WEIHNACHTS VORLESUNG

MIT PROF. SCHWARZ

WIE IRRATIONAL DARF ES SEIN?
VON HIMMLISCHER SPHÄRENMUSIK UND
CHAOS IM DREIKÖRPERPROBLEM

11. DEZEMBER 2024

19:15 UHR, HÖRSAAL 3

Der Glühwein- und Punschverkauf startet 18:30 Uhr vor dem Ziegenledersaal (Innenhof). Dort wird es auch weihnachtliches Gebäck geben.

FSR MATHE
Universität Leipzig

Bringt euch gern einen eigenen Becher mit :)

Diskrete Strukturen (WS 2024-25) - Halbserie 7

7.1 **[3]**

Seien A und B Mengen mit $|A| = |B|$. Zeigen Sie dass $|A^2| = |B^2|$.

7.2 **[4]**

Für eine Menge M und $k \in \mathbb{N}$, definieren wir $\mathcal{P}_k(M) := \{X \subset M : |X| = k\}$. Seien A und B Mengen mit $|A| = |B|$.

(a) Zeigen Sie, dass $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$.

(b) Zeigen Sie, dass für jede $k \in \mathbb{N}$ gilt $|\mathcal{P}_k(A)| = |\mathcal{P}_k(B)|$

7.3 **[3]**

Sei A eine unendliche abzählbare Menge. Zeigen Sie dass $|\mathcal{P}_2(A)| = \aleph_0$. (Hinweise: Sie können die Resultate der vorherigen Übungen auf diesem oder einem vorherigen Blatt verwenden.)

7.4 Gegeben sei eine injektive Funktion $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, definiert durch $h(x_1, x_2, x_3) = g(g(x_1, x_2), x_3)$ für alle $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$ ebenfalls injektiv ist.

7.5 Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Cantor-Schröder-Bernstein, dass

$$|\{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 1\}| = |[0,1] \cap \mathbb{Q}|$$

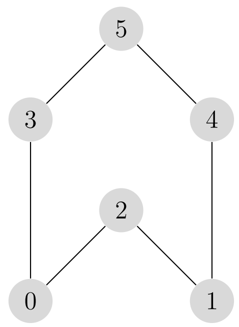
gilt. Dabei bezeichnet $[0,1]$ das geschlossene Intervall reeller Zahlen von 0 bis 1.

7.6 Betrachten Sie die Funktion $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, die wie folgt definiert ist: für alle $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sei $f(X)$ die Menge, die aus X entsteht, indem jede gerade Zahl $x \in X$ durch $x + 1$ ersetzt wird, und jede ungerade Zahl $x \in X$ durch $x + 3$ ersetzt wird. So ist beispielsweise $f(\{0, 8, 17, 23\}) = \{1, 9, 20, 26\}$.

1. Zeigen Sie, dass für alle $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gilt: Wenn $X \subseteq Y$, dann $f(X) \subseteq f(Y)$.
2. Besitzt f einen Fixpunkt? Begründen Sie Ihre Antwort.

7.7 **[5]**

Gegeben sei die Menge $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ und die **Ordnungsrelation** $R \subseteq M \times M$, dargestellt als **Hasse-Diagramm**:



1. Geben Sie R explizit als eine Telimenge von $M \times M$ an.
2. Geben Sie für R
   (a) alle minimalen Elemente,
   (b) alle oberen Schranken für $\{1,\ 3\}$,
   (c) alle unteren Schranken für $\{0,\ 1\}$,
   (d) das größte Element von $\{0,\ 3\}$ an.

7.8 **[2]**

Gegeben sei die Relation $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definiert durch

$$(a, b) \in R \text{ genau dann, wenn } a \text{ ist Teiler von } b.$$

Ist $(\mathbb{N}, R)$ eine **total geordnete Menge**? Begründen Sie Ihre Antwort.