Def.:

Sei $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in K^{m\times n}$ und sei $b\in K^m$. Dann heißt

$$
\begin{aligned}
a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n &= b_1\\
a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n &= b_2\\
&\vdots\\
a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

oder in Matrizenschreibweise $A\cdot x = b$

ein lineares Gleichungssystem mit den Koeffizienten a_{ij} $(i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n)$ und den Unbekannten $x_1,\ldots,x_n\in K$ bzw. $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in K^n$.

Das Gleichungssystem heißt homogen, falls $b=0$, sonst inhomogen.

$\text{Lös}(A,b) := \{x\in K^n \mid A\cdot x = b\}$ heißt Lösungsmenge des Gleichungssystems.

$$
(A|b) := \left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\
\vdots & & & & \vdots\\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right)
$$

heißt erweiterte Koeffizientenmatrix.

Darin sind alle Informationen des Gleichungssystems enthalten.

Satz:

Für $A \in K^{m \times n}$ und $b \in K^m$ betrachte man das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$.

(i) Sei (A, b) mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform $(\tilde{A}, \tilde{b})$ gebracht.

Dann gilt $\text{Lös}(A,b) = \text{Lös}(\tilde{A}, \tilde{b})$, $\text{rang}(A) = \text{rang}(\tilde{A})$, $\text{rang}(A,b) = \text{rang}(\tilde{A}, \tilde{b})$

(ii) $A \cdot x = b$ besitzt genau dann mindestens eine Lösung,

wenn $\text{rang}(A,b) = \text{rang}(A)$ ist.

(iii) $A \cdot x = b$ besitzt genau dann für jedes $b \in K^m$ mindestens eine Lösung,

wenn $\text{rang}(A) = m$ ist.

(iv) $A \cdot x = b$ besitzt genau dann für jedes $b \in K^m$ höchstens eine Lösung,

wenn $\text{rang}(A) = n$ ist.

(v) Ist $m = n$, so gilt:

$A \cdot x = b$ besitzt genau dann für jedes $b \in K^n$ genau eine Lösung,

wenn $\text{rang}(A) = n$ ($\Leftrightarrow$ A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$) ist.

In diesem Fall gilt: $x = A^{-1} \cdot b$.

(vi) Ist $x_0 \in \text{Lös}(A,b)$, so gilt $\text{Lös}(A,b) = x_0 + \text{Lös}(A,0)$, wobei

$\text{Lös}(A,0) = \{x \in K^n \mid A \cdot x = 0\} = \text{Kern}(A)$ ein Unterraum vom K^n ist mit

$\dim \text{Kern}(A) = n - \text{rang}(A)$.