Logik
Serie 4

Nikita Emanuel John Fehér, 3793479
Erik Thun, 3794446

30. Mai 2025
Mittwoch 09:15-10:45 Keitsch, Jamie; Gruppe e

H 4-1. Syntax und Semantik (3 Pkt.)
Sei $I \in \mathcal{B}$ eine Interpretation und $A \in \mathcal{A}$ ein Atom. Zeigen Sie per struktureller Induktion, daß für alle $\varphi \in \mathcal{F}$:

$$I_{[A \mapsto 1]}(\varphi) = I(\varphi[\top/A])$$

IA: $\varphi = B$

Fall 1 $B = A$

$I_{[A\to 1]}(A) = 1$ $\varphi[\top/A] = \top$,

$I(\top) = 1 \Rightarrow I_{[A\to 1]}(A) = I(\varphi[\top/A])$

Fall 2 $B \neq A$

$I_{[A\to 1]}(B) = I(B)$, $\varphi[\top/A] = B$,

$I(B) = I(B \Rightarrow I_{[A\to 1]}(B) = I(\varphi[\top/A])$

IV

Wir nehmen an, dass die Aussage für φ und ψ gilt:

$I_{[A\to 1]}(\varphi) = I(\varphi[\top/A])$, $I_{[A\to 1]}(\psi) = I(\psi[\top/A])$

IS

1. $\varphi = \neg x$:

$I_{[A\to 1]}(\neg x) = \neg I_{[A\to 1]}(x) = \neg I(x[\top/A]) = I(\neg x[\top/A])$

(da $(\neg x)[\top/A] = \neg(x[\top/A])$)

2. $\varphi = (x_1 \wedge x_2)$:

$I_{[A\to 1]}(x_1 \wedge x_2) = I_{[A\to 1]}(x_1) \wedge I_{[A\to 1]}(x_2) = I(x_1[\top/A]) \wedge I(x_2[\top/A]) = I((x_1 \wedge x_2)[\top/A])$

(da $(x_1 \wedge x_2)[\top/A] = x_1[\top/A] \wedge x_2[\top/A]$)

⋮

Analog für weitere Operatoren

H 4-2. Alternative Resolventendefinition (2 Pkt.)

Seien C_1, C_2 Klauseln. Eine Klausel R^* heißt *Resolvente** von C_1 und C_2, falls es zwei Literale L_1, L_2 gibt mit:

$$L_1, L_2 \in C_1, \qquad \overline{L_1}, \overline{L_2} \in C_2 \qquad \text{und} \qquad R^* = (C_1 \setminus \{L_1, L_2\}) \cup \left(C_2 \setminus \{\overline{L_1}, \overline{L_2}\}\right)$$

Zeigen Sie, daß unter Resolvente* das Resolutionslemma nicht gilt, d.h. es existieren Klauseln C_1 und C_2, sodaß:

$$\{C_1, C_2\} \not\equiv \{C_1, C_2, R^*\}$$

Sei $C_1 = \{A, B\}$

$C_2 = \{A, B\}$

$\Rightarrow L_1 = A, L_2 = B$

$\Rightarrow R^* = \emptyset$

$\Rightarrow \{C_1, C_2\}$ ist erfüllbar (z.B. $\mathcal{I}(A) = 1 = \mathcal{I}(B)$)

$\Rightarrow \lightning$ $\{C_1, C_2, R^*\}$ ist unerfüllbar da $\emptyset = \bot$

H 4-3. Kompaktheitssatz (3 Pkt.)

Gegeben folgende drei Formeltypen:

- $\varphi_i = (A_{3i-2} \wedge A_{3i-1}) \vee (A_{3i-2} \wedge A_{3i}) \vee (A_{3i-1} \wedge A_{3i})$
- $\psi_i = \neg(A_{3i-2} \wedge A_{3i-1} \wedge A_{3i})$
- $\xi_i = A_i \leftrightarrow A_{i^2+1}$

Des Weiteren sei $\phi = \bigcup_{n\geq 1} \phi_n$ wobei $\phi_n = \{\varphi_i, \psi_i, \xi_i | 1 \leq i \leq n\}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, daß ϕ erfüllbar ist.

Hinweise: Überlegen Sie zunächst, was die Wahrheit von $\varphi_i \wedge \psi_i$ für den i-ten Dreierblock an atomaren Aussagen kodiert. Zeigen Sie anschließend per vollständiger Induktion, daß ϕ_n für jedes $n \geq 1$ erfüllbar ist.

Damit φ_i wahr ist müssen mindestens zwei A_n wahr sein

Damit ψ_i wahr ist durfen nicht alle drei A_n wahr sein

$\Rightarrow \varphi_i \wedge \psi_i$ ist wahr wenn genau zwei A_n wahr sind

ξ_i ist wahr A_n und A_{n^2+1} gleich belegt sind

$A_{3i-2}, A_{3i-1}, A_{3i}$ bilden einen Dreierblock

IA: $n=1$

$A_{3\cdot 1-2} = A_1$

$A_{3\cdot 1-1} = A_2$

$A_{3\cdot 1} = A_3$

vir zeigen durch $A_1 =$ wahr, $A_2 =$ wahr, $A_3 =$ falsch

$\Rightarrow$ mindestens zwei A_n wahr $\Rightarrow \varphi_1$ wahr

$\Rightarrow$ nicht drei A_n wahr $\Rightarrow \psi_1$ wahr

$\Rightarrow A_1$ und A_2 gleich $\Rightarrow \xi_1$ wahr

$\Rightarrow \phi_1$ erfüllbar

IS: $n+1$

φ_{n+1} nutzt unabhangige A_n zu φ_n

ψ_{n+1} nutzt —"— A_n zu ψ_n

$\Rightarrow \varphi_{n+1} \wedge \psi_{n+1}$ erfüllbar

$\xi_{n+1} = A_{n+1} \Leftrightarrow A_{(n+1)^2+1}$

da in einen dreier Block 2 Wahr, 1 Falsch möglich ist kann ich φ_{n+1} und ψ_{n+1} imme erfüllen, ich bin imme in der Laage A_{n+1} und A_{n^2+3n} gleich zu wählen

$\Rightarrow \phi_{n+1}$ immer erfüllbar

$\Rightarrow \phi_n \subseteq \phi \Rightarrow \phi = \bigcup_{n\geq 1} \phi_n$ erfüllbar

H 4-4. Interpolation (3 Pkt.)

a) Seien $\varphi = (\neg A_1 \vee A_2) \wedge (A_3 \vee \neg A_2)$ und $\psi = A_1 \to (A_4 \vee A_3)$. Geben Sie eine Interpolante zu φ und ψ an.

b) Beweisen Sie mit Hilfe des Interpolationstheorems, daß für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$:

$$\text{Falls } \varphi \models \psi \text{ und } s(\varphi) \cap s(\psi) = \emptyset, \text{ dann } \varphi \text{ unerfüllbar oder } \psi \text{ tautologisch.}$$

Hinweis: Wir setzen $s(\bot) = \emptyset$.

A	B	C	(¬A∨B)∧(C∨¬B)
F	F	F	T
F	F	T	T
F	T	F	F
F	T	T	T
T	F	F	F
T	F	T	F
T	T	F	F
T	T	T	T

A	C	D	A→(D∨C)
F	F	F	T
F	F	T	T
F	T	F	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	F	T	T
T	T	F	T
T	T	T	T

a) Interpolante $\subseteq s(\varphi) \cap s(\psi) = \{A_1, A_3\}$

$\varphi \models J,\ J \models \psi$

$J: A_1 \to A_3$

b) $\varphi \models \psi \Rightarrow \varphi \models J,\ J \models \psi,\ s(J) \subseteq s(\varphi) \cap s(\psi)$

Da $s(\varphi) \cap s(\psi) = \emptyset$

$\Rightarrow s(J) \subseteq \emptyset$

$\Rightarrow J \in \{\top, \bot\}$

Fall 1: $J = \bot$

$\varphi \models J = \bot \Rightarrow \varphi$ ist unerfüllbar

Fall 2: $J = \top$

$J = \top \models \psi \Rightarrow \psi$ ist tautologisch

H 4-5. Syntaktische Eigenschaften (3 Pkt.)

a) Gegeben sei die prädikatenlogische Formel

$$\varphi = \forall x(P(x, f(y), c) \to \exists z(Q(f(z), c) \wedge \neg R(x, z, w, c))) \vee S(y, z, c)$$

i) Markieren (unterstreichen) Sie den Wirkungsbereich von $\exists z$.

ii) Markieren (Punkt oberhalb) Sie alle freien Vorkommen von Variablen.

iii) Gilt für die Menge der Teilformeln $t(\varphi)$, daß $|t(\varphi)| = 10$? Ohne Begründung.

iv) Was ist $ar(Q)$?

b) Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_{PL}$. Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

1. Falls $\psi \in t(\varphi)$, dann gilt $frei(\psi) \subseteq frei(\varphi)$.

2. Falls $\psi \in t(\varphi)$, dann gilt $geb(\psi) \subseteq geb(\varphi)$.

a) i)

$$\varphi = \forall x(P(x,f(y),c) \to \exists z(\underline{Q(f(z),c) \wedge \neg R(x,z,w,c)})) \vee S(y,z,c)$$

ii)

$$\varphi = \forall x(P(x,f(\dot{y}),c) \to \exists z(Q(f(z),c) \wedge \neg R(x,z,\dot{w},c))) \vee S(\dot{y},\dot{z},c)$$

iii)
Ja

iv) $ar(Q) = 2$

b)

1. Wahr

2. Falsch

z.B. $\psi = Ez(\ldots)$, z kommt außerhalb von ψ frei vor $\to z \in geb(\psi)$, aber nicht unbedingt $z \in geb(\varphi)$

H 4-6. Terme, Strukuren und Modelle (6 Pkt.)

a) Gegeben $(\mathfrak{A}, \beta)$ mit $U^{\mathfrak{A}} = \mathbb{Z}, g^{\mathfrak{A}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $(n, m) \mapsto g^{\mathfrak{A}}(n, m) = n \cdot m$, $f^{\mathfrak{A}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $n \mapsto f^{\mathfrak{A}}(n) = n - 1, c^{\mathfrak{A}} = 3, \beta(x) = 2$.

  i) Bestimmen Sie $\beta(g(g(x, x), f(c)))$.

  ii) Geben Sie einen Term t an, sodaß $\beta(t) = \beta(y) \cdot \beta(y) - 4 \cdot (\beta(y) - 1)$.

b)

$$\varphi = \forall x \forall y (R(x, y) \to \exists z (R(x, z) \land R(z, y)))$$

  i) Sei $(\mathfrak{A}, \beta)$ mit $U^{\mathfrak{A}} = \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}} = R^{\mathfrak{A}} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Ist $(\mathfrak{A}, \beta)$ Modell von φ?

  ii) Sei $(\mathfrak{B}, \gamma)$ mit $U^{\mathfrak{B}} = \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^{\mathfrak{B}} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ist $(\mathfrak{B}, \gamma)$ Modell von φ?

Kurze Begründung im Wahrheitsfalle bzw. Angabe einer falsifizierenden Instanz.

c) Sei $U = \{\square, \triangle, \circ\}$ und $\varphi = \exists x \exists y R(x, y) \land \forall x \forall y (R(x, y) \to R(y, x))$

  i) Gegeben Sie $R^{\mathfrak{A}} \neq U \times U$ an, sodaß $(\mathfrak{A}, \beta)$ mit $U^{\mathfrak{A}} = U$ ein Modell von φ ist.

  ii) Gegeben Sie $R^{\mathfrak{B}} \neq \emptyset$ an, sodaß $(\mathfrak{B}, \gamma)$ mit $U^{\mathfrak{A}} = U$ kein Modell von φ ist.

a) i)

$g(x,x) = g(\beta(x), \beta(x)) = g(2,2) = 2 \cdot 2 = 4$

$f(c) = f(3) = 3 - 1 = 2$

$g(g(x,x), f(c)) = g(4,2) = 4 \cdot 2 = \underline{\underline{8}}$

ii) $\beta(t) = \beta(y) \cdot \beta(y) - 4 \cdot (\beta(y) - 1)$

$= \beta(y)^2 - 4\beta(y) + 4$

$= (\beta(y) - 2)^2$

$= g(f(f(y)), f(f(y)))$

b) i) Nein

z.B. $x = 1$ $y = 2$ $1 < 2 \Rightarrow R(1,2)$

$z \in \mathbb{Z}, \forall z: z < 1, z < 2 = \{\ \} \Rightarrow$ kein z in $\mathbb{Z}$

ii)

Ja

$\forall x \forall y (x < y \Rightarrow \exists z (x < z < y))$

z.B. $z = \frac{x+y}{2}$

c) i)

$R^{\mathfrak{U}} = \{(\square, \Delta), (\square, \Delta)\}$

$\Rightarrow$ Symmetrisch

$\rightarrow \exists x, y : R(x,y)$ erfüllt

$\rightarrow \forall x, y : R(x,y) \rightarrow R(y,x)$ erfüllt

ii)

$R^{\mathfrak{B}} = \{(\square, \Delta)\}$

$\exists x, y : R(x,y)$ erfüllt

$R(\Delta, \square)$ fehlt $\Rightarrow$ Nicht symmetrisch

$\Rightarrow (\mathfrak{B}, \gamma)$ kein Modell