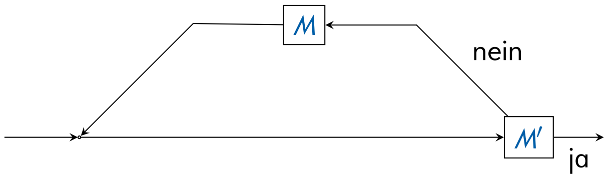
Bedingte Iteration

Notizen

- Turing-Berechenbarkeit benötigt deterministische TM
- Determinismus <u>nicht</u> erhalten unter Vereinigung & Iteration
- Bedingte Iteration = Abbruch Iteration bei Vorliegen Eigenschaft (bedingter Schleifenabbruch)



Bedingte Iteration

§6.1 Definition (bedingte Iteration; *conditional iteration*)

Seien $f\colon \Gamma^* \dashrightarrow \Gamma^*$ und $\chi\colon \Gamma^* \dashrightarrow \{0,1\}$ partielle Funktionen.
Bedingte Iteration $f_\chi\colon \Gamma^* \dashrightarrow \Gamma^*$ ist für alle $w \in \Gamma^*$

$$f_\chi^*(w) = \begin{cases} f^t(w) & \text{falls } t \in \mathbb{N} \text{ existiert mit} \\ & \chi(f^t(w)) = 1 \text{ und } \chi(f^s(w)) = 0 \text{ für alle } s < t \\ \text{undef} & \text{sonst} \end{cases}$$

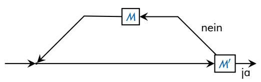
Bedingte Iteration

§6.2 Theorem

Seien $f\colon \Gamma^* \dashrightarrow \Gamma^*$ und $\chi\colon \Gamma^* \dashrightarrow \{0,1\}$ Turing-berechenbar.
Dann bedingte Iteration $f_\chi^*\colon \Gamma^* \dashrightarrow \Gamma^*$ Turing-berechenbar

Beweisansatz

1. Normierte det. TM M und M' für f und χ, wobei M' Band wiederherstellt und statt Ausgabe $1/0$ in Zustand q'_+/q'_- wechselt
2. Akzeptieren in q'_+ (ja-Zweig)
3. Starten M in q'_- (nein-Zweig)
4. Starten M' im akz. Zustand von M



Verzweigung

§6.2 Theorem

Seien $f\colon \Gamma^* \dashrightarrow \Gamma^*$ und $\chi\colon \Gamma^* \dashrightarrow \{0,1\}$ Turing-berechenbar.
Dann bedingte Iteration $f_\chi^*\colon \Gamma^* \dashrightarrow \Gamma^*$ Turing-berechenbar

Beweis

Seien $M = (Q, \Gamma', \Gamma, \Delta, \square, q_0, q_+, q_-)$ und $M' = (Q', \Gamma', \Gamma, \Delta', \square, q'_0, q'_+, q'_-)$ normierte det. TM mit $\Gamma' = \Gamma_M$, $T(M) = f$ und $T(M') = \chi$. Anpassung M' für Wiederherstellung Eingabe und Akzeptanz statt Ausgabe 1 und Ablehnung statt Ausgabe 0. O.B.d.A. sei $Q \cap Q' = \emptyset$. Wir konstruieren det. TM $N = (Q \cup Q', \Gamma', \Gamma, \Delta \cup \Delta' \cup R, \square, q'_0, q'_+, q_-)$

$$R = \{(q'_-, \gamma) \to (q_0, \gamma, \diamond) \mid \gamma \in \Gamma\} \cup \{(q_+, \gamma) \to (q'_0, \gamma, \diamond) \mid \gamma \in \Gamma\}$$

Dann $T(N) = T(M)^*_{T(M')} = f_\chi^*$ $\square$

While-Berechenbarkeit

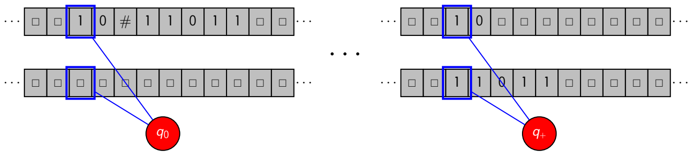
§6.3 Theorem

Jede While-berechenbare partielle Funktion ist Turing-berechenbar

Beweisskizze (1/4)

Sei P While-Programm mit $\max \operatorname{var}(P) = n$. Nutze 1 Band pro Variable und speichere x_i auf Band i. Wir konstruieren normierte det. TM

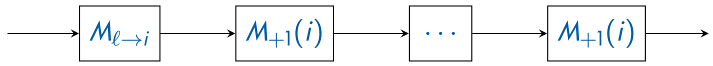
- M_{start} kopiert Startwerte auf korrekte Bänder
- Induktiv per Definition While-Programm



While-Berechenbarkeit

Beweisskizze (2/4)

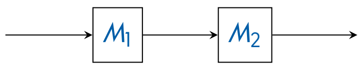
- Sei P Zuweisung $x_i = x_\ell + z$
- Simuliert durch
  1. Kopier-TM $M_{\ell \to i}$ kopiert Band ℓ auf Band i
  2. z mal Inkrement- oder Dekrement-TM auf Band i



While-Berechenbarkeit

Beweisskizze (3/4)

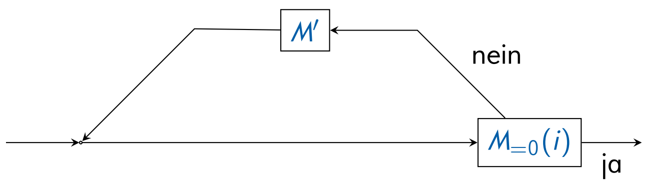
- Sei $P = P_1 \,;\, P_2$
- Simuliert durch Verkettung zugeh. det. TM M_1 und M_2



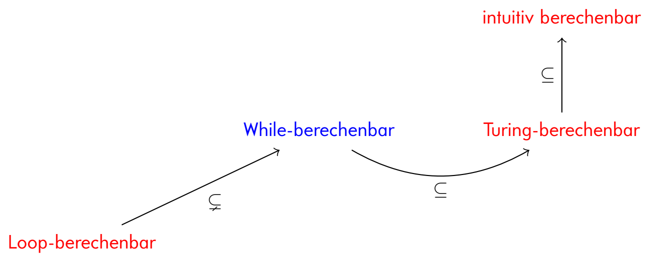
While-Berechenbarkeit

Beweisskizze (4/4)

- Sei $P = \textbf{WHILE}(x_i \neq 0)\,\{P'\}$
- Simuliert durch
  1. Sei M' det. TM für P'
  2. Sei $M_{=0}$ det. TM für Gleichheit mit 0
  3. Bedingte Iteration von M' mit Bedingung $M_{=0}(i)$ □



While-Berechenbarkeit



Simulation Turingmaschine

Ansatz

- Simulation det. TM $(Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, \square, q_0, q_+, q_-)$ durch While-Programm
- Kodierung Zustand & Band benötigt
- Globalsituation $u\ q\ w$ in 3 Variablen: x_1 für w; x_2 für q; x_3 für u^R
- Nummerierung Zustände per Bijektion $h_Q \colon Q \to \{0, \dots, |Q| - 1\}$ mit $h_Q(q_+) = 0$ und $h_Q(q_-) = 1$

Beispiel

- $Q = \{q_0, q, q_+, q_-\}$ kodiert via

$$q_0 \mapsto 3 \qquad q \mapsto 2 \qquad q_+ \mapsto 0 \qquad q_- \mapsto 1$$

Simulation Turingmaschine

Stellenwertsystem zur Basis $n = |\Gamma|$

- Nummerierung Symbole aus Γ per Bijektion $h_\Gamma \colon \Gamma \to \{0, \dots, n-1\}$ mit $h_\Gamma(\square) = 0$
- Kodiere Wort $w \in \Gamma^*$ im inversen Stellenwertsystem zur Basis n

$$\mathrm{code}_{h_\Gamma}(\gamma_1 \cdots \gamma_\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} h_\Gamma(\gamma_i) \cdot n^{i-1}$$

Beispiel

- $\Gamma = \{\square, a, b\}$ mit $h_\Gamma(\square) = 0$, $h_\Gamma(a) = 1$ und $h_\Gamma(b) = 2$
- $w = abab$

$$\begin{aligned}\mathrm{code}_{h_\Gamma}(w) &= h_\Gamma(a) \cdot 3^0 + h_\Gamma(b) \cdot 3^1 + h_\Gamma(a) \cdot 3^2 + h_\Gamma(b) \cdot 3^3 \\ &= 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 27 = 1 + 6 + 9 + 54 = 70\end{aligned}$$

Simulation Turingmaschine

Rechnen im Stellenwertsystem zur Basis n

- 1. Zeichen Kodierung k ist $h_\Gamma^{-1}(k\ \mathbf{MOD}\ n)$

$$h_\Gamma^{-1}(\mathrm{code}_{h_\Gamma}(\gamma w)\ \mathbf{MOD}\ n) = \gamma$$

<u>Schreibweise:</u> $\mathbf{TOP}(x_i) = x_i\ \mathbf{MOD}\ n$

- Entferne 1. Zeichen aus Kodierung k ist $k\ \mathbf{DIV}\ n$

$$\mathrm{code}_{h_\Gamma}(\gamma w)\ \mathbf{DIV}\ n = \mathrm{code}_{h_\Gamma}(w)$$

<u>Schreibweise:</u> $\mathbf{POP}(x_i) = x_i\ \mathbf{DIV}\ n$

- Einfügen γ als 1. Zeichen in Kodierung k ist $h_\Gamma(\gamma) + k \cdot n$

$$h_\Gamma(\gamma) + \mathrm{code}_{h_\Gamma}(w) \cdot n = \mathrm{code}_{h_\Gamma}(\gamma w)$$

<u>Schreibweise:</u> $\mathbf{PUSH}(x_i, z) = z + x_i \cdot n$

Simulation Turingmaschine

Sei $\Gamma = \{\square, a, b\}$ mit $h_\Gamma(\square) = 0$, $h_\Gamma(a) = 1$ und $h_\Gamma(b) = 2$

Beispiel

- Sei $x_1 = 70$ (Kodierung von "abab")
- $\mathbf{TOP}(x_1) = 70 \ \mathbf{MOD}\ 3 = 1$ (entspricht 'a')
- $\mathbf{POP}(x_1) = 70 \ \mathbf{DIV}\ 3 = 23$ (entspricht "bab" $[2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2]$)
- $\mathbf{PUSH}(x_1, 2) = 70 \cdot 3 + 2 = 212$
  (entspricht "babab" $[2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^4]$)

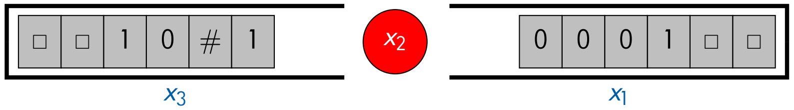
Notiz

- Kellerspeicher mit n Symbolen

Simulation Turingmaschine

Überblick

- Alle Komponenten beisammen
- Kodierung Zustand via h_Q (in x_2)
- Kodierung Band u links des Kopfes als Keller für u^R via h_Γ (in x_3)
- Kodierung sonstiges Band w als Keller via h_Γ (in x_1)



Simulation Turingmaschine

Hauptprogramm

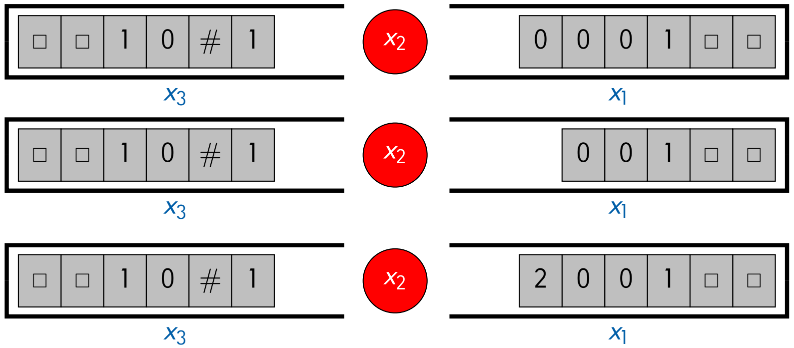
… *Kodierung Eingabe in* x_1 …
$x_2 = h_Q(q_0)$; $x_3 = 0$ (Startzustand & leeres Band)
$\mathbf{WHILE}(x_2 > 1)\ \{$ (kein Endzustand)
  $\mathbf{CASE}(x_2, \mathbf{TOP}(x_1))\ \mathbf{OF}$ (Fallunterscheidung linke Seite Übergang)
  …
  (q, γ): … *führe* (q, γ)*-Übergang aus* …
  …
  $\mathbf{ELSE}\ \{x_2 = h_Q(q_-)\}$
$\}$
… *Dekodierung Band* x_1 *& Finalprüfung* …

Simulation Turingmaschine

Regelanwendung

Für jeden Übergang $(q, \gamma) \to (q', \gamma', d) \in \Delta$

$x_2 = h_Q(q')$ (Zustandswechsel)
$x_1 = \mathbf{POP}(x_1)$ (Entferne Zeichen unter Kopf)
$x_1 = \mathbf{PUSH}(x_1, h_\Gamma(\gamma'))$ (Füge neues Zeichen ein)



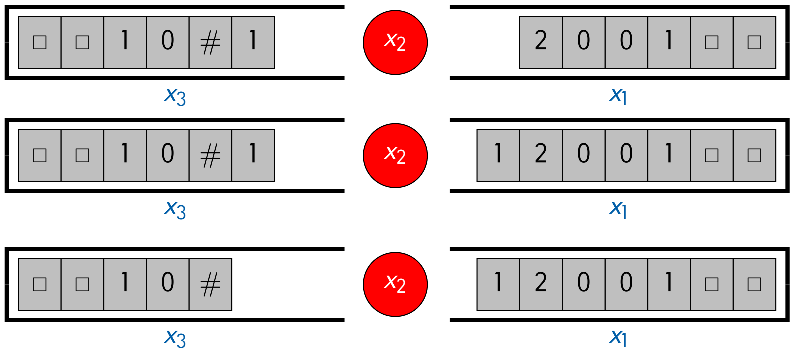
Simulation einer Turingmaschine

Regelanwendung

Falls $d = \triangleleft$ dann zusätzlich

$x_1 = \mathbf{PUSH}(x_1, \mathbf{TOP}(x_3))$ (Füge 1. Zeichen von links ein)

$x_3 = \mathbf{POP}(x_3)$ (Entferne 1. Zeichen von links)



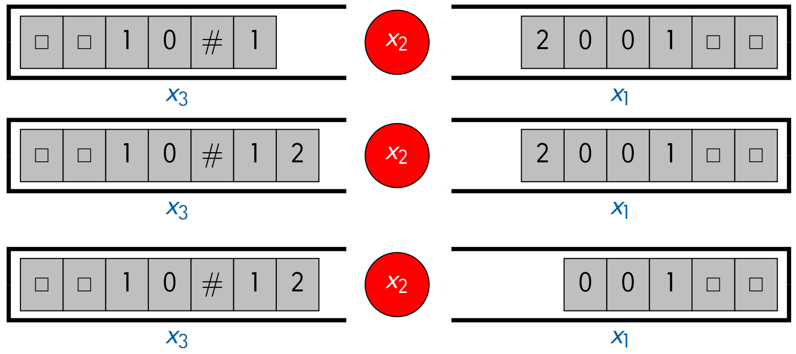
Simulation einer Turingmaschine

Regelanwendung

Falls $d = \triangleright$ dann zusätzlich

$x_3 = \mathbf{PUSH}(x_3, \mathbf{TOP}(x_1))$ (Füge 1. Zeichen von rechts ein)

$x_1 = \mathbf{POP}(x_1)$ (Entferne 1. Zeichen von rechts)



Simulation einer Turingmaschine

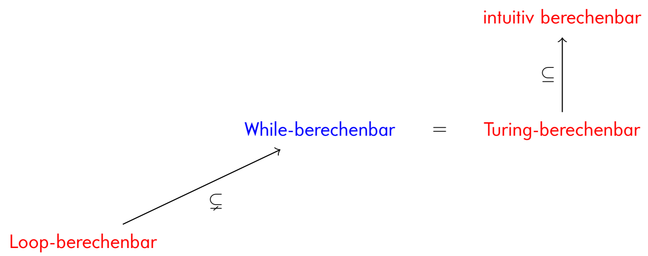
Banddekodierung für Binärzahl & Finalprüfung

$\mathbf{IF}(x_3 = 0 \text{ und } x_2 = 0)\,\{$ (teste linken Bandinhalt & Finalzustand)
  $x_4 = 0\,;\, x_5 = 0$ (Initialisierung Ausgabewert & Stellenwert)
  $\mathbf{WHILE}(x_1 \neq 0)\,\{$
    $\mathbf{IF}(1 \leq \mathbf{TOP}(x_1) \leq 2)\,\{$ (gültiges Bit [0 = □])
      $x_4 = x_4 + (\mathbf{TOP}(x_1) - 1) \cdot 2^{x_5}$ (dekodiere Binärdarstellung)
      $x_5 = x_5 + 1$ (nächste Stelle)
      $x_1 = \mathbf{POP}(x_1)$ (entferne erstes Bit)
    $\}$ **ELSE** … *Endlosschleife* …
  $\}$
  $x_1 = x_4$ (kopiere Ausgabewert)
$\}$ **ELSE** … *Endlosschleife* …

While-Berechenbarkeit

§6.4 Theorem

Jede Turing-berechenbare partielle Funktion ist While-berechenbar



Ackermann-Funktion

Kellerspeicher

- Implementiert für n Kellersymbole
- Speicherung Elemente von $\mathbb{N}$ per Binärkodierung über $\{0, 1, \#\}$
- Kellerende markiert durch 4. Symbol

Ackermann-Funktion

Einfügen natürliche Zahl

$\mathbf{PUSH}(x_i, 2)$ (Trennsymbol einfügen)
$x_\ell = x_k$ (kopiere x_k)
$\mathbf{WHILE}(x_\ell \neq 0)\ \{$
  $\mathbf{PUSH}(x_i, x_\ell \ \mathbf{MOD}\ 2)$ (letztes Bit speichern)
  $x_\ell = x_\ell \ \mathbf{DIV}\ 2$
$\}$

Schreibweise: $x_i = \mathbf{PUSH}_{\mathbb{N}}(x_i, x_k)$
($i \neq k$; x_ℓ unbenutzt)

Entfernen oberste natürliche Zahl

$\mathbf{WHILE}(\mathbf{TOP}(x_i) < 2)\ \{x_i = \mathbf{POP}(x_i)\}$ (entferne 0/1-Bits)
$\mathbf{IF}(\mathbf{TOP}(x_i) = 2)\ \{x_i = \mathbf{POP}(x_i)\}$ (teste auf & entferne Trennsymbol)
ELSE ... *Endlosschleife* ...

Schreibweise: $x_i = \mathbf{POP}_{\mathbb{N}}(x_i)$

Ackermann-Funktion

Auslesen oberste natürliche Zahl

$x_\ell = 0$ (initialisiere x_ℓ)
$\mathbf{WHILE}(\mathbf{TOP}(x_i) < 2)\ \{$ (bis Trenn- oder Endesymbol)
  $x_\ell = x_\ell \cdot 2 + \mathbf{TOP}(x_i)$ (dekodiere Binärzahl)
  $x_i = \mathbf{POP}(x_i)$ (erstes Bit entfernen)
$\}$
$\mathbf{IF}(\mathbf{TOP}(x_i) = 2)\ \{x_i = \mathbf{POP}(x_i)\}$ (teste auf & entferne Trennsymbol)
ELSE ... *Endlosschleife* ...
$x_i = \mathbf{PUSH}_{\mathbb{N}}(x_i, x_\ell)$ (Wert zurückschreiben)

Schreibweise: $x_\ell = \mathbf{TOP}_{\mathbb{N}}(x_i)$
($i \neq \ell$)

Ackermann-Funktion

Test Leerheit

$\mathbf{TOP}(x_i) - 2$

- Liefert 1 falls leer
- Liefert 0 sonst

Schreibweise: $\mathbf{EMPTY}(x_i)$

Kellerspeicher für natürliche Zahlen

- Speicherung beliebiger natürliche Zahlen
- Unterstützung Standardoperationen
  (Test Leerheit, Einfügen, Entfernen, Auslesen)

Ackermann-Funktion

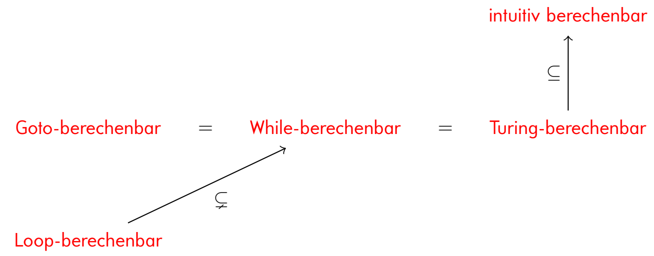
Implementation

$x_3 = 3$ (leerer Keller)
$\text{PUSH}_{\mathbb{N}}(x_3, x_1)$; $\text{PUSH}_{\mathbb{N}}(x_3, x_2)$ (füge x_1 & x_2 ein)
$\text{WHILE}(\text{SIZE}_{\mathbb{N}}(x_3) > 1)$ { (mind. 2 Elemente im Keller)
  $x_2 = \text{TOP}_{\mathbb{N}}(x_3)$; $x_3 = \text{POP}_{\mathbb{N}}(x_3)$ (2. Parameter vom Keller)
  $x_1 = \text{TOP}_{\mathbb{N}}(x_3)$; $x_3 = \text{POP}_{\mathbb{N}}(x_3)$ (1. Parameter vom Keller)
  $\text{IF}(x_1 = 0)$ {$x_3 = \text{PUSH}_{\mathbb{N}}(x_3, x_2 + 1)$} (liefere 2. Parameter + 1)
  ELSE { (2. oder 3. Fall)
    $x_3 = \text{PUSH}_{\mathbb{N}}(x_3, x_1 - 1)$ (Rekursion über 1. Parameter + 1)
    $\text{IF}(x_2 = 0)$ {$x_3 = \text{PUSH}_{\mathbb{N}}(x_3, 1)$} (2. Fall mit Konstante 1)
    ELSE {$x_3 = \text{PUSH}_{\mathbb{N}}(x_3, x_1)$; $x_3 = \text{PUSH}_{\mathbb{N}}(x_3, x_2 - 1)$}
  }
}
$x_1 = \text{TOP}_{\mathbb{N}}(x_3)$ (Ergebnis im Keller)

Ackermann-Funktion

§6.5 Theorem

Ackermann-Funktion ist While-berechenbar



Rekursive Funktionen

Konventionen

- Partielle Funktionen des Typs $f : \mathbb{N}^k \dashrightarrow \mathbb{N}$
- Addition (und Subtraktion) weiterhin auf $\mathbb{N}$ begrenzt

Definition (§4.13 Projektion; *projection*)

Für $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq i \leq n$ ist $\pi_i^{(n)} : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ ***n*-stellige Projektion auf *i*-te Stelle**

$$\pi_i^{(n)}(a_1, \dots, a_n) = a_i \qquad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$$

Rekursive Funktionen

§6.6 Definition (rekursive Basisfunktionen; *recursive primitives*)

Folgende Funktionen sind **rekursive Basisfunktionen**

- n-stellige **a-konstante** Funktion $a^{(n)} : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ mit $a^{(n)}(a_1, \dots, a_n) = a$ für alle $n, a, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ (Konstanten)
- **Projektion** $\pi_i^{(n)} : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq i \leq n$ (Projektionen)
- **Inkrementfunktion** $\text{nf} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\text{nf}(a) = a + 1$ für alle $a \in \mathbb{N}$ (Nachfolgerfunktion)

Keine weiteren rekursiven Basisfunktionen

Notizen

- Nutzung mathematischen Syntax & Funktionssemantik
- Basisfunktionen total (Vereinfachungen folgen)

Primitiv rekursive Funktionen

§6.7 Definition (primitiv rek. Fkt. [1/2]; *primitive rec. function*)

Genau folgende partielle Funktionen sind **primitiv rekursiv**

- Jede **rekursive Basisfunktion**
- Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und primitiv rekursiven partiellen Funktionen $f\colon \mathbb{N}^m \dashrightarrow \mathbb{N}$ und $g_1, \dots, g_m\colon \mathbb{N}^n \dashrightarrow \mathbb{N}$ ist **Komposition** $f\langle g_1, \dots, g_m\rangle\colon \mathbb{N}^n \dashrightarrow \mathbb{N}$ mit

$$f\langle g_1, \dots, g_m\rangle(a_1, \dots, a_n) = f\big(g_1(a_1, \dots, a_n), \dots, g_m(a_1, \dots, a_n)\big)$$

für alle $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ primitiv rekursiv (Komposition)

Primitiv rekursive Funktionen

§6.7 Definition (primitiv rek. Fkt. [2/2]; *primitive rec. function*)

Genau folgende partielle Funktionen sind **primitiv rekursiv**

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ und primitiv rekursiven partiellen Funktionen $f\colon \mathbb{N}^n \dashrightarrow \mathbb{N}$ und $g\colon \mathbb{N}^{n+2} \dashrightarrow \mathbb{N}$ ist durch **Schema primitive Rekursion** definierte partielle Funktion $\mathbf{pr}[f, g]\colon \mathbb{N}^{n+1} \dashrightarrow \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbf{pr}[f, g](0, a_1, \dots, a_n) &= f(a_1, \dots, a_n) \\ \mathbf{pr}[f, g](a+1, a_1, \dots, a_n) &= g\big(\mathbf{pr}[f, g](a, a_1, \dots, a_n), a, a_1, \dots, a_n\big) \end{aligned}$$

für alle $a, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ (primitive Rekursion)

Keine weitere primitiv rekursiven partiellen Funktionen

Primitiv rekursive Funktionen

n-stelliges Inkrement Komponente i $\qquad \mathrm{nf}_i^{(n)} = \mathrm{nf}\langle \pi_i^{(n)}\rangle$

$$\mathrm{nf}_i^{(n)}(a_1, \dots, a_n) = \mathrm{nf}\big(\pi_i^{(n)}(a_1, \dots, a_n)\big) = \mathrm{nf}(a_i) = a_i + 1$$

Addition $\qquad \mathrm{add} = \mathbf{pr}[\pi_1^{(1)}, \mathrm{nf}_1^{(3)}]$

$$\begin{aligned} \mathrm{add}(0, b) &= \pi_1^{(1)}(b) = b \\ \mathrm{add}(a+1, b) &= \mathrm{nf}_1^{(3)}\big(\mathrm{add}(a, b), a, b\big) = \mathrm{add}(a, b) + 1 \end{aligned}$$

Multiplikation $\qquad \mathrm{mult} = \mathbf{pr}\big[0^{(1)}, \mathrm{add}\langle \pi_1^{(3)}, \pi_3^{(3)}\rangle\big]$

$$\begin{aligned} \mathrm{mult}(0, b) &= 0^{(1)}(b) = 0 \\ \mathrm{mult}(a+1, b) &= \mathrm{add}\Big(\pi_1^{(3)}\big(\mathrm{mult}(a, b), a, b\big), \pi_3^{(3)}\big(\mathrm{mult}(a, b), a, b\big)\Big) \\ &= \mathrm{add}\big(\mathrm{mult}(a, b), b\big) = \mathrm{mult}(a, b) + b \end{aligned}$$

Primitiv rekursive Funktionen

Vereinfachungen

- Direkte Verwendung Projektion (ohne explizite Angabe)
- Freie Verwendung Parameter
- Verwendung Makros & übliche Schreibweisen (für bereits als primitiv rekursiv bekannte Funktionen)
- Schreibweise "+1" statt nf

Primitiv rekursive Funktionen

Addition

wesentliche Rekursion $(a+1)+b=(a+b)+1$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{add}(0,b) &= b\\
\mathrm{add}(a+1,b) &= \mathrm{add}(a,b)+1
\end{aligned}
$$

Multiplikation

wesentliche Rekursion $(a+1)\cdot b=(a\cdot b)+b$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{mult}(0,b) &= 0\\
\mathrm{mult}(a+1,b) &= \mathrm{mult}(a,b)+b
\end{aligned}
$$

Primitiv rekursive Funktionen

Vorgänger

$\mathrm{vg} = \mathbf{pr}[0^{(0)}, \pi_2^{(2)}]$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{vg}(0) &= 0\\
\mathrm{vg}(a+1) &= a
\end{aligned}
$$

Subtraktion

$\mathrm{sub}' = \mathbf{pr}[\pi_1^{(1)}, \mathrm{vg}\langle\pi_1^{(3)}\rangle]$

wesentliche Rekursion $a-(b+1)=(a-b)-1$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sub}'(0,a) &= a\\
\mathrm{sub}'(b+1,a) &= \mathrm{vg}(\mathrm{sub}'(b,a))
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{sub}(a,b) = \mathrm{sub}'(b,a) \qquad \mathrm{sub} = \mathrm{sub}'\langle\pi_2^{(2)}, \pi_1^{(2)}\rangle$$

Primitiv rekursive Funktionen

Notizen

- Primitiv rekursive Funktionen total
- Beschränkte Rekursion über 1 Argument
- Ähnlichkeit zu Loop-Programmen