1.10.

Abzählbarkeit Typ-0-Sprachen

§1.11 Theorem (Abzählbarkeit Typ-0-Sprachen)

Typ-0-Sprachen $\text{Typ-0}(\Sigma) \subseteq \mathcal{P}(\Sigma^*)$ über Alphabet Σ abzählbar

Beweis (nutzt Auswahlaxiom)

Jede Grammatik G kann als Element $c(G) \in \mathbb{N}^*$ kodiert werden (c nicht injektiv). Sei Kodierung der Terminale aus Σ fest.

$$c\colon \{G \mid G \text{ Grammatik über } \Sigma\} \to \mathbb{N}^*$$

Für alle Grammatiken G und G' mit $c(G) = c(G')$ gilt $L(G) = L(G')$. Menge $C = \{c(G) \mid G \text{ Grammatik über } \Sigma\}$ abzählbar da $C \subseteq \mathbb{N}^*$ und $\mathbb{N}^*$ abzählbar gemäß Thm §1.10. Also ist Relation

$$\rho = \big\{\big(c(G), L(G)\big) \mid G \text{ Grammatik über } \Sigma\big\}$$

surjektive Funktion $\rho\colon C \to \text{Typ-0}(\Sigma)$.

Abzählbarkeit Typ-0-Sprachen

§1.11 Theorem (Abzählbarkeit Typ-0-Sprachen)

Typ-0-Sprachen $\mathrm{Typ\text{-}0}(\Sigma) \subseteq \mathcal{P}(\Sigma^*)$ über Alphabet Σ abzählbar

Beweis (nutzt Auswahlaxiom)

Jede Grammatik G kann als Element $c(G) \in \mathbb{N}^*$ kodiert werden (c nicht injektiv). Sei Kodierung der Terminale aus Σ fest.

$$c \colon \{G \mid G \text{ Grammatik über } \Sigma\} \to \mathbb{N}^*$$

Für alle Grammatiken G und G' mit $c(G) = c(G')$ gilt $L(G) = L(G')$. Menge $C = \{c(G) \mid G \text{ Grammatik über } \Sigma\}$ abzählbar da $C \subseteq \mathbb{N}^*$ und $\mathbb{N}^*$ abzählbar gemäß Thm §1.10. Also ist Relation

$$\rho = \{(c(G), L(G)) \mid G \text{ Grammatik über } \Sigma\}$$

surjektive Funktion $\rho \colon C \to \mathrm{Typ\text{-}0}(\Sigma)$. Mit Auswahlaxiom existiert $g \colon \mathrm{Typ\text{-}0}(\Sigma) \to C$ injektiv (VL Diskrete Strukturen). Sei f aus Thm §1.10. Dann ist $(g\,;f) \colon \mathrm{Typ\text{-}0}(\Sigma) \to \mathbb{N}$ injektiv und $\mathrm{Typ\text{-}0}(\Sigma)$ abzählbar. □

Abzählbarkeit Typ-0-Sprachen

Notizen

- Thm §1.11 gilt auch ohne Auswahlaxiom

Abzählbarkeit Typ-0-Sprachen

Notizen

- Thm §1.11 gilt auch ohne Auswahlaxiom
- Betrachte längen-lexikographische Ordnung $\preceq \subseteq \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ auf $\mathbb{N}^*$
  (ordne Elemente zunächst nach Länge, dann lexikographisch)

Abzählbarkeit Typ-0-Sprachen

Notizen

- Thm §1.11 gilt auch ohne Auswahlaxiom
- Betrachte längen-lexikographische Ordnung $\preceq \subseteq \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ auf $\mathbb{N}^*$
  (ordne Elemente zunächst nach Länge, dann lexikographisch)
- Ordnung $\preceq$ total und Wohlordnung
  (für nichtleere Teilmenge $N \subseteq \mathbb{N}^*$ existiert $\min_{\preceq}(N) \in N$)

Abzählbarkeit Typ-0-Sprachen

Notizen

- Thm §1.11 gilt auch ohne Auswahlaxiom
- Betrachte längen-lexikographische Ordnung $\preceq \subseteq \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ auf $\mathbb{N}^*$
  (ordne Elemente zunächst nach Länge, dann lexikographisch)
- Ordnung $\preceq$ total und Wohlordnung
  (für nichtleere Teilmenge $N \subseteq \mathbb{N}^*$ existiert $\min_{\preceq}(N) \in N$)
- Für $\rho\colon C \to \text{Typ-0}(\Sigma)$ surjektiv, definiere $\bar{\rho}\colon \text{Typ-0}(\Sigma) \to \mathbb{N}^*$

$$\bar{\rho}(L) = \min_{\preceq}\{w \in \mathbb{N}^* \mid \rho(w) = L\} \qquad \text{für alle } L \in \text{Typ-0}(\Sigma)$$

Abzählbarkeit Typ-0-Sprachen

Notizen

- Thm §1.11 gilt auch ohne Auswahlaxiom
- Betrachte längen-lexikographische Ordnung $\preceq \subseteq \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ auf $\mathbb{N}^*$
  (ordne Elemente zunächst nach Länge, dann lexikographisch)
- Ordnung $\preceq$ total und Wohlordnung
  (für nichtleere Teilmenge $N \subseteq \mathbb{N}^*$ existiert $\min_{\preceq}(N) \in N$)
- Für $\rho\colon C \to \text{Typ-0}(\Sigma)$ surjektiv, definiere $\bar{\rho}\colon \text{Typ-0}(\Sigma) \to \mathbb{N}^*$

$$\bar{\rho}(L) = \min_{\preceq}\{w \in \mathbb{N}^* \mid \rho(w) = L\} \qquad \text{für alle } L \in \text{Typ-0}(\Sigma)$$

- $\bar{\rho}$ wohldefiniert, da $\{w \in \mathbb{N}^* \mid \rho(w) = L\}$ nichtleer (Surjektivität ρ) und somit existiert Minimum

Abzählbarkeit Typ-0-Sprachen

Notizen

- Thm §1.11 gilt auch ohne Auswahlaxiom
- Betrachte längen-lexikographische Ordnung $\preceq \subseteq \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ auf $\mathbb{N}^*$
  (ordne Elemente zunächst nach Länge, dann lexikographisch)
- Ordnung $\preceq$ total und Wohlordnung
  (für nichtleere Teilmenge $N \subseteq \mathbb{N}^*$ existiert $\min_{\preceq}(N) \in N$)
- Für $\rho\colon C \to \text{Typ-0}(\Sigma)$ surjektiv, definiere $\bar{\rho}\colon \text{Typ-0}(\Sigma) \to \mathbb{N}^*$

$$\bar{\rho}(L) = \min_{\preceq}\{w \in \mathbb{N}^* \mid \rho(w) = L\} \qquad \text{für alle } L \in \text{Typ-0}(\Sigma)$$

- $\bar{\rho}$ wohldefiniert, da $\{w \in \mathbb{N}^* \mid \rho(w) = L\}$ nichtleer (Surjektivität ρ) und somit existiert Minimum
- $\bar{\rho}$ ist offensichtlich injektiv (gleiche Kodierung $\to$ gleiche Sprache)
- Also $\text{Typ-0}(\Sigma)$ abzählbar

Abzählbarkeit

§1.12 Lemma

Unendliche Menge M abzählbar gdw. Bijektion $f\colon \mathbb{N} \to M$ existiert

Abzählbarkeit

§1.12 Lemma

Unendliche Menge M abzählbar gdw. Bijektion $f\colon \mathbb{N} \to M$ existiert

Beweis

(kleine Übung) $\square$

Überabzählbarkeit aller Sprachen

§1.13 Theorem (Überabzählbarkeit aller Sprachen)

Menge $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ aller Sprachen über Σ nicht abzählbar

Überabzählbarkeit aller Sprachen

§1.13 Theorem (Überabzählbarkeit aller Sprachen)

Menge $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ aller Sprachen über Σ nicht abzählbar

Beweis

Σ^* abzählbar und unendlich. Cantors Theorem (VL Diskrete Strukturen) zeigt, dass $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ strikt mächtiger als Σ^*. Also $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ nicht abzählbar (d.h. überabzählbar). □

Überabzählbarkeit aller Sprachen

Theorem (§1.13 Überabzählbarkeit aller Sprachen)

Menge $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ aller Sprachen über Σ <u>nicht</u> abzählbar

Beweis (detailliert)

Da Σ^* abzählbar unendlich, existiert $f \colon \mathbb{N} \to \Sigma^*$ bijektiv gem. Lm §1.12.

Überabzählbarkeit aller Sprachen

Theorem (§1.13 Überabzählbarkeit aller Sprachen)

Menge $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ aller Sprachen über Σ nicht abzählbar

Beweis (detailliert)

Da Σ^* abzählbar unendlich, existiert $f\colon \mathbb{N} \to \Sigma^*$ bijektiv gem. Lm §1.12. Offenbar ist $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ unendlich. Sei $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ abzählbar; d.h. gem. Lm §1.12 existiert $g\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ bijektiv.

Überabzählbarkeit aller Sprachen

Theorem (§1.13 Überabzählbarkeit aller Sprachen)

Menge $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ aller Sprachen über Σ <u>nicht</u> abzählbar

Beweis (detailliert)

Da Σ^* abzählbar unendlich, existiert $f\colon \mathbb{N} \to \Sigma^*$ bijektiv gem. Lm §1.12. Offenbar ist $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ unendlich. Sei $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ abzählbar; d.h. gem. Lm §1.12 existiert $g\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ bijektiv.

Betrachte Sprache $L = \{f(i) \mid i \in \mathbb{N},\ f(i) \notin g(i)\}$.

Überabzählbarkeit aller Sprachen

Theorem (§1.13 Überabzählbarkeit aller Sprachen)

Menge $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ aller Sprachen über Σ <u>nicht</u> abzählbar

Beweis (detailliert)

Da Σ^* abzählbar unendlich, existiert $f\colon \mathbb{N} \to \Sigma^*$ bijektiv gem. Lm §1.12. Offenbar ist $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ unendlich. Sei $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ abzählbar; d.h. gem. Lm §1.12 existiert $g\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ bijektiv.

Betrachte Sprache $L = \{f(i) \mid i \in \mathbb{N},\ f(i) \notin g(i)\}$.

Da g bijektiv, existiert $i \in \mathbb{N}$ mit $L = g(i)$.

Überabzählbarkeit aller Sprachen

Theorem (§1.13 Überabzählbarkeit aller Sprachen)

Menge $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ aller Sprachen über Σ nicht abzählbar

Beweis (detailliert)

Da Σ^* abzählbar unendlich, existiert $f\colon \mathbb{N} \to \Sigma^*$ bijektiv gem. Lm §1.12. Offenbar ist $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ unendlich. Sei $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ abzählbar; d.h. gem. Lm §1.12 existiert $g\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ bijektiv.

Betrachte Sprache $L = \{f(i) \mid i \in \mathbb{N},\ f(i) \notin g(i)\}$.

Da g bijektiv, existiert $i \in \mathbb{N}$ mit $L = g(i)$.
Dann $f(i) \in L$ gdw. $f(i) \notin g(i) = L$.

Überabzählbarkeit aller Sprachen

Theorem (§1.13 Überabzählbarkeit aller Sprachen)

Menge $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ aller Sprachen über Σ <u>nicht</u> abzählbar

Beweis (detailliert)

Da Σ^* abzählbar unendlich, existiert $f\colon \mathbb{N} \to \Sigma^*$ bijektiv gem. Lm §1.12. Offenbar ist $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ unendlich. Sei $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ abzählbar; d.h. gem. Lm §1.12 existiert $g\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ bijektiv.

Betrachte Sprache $L = \{f(i) \mid i \in \mathbb{N},\ f(i) \notin g(i)\}$.

Da g bijektiv, existiert $i \in \mathbb{N}$ mit $L = g(i)$.
Dann $f(i) \in L$ gdw. $f(i) \notin g(i) = L$. Widerspruch $\lightning$
Also $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ <u>nicht</u> abzählbar. $\square$

Überabzählbarkeit aller Sprachen

Diagonalisierung

$L' \setminus w$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$\cdots$
$g(0)$	$\boxed{✗}$	✗	✓	✓	$\cdots$
$g(1)$	✗	$\boxed{✓}$	✓	✗	$\cdots$
$g(2)$	✗	✗	$\boxed{✓}$	✗	$\cdots$
$g(3)$	✓	✓	✗	$\boxed{✓}$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
L	✓	✗	✗	✗	$\cdots$

$$L = \{f(i) \mid i \in \mathbb{N},\ f(i) \notin g(i)\}$$

1. Hauptsatz

§1.14 Theorem

Nicht alle Sprachen sind Typ-0

Beweis

Typ-0-Sprachen $\text{Typ-0}(\Sigma)$ über Σ abzählbar gemäß Thm §1.11.

1. Hauptsatz

§1.14 Theorem

Nicht alle Sprachen sind Typ-0

Beweis

Typ-0-Sprachen $\text{Typ-0}(\Sigma)$ über Σ abzählbar gemäß Thm §1.11.
Menge $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ aller Sprachen über Σ überabzählbar gemäß Thm §1.13.

1. Hauptsatz

§1.14 Theorem

Nicht alle Sprachen sind Typ-0

Beweis

Typ-0-Sprachen $\text{Typ-0}(\Sigma)$ über Σ abzählbar gemäß Thm §1.11.
Menge $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ aller Sprachen über Σ überabzählbar gemäß Thm §1.13.
Also $\text{Typ-0}(\Sigma) \subsetneq \mathcal{P}(\Sigma^*)$. $\square$

Zusammenfassung

- Wiederholung reguläre & kontextfreie Sprachen
- Chomsky-Grammatiken & Ableitungen
- Typ-0(Σ) $\subsetneq \mathcal{P}(\Sigma^*)$ (Nicht alle Sprachen sind Typ-0)

Erste Übungsserie bereits verfügbar