

Satz und Def.:

Sei V ein K -Vektorraum und sei $U \subseteq V$ ein Unterraum.

Für alle $a, b \in V$ def. wir: $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in U$

Dann gilt:

\sim ist eine Äquivalenzrelation auf V und für alle $a \in V$ gilt $[a] = a + U = \{a + u \mid u \in U\}$

$$V/U := \{[a] \mid a \in V\}$$

Bew.:

Seien $a, b, c \in V$. Dann gilt:

(i) $a \sim a \Leftrightarrow a - a \in U \Leftrightarrow 0 \in U$ (w) da U ein Unterraum ist.

$\Rightarrow \sim$ ist reflexiv.

(ii) $a \sim b \Rightarrow a - b \in U \xRightarrow{U \text{ Unterraum}} -(a - b) \in U \Rightarrow b - a \in U \Rightarrow b \sim a$

$\Rightarrow \sim$ ist symmetrisch

(iii) $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a - b \in U \wedge b - c \in U \xRightarrow{U \text{ Unterraum}} (a - b) + (b - c) \in U$

$$\Rightarrow a - c \in U \Rightarrow a \sim c$$

$\Rightarrow \sim$ ist transitiv.

(i) - (iii) $\Rightarrow \sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf V

$$[a] = \{b \in V \mid b \sim a\} = \{b \in V \mid b - a \in U\} = \{b \in V \mid \exists u \in U : b - a = u\}$$

$$= \{b \in V \mid \exists u \in U : b = a + u\} = \{a + u \mid u \in U\} = a + U.$$



Satz und Def.:

Sei V ein K -Vektorraum und sei $U \subseteq V$ ein Unterraum.

V/U ist mit den Verknüpfungen

$$+ : V/U \times V/U \rightarrow V/U, [a] + [b] := [a + b]$$

$$\cdot : K \times V/U \rightarrow V/U, \lambda \cdot [a] := [\lambda \cdot a]$$

ein K -Vektorraum. V/U heißt Quotientenvektorraum. $[0] = 0 + U = U$ ist das Nullelement.

Die Abb.: $\pi: V \rightarrow V/U$, $\pi(u) = [u]$ ist linear und surjektiv und es gilt $\text{Kern}(\pi) = U$.

Insbes. gilt: $\dim(V) = \dim(U) + \dim(V/U)$

Bew (für den letzten Teil)

• π ist linear (klar) ✓

• π ist surjektiv:

Sei $[u] \in V/U$. Dann gilt $\pi(u) = [u]$ ✓

• $\text{Kern}(\pi) = \{v \in V \mid \pi(v) = 0\} = \{v \in V \mid [v] = [0]\} = \{v \in V \mid v \sim 0\}$
 $= \{v \in V \mid v - 0 \in U\} = U$ ✓

• Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen gilt:

$$\dim(V) = \dim \text{Kern}(\pi) + \dim(\text{Bild}(\pi)) = \dim(U) + \dim(V/U) \quad \checkmark$$

Satz (Homomorphiesatz)

Seien V und W K -Vektorräume sei $U \subseteq V$ ein Unterraum und sei $\bar{V} = V/U$.

Sei $\pi: V \rightarrow \bar{V}$ def. durch $\pi(v) = [v]$.

Sei $f: V \rightarrow W$ linear mit $U \subseteq \text{Kern}(f)$.

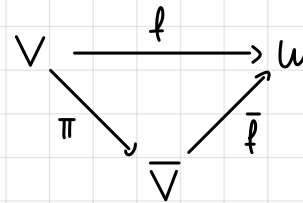
Dann gilt:

Es ex. eine eindeutig bestimmte lineare Abb. $\bar{f}: \bar{V} \rightarrow W$ mit $f = \bar{f} \circ \pi$.

Für diese Abb. gilt:

(1) \bar{f} ist injektiv $\Leftrightarrow U = \text{Kern}(f)$

(2) $\text{Bild}(\bar{f}) = \text{Bild}(f)$



Kor. (Isomorphiesatz)

Seien V und W K -Vektorräume und sei $f: V \rightarrow W$ linear.

Dann gilt:

Es ex. ein Isomorphismus $\bar{f}: V/\text{Kern}(f) \rightarrow \text{Bild}(f)$.

Insbes. gilt:

Ist f surjektiv, so ex. ein Isomorphismus $\bar{f}: V/\text{Kern}(f) \rightarrow W$.

