Aufgabe:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des reellen linearen Gleichungssystems:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 16 \\
2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 12 \\
3x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= -9
\end{aligned}
$$

Lösung:

$$
(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 7 & 16 \\ 2 & 4 & 6 & 12 \\ 3 & 3 & -3 & -9 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\substack{II + (-2)\cdot I \\ III + (-3)\cdot I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 7 & 16 \\ 0 & -2 & -8 & -20 \\ 0 & -6 & -24 & -57 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\substack{-\frac{1}{2}\cdot II \\ -\frac{1}{3}\cdot III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 7 & 16 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & 8 & 19 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{III + (-2)\cdot II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 7 & 16 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)
$$

$\Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 2 < 3 = \operatorname{rang}(A|b)$

$\Rightarrow \text{Lös}(A, b) = \emptyset.$

Aufgabe:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des reellen linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Lösung:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\mathrm{III}+(-2)\cdot\mathrm{I}]{\mathrm{II}+(-1)\cdot\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -12 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} -1\cdot\mathrm{II} \\ -1\cdot\mathrm{III} \\ \mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{III} \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}+(-3)\cdot\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & -7 & -35 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_2 + 3x_3 &= 12 \\ -7x_3 &= -35 \end{aligned}$$

$\overset{\mathrm{III}}{\Rightarrow}$ $x_3 = -\frac{1}{7}\cdot(-35) = 5$ $\quad\overset{\mathrm{II}}{\Rightarrow}$ $x_2 = 12 - 3x_3 = 12 - 3\cdot(5) = -3$

$\overset{\mathrm{I}}{\Rightarrow}$ $x_1 = 3 - x_2 - x_3 = 3 - (-3) - 5 = 1$

$\Rightarrow$ $\text{Lös}(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$

Aufgabe:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des reellen linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_2 + x_5 &= 2 \\ x_4 + x_5 &= -1 \\ x_2 + x_6 &= 1 \end{aligned}$$

Lösung:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{III} + (-1)\cdot \text{I}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x_2 + x_5 &= 2 \\ x_4 + x_5 &= -1 \\ -x_5 + x_6 &= -1 \end{aligned}$$

$$\overset{\text{III}}{\Rightarrow} \quad x_5 = -(-1 - x_6) = x_6 + 1 \quad \overset{\text{II}}{\Rightarrow} \quad x_4 = -1 - x_5 = -1 - (x_6 + 1) = -x_6 - 2$$

$$\overset{\text{I}}{\Rightarrow} \quad x_2 = 2 - x_5 = 2 - (x_6 + 1) = -x_6 + 1$$

$$\Rightarrow \text{Lös}(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_6 + 1 \\ x_3 \\ -x_6 - 2 \\ x_6 + 1 \\ x_6 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_3, x_6 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_3, x_6 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Merkregel:

Man löst nach den Variablen auf, die am Anfang einer Zeile stehen.

Die anderen Variablen sind frei und dürfen beliebige Werte annehmen.

Aufgabe:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des reellen linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 \phantom{{}-6x_4} &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 6x_4 &= 0 \\ 3x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{II}+(-2)\cdot\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{3}\cdot\mathrm{II}]{\mathrm{III}+\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\overset{\mathrm{II}}{\Rightarrow} x_3 = -2x_4 \quad \overset{\mathrm{I}}{\Rightarrow} x_1 = -x_2 - 2x_3 = -x_2 - 2\cdot(-2x_4) = -x_2 + 4x_4$$

$$\Rightarrow \text{Lös}(A,0) = \text{Kern}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -x_2+4x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: v_1} + x_4 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: v_2} \;\middle|\; x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}(v_1, v_2)$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2\}$ ist eine Basis von $\text{Kern}(A)$.

Aufgabe

Entscheiden Sie in Abhängigkeit des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$, wann die folgenden linearen Gleichungssysteme keine, genau eine, oder unendlich viele Lösungen haben. Sie brauchen die Lösungen nicht explizit anzugeben.

(a)

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +(\alpha-1)x_2 & +(\alpha+2)x_3 & = & \alpha \\ x_1 & +(1-\alpha)x_2 & -(2+\alpha)x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & +(2\alpha-2)x_2 & +(3\alpha+6)x_3 & = & 1 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & -3x_2 & -2x_2 & = & 1 \\ x_1 & -x_2 & (\alpha^2-2\alpha-8)x_3 & = & 1 \\ x_1 & -3x_2 & (\alpha^2-2\alpha-5)x_3 & = & 1 \end{array}$$

(a) $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \alpha-1 & \alpha+2 & \alpha \\ 1 & 1-\alpha & -(2+\alpha) & 0 \\ 2 & 2\alpha-2 & 3\alpha+6 & 1 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-\alpha & -(2+\alpha) & 0 \\ 2 & \alpha-1 & \alpha+2 & \alpha \\ 2 & 2\alpha-2 & 3\alpha+6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\mathrm{III}+(-2)\cdot\mathrm{I}]{\mathrm{II}+(-2)\cdot\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-\alpha & -2-\alpha & 0 \\ 0 & 3\alpha-3 & 3\alpha+6 & \alpha \\ 0 & 4\alpha-4 & 5\alpha+10 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{4}\cdot\mathrm{III}]{\frac{1}{3}\cdot\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-\alpha & -2-\alpha & 0 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha+2 & \frac{\alpha}{3} \\ 0 & \alpha-1 & \frac{5}{4}\alpha+\frac{10}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}+(-1)\cdot\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-\alpha & -2-\alpha & 0 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha+2 & \frac{\alpha}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\cdot(\alpha+2) & \frac{1}{4}-\frac{\alpha}{3} \end{array}\right)$$

1. Fall: $\alpha = 1$

$$\Rightarrow (A|b) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}-\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}\cdot\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{12} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III + (-\frac{3}{4}) \cdot II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{12} \end{array} \right)$$

$\Rightarrow \quad \text{Rang}(A) = 2 < 3 = \text{Rang}(A, b) \Rightarrow \text{Lös}(A, b) = \emptyset$

2. Fall: $\lambda \neq 1$

$$\Rightarrow (A \mid b) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-\lambda & -2-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda+2 & \frac{\lambda}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \cdot (\lambda+2) & \frac{1}{4} - \frac{\lambda}{3} \end{array} \right)$$

2.1. Fall: $\lambda \neq -2$

$\Rightarrow \text{Rang}(A) = 3 \Rightarrow$ Das GLS hat genau eine Lösung.

2.2. Fall: $\lambda = -2$

$\Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{\lambda}{3} = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \neq 0$

$\Rightarrow \quad \text{Rang}(A) = 2 < 3 = \text{Rang}(A, b) \Rightarrow \text{Lös}(A, b) = \emptyset$

(b) $$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda^2 - 2\lambda - 8 & 1 \\ 1 & -3 & \lambda^2 - 2\lambda - 5 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[III + (-1) \cdot I]{II + (-1) \cdot I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & \lambda^2 - 2\lambda - 6 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 2\lambda - 3 & 0 \end{array} \right)$$

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 \Leftrightarrow \lambda = 3 \vee \lambda = -1$

1. Fall: $\lambda \in \{-1; 3\}$

$\Rightarrow \text{Rang}(A) = \text{Rang}(A, b) < 3 \Rightarrow |\text{Lös}(A, b)| = \infty$

2. Fall: $\lambda \notin \{-1; 3\}$

$\Rightarrow \text{Rang}(A) = \text{Rang}(A, b) = 3 \Rightarrow$ Das GLS hat genau eine Lösung.

Aufgabe

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme in Unbekannten $x_1, \dots, x_4$. Bestimmen Sie dazu jeweils die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix und deren reduzierte Zeilenstufenform.

(a)

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & & = & 6 \\ x_1 & -x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = & -5 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & & +x_3 & 2x_4 & = & 2 \\ x_1 & -x_2 & & -x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 1 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rrcr} x_2 & +x_4 & = & 2 \\ x_3 & +x_4 & = & 4 \\ x_3 & +x_2 & = & 1 \end{array}$$

(a) $(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -5 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\mathrm{III}+(-1)\cdot\mathrm{I}]{\mathrm{II}+(-2)\cdot\mathrm{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -6 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[-\frac{1}{3}\cdot\mathrm{III}]{\frac{1}{4}\cdot\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\mathrm{II}+\frac{3}{4}\cdot\mathrm{III}]{\mathrm{I}+(-1)\cdot\mathrm{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\mathrm{I}+\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

ist in reduzierter ZSF.

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 \qquad\qquad - \tfrac{1}{4}x_4 &= \tfrac{3}{2} \\ x_2 \qquad - \tfrac{1}{4}x_4 &= \tfrac{5}{2} \\ x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x_3 &= 2 + x_4 \\ x_2 &= \tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{4} \cdot x_4 \\ x_1 &= \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{4} x_4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Lös}(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{1}{4}x_4 \\ \frac{5}{2} + \frac{1}{4}x_4 \\ 2 + x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \; x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) $$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{III} + (-2)\cdot \text{I}]{\text{II} + (-1)\cdot \text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-1 \cdot \text{II}]{\text{III} + (-1)\cdot \text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{4}\cdot \text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{II} + \text{III}]{\text{I} + (-2)\cdot \text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ist in reduzierter ZSF.

$\Rightarrow \quad \text{Rang}(A) = 2 < 3 = \text{Rang}(A,b) \Rightarrow \text{Lös}(A,b) = \emptyset$

(c) $$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III+(-1)\cdot I} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III-II} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}\cdot III} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[II-III]{I-III} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

ist in reduzierter ZSF.

$$\Rightarrow \quad x_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{3}{2}, \quad x_4 = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Lös}(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \middle| \, x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$