Lösungsskizze zur Hauptklausur Lineare Algebra I

Aufgabe 1
Seien V und W zwei K-Vektorräume für einen Körper K.

a) Wann heißt eine Abbildung $f : V \to W$ linear?

b) Wann heißt eine Abbildung $f : V \to W$ injektiv?

c) Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie $f(0_V) = 0_W$.

d) Beweisen Sie: Ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, so gilt:
f ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Kern}(f) = \{0_V\}$.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt linear, wenn

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in V$ und
- $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$ für alle $x \in V$ und $\lambda \in K$.

b) Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt injektiv, wenn für alle $x, y \in V$ mit $f(x) = f(y)$ immer $x = y$ gilt.

c) Es gilt $f(0_V) = f(0_V + 0_V) = f(0_V) + f(0_V)$. Somit also $f(0_V) = 0_W$.

d) " $\Rightarrow$ " : Nach Teil c) gilt $0_V \in \mathrm{Kern}(f)$. Sei $x \in \mathrm{Kern}(f)$. Dann gilt $f(x) = 0_W = f(0_V)$. Da f injektiv ist, gilt also $x = 0_V$.

" $\Leftarrow$ " : Seien $x, y \in V$ mit $f(x) = f(y)$. Dann gilt

$$f(x - y) = f(x) + f(-y) = f(x) - f(y) = 0_V$$

wegen der Linearität von f. Somit $x - y \in \mathrm{Kern}(f) = \{0_V\}$. Also $x = y$.

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie $\det(A)$ und $\det(A^3)$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Berechnen Sie für $\mu \in \mathbb{R}$ die Determinante von $B_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \mu & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$.

c) Entscheiden Sie, ob die Matrix $C = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ invertierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls ihr Inverses.

$C = 1 \cdot A$

$C^{-1} = 1^{-1} \cdot A^{-1}$

Lösung zu Aufgabe 2

a) Durch Laplace-Entwicklung nach der 2. Zeile ergibt sich

$$\det(A) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1.$$

Somit ergibt sich $\det(A^3) = \det(A)^3 = (-1)^3 = -1$ nach dem Determinantenmultiplikationssatz.

b) Durch Vertauschen der dritten Zeile mit der ersten Zeile und Vertauschen der zweiten Zeile mit der vierten Zeilen erhalten wir

$$\det(B_\mu) = (-1)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \mu & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Satz über die Berechnung von Determinanten von Blockmatrizen gilt jetzt

$$\det(B_\mu) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu & -1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (-1 - \mu) \cdot 3.$$

c) Wir benutzen den Gauss-Algorithmus

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{(*)}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$(*)\quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Wir erhalten somit

$$C^{-1} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$C = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

$$\det(C) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \cdot(-1)\ + \quad \cdot(-2)\ +$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Entw. n. 1. Spalte

$$= \frac{1}{8} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4} \neq 0$$

$\Rightarrow$ C inv. bar.

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A), \quad A \in K^{n \times n}$$

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimmen Sie eine Basis von $U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ und $\dim U_2$.

c) Entscheiden Sie, ob die Vektoren $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Wir rechnen die Unterraumaxiome nach:

- Wegen $0 + 0 - 0 = 0$ gilt $0_{\mathbb{R}^3} \in U$.
- Seien $x, y \in U$. Dann gilt $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ und $y_1 + y_2 - y_3 = 0$. Somit gilt $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 - (x_3 + y_3) = 0$. Also $x + y \in U$.
- Sei $x \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $x_1+x_2-x_3 = 0$. Also $0 = \lambda \cdot 0 = \lambda(x_1+x_2-x_3) = \lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 - \lambda \cdot x_3 = 0$. Somit $\lambda \cdot x \in U$.

b) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden per Definition ein Erzeugendensystem von V. Wir testen die Vektoren auf lineare Unabhängigkeit, indem wir überprüfen ob die von ihnen gebildete Matrix invertierbar ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -1 + 0 + 4 - 1 - 0 - 2 = 0.$$

Daher sind die Vektoren linear abhängig. Da der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist, sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear unabhängig und bilden daher ein maximales Erzeugendensystem von U_2, also eine Basis.

a) Zeigen Sie, dass $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = -x_2 + x_3 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_1} + x_3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v_2} \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$$

$\Rightarrow$ U ist ein UR. und (v_1, v_2) ist Basis von U

$\Rightarrow \dim(U) = 2$

Alternativ:

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$$

$= \operatorname{Kern}(A)$ ist ein UR,

wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\operatorname{Kern}(A) = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot x = 0 \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = 0 \right\}$$

$$= U_1$$

b) Bestimmen Sie eine Basis von $U_2 = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ und $\dim U_2$.

$$\begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \\ + \\ \quad\quad + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot\left(-\frac{1}{3}\right), \quad \cdot(-1) \\ \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \quad + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist eine Basis von } U_2$$

$$\Rightarrow \dim(U_2) = 2$$

Alternativ:

Pivotindizies sind $j_1 = 1$, $j_2 = 2$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist Basis von } U_2$$

$$n \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \in$$

c) Wir testen die Vektoren auf lineare Unabhängigkeit. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten dadurch das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeilenumformungen liefern:

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix hat also Rang 3 und das obige Gleichungssystem hat nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim \operatorname{Kern}(A) + \underbrace{\operatorname{Rang}(A)}_{=3}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Kern}(A) = \{0\}$$

a) Alternativ:

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$$

$$= \operatorname{Kern}(A), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow U_1$ ist ein Unterraum.

b) Bestimmen Sie eine Basis von $U_2 = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}}_{u_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{u_3} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ und $\dim U_2$.

$$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-1&2\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot(-1) & \cdot(-1)\\ + & \\ & +\end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-3&3\\0&-2&2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Die Pivotindizies sind $j_1 = 1$, $j_2 = 2$

$\Rightarrow \{u_1, u_2\}$ ist eine Basis von $U_2 = \mathrm{span}(u_1, u_2, u_3)$

Aufgabe 4

Seien $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ und $b_\mu \in \mathbb{R}^3$ in Abhängigkeit von $\mu \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 10 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } b_\mu = \begin{pmatrix} \mu \\ 3+\mu \\ 1-\mu \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie den Rang von A und $(A \mid b_\mu)$ in Abhängigkeit von μ.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge L_{A,b_μ} des linearen Gleichungssystems $Ax = b_\mu$ in Abhängigkeit von μ.

c) Gibt es einen Vektor $c \in \mathbb{R}^3$, so dass $L_{A,c} = \emptyset$? Falls ja, geben Sie einen solchen Vektor an.

Lösung zu Aufgabe 4

Wir benutzen des Gauss-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 & \mu \\ 1 & 4 & 10 & 2 & 3+\mu \\ -1 & 0 & -2 & 2 & 1-\mu \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 & \mu \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 & \mu \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & \mu-1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

a) Aus der obigen Rechnung folgern wir $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A \mid b_\mu) = 2$ für alle $\mu \in \mathbb{R}$.

b) Es gilt

$$L_{A,b_\mu} = \left\{ \begin{pmatrix} \mu - 1 - 2x_3 + 2x_4 \\ 1 - 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

c) Sei f_A die zu A gehörige lineare Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$. Da $\mathrm{Rang}(A) = 2 < 3$, ist $\mathrm{Bild}(f_A)$ ein Untervektorraum vom $\mathbb{R}^3$ der Dimension 2. Daher gibt es einen Vektor c, so dass $L_{A,c} = \emptyset$.

Der Untervektorraum $\mathrm{Bild}(f_A)$ ist gerade der Untervektorraum der von den Spalten der Matrix A erzeugt wird. Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind offensichtlich linear unabhängig und bilden daher eine Basis von $\mathrm{Bild}(f_A)$. Für $c := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sieht man leicht ein, dass $c \notin \mathrm{Bild}(f_A)$ gilt. Somit gilt $L_{A,c} = \emptyset$.

Aufgabe 4

Seien $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ und $b_\mu \in \mathbb{R}^3$ in Abhängigkeit von $\mu \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 10 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } b_\mu = \begin{pmatrix} \mu \\ 3+\mu \\ 1-\mu \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot x = b_\mu$$

$$\text{Lös}(A, c) = \emptyset$$

$$\text{Lös}(A, c) = \{ x \in \mathbb{R}^4 \mid A \cdot x = c \}$$

$$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = A \cdot x$$

f surj ? $\quad f$ surj $\Leftrightarrow \text{Bild}(f) = \mathbb{R}^3$

$$\dim \text{Bild}(f) = \text{Rang}(A) = 2 < 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

$\Rightarrow f$ nicht surjektiv.

$$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}^3 \;\forall x \in \mathbb{R}^4: \; f(x) = A \cdot x \neq c$$

$$\Rightarrow \text{Lös}(A, c) = \emptyset.$$

$$\text{Bild}(f) = ?$$

$$\text{Bild}(f) = f(\mathbb{R}^4) = f(\text{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4\})$$

$$\overset{f \text{ lin}}{=} \text{span}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)\}$$

$$= \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 4 & 10 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis von $\operatorname{Bild}(f)$

$$v := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \operatorname{Bild}(f)$$

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \underbrace{-\lambda_1 + \lambda_2}_{=0} = 1 \ \lightning.$$

Aufgabe 5
Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen **wahr** oder **falsch** sind. (1 Punkt je Aufgabenteil) **Begründen** Sie Ihre Antwort, indem Sie die Aussage beweisen oder widerlegen. (2 Punkte je Aufgabenteil)

a) Für $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\det(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \det(A)$.

b) Wenn $m > n$ ist, dann gibt es eine surjektive lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

c) Die Menge $U := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ bildet eine Untergruppe von $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$.

d) Seien $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Dann gilt $A \cdot B = \mathbb{O}$ genau dann, wenn $B \cdot A = \mathbb{O}$.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Die Aussage ist **falsch**.
Es ist $4 = \det(2 \cdot E_2) \neq 2 = 2 \cdot \det(E_2)$.

$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

b) Die Aussage ist **falsch**.
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine surjektive lineare Abbildung. Dann gilt

$$n = \dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + m \geq m$$

nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen.

c) Die Aussage ist **wahr**.
Wir rechnen die Untergruppenaxiome nach.

$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = 1 \cdot 1 = 1$
$\Rightarrow A \cdot B \in U$

- Es ist $E_n \in U$, denn $\det(E_n) = 1$.
- Seien $A, B \in U$. Dann gilt $AB^{-1} \in U$, denn

$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1} = 1^{-1} = 1$

$$\det(AB^{-1}) = \det(A) \cdot \det(B^{-1}) = \det(A) \cdot \det(B)^{-1} = 1 \cdot 1^{-1} = 1$$

gemäß dem Determinantenmultiplikationssatz.

$\Rightarrow A^{-1} \in U$

d) Die Aussage ist **falsch**.
Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $A \cdot B = \mathbb{O}$, aber $B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbb{O}$.

Aufgabe 6

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung.

a) Was besagt der Dimensionssatz für f?

b) Zeigen Sie, dass n gerade ist, falls $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Kern}(f)$.

c) Sei U ein Untervektorraum von V mit $V = U + \mathrm{Kern}(f)$ und $U \cap \mathrm{Kern}(f) = \{0_V\}$. Weiter sei $\{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Basis von U und es gelte $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Kern}(f)$. Beweisen Sie, dass $\{w_1, \ldots, w_m, f(w_1), \ldots, f(w_m)\}$ eine Basis von V ist.

d) Geben Sie eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\mathrm{Bild}(g) = \mathrm{Kern}(g)$ an.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Es ist $\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f))$.

b) Gemäß der Dimensionformel für lineare Abbildungen gilt

$$n = \dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\underbrace{\mathrm{Bild}(f)}_{\mathrm{Kern}(f)}) = 2 \cdot \dim(\mathrm{Kern}(f)).$$

Also ist n gerade.

c) Es gilt

$$n = \dim(V) = \dim(U) + \dim(\mathrm{Kern}(f)) = \dim(U) + \frac{n}{2}$$

nach der Dimensionformel für Untervektorräume. Somit ist $m = \frac{n}{2}$. Damit besteht die Menge $\{w_1, \ldots, w_m, f(w_1), \ldots, f(w_m)\}$ genau aus n Vektoren. Nach der Charakterisierung von Basen als maximal linear unabhängige Mengen von Vektoren reicht es zu zeigen, dass die Menge $\{w_1, \ldots, w_m, f(w_1), \ldots, f(w_m)\}$ linear unabhängig ist. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i + \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i f(w_i) = 0_V.$$

Es gilt

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i = f(-\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i w_i) \in \mathrm{Bild}(f) \cap U = \{0_V\}.$$

Somit also

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i = 0_V \text{ und } \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i w_i \in \mathrm{Kern}(f).$$

Da $\{w_1, \ldots, w_m\}$ linear unabhängig sind, folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$. Außerdem ist $\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i w_i \in \mathrm{Kern}(f) \cap U = \{0\}$. Somit $\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i w_i$, was $\lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ zeigt.

d) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Es gilt $\mathrm{Kern}(g) = \mathrm{Bild}(g) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$.

c) Sei U ein Untervektorraum von V mit $V = U + \text{Kern}(f)$ und $U \cap \text{Kern}(f) = \{0_V\}$. Weiter sei $\{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Basis von U und es gelte $\text{Bild}(f) = \text{Kern}(f)$. Beweisen Sie, dass $\{w_1, \ldots, w_m, f(w_1), \ldots, f(w_m)\}$ eine Basis von V ist.

$$\underbrace{\dim(V)}_{n} = \dim(U) + \dim \text{Kern}(f) - \dim \underbrace{(U \cap \text{Kern}(f))}_{=\{0\}}$$

$$= \dim(U) + \underbrace{\dim \text{Kern}(f)}_{= \frac{n}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad m = \dim(U) = n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} \Rightarrow n = 2m$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot w_i + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \cdot f(w_i) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot w_i}_{\in U} = -\sum_{i=1}^{m} f(\mu_i \cdot w_i)$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{m} f(-\mu_i \cdot w_i)}_{\in \text{Bild}(f)}$$

$$\in U \cap \text{Bild}(f)$$

$$= U \cap \text{Kern}(f)$$

$$= \{0\}$$

$w_1, \ldots, w_m$ l.u.

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_m = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} \mu_i \cdot f(w_i) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(\underbrace{\sum_{i=1}^{m} \mu_i \cdot w_i}_{\in U}) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot w_i \in \mathrm{Kern}(f)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot w_i \in U \cap \mathrm{Kern}(f) = \{0\}$$

$w_1, \dots, w_m$ l.u

$$\Rightarrow \qquad \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_m = 0$$

$\Rightarrow \{w_1, \dots, w_m, f(w_1), \dots, f(w_m)\}$ l.u

$$|\{w_1, \dots, w_m, f(w_1), \dots, f(w_m)\}| = n$$

$\Rightarrow \{w_1, \dots, w_m, f(w_1), \dots, f(w_m)\}$ ist Basis von V.