Diskrete Strukturen (WS 2023-24) - Halbserie 0

Bitte nur Probleme 0.1, 0.2 und 0.3 einreichen. Halbserie 0 wird nicht benotet, die Einreichung dient nur dazu, sich mit der Moodle-Oberfläche vertraut zu machen.

0.1 **[4]**

(bitte direkt auf moodle als Quiz-Frage antworten.)

0.2 **[3]**

Gegeben sei folgende aussagenlogische Formel F:

$$(A \leftrightarrow B) \wedge (\neg(C \rightarrow A))$$

1. Erstellen Sie für F eine **Wahrheitswertetabelle**.

2. Ist F **erfüllbar**? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Solution.

1. Wahrheitswertetabelle:

A	B	C	$(A \leftrightarrow B)$	$\wedge$	$(\neg$	$(C \rightarrow A))$
1	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	0
0	0	0	1	0	0	1

$\bullet_1$ $\bullet_1$ für korrekt ausgefüllte Tabelle, Punkt Abzug bei Fehler

2. Jadie Formel ist erfüllbar, da wir folgende erfüllende Belegung angeben können: $A = 0$, $B = 0$, $C = 1$.

0.3 **[3]**

Beweisen Sie mit Hilfe einer Äquivalenzkette, dass

$$(A \vee \neg B) \rightarrow B \quad \text{äquivalent zu} \quad B.$$

Geben Sie für jeden Schritt an, welche Umformungsregel angewendet wurde.

Solution.

$$
\begin{aligned}
& (A \lor \neg B) \to B && \\
\iff & \neg(A \lor \neg B) \lor B && \text{(Reformulierung } \to\text{)} \\
\iff & (\neg A \land \neg\neg B) \lor B && \text{(DeMorgan)} \\
\iff & (\neg A \land B) \lor B && \text{(doppelte Negation)} \\
\iff & B && \text{(Absorption)}
\end{aligned}
$$

$\bullet_1$ $\bullet_1$ für korrekte, nachvollziehbare Umformungen, $\bullet_1$ für Angabe Umformungsschritte

---

0.4 Ist die folgende aussagenlogische Formel eine **Tautologie** oder eine **Kontradiktion**? Beweisen Sie Ihre Antwort.

$$\neg(A \to B) \lor (B \lor \neg A)$$

Solution. Es handelt sich um eine Tautologie, d.h., fuer alle Belegungen der aussagenlogischen Variablen A und B ist die Formel wahr. Dies kann man beispielsweise mit Wahrheitswertetabelle nachweisen (alle Zeilen 1).

A	B	$\neg$	$(A \to B)$	$\lor$	$(B \lor \neg A)$
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1

Oder man formt mittels "Elimination von $\to$" um, und bekommt man die äquivalente Formel

$$\neg(A \to B) \lor (A \to B).$$

Wir erkennen, dass diese Formel tautologisch ist (Klassische Tautologie "Ausgeschlossenes Drittes", $F \lor \neg F$, wobei $F = A \to B$).

0.5 Es seien die folgenden 'Prädikate gegeben:

- $M(x)$ drückt aus, dass x ein Mond ist.
- $K(x)$ drückt aus, dass x Käse ist.
- $T(x, y)$ drückt aus, dass x durch y teilbar ist.

1. **Formalisieren** Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

(a) Alle Monde sind Käse.

(b) Es gibt keinen Mond, der Käse ist.

(c) Es gibt zwei Monde, die durch denselben Käse teilbar sind.

2. Formulieren Sie die folgenden Aussagen in natürlicher Sprache:

(iv) $\forall z(K(z) \vee \neg K(z))$

(v) $\exists x \forall y(K(x) \wedge (M(y) \to T(x, y)))$

Solution.

1. (a) $\forall x(M(x) \to K(x))$

   (b) $\neg\exists x(M(x) \wedge K(x))$

   (c) $\exists x\, \exists y\, \exists z(M(x) \wedge M(y) \wedge K(z) \wedge T(x, z) \wedge T(y, z))$. Sind explizit zwei verschiedene Monde gemeint, muss man noch $x \neq y$ hinzufügen, denn anderenfalls kann man x und y durchaus mit demselben Mond belegen.

   (d) Alle Dinge sind Käse oder sind nicht Käse.

   (e) Es gibt einen Käse, der durch alle Monde teilbar ist.

0.6 Formulieren Sie für jede der folgenden Aussagen die jeweilige **Kontraposition**.

1. Ist eine natürliche Zahl durch 6 teilbar, so ist sie auch durch 2 und durch 3 teilbar.

2. Wenn n gerade ist, dann ist $n^2 + 2n - 4$ gerade.

Solution.

1. Wenn eine natürliche Zahl nicht durch 2 oder nicht durch 3 teilbar ist, so ist sie auch nicht durch 6 teilbar.

2. Wenn $n^2 + 2n - 4$ ungerade ist, so ist n ungerade.