

Übungen zur Vorlesung „Logik“ 1. Übungsblatt

H 1-1. Mengenlehre

- a) Sei $M = \{a, b, c\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche nicht? Ohne Begründung. (3 Pkt.)

- | | | |
|--------------------------------|--------------------------------------|----------------------------|
| i) $a \in M$ | ii) $\emptyset \subseteq M$ | iii) $\{a, c\} \notin 2^M$ |
| iv) $\{\emptyset\} \notin 2^M$ | v) $\{\{a\}, \{b, c\}\} \in 2^{2^M}$ | vi) $ 2^{2^M} = 256$ |

- b) Beweisen Sie nachfolgende Aussage. Für beliebige Mengen S und T gilt: (2 Pkt.)

$$S \cup T = S \quad \text{gdw.} \quad T \subseteq S$$

- H 1-2. Vollständige Induktion (5 Pkt.)
Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n^3 - n \text{ ist durch } 3 \text{ teilbar}$$

H 1-3. Syntaktische Eigenschaften

- a) Definieren Sie rekursiv die Funktion $j : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N}$, die die *Anzahl der Junktoren* einer Formel zählt. Beispielsweise sollte $j((\neg A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3))) = 3$ ergeben. (2 Pkt.)
- b) Sei $\varphi = \neg(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))$. Bestimmen Sie: (3 Pkt.)
- i) den Rang $r(\varphi)$,
 - ii) die Menge der Teilformeln $t(\varphi)$,
 - iii) den Syntaxbaum $b(\varphi)$.

- H 1-4. Induktion über den Formelaufbau (5 Pkt.)
Zeigen Sie per Induktion über den Formelaufbau, dass für alle Formeln $\varphi \in \mathcal{F}$ gilt:

$$|t(\varphi)| \leq 2^{r(\varphi)+1} - 1.$$

Termine:

- Abgabe der Aufgaben bis spätestens 20.04.2025 via moodle.
- Besprechung der Aufgaben ab Dienstag, dem 22.04.2025 (A-Woche). 21.04. ist Feiertag.