Lösungen Übung 9

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** Sei V ein reeller Vektorraum und sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Ferner sei $\|\cdot\|$ die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm auf V. Beweisen Sie die *Parallelogrammgleichung*

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 \qquad \forall v, w \in V.$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
&\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = \langle v+w, v+w \rangle + \langle v-w, v-w \rangle \\
&= \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle + \langle v, v \rangle - \langle v, w \rangle - \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \\
&= \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2 \\
&= 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (3+1 Punkte)**.** Für einen Vektor $x = (x_1 \dots x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

1) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert.
2) Zeigen Sie, dass für $n \geq 2$ die Norm $\|\cdot\|_1$ nicht von einem Skalarprodukt induziert wird.

Lösung:
1) Homogenität: Seien $x = (x_1 \dots x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\lambda| \|x\|_1$$

Definitheit: Aus der Bedingung

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = 0$$

folgt $|x_1| = \cdots = |x_n| = 0$ (denn alle Summanden sind ≥ 0), also $x = 0$.
Dreiecksungleichung: Seien $x = (x_1 \dots x_n)^T$ und $y = (y_1 \dots y_n)^T$ zwei Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Dann folgt:

$$\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

2) Sei nun $n \geq 2$. Es gilt $\|e_1\|_1 = 1 = \|e_2\|_1$ und $\|e_1 + e_2\|_1 = 2 = \|e_1 - e_2\|_1$, also

$$\|e_1 + e_2\|_1^2 + \|e_1 - e_2\|_1^2 = 8 \neq 4 = 2\|e_1\|_1^2 + 2\|e_2\|_1^2.$$

Wegen Aufgabe 1 kann $\|\cdot\|_1$ daher nicht von einem Skalarprodukt induziert werden.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Wir betrachten die folgenden drei Vektoren im $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es sei $U = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$.
Bestimmen Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens eine Orthonormalbasis von U (bzgl. des euklidischen Skalarprodukts).

Lösung: Man sieht leicht, dass die Vektoren v_1, v_2 und v_3 linear unabhängig sind. Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens liefert:

$$w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|_2} = v_1$$

$$v_2 - \langle v_2, w_1\rangle w_1 = v_2 - 3v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$w_2 := \frac{v_2 - \langle v_2, w_1\rangle w_1}{\|v_2 - \langle v_2, w_1\rangle w_1\|_2} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v_3 - \langle v_3, w_1\rangle w_1 - \langle v_3, w_2\rangle w_2 = v_3 - v_1 - 2w_2$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$w_3 := \frac{v_3 - \langle v_3, w_1\rangle w_1 - \langle v_3, w_2\rangle w_2}{\|v_3 - \langle v_3, w_1\rangle w_1 - \langle v_3, w_2\rangle w_2\|_2} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(w_1, w_2, w_3) ist ein ONS mit $\operatorname{span}\{w_1, w_2, w_3\} = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\} = U$, also eine ONB für U.