Lösungen Übung 10

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** Sei V ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und induzierter Norm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie, dass für alle $v, w \in V$ folgendes gilt:

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2)$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
&\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 = \langle v + w, v + w \rangle - \langle v - w, v - w \rangle \\
&= \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle - \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle - \langle w, w \rangle = 4\langle v, w \rangle
\end{aligned}$$

und daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)**.** Seien

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Es sei g die Gerade durch a und b und h die Gerade durch c und d.
1) Bestimmen Sie den Abstand von p zu g.
2) Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden g und h.

Lösung:
1) Wir verwenden Satz VII.4.7.
Es gilt zunächst $g = G(a, v)$, wobei $v = b - a = (-1, 3, 2)^T$.
Damit ist $\|v\|_2^2 = 14$ und für den Lotfußpunkt von p auf g ergibt sich

$$\begin{aligned}
q &= a + \langle p - a, v \rangle \frac{v}{\|v\|_2^2} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{14} \left\langle \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -5/2 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Für den Abstand von p zu g folgt:

$$d(p, g) = \|p - q\|_2 = \|(17/2, 7/2, -1)^T\|_2 = \frac{1}{2}\sqrt{289 + 49 + 4} = \frac{1}{2}\sqrt{342}$$

2) Hier verwenden wir Satz VII.4.11.
Es gilt $h = G(c, w)$, wobei $w = d - c = (0, -2, 1)^T$.
Es ist

$$v \times w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und $\|v \times w\|_2 = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$.
Damit folgt für den Abstand von g und h:

$$d(g, h) = \frac{|\langle a - c, v \times w \rangle|}{\|v \times w\|_2} = \frac{1}{3\sqrt{6}} \left| \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \right| = \frac{1}{3\sqrt{6}}$$

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.** Seien

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und sei $E = a + \operatorname{span}\{v, w\}$.
Bestimmen Sie den Abstand von p zur Ebene E.

Lösung: Wir verwenden Satz VII.4.19.
Zunächst ist

$$v \times w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $\|v \times w\|_2 = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.
Als Normaleneinheitsvektor für E erhalten wir somit

$$x_0 = \frac{v \times w}{\|v \times w\|_2} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit $s = \langle a, x_0 \rangle = -1/\sqrt{10}$ gilt dann $E = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, x_0 \rangle = s\}$.
Für den Abstand von p zu E folgt:

$$d(p, E) = |\langle x_0, p \rangle - s| = \frac{1}{\sqrt{10}} \left| \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + 1 \right| = \frac{9}{\sqrt{10}}$$