8.2

Sei M eine Menge. Für zwei Teilmengen $X, Y \subseteq M$ definieren wir die *symmetrische Differenz* von X und Y durch

$$X \triangle Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$$

Weiter definieren wir für jede Teilmenge $Y \subseteq M$ eine Funktion f_Y durch

$$\begin{aligned} f_y : \mathcal{P}(M) &\to \mathcal{P}(M), \\ X &\mapsto X \triangle Y. \end{aligned}$$

Sei $Y \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass f_Y hat keine Fixpunkte.

$$\begin{aligned} f_y(X) &= X \\ X \triangle Y &= X \\ z \in X \triangle Y &\iff z \in X \\ z \in \big((X \cup Y) \setminus (X \cap Y)\big) &\iff z \in X \\ z \in (X \cup Y) \wedge z \notin (X \cap Y) &\iff z \in X \\ z \in X \vee z \in Y \wedge (z \notin X \vee z \notin Y) &\iff z \in X \end{aligned}$$

Da $Y \neq \emptyset \implies$ Es existiert $y \in Y$

Fall 1 $y \in X$:

$$\begin{aligned} y \in X &\iff y \in X \vee y \in Y \wedge (y \notin X \vee y \notin Y) \\ \text{Wahr} &\iff \text{Wahr} \vee \text{Wahr} \wedge (\text{Falsch} \vee \text{Falsch}) \\ \text{Wahr} &\iff \text{Wahr} \wedge \text{Falsch} \\ \text{Wahr} &\iff \text{Falsch} \\ &\implies \text{"} \iff \text{" ist Falsch} \end{aligned}$$

Fall 2 $y \notin X$:

$$\begin{aligned} y \in X \vee y \in Y \wedge (y \notin X \vee y \notin Y) &\iff y \in X \\ \text{Falsch} \vee \text{Wahr} \wedge (\text{Wahr} \vee \text{Falsch}) &\iff \text{Falsch} \\ \text{Wahr} \wedge \text{Wahr} &\iff \text{Falsch} \\ \text{Wahr} &\iff \text{Falsch} \\ &\implies \text{"} \iff \text{" ist Falsch} \end{aligned}$$