Entscheidbarkeit

Grundlegende Fragen

- Was ist Problem?
- Wann entscheidbar?
- Wann semi-entscheidbar? (nur positive Fälle erfolgreich)
- Wann unentscheidbar?

Entscheidbarkeit

§8.1 Definition (Problem; *problem*)

Problem ist Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$ für Alphabet Σ

Notizen

- Entscheidungsprobleme sind ja/nein-Fragen
  (Ist geg. Graph planar? Ist geg. Zahl prim?)
- Identifikation solcher Probleme mit Teilmenge positiver Instanzen
  (z.B. planare Graphen $\subseteq$ Graphen, Primzahlen $\subseteq \mathbb{N}$)
- Kodierung aller Elemente über endlichem Alphabet
  (z.B. $\mathrm{dez}\colon \mathbb{N} \to \{0, \dots, 9\}^*$)
- Probleme sind Sprachen über Σ^*

Entscheidbarkeit

§8.2 Definition (Entscheidbarkeit; *decidability*)

Problem $L \subseteq \Sigma^*$ **entscheidbar** (engl. *decidable*) falls χ_L berechenbar

$$\chi_L\colon \Sigma^* \to \{0,1\} \quad \text{mit} \quad \chi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für alle } w \in \Sigma^*$$

L **unentscheidbar** (engl. *undecidable*) falls χ_L nicht berechenbar

Notizen

- χ_L = zugeh. Prädikat oder charakteristische Funktion von L
- Entscheidbar = zugeh. Prädikat (total und) berechenbar
  (keine Zeit- und Speicherbegrenzung)
- Teilmengen von $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^k$, etc. auch erlaubt

Entscheidbarkeit

Sei $G = (N, \Sigma, S, P)$ kontextsensitive Grammatik

Wortproblem Sprache $L(G)$

- Frage: Ist geg. $w \in \Sigma^*$ in $L(G)$?
- Problem $L = L(G)$
- Charakteristische Funktion $\chi_L\colon \Sigma^* \to \{0,1\}$ mit

$$\chi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L(G) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Berechenbarkeit von χ_L berechenbar
- Entscheidbarkeit von $L(G)$ entscheidbar

Entscheidbarkeit

§8.3 Theorem

Jede kontextsensitive Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist entscheidbar

Beweisskizze

Sei $G = (N, \Sigma, S, P)$ kontextsensitive Grammatik mit $L(G) = L$.
Algorithmus für Berechnung χ_L mit Eingabe $w \in \Sigma^*$

1. Setze $\mathcal{F} = \{S\}$ (nur Startsymbol)
2. Setze $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{v \in (N \cup \Sigma)^{\leq |w|} \mid \exists u \in \mathcal{F} \colon u \Rightarrow_G v\}$ (füge Nachfolger der Länge höchstens $|w|$ hinzu)
3. Falls $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}'$, dann setze $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ und gehe zu 2.
4. Liefere Wahrheitswert von $w \in \mathcal{F}'$ □

Entscheidbarkeit

Teilstrings von π

- Frage: Kommt w in Dezimalbruchdarstellung von π vor?
- Problem $L = \{w \in \{0, \dots, 9\}^* \mid w \text{ kommt in } \pi \text{ vor}\}$
- Charakteristische Funktion $\chi_L \colon \{0, \dots, 9\}^* \to \{0, 1\}$ mit

$$\chi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \text{ in } \pi \text{ vorkommt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Berechenbarkeit von χ_L unklar
- Entscheidbarkeit von L unklar

Entscheidbarkeit

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $\pi[n]$ Sequenz erste n Stellen in π

Initiale Teilstrings von π

- Frage: Beginnt Dezimalbruchdarstellung von π mit w?
- Problem $L = \{\pi[n] \mid n \in \mathbb{N}\}$
- Charakteristische Funktion $\chi_L \colon \{0, \dots, 9\}^* \to \{0, 1\}$ mit

$$\chi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w = \pi[n] \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Berechenbarkeit von χ_L berechenbar
- Entscheidbarkeit von L entscheidbar

Approximation von π

Ramanujans Algorithmus (mit Genauigkeit n)

1. Setze $k = 0$ und $a = 0$
2. Erhöhe a um $\frac{(4k)! \cdot (1.103 + 26.390 \cdot k)}{(k!)^4 \cdot 396^{4k}}$
3. Erhöhe k um 1
4. Falls $8k \leq n$, dann gehe zu 2.
5. Liefere $\left(\frac{2\sqrt{2}}{9.801} \cdot a\right)^{-1}$

Srinivasa Ramanujan (* 1887; † 1920)

- Ind. Mathematiker
- Autodidakt mit über 3.900 Resultaten
- Analysis, Zahlentheorie, unendliche Reihen, etc.

Entscheidbarkeit

Algorithmus für $\sqrt{2}$

1. Setze $a_0 = 1$
2. Für alle $i \in \mathbb{N}$ sei $a_{i+1} = \frac{a_i}{2} + a_i^{-1}$

Notizen

- Verdoppelt Anzahl korrekter Stellen pro Schritt
  (1 Stelle für a_1; 3 Stellen für a_2; 6 Stellen für a_3; 12 Stellen für a_4)
- 10^{13} Stellen bekannt (ca. 4, 21 TB)
  (64 Bit erlaubt 19 Stellen; 128 Bit (IPv6) erlaubt 38 Stellen)

Entscheidbarkeit

§8.4 Theorem

Jede entscheidbare Sprache ist Typ-0

Beweis

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ entscheidbare Sprache. Dann existiert (normierte) det. TM M mit $T(M) = \chi_L$. Wir modifizieren M so dass statt Ausgabe 0 mit Wechsel in akzeptierenden Zustand ablehnender Zustand eingenommen wird. Für erhaltene TM M'

$$w \in L(M') \quad \text{gdw.} \quad (T(M))(w) = \chi_L(w) = 1$$

und damit $L(M') = L$, womit L nach Theorem §4.3 vom Typ-0 □

Entscheidbarkeit

§8.5 Theorem

Für entscheidbare Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ existiert det. TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, \square, q_0, q_+, q_-)$, so dass für jedes $w \in \Sigma^*$

- $\varepsilon\, q_0\, w \vdash_M^* u\, q_+\, v$ gdw. $w \in L$
- $\varepsilon\, q_0\, w \vdash_M^* u\, q_-\, v$ gdw. $w \notin L$

Notiz

- Entscheidbare Sprache L erlaubt det. TM, die
  - bei Worten aus L akzeptierenden Zustand erreicht
  - bei Worten außerhalb L ablehnenden Zustand erreicht

Entscheidbarkeit

§8.6 Theorem

Für entscheidbare Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist auch $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ entscheidbar

Beweis

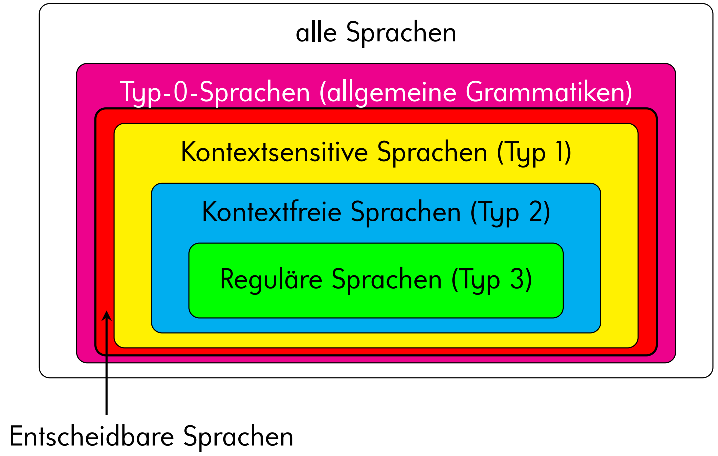
Sei P While-Programm, welches χ_L berechnet. Dann berechnet $P\,;\, x_1 = 1 - x_1$ charakteristische Funktion $\chi_{\overline{L}}$. □

Entscheidbarkeit

Notizen

- Kontextsensitive Sprachen entscheidbar
- Entscheidbare Sprachen sind Typ-0

Entscheidbarkeit



Semi-Entscheidbarkeit

§8.7 Definition (semi-entscheidbar; *semi-decidable*)

Problem $L \subseteq \Sigma^*$ **semi-entscheidbar** falls ρ_L berechenbar

$$\rho_L \colon \Sigma^* \dashrightarrow \{0,1\} \qquad \text{mit} \qquad \rho_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L \\ \text{undef} & \text{sonst} \end{cases}$$

Notizen

- ρ_L = zugeh. Aufzählung
  (“halbe” (partielle) charakteristische Funktion von L)
- Semi-entscheidbar = zugeh. Aufzählung berechenbar
  (keine Zeit- und Speicherbegrenzung)
- Teilmengen von $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^k$, etc. auch erlaubt

Semi-Entscheidbarkeit

§8.8 Theorem

Für $L \subseteq \Sigma^*$ entscheidbar sind L und $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ semi-entscheidbar

Beweis

Sei P While-Programm, welches χ_L berechnet. While-Programm

P
IF$(x_1 = 0)$ { … *Endlosschleife* … }

berechnet ρ_L und damit L semi-entscheidbar. Da L entscheidbar, ist auch $\overline{L}$ entscheidbar (Theorem §8.6) und damit semi-entscheidbar. □

Semi-Entscheidbarkeit

Sei $G = (N, \Sigma, S, P)$ Grammatik

Wortproblem Sprache $L(G)$

- Frage: Ist geg. $w \in \Sigma^*$ in $L(G)$?
- Problem $L = L(G)$
- Aufzählung $\rho_L\colon \Sigma^* \dashrightarrow \{0, 1\}$ mit

$$\rho_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L \\ \text{undef} & \text{sonst} \end{cases}$$

- Berechenbarkeit von ρ_L berechenbar
- Semi-Entscheidbarkeit von L semi-entscheidbar

Semi-Entscheidbarkeit

§8.9 Theorem

Jede Typ-0-Sprache L ist semi-entscheidbar

Beweis

Sei $G = (N, \Sigma, S, P)$ Grammatik mit $L(G) = L$ und $w \in \Sigma^*$.
Folgender Algorithmus berechnet ρ_L

1. Setze $\mathcal{F} = \{S\}$ (nur Startsymbol)
2. Setze $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{v \in (N \cup \Sigma)^* \mid u \in \mathcal{F},\, u \Rightarrow_G v\}$ (füge alle Nachfolger hinzu)
3. Falls $w \in \mathcal{F}'$, dann liefere Ergebnis 1
4. Setze $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ und gehe zu 2. □

Semi-Entscheidbarkeit

§8.10 Theorem

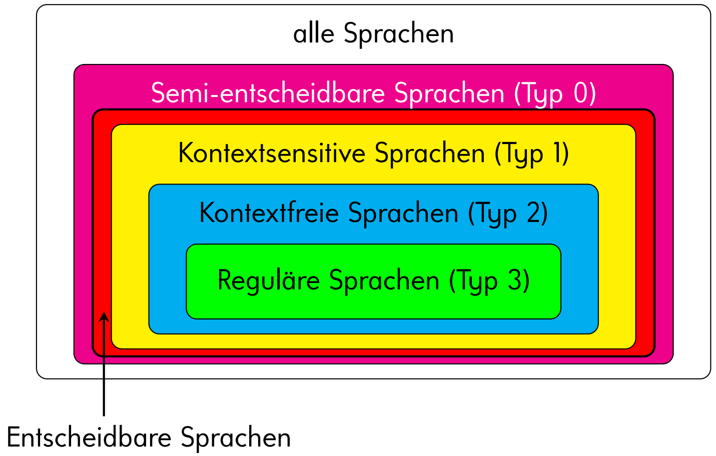
Typ-0-Sprachen = semi-entscheidbare Sprachen

Beweis

($\rightarrow$) Jede Typ-0-Sprache semi-entscheidbar via Theorem §8.9

($\leftarrow$) Sei L semi-entscheidbar. Es existiert det. TM M die ρ_L berechnet.
Dann $L(M) = L$ und damit L Typ-0-Sprache via Theorem §4.3 □

Semi-Entscheidbarkeit



Semi-Entscheidbarkeit

Teilstrings von π

- Frage: Ist w Teilstring von π?
- Problem $L = \{w \in \{0, \dots, 9\}^* \mid w \text{ kommt in } \pi \text{ vor}\}$
- Aufzählung $\rho_L \colon \{0, \dots, 9\}^* \dashrightarrow \{0,1\}$ mit

$$\rho_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \text{ in } \pi \text{ vorkommt} \\ \text{undef} & \text{sonst} \end{cases}$$

- Berechenbarkeit von ρ_L berechenbar
  (approximiere π und suche nach w in sicheren Stellen)
- Semi-Entscheidbarkeit von L semi-entscheidbar

Semi-Entscheidbarkeit

Nichtteilstrings von π

- Frage: Kommt w nicht in π vor?
- Problem $L = \{w \in \{0, \dots, 9\}^* \mid w \text{ kommt } \underline{\text{nicht}} \text{ in } \pi \text{ vor}\}$
- Aufzählung $\rho_L \colon \{0, \dots, 9\} \dashrightarrow \{0,1\}$ mit

$$\rho_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \text{ } \underline{\text{nicht}} \text{ in } \pi \text{ vorkommt} \\ \text{undef} & \text{sonst} \end{cases}$$

- Berechenbarkeit von ρ_L unklar
- Semi-Entscheidbarkeit von L unklar

Semi-Entscheidbarkeit

Längen Nichtteilstrings von π

- Frage: Gibt Sequenz der Länge n die nicht in π vorkommt?
- Problem $L = \{|w| \mid w \in \{0, \dots, 9\}^* \text{ kommt } \underline{\text{nicht}} \text{ in } \pi \text{ vor}\}$
- Aufzählung $\rho_L \colon \mathbb{N} \dashrightarrow \{0,1\}$ mit

$$\rho_L(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \exists w \in \{0, \dots, 9\}^n \text{ } \underline{\text{nicht}} \text{ in } \pi \text{ vorkommend} \\ \text{undef} & \text{sonst} \end{cases}$$

- Berechenbarkeit von ρ_L berechenbar
  (falls alle Sequenzen in π vorkommen, dann ρ_L überall undefiniert;
  sonst existiert Sequenz kürzester Länge k und
  $\rho_L(n) = 1$ für alle $n \geq k$ und $\rho_L(n) = \text{undef}$ sonst)
- Semi-Entscheidbarkeit von L semi-entscheidbar
- Entscheidbarkeit von L entscheidbar

Semi-Entscheidbarkeit

§8.14 Theorem

Problem $L \subseteq \Sigma^*$ entscheidbar gdw. L und $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ semi-entscheidbar

Beweis

Sei L entscheidbar. Dann L und $\overline{L}$ semi-entscheidbar via Theorem §8.8.
Seien L und $\overline{L}$ semi-entscheidbar und M und $\overline{M}$ TM die ρ_L und $\rho_{\overline{L}}$ berechnen. Für $w \in \Sigma^*$ berechnet folgender Algorithmus $\chi_L(w)$

1. $i \leftarrow 1$
2. Lasse TM M und $\overline{M}$ für i Schritte auf w laufen
3. Liefere 1, falls M akzeptiert (d.h. mit Ausgabe 1 terminiert)
4. Liefere 0, falls $\overline{M}$ akzeptiert
5. $i \leftarrow i + 1$ und gehe zu 2. $\square$

Rekursive Aufzählbarkeit

§8.15 Definition (rekursiv aufzählbar; *recursively enumerable*)

Problem L **rekursiv aufzählbar** falls $L = \emptyset$ oder berechenbare surjektive Funktion $a\colon \mathbb{N} \to L$ existiert

Notizen

- a zählt L auf da $L = \{a(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$
- L rekursiv aufzählbar impliziert L abzählbar, denn (i) $L = \emptyset$ oder (ii) $a\colon \mathbb{N} \to L$ surjektiv implizieren Existenz injektiver Funktion $b\colon L \to \mathbb{N}$
- Rekursiv aufzählbar $\subsetneq$ abzählbar (keine Berechenbarkeitsforderung bei Abzählbarkeit)

Rekursive Aufzählbarkeit

§8.16 Theorem

Problem $L \subseteq \Sigma^*$ rekursiv aufzählbar gdw. semi-entscheidbar

Beweis (1/2)

Sei $L \neq \emptyset$ rekursiv aufzählbar. Dann existiert While-Programm P mit $\max \mathrm{var}(P) = n$ welches Aufzählung $a\colon \mathbb{N} \to L$ von L berechnet

$x_{n+1} = x_1 ; x_1 = 0 ; x_{n+2} = x_1$ (Eingabe sichern; Aufzählung initialisieren)
P (Element für 0 berechnen)
WHILE$(x_1 \neq x_{n+1})$ { (solange x_{n+1} nicht erreicht)
  $x_1 = x_{n+2} + 1 ; x_{n+2} = x_1 ; P$} (nächstes Element vorbereiten)
$x_1 = 1$ (falls Eingabe gefunden, liefere Akzeptanz)

Rekursive Aufzählbarkeit

Beweis (2/2)

Sei $L \neq \emptyset$ semi-entscheidbar via det. TM M die ρ_L berechnet.
Bei Eingabe $n \in \mathbb{N}$ berechnet folgendes Programm $a(n)$

$x_2 = 0 ; x_5 = x_1$ (kein Element gefunden)
WHILE$(x_2 = 0)$ { (solange kein Element gefunden)
  $x_3 = \Pi_1(x_5) ; x_4 = \Pi_2(x_5)$ (dekodiere x_5 als Paar (x_3, x_4))
  ... Simuliere TM M auf Eingabe x_3 für x_4 Schritte ...
  IF$(x_1 = 1)$ {$x_2 = 1 ; x_1 = x_3$} (Element gefunden; Abbruch)
  ELSE {$x_5 = x_5 + 1$} (nächster Versuch)
}

$\square$

Semi-Entscheidbarkeit

§8.17 Theorem

Für Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ folgende Aussagen äquivalent

- L semi-entscheidbar
- L rekursiv aufzählbar
- $L = L(G)$ für (Typ-0-) Grammatik G
- $L = L(M)$ für TM M
- $L = L(M)$ für det. TM M