Aufgabe:

Berechnen Sie die Determinanten der nachstehenden Matrizen:

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ (5) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

(1) $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{1. Zeile}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} 2\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2\cdot(3-4) = -2$

(2) $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \underset{\text{2. Zeile}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} 3\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 3\cdot(5-8) = -9$

(3) $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \end{array} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\text{3. Zeile}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} 0$

(4) $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 2 \\ + \end{array} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ + \end{array} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1\cdot 5\cdot 3 = 15$

(5) $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ + \end{array} \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ + \end{array} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ + \end{array} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= -1\cdot 1\cdot(-1)\cdot 2 = 2$

(6) $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ + \end{array} \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ + \end{array} \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ + \end{array} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$= -1\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = 1$

Aufgabe:

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie $\det(A^3)$

Lösung:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) & \cdot(-2) \\ + & \\ & + \end{matrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-5) \\ + \end{matrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 1 = -1$$

$$\Rightarrow \det(A^3) = (\det(A))^3 = (-1)^3 = -1$$

Aufgabe:

Für $x \in \mathbb{R}$ sei $A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & x & 0 \\ 2 & 0 & x^2 \end{pmatrix}$

Finden Sie alle $x \in \mathbb{R}$, so dass A_x invertierbar ist.

Lösung:

$$\det(A_x) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & x & 0 \\ 2 & 0 & x^2 \end{pmatrix} \underset{\text{2. Zeile}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} x \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & x^2 \end{pmatrix} = x \cdot (1 \cdot x^2 - 2 \cdot 2) = x \cdot (x^2 - 4) = x \cdot (x+2) \cdot (x-2)$$

$\Rightarrow$ A_x ist invertierbar $\Leftrightarrow$ $\det(A_x) \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 2\}$

Aufgabe:

Für $x \in \mathbb{R}$ sei $A_x = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$

Finden Sie alle $x \in \mathbb{R}$, so dass A_x invertierbar ist.

Lösung:

$$\det(A_x) = \det\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \cdot(-x) \quad \cdot(-1) \\ \quad + \end{array} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1-x^2 & 1-x \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1-x & x-1 \end{pmatrix} \underset{\text{1. Spalte}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} -1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1-x^2 & 1-x \\ 1-x & x-1 \end{pmatrix}$$

$$= -\left((1-x^2)\cdot(x-1) - (1-x)^2\right) = -\left((1-x)\cdot(1+x)\cdot(-(1-x)) - (1-x)^2\right)$$

$$= -\left(-(1-x)^2 \cdot ((1+x)+1)\right) = +(x-1)^2 \cdot (x+2)$$

$\Rightarrow$ A_x ist invertierbar $\Leftrightarrow$ $\det(A_x) \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$

Aufgabe:

Sei $A \in K^{n \times n}$ und sei $B \in GL(n, K)$.

Zeigen Sie: A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ $B^{-1} \cdot A \cdot B$ ist invertierbar.

Lösung:

$$\det(B^{-1} \cdot A \cdot B) = \underbrace{\det(B^{-1})}_{=(\det(B))^{-1}} \cdot \det(A) \cdot \det(B) = \det(A)$$

$\Rightarrow$ A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $\det(B^{-1} \cdot A \cdot B) \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $B^{-1} \cdot A \cdot B$ ist invertierbar.

$\square$

Aufgabe 8 (4 Punkte):

Ist für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, bei denen alle Einträge gerade ganze Zahlen sind, die Determinante $\det(A)$ stets durch 2 teilbar? Ist sie stets durch 8 teilbar? Ist sie stets durch 64 teilbar?

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \underbrace{a_{1\sigma_1}}_{2|} \cdot \underbrace{a_{2\sigma_2}}_{2|} \cdot \underbrace{a_{3\sigma(3)}}_{2|}$$

$\Rightarrow \quad 2 \mid \det(A), \quad 8 = 2^3 \mid \det(A)$

$64 \nmid \det(A)$

Gegenbsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \det(A) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \quad , \quad 64 \nmid 8 = \det(A).$$

Aufgabe:

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n = \begin{pmatrix} * & \cdots & a_n \\ \vdots & \iddots & \\ a_1 & a_2 & 0 \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$

Zeigen Sie: $\det(A_n) = (-1)^{n \cdot (n-1)/2} \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$

Lösung:

Bew. durch Induktion:

(I.A.) $n = 1$:

$$\det(A_1) = a_1 = (-1)^0 \cdot a_1 = (-1)^{1 \cdot (1-1)/2} \cdot a_1 \quad \checkmark$$

(I.V.) Für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ gelte $\det(A_n) = (-1)^{n \cdot (n-1)/2} \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$

(I.B.) $\det(A_{n+1}) = (-1)^{(n+1) \cdot n/2} \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n+1}$

(I.S.) $\det(A_{n+1}) = \det \left(\begin{array}{ccc|c} & * & & a_{n+1} \\ \hline * & \cdots & a_n & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 \end{array} \right)$

$$\underset{(n+1)\text{-ter Spalte}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} a_{n+1} \cdot (-1)^{1+n+1} \cdot \det(A_n)$$

$$\overset{(I.V.)}{=} a_{n+1} \cdot (-1)^{n+2} \cdot (-1)^{n \cdot (n-1)/2} \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$$

$$= (-1)^{\frac{2n}{2}} \cdot (-1)^{n \cdot (n-1)/2} \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n+1} \qquad \left((-1)^{n+2} = (-1)^n \cdot \underbrace{(-1)^2}_{=1} = (-1)^n \right)$$

$$= (-1)^{(n^2 - n + 2n)/2} \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n+1}$$

$$= (-1)^{(n^2 + n)/2} \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n+1}$$

$$= (-1)^{n \cdot (n+1)/2} \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n+1}. \qquad \square$$

Aufgabe 1.[3+4+3 Punkte]
Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a^2 = bc$ gegeben. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren die $(n \times n)$-Matrix T_n durch

$$T_n = \begin{pmatrix} 2a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & 2a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & c & 2a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & 2a \end{pmatrix}$$

und setzen $t_n := \det(T_n)$.

(i) Berechnen Sie t_2 und t_3 (in Abhängigkeit von a).

(ii) Zeigen Sie: Für $n \geq 4$ gilt $t_n = 2at_{n-1} - a^2 t_{n-2}$.

(iii) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: $t_n = (n+1)a^n$.

(i) $$t_2 = \det\begin{pmatrix} 2a & b \\ c & 2a \end{pmatrix} = 2a \cdot 2a - b \cdot c = 4a^2 - a^2 = 3a^2$$

$$t_3 = \det\begin{pmatrix} 2a & b & 0 \\ c & 2a & b \\ 0 & c & 2a \end{pmatrix} \overset{\text{Entw. nach}}{\underset{\text{1. Zeile}}{=}} 2a \cdot \det\begin{pmatrix} 2a & b \\ c & 2a \end{pmatrix} - b \cdot \det\begin{pmatrix} c & b \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$$

$$= 2a \cdot 3a^2 - \underbrace{b \cdot c}_{= a^2} \cdot 2a = 6a^3 - 2a^3 = 4a^3$$

(ii) $$t_n = \det \underbrace{\begin{pmatrix} 2a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & 2a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & c & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & 2a \end{pmatrix}}_{T_n}$$

$$t_4 = \begin{pmatrix} 2a & b & 0 & 0 \\ c & 2a & b & 0 \\ 0 & c & 2a & b \\ 0 & 0 & c & 2a \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Entw. nach}}{\underset{\text{1. Zeile}}{=}} 2a \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 2a & b & & 0 \\ c & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & c & 2a \end{pmatrix}}_{T_{n-1}} - b \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} c & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & c & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots 0 & c & 2a \end{pmatrix}}$$

$$\overset{\text{Entw. nach}}{\underset{\text{1. Spalte}}{=}} -b \cdot c \cdot \det(T_{n-2})$$

$$= 2a \cdot \det(T_{n-1}) - b \cdot c \cdot \det(T_{n-2})$$

$$= 2a \cdot t_{n-1} - a^2 \cdot t_{n-2}$$

(iii) Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2: t_n = (n+1) \cdot a^n$

Bew.:

I.A: $n = 2$: $t_2 \overset{(i)}{=} 3a^2 = (2+1) \cdot a^2$ ✓

$n = 3$: $t_3 \overset{(i)}{=} 4a^3 = (3+1) \cdot a^3$ ✓

I.V.: Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ und gelte: $t_n = (n+1) \cdot a^n$ und $t_{n+1} = (n+2) \cdot a^{n+1}$

I.B.: $t_{n+2} = (n+3) \cdot a^{n+2}$

I.S.: $t_{n+2} \overset{(ii)}{=} 2 \cdot a \cdot t_{n+1} - a^2 \cdot t_n$

$\overset{I.V}{=} 2a \cdot (n+2) \cdot a^{n+1} - a^2 \cdot (n+1) \cdot a^n$

$= (2n+4) \cdot a^{n+2} - (n+1) \cdot a^{n+2}$

$= (n+3) \cdot a^{n+2}$ ✓

Für $n=1$ gilt $t_n = t_1 = 2a = (1+1) \cdot a^1$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: t_n = (n+1) \cdot a^n$.

Satz (Induktion, Variante)

Sei $m \in \mathbb{Z}$ und für jedes $n \in \mathbb{Z}, n \geq m$ sei $A(n)$ eine Aussage.

Es gelte:

(i) $A(m) \wedge A(m+1)$ (Induktionsanfang)

(ii) $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq m: A(n) \wedge A(n+1) \Rightarrow A(n+2)$

Dann gilt: $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq m: A(n)$