Logik

Nikita Emanuel John Fehér, 3793479, Lennox Heimann

30. April 2024

Hausaufgabe 4

Gegeben sind folgende aussagenlogische Formeln:

$$\varphi_1 = x \lor y \to z \quad \varphi_2 = (x \to z) \land (y \to z) \quad \varphi_3 = \neg x \leftrightarrow y \quad \varphi_4 = x \leftrightarrow \neg y$$

(a) Widerlegen Sie, dass $\varphi_1 \equiv \varphi_3$.

(b) Beweisen Sie, dass für alle aussagenlogischen Formeln ψ_1, ψ_2, ψ_3

$$(\psi_1 \land \psi_2) \lor \psi_3 \equiv (\psi_1 \lor \psi_3) \land (\psi_2 \lor \psi_3)$$

gilt.

(c) Beweisen Sie, dass $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ und $\varphi_3 \equiv \varphi_4$. Ersetzen Sie zuerst verwendete Abkürzungen durch Basisijunktoren.

Beweisen Sie Äquivalenzen durch Äquivalenzumformungen. Nutzen Sie die bekannten Äquivalenzen aus der Vorlesung und den Aufgaben. Geben Sie in jedem Schritt die verwendete Äquivalenz an.

(a)

x	y	z	$\varphi_1 = x \vee y \to z$	$\varphi_3 = \neg x \leftrightarrow y$
0	0	1	1	0

(b)

$$\begin{aligned}
&(\psi_1 \wedge \psi_2) \vee \psi_3 && \text{Kommutativität Disjunktion}\\
&\equiv \psi_3 \vee (\psi_1 \wedge \psi_2) && \text{Distributivgesetz}\\
&\equiv (\psi_3 \vee \psi_1) \wedge (\psi_3 \vee \psi_2) && \text{Kommutativität Disjunktion}\\
&\equiv (\psi_1 \vee \psi_3) \wedge (\psi_2 \vee \psi_3)
\end{aligned}$$

(c)

- $\varphi_1 \equiv \varphi_2$

$$\begin{aligned}
&\varphi_1\\
\equiv& x \vee y \to z\\
\equiv& (x \vee y) \to z = \neg(x \vee y) \vee z && |\text{De Morgansche Gesetze}\\
\equiv& (\neg x \wedge \neg y) \vee z && |\text{Kommutativität Disjunktion}\\
\equiv& z \vee (\neg x \wedge \neg y) && |\text{Distributivgesetz}\\
\equiv& (z \vee \neg x) \wedge (z \vee \neg y) && |\text{Kommutativität Disjunktion}\\
\equiv& (\neg x \vee z) \wedge (\neg y \vee z) = (x \to z) \wedge (y \to z)\\
\equiv& \psi_2
\end{aligned}$$

- $\varphi_3 \equiv \varphi_4$

$$\begin{aligned}
&\varphi_3\\
\equiv& \neg x \leftrightarrow y\\
=& (\neg x \to y) \wedge (y \to \neg x)\\
=& (\neg\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee \neg x) && |\text{Doppelte Negation}\\
\equiv& (x \vee y) \wedge (\neg y \vee \neg x) && |\text{Kommutativität Disjunktion}\\
\equiv& (y \vee x) \wedge (\neg x \vee \neg y) && |\text{Kommutativität Konjunktion}\\
\equiv& (\neg x \vee \neg y) \wedge (y \vee x) && |\text{Doppelte Negation}\\
\equiv& (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg\neg y \vee x)\\
=& (x \to \neg y) \wedge (\neg y \to x)\\
=& x \leftrightarrow \neg y\\
\equiv& \varphi_4
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 5

Gegeben sind die Junktoren $\uparrow$ und $\not\leftrightarrow$ durch folgende Wahrheitstafel:

φ	$\uparrow \varphi$
0	1
1	1

φ	ψ	$\varphi \not\leftrightarrow \psi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(a) Geben Sie eine unerfüllbare Formel an, welche ausschließlich die Junktoren $\uparrow$ und $\not\leftrightarrow$ und maximal zwei Vorkommen von Aussagenvariablen enthält.

(b) Beweisen Sie, dass $\{\uparrow, \not\leftrightarrow, \vee\}$ funktional vollständig ist.

(c) Widerlegen Sie, dass $\{\not\leftrightarrow\}$ funktional vollständig ist.

(a)

$$((\uparrow \varphi) \not\leftrightarrow (\uparrow \psi))$$

(b)

$$\neg\varphi := \varphi \not\leftrightarrow (\uparrow \varphi)$$
$$\varphi \wedge \psi := (\varphi \not\leftrightarrow \psi) \not\leftrightarrow (\varphi \vee \psi)$$

Da wir nun bewiesen haben das mit den gegebenen Junktoren die Junktoren "$\wedge$", "$\neg$" gebildet werden können, ist $\{\uparrow, \not\leftrightarrow, \vee\}$ funktional vollständig. Aus der Vorlesung kann entnommen werden das eine menge bestehend aus mindestens $\{\neg, \wedge, \vee\}$ funktional vollständig ist.

(c) Behauptung: Für $V_1 : \mathrm{VAR} \to \{0,1\} : x \mapsto 1, \varphi \in \{\not\leftrightarrow\}$, dann $V_1(\varphi) = 1$
Beweis: Wir beweisen diese Behauptung mittels Induktion über den Aufbau der Formeln. (IA) Angenommen φ ist atomar, dann $\varphi = x_i$ für ein $x_i \in \mathrm{VAR}$ dann $V_1(\varphi) = V_1(x_i) = 1$
(IV) Angenommen für $\psi_1, \psi_2 \in \{\not\leftrightarrow\}$ die Behauptung $\begin{pmatrix} V_1(\psi_1) = 1 \\ V_1(\psi_2) = 1 \end{pmatrix}$
(IS) $\varphi = \psi_1 \not\leftrightarrow \psi_2$, $V_1(\varphi) = V_1(\psi_1 \not\leftrightarrow \psi_2) = V_1(\psi_1) \not\leftrightarrow V_1(\psi_2) = 1 \not\leftrightarrow 1 = 0$
es gibt keine zu V_1 äquivalente Formel

Hausaufgabe 6

Seien $\uparrow$ und $\not\leftrightarrow$ wie in Hausaufgabe 5. Gegeben sind folgende aussagenlogische Formeln:

$$\varphi_1 = (x \not\leftrightarrow y) \not\leftrightarrow y \quad \varphi_2 = x \not\leftrightarrow (\uparrow y \not\leftrightarrow z)$$

(a) Geben Sie jeweils die Wahrheitstafeln dieser aussagenlogischen Formeln an.

φ_1:

x	y	$x \not\leftrightarrow y$	$(x \not\leftrightarrow y) \not\leftrightarrow y$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	0	1

φ_2:

x	y	z	$\uparrow y$	$\uparrow y \not\leftrightarrow z$	$x \not\leftrightarrow (\uparrow y \not\leftrightarrow z)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1

(b) Geben Sie jeweils äquivalente aussagenlogische Formeln in konjunktiver Normalform und in disjunktiver Normalform an. Nutzen Sie dazu das Wahrheitstafelverfahren aus der Vorlesung, sowie die Wahrheitstafeln aus (a).

φ_1:
KNF:
$(x \vee y) \wedge (x \vee \neg y)$
DNF:
$(x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y)$

φ_2
KNF:
$(x \vee y \vee \neg z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z)$
DNF:
$(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$

Hausaufgabe 7

Geben Sie an welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie ihre Antwort jeweils kurz.

(a) Für alle aussagenlogischen Formeln φ gilt: Die konjunktive Normalform von φ produziert mit dem Wahrheitstafelverfahren ist mindestens so groß wie φ.

Die KNF von $(\neg\neg x \vee \neg\neg y)$ ist $(x \vee y)$, letztere Formel ist kürzer als erstere und dient somit als Gegenbeispiel für die oben genannte Behauptung.

(b) Für alle aussagenlogischen Formeln φ gilt: $\varphi \models 1$.

Nein, denn es gibt unerfüllbare Formeln, z.B. $\varphi = x \wedge \neg x$.

(c) Für alle aussagenlogischen Formeln φ gilt: $\{\varphi, \neg\varphi\} \models \varphi$.

Nein, $\{\varphi, \neg\varphi\}$ entspricht $\varphi \wedge \neg\varphi$. Diese Formel nimmt bei jeder Belegung den Wert 0 an. Damit ist sie nie Modell der Formel $\varphi = x \vee \neg x$, welche für jede Belegung den Wert 1 annimmt.

(d) Für alle aussagenlogischen Formeln φ, ψ gilt: $\{\neg(\varphi \wedge \psi), \varphi\} \models \neg\psi$.

$\{\neg(\varphi \wedge \psi), \varphi\}$ entspricht $\neg(\varphi \wedge \psi) \wedge \varphi$. Durch Anwendung von de-Morgan ergibt sich die äquivalente Formel: $(\neg\varphi \vee \neg\psi) \wedge \varphi$. Mit Kommutativität und Distributivität erbiebt sich: $(\varphi \wedge \neg\varphi) \vee (\varphi \wedge \neg\psi)$.
Das ist equivalent zu: $0 \vee (\varphi \wedge \neg\psi) \iff \varphi \wedge \neg\psi$
$\implies \{\varphi, \neg\psi\} \models \neg\psi$ (Modus Ponens)