UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Vorlesung 6 - Relationen und Funktionen

Diskrete Strukturen (WS 2023-24)

Łukasz Grabowski

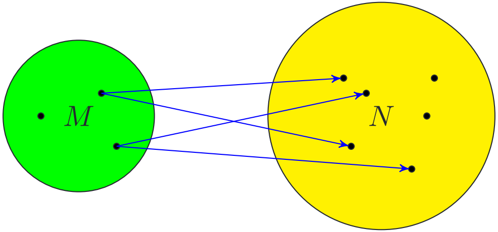
Mathematisches Institut

- Seien M und N zwei Mengen (möglicherweise mit $M = N$). Eine Relation R von M nach N ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$.
- Ist $M = N$, so heißt R auch Relation auf M.
- Statt $(m,n) \in R$ schreiben wir auch $m\ R\ n$ oder $R(m,n)$ oder $m \sim_R n$. Analog $m \not R\ n$.
- Beispiel: die Menge $\{(n,n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$.
- Beispiel: die Freund-Relation auf der Menge F der Facebook-Nutzer

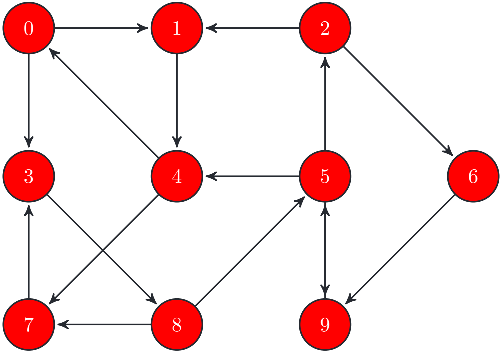
$$\{(x,y) \in F \times F \mid x \text{ ist Facebook-Freund von } y\}$$

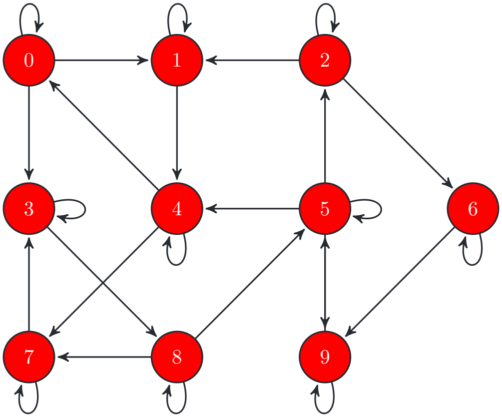
  ist eine Relation.

Relation von M nach N

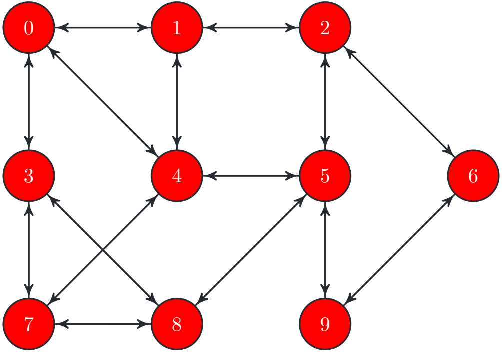


Relation auf $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

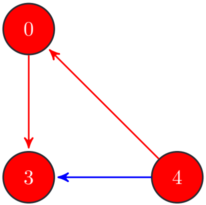




Reflexivität: Alle Elemente haben Schleifen.

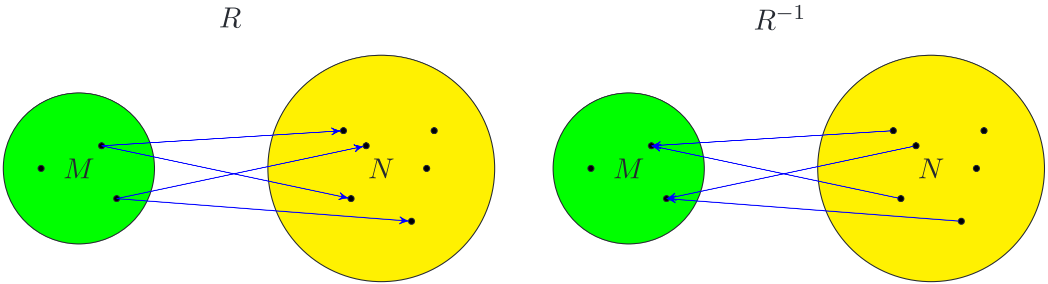


Symmetrie: Jeder Pfeil ist beidseitig.

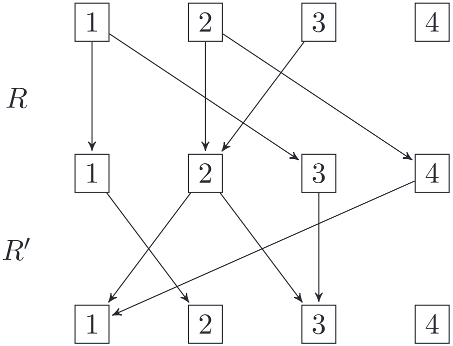


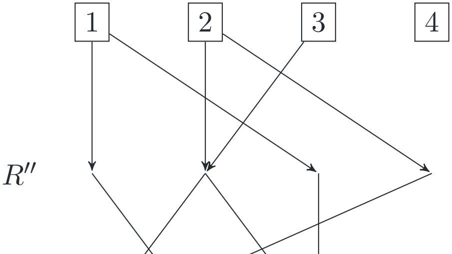
Transitivität: Für jeden Weg existiert auch der direkte Weg.

Operation: Inversion R^{-1} von einer Relation R.



Operation: Komposition von R gefolgt von R', wobei $R \subseteq M \times N$ und $R' \subseteq N \times P$.





- Eine Relation $\equiv$ auf M ist eine Äquivalenzrelation, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
- Für $m \in M$, die Äquivalenzklasse von m ist die Menge:

$$[m]_{\equiv} := \{x \in M \mid m \equiv x\}$$

- Wir definieren

$$(M/{\equiv}) := \{[m]_{\equiv} \mid m \in M\}$$

  "Quotient von M durch $\equiv$".
- Beispiel: $(\mathbb{N}/R_2) = \{\{0, 2, 4, 6, \ldots\}, \{1, 3, 5, 7, \ldots\}\}$

- In der letzter Vorlesung haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge und sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann ist $(M/\equiv)$ eine Zerlegung von M.

- Jetzt werden wir sehen, dass für jede Zerlegung kann man eine Äquivalenzrelation definieren, deren Äquivalenzklassen geben uns die ursprüngliche Zerlegung.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

$$x \equiv y \iff \exists N \in \mathcal{K} \colon x, y \in N$$

Anders geschrieben:

$$\equiv := \left\{(x, y) \in M \times M \colon \exists N \in \mathcal{K} \text{ mit } x, y \in N\right\}$$

Theorem

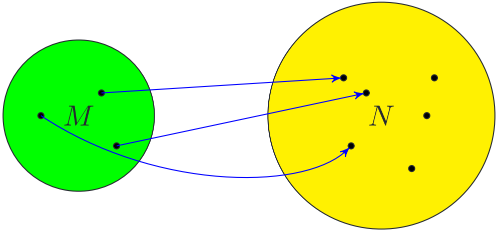
Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

$$x \equiv y \iff \exists N \in \mathcal{K} \colon x, y \in N$$

Beweis. Offensichtlich ist $\equiv$ eine Relation auf M.

- Reflexivität: Sei $x \in M$. Da $M = \bigcup \mathcal{K}$ gibt es eine Menge $N \in \mathcal{N}$ mit $x \in N$. Also $x \equiv x$.
- Symmetrie: Sei $x \equiv y$. Dann existiert $N \in \mathcal{K}$ mit $\{x, y\} \subseteq N$. Folglich auch $y \equiv x$.
- Transitivität: Seien $x \equiv y$ und $y \equiv z$. Also existieren $N, N' \in \mathcal{K}$ mit $\{x, y\} \subseteq N$ und $\{y, z\} \subseteq N'$. Da $y \in N \cap N'$, sind N und N' nicht disjunkt, und so gilt $N = N'$. Folglich $\{x, z\} \subseteq N$ und damit $x \equiv z$. $\square$

- Seien M und N Mengen. Eine Funktion (oder eine Abbildung) ist eine Relation $R \subseteq M \times N$ mit der Eigenschaft dass für jedes $m \in M$ genau ein $n \in N$ existiert, so dass $(m, n) \in R$.
- Anders gesagt: Für jedes $m \in M$ gibt es mindestens ein $n \in N$ (Totalität) und höchstens ein $n \in N$ mit $m\ R\ n$ (Eindeutigkeit)
  - Totalität:
$$\forall m \in M\, \exists n \in N\, R(m, n)$$
  - Eindeutigkeit:
$$\forall m \in M, x, y \in N : \quad R(m, x) \wedge R(m, y) \rightarrow x = y$$


M
N

Beispiele.

- Sei B die Menge der Bundesbürger. Wir haben die Relation

$$\{(p,n) \in B \times \mathbb{N} \mid p \text{ hat Identifikationsnummer } n\}$$

von B nach $\mathbb{N}$. Das ist eine Funktion.

- Keine Funktion: die Freund-Relation

$$\{(x,y) \in F \times F \mid x \text{ ist Facebook-Freund von } y\}$$

auf der Menge der Facebook-Nutzer F. Es wäre eine Funktion nur wenn jeder Facebook-Benutzer genau einen Freund hätte.

- Die Relation $R = \{(n,n') \mid n \in \mathbb{N},\ n' = 2n\}$ ist eine Funktion. $f(x) = 2x$.

- Die Identität id_M ist eine Funktion.

Notation/Wortschatz.

- $f \subseteq M \times N$ eine Funktion, dann schreiben wir $f\colon M \to N$.
- Für $(m, n) \in f$ schreiben wir entweder $n = f(m)$ oder $m \overset{f}{\mapsto} n$.
  - n ist dann das Bild von m
  - m ist ein Urbild von n.
- Die Menge M heißt Definitionsbereich und die Menge N Bildbereich oder Wertebereich von f.

- Für eine Teilmenge $M' \subset M$ definieren wir

$$f(M') := \{f(m) \mid m \in M'\}.$$

Das ist die Menge aller Bilder von Elementen aus M', Bild von M' unter f.

- Für eine Teilmenge $N' \subset N$ definieren wir

$$f^{-1}(N') := \{m \in M \mid f(m) \in N'\}$$

die Menge aller Urbilder von Elementen aus N', Urbild von N' unter f.

Beispiele.

- Betrachten wir $\mathrm{id}_M\colon M \to M$. Diese Funktion könnte man auch so definieren:

$$\mathrm{id}_M(m) := m.$$

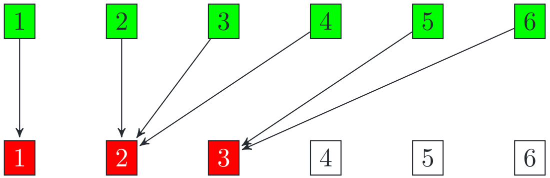
  Für alle $M' \subseteq M$ gilt $\mathrm{id}_M(M') = M'$ und $\mathrm{id}_M^{-1}(M') = M'$

- Sei verdoppeln$\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Funktion

$$\text{verdoppeln}(n) := 2n$$

  für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt verdoppeln$(\mathbb{N}) = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$ und verdoppeln$^{-1}\big(\{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}\big) = \emptyset$.

- Sei $M := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Wir definieren $f\colon M \to M$ durch $m \mapsto \lceil \sqrt{m} \rceil$ für alle $m \in M$.



Es gilt $f(M) = \{1, 2, 3\}$ $f(\{1,2\}) = \{1, 2\}$, $f^{-1}(2) = f^{-1}(\{2\}) = \{2, 3, 4\}$,

- $f\colon M \to N$ heißt injektiv gdw. alle verschiedenen Elemente von M auch verschiedene Bilder unter f haben.

$$\forall x, y \in M\colon\ x \neq y \to f(x) \neq f(y)$$

  Manchmal schreibt man $f\colon M \hookrightarrow N$.

- f heißt surjektiv gdw. $f(M) = N$. (Jedes Element von N ist ein Bild eines Elements von M).

$$\forall n \in N \exists m \in M\colon\ f(m) = n$$

  Manchman schreibt man $f\colon M \twoheadrightarrow N$.

- Sind beide Eigenschaften erfüllt, so heißt f bijektiv.
- Man sagt auch dass f eine Injektion, Surjektion, oder Bijektion ist. Eine Bijektion auf einer Menge M wird auch Permutation von M genannt.
- Beispiele:
  - $\mathrm{id}_M : M \to M$ ist eine Bijektion.
  - Die Funktion verdoppeln $: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.
  - Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = \lceil \sqrt{n} \rceil$ ist surjektiv, aber nicht injektiv, denn es gilt $f(2) = f(3)$.
  - Die Funktion $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $q(x) := x^2$ definiert, ist weder injektiv noch surjektiv.

Funktionen sind Relationen, also können wir Funktionen komponieren. Wir schreiben auch $g \circ f(m)$ oder $g(f(m))$ statt $f;g(m)$.

Theorem

Die Komposition zweier Funktionen ist wieder eine Funktion.

Beweis. Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to P$.

- Eindeutigkeit. Falls $(a,b) \in f;g$ und $(a,c) \in f;g$ dann $\exists x, y \in N$ mit $(a,x) \in f$, $(x,b) \in g$, $(a,y) \in f$, $(y,c) \in g$. Da f ist eindeutig, haben wir $x = y$. Aber da g ist auch eindeutig, haben wir $b = c$.
- Totalität. Sei $a \in M$. Da f ist total, existiert $b \in N$ mit $(a,b) \in f$. Da g ist total, existiert $c \in P$ mit $(b,c) \in g$. Es folgt dass $(a,c) \in f;g$.

Komposition ist assoziativ (auch gilt für dir Komposition von Relationen)

Theorem

Für Abbildungen $f\colon M \to N$, $g\colon N \to P$ *und* $h\colon P \to Q$ *gilt*

$$(f\,;g)\,;h = f\,;(g\,;h)$$

Beweis.

- Sei $y := (f; g); h(x)$. Zu zeigen ist dass $y = f; (g; h)(x)$.
- Dann existiert a mit $(a, y) \in h$, $(x, a) \in f; g$. Deswegen existiert auch b mit $(x, b) \in f$ und $(b, a) \in g$.
- Es folgf $(b, y) \in g; h$, und deswegen auch $(x, y) \in f; (g; h)$. $\square$

Theorem

Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to P$.

- *Wenn f und g injektiv sind, dann ist $f \mathbin{;} g$ injektiv.*
- *Wenn f und g surjektiv sind, dann ist $f \mathbin{;} g$ surjektiv.*
- *Wenn f und g bijektiv sind, dann ist $f \mathbin{;} g$ bijektiv.*

Beweis.

- Seien $m, m' \in M$ mit $m \neq m'$. Da f injektiv ist, gilt $f(m) \neq f(m')$. Da auch g injektiv ist, gilt weiterhin $g(f(m)) \neq g(f(m'))$. Also ist $f \mathbin{;} g$ injektiv.

- (Surjektivität) Sei $p \in P$ beliebig. Da g surjektiv ist, existiert $n \in N$, so dass $g(n) = p$. Weiterhin ist auch f surjektiv, wodurch $m \in M$ existiert, so dass $f(m) = n$. Also ist

$$(f \,;\, g)(m) = g(f(m)) = g(n) = p.$$

  Also ist $f \,;\, g$ auch surjektiv.

- (Bijektivität) Das ist eine Folgerung aus den zwei ersten Punkte. $\square$

- Manchmal möchte man eine Funktionsanwendung rückgängig machen können, zum Beispiel bei der Verschlüsselung und Kompression von Daten.
- Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw. eine Funktion $g\colon N \to M$ existiert, so dass
$$f\,;g = \mathrm{id}_M$$
und
$$g\,;f = \mathrm{id}_N.$$
- Äquivalent gesagt: für alle $m \in M$ gilt $g(f(m)) = m$ und für alle $n \in N$ gilt $f(g(n)) = n$.

Beispiele

- Die Identität id_M ist offensichtlich invertierbar. $\mathrm{id}_M ; \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_M$.
- Die Funktion verdoppeln ist nicht invertierbar. Welchen Wert soll die inverse Funktion der Zahl 3 zuweisen?
- Die Funktion f mit $f(n) = \lceil \sqrt{n} \rceil$ ist nicht invertierbar. Welchen Wert soll die inverse Funktion der Zahl 2 zuweisen?

UNIVERSITÄT
LEIPZIG

VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT!

Łukasz Grabowski
Mathematisches Institut

grabowski@math.uni-leipzig.de