

Logik

Serie 5

17/20

Nikita Emanuel John Fehér, 3793479
 Erik Thun, 3794446

13. Juni 2025
Mittwoch 09:15-10:45 Keitsch, Jamie; Gruppe e
die Übung wird von Moritz gehalten

H 5-1. Terminduktion

(2 Pkt.)

Gegeben eine Struktur \mathfrak{A} und zwei Belegungen β und γ . Zeigen Sie per Terminduktion, daß für alle Terme $t \in T$: Falls $\beta|_{\text{var}}(t) = \gamma|_{\text{var}}(t)$, dann $\beta(t) = \gamma(t)$.

$\exists A: t = x$ (Variable) 1,5/2

$$\text{var}(t) = \{x\}, \beta|_{\text{var}(t)} = \gamma|_{\text{var}(t)}$$

$$\Rightarrow \beta|_{\{x\}} = \gamma|_{\{x\}}$$

$$\Rightarrow \beta(x) = \gamma(x)$$

$t = c$ (Konstante)

$$\text{var}(t) = \emptyset \Rightarrow \beta(c) = c^{\mathfrak{A}} = \gamma(c)$$

$\exists V t_1, \dots, t_n$

$$\beta|_{\text{var}(t_i)} = \gamma|_{\text{var}(t_i)} \Rightarrow \beta(t_i) = \gamma(t_i)$$

$\exists S t = f(t_1, \dots, t_n)$

$$\text{var}(t) = V \text{ var}(t_i) \Rightarrow \beta(t_i) = \gamma(t_i) \Rightarrow \beta(t) = \gamma(t)$$

✓

↑

diese Gleichheit gilt nach Definition der Belegung

H 5-2. Erfüllbarkeit und Co.

(3 Pkt.)

Kreuzen Sie in der Tabelle an, ob die betreffende Formel erfüllbar, falsifizierbar, unerfüllbar oder tautologisch ist.

Formel	Erfüllbar	Falsifizierbar	Unerfüllbar	Tautologisch	2,5/3
$\forall xP(x) \rightarrow \exists yP(y)$	X			X	
$\forall xQ(x, x) \rightarrow \exists y\forall zQ(z, y)$	X	X			
$\forall x\neg P(x) \wedge \exists yP(f(y, y))$		X	X		

H 5-3. Modell und Widerlegung

(5 Pkt.)

Kreuzen Sie in der Tabelle an, ob die betreffende Struktur \mathfrak{A} ein Modell der Formel φ ist. Geben Sie im Falle einer Widerlegung eine falsifizierende Instanz an. Es gilt:

- $U^{\mathfrak{A}_1} = U^{\mathfrak{A}_2} = U^{\mathfrak{A}_3} = \mathbb{N}, c^{\mathfrak{A}_1} = c^{\mathfrak{A}_2} = c^{\mathfrak{A}_3} = 0, d^{\mathfrak{A}_1} = d^{\mathfrak{A}_2} = d^{\mathfrak{A}_3} = 1$
- $f^{\mathfrak{A}_1}(n, m) = \max(n, m), f^{\mathfrak{A}_2}(n, m) = n \cdot m, f^{\mathfrak{A}_3}(n, m) = n + 1$

5

Formel	\mathfrak{A}_1	\mathfrak{A}_2	\mathfrak{A}_3
$\forall x(f(x, x) = x \rightarrow (x = c \vee x = d))$	$x=2$	\times	\times
$\forall x \exists y \exists z f(y, z) = x$	\times	\times	$x=0$

■ — $x=2 \Rightarrow f(2, 2) = 2 = x \vee$

$\Rightarrow (x=c \vee x=d)$ muss auch wahr sein damit

$$\Rightarrow (2 \neq 0 \vee 2 \neq 1) \Rightarrow \text{Implikation wahr}$$

\Rightarrow Falsch

■ — $f(y, z) = y + 1$

$x=0$
 $x \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow x$ kann 0 sein

$$\Rightarrow y+1 > 0$$

$$\Rightarrow y+1 \neq 0$$

$$\Rightarrow f(y, z) \neq 0 = x$$



a) Gegeben nachfolgende Folgerungsaussagen:

$$1) \quad \forall x \exists y R(x, y) \models \exists y \forall x R(x, y) \quad \text{und} \quad 2) \quad \exists y \forall x R(x, y) \models \forall x \exists y R(x, y)$$

Geben Sie jeweils an, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Begründen Sie im Falschheitsfalle Ihre Antwort mit einer Struktur \mathfrak{A} wobei $|U^{\mathfrak{A}}| = 3$ gilt.

b) Gegeben die folgenden beiden Formeln

$$1) \quad \varphi := \forall x (f(x) \neq x \wedge f(f(f(x))) = x) \quad \text{und} \quad 2) \quad \psi := \forall x (f(x) \neq x \wedge f(f(x)) = x)$$

Welche der Formeln ist durch eine Struktur \mathfrak{A} mit $|U^{\mathfrak{A}}| = 3$ erfüllbar? Geben Sie im Erfüllbarkeitsfalle eine bezeugende Interpretation $f^{\mathfrak{A}}$ an bzw. begründen Sie kurz, warum eine solche Interpretation nicht existiert.

c) Geben Sie eine erfüllbare Formel ξ mit $s(\xi) = \{P^1, Q^1\}$ (ohne Verwendung des Gleichheitssymbols) an, sodaß für jedes Modell (\mathfrak{A}, β) von ξ gilt: $|U^{\mathfrak{A}}| \geq 3$. Ohne Begründung!

a) 1) Falsch:

4/5

$$U = \{a, b, c\}, R = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$$

$$\forall x \exists y R(x, y) \quad \text{gilt}$$

$$\exists y \forall x R(x, y) \quad \text{gilt nicht}$$



a) 2) Wahr ✓

b) 1) Erfüllbar Bsp.: $U = \{0, 1, 2\}$

$$f^{\mathfrak{A}}(0) = 1$$

$$f^{\mathfrak{A}}(1) = 2$$

$$f^{\mathfrak{A}}(2) = 1$$

$$f(f(f(0))) = 1 ?$$

b) 2) nicht erfüllbar

$f(x) \neq x \Rightarrow f$ hat keinen „Fixpunkt“

$f(f(x)) = x \Rightarrow f(x) = x' \Rightarrow f(f(x)) = f(x') = x$

\Rightarrow jedes Element befindet sich in
einem Zyklus der Länge 2

\Rightarrow da $|U^2| = 3$ kann $f(f(x)) = x$ nicht für alle
 x gelten



$U = \{a, b, c\}$
Fall 1 $f(a) = b \Rightarrow f(b) = a$
$\frac{\text{Fall 1.1 } f(c) = a \Rightarrow f(a) = c}{1.2. f(c) = b \Rightarrow f(b) = c} \quad \begin{matrix} \checkmark \\ f(a) = b \\ \checkmark \\ f(b) = a \end{matrix}$
\vdots



c)

$$\xi = (\forall x ((\neg(P(x) \wedge Q(x))) \wedge (\exists x (P(x))) \wedge (\exists x (Q(x))) \wedge (\exists x (\neg P(x) \wedge \neg Q(x))))$$

H 5-5. Semantische Äquivalenz

(5 Pkt.)

Gegeben seien die folgenden drei Äquivalenzaussagen:

1. $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$
2. $\exists x\varphi \rightarrow \psi \equiv \forall x(\varphi \rightarrow \psi)$ mit $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_{PL}$ und $x \notin \text{frei}(\psi)$
3. $\forall x \exists x\varphi \equiv \exists x\varphi$ mit $\varphi \in \mathcal{F}_{PL}$

Geben Sie im Äquivalenzfalle einen Beweis unter Verwendung der in VL7 angegebenen semantischen Äquivalenzen an. Falls die Äquivalenzaussage nicht gilt, geben Sie eine bezeugende Interpretation (\mathfrak{A}, β) an.

1

1. Gilt nicht: $A = \{a, b\}, P^A = \{a\}, Q^A = \{b\}$

$$\Rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x)) \text{ ist Wahr} \quad \checkmark$$

$$\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \text{ ist Falsch}$$

2

2. Gilt $\exists x\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \exists x\varphi \vee \psi$ (Implikation)

$$\equiv \forall x \neg \varphi \vee \psi \quad (\text{De Morgan'sche Gesetze})$$

$$\equiv \forall x(\neg \varphi \vee \psi) \quad (\text{Scopus Verschiebung})$$

$$\equiv \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \quad (\text{Implikation})$$

$$\checkmark$$

1/2

3. Gilt: sei y eine Variable nicht in φ frei

$$\Rightarrow \forall x \exists x\varphi \equiv \forall y \exists x\varphi$$

$$\psi := \exists x\varphi, \text{ da } y \text{ nicht in } \exists x\varphi \text{ frei vorkommt}$$

die Aussage gilt, allerdings ist es keine Scopusverschiebung

$$\Rightarrow (\text{Scopus Verschiebung}) \forall y \psi \equiv \psi$$

$$\Rightarrow \forall y(\exists x\varphi) \equiv \exists x\varphi$$

$$\Rightarrow \forall x \exists x\varphi \equiv \exists x\varphi$$

gute Idee, muss noch genauer/korrekt aufgeschrieben werden