10-201-2108-1.VL01 Logik – Übungsblatt 6

Lovis Rentsch

2025-06-28

in Zusammenarbeit mit: Karl Zschiebsch

Problem 1:



1.1

•	NNF	BF	PNF	SNF
$\neg \forall x \exists y (P(x,y) \land \forall z \neg R(z,y))$		√		
$\forall x \neg P(x) \lor (\exists x R(x,y) \land \forall z \neg R(z,y))$	√	1		4
$\exists y \forall x \neg (P(x,y) \vee \neg Q(y))$		√	✓	
$\forall x \forall y (\neg P(x,y) \vee \neg Q(y))$	√	√	√	✓

1.2

$$\forall x \exists y \neg \forall z P(f(x,y),z) \land \neg \forall x \exists z Q(x,z,y) \equiv \forall x \exists y \exists z \neg P(f(x,y),z) \land \exists x \exists z \neg Q(x,z,y)$$

$$\equiv \forall x \exists y \exists z \neg P(f(x,y),z) \land \exists u \exists v \neg Q(u,v,w)$$

$$\equiv \forall x \exists y \exists z \exists u \exists v \neg P(f(x,y),z) \land \neg Q(u,v,w)$$

1.3

$$\exists x \forall y \forall z \exists u \exists v (P(y, z, u) \land Q(x, u, v)) \equiv \forall y \forall z \exists u \exists v (P(y, z, u) \land Q(c, u, v))$$

$$\equiv \forall y \forall z \exists v (P(y, z, g(y, z)) \land Q(c, g(y, z), v))$$

$$\equiv \forall y \forall z (P(y, z, g(y, z)) \land Q(c, g(y, z), h(y, z)))$$

Problem 2:

2.1

$$\varphi_1 = P(f(x),z) \land Q(g(z,x))$$

$$\{c,f(c),g(c,c),f(f(c)),g(f(c),c),g(c,f(c))\} \in D(\varphi_1)$$

2.2

$$\varphi_2 = \forall x \forall y \forall z (P(x,c) \land (Q(d) \rightarrow P(y,z)))$$

2.2.a

Es gibt die Herbrand-Strukturen P,Q,P.



2.2.b

Konstanten c und d $\Rightarrow U^{\mathfrak{A}} = \{c, d\}$

$$P^{\mathfrak{A}} = \{(c,c)\}$$

$$Q^{\mathfrak{A}} = \{d\}$$

2.2.c

$$P^{\mathfrak{B}} = \{(c,c),(d,c)\}$$

$$Q^{\mathfrak{B}} = \{c\}$$

2.3

Für $t \in D(\varphi_3)$ ist P(t,f(t)) $(t_1=t,t_2=f(t))$ und es gilt $f^{\mathfrak{C}}=f(t)$ also auch $f^{\mathfrak{C}}(t)=f(t)=t_2$. Wir sehen dass $(t,f(t)) \in P^{\mathfrak{C}}$ also ist C ein Herbrand-Modell.

2.4

Problem 3:



3.1

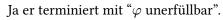
$$\varphi = \forall x \forall y (\neg R(x,y) \land R(c,f(c)))$$

3.1.a

$$D(\varphi) = \{c, f(c), f(f(c)), \ldots\}$$

$$\{ (\neg R(c, c) \land R(c, f(c))), (\neg R(c, f(c)) \land R(c, f(c))), (\neg R(f(c), c) \land R(c, f(c))), (\neg R(f(c), f(c)) \land R(c, f(c))), \} \in E(\varphi)$$

3.1.b



3.2

Wir wissen, dass φ erfüllbar ist genau dann wenn φ ein Herbrand-Modell hat. Wenn wir nun die Allgemeingültigkeit zeigen wollen, riecht es zu zeigen, dass $\neg \varphi$ unerfüllbar ist, also kein Herbrand-Modell hat.

Index der Kommentare

- 1.1 ist eine freie Variable, die darf nicht einfach so umbenannt werden
- 2.1 und wie ist dafür die Vorgehensweise algorithmisch?