## Aufgabe:

Sei $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ def durch

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3,\ 2x_1 - 2x_3,\ -x_1 - x_2 + 4x_3,\ 3x_1 - x_2)$$

Bestimmen Sie eine Basis von Kern($f$) und von Bild($f$)

## Lösung:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(x) = A \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

$$\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(A) = \mathrm{Lös}(A,0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{IV}+(-3)\cdot\mathrm{I}]{\mathrm{II}+(-2)\cdot\mathrm{I} \quad \mathrm{III}+\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{IV}+(-1)\cdot\mathrm{II}]{\mathrm{III}+\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

$$2x_2 - 6x_3 = 0$$

$$\overset{\mathrm{II}}{\Rightarrow} x_2 = \frac{1}{2}\cdot 6x_3 = 3x_3 \quad \overset{\mathrm{I}}{\Rightarrow} x_1 = x_2 - 2x_3 = 3x_3 - 2x_3 = x_3$$

$$\Rightarrow \mathrm{Kern}(A) = \{(x_3, 3x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \{x_3 \cdot \underbrace{(1,3,1)}_{=:v_1} \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{span}(v_1)$$

$\Rightarrow$ $\{v_1\}$ ist eine Basis von Kern($f$)

Schreibe $A = (a_1\ a_2\ a_3)$. Die Pivotindizes von $A$ sind $j_1 = 1$, $j_2 = 2$.

$\Rightarrow \{a_{j_1}, a_{j_2}\} = \{a_1, a_2\} = \{(1,2,-1,3), (-1,0,-1,-1)\}$ ist eine Basis von Bild($f$).

### Alternativ:

$$\mathrm{Bild}(f) = f(\mathbb{R}^3) = f(\mathrm{span}(e_1,e_2,e_3)) = \mathrm{span}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \mathrm{span}(A\cdot e_1, A\cdot e_2, A\cdot e_3)$$

$$\begin{pmatrix} A\cdot e_1 \\ A\cdot e_2 \\ A\cdot e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}+(-2)\cdot\mathrm{I}]{\mathrm{II}+\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}+3\cdot\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \{(1,2,-1,3), (0,2,-2,2)\}$ ist eine Basis von Bild$(f)$.

Kontrolle:

$\dim \text{Kern}(f) + \dim \text{Bild}(f) = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. ✓

## Aufgabe:

Sei $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ def durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 - x_3 \, , \, 2x_1 + x_3 \, , \, 5x_1 + 2x_2 + 4x_3)$$

Bestimmen Sie eine Basis von Kern($f$) und von Bild($f$)

## Lösung:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow f(x) = A \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

$\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(A) = \mathrm{Lös}(A, 0)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\mathrm{II} + (-2)\cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{III} + (-5)\cdot \mathrm{I}}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 12 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III} + (-3)\cdot \mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\overset{\mathrm{II}}{\Rightarrow} \quad x_2 = -\frac{3}{4} x_3 \overset{\mathrm{I}}{\Rightarrow} x_1 = 2x_2 + x_3 = 2 \cdot \left(-\frac{3}{4} x_3\right) + x_3 = -\frac{1}{2} x_3$$

$$\Rightarrow \mathrm{Kern}(A) = \left\{ \left(-\frac{1}{2} x_3, -\frac{3}{4} x_3, x_3\right) \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, 1\right)}_{=: v_1} \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{span}(v_1)$$

$\Rightarrow \{v_1\}$ ist eine Basis von Kern($f$).

Schreibe $A = (a_1 \; a_2 \; a_3)$. Die Pivotindizes von $A$ sind $j_1 = 1$, $j_2 = 2$.

$\Rightarrow \{a_{j_1}, a_{j_2}\} = \{a_1, a_2\} = \{(1,2,5), (-2,0,2)\}$ ist eine Basis von Bild($f$).

## Kontrolle:

$\dim \mathrm{Kern}(f) + \dim \mathrm{Bild}(f) = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. ✓

Aufgabe:

Sei $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ def durch

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3\,,\ 2x_1 - x_2\,,\ x_1 + x_3)$

Bestimmen Sie eine Basis von Kern($f$) und von Bild($f$)

Lösung:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f(x) = A \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}+(-1)\cdot \mathrm{I}]{\mathrm{II}+(-2)\cdot \mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{III}]{-1\cdot \mathrm{III}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}+3\cdot \mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Rang}(A) = 3 \quad \Rightarrow \mathrm{Bild}(f) = \mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow \{e_1, e_2, e_3\}$ ist eine Basis von Bild($f$).

Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen gilt:

$\dim \mathrm{Kern}(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Bild}(f) = 3 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \mathrm{Kern}(f) = \{0\}$

$\Rightarrow \emptyset$ ist eine Basis von Kern($f$).

## Aufgabe:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ def durch

$$f(x,y) = (x-y, y-x, x)$$

Bestimmen Sie eine Basis von Kern($f$) und von Bild($f$)

## Lösung:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(x) = A \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

$$\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(A) = \mathrm{Lös}(A, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}+(-1)\cdot\mathrm{I}]{\mathrm{II}+\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{III}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$\Rightarrow \mathrm{Kern}(A) = \{(0,0)\} \Rightarrow \emptyset$ ist eine Basis von Kern($f$).

Schreibe $A = (a_1\ a_2)$. Die Pivotindizes von $A$ sind $j_1 = 1$, $j_2 = 2$.

$\Rightarrow \{a_{j_1}, a_{j_2}\} = \{a_1, a_2\} = \{(1,-1,1), (-1,1,0)\}$ ist eine Basis von Bild($f$).

## Alternativ:

$$\mathrm{Bild}(f) = f(\mathbb{R}^2) = f(\mathrm{span}(e_1, e_2)) = \mathrm{span}(f(e_1), f(e_2)) = \mathrm{span}(A \cdot e_1, A \cdot e_2)$$

$$\begin{pmatrix} A \cdot e_1 \\ A \cdot e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II}+\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \{(1,-1,1), (0,0,1)\}$ ist eine Basis von Bild($f$).

## Kontrolle:

$\dim \mathrm{Kern}(f) + \dim \mathrm{Bild}(f) = 0 + 2 = 2 = \dim \mathbb{R}^2.$ ✓