UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Vorlesung 11 - Distributive Verbände, allgemeine algebraische Strukturen, Boolesche Algebren

# Diskrete Strukturen (WS 2024-25)

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

1. Wiederholung

2. Unterverbände und isomorphismen

3. Allgemeine algebraische Strukturen

4. Boolesche Algebren - Definition

- eine geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt Verband

- eine geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt Verband gdw.

- eine geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$

- eine geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass

- eine geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ (infimum)

- eine geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ (infimum) und

- eine geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ (infimum) und $x \wedge y$ (supremum)

- eine geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ (infimum) und $x \wedge y$ (supremum) existieren.

- eine geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ (infimum) und $x \wedge y$ (supremum) existieren.

- eine geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ (infimum) und $x \wedge y$ (supremum) existieren. Z.B. $(P(X), \subseteq)$ ist ein Verband.

- eine geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ (infimum) und $x \wedge y$ (supremum) existieren. Z.B. $(P(X), \subseteq)$ ist ein Verband.
- Verband $(M, \leq)$

- eine geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ (infimum) und $x \wedge y$ (supremum) existieren. Z.B. $(P(X), \subseteq)$ ist ein Verband.
- Verband $(M, \leq)$ gibt uns eine Menge mit zwei Operationen

- eine geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ (infimum) und $x \wedge y$ (supremum) existieren. Z.B. $(P(X), \subseteq)$ ist ein Verband.
- Verband $(M, \leq)$ gibt uns eine Menge mit zwei Operationen $(M, \vee, \wedge)$,

- eine geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ (infimum) und $x \wedge y$ (supremum) existieren. Z.B. $(P(X), \subseteq)$ ist ein Verband.
- Verband $(M, \leq)$ gibt uns eine Menge mit zwei Operationen $(M, \vee, \wedge)$, die kommutativ,

- eine geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ (infimum) und $x \wedge y$ (supremum) existieren. Z.B. $(P(X), \subseteq)$ ist ein Verband.
- Verband $(M, \leq)$ gibt uns eine Menge mit zwei Operationen $(M, \vee, \wedge)$, die kommutativ, assoziativ,

- eine geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ (infimum) und $x \wedge y$ (supremum) existieren. Z.B. $(P(X), \subseteq)$ ist ein Verband.
- Verband $(M, \leq)$ gibt uns eine Menge mit zwei Operationen $(M, \vee, \wedge)$, die kommutativ, assoziativ, und absorbtiv sind.

- eine geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ (infimum) und $x \wedge y$ (supremum) existieren. Z.B. $(P(X), \subseteq)$ ist ein Verband.
- Verband $(M, \leq)$ gibt uns eine Menge mit zwei Operationen $(M, \vee, \wedge)$, die kommutativ, assoziativ, und absorbtiv sind. Umgekehrt

- eine geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt **Verband** gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ (infimum) und $x \wedge y$ (supremum) existieren. Z.B. $(P(X), \subseteq)$ ist ein Verband.
- Verband $(M, \leq)$ gibt uns eine Menge mit zwei Operationen $(M, \vee, \wedge)$, die kommutativ, assoziativ, und absorbtiv sind. Umgekehrt jede solche Menge $(M, \vee, \wedge)$

- eine geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ (infimum) und $x \wedge y$ (supremum) existieren. Z.B. $(P(X), \subseteq)$ ist ein Verband.
- Verband $(M, \leq)$ gibt uns eine Menge mit zwei Operationen $(M, \vee, \wedge)$, die kommutativ, assoziativ, und absorbtiv sind. Umgekehrt jede solche Menge $(M, \vee, \wedge)$ gibt uns ein Verband $(M, \leq)$.

- eine geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ (infimum) und $x \wedge y$ (supremum) existieren. Z.B. $(P(X), \subseteq)$ ist ein Verband.
- Verband $(M, \leq)$ gibt uns eine Menge mit zwei Operationen $(M, \vee, \wedge)$, die kommutativ, assoziativ, und absorbtiv sind. Umgekehrt jede solche Menge $(M, \vee, \wedge)$ gibt uns ein Verband $(M, \leq)$. D.H. es gibt zwei äquivalente Wege

- eine geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ (infimum) und $x \wedge y$ (supremum) existieren. Z.B. $(P(X), \subseteq)$ ist ein Verband.
- Verband $(M, \leq)$ gibt uns eine Menge mit zwei Operationen $(M, \vee, \wedge)$, die kommutativ, assoziativ, und absorbtiv sind. Umgekehrt jede solche Menge $(M, \vee, \wedge)$ gibt uns ein Verband $(M, \leq)$. D.H. es gibt zwei äquivalente Wege wie mein ein Verband definieren/betrachten kann.

- Distributive Verbände sind solche wo

- Distributive Verbände sind solche wo  für alle $x, y, z \in M$ gilt

- Distributive Verbände sind solche wo  für alle $x, y, z \in M$ gilt

$$x \wedge (y \vee z) =$$

- Distributive Verbände sind solche wo  für alle $x, y, z \in M$ gilt

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

- Distributive Verbände sind solche wo für alle $x, y, z \in M$ gilt

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

und

- Distributive Verbände sind solche wo für alle $x, y, z \in M$ gilt

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

und

$$x \vee (y \wedge z) =$$

- Distributive Verbände sind solche wo für alle $x, y, z \in M$ gilt

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

und

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

- Distributive Verbände sind solche wo für alle $x, y, z \in M$ gilt

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

und

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

- Total geordnete Mengen,

- Distributive Verbände sind solche wo für alle $x, y, z \in M$ gilt

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

und

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

- Total geordnete Mengen, $(P(X), \subseteq)$

- Distributive Verbände sind solche wo für alle $x, y, z \in M$ gilt

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

 und

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

- Total geordnete Mengen, $(P(X), \subseteq)$ sind distributive Verbände.

- Sei $(V, \vee, \wedge)$ ein Verband.

- Sei $(V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Ein Unterverband

- Sei $(V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Ein Unterverband ist eine Menge $W \subset V$

- Sei $(V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Ein Unterverband ist eine Menge $W \subset V$ mit der Eigenschaft

- Sei $(V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Ein Unterverband ist eine Menge $W \subset V$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in W$

- Sei $(V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Ein Unterverband ist eine Menge $W \subset V$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in W$ haben wir

- Sei $(V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Ein Unterverband ist eine Menge $W \subset V$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in W$ haben wir $x \vee y \in W$

- Sei $(V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Ein Unterverband ist eine Menge $W \subset V$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in W$ haben wir $x \vee y \in W$ und

- Sei $(V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Ein Unterverband ist eine Menge $W \subset V$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in W$ haben wir $x \vee y \in W$ und $x \wedge y \in W$.

- Sei $(V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Ein Unterverband ist eine Menge $W \subset V$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in W$ haben wir $x \vee y \in W$ und $x \wedge y \in W$.
- Ein Unterverband

- Sei $(V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Ein Unterverband ist eine Menge $W \subset V$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in W$ haben wir $x \vee y \in W$ und $x \wedge y \in W$.
- Ein Unterverband von $(P(X), \cap, \cup)$

- Sei $(V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Ein Unterverband ist eine Menge $W \subset V$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in W$ haben wir $x \vee y \in W$ und $x \wedge y \in W$.
- Ein Unterverband von $(P(X), \cap, \cup)$ heißt Mengenverband.

- Sei $(V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Ein Unterverband ist eine Menge $W \subset V$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in W$ haben wir $x \vee y \in W$ und $x \wedge y \in W$.
- Ein Unterverband von $(P(X), \cap, \cup)$ heißt Mengenverband. Mengenverbände sind distributiv.

- Sei $(V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Ein Unterverband ist eine Menge $W \subset V$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in W$ haben wir $x \vee y \in W$ und $x \wedge y \in W$.
- Ein Unterverband von $(P(X), \cap, \cup)$ heißt Mengenverband. Mengenverbände sind distributiv.
- VORSICHT:

- Sei $(V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Ein Unterverband ist eine Menge $W \subset V$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in W$ haben wir $x \vee y \in W$ und $x \wedge y \in W$.
- Ein Unterverband von $(P(X), \cap, \cup)$ heißt Mengenverband. Mengenverbände sind distributiv.
- VORSICHT: Jede Menge $Q \subset P(X)$

- Sei $(V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Ein **Unterverband** ist eine Menge $W \subset V$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in W$ haben wir $x \vee y \in W$ und $x \wedge y \in W$.
- Ein Unterverband von $(P(X), \cap, \cup)$ heißt Mengenverband. Mengenverbände sind distributiv.
- VORSICHT: Jede Menge $Q \subset P(X)$ hat eine Ordnungsrelation

- Sei $(V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Ein Unterverband ist eine Menge $W \subset V$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in W$ haben wir $x \vee y \in W$ und $x \wedge y \in W$.
- Ein Unterverband von $(P(X), \cap, \cup)$ heißt Mengenverband. Mengenverbände sind distributiv.
- VORSICHT: Jede Menge $Q \subset P(X)$ hat eine Ordnungsrelation die sie su einer geordneten Mengen macht.

- Sei $(V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Ein Unterverband ist eine Menge $W \subset V$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in W$ haben wir $x \vee y \in W$ und $x \wedge y \in W$.
- Ein Unterverband von $(P(X), \cap, \cup)$ heißt Mengenverband. Mengenverbände sind distributiv.
- VORSICHT: Jede Menge $Q \subset P(X)$ hat eine Ordnungsrelation die sie su einer geordneten Mengen macht. Manchmanl ist so eine Menge $(Q, \subseteq)$

- Sei $(V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Ein Unterverband ist eine Menge $W \subset V$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in W$ haben wir $x \vee y \in W$ und $x \wedge y \in W$.
- Ein Unterverband von $(P(X), \cap, \cup)$ heißt Mengenverband. Mengenverbände sind distributiv.
- VORSICHT: Jede Menge $Q \subset P(X)$ hat eine Ordnungsrelation die sie su einer geordneten Mengen macht. Manchmanl ist so eine Menge $(Q, \subseteq)$ ein Verband,

- Sei $(V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Ein Unterverband ist eine Menge $W \subset V$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in W$ haben wir $x \vee y \in W$ und $x \wedge y \in W$.
- Ein Unterverband von $(P(X), \cap, \cup)$ heißt Mengenverband. Mengenverbände sind distributiv.
- VORSICHT: Jede Menge $Q \subset P(X)$ hat eine Ordnungsrelation die sie su einer geordneten Mengen macht. Manchmanl ist so eine Menge $(Q, \subseteq)$ ein Verband, aber kein Unterverband.

- Sei $(V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Ein Unterverband ist eine Menge $W \subset V$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in W$ haben wir $x \vee y \in W$ und $x \wedge y \in W$.
- Ein Unterverband von $(P(X), \cap, \cup)$ heißt Mengenverband. Mengenverbände sind distributiv.
- VORSICHT: Jede Menge $Q \subset P(X)$ hat eine Ordnungsrelation die sie su einer geordneten Mengen macht. Manchmanl ist so eine Menge $(Q, \subseteq)$ ein Verband, aber kein Unterverband. Z.B. $Q := \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\}$.

- Sei $(V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Ein Unterverband ist eine Menge $W \subset V$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in W$ haben wir $x \vee y \in W$ und $x \wedge y \in W$.
- Ein Unterverband von $(P(X), \cap, \cup)$ heißt Mengenverband. Mengenverbände sind distributiv.
- VORSICHT: Jede Menge $Q \subset P(X)$ hat eine Ordnungsrelation die sie su einer geordneten Mengen macht. Manchmanl ist so eine Menge $(Q, \subseteq)$ ein Verband, aber kein Unterverband. Z.B. $Q := \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\}$.
    - Es geht darum

- Sei $(V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Ein Unterverband ist eine Menge $W \subset V$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in W$ haben wir $x \vee y \in W$ und $x \wedge y \in W$.
- Ein Unterverband von $(P(X), \cap, \cup)$ heißt Mengenverband. Mengenverbände sind distributiv.
- VORSICHT: Jede Menge $Q \subset P(X)$ hat eine Ordnungsrelation die sie su einer geordneten Mengen macht. Manchmanl ist so eine Menge $(Q, \subseteq)$ ein Verband, aber kein Unterverband. Z.B. $Q := \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\}$.
  - Es geht darum dass die Operationen $\vee$ and $\wedge$

- Sei $(V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Ein Unterverband ist eine Menge $W \subset V$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in W$ haben wir $x \vee y \in W$ und $x \wedge y \in W$.
- Ein Unterverband von $(P(X), \cap, \cup)$ heißt Mengenverband. Mengenverbände sind distributiv.
- VORSICHT: Jede Menge $Q \subset P(X)$ hat eine Ordnungsrelation die sie su einer geordneten Mengen macht. Manchmanl ist so eine Menge $(Q, \subseteq)$ ein Verband, aber kein Unterverband. Z.B. $Q := \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\}$.
  - ▶ Es geht darum dass die Operationen $\vee$ and $\wedge$ müssen in einem Unterverband gleich sein

- Sei $(V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Ein Unterverband ist eine Menge $W \subset V$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in W$ haben wir $x \vee y \in W$ und $x \wedge y \in W$.
- Ein Unterverband von $(P(X), \cap, \cup)$ heißt Mengenverband. Mengenverbände sind distributiv.
- VORSICHT: Jede Menge $Q \subset P(X)$ hat eine Ordnungsrelation die sie su einer geordneten Mengen macht. Manchmanl ist so eine Menge $(Q, \subseteq)$ ein Verband, aber kein Unterverband. Z.B. $Q := \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\}$.
    - ▶ Es geht darum dass die Operationen $\vee$ and $\wedge$ müssen in einem Unterverband gleich sein als im ursprünglichen Verband.

- Sei $(V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Ein Unterverband ist eine Menge $W \subset V$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in W$ haben wir $x \vee y \in W$ und $x \wedge y \in W$.
- Ein Unterverband von $(P(X), \cap, \cup)$ heißt Mengenverband. Mengenverbände sind distributiv.
- VORSICHT: Jede Menge $Q \subset P(X)$ hat eine Ordnungsrelation die sie su einer geordneten Mengen macht. Manchmanl ist so eine Menge $(Q, \subseteq)$ ein Verband, aber kein Unterverband. Z.B. $Q := \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\}$.
    - Es geht darum dass die Operationen $\vee$ and $\wedge$ müssen in einem Unterverband gleich sein als im ursprünglichen Verband.
    - Also $Q$ is zwar ein Verband

- Sei $(V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Ein Unterverband ist eine Menge $W \subset V$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in W$ haben wir $x \vee y \in W$ und $x \wedge y \in W$.
- Ein Unterverband von $(P(X), \cap, \cup)$ heißt Mengenverband. Mengenverbände sind distributiv.
- VORSICHT: Jede Menge $Q \subset P(X)$ hat eine Ordnungsrelation die sie su einer geordneten Mengen macht. Manchmanl ist so eine Menge $(Q, \subseteq)$ ein Verband, aber kein Unterverband. Z.B. $Q := \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\}$.
    - ▶ Es geht darum dass die Operationen $\vee$ and $\wedge$ müssen in einem Unterverband gleich sein als im ursprünglichen Verband.
    - ▶ Also $Q$ is zwar ein Verband aber kein Unterverband von $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$.

- Wir sagen dass

- Wir sagen dass  zwei Verbände

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$ sind isomorph

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$ sind isomorph gdw.

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$ sind isomorph gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$ sind isomorph gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$ sind isomorph gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$ sind isomorph gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$ sind isomorph gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee' \varphi(y)$

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$ sind isomorph gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee' \varphi(y)$ und

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$ sind isomorph gdw. es gibt eine bijektion $\varphi \colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee' \varphi(y)$ und $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge' \varphi(y)$.

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$ sind isomorph gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee' \varphi(y)$ und $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge' \varphi(y)$.
- Äquivalent gesagt,

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$ sind isomorph gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee' \varphi(y)$ und $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge' \varphi(y)$.
- Äquivalent gesagt, zwei Verbände

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$ sind isomorph gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee' \varphi(y)$ und $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge' \varphi(y)$.
- Äquivalent gesagt, zwei Verbände $(V, \geq)$

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$ sind isomorph gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee' \varphi(y)$ und $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge' \varphi(y)$.
- Äquivalent gesagt, zwei Verbände $(V, \geq)$ und

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$ sind isomorph gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee' \varphi(y)$ und $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge' \varphi(y)$.
- Äquivalent gesagt, zwei Verbände $(V, \geq)$ und $(V', \geq')$

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$ sind isomorph gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee' \varphi(y)$ und $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge' \varphi(y)$.
- Äquivalent gesagt, zwei Verbände $(V, \geq)$ und $(V', \geq')$ sind isomporh

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$ sind isomorph gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee' \varphi(y)$ und $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge' \varphi(y)$.
- Äquivalent gesagt, zwei Verbände $(V, \geq)$ und $(V', \geq')$ sind isomporh gdw.

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$ sind isomorph gdw. es gibt eine bijektion $\varphi \colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee' \varphi(y)$ und $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge' \varphi(y)$.
- Äquivalent gesagt, zwei Verbände $(V, \geq)$ und $(V', \geq')$ sind isomporh gdw. es gibt eine bijektion

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$ sind isomorph gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee' \varphi(y)$ und $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge' \varphi(y)$.
- Äquivalent gesagt, zwei Verbände $(V, \geq)$ und $(V', \geq')$ sind isomporh gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$ sind isomorph gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee' \varphi(y)$ und $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge' \varphi(y)$.
- Äquivalent gesagt, zwei Verbände $(V, \geq)$ und $(V', \geq')$ sind isomporh gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$ sind isomorph gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee' \varphi(y)$ und $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge' \varphi(y)$.
- Äquivalent gesagt, zwei Verbände $(V, \geq)$ und $(V', \geq')$ sind isomporh gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$ sind isomorph gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee' \varphi(y)$ und $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge' \varphi(y)$.
- Äquivalent gesagt, zwei Verbände $(V, \geq)$ und $(V', \geq')$ sind isomporh gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$ sind isomorph gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee' \varphi(y)$ und $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge' \varphi(y)$.
- Äquivalent gesagt, zwei Verbände $(V, \geq)$ und $(V', \geq')$ sind isomporh gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $x \leq y \iff \varphi(x) \leq' \varphi(y)$.

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$ sind isomorph gdw. es gibt eine bijektion $\varphi \colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee' \varphi(y)$ und $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge' \varphi(y)$.

- Äquivalent gesagt, zwei Verbände $(V, \geq)$ und $(V', \geq')$ sind isomporh gdw. es gibt eine bijektion $\varphi \colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $x \leq y \iff \varphi(x) \leq' \varphi(y)$.

- Noch anders, äquivalent, gesagt,

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$ sind isomorph gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee' \varphi(y)$ und $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge' \varphi(y)$.
- Äquivalent gesagt, zwei Verbände $(V, \geq)$ und $(V', \geq')$ sind isomporh gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $x \leq y \iff \varphi(x) \leq' \varphi(y)$.
- Noch anders, äquivalent, gesagt, zwei Verbände sind isomorph,

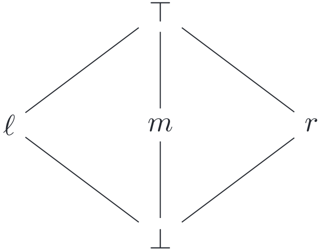
- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$ sind isomorph gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee' \varphi(y)$ und $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge' \varphi(y)$.
- Äquivalent gesagt, zwei Verbände $(V, \geq)$ und $(V', \geq')$ sind isomporh gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $x \leq y \iff \varphi(x) \leq' \varphi(y)$.
- Noch anders, äquivalent, gesagt, zwei Verbände sind isomorph, wenn sie “gleiche” Hasse-diagramme haben,

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$ sind isomorph gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee' \varphi(y)$ und $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge' \varphi(y)$.
- Äquivalent gesagt, zwei Verbände $(V, \geq)$ und $(V', \geq')$ sind isomporh gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $x \leq y \iff \varphi(x) \leq' \varphi(y)$.
- Noch anders, äquivalent, gesagt, zwei Verbände sind isomorph, wenn sie "gleiche" Hasse-diagramme haben, wobei "gleiche" bedeutet

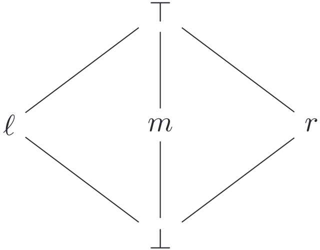
- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$ sind isomorph gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee' \varphi(y)$ und $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge' \varphi(y)$.
- Äquivalent gesagt, zwei Verbände $(V, \geq)$ und $(V', \geq')$ sind isomporh gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $x \leq y \iff \varphi(x) \leq' \varphi(y)$.
- Noch anders, äquivalent, gesagt, zwei Verbände sind isomorph, wenn sie "gleiche" Hasse-diagramme haben, wobei "gleiche" bedeutet dass der einzig mögliche Unterschied

- Wir sagen dass zwei Verbände $(V, \vee, \wedge)$ und $(V', \vee', \wedge')$ sind isomorph gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee' \varphi(y)$ und $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge' \varphi(y)$.
- Äquivalent gesagt, zwei Verbände $(V, \geq)$ und $(V', \geq')$ sind isomporh gdw. es gibt eine bijektion $\varphi\colon V \to V'$ mit der Eigenschaft dass für alle $x, y \in V$ haben wir $x \leq y \iff \varphi(x) \leq' \varphi(y)$.
- Noch anders, äquivalent, gesagt, zwei Verbände sind isomorph, wenn sie “gleiche” Hasse-diagramme haben, wobei “gleiche” bedeutet dass der einzig mögliche Unterschied sind die Namen von Knoten.

- nicht-distributiver Verband $M_3$:

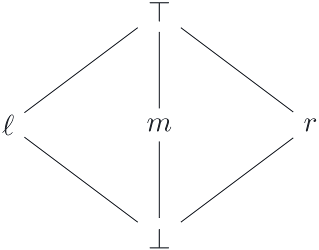


- nicht-distributiver Verband $M_3$:



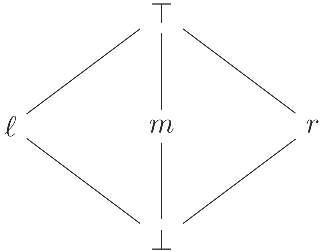

- $\ell \vee (m \wedge r) = l$

- nicht-distributiver Verband $M_3$:



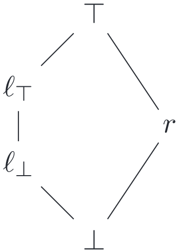

- $\ell \vee (m \wedge r) = l$ und

- nicht-distributiver Verband $M_3$:

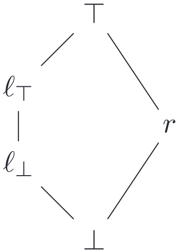



- $\ell \vee (m \wedge r) = l$ und $(\ell \vee m) \wedge (\ell \vee r) = \top$.

- nicht-distributiver Verband $N_5$:

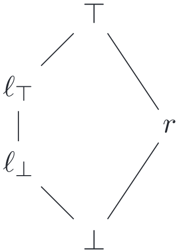


- nicht-distributiver Verband $N_5$:



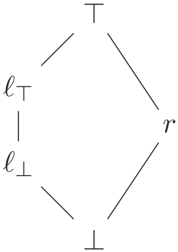

- $\ell_\top \wedge (\ell_\bot \vee r) = \ell_\top$

- nicht-distributiver Verband $N_5$:



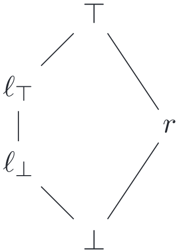

- $\ell_\top \wedge (\ell_\perp \vee r) = \ell_\top$

- nicht-distributiver Verband $N_5$:




- $\ell_\top \wedge (\ell_\bot \vee r) = \ell_\top$ und

- nicht-distributiver Verband $N_5$:




- $\ell_\top \wedge (\ell_\bot \vee r) = \ell_\top$ und $(\ell_\top \wedge \ell_\bot) \vee (\ell_\top \wedge r) = \ell_\bot$.

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband.

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.**

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.**

- Wir zeigen in der Vorlesung nur eine,

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.**

- Wir zeigen in der Vorlesung nur eine, die “einfache”, Richtung.

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.**

- Wir zeigen in der Vorlesung nur eine, die “einfache”, Richtung. D.h.

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.**

- Wir zeigen in der Vorlesung nur eine, die "einfache", Richtung. D.h. wir nehmen an,

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.**

- Wir zeigen in der Vorlesung nur eine, die “einfache”, Richtung. D.h. wir nehmen an, dass es gibt ein Unterverband von $\mathcal{V}$,

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.**

- Wir zeigen in der Vorlesung nur eine, die “einfache”, Richtung. D.h. wir nehmen an, dass es gibt ein Unterverband von $\mathcal{V}$, der entweder zu $M_3$

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.**

- Wir zeigen in der Vorlesung nur eine, die “einfache”, Richtung. D.h. wir nehmen an, dass es gibt ein Unterverband von $\mathcal{V}$, der entweder zu $M_3$ oder zu $N_5$

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.**

- Wir zeigen in der Vorlesung nur eine, die "einfache", Richtung. D.h. wir nehmen an, dass es gibt ein Unterverband von $\mathcal{V}$, der entweder zu $M_3$ oder zu $N_5$ isomorph ist.

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.**

- Wir zeigen in der Vorlesung nur eine, die “einfache”, Richtung. D.h. wir nehmen an, dass es gibt ein Unterverband von $\mathcal{V}$, der entweder zu $M_3$ oder zu $N_5$ isomorph ist.
- Für die andere Richtung,

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.**

- Wir zeigen in der Vorlesung nur eine, die “einfache”, Richtung. D.h. wir nehmen an, dass es gibt ein Unterverband von $\mathcal{V}$, der entweder zu $M_3$ oder zu $N_5$ isomorph ist.
- Für die andere Richtung, sehe Skript.

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.**

- Wir zeigen in der Vorlesung nur eine, die "einfache", Richtung. D.h. wir nehmen an, dass es gibt ein Unterverband von $\mathcal{V}$, der entweder zu $M_3$ oder zu $N_5$ isomorph ist.
- Für die andere Richtung, sehe Skript.
- Sei $U \subseteq V$ eine Teilmenge,

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.**

- Wir zeigen in der Vorlesung nur eine, die "einfache", Richtung. D.h. wir nehmen an, dass es gibt ein Unterverband von $\mathcal{V}$, der entweder zu $M_3$ oder zu $N_5$ isomorph ist.
- Für die andere Richtung, sehe Skript.
- Sei $U \subseteq V$ eine Teilmenge, die ein Unterverband von $V$ ist,

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.**

- Wir zeigen in der Vorlesung nur eine, die "einfache", Richtung. D.h. wir nehmen an, dass es gibt ein Unterverband von $\mathcal{V}$, der entweder zu $M_3$ oder zu $N_5$ isomorph ist.
- Für die andere Richtung, sehe Skript.
- Sei $U \subseteq V$ eine Teilmenge, die ein Unterverband von $V$ ist, und der isomorph zu $M_3$ ist.

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.**

- Wir zeigen in der Vorlesung nur eine, die "einfache", Richtung. D.h. wir nehmen an, dass es gibt ein Unterverband von $\mathcal{V}$, der entweder zu $M_3$ oder zu $N_5$ isomorph ist.
- Für die andere Richtung, sehe Skript.
- Sei $U \subseteq V$ eine Teilmenge, die ein Unterverband von $V$ ist, und der isomorph zu $M_3$ ist.
- Sei $\varphi\colon V \to M_3$ ein Isomorphismus.

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.**

- Wir zeigen in der Vorlesung nur eine, die "einfache", Richtung. D.h. wir nehmen an, dass es gibt ein Unterverband von $\mathcal{V}$, der entweder zu $M_3$ oder zu $N_5$ isomorph ist.
- Für die andere Richtung, sehe Skript.
- Sei $U \subseteq V$ eine Teilmenge, die ein Unterverband von $V$ ist, und der isomorph zu $M_3$ ist.
- Sei $\varphi\colon V \to M_3$ ein Isomorphismus. Seien $x := \varphi^{-1}(\ell)$,

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.**

- Wir zeigen in der Vorlesung nur eine, die “einfache”, Richtung. D.h. wir nehmen an, dass es gibt ein Unterverband von $\mathcal{V}$, der entweder zu $M_3$ oder zu $N_5$ isomorph ist.
- Für die andere Richtung, sehe Skript.
- Sei $U \subseteq V$ eine Teilmenge, die ein Unterverband von $V$ ist, und der isomorph zu $M_3$ ist.
- Sei $\varphi\colon V \to M_3$ ein Isomorphismus. Seien $x := \varphi^{-1}(\ell)$, $y := \varphi^{-1}(m)$,

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.**

- Wir zeigen in der Vorlesung nur eine, die “einfache”, Richtung. D.h. wir nehmen an, dass es gibt ein Unterverband von $\mathcal{V}$, der entweder zu $M_3$ oder zu $N_5$ isomorph ist.
- Für die andere Richtung, sehe Skript.
- Sei $U \subseteq V$ eine Teilmenge, die ein Unterverband von $V$ ist, und der isomorph zu $M_3$ ist.
- Sei $\varphi\colon V \to M_3$ ein Isomorphismus. Seien $x := \varphi^{-1}(\ell)$, $y := \varphi^{-1}(m)$, $z := \varphi^{-1}(r)$.

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.**

- Wir zeigen in der Vorlesung nur eine, die “einfache”, Richtung. D.h. wir nehmen an, dass es gibt ein Unterverband von $\mathcal{V}$, der entweder zu $M_3$ oder zu $N_5$ isomorph ist.
- Für die andere Richtung, sehe Skript.
- Sei $U \subseteq V$ eine Teilmenge, die ein Unterverband von $V$ ist, und der isomorph zu $M_3$ ist.
- Sei $\varphi\colon V \to M_3$ ein Isomorphismus. Seien $x := \varphi^{-1}(\ell)$, $y := \varphi^{-1}(m)$, $z := \varphi^{-1}(r)$.
- Wir sehen jetzt dass

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.**

- Wir zeigen in der Vorlesung nur eine, die "einfache", Richtung. D.h. wir nehmen an, dass es gibt ein Unterverband von $\mathcal{V}$, der entweder zu $M_3$ oder zu $N_5$ isomorph ist.
- Für die andere Richtung, sehe Skript.
- Sei $U \subseteq V$ eine Teilmenge, die ein Unterverband von $V$ ist, und der isomorph zu $M_3$ ist.
- Sei $\varphi \colon V \to M_3$ ein Isomorphismus. Seien $x := \varphi^{-1}(\ell)$, $y := \varphi^{-1}(m)$, $z := \varphi^{-1}(r)$.
- Wir sehen jetzt dass

$$x \vee (y \wedge z)$$

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.**

- Wir zeigen in der Vorlesung nur eine, die “einfache”, Richtung. D.h. wir nehmen an, dass es gibt ein Unterverband von $\mathcal{V}$, der entweder zu $M_3$ oder zu $N_5$ isomorph ist.
- Für die andere Richtung, sehe Skript.
- Sei $U \subseteq V$ eine Teilmenge, die ein Unterverband von $V$ ist, und der isomorph zu $M_3$ ist.
- Sei $\varphi\colon V \to M_3$ ein Isomorphismus. Seien $x := \varphi^{-1}(\ell)$, $y := \varphi^{-1}(m)$, $z := \varphi^{-1}(r)$.
- Wir sehen jetzt dass

$$x \vee (y \wedge z) \neq$$

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.**

- Wir zeigen in der Vorlesung nur eine, die “einfache”, Richtung. D.h. wir nehmen an, dass es gibt ein Unterverband von $\mathcal{V}$, der entweder zu $M_3$ oder zu $N_5$ isomorph ist.
- Für die andere Richtung, sehe Skript.
- Sei $U \subseteq V$ eine Teilmenge, die ein Unterverband von $V$ ist, und der isomorph zu $M_3$ ist.
- Sei $\varphi\colon V \to M_3$ ein Isomorphismus. Seien $x := \varphi^{-1}(\ell)$, $y := \varphi^{-1}(m)$, $z := \varphi^{-1}(r)$.
- Wir sehen jetzt dass

$$x \vee (y \wedge z) \neq (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband.

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.** (Fortsetzung)

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.** (Fortsetzung) In der Tat,

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.** (Fortsetzung) In der Tat,

$$\varphi(x \vee (y \wedge z))$$

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.** (Fortsetzung) In der Tat,

$$\varphi(x \vee (y \wedge z)) =$$

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.** (Fortsetzung) In der Tat,

$$\varphi(x \vee (y \wedge z)) = \ell \vee (m \wedge r)$$

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.** (Fortsetzung) In der Tat,

$$\varphi(x \vee (y \wedge z)) = \ell \vee (m \wedge r) =$$

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.** (Fortsetzung) In der Tat,

$$\varphi(x \vee (y \wedge z)) = \ell \vee (m \wedge r) = \ell$$

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.** (Fortsetzung) In der Tat,

$$\varphi(x \vee (y \wedge z)) = \ell \vee (m \wedge r) = \ell$$

und

$$\varphi((x \vee y) \wedge (x \vee z))$$

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.** (Fortsetzung) In der Tat,

$$\varphi(x \vee (y \wedge z)) = \ell \vee (m \wedge r) = \ell$$

und

$$\varphi((x \vee y) \wedge (x \vee z)) =$$

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.** (Fortsetzung) In der Tat,

$$\varphi(x \vee (y \wedge z)) = \ell \vee (m \wedge r) = \ell$$

und

$$\varphi((x \vee y) \wedge (x \vee z)) = (\ell \vee m) \wedge (\ell \vee r)$$

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.** (Fortsetzung) In der Tat,

$$\varphi(x \vee (y \wedge z)) = \ell \vee (m \wedge r) = \ell$$

und

$$\varphi((x \vee y) \wedge (x \vee z)) = (\ell \vee m) \wedge (\ell \vee r) =$$

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.** (Fortsetzung) In der Tat,

$$\varphi(x \vee (y \wedge z)) = \ell \vee (m \wedge r) = \ell$$

und

$$\varphi((x \vee y) \wedge (x \vee z)) = (\ell \vee m) \wedge (\ell \vee r) = \top.$$

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.** (Fortsetzung) In der Tat,

$$\varphi(x \vee (y \wedge z)) = \ell \vee (m \wedge r) = \ell$$

und

$$\varphi((x \vee y) \wedge (x \vee z)) = (\ell \vee m) \wedge (\ell \vee r) = \top.$$

- Ähnilich beweisen wir

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.** (Fortsetzung) In der Tat,

$$\varphi(x \vee (y \wedge z)) = \ell \vee (m \wedge r) = \ell$$

und

$$\varphi((x \vee y) \wedge (x \vee z)) = (\ell \vee m) \wedge (\ell \vee r) = \top.$$

- Ähnilich beweisen wir dass wenn $U$ isomorph zu $N_5$ ist

**Satz.** Sei $\mathcal{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein Verband. Dann ist $\mathcal{V}$ distributiv gdw. kein Unterverband von $\mathcal{V}$ isomorph zu den Verbänden $M_3$ oder $N_5$ ist.

**Beweis.** (Fortsetzung) In der Tat,

$$\varphi(x \vee (y \wedge z)) = \ell \vee (m \wedge r) = \ell$$

und

$$\varphi((x \vee y) \wedge (x \vee z)) = (\ell \vee m) \wedge (\ell \vee r) = \top.$$

- Ähnilich beweisen wir dass wenn $U$ isomorph zu $N_5$ ist dann auch $\mathcal{V}$ nicht distributivist.

- Motivation:

- Motivation: $(U, \leq)$,

- Motivation: $(U, \leq)$, $(U, \vee, \wedge)$,

- **Motivation:** $(U, \leq)$, $(U, \vee, \wedge)$, $(U, \equiv)$,...

- Motivation: $(U, \leq)$, $(U, \vee, \wedge)$, $(U, \equiv)$,...
- In algemeinen,

- Motivation: $(U, \leq)$, $(U, \vee, \wedge)$, $(U, \equiv)$,...
- In algemeinen, wenn wir eine algebraische Struktur definieren,

- Motivation: $(U, \leq)$, $(U, \vee, \wedge)$, $(U, \equiv)$,...
- In algemeinen, wenn wir eine algebraische Struktur definieren, benutzen wir

- Motivation: $(U, \leq)$, $(U, \vee, \wedge)$, $(U, \equiv)$,...
- In algemeinen, wenn wir eine algebraische Struktur definieren, benutzen wir
  - $R_1, \ldots, R_k \subseteq U \times U$

- Motivation: $(U, \leq)$, $(U, \vee, \wedge)$, $(U, \equiv)$,...
- In algemeinen, wenn wir eine algebraische Struktur definieren, benutzen wir
  - $R_1, \ldots, R_k \subseteq U \times U$ Relationen auf $U$,

- Motivation: $(U, \leq)$, $(U, \vee, \wedge)$, $(U, \equiv)$,...
- In algemeinen, wenn wir eine algebraische Struktur definieren, benutzen wir
  - $R_1, \ldots, R_k \subseteq U \times U$ Relationen auf $U$,
  - $f_1, \ldots, f_\ell \colon U \times U \to U$

- Motivation: $(U, \leq)$, $(U, \vee, \wedge)$, $(U, \equiv)$,...
- In algemeinen, wenn wir eine algebraische Struktur definieren, benutzen wir
  - $R_1, \ldots, R_k \subseteq U \times U$ Relationen auf $U$,
  - $f_1, \ldots, f_\ell \colon U \times U \to U$ binäre (zweistellige) Funktionen auf $U$,

- Motivation: $(U, \leq)$, $(U, \vee, \wedge)$, $(U, \equiv)$,...
- In algemeinen, wenn wir eine algebraische Struktur definieren, benutzen wir
  - $R_1, \ldots, R_k \subseteq U \times U$ Relationen auf $U$,
  - $f_1, \ldots, f_\ell \colon U \times U \to U$ binäre (zweistellige) Funktionen auf $U$,
  - $g_1, \ldots, g_m \colon U \to U$

- Motivation: $(U, \leq)$, $(U, \vee, \wedge)$, $(U, \equiv)$,...
- In algemeinen, wenn wir eine algebraische Struktur definieren, benutzen wir
  - $R_1, \ldots, R_k \subseteq U \times U$ Relationen auf $U$,
  - $f_1, \ldots, f_\ell \colon U \times U \to U$ binäre (zweistellige) Funktionen auf $U$,
  - $g_1, \ldots, g_m \colon U \to U$ unäre (einstellige) Funktionen auf $U$

- Motivation: $(U, \leq)$, $(U, \vee, \wedge)$, $(U, \equiv)$,...
- In algemeinen, wenn wir eine algebraische Struktur definieren, benutzen wir
  - $R_1, \ldots, R_k \subseteq U \times U$ Relationen auf $U$,
  - $f_1, \ldots, f_\ell \colon U \times U \to U$ binäre (zweistellige) Funktionen auf $U$,
  - $g_1, \ldots, g_m \colon U \to U$ unäre (einstellige) Funktionen auf $U$ und

- Motivation: $(U, \leq)$, $(U, \vee, \wedge)$, $(U, \equiv)$,...
- In algemeinen, wenn wir eine algebraische Struktur definieren, benutzen wir
  - $R_1, \ldots, R_k \subseteq U \times U$ Relationen auf $U$,
  - $f_1, \ldots, f_\ell \colon U \times U \to U$ binäre (zweistellige) Funktionen auf $U$,
  - $g_1, \ldots, g_m \colon U \to U$ unäre (einstellige) Funktionen auf $U$ und
  - $c_1, \ldots, c_n \in U$

- Motivation: $(U, \leq)$, $(U, \vee, \wedge)$, $(U, \equiv)$,...
- In algemeinen, wenn wir eine algebraische Struktur definieren, benutzen wir
  - $R_1, \ldots, R_k \subseteq U \times U$ Relationen auf $U$,
  - $f_1, \ldots, f_\ell \colon U \times U \to U$ binäre (zweistellige) Funktionen auf $U$,
  - $g_1, \ldots, g_m \colon U \to U$ unäre (einstellige) Funktionen auf $U$ und
  - $c_1, \ldots, c_n \in U$ Elemente

- Motivation: $(U, \leq)$, $(U, \vee, \wedge)$, $(U, \equiv)$,...
- In algemeinen, wenn wir eine algebraische Struktur definieren, benutzen wir
  - $R_1, \ldots, R_k \subseteq U \times U$ Relationen auf $U$,
  - $f_1, \ldots, f_\ell \colon U \times U \to U$ binäre (zweistellige) Funktionen auf $U$,
  - $g_1, \ldots, g_m \colon U \to U$ unäre (einstellige) Funktionen auf $U$ und
  - $c_1, \ldots, c_n \in U$ Elemente (auch: Konstanten)

- Motivation: $(U, \leq)$, $(U, \vee, \wedge)$, $(U, \equiv)$,...
- In algemeinen, wenn wir eine algebraische Struktur definieren, benutzen wir
  - $R_1, \ldots, R_k \subseteq U \times U$ Relationen auf $U$,
  - $f_1, \ldots, f_\ell \colon U \times U \to U$ binäre (zweistellige) Funktionen auf $U$,
  - $g_1, \ldots, g_m \colon U \to U$ unäre (einstellige) Funktionen auf $U$ und
  - $c_1, \ldots, c_n \in U$ Elemente (auch: Konstanten) von $U$.

- Motivation: $(U, \leq)$, $(U, \vee, \wedge)$, $(U, \equiv)$,...
- In algemeinen, wenn wir eine algebraische Struktur definieren, benutzen wir
  - $R_1, \ldots, R_k \subseteq U \times U$ Relationen auf $U$,
  - $f_1, \ldots, f_\ell \colon U \times U \to U$ binäre (zweistellige) Funktionen auf $U$,
  - $g_1, \ldots, g_m \colon U \to U$ unäre (einstellige) Funktionen auf $U$ und
  - $c_1, \ldots, c_n \in U$ Elemente (auch: Konstanten) von $U$.
- Wir können so eine algebraische Struktur

- Motivation: $(U, \leq)$, $(U, \vee, \wedge)$, $(U, \equiv)$,...
- In algemeinen, wenn wir eine algebraische Struktur definieren, benutzen wir
  - $R_1, \ldots, R_k \subseteq U \times U$ Relationen auf $U$,
  - $f_1, \ldots, f_\ell \colon U \times U \to U$ binäre (zweistellige) Funktionen auf $U$,
  - $g_1, \ldots, g_m \colon U \to U$ unäre (einstellige) Funktionen auf $U$ und
  - $c_1, \ldots, c_n \in U$ Elemente (auch: Konstanten) von $U$.
- Wir können so eine algebraische Struktur schreiben als
  $(U,$

- Motivation: $(U, \leq)$, $(U, \vee, \wedge)$, $(U, \equiv)$,...
- In algemeinen, wenn wir eine algebraische Struktur definieren, benutzen wir
  - $R_1, \ldots, R_k \subseteq U \times U$ Relationen auf $U$,
  - $f_1, \ldots, f_\ell \colon U \times U \to U$ binäre (zweistellige) Funktionen auf $U$,
  - $g_1, \ldots, g_m \colon U \to U$ unäre (einstellige) Funktionen auf $U$ und
  - $c_1, \ldots, c_n \in U$ Elemente (auch: Konstanten) von $U$.
- Wir können so eine algebraische Struktur schreiben als
  $(U, \langle R_1, \ldots R_k \rangle,$

- Motivation: $(U, \leq)$, $(U, \vee, \wedge)$, $(U, \equiv)$,...
- In algemeinen, wenn wir eine algebraische Struktur definieren, benutzen wir
  - $R_1, \ldots, R_k \subseteq U \times U$ Relationen auf $U$,
  - $f_1, \ldots, f_\ell \colon U \times U \to U$ binäre (zweistellige) Funktionen auf $U$,
  - $g_1, \ldots, g_m \colon U \to U$ unäre (einstellige) Funktionen auf $U$ und
  - $c_1, \ldots, c_n \in U$ Elemente (auch: Konstanten) von $U$.
- Wir können so eine algebraische Struktur schreiben als
  $\big(U, \langle R_1, \ldots R_k \rangle, \langle f_1, \ldots, f_l \rangle,$

- Motivation: $(U, \leq)$, $(U, \vee, \wedge)$, $(U, \equiv)$,...
- In algemeinen, wenn wir eine algebraische Struktur definieren, benutzen wir
  - $R_1, \ldots, R_k \subseteq U \times U$ Relationen auf $U$,
  - $f_1, \ldots, f_\ell \colon U \times U \to U$ binäre (zweistellige) Funktionen auf $U$,
  - $g_1, \ldots, g_m \colon U \to U$ unäre (einstellige) Funktionen auf $U$ und
  - $c_1, \ldots, c_n \in U$ Elemente (auch: Konstanten) von $U$.
- Wir können so eine algebraische Struktur schreiben als $(U, \langle R_1, \ldots R_k \rangle, \langle f_1, \ldots, f_l \rangle, \langle g_1, \ldots, g_m \rangle,$

- Motivation: $(U, \leq)$, $(U, \vee, \wedge)$, $(U, \equiv)$,...
- In algemeinen, wenn wir eine algebraische Struktur definieren, benutzen wir
  - $R_1, \ldots, R_k \subseteq U \times U$ Relationen auf $U$,
  - $f_1, \ldots, f_\ell \colon U \times U \to U$ binäre (zweistellige) Funktionen auf $U$,
  - $g_1, \ldots, g_m \colon U \to U$ unäre (einstellige) Funktionen auf $U$ und
  - $c_1, \ldots, c_n \in U$ Elemente (auch: Konstanten) von $U$.
- Wir können so eine algebraische Struktur schreiben als $\big(U, \langle R_1, \ldots R_k \rangle, \langle f_1, \ldots, f_l \rangle, \langle g_1, \ldots, g_m \rangle, \langle c_1, \ldots, c_n \rangle\big)$.

- Motivation: $(U, \leq)$, $(U, \vee, \wedge)$, $(U, \equiv)$,...
- In algemeinen, wenn wir eine algebraische Struktur definieren, benutzen wir
  - $R_1, \ldots, R_k \subseteq U \times U$ Relationen auf $U$,
  - $f_1, \ldots, f_\ell \colon U \times U \to U$ binäre (zweistellige) Funktionen auf $U$,
  - $g_1, \ldots, g_m \colon U \to U$ unäre (einstellige) Funktionen auf $U$ und
  - $c_1, \ldots, c_n \in U$ Elemente (auch: Konstanten) von $U$.
- Wir können so eine algebraische Struktur schreiben als $\left(U, \langle R_1, \ldots R_k \rangle, \langle f_1, \ldots, f_l \rangle, \langle g_1, \ldots, g_m \rangle, \langle c_1, \ldots, c_n \rangle\right)$. Wir sagen

- Motivation: $(U, \leq)$, $(U, \vee, \wedge)$, $(U, \equiv)$,...
- In algemeinen, wenn wir eine algebraische Struktur definieren, benutzen wir
  - $R_1, \ldots, R_k \subseteq U \times U$ Relationen auf $U$,
  - $f_1, \ldots, f_\ell \colon U \times U \to U$ binäre (zweistellige) Funktionen auf $U$,
  - $g_1, \ldots, g_m \colon U \to U$ unäre (einstellige) Funktionen auf $U$ und
  - $c_1, \ldots, c_n \in U$ Elemente (auch: Konstanten) von $U$.
- Wir können so eine algebraische Struktur schreiben als $\big(U, \langle R_1, \ldots R_k\rangle, \langle f_1, \ldots, f_l\rangle, \langle g_1, \ldots, g_m\rangle, \langle c_1, \ldots, c_n\rangle\big)$. Wir sagen dass sie des Typs

- Motivation: $(U, \leq)$, $(U, \vee, \wedge)$, $(U, \equiv)$,...
- In algemeinen, wenn wir eine algebraische Struktur definieren, benutzen wir
  - $R_1, \ldots, R_k \subseteq U \times U$ Relationen auf $U$,
  - $f_1, \ldots, f_\ell : U \times U \to U$ binäre (zweistellige) Funktionen auf $U$,
  - $g_1, \ldots, g_m : U \to U$ unäre (einstellige) Funktionen auf $U$ und
  - $c_1, \ldots, c_n \in U$ Elemente (auch: Konstanten) von $U$.
- Wir können so eine algebraische Struktur schreiben als $(U, \langle R_1, \ldots R_k \rangle, \langle f_1, \ldots, f_l \rangle, \langle g_1, \ldots, g_m \rangle, \langle c_1, \ldots, c_n \rangle)$. Wir sagen dass sie des Typs $(k,\ l,\ m,\ n)$ ist.

- Jede Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $M$

- Jede Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $M$ liefert eine algebraische Struktur

- Jede Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $M$ liefert eine algebraische Struktur $(M, \equiv)$

- Jede Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $M$ liefert eine algebraische Struktur $(M, \equiv) =$

- Jede Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $M$ liefert eine algebraische Struktur $(M, \equiv) = \big(M, \langle \equiv \rangle, \langle\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle\big)$

- Jede Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $M$ liefert eine algebraische Struktur $(M, \equiv) = \big(M, \langle\equiv\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle\big)$ des Typs $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$.

- Jede Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $M$ liefert eine algebraische Struktur $(M, \equiv) = \big(M, \langle\equiv\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle\big)$ des Typs $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$.
- Jede teilweise geordnete Menge $(M, \preceq)$

- Jede Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $M$ liefert eine algebraische Struktur $(M, \equiv) = \big(M, \langle\equiv\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle\big)$ des Typs $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$.
- Jede teilweise geordnete Menge $(M, \preceq)$ mit einer Relation $\preceq\ \subseteq M \times M$

- Jede Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $M$ liefert eine algebraische Struktur $(M, \equiv) = \big(M, \langle\equiv\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle\big)$ des Typs $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$.
- Jede teilweise geordnete Menge $(M, \preceq)$ mit einer Relation $\preceq\ \subseteq M \times M$ ist eine algebraische Struktur des Typs $(1, 0, 0, 0)$.

- Jede Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $M$ liefert eine algebraische Struktur $(M, \equiv) = \big(M, \langle\equiv\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle\big)$ des Typs $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$.
- Jede teilweise geordnete Menge $(M, \preceq)$ mit einer Relation $\preceq\ \subseteq M \times M$ ist eine algebraische Struktur des Typs $(1, 0, 0, 0)$.
- Jede Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$

- Jede Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $M$ liefert eine algebraische Struktur $(M, \equiv) = \big(M, \langle\equiv\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle\big)$ des Typs $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$.
- Jede teilweise geordnete Menge $(M, \preceq)$ mit einer Relation $\preceq\ \subseteq M \times M$ ist eine algebraische Struktur des Typs $(1, 0, 0, 0)$.
- Jede Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ liefert eine algebraische Struktur $\big(\mathcal{P}(M), \subseteq, \cup, \cap, \cdot^c, \emptyset, M\big)$

- Jede Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $M$ liefert eine algebraische Struktur $(M, \equiv) = \big(M, \langle\equiv\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle\big)$ des Typs $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$.
- Jede teilweise geordnete Menge $(M, \preceq)$ mit einer Relation $\preceq\ \subseteq M \times M$ ist eine algebraische Struktur des Typs $(1, 0, 0, 0)$.
- Jede Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ liefert eine algebraische Struktur $\big(\mathcal{P}(M), \subseteq, \cup, \cap, \cdot^c, \emptyset, M\big)$ des Typs $(1, 2, 1, 2)$.

- Jede Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $M$ liefert eine algebraische Struktur $(M, \equiv) = \big(M, \langle\equiv\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle\big)$ des Typs $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$.
- Jede teilweise geordnete Menge $(M, \preceq)$ mit einer Relation $\preceq\ \subseteq M \times M$ ist eine algebraische Struktur des Typs $(1, 0, 0, 0)$.
- Jede Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ liefert eine algebraische Struktur $\big(\mathcal{P}(M), \subseteq, \cup, \cap, \cdot^c, \emptyset, M\big)$ des Typs $(1, 2, 1, 2)$.
- Man kann jetzt definieren

- Jede Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $M$ liefert eine algebraische Struktur $(M, \equiv) = \big(M, \langle\equiv\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle\big)$ des Typs $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$.
- Jede teilweise geordnete Menge $(M, \preceq)$ mit einer Relation $\preceq \subseteq M \times M$ ist eine algebraische Struktur des Typs $(1, 0, 0, 0)$.
- Jede Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ liefert eine algebraische Struktur $\big(\mathcal{P}(M), \subseteq, \cup, \cap, \cdot^c, \emptyset, M\big)$ des Typs $(1, 2, 1, 2)$.
- Man kann jetzt definieren Isomorphismum von Strukturen,

- Jede Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $M$ liefert eine algebraische Struktur $(M, \equiv) = \big(M, \langle\equiv\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle\big)$ des Typs $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$.
- Jede teilweise geordnete Menge $(M, \preceq)$ mit einer Relation $\preceq\ \subseteq M \times M$ ist eine algebraische Struktur des Typs $(1, 0, 0, 0)$.
- Jede Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ liefert eine algebraische Struktur $\big(\mathcal{P}(M), \subseteq, \cup, \cap, \cdot^c, \emptyset, M\big)$ des Typs $(1, 2, 1, 2)$.
- Man kann jetzt definieren Isomorphismum von Strukturen, und

- Jede Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $M$ liefert eine algebraische Struktur $(M, \equiv) = \big(M, \langle\equiv\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle\big)$ des Typs $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$.
- Jede teilweise geordnete Menge $(M, \preceq)$ mit einer Relation $\preceq\ \subseteq M \times M$ ist eine algebraische Struktur des Typs $(1, 0, 0, 0)$.
- Jede Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ liefert eine algebraische Struktur $\big(\mathcal{P}(M), \subseteq, \cup, \cap, \cdot^c, \emptyset, M\big)$ des Typs $(1, 2, 1, 2)$.
- Man kann jetzt definieren Isomorphismum von Strukturen, und Unterstrukturen

- Jede Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $M$ liefert eine algebraische Struktur $(M, \equiv) = \big(M, \langle\equiv\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle\big)$ des Typs $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$.
- Jede teilweise geordnete Menge $(M, \preceq)$ mit einer Relation $\preceq\ \subseteq M \times M$ ist eine algebraische Struktur des Typs $(1, 0, 0, 0)$.
- Jede Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ liefert eine algebraische Struktur $\big(\mathcal{P}(M), \subseteq, \cup, \cap, \cdot^c, \emptyset, M\big)$ des Typs $(1, 2, 1, 2)$.
- Man kann jetzt definieren Isomorphismum von Strukturen, und Unterstrukturen ganz generel

- Jede Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $M$ liefert eine algebraische Struktur $(M, \equiv) = \big(M, \langle\equiv\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle\big)$ des Typs $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$.
- Jede teilweise geordnete Menge $(M, \preceq)$ mit einer Relation $\preceq\, \subseteq M \times M$ ist eine algebraische Struktur des Typs $(1, 0, 0, 0)$.
- Jede Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ liefert eine algebraische Struktur $\big(\mathcal{P}(M), \subseteq, \cup, \cap, \cdot^c, \emptyset, M\big)$ des Typs $(1, 2, 1, 2)$.
- Man kann jetzt definieren Isomorphismum von Strukturen, und Unterstrukturen ganz generel (sehe Skript).

- Jede Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $M$ liefert eine algebraische Struktur $(M, \equiv) = \big(M, \langle\equiv\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle\big)$ des Typs $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$.
- Jede teilweise geordnete Menge $(M, \preceq)$ mit einer Relation $\preceq\ \subseteq M \times M$ ist eine algebraische Struktur des Typs $(1, 0, 0, 0)$.
- Jede Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ liefert eine algebraische Struktur $\big(\mathcal{P}(M), \subseteq, \cup, \cap, \cdot^c, \emptyset, M\big)$ des Typs $(1, 2, 1, 2)$.
- Man kann jetzt definieren Isomorphismum von Strukturen, und Unterstrukturen ganz generel (sehe Skript). Diese algemeine Definitionen

- Jede Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $M$ liefert eine algebraische Struktur $(M, \equiv) = \big(M, \langle\equiv\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle\big)$ des Typs $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$.
- Jede teilweise geordnete Menge $(M, \preceq)$ mit einer Relation $\preceq \subseteq M \times M$ ist eine algebraische Struktur des Typs $(1, 0, 0, 0)$.
- Jede Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ liefert eine algebraische Struktur $\big(\mathcal{P}(M), \subseteq, \cup, \cap, \cdot^c, \emptyset, M\big)$ des Typs $(1, 2, 1, 2)$.
- Man kann jetzt definieren Isomorphismum von Strukturen, und Unterstrukturen ganz generel (sehe Skript). Diese algemeine Definitionen sind für die Klausur

- Jede Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $M$ liefert eine algebraische Struktur $(M, \equiv) = \big(M, \langle\equiv\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle\big)$ des Typs $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$.
- Jede teilweise geordnete Menge $(M, \preceq)$ mit einer Relation $\preceq\, \subseteq M \times M$ ist eine algebraische Struktur des Typs $(1, 0, 0, 0)$.
- Jede Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ liefert eine algebraische Struktur $\big(\mathcal{P}(M), \subseteq, \cup, \cap, \cdot^c, \emptyset, M\big)$ des Typs $(1, 2, 1, 2)$.
- Man kann jetzt definieren Isomorphismum von Strukturen, und Unterstrukturen ganz generel (sehe Skript). Diese algemeine Definitionen sind für die Klausur nicht erforderlich.

- Jede Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $M$ liefert eine algebraische Struktur $(M, \equiv) = \big(M, \langle \equiv \rangle, \langle\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle\big)$ des Typs $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$.
- Jede teilweise geordnete Menge $(M, \preceq)$ mit einer Relation $\preceq\ \subseteq M \times M$ ist eine algebraische Struktur des Typs $(1, 0, 0, 0)$.
- Jede Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ liefert eine algebraische Struktur $\big(\mathcal{P}(M), \subseteq, \cup, \cap, \cdot^c, \emptyset, M\big)$ des Typs $(1, 2, 1, 2)$.
- Man kann jetzt definieren Isomorphismum von Strukturen, und Unterstrukturen ganz generel (sehe Skript). Diese algemeine Definitionen sind für die Klausur nicht erforderlich. Isomorphismen und Unterstrukturen

- Jede Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $M$ liefert eine algebraische Struktur $(M, \equiv) = \big(M, \langle\equiv\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle\big)$ des Typs $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$.
- Jede teilweise geordnete Menge $(M, \preceq)$ mit einer Relation $\preceq\ \subseteq M \times M$ ist eine algebraische Struktur des Typs $(1, 0, 0, 0)$.
- Jede Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ liefert eine algebraische Struktur $\big(\mathcal{P}(M), \subseteq, \cup, \cap, \cdot^c, \emptyset, M\big)$ des Typs $(1, 2, 1, 2)$.
- Man kann jetzt definieren Isomorphismum von Strukturen, und Unterstrukturen ganz generel (sehe Skript). Diese algemeine Definitionen sind für die Klausur nicht erforderlich. Isomorphismen und Unterstrukturen müssen jedoch

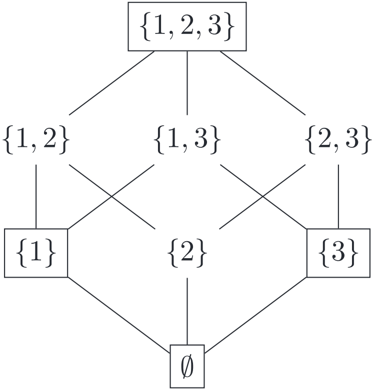
- Jede Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $M$ liefert eine algebraische Struktur $(M, \equiv) = \big(M, \langle\equiv\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle\big)$ des Typs $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$.
- Jede teilweise geordnete Menge $(M, \preceq)$ mit einer Relation $\preceq\ \subseteq M \times M$ ist eine algebraische Struktur des Typs $(1, 0, 0, 0)$.
- Jede Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ liefert eine algebraische Struktur $\big(\mathcal{P}(M), \subseteq, \cup, \cap, \cdot^c, \emptyset, M\big)$ des Typs $(1, 2, 1, 2)$.
- Man kann jetzt definieren Isomorphismum von Strukturen, und Unterstrukturen ganz generel (sehe Skript). Diese algemeine Definitionen sind für die Klausur nicht erforderlich. Isomorphismen und Unterstrukturen müssen jedoch in allen von uns untersuchten Sonderfällen

- Jede Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $M$ liefert eine algebraische Struktur $(M, \equiv) = \big(M, \langle\equiv\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle\big)$ des Typs $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$.
- Jede teilweise geordnete Menge $(M, \preceq)$ mit einer Relation $\preceq\ \subseteq M \times M$ ist eine algebraische Struktur des Typs $(1, 0, 0, 0)$.
- Jede Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ liefert eine algebraische Struktur $\big(\mathcal{P}(M), \subseteq, \cup, \cap, \cdot^c, \emptyset, M\big)$ des Typs $(1, 2, 1, 2)$.
- Man kann jetzt definieren Isomorphismum von Strukturen, und Unterstrukturen ganz generel (sehe Skript). Diese algemeine Definitionen sind für die Klausur nicht erforderlich. Isomorphismen und Unterstrukturen müssen jedoch in allen von uns untersuchten Sonderfällen verstanden werden.

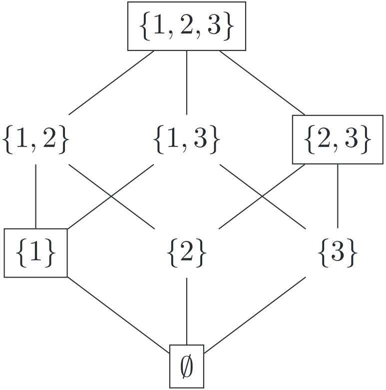
Wir betrachten den Verband $\mathcal{O} = \big(\mathcal{P}(\{1,\,2,\,3\}), \cup, \cap\big)$.

Wir betrachten den Verband $\mathcal{O} = (\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \cup, \cap)$.

- keine Unterstruktur:



- Unterstruktur:



- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\perp$

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$ und sei $x \in M$.

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$ und sei $x \in M$.
- Ein Element $y \in M$ heißt

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$ und sei $x \in M$.
- Ein Element $y \in M$ heißt Komplement von $x$

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\bot$ und größtem Element $\top$ und sei $x \in M$.
- Ein Element $y \in M$ heißt **Komplement** von $x$ gdw. $x \wedge y = \bot$

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$ und sei $x \in M$.
- Ein Element $y \in M$ heißt Komplement von $x$ gdw. $x \wedge y = \perp$ und

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$ und sei $x \in M$.
- Ein Element $y \in M$ heißt **Komplement** von $x$ gdw. $x \wedge y = \perp$ und $x \vee y = \top$.

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$ und sei $x \in M$.
- Ein Element $y \in M$ heißt **Komplement** von $x$ gdw. $x \wedge y = \perp$ und $x \vee y = \top$.
- Der Verband $(M, \preceq)$

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$ und sei $x \in M$.
- Ein Element $y \in M$ heißt Komplement von $x$ gdw. $x \wedge y = \perp$ und $x \vee y = \top$.
- Der Verband $(M, \preceq)$ heißt komplementiert

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$ und sei $x \in M$.
- Ein Element $y \in M$ heißt **Komplement** von $x$ gdw. $x \wedge y = \perp$ und $x \vee y = \top$.
- Der Verband $(M, \preceq)$ heißt **komplementiert** gdw. für jedes $x \in M$

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$ und sei $x \in M$.
- Ein Element $y \in M$ heißt Komplement von $x$ gdw. $x \wedge y = \perp$ und $x \vee y = \top$.
- Der Verband $(M, \preceq)$ heißt komplementiert gdw. für jedes $x \in M$

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$ und sei $x \in M$.
- Ein Element $y \in M$ heißt Komplement von $x$ gdw. $x \wedge y = \perp$ und $x \vee y = \top$.
- Der Verband $(M, \preceq)$ heißt komplementiert gdw. für jedes $x \in M$ ein Komplement $y \in M$ von $x$

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$ und sei $x \in M$.
- Ein Element $y \in M$ heißt Komplement von $x$ gdw. $x \wedge y = \perp$ und $x \vee y = \top$.
- Der Verband $(M, \preceq)$ heißt komplementiert gdw. für jedes $x \in M$ ein Komplement $y \in M$ von $x$ existiert.

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$ und sei $x \in M$.
- Ein Element $y \in M$ heißt Komplement von $x$ gdw. $x \wedge y = \perp$ und $x \vee y = \top$.
- Der Verband $(M, \preceq)$ heißt komplementiert gdw. für jedes $x \in M$ ein Komplement $y \in M$ von $x$ existiert.
- Ein Verband $(M, \preceq)$

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$ und sei $x \in M$.
- Ein Element $y \in M$ heißt **Komplement** von $x$ gdw. $x \wedge y = \perp$ und $x \vee y = \top$.
- Der Verband $(M, \preceq)$ heißt **komplementiert** gdw. für jedes $x \in M$ ein Komplement $y \in M$ von $x$ existiert.
- Ein Verband $(M, \preceq)$ heißt **Boolesche Algebra**

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$ und sei $x \in M$.
- Ein Element $y \in M$ heißt Komplement von $x$ gdw. $x \wedge y = \perp$ und $x \vee y = \top$.
- Der Verband $(M, \preceq)$ heißt komplementiert gdw. für jedes $x \in M$ ein Komplement $y \in M$ von $x$ existiert.
- Ein Verband $(M, \preceq)$ heißt Boolesche Algebra gdw.

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$ und sei $x \in M$.
- Ein Element $y \in M$ heißt Komplement von $x$ gdw. $x \wedge y = \perp$ und $x \vee y = \top$.
- Der Verband $(M, \preceq)$ heißt komplementiert gdw. für jedes $x \in M$ ein Komplement $y \in M$ von $x$ existiert.
- Ein Verband $(M, \preceq)$ heißt Boolesche Algebra gdw. er distributiv und komplemetiert ist,

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\bot$ und größtem Element $\top$ und sei $x \in M$.
- Ein Element $y \in M$ heißt Komplement von $x$ gdw. $x \wedge y = \bot$ und $x \vee y = \top$.
- Der Verband $(M, \preceq)$ heißt komplementiert gdw. für jedes $x \in M$ ein Komplement $y \in M$ von $x$ existiert.
- Ein Verband $(M, \preceq)$ heißt Boolesche Algebra gdw. er distributiv und komplemetiert ist, und zusätzlich $\bot \neq \top$.

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\bot$ und größtem Element $\top$ und sei $x \in M$.
- Ein Element $y \in M$ heißt Komplement von $x$ gdw. $x \wedge y = \bot$ und $x \vee y = \top$.
- Der Verband $(M, \preceq)$ heißt komplementiert gdw. für jedes $x \in M$ ein Komplement $y \in M$ von $x$ existiert.
- Ein Verband $(M, \preceq)$ heißt Boolesche Algebra gdw. er distributiv und komplemetiert ist, und zusätzlich $\bot \neq \top$.
- Beispiel:

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$ und sei $x \in M$.
- Ein Element $y \in M$ heißt Komplement von $x$ gdw. $x \wedge y = \perp$ und $x \vee y = \top$.
- Der Verband $(M, \preceq)$ heißt komplementiert gdw. für jedes $x \in M$ ein Komplement $y \in M$ von $x$ existiert.
- Ein Verband $(M, \preceq)$ heißt Boolesche Algebra gdw. er distributiv und komplemetiert ist, und zusätzlich $\perp \neq \top$.
- Beispiel: $(P(X), \subseteq)$,

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$ und sei $x \in M$.
- Ein Element $y \in M$ heißt Komplement von $x$ gdw. $x \wedge y = \perp$ und $x \vee y = \top$.
- Der Verband $(M, \preceq)$ heißt komplementiert gdw. für jedes $x \in M$ ein Komplement $y \in M$ von $x$ existiert.
- Ein Verband $(M, \preceq)$ heißt Boolesche Algebra gdw. er distributiv und komplemetiert ist, und zusätzlich $\perp \neq \top$.
- Beispiel: $(P(X), \subseteq)$, $X \neq \emptyset$.

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\bot$ und größtem Element $\top$ und sei $x \in M$.
- Ein Element $y \in M$ heißt Komplement von $x$ gdw. $x \wedge y = \bot$ und $x \vee y = \top$.
- Der Verband $(M, \preceq)$ heißt komplementiert gdw. für jedes $x \in M$ ein Komplement $y \in M$ von $x$ existiert.
- Ein Verband $(M, \preceq)$ heißt Boolesche Algebra gdw. er distributiv und komplemetiert ist, und zusätzlich $\bot \neq \top$.
- Beispiel: $(P(X), \subseteq)$, $X \neq \emptyset$.
- Die Komplemente

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$ und sei $x \in M$.
- Ein Element $y \in M$ heißt **Komplement** von $x$ gdw. $x \wedge y = \perp$ und $x \vee y = \top$.
- Der Verband $(M, \preceq)$ heißt **komplementiert** gdw. für jedes $x \in M$ ein Komplement $y \in M$ von $x$ existiert.
- Ein Verband $(M, \preceq)$ heißt **Boolesche Algebra** gdw. er distributiv und komplemetiert ist, und zusätzlich $\perp \neq \top$.
- Beispiel: $(P(X), \subseteq)$, $X \neq \emptyset$.
- Die Komplemente sind im Allgemeinen

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$ und sei $x \in M$.
- Ein Element $y \in M$ heißt Komplement von $x$ gdw. $x \wedge y = \perp$ und $x \vee y = \top$.
- Der Verband $(M, \preceq)$ heißt komplementiert gdw. für jedes $x \in M$ ein Komplement $y \in M$ von $x$ existiert.
- Ein Verband $(M, \preceq)$ heißt Boolesche Algebra gdw. er distributiv und komplemetiert ist, und zusätzlich $\perp \neq \top$.
- Beispiel: $(P(X), \subseteq)$, $X \neq \emptyset$.
- Die Komplemente sind im Allgemeinen in Verbänden nicht eindeutig.

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\bot$ und größtem Element $\top$ und sei $x \in M$.
- Ein Element $y \in M$ heißt Komplement von $x$ gdw. $x \wedge y = \bot$ und $x \vee y = \top$.
- Der Verband $(M, \preceq)$ heißt komplementiert gdw. für jedes $x \in M$ ein Komplement $y \in M$ von $x$ existiert.
- Ein Verband $(M, \preceq)$ heißt Boolesche Algebra gdw. er distributiv und komplemetiert ist, und zusätzlich $\bot \neq \top$.
- Beispiel: $(P(X), \subseteq)$, $X \neq \emptyset$.
- Die Komplemente sind im Allgemeinen in Verbänden nicht eindeutig. Z.B.

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$ und sei $x \in M$.
- Ein Element $y \in M$ heißt Komplement von $x$ gdw. $x \wedge y = \perp$ und $x \vee y = \top$.
- Der Verband $(M, \preceq)$ heißt komplementiert gdw. für jedes $x \in M$ ein Komplement $y \in M$ von $x$ existiert.
- Ein Verband $(M, \preceq)$ heißt Boolesche Algebra gdw. er distributiv und komplemetiert ist, und zusätzlich $\perp \neq \top$.
- Beispiel: $(P(X), \subseteq)$, $X \neq \emptyset$.
- Die Komplemente sind im Allgemeinen in Verbänden nicht eindeutig. Z.B. das Element $\ell$

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\bot$ und größtem Element $\top$ und sei $x \in M$.
- Ein Element $y \in M$ heißt Komplement von $x$ gdw. $x \wedge y = \bot$ und $x \vee y = \top$.
- Der Verband $(M, \preceq)$ heißt komplementiert gdw. für jedes $x \in M$ ein Komplement $y \in M$ von $x$ existiert.
- Ein Verband $(M, \preceq)$ heißt Boolesche Algebra gdw. er distributiv und komplemetiert ist, und zusätzlich $\bot \neq \top$.
- Beispiel: $(P(X), \subseteq)$, $X \neq \emptyset$.
- Die Komplemente sind im Allgemeinen in Verbänden nicht eindeutig. Z.B. das Element $\ell$ im Verband $M_3$

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\bot$ und größtem Element $\top$ und sei $x \in M$.
- Ein Element $y \in M$ heißt **Komplement** von $x$ gdw. $x \wedge y = \bot$ und $x \vee y = \top$.
- Der Verband $(M, \preceq)$ heißt **komplementiert** gdw. für jedes $x \in M$ ein Komplement $y \in M$ von $x$ existiert.
- Ein Verband $(M, \preceq)$ heißt **Boolesche Algebra** gdw. er distributiv und komplemetiert ist, und zusätzlich $\bot \neq \top$.
- Beispiel: $(P(X), \subseteq)$, $X \neq \emptyset$.
- Die Komplemente sind im Allgemeinen in Verbänden nicht eindeutig. Z.B. das Element $\ell$ im Verband $M_3$ hat die Komplemente $m$ und $r$.

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ ein distributiver Verband

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ ein distributiver Verband mit kleinstem Element $\perp$

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ ein distributiver Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$.

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ ein distributiver Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Für jedes $x \in M$

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ ein distributiver Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Für jedes $x \in M$ existiert höchstens ein Komplement von $x$.

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ ein distributiver Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Für jedes $x \in M$ existiert höchstens ein Komplement von $x$.

**Beweis.** Sei $x \in M$

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ ein distributiver Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Für jedes $x \in M$ existiert höchstens ein Komplement von $x$.

**Beweis.** Sei $x \in M$ und seien $y, z \in M$

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ ein distributiver Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Für jedes $x \in M$ existiert höchstens ein Komplement von $x$.

**Beweis.** Sei $x \in M$ und seien $y, z \in M$ Komplemente von $x$.

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ ein distributiver Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Für jedes $x \in M$ existiert höchstens ein Komplement von $x$.

**Beweis.** Sei $x \in M$ und seien $y, z \in M$ Komplemente von $x$.

- Wir zeigen erst $y = y \wedge z$:

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ ein distributiver Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Für jedes $x \in M$ existiert höchstens ein Komplement von $x$.

**Beweis.** Sei $x \in M$ und seien $y, z \in M$ Komplemente von $x$.

- Wir zeigen erst $y = y \wedge z$:

$$y =$$

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ ein distributiver Verband mit kleinstem Element $\bot$ und größtem Element $\top$. Für jedes $x \in M$ existiert höchstens ein Komplement von $x$.

**Beweis.** Sei $x \in M$ und seien $y, z \in M$ Komplemente von $x$.

- Wir zeigen erst $y = y \wedge z$:

$$y = \top \wedge y$$

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ ein distributiver Verband mit kleinstem Element $\bot$ und größtem Element $\top$. Für jedes $x \in M$ existiert höchstens ein Komplement von $x$.

**Beweis.** Sei $x \in M$ und seien $y, z \in M$ Komplemente von $x$.

- Wir zeigen erst $y = y \wedge z$:

$$y = \top \wedge y = (x \vee z) \wedge y$$

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ ein distributiver Verband mit kleinstem Element $\bot$ und größtem Element $\top$. Für jedes $x \in M$ existiert höchstens ein Komplement von $x$.

**Beweis.** Sei $x \in M$ und seien $y, z \in M$ Komplemente von $x$.

- Wir zeigen erst $y = y \wedge z$:

$$y = \top \wedge y = (x \vee z) \wedge y = (x \wedge y) \vee (z \wedge y)$$

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ ein distributiver Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Für jedes $x \in M$ existiert höchstens ein Komplement von $x$.

**Beweis.** Sei $x \in M$ und seien $y, z \in M$ Komplemente von $x$.

- Wir zeigen erst $y = y \wedge z$:

$$y = \top \wedge y = (x \vee z) \wedge y = (x \wedge y) \vee (z \wedge y) = \perp \vee (z \wedge y)$$

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ ein distributiver Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Für jedes $x \in M$ existiert höchstens ein Komplement von $x$.

**Beweis.** Sei $x \in M$ und seien $y, z \in M$ Komplemente von $x$.

- Wir zeigen erst $y = y \wedge z$:

$$y = \top \wedge y = (x \vee z) \wedge y = (x \wedge y) \vee (z \wedge y) = \perp \vee (z \wedge y) = y \wedge z$$

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ ein distributiver Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Für jedes $x \in M$ existiert höchstens ein Komplement von $x$.

**Beweis.** Sei $x \in M$ und seien $y, z \in M$ Komplemente von $x$.

- Wir zeigen erst $y = y \wedge z$:

$$y = \top \wedge y = (x \vee z) \wedge y = (x \wedge y) \vee (z \wedge y) = \perp \vee (z \wedge y) = y \wedge z$$

- Aber auch $z = y \wedge z$:

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ ein distributiver Verband mit kleinstem Element $\bot$ und größtem Element $\top$. Für jedes $x \in M$ existiert höchstens ein Komplement von $x$.

**Beweis.** Sei $x \in M$ und seien $y, z \in M$ Komplemente von $x$.

- Wir zeigen erst $y = y \wedge z$:

$$y = \top \wedge y = (x \vee z) \wedge y = (x \wedge y) \vee (z \wedge y) = \bot \vee (z \wedge y) = y \wedge z$$

- Aber auch $z = y \wedge z$:

$$z = \top \wedge z$$

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ ein distributiver Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Für jedes $x \in M$ existiert höchstens ein Komplement von $x$.

**Beweis.** Sei $x \in M$ und seien $y, z \in M$ Komplemente von $x$.

- Wir zeigen erst $y = y \wedge z$:

$$y = \top \wedge y = (x \vee z) \wedge y = (x \wedge y) \vee (z \wedge y) = \perp \vee (z \wedge y) = y \wedge z$$

- Aber auch $z = y \wedge z$:

$$z = \top \wedge z = (x \vee y) \wedge z$$

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ ein distributiver Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Für jedes $x \in M$ existiert höchstens ein Komplement von $x$.

**Beweis.** Sei $x \in M$ und seien $y, z \in M$ Komplemente von $x$.

- Wir zeigen erst $y = y \wedge z$:

$$y = \top \wedge y = (x \vee z) \wedge y = (x \wedge y) \vee (z \wedge y) = \perp \vee (z \wedge y) = y \wedge z$$

- Aber auch $z = y \wedge z$:

$$z = \top \wedge z = (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ ein distributiver Verband mit kleinstem Element $\bot$ und größtem Element $\top$. Für jedes $x \in M$ existiert höchstens ein Komplement von $x$.

**Beweis.** Sei $x \in M$ und seien $y, z \in M$ Komplemente von $x$.

- Wir zeigen erst $y = y \wedge z$:

$$y = \top \wedge y = (x \vee z) \wedge y = (x \wedge y) \vee (z \wedge y) = \bot \vee (z \wedge y) = y \wedge z$$

- Aber auch $z = y \wedge z$:

$$z = \top \wedge z = (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) = \bot \vee (y \wedge z)$$

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ ein distributiver Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Für jedes $x \in M$ existiert höchstens ein Komplement von $x$.

**Beweis.** Sei $x \in M$ und seien $y, z \in M$ Komplemente von $x$.

- Wir zeigen erst $y = y \wedge z$:

$$y = \top \wedge y = (x \vee z) \wedge y = (x \wedge y) \vee (z \wedge y) = \perp \vee (z \wedge y) = y \wedge z$$

- Aber auch $z = y \wedge z$:

$$z = \top \wedge z = (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) = \perp \vee (y \wedge z) = y \wedge z$$

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ ein distributiver Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Für jedes $x \in M$ existiert höchstens ein Komplement von $x$.

**Beweis.** Sei $x \in M$ und seien $y, z \in M$ Komplemente von $x$.

- Wir zeigen erst $y = y \wedge z$:

$$y = \top \wedge y = (x \vee z) \wedge y = (x \wedge y) \vee (z \wedge y) = \perp \vee (z \wedge y) = y \wedge z$$

- Aber auch $z = y \wedge z$:

$$z = \top \wedge z = (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) = \perp \vee (y \wedge z) = y \wedge z$$

- Also $y = y \wedge z = z$.

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ ein distributiver Verband mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Für jedes $x \in M$ existiert höchstens ein Komplement von $x$.

**Beweis.** Sei $x \in M$ und seien $y, z \in M$ Komplemente von $x$.

- Wir zeigen erst $y = y \wedge z$:

$$y = \top \wedge y = (x \vee z) \wedge y = (x \wedge y) \vee (z \wedge y) = \perp \vee (z \wedge y) = y \wedge z$$

- Aber auch $z = y \wedge z$:

$$z = \top \wedge z = (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) = \perp \vee (y \wedge z) = y \wedge z$$

- Also $y = y \wedge z = z$. $\square$

Boolesche Algebren sind als Modelle der Aussagenlogik entstanden

Boolesche Algebren sind als Modelle der Aussagenlogik entstanden (Komplement ist die Abstraktion der Negation).

Boolesche Algebren sind als Modelle der Aussagenlogik entstanden (Komplement ist die Abstraktion der Negation).

- Als Beispiel

Boolesche Algebren sind als Modelle der Aussagenlogik entstanden (Komplement ist die Abstraktion der Negation).

- Als Beispiel betrachten wir der Verband der Wahrheitswerte

Boolesche Algebren sind als Modelle der Aussagenlogik entstanden (Komplement ist die Abstraktion der Negation).

- Als Beispiel betrachten wir der Verband der Wahrheitswerte (isomorph zu $\mathcal{P}(\{1\})$):

Boolesche Algebren sind als Modelle der Aussagenlogik entstanden (Komplement ist die Abstraktion der Negation).

- Als Beispiel betrachten wir der Verband der Wahrheitswerte (isomorph zu $\mathcal{P}(\{1\})$): $\big(\{0,\ 1\}, \{(0,0),\ (0,1),\ (1,1)\}\big)$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, dash] \\ 0 \end{tikzcd}$$

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ eine Boolesche Algebra

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ eine Boolesche Algebra mit kleinstem Element $\perp$

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ eine Boolesche Algebra mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$.

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ eine Boolesche Algebra mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Dann gelten

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ eine Boolesche Algebra mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Dann gelten

- $(x^c)^c = x$

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ eine Boolesche Algebra mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Dann gelten

- $(x^c)^c = x$ für alle $x \in M$,

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ eine Boolesche Algebra mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Dann gelten

- $(x^c)^c = x$ für alle $x \in M$, und

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ eine Boolesche Algebra mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Dann gelten

- $(x^c)^c = x$ für alle $x \in M$, und
- (Morganische Gesetze)

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ eine Boolesche Algebra mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Dann gelten

- $(x^c)^c = x$ für alle $x \in M$, und
- (Morganische Gesetze) $(x \wedge y)^c = x^c \vee y^c$

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ eine Boolesche Algebra mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Dann gelten

- $(x^c)^c = x$ für alle $x \in M$, und
- (Morganische Gesetze) $(x \wedge y)^c = x^c \vee y^c$ und

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ eine Boolesche Algebra mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Dann gelten

- $(x^c)^c = x$ für alle $x \in M$, und
- (Morganische Gesetze) $(x \wedge y)^c = x^c \vee y^c$ und $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ eine Boolesche Algebra mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Dann gelten

- $(x^c)^c = x$ für alle $x \in M$, und
- (Morganische Gesetze) $(x \wedge y)^c = x^c \vee y^c$ und $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$ für alle $x, y \in M$.

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ eine Boolesche Algebra mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Dann gelten

- $(x^c)^c = x$ für alle $x \in M$, und
- (Morganische Gesetze) $(x \wedge y)^c = x^c \vee y^c$ und $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$ für alle $x, y \in M$.

**Beweis.**

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ eine Boolesche Algebra mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Dann gelten

- $(x^c)^c = x$ für alle $x \in M$, und
- (Morganische Gesetze) $(x \wedge y)^c = x^c \vee y^c$ und $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$ für alle $x, y \in M$.

**Beweis.**

- Per Definition

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ eine Boolesche Algebra mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Dann gelten

- $(x^c)^c = x$ für alle $x \in M$, und
- (Morganische Gesetze) $(x \wedge y)^c = x^c \vee y^c$ und $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$ für alle $x, y \in M$.

**Beweis.**

- Per Definition ist $(x^c)^c$

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ eine Boolesche Algebra mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Dann gelten

- $(x^c)^c = x$ für alle $x \in M$, und
- (Morganische Gesetze) $(x \wedge y)^c = x^c \vee y^c$ und $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$ für alle $x, y \in M$.

**Beweis.**

- Per Definition ist $(x^c)^c$ das Komplement von $x^c$.

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ eine Boolesche Algebra mit kleinstem Element $\bot$ und größtem Element $\top$. Dann gelten

- $(x^c)^c = x$ für alle $x \in M$, und
- (Morganische Gesetze) $(x \wedge y)^c = x^c \vee y^c$ und $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$ für alle $x, y \in M$.

**Beweis.**

- Per Definition ist $(x^c)^c$ das Komplement von $x^c$. Also $(x^c)^c \wedge x^c = \top$

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ eine Boolesche Algebra mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Dann gelten

- $(x^c)^c = x$ für alle $x \in M$, und
- (Morganische Gesetze) $(x \wedge y)^c = x^c \vee y^c$ und $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$ für alle $x, y \in M$.

**Beweis.**

- Per Definition ist $(x^c)^c$ das Komplement von $x^c$. Also $(x^c)^c \wedge x^c = \top$ und

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ eine Boolesche Algebra mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Dann gelten

- $(x^c)^c = x$ für alle $x \in M$, und
- (Morganische Gesetze) $(x \wedge y)^c = x^c \vee y^c$ und $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$ für alle $x, y \in M$.

**Beweis.**

- Per Definition ist $(x^c)^c$ das Komplement von $x^c$. Also $(x^c)^c \wedge x^c = \top$ und $(x^c)^c \vee x^c = \perp$.

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ eine Boolesche Algebra mit kleinstem Element $\bot$ und größtem Element $\top$. Dann gelten

- $(x^c)^c = x$ für alle $x \in M$, und
- (Morganische Gesetze) $(x \wedge y)^c = x^c \vee y^c$ und $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$ für alle $x, y \in M$.

**Beweis.**

- Per Definition ist $(x^c)^c$ das Komplement von $x^c$. Also $(x^c)^c \wedge x^c = \top$ und $(x^c)^c \vee x^c = \bot$. Durch Eindeutigkeit des Komplements

**Satz.** Sei $(M, \preceq)$ eine Boolesche Algebra mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Dann gelten

- $(x^c)^c = x$ für alle $x \in M$, und
- (Morganische Gesetze) $(x \wedge y)^c = x^c \vee y^c$ und $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$ für alle $x, y \in M$.

**Beweis.**

- Per Definition ist $(x^c)^c$ das Komplement von $x^c$. Also $(x^c)^c \wedge x^c = \top$ und $(x^c)^c \vee x^c = \perp$. Durch Eindeutigkeit des Komplements es folgt $(x^c)^c = x$.

- Wir zeigen z.B. das Gesetz

- Wir zeigen z.B. das Gesetz $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$.

- Wir zeigen z.B. das Gesetz $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$.
- Wir zeigen, dass

- Wir zeigen z.B. das Gesetz $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$.
- Wir zeigen, dass $(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c)$

- Wir zeigen z.B. das Gesetz $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$.
- Wir zeigen, dass $(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) = \perp$

- Wir zeigen z.B. das Gesetz $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$.
- Wir zeigen, dass $(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) = \perp$ und

- Wir zeigen z.B. das Gesetz $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$.
- Wir zeigen, dass $(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) = \perp$ und $(x \vee y) \vee (x^c \wedge y^c)$

- Wir zeigen z.B. das Gesetz $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$.
- Wir zeigen, dass $(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) = \bot$ und $(x \vee y) \vee (x^c \wedge y^c) = \top$.

- Wir zeigen z.B. das Gesetz $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$.
- Wir zeigen, dass $(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) = \perp$ und $(x \vee y) \vee (x^c \wedge y^c) = \top$. Aufgrund der Eindeutigkeit des Komplements ist dann

- Wir zeigen z.B. das Gesetz $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$.
- Wir zeigen, dass $(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) = \bot$ und $(x \vee y) \vee (x^c \wedge y^c) = \top$. Aufgrund der Eindeutigkeit des Komplements ist dann $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$ bewiesen.

- Wir zeigen z.B. das Gesetz $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$.
- Wir zeigen, dass $(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) = \perp$ und $(x \vee y) \vee (x^c \wedge y^c) = \top$. Aufgrund der Eindeutigkeit des Komplements ist dann $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$ bewiesen.
- Es gilt

- Wir zeigen z.B. das Gesetz $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$.
- Wir zeigen, dass $(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) = \perp$ und $(x \vee y) \vee (x^c \wedge y^c) = \top$. Aufgrund der Eindeutigkeit des Komplements ist dann $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$ bewiesen.
- Es gilt
$$(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) =$$

- Wir zeigen z.B. das Gesetz $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$.
- Wir zeigen, dass $(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) = \perp$ und $(x \vee y) \vee (x^c \wedge y^c) = \top$. Aufgrund der Eindeutigkeit des Komplements ist dann $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$ bewiesen.
- Es gilt

$$(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) = (x \wedge x^c \wedge y^c) \vee (y \wedge x^c \wedge y^c)$$

- Wir zeigen z.B. das Gesetz $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$.
- Wir zeigen, dass $(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) = \perp$ und $(x \vee y) \vee (x^c \wedge y^c) = \top$. Aufgrund der Eindeutigkeit des Komplements ist dann $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$ bewiesen.
- Es gilt

$$(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) = (x \wedge x^c \wedge y^c) \vee (y \wedge x^c \wedge y^c)$$

$$= (\perp \wedge y^c) \vee (\perp \wedge x^c)$$

- Wir zeigen z.B. das Gesetz $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$.
- Wir zeigen, dass $(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) = \perp$ und $(x \vee y) \vee (x^c \wedge y^c) = \top$. Aufgrund der Eindeutigkeit des Komplements ist dann $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$ bewiesen.
- Es gilt

$$(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) = (x \wedge x^c \wedge y^c) \vee (y \wedge x^c \wedge y^c)$$

$$= (\perp \wedge y^c) \vee (\perp \wedge x^c) = \perp \vee \perp = \perp$$

- Wir zeigen z.B. das Gesetz $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$.
- Wir zeigen, dass $(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) = \bot$ und $(x \vee y) \vee (x^c \wedge y^c) = \top$. Aufgrund der Eindeutigkeit des Komplements ist dann $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$ bewiesen.
- Es gilt

$$(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) = (x \wedge x^c \wedge y^c) \vee (y \wedge x^c \wedge y^c)$$

$$= (\bot \wedge y^c) \vee (\bot \wedge x^c) = \bot \vee \bot = \bot$$

- Es gilt auch

- Wir zeigen z.B. das Gesetz $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$.
- Wir zeigen, dass $(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) = \perp$ und $(x \vee y) \vee (x^c \wedge y^c) = \top$. Aufgrund der Eindeutigkeit des Komplements ist dann $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$ bewiesen.
- Es gilt

$$(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) = (x \wedge x^c \wedge y^c) \vee (y \wedge x^c \wedge y^c)$$

$$= (\perp \wedge y^c) \vee (\perp \wedge x^c) = \perp \vee \perp = \perp$$

- Es gilt auch

$$(x \vee y) \vee (x^c \wedge y^c) =$$

- Wir zeigen z.B. das Gesetz $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$.
- Wir zeigen, dass $(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) = \perp$ und $(x \vee y) \vee (x^c \wedge y^c) = \top$. Aufgrund der Eindeutigkeit des Komplements ist dann $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$ bewiesen.
- Es gilt

$$(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) = (x \wedge x^c \wedge y^c) \vee (y \wedge x^c \wedge y^c)$$

$$= (\perp \wedge y^c) \vee (\perp \wedge x^c) = \perp \vee \perp = \perp$$

- Es gilt auch

$$(x \vee y) \vee (x^c \wedge y^c) = (x \vee y \vee x^c) \wedge (x \vee y \vee y^c)$$

- Wir zeigen z.B. das Gesetz $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$.
- Wir zeigen, dass $(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) = \bot$ und $(x \vee y) \vee (x^c \wedge y^c) = \top$. Aufgrund der Eindeutigkeit des Komplements ist dann $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$ bewiesen.
- Es gilt

$$(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) = (x \wedge x^c \wedge y^c) \vee (y \wedge x^c \wedge y^c)$$

$$= (\bot \wedge y^c) \vee (\bot \wedge x^c) = \bot \vee \bot = \bot$$

- Es gilt auch

$$(x \vee y) \vee (x^c \wedge y^c) = (x \vee y \vee x^c) \wedge (x \vee y \vee y^c)$$

$$= (\top \vee y) \vee (\top \vee x)$$

- Wir zeigen z.B. das Gesetz $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$.
- Wir zeigen, dass $(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) = \perp$ und $(x \vee y) \vee (x^c \wedge y^c) = \top$. Aufgrund der Eindeutigkeit des Komplements ist dann $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$ bewiesen.
- Es gilt

$$(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) = (x \wedge x^c \wedge y^c) \vee (y \wedge x^c \wedge y^c)$$

$$= (\perp \wedge y^c) \vee (\perp \wedge x^c) = \perp \vee \perp = \perp$$

- Es gilt auch

$$(x \vee y) \vee (x^c \wedge y^c) = (x \vee y \vee x^c) \wedge (x \vee y \vee y^c)$$

$$= (\top \vee y) \vee (\top \vee x) = \top \vee \top = \top$$

- Wir zeigen z.B. das Gesetz $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$.
- Wir zeigen, dass $(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) = \perp$ und $(x \vee y) \vee (x^c \wedge y^c) = \top$. Aufgrund der Eindeutigkeit des Komplements ist dann $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$ bewiesen.
- Es gilt

$$(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) = (x \wedge x^c \wedge y^c) \vee (y \wedge x^c \wedge y^c)$$

$$= (\perp \wedge y^c) \vee (\perp \wedge x^c) = \perp \vee \perp = \perp$$

- Es gilt auch

$$(x \vee y) \vee (x^c \wedge y^c) = (x \vee y \vee x^c) \wedge (x \vee y \vee y^c)$$

$$= (\top \vee y) \vee (\top \vee x) = \top \vee \top = \top$$

□

Wie Verbände,

Wie Verbände, lassen sich auch Boolsche Algebren

Wie Verbände, lassen sich auch Boolsche Algebren operationell charakterisieren.

Wie Verbände, lassen sich auch Boolsche Algebren operationell charakterisieren.

**Satz.** Sei $(M, \sqcap, \sqcup, \cdot^*, \bot, \top)$

Wie Verbände, lassen sich auch Boolsche Algebren operationell charakterisieren.

**Satz.** Sei $(M, \sqcap, \sqcup, \cdot^*, \bot, \top)$ eine algebraische Struktur

Wie Verbände, lassen sich auch Boolsche Algebren operationell charakterisieren.

**Satz.** Sei $(M, \sqcap, \sqcup, \cdot^*, \perp, \top)$ eine algebraische Struktur des Typs $(0, 2, 1, 2)$,

Wie Verbände, lassen sich auch Boolsche Algebren operationell charakterisieren.

**Satz.** Sei $(M, \sqcap, \sqcup, \cdot^*, \bot, \top)$ eine algebraische Struktur des Typs $(0, 2, 1, 2)$, so dass

Wie Verbände, lassen sich auch Boolsche Algebren operationell charakterisieren.

**Satz.** Sei $(M, \sqcap, \sqcup, \cdot^*, \perp, \top)$ eine algebraische Struktur des Typs $(0, 2, 1, 2)$, so dass

- $\sqcap$ und $\sqcup$

Wie Verbände, lassen sich auch Boolsche Algebren operationell charakterisieren.

**Satz.** Sei $(M, \sqcap, \sqcup, \cdot^*, \bot, \top)$ eine algebraische Struktur des Typs $(0, 2, 1, 2)$, so dass

- $\sqcap$ und $\sqcup$ assoziativ,

Wie Verbände, lassen sich auch Boolsche Algebren operationell charakterisieren.

**Satz.** Sei $(M, \sqcap, \sqcup, \cdot^*, \bot, \top)$ eine algebraische Struktur des Typs $(0, 2, 1, 2)$, so dass

- $\sqcap$ und $\sqcup$ assoziativ, kommutativ,

Wie Verbände, lassen sich auch Boolsche Algebren operationell charakterisieren.

**Satz.** Sei $(M, \sqcap, \sqcup, \cdot^*, \bot, \top)$ eine algebraische Struktur des Typs $(0, 2, 1, 2)$, so dass

- $\sqcap$ und $\sqcup$ assoziativ, kommutativ, distributiv

Wie Verbände, lassen sich auch Boolsche Algebren operationell charakterisieren.

**Satz.** Sei $(M, \sqcap, \sqcup, \cdot^*, \perp, \top)$ eine algebraische Struktur des Typs $(0, 2, 1, 2)$, so dass

- $\sqcap$ und $\sqcup$ assoziativ, kommutativ, distributiv und

Wie Verbände, lassen sich auch Boolsche Algebren operationell charakterisieren.

**Satz.** Sei $(M, \sqcap, \sqcup, \cdot^*, \bot, \top)$ eine algebraische Struktur des Typs $(0, 2, 1, 2)$, so dass

- $\sqcap$ und $\sqcup$ assoziativ, kommutativ, distributiv und absorptiv sind,

Wie Verbände, lassen sich auch Boolsche Algebren operationell charakterisieren.

**Satz.** Sei $(M, \sqcap, \sqcup, \cdot^*, \bot, \top)$ eine algebraische Struktur des Typs $(0, 2, 1, 2)$, so dass

- $\sqcap$ und $\sqcup$ assoziativ, kommutativ, distributiv und absorptiv sind, und
- Die operation $\cdot^*$

Wie Verbände, lassen sich auch Boolsche Algebren operationell charakterisieren.

**Satz.** Sei $(M, \sqcap, \sqcup, \cdot^*, \bot, \top)$ eine algebraische Struktur des Typs $(0, 2, 1, 2)$, so dass

- $\sqcap$ und $\sqcup$ assoziativ, kommutativ, distributiv und absorptiv sind, und
- Die operation $\cdot^*$ jedes Element $x \in M$

Wie Verbände, lassen sich auch Boolsche Algebren operationell charakterisieren.

**Satz.** Sei $(M, \sqcap, \sqcup, \cdot^*, \bot, \top)$ eine algebraische Struktur des Typs $(0, 2, 1, 2)$, so dass

- $\sqcap$ und $\sqcup$ assoziativ, kommutativ, distributiv und absorptiv sind, und
- Die operation $\cdot^*$ jedes Element $x \in M$ auf sein Komplement abbildet,

Wie Verbände, lassen sich auch Boolsche Algebren operationell charakterisieren.

**Satz.** Sei $(M, \sqcap, \sqcup, \cdot^*, \bot, \top)$ eine algebraische Struktur des Typs $(0, 2, 1, 2)$, so dass

- $\sqcap$ und $\sqcup$ assoziativ, kommutativ, distributiv und absorptiv sind, und
- Die operation $\cdot^*$ jedes Element $x \in M$ auf sein Komplement abbildet, d.H.

Wie Verbände, lassen sich auch Boolsche Algebren operationell charakterisieren.

**Satz.** Sei $(M, \sqcap, \sqcup, \cdot^*, \bot, \top)$ eine algebraische Struktur des Typs $(0, 2, 1, 2)$, so dass

- $\sqcap$ und $\sqcup$ assoziativ, kommutativ, distributiv und absorptiv sind, und
- Die operation $\cdot^*$ jedes Element $x \in M$ auf sein Komplement abbildet, d.H.

$$x \sqcap x^* = \bot$$

Wie Verbände, lassen sich auch Boolsche Algebren operationell charakterisieren.

**Satz.** Sei $(M, \sqcap, \sqcup, \cdot^*, \bot, \top)$ eine algebraische Struktur des Typs $(0, 2, 1, 2)$, so dass

- $\sqcap$ und $\sqcup$ assoziativ, kommutativ, distributiv und absorptiv sind, und
- Die operation $\cdot^*$ jedes Element $x \in M$ auf sein Komplement abbildet, d.H.

$$x \sqcap x^* = \bot \qquad \text{und}$$

Wie Verbände, lassen sich auch Boolsche Algebren operationell charakterisieren.

**Satz.** Sei $(M, \sqcap, \sqcup, \cdot^*, \perp, \top)$ eine algebraische Struktur des Typs $(0, 2, 1, 2)$, so dass

- $\sqcap$ und $\sqcup$ assoziativ, kommutativ, distributiv und absorptiv sind, und
- Die operation $\cdot^*$ jedes Element $x \in M$ auf sein Komplement abbildet, d.H.

$$x \sqcap x^* = \perp \qquad \text{und} \qquad x \sqcup x^* = \top \quad .$$

Wie Verbände, lassen sich auch Boolsche Algebren operationell charakterisieren.

**Satz.** Sei $(M, \sqcap, \sqcup, \cdot^*, \bot, \top)$ eine algebraische Struktur des Typs $(0, 2, 1, 2)$, so dass

- $\sqcap$ und $\sqcup$ assoziativ, kommutativ, distributiv und absorptiv sind, und
- Die operation $\cdot^*$ jedes Element $x \in M$ auf sein Komplement abbildet, d.H.

$$x \sqcap x^* = \bot \qquad \text{und} \qquad x \sqcup x^* = \top \ .$$

Dann ist $(M, \preceq)$,

Wie Verbände, lassen sich auch Boolsche Algebren operationell charakterisieren.

**Satz.** Sei $(M, \sqcap, \sqcup, \cdot^*, \bot, \top)$ eine algebraische Struktur des Typs $(0, 2, 1, 2)$, so dass

- $\sqcap$ und $\sqcup$ assoziativ, kommutativ, distributiv und absorptiv sind, und
- Die operation $\cdot^*$ jedes Element $x \in M$ auf sein Komplement abbildet, d.H.

$$x \sqcap x^* = \bot \qquad \text{und} \qquad x \sqcup x^* = \top \ .$$

Dann ist $(M, \preceq)$, mit $x \preceq y$

Wie Verbände, lassen sich auch Boolsche Algebren operationell charakterisieren.

**Satz.** Sei $(M, \sqcap, \sqcup, \cdot^*, \bot, \top)$ eine algebraische Struktur des Typs $(0, 2, 1, 2)$, so dass

- $\sqcap$ und $\sqcup$ assoziativ, kommutativ, distributiv und absorptiv sind, und
- Die operation $\cdot^*$ jedes Element $x \in M$ auf sein Komplement abbildet, d.H.

$$x \sqcap x^* = \bot \qquad \text{und} \qquad x \sqcup x^* = \top \ .$$

Dann ist $(M, \preceq)$, mit $x \preceq y$ gdw.

Wie Verbände, lassen sich auch Boolsche Algebren operationell charakterisieren.

**Satz.** Sei $(M, \sqcap, \sqcup, \cdot^*, \bot, \top)$ eine algebraische Struktur des Typs $(0, 2, 1, 2)$, so dass

- $\sqcap$ und $\sqcup$ assoziativ, kommutativ, distributiv und absorptiv sind, und
- Die operation $\cdot^*$ jedes Element $x \in M$ auf sein Komplement abbildet, d.H.

$$x \sqcap x^* = \bot \qquad \text{und} \qquad x \sqcup x^* = \top \ .$$

Dann ist $(M, \preceq)$, mit $x \preceq y$ gdw. $x = x \sqcap y$,

Wie Verbände, lassen sich auch Boolsche Algebren operationell charakterisieren.

**Satz.** Sei $(M, \sqcap, \sqcup, \cdot^*, \bot, \top)$ eine algebraische Struktur des Typs $(0, 2, 1, 2)$, so dass

- $\sqcap$ und $\sqcup$ assoziativ, kommutativ, distributiv und absorptiv sind, und
- Die operation $\cdot^*$ jedes Element $x \in M$ auf sein Komplement abbildet, d.H.

$$x \sqcap x^* = \bot \qquad \text{und} \qquad x \sqcup x^* = \top \ .$$

Dann ist $(M, \preceq)$, mit $x \preceq y$ gdw. $x = x \sqcap y$, eine Boolesche Algebra.

Wie Verbände, lassen sich auch Boolsche Algebren operationell charakterisieren.

**Satz.** Sei $(M, \sqcap, \sqcup, \cdot^*, \bot, \top)$ eine algebraische Struktur des Typs $(0, 2, 1, 2)$, so dass

- $\sqcap$ und $\sqcup$ assoziativ, kommutativ, distributiv und absorptiv sind, und
- Die operation $\cdot^*$ jedes Element $x \in M$ auf sein Komplement abbildet, d.H.

$$x \sqcap x^* = \bot \qquad \text{und} \qquad x \sqcup x^* = \top \ .$$

Dann ist $(M, \preceq)$, mit $x \preceq y$ gdw. $x = x \sqcap y$, eine Boolesche Algebra.

**Beweis.** Folgt aus der Charakterisierung von Verbänden.

Wie Verbände, lassen sich auch Boolsche Algebren operationell charakterisieren.

**Satz.** Sei $(M, \sqcap, \sqcup, \cdot^*, \bot, \top)$ eine algebraische Struktur des Typs $(0, 2, 1, 2)$, so dass

- $\sqcap$ und $\sqcup$ assoziativ, kommutativ, distributiv und absorptiv sind, und
- Die operation $\cdot^*$ jedes Element $x \in M$ auf sein Komplement abbildet, d.H.

$$x \sqcap x^* = \bot \qquad \text{und} \qquad x \sqcup x^* = \top \ .$$

Dann ist $(M, \preceq)$, mit $x \preceq y$ gdw. $x = x \sqcap y$, eine Boolesche Algebra.

**Beweis.** Folgt aus der Charakterisierung von Verbänden. □

UNIVERSITÄT
LEIPZIG

# VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT!

**Łukasz Grabowski**
Mathematisches Institut

grabowski@math.uni-leipzig.de