

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung zweier Zufallsgrößen X und Y sei durch die folgende Tabelle gegeben.

XY	-1	0	1	
0	$1/8$	$1/4$	$1/8$	$\mathbb{P}(X = 0)$
1	$1/8$	$1/4$	$1/8$	$\mathbb{P}(X = 1)$
	$\mathbb{P}(Y = -1)$	$\mathbb{P}(Y = 0)$	$\mathbb{P}(Y = 1)$	

- (a) Berechnen Sie die Randverteilungen der Zufallsgrößen X und Y .
- (b) Sind X und Y unabhängig? Begründen Sie.
- (c) Bestimmen Sie die Kovarianz von X und Y .

Aufgabe 2. Gegeben sei eine Zufallsvariable X , die Werte $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ annimmt. Ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung ist durch

$$P(X = k) = \frac{c}{k^2},$$

wobei $c > 0$ eine Konstante ist.

Bestimmen Sie den Wert der Konstante c , sodass $P(X = k)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.

Aufgabe 3. Gegeben sei eine 3-dimensionale Zufallsvariable $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$, wobei:

- $X_1 \in \{1, 2\}$,
- $X_2 \in \{1, 2\}$,
- $X_3 \in \{1, 2\}$.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von \mathbf{X} ist wie folgt:

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) &= 0.15, & P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 2) &= 0.15 \\ P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 1) &= 0.15, & P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 2) &= 0.15 \\ P(X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 1) &= 0.1, & P(X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 2) &= 0.1 \\ P(X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 1) &= 0.1, & P(X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 2) &= 0.1 \end{aligned}$$

- (a) Überprüfen Sie, ob die Wahrscheinlichkeitsverteilung korrekt ist (d.h., ob die Summe der Wahrscheinlichkeiten 1 ergibt).
- (b) Bestimmen Sie die Randverteilungen von X_1 , X_2 und X_3 .
- (c) Berechnen Sie den Erwartungswert von X_1 , X_2 und X_3 .