Probeklausur Lineare Algebra

für Informatik

In der echten Klausur gelten die folgenden Bedingungen:
Bearbeitungszeit: 90 Minuten
Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
Eine Aufgabe gilt nur dann als vollständig gelöst, wenn alle erforderlichen Rechenschritte und Begründungen mit angegeben sind. Zudem sollten die Ergebnisse noch soweit wie möglich vereinfacht werden. Falls eine konkrete Zahl auszurechnen ist, dann bitte exakt (nicht gerundet).
Es können maximal 20 Punkte erreicht werden. Die Klausur ist ab 10 Punkten mit der Note 4,0 bestanden, ab 11 Punkten gibt es eine 3,7, ab 12 Punkten eine 3,3, ab 13 Punkten eine 3,0 etc. Ab 19 Punkten gibt es eine 1,0.

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** Wir betrachten folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus sämtliche $x \in \mathbb{R}^4$ mit $Ax = 0$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Wir betrachten die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie: $A^n = 3^{n-1}A$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4 (2 Punkte)**.** Berechnen Sie die folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Bestimmen Sie sämtliche $x \in \mathbb{R}$, für die die Matrix

$$\begin{pmatrix} x^2 & -1 & 3x \\ 2x & 1+x & x \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Aufgabe 6 (3 Punkte)**.** Seien

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ferner seien $g = a + \operatorname{span}\{v\}$ und $h = b + \operatorname{span}\{w\}$.
Berechnen Sie den Abstand $d(g, h)$ der beiden Geraden g und h.

Aufgabe 7 (3 Punkte)**.** Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{R}$ und sei $F : V \to W$ ein Isomorphismus. Seien U_1 und U_2 Unterräume von V mit $V = U_1 \oplus U_2$.
Zeigen Sie, dass dann auch $W = F[U_1] \oplus F[U_2]$ gilt.