Def.:

Sei V ein K-Vektorraum und sei $f: V \to V$ linear.

(i) Sei $\lambda \in K$.

λ heißt Eigenwert von $f :\Leftrightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} : f(v) = \lambda \cdot v$

Jedes $v \in V \setminus \{0\}$ mit $f(v) = \lambda \cdot v$ heißt Eigenvektor von f zum Eigenwert λ.

(ii) Sei $\lambda \in K$.

$\mathrm{Eig}(f, \lambda) := \{ v \in V \mid f(v) = \lambda \cdot v \}$ heißt Eigenraum von f bzgl. λ.

(iii) f heißt diagonalisierbar $:\Leftrightarrow$ Es ex. eine Basis von V bestehend aus Eigenvektoren von f.

Bem.:

(1) $\mathrm{Eig}(f, \lambda) = \{ v \in V \mid f(v) = \lambda \cdot v \} = \{ v \in V \mid f(v) - \lambda \cdot v = 0 \}$

$= \{ v \in V \mid (f - \lambda \cdot id_V)(v) = 0 \} = \mathrm{Kern}(f - \lambda \cdot id_V)$ ist ein Unterraum von V.

(2) $\mathrm{Eig}(f, \lambda) \setminus \{0\} = \{ v \in V \mid v$ ist Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda \}$

(3) Ist $\dim V = n < \infty$, so ist äquivalent:

(i) f ist diagonalisierbar

(ii) Es ex. eine Basis $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ von V und es ex. $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $f(v_j) = \lambda_j \cdot v_j \quad \forall j = 1, \dots, n$

(iii) Es ex. eine Basis $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ von V und es ex. $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Def.:

Sei $A \in K^{n \times n}$ und sei $f: K^n \to K^n$ def. durch $f(x) = A \cdot x$

(i) Sei $\lambda \in K$.

λ heißt Eigenwert von A $:\Leftrightarrow$ λ ist Eigenwert von f $\Leftrightarrow$ $\exists x \in K^n \setminus \{0\}: \underbrace{A \cdot x}_{= f(x)} = \lambda \cdot x$

Jedes $x \in K^n \setminus \{0\}$ mit $A \cdot x = \lambda \cdot x$ heißt Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

(iii) Sei $\lambda \in K$.

$Eig(A, \lambda) := Eig(f, \lambda) = \{x \in K^n \mid A \cdot x = \lambda \cdot x\}$ heißt Eigenraum von A bzgl. λ.

(iv) A heißt diagonalisierbar $:\Leftrightarrow$ f ist diagonalisierbar

Bem.:

(1) $Eig(A, \lambda) = \{x \in K^n \mid A \cdot x = \lambda \cdot x\} = \{x \in K^n \mid A \cdot x - \lambda \cdot E_n \cdot x = 0\}$

$= \{x \in K^n \mid (A - \lambda \cdot E_n) \cdot x = 0\} = Kern(A - \lambda \cdot E_n)$ ist ein Unterraum von K^n.

(2) $Eig(A, \lambda) \setminus \{0\} = \{x \in K^n \mid x$ ist Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda\}$

(3) Es ist äquivalent

(i) A ist diagonalisierbar

(ii) Es ex. eine Basis $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ von K^n und es ex. $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $A \cdot v_j = \lambda_j \cdot v_j \quad \forall j = 1, \dots, n$

Es ex. eine Basis $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ von V und es ex. $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

(iii) Es ex. $T \in GL(n, K)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$: $T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $(*)$

$(*)$ Setze $B' := \{e_1, \dots, e_n\}$. Nach der Transformationsformel gilt:

$$\underbrace{T_B^{B'}}_{= T^{-1}} \cdot \underbrace{M_{B'}^{B'}(f)}_{= A} \cdot \underbrace{T_{B'}^{B}}_{=: T} = M_B^B(f)$$

Wie berechnet man die Eigenwerte von A?

Def.:

Sei $A \in K^{n \times n}$.

$P_A := \chi_A := \det(A - X \cdot E_n) \in K_{\leq n}[x]$

heißt charakteristisches Polynom von A.

Satz:

Sei $A \in K^{n \times n}$ und sei $\lambda \in K$. Dann gilt:

λ ist ein Eigenwert von $A \iff P_A(\lambda) = 0$

(d.h.: Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A.)

Bew.:

$$
\begin{aligned}
\lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A &\iff \exists x \in K^n \setminus \{0\} : A \cdot x = \lambda \cdot x \\
&\iff \mathrm{Eig}(A, \lambda) \neq \{0\} \\
&\iff \dim \mathrm{Kern}(A - \lambda \cdot E_n) = \dim \mathrm{Eig}(A, \lambda) \neq 0 \\
&\iff \mathrm{rang}(A - \lambda \cdot E_n) < n \qquad (n = \dim \mathrm{Kern}(A - \lambda \cdot E_n) + \mathrm{rang}(A - \lambda \cdot E_n)) \\
&\iff A - \lambda \cdot E_n \text{ ist nicht invertierbar} \\
&\iff \det(A - \lambda \cdot E_n) = 0
\end{aligned}
$$

$\square$

Wie berechnet man die Eigenräume von A?

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Eig}(A, \lambda) &= \{x \in K^n \mid A \cdot x = \lambda \cdot x\} = \{x \in K^n \mid A \cdot x - \lambda \cdot E_n \cdot x = 0\} = \{x \in K^n \mid (A - \lambda \cdot E_n) \cdot x = 0\} \\
&= \mathrm{Kern}(A - \lambda \cdot E_n) = \mathrm{Lös}(A - \lambda \cdot E_n, 0)
\end{aligned}
$$

$\mathrm{Eig}(A, \lambda)$ ist also die Lösungsmenge eines homogenen Gleichungssystems. Löse dieses Gleichungssystem!

Def.:

Sei $A \in K^{n \times n}$ und sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A.

(i) Sei $\kappa \in \mathbb{N}$ die Vielfachheit der Nullstelle von P_A.

$\mathrm{alg}(A, \lambda) := \kappa$ heißt algebraische Vielfachheit von λ

(ii) $\mathrm{geom}(A, \lambda) := \dim \mathrm{Eig}(A, \lambda)$ heißt geometrische Vielfachheit von λ.

Satz (Krit. für Diagonalisierbarkeit)

Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann ist äquivalent:

(i) A ist diagonalisierbar

(ii) Es gibt eine Basis von K^n aus Eigenvektoren von A.

(iii) P_A zerfällt über K vollständig in Linearfaktoren

(d.h.: P_A hat mit Vielfachheiten gezählt genau n Nullstellen in K)

und für jeden Eigenwert λ von A gilt: $\mathrm{alg}(A, \lambda) = \mathrm{geom}(A, \lambda)$

(iv) Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ $(1 \leq k \leq n)$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A. Dann gilt:

$$\sum_{j=1}^{k} \dim \mathrm{Eig}(A, \lambda_j) = n$$

(v) Es ex. $T \in GL(n, K), \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$: $T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Bem.:

Man verwendet meistens die Äquivalenz (i) $\Leftrightarrow$ (iii) bzw. (i) $\Leftrightarrow$ (iv)

Kochrezept:

(1) Bestimme das charakteristische Polynom P_A von A: $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E_n)$

(2) Bestimme die Nullstellen von P_A in K (die Eigenwerte von A)

Zerfällt P_A über K nicht vollständig in Linearfaktoren, d.h. hat P_A weniger als n Nullstellen in K (mit Vielfachheiten gezählt), so ist A nicht diagonalisierbar

(3) Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ $(1 \leq k \leq n)$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von P_A (die Eigenwerte von A)

Bestimme für jedes λ_j $(1 \leq j \leq k)$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(A, \lambda_j)$

Beachte dabei:

$$\mathrm{Eig}(A,\lambda) = \{x \in K^n \mid A \cdot x = \lambda \cdot x\} = \{x \in K^n \mid (A - \lambda \cdot E_n) \cdot x = 0\} = \mathrm{Kern}(A - \lambda \cdot E_n) = \mathrm{Lös}(A - \lambda \cdot E_n, 0)$$

Sei $B_1 = \{v_1, \dots, v_{i_1}\}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(A, \lambda_1)$,

sei $B_2 = \{v_{i_1+1}, \dots, v_{i_2}\}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(A, \lambda_2)$,

$\vdots$

sei $B_k = \{v_{i_{k-1}+1}, \dots, v_{i_k}\}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(A, \lambda_k)$

Dann gilt:

(i) A ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ $\mathrm{alg}(A, \lambda_j) = \mathrm{geom}(A, \lambda_j)$ $\forall j = 1, \dots, k$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \underbrace{\dim \mathrm{Eig}(A, \lambda_j)}_{= |B_j|}}_{= i_k} = n$$

(ii) $\mathrm{Eig}(A, \lambda_j) \setminus \{0\} = \{x \in K^n \mid x \text{ ist Eigenvektor von } A \text{ zum Eigenwert } \lambda_j\}$

(4) Ist A diagonalisierbar, so ist $B := B_1 \cup \dots \cup B_k = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von K^n aus Eigenwerten von A.

Setze $T := (v_1 \dots v_n)$ und

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots \lambda_1 & & & & \\ & & \lambda_2 & & & \\ & & & \ddots \lambda_2 & & \\ & & & & \lambda_k & \\ & & & & & \ddots \lambda_k \end{pmatrix} \begin{matrix} \} \, n_1\text{-mal} \\ \\ \} \, n_2\text{-mal} \\ \vdots \\ \} \, n_k\text{-mal} \end{matrix}$$

wobei n_j $(1 \leq j \leq k)$ die Vielfachheit der Nullstelle λ_j ist.

Dann gilt: $T^{-1} \cdot A \cdot T = D$.

$$\left(T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot e_j = T^{-1} \cdot A \cdot v_j = T^{-1} \cdot \lambda_j \cdot v_j = \lambda_j \cdot T^{-1} \cdot v_j = \lambda_j \cdot T^{-1} \cdot T \cdot e_j = \lambda_j \cdot E_n \cdot e_j = \lambda_j \cdot e_j = D \cdot e_j \quad \forall j = 1, \dots, n. \right)$$

Zusatz:

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = D \Rightarrow A = T \cdot D \cdot T^{-1}$$

$$\Rightarrow A^n = \underbrace{T \cdot D \cdot \underbrace{T^{-1} \cdot T}_{= E_n} \cdot D \cdot \underbrace{T^{-1} \cdot T}_{= E_n} \cdot D \cdot T^{-1} \cdot \ldots \cdot T \cdot D \cdot \underbrace{T^{-1} \cdot T}_{= E_n} \cdot D \cdot T^{-1}}_{n\text{-mal}} = T \cdot D^n \cdot T^{-1}$$

Satz (hinreichendes Krit. für Diagonalisierbarkeit)

Sei $A \in K^{n \times n}$.

Es gelte: A hat n paarweise verschiedene Eigenwerte.

Dann gilt: A ist diagonalisierbar.

Satz:

Sei $A \in K^{n \times n}$ und sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A. Dann gilt:

$1 \leq \mathrm{geom}(A, \lambda) \leq \mathrm{alg}(A, \lambda)$

Ist speziell $\mathrm{alg}(A, \lambda) = 1$, so gilt $\mathrm{geom}(A, \lambda) = \mathrm{alg}(A, \lambda)$ $(= 1)$.

Satz:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, d.h. $A^T = A$.

Dann gilt:

Es ex. eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von A.

Insbes. ist A diagonalisierbar.

Praktische Berechnung einer Orthonormalbasis aus Eigenvektoren:

(1) Man bestimme die paarweise verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ $(1 \leq k \leq n)$ von A.

(2) Für jeden Eigenwert λ_j $(1 \leq j \leq k)$ bestimme man eine Basis B_j von $\mathrm{Eig}(A, \lambda_j)$

(3) Für jedes $1 \leq j \leq k$ bestimme man eine Orthonormalbasis B_j' von $\mathrm{Eig}(A, \lambda_j)$.

Dazu orthonormalisiere man die Basis B_j.

(4) $B := B_1' \cup \dots \cup B_k'$ ist eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von A.

Satz:

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$. Sei $f: V \to V$ linear und sei $A := M_B^B(f)$.

Dann gilt:

(i) $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert von A $\iff$ λ ist ein Eigenwert von f

(ii) $x \in K^n$ ist ein Eigenvektor von A $\iff$ $v := K_B^{-1}(x)$ ist ein Eigenvektor von f.

(iii) A ist diagonalisierbar $\iff$ f ist diagonalisierbar

Def.:

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Für jedes $v \in V$ ex. eindeutig bestimmte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$

$K_B : V \to K^n$, $K_B(v) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

K_B ist ein Isom.