Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Mathematisches Institut
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Dr. Oleg Bogopolski

23.07.2011

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I

Bearbeitungszeit: 120 min

Bitte in Druckschrift ausfüllen!

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikelnr.: ____________________

Studienfach: ____________________

Fachsemester: ____________________

> Mit meiner Unterschrift melde ich mich zur oben genannten Klausur an und bestätige, dass ich mich momentan nicht in einem Urlaubssemester befinde und damit berechtigt bin eine Prüfung abzulegen.
>
> ....
> (Unterschrift)

Hinweis: Wie üblich müssen Sie bei den Aufgaben 2-7 den Lösungsweg angeben.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
Punkte								

Note: ____

Aufgabe 1 [18 Punkte]

Die Aufgabenteile a)-h) in Aufgabe 1 müssen nicht begründet werden.

Bei den Multiple-Choice Aufgaben a)-e) gibt jede richtige Antwort zwei Punkte, jede nicht beantwortete 0 Punkte und für jede falsche Antwort werden zwei Punkte abgezogen. Falls Sie im Teil a)-e) insgesamt eine negative Anzahl an Punkten erreichen, wird dieser Teil mit 0 Punkten gewertet.

		Ja	Nein
a)	Sind U und V Untervektorräume eines Vektorraums W, so ist $U \cup V$ auch ein Untervektorraum von W.	☐	☒
b)	Die Vektoren $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^n$ heißen linear unabhängig, wenn gilt: Sind $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, so folgt $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$.	☐	☒
c)	Eine lineare Abbildung φ ist genau dann bijektiv, wenn $\ker(\varphi) = 0$ ist.	☐	☒
d)	Es gilt $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$ für alle Matrizen $A, B \in M(n, n, \mathbb{R})$.	☒	☐
e)	Die Nullmatrix ist diagonalisierbar.	☒	☐

a) s.u.

b) Richtig: $\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$

c) φ ist injektiv $\Leftrightarrow \ker(\varphi) = 0$. φ muss nicht notwendig surjektiv sein!

d) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(B) \cdot \det(A) = \det(B \cdot A)$

e) Jede Diagonalmatrix $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar:

$$A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot e_1$$

$$A \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_2 \cdot e_2$$

$$\vdots$$

$$A \cdot e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_n \cdot e_n$$

$(A \cdot e_i = \lambda_i \cdot e_i)$

$\Rightarrow \{e_1, \ldots, e_n\}$ ist eine Basis von K^n bestehend aus Eigenvektoren von A.

$\Rightarrow A$ ist diagonalisierbar.

Aufgabe:

Sei V ein K-Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume von V.

Zeigen Sie: $U_1 \cup U_2$ ist ein Unterraum von V $\Leftrightarrow$ $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.

Lösung:

„$\Leftarrow$" Es gelte: $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.

Dann gilt: $U_1 \cup U_2 = U_2$ oder $U_1 \cup U_2 = U_1$

$\Rightarrow$ $U_1 \cup U_2$ ist ein Unterraum von V, denn U_1 und U_2 sind Unterräume von V.

„$\Rightarrow$" Es gelte: $U_1 \cup U_2$ ist ein Unterraum von V

Angenommen $U_1 \subsetneq U_2$ und $U_2 \subsetneq U_1$.

Dann ex. ein $u_1 \in U_1 \setminus U_2$ und ein $u_2 \in U_2 \setminus U_1$. Setze $u := u_1 + u_2$.

Dann gilt $u \in U_1 \cup U_2$, da $u_1, u_2 \in U_1 \cup U_2$ und $U_1 \cup U_2$ ein Unterraum von V ist.

$\Rightarrow$ $u \in U_1 \vee u \in U_2$. Es sei o.B.d.A. $u \in U_1$.

Dann gilt $u_2 = u - u_1 \in U_1$, da $u, u_1 \in U_1$ und U_1 ein Unterraum von V ist. $\lightning$

$\Rightarrow$ $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ $\square$

f) Geben Sie alle Untergruppen der Gruppe $(\mathbb{Z}_{15}, +_{15})$ an. [2 Punkte]

Lösung

$$\{0\},\ \{0,5,10\},\ \{0,3,6,9,12\},\ (\mathbb{Z}_{15}, +_{15})$$

$\{U \subseteq \mathbb{Z}_n \mid U \text{ ist Untergruppe von } (\mathbb{Z}_n, +_n)\} = \{\langle \bar{a} \rangle \mid a \in \mathbb{N},\ a \text{ teilt } n\}$

$\langle \bar{a} \rangle = \{m \cdot \bar{a} \mid m \in \mathbb{Z}\}$

$a \mid 15 \iff a \in \{1,3,5,15\}$

$\langle \bar{1} \rangle = \mathbb{Z}_{15}$

$\langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}\}$

$\langle \bar{5} \rangle = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}\}$

$\langle \overline{15} \rangle = \langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\}$

$\left(\begin{array}{l} U \text{ Untergruppe von } G \Rightarrow |U| \text{ teilt } |G| \\ |\mathbb{Z}_{15}| = 15 \Rightarrow |U| \text{ teilt } 15 \end{array} \right)$

g) Stellen Sie die Permutation $\sigma = (3\,4\,5) \circ (3\,7\,8\,1) \circ (9\,2\,8\,3) \in S_9$ als Produkt von unabhängigen Zyklen dar und berechnen Sie $\mathrm{Sign}(\sigma)$ und $\mathrm{Ord}(\sigma)$. [3 Punkte]

Lösung

- $\sigma = (1\,4\,5\,3\,9\,2) \circ (7\,8)$
- $\mathrm{Sign}(\sigma) = (-1)^5(-1) = 1$
- $\mathrm{Ord}(\sigma) = 6$

h) Sei $\varphi : (\mathbb{Z}_6, +_6) \to (\mathbb{Z}_9, +_9)$ ein Gruppenhomomorphismus definiert durch $\varphi(1) = 3$. Berechnen Sie $\ker(\varphi)$ und $\mathrm{im}(\varphi)$. [3 Punkte]

Lösung

$$\ker(\varphi) = \{0, 3\},\quad \mathrm{im}(\varphi) = \{0, 3, 6\}$$

$\varphi(n \cdot z) = n \cdot \varphi(z)$

$\varphi(0) = 0 \cdot \varphi(1) = 0$ ✓

$\varphi(1) = 1 \cdot \varphi(1) = 3$

$\varphi(2) = 2 \cdot \varphi(1) = 2 \cdot 3 = 6$

$\varphi(3) = 3 \cdot \varphi(1) = 3 \cdot 3 = 9 = 0$ ✓

$\varphi(4) = 4 \cdot \varphi(1) = 4 \cdot 3 = 12 = 3$

$\varphi(5) = 5 \cdot \varphi(1) = 5 \cdot 3 = 15 = 6$

$\varphi(z_1 + z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2)$

$z_1 = z_2 \Rightarrow \varphi(2 \cdot z_1) = 2\varphi(z_1)$

$\vdots$

Induktion $\Rightarrow \varphi(nz) = n\varphi(z)$

$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$

$\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

g) Stellen Sie die Permutation $\sigma = (3\,4\,5) \circ (3\,7\,8\,1) \circ (9\,2\,8\,3) \in S_9$ als Produkt von unabhängigen Zyklen dar und berechnen Sie $\mathrm{Sign}(\sigma)$ und $\mathrm{Ord}(\sigma)$. [3 Punkte]

Lösung

- $\sigma = (1\,4\,5\,3\,9\,2) \circ (7\,8)$
- $\mathrm{Sign}(\sigma) = (-1)^5(-1) = 1$
- $\mathrm{Ord}(\sigma) = 6$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$((3\,7\,8\,1) \circ (9\,2\,8\,3))(8)$

$= (3\,7\,8\,1)\underbrace{((9\,2\,8\,3)(8))}_{=3}$

$= (3\,7\,8\,1)(3)$

$= 7$

$\sigma = (3\,4\,5) \circ (3\,7\,8\,1) \circ (9\,2\,8\,3)$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 9 & 5 & 3 & 6 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

$= (1\,4\,5\,3\,9\,2) \circ (7\,8)$

$= (1\,2) \circ (1\,9) \circ (1\,3) \circ (1\,5) \circ (1\,4) \circ (7\,8)$

$\Rightarrow \mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^6 = 1$

$\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{kgV}(6, 2) = 6$

$= \mathrm{kgV}(\underbrace{\mathrm{ord}(1\,4\,5\,3\,9\,2)}_{=6}, \underbrace{\mathrm{ord}(7\,8)}_{=2})$

Def.:

$S_n := \{ \varphi : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\} \mid \varphi \text{ ist bijektiv} \}$

$(S_n, \circ)$ heißt symmetrische Gruppe oder auch Permutationsgruppe von $\{1,\dots,n\}$.

Die Elemente $\sigma \in S_n$ schreibt man wie folgt:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Def.:

$\sigma \in S_n$ heißt k-Zykel $(k = 1,\dots,n) :\Leftrightarrow$

Es ex. $a_1,\dots,a_k \in \{1,\dots,n\}$ mit:

$\sigma(a_i) = a_{i+1} \quad , 1 \le i < k$

$\sigma(a_k) = a_1$

$\sigma(j) = j \quad \forall j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{a_1,\dots,a_k\}$

Schreibweise: $\sigma = (a_1 \dots a_k)$

σ heißt Transposition $:\Leftrightarrow$ σ ist ein 2-Zykel.

Bsp.:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (\underset{a_1}{1}\ \underset{a_2}{2}\ \underset{a_3}{4})$$

Def.:

Seien $\sigma_1 = (a_1 \dots a_k)$, $\sigma_2 = (b_1 \dots b_l) \in S_n$ Zyklen.

σ_1 und σ_2 heißen unabhängig $:\Leftrightarrow \{a_1,\dots,a_k\} \cap \{b_1,\dots,b_l\} = \emptyset$.

Satz:

Jede Permutation $\sigma \in S_n$ lässt sich als Produkt von paarweise unabhängigen Zyklen darstellen.

Kochrezept:

Sei $\sigma \in S_n$. Ist $\sigma = id$, so ist $\sigma = (1)$. Sei also $\sigma \neq id$.

1. Schritt:

Wähle die kleinste Zahl a_1 mit $\sigma(a_1) \neq a_1$ und bilde dann sukzessive $a_2 := \sigma(a_1)$, $a_3 := \sigma(a_2)$, ...

Es muss ein $k \in \{1, ..., n\}$ geben mit $a_k = a_1$ da $\{1, ..., n\}$ endlich ist. Setze $\sigma_1 := (a_1 \dots a_{k-1})$

2. Schritt:

Wähle die kleinste Zahl $b_1 \in \{1, ..., n\} \setminus \{a_1, ..., a_k\}$ mit $\sigma(b_1) \neq b_1$ und verfahre wie im 1. Schritt.

Nach endlich vielen Schritten m muss das Verfahren abbrechen.

Es gilt $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_m$.

Bsp.:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= (2\ 4\ 3) \circ (5\ 8) \circ (6\ 7)$$

Satz:

Jeder k-Zyklus lässt sich als Produkt von Transpositionen darstellen.

Es gilt: $(a_1 \dots a_k) = (a_1\ a_k) \circ (a_1\ a_{k-1}) \circ \dots \circ (a_1\ a_3) \circ (a_1\ a_2)$

Insbes. gilt: Jede Permutation $\sigma \in S_n$ lässt sich als Produkt von Transpositionen darstellen.

Ist σ ein Produkt von m Transpositionen, so gilt $\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^m$

Def.:

Sei $\sigma \in S_n$.

$\operatorname{Ord}(\sigma) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \sigma^k = id\}$ heißt Ordnung von σ

Satz:

(i) Sei $\sigma \in S_n$ ein k-Zyklus. Dann gilt: $\mathrm{Ord}(\sigma) = k$

(ii) Sei $\sigma \in S_n$ und seien $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in S_n$ paarweise unabhängige Zyklen mit $\sigma = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_k$.

Dann gilt $\mathrm{Ord}(\sigma) = \mathrm{kgV}(\mathrm{Ord}(\sigma_1), \dots, \mathrm{Ord}(\sigma_k))$

Aufgabe 2 [14 Punkte]

a) Zeigen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus, dass $\mathrm{ggT}(50, 13) = 1$ ist.

[4 Punkte]

b) Finden Sie $a, b \in \mathbb{Z}$, so dass $1 = 50a + 13b$ gilt.

[5 Punkte]

c) Finden Sie ein Element $b \in \mathbb{Z}_{50}^*$, so dass $13b = 1$ in $\mathbb{Z}_{50}^*$ gilt.

[3 Punkte]

d) Finden Sie ein Element $b \in \mathbb{Z}_{50}^*$, so dass $13b = 3$ in $\mathbb{Z}_{50}^*$ gilt.

[2 Punkte]

Lösung

a) Mit dem Euklidischen Algorithmus erhalten wir

$$\begin{aligned} 50 &= 3 \cdot 13 + 11 && (1) \\ 13 &= 1 \cdot 11 + 2 && (2) \\ 11 &= 5 \cdot 2 + 1 && (3) \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{ggT}(50, 13) = 1$. (der letzte von 0 verschiedene Rest)

b) Aus a) folgt

$$\begin{aligned} 1 &\overset{(3)}{=} 11 - 5 \cdot 2 = (\overbrace{50 - 3 \cdot 13}^{\text{nach } (1)}) - 5(\overbrace{13 - 11}^{\text{nach } (2)}) = 50 - 8 \cdot 13 + 5 \cdot 11 = \\ &= 50 - 8 \cdot 13 + 5(50 - 3 \cdot 13) = 6 \cdot 50 - 23 \cdot 13 \end{aligned}$$

Also $a = 6$ und $b = -23$.

c) Aus dem Augabenteil b) haben wir die Gleichung $50 \cdot 6 + 13 \cdot (-23) = 1$ in $\mathbb{Z}$. Diese gilt auch in $\mathbb{Z}_{50}^*$. Da $6 \cdot 50 = 0$ in $\mathbb{Z}_{50}^*$ haben wir $13 \cdot (-23) = 1$. Also $b = -23$, reduziert modulo 50 ist $b = 27$. $-23 = -23 + 1 \cdot 50 = 27$

d) $13 \cdot 27 = 1$ ist äquivalent zu $13 \cdot 27 \cdot 3 = 1 \cdot 3$. Also $b = 27 \cdot 3 = 81$, reduziert modulo 50 ergibt es $b = 31$.

Aufgabe 3 [12 Punkte]

a) Bestimmen Sie alle Lösungen des inhomogenen reellen Gleichungssystems:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & 3x_3 & + & 6x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & -6x_4 & = & 5 \end{array}\right.$$

[7 Punkte]

b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des reellen Gleichungssystems:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & 3x_3 & + & 6x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & -6x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

[5 Punkte]

Lösung

Das lineare Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & 3x_3 & + & 6x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & -6x_4 & = & 5 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ + \end{array}$$

mit der Addition des (-2)–fachen der 2. Zeile zu der 3. Zeile ist äquivalent zu

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & 3x_3 & + & 6x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 1 \\ & & & & -3x_3 & & -6x_4 & = & 3 \end{array}\right. \begin{array}{l} + \\ \\ \cdot 1 \end{array}$$

und weiter mit der Addition der 3. Zeile zu der 1. Zeile ist äquivalent zu

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 1 \\ & & & & -3x_3 & & -6x_4 & = & 3 \end{array}\right.$$

Zuerst lösen wir das homogene Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 0 \\ & & & & -3x_3 & & -6x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Für die Basisvektoren des homogenen Gleichungssystems setzen wir

1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -3x_3 - 6\cdot 0 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \\ x_1 + 1 + 2\cdot 0 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \end{array}$

2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -3x_3 - 6\cdot 1 = 0 \Rightarrow x_3 = -2 \\ x_1 + 0 + 2\cdot(-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 4 \end{array}$

$\Rightarrow x_3 = -2x_4$

$x_1 = -x_2 - 2x_3 = -x_2 + 4\cdot x_4$

$\Rightarrow \text{Lös}(A,0) = \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 + 4x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ x_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:v_1} + x_4 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:v_2} \,\middle|\, x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$

$= \text{span}\{v_1, v_2\}$

v_1 erhält man, wenn man in der allgemeinen Lösung $x_2 = 1$ und $x_4 = 0$ setzt.

v_2 erhält man, wenn man in der allgemeinen Lösung $x_2 = 0$ und $x_4 = 1$ setzt.

b) Das homogene Gleichungssystem hat eine Basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

a) Wir suchen eine spezielle Lösung. Für diese setzen wir $x_2 = 0$ und $x_4 = 0$. Also ist $-3x_3 - 6 \cdot 0 = 3 \Rightarrow x_3 = -1$ und $x_1 + 0 + 2(-1) = 1 \Rightarrow x_1 = 3$. Alle Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems sind:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Eine andere Schreibweise:

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 3 - \lambda_1 + 4\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ -1 - 2\lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$\text{Lös}(A,b) = v_0 + \text{Lös}(A,0)$, wobei $v_0 \in \text{Lös}(A,b)$ beliebig.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ \quad -3x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$$

$x_2 := 0$, $x_4 := 0$

$\Rightarrow \quad -3x_3 - 6 \cdot 0 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -1$

$x_1 = 1 - \underbrace{x_2}_{=0} - 2\underbrace{x_3}_{=-1} = 1 + 2 = 3$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Lös}(A,b)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ -3x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = -\frac{1}{3} \cdot (3 + 6x_4) = -1 - 2x_4$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - x_2 - 2x_3 \\ &= 1 - x_2 - 2 \cdot (-1 - 2x_4) \\ &= 3 - x_2 + 4x_4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Lös}(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} 3 - x_2 + 4x_4 \\ x_2 \\ -1 - 2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \; x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 4 [14 Punkte]

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A. [4 Punkte]

b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert λ den zugehörigen Eigenraum $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$. [6 Punkte]

c) Entscheiden Sie, ob die Matrix A diagonalisierbar ist und geben Sie gegebenenfalls eine invertierbare Matrix T und eine Diagonalmatrix D an, so dass

$$T^{-1}AT = D.$$

[4 Punkte]

Lösung

a)

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) - (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) \\ &= (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1) \end{aligned}$$

$\chi_A(\lambda) = 0$ gilt genau dann wenn $\lambda \in \{-1, 1\}$, also die Matrix A hat Eigenwerte 1 und -1.

b) • Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = 1$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Eig}(A,1) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (A - E_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Das lineare homogene Gleichungssystem.

$$\left\{ \begin{array}{rrl} -x_1 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & -x_3 & = 0 \end{array} \right. \quad \text{ist äquivalent zu } x_1 - x_3 = 0$$

mit führenden Unbekannten x_1 und Parameterunbekannten x_2, x_3. Für die Lösung setzen wir

1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 - 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ und

2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$

Also ist

$$\mathrm{Eig}(A,1) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

- Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = -1$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Eig}(A,-1) &= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (A+E_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

Das lineare homogene Gleichungssystem.

$$\left\{\begin{array}{lllll} x_1 & & +x_3 & = 0 \\ & 2x_2 & & = 0 \\ x_1 & & +x_3 & = 0 \end{array}\right. \text{ ist äquivalent zu } \left\{\begin{array}{rl} x_1 + x_3 & = 0 \\ x_2 & = 0 \end{array}\right.$$

mit führenden Unbekannten x_1, x_2 und Parameterunbekannten x_3. Für die Lösung setzen wir $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \; x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ Also ist

$$\mathrm{Eig}(A,-1) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

c) Die Matrix A ist diagonalisierbar, weil $\dim \mathrm{Eig}(A,1) + \dim \mathrm{Eig}(A,-1) = 2 + 1 = 3$.
Es gilt für

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}AT = D$$

Aufgabe:

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert λ von A den zugehörigen Eigenraum $\mathrm{Eig}(A,\lambda)$.

(c) Entscheiden Sie, ob die Matrix A diagonalisierbar ist. Begründen Sie Ihre Antwort!

Falls ja, existiert eine invertierbare Matrix $T \in GL(3,\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

mit $T^{-1} \cdot A \cdot T = D$. Bestimmen Sie in diesem Fall T und D.

Lösung:

(a) $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E_3) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \overset{\text{Entw. nach}}{\underset{\text{2. Zeile}}{=}} (1-\lambda) \cdot \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$= (1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 1) = -(\lambda - 1) \cdot (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 1) = -(\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda + 1)^1$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ sind die Eigenwerte von A mit $\mathrm{alg}(A,\lambda_1) = 2$ und $\mathrm{alg}(A,\lambda_2) = 1$

(b) $\mathrm{Eig}(A,\lambda_1) = \mathrm{Kern}(A - \lambda_1 \cdot E_3) \qquad (\lambda_1 = 1)$

$= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \\ \cdot 1 \end{matrix} \qquad \left(A - 1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$

$= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \qquad (x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3)$

$= \left\{ x_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: v_1} + x_3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: v_2} \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

$= \mathrm{span}\{v_1, v_2\}$

$\Rightarrow \{v_1, v_2\}$ ist eine Basis von $\mathrm{Eig}(A,\lambda_1)$

$$\mathrm{Eig}(A,\lambda_2) = \mathrm{Kern}(A-\lambda_2\cdot E_3) \qquad (\lambda_2 = -1)$$

$$= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot \frac{1}{2} \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \\ + \end{matrix} \qquad \left(A-1\cdot E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{R} \right\} \qquad \left(\begin{matrix} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \Rightarrow x_1 = -x_3 \end{matrix} \right)$$

$$= \left\{ x_3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:v_3} \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{span}\{v_3\}$$

$\Rightarrow \{v_3\}$ ist eine Basis von $\mathrm{Eig}(A,\lambda_2)$.

(c) $\mathrm{geom}(A,\lambda_1) = \dim \mathrm{Eig}(A,\lambda_1) = 2 = \mathrm{alg}(A,\lambda_1)$ und $\mathrm{geom}(A,\lambda_2) = \dim \mathrm{Eig}(A,\lambda_2) = 1 = \mathrm{alg}(A,\lambda_2)$

$\Rightarrow$ A ist diagonalisierbar.

Alternativ:

$\dim \mathrm{Eig}(A,\lambda_1) + \dim \mathrm{Eig}(A,\lambda_2) = 2+1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

$\Rightarrow$ A ist diagonalisierbar.

Setze $T := (v_1\ v_2\ v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

und $D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Dann gilt: $T^{-1} \cdot A \cdot T = D$

Probe:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ sind die Eigenwerte von A

$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\{v_1, v_2\}$ ist eine Basis von $\mathrm{Eig}(A, \lambda_1)$

$v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\{v_3\}$ ist eine Basis von $\mathrm{Eig}(A, \lambda_2)$

$$A \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot v_1 \checkmark$$

$$A \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot v_2 \checkmark$$

$$A \cdot v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \cdot v_3 \checkmark$$

Zusatz:

Berechnen Sie A^n für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Lösung:

$$A^n = T \cdot D^n \cdot T^{-1} = \begin{cases} T \cdot E_3 \cdot T^{-1}, & n \text{ gerade} \\ T \cdot D \cdot T^{-1}, & n \text{ ungerade} \end{cases} = \begin{cases} E_3, & n \text{ gerade} \\ A, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Probe:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3 \checkmark$$

Aufgabe 5 [14 Punkte]

Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$V = \mathcal{L}(v_1, v_2),\ W = \mathcal{L}(w_1, w_2)$$

zwei Untervektorräume von $\mathbb{R}^4$.

a) Berechnen Sie eine Basis von $V \cap W$. [8 Punkte]

b) Berechnen Sie eine Basis von $V + W$. [6 Punkte]

Lösung

(a)

$$\begin{aligned} V \cap W &= \{\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 \mid \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \text{ und es existieren } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \\ &\quad \text{so dass } \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2\}. \end{aligned}$$

Die Gleichung $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2$ ist äquivalent zu

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \alpha_1 & & -\beta_1 & & = 0 \\ & \alpha_2 & +\beta_1 & +\beta_2 & = 0 \\ \alpha_1 & +\alpha_2 & & +\beta_2 & = 0 \\ \alpha_1 & +2\alpha_2 & +\beta_1 & & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} \alpha_1 & & -\beta_1 & & = 0 \\ & \alpha_2 & +\beta_1 & +\beta_2 & = 0 \\ & & & -\beta_2 & = 0 \end{array} \right.$$

Es folgt, dass $\beta_2 = 0$ und β_1 kann beliebig gewählt werden. Also ist

$$\begin{aligned} V \cap W &= \{\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 \mid \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \text{ und } \beta_2 = 0\} \\ &= \{\beta_1 w_1 \mid \beta_1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \beta_1 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Also ist $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $V \cap W$.

(b) $V + W = \mathcal{L}(v_1, v_2, w_1, w_2)$. Wir schreiben die Erzeugenden als Zeilen einer Matrix, bringen diese auf Zeilenstufenform. Dann sind die nicttrivialen Zeilen linear unabhängig und erzeugen v_1, v_2, w_1, w_2, also eine Basis.

$$
\begin{array}{rrrrl}
1 & 0 & 1 & 1 & \\
0 & 1 & 1 & 2 & \\
1 & -1 & 0 & -1 & (-\text{ 1. Zeile}) \\
0 & -1 & -1 & 0 & (+\text{ 2. Zeile}) \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & \\
0 & 1 & 1 & 2 & \\
0 & -1 & -1 & -2 & (+\text{ 2. Zeile}) \\
0 & 0 & 0 & 2 & \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & \\
0 & 1 & 1 & 2 & \\
0 & 0 & 0 & 2 & \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Eine Basis von $V + W$ ist

$$
\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}
$$

Aufgabe:

Seien $u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ und sei

$U = \operatorname{span}\{u_1, u_2\}$ und $W = \operatorname{span}\{w_1, w_2\}$.

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $U+W$.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $U \cap W$.

Lösung:

(a) $U+W = \operatorname{span}\{u_1, u_2, w_1, w_2\}$.

$$\begin{pmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ w_1^T \\ w_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \\ + \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 1 \quad \cdot 1 \\ + \\ \quad + \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis von $U+W$.

(b) $U \cap W = \{ v \in \mathbb{R}^4 \mid v \in U \land v \in W \}$

$= \{ v \in W \mid v \in U \}$.

$= \{ \beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2 \mid \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ und es ex. $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit $\underbrace{\beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2 = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2}_{(*)} \}$

$(*) \iff \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 - \beta_1 \cdot w_1 - \beta_2 \cdot w_2 = 0$

$$\iff \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix} - \beta_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix} - \beta_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 - \beta_1 & = & 0 \quad \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \\ \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 & = & 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2 & = & 0 \quad + \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \beta_1 & = & 0 \quad \quad + \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 - \beta_1 & = & 0 \\ \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 & = & 0 \quad \cdot(-1) \quad \cdot(-2) \\ \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 & = & 0 \quad + \\ 2\alpha_2 + 2\beta_1 & = & 0 \quad \quad + \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 - \beta_1 & = & 0 \\ \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 & = & 0 \\ -2\beta_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ Es ex. $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit $(*)$ genau dann, wenn $\beta_2 = 0$

$\Rightarrow$ $U \cap W = \{ \beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2 \mid \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \text{ und } \beta_2 = 0 \} = \{ \beta_1 \cdot w_1 \mid \beta_1 \in \mathbb{R} \} = \operatorname{span}\{w_1\}$.

$\Rightarrow$ $\{w_1\}$ ist eine Basis von $U \cap W$.

Zusatz:

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

$$\Rightarrow \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U+W) = 2 + 2 - 3 = 1$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es ist $w_1 = u_1 - u_2 \in U$.

Aufgabe 6 [14 Punkte]

Für $x \in \mathbb{R}$ sei die Matrix $M(x)$ definiert durch

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & x & 0 \\ 2 & 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

a) Finden Sie alle $x \in \mathbb{R}$, so dass $M(x)$ invertierbar ist. [4 Punkte]

b) Berechnen Sie für die in a) gefundenen x den Eintrag in der 1-ten Zeile und 3-ten Spalte von $(M(x))^{-1}$. [4 Punkte]

c) Berechnen Sie für $x = -1$ die inverse Matrix $(M(-1))^{-1}$. [6 Punkte]

Lösung

a) Die Matrix $M(x)$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det(M(x)) \neq 0$.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & x & 0 \\ 2 & 0 & x^2 \end{pmatrix} = x^3 - 4x = x(x^2-4) = x(x-2)(x+2)$$

Entw. nach 2. Zeile

Also $M(x)$ ist invertierbar genau dann wenn $x \notin \{0, -2, 2\}$.

b)

$$\left[(M(x))^{-1}\right]_{13} = \frac{\det M(x)'_{31}}{\det(M(x))} =$$

$$= \frac{1}{x(x-2)(x+2)} \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ x & 0 \end{pmatrix} = \frac{-2x}{x(x-2)(x+2)} = \frac{-2}{(x-2)(x+2)}$$

$$(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{\det(A_{ji}')}{\det(A)}$$

A_{ji}' entsteht aus A, indem man in A die j-te Zeile und i-te Spalte streicht.

c)

$$
\begin{array}{ccc|ccc|l|l}
 & A & & & E & & & \\
1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & & \cdot(-2) \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \\
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & (-2)\cdot\ 1.\ \text{Zeile} & + \\ \hline
1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & & \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot(-1) & \\
0 & 0 & -3 & -2 & 0 & 1 & \cdot(-1/3) & \\ \hline
1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & (-2)\cdot\ 3.\ \text{Zeile} & + \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & & \\
0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 & -1/3 & & \cdot(-2) \\ \hline
1 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 2/3 & & \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & & \\
0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 & -1/3 & & \\
 & E_3 & & & A^{-1} & & &
\end{array}
$$

$$
M(-1)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}
$$

Probe : $(M(x)^{-1})_{13} = \dfrac{-2}{(x-2)\cdot(x+2)}$

$(M(-1)^{-1})_{13} = \dfrac{-2}{-3\cdot 1} = \dfrac{2}{3}$

Aufgabe 7 [14 Punkte]

Sei $(G, *)$ eine Gruppe und sei h ein Element von G. Zeigen Sie, dass die Teilmenge $U = \{g \in G \mid g * h = h * g\}$ eine Untergruppe von $(G, *)$ ist.

Lösung

- Seien $g_1, g_2 \in U$. Dann ist $(g_1 * g_2) * h \overset{g_2 \in U}{=} g_1 * h * g_2 \overset{g_1 \in U}{=} h * g_1 * g_2$, also $g_1 * g_2 \in U$.
- Sei $g \in U$. Dann gilt $g * h = h * g$. Das ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} & g^{-1} * g * h = g^{-1} * h * g \\ \Leftrightarrow \quad & g^{-1} * g * h * g^{-1} = g^{-1} * h * g * g^{-1} \\ \Leftrightarrow \quad & h * g^{-1} = g^{-1} * h \end{aligned}$$

  Also ist $g^{-1} \in U$.

Damit ist U eine Untergruppe von $(G, *)$.

$e \in U$, da $e * h = h = h * e$