

### Satz und Def.:

Seien  $V$  und  $W$  endlich dimensionale  $K$ -Vektorräume.

Sei  $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $V$  und sei  $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_m\}$  eine Basis von  $W$ .

Sei  $f: V \rightarrow W$  linear.

Dann ex. genau eine Matrix  $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$  mit

$$f(v_1) = a_{11} \cdot w_1 + a_{21} \cdot w_2 + \dots + a_{m1} \cdot w_m$$

$$f(v_2) = a_{12} \cdot w_1 + a_{22} \cdot w_2 + \dots + a_{m2} \cdot w_m$$

$\vdots$

$$f(v_n) = a_{1n} \cdot w_1 + a_{2n} \cdot w_2 + \dots + a_{mn} \cdot w_m$$

$$\text{Die Matrix } M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) := {}_{\mathcal{B}}M(f)_{\mathcal{A}} := [f]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} := A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heißt Darstellungsmatrix von  $f$  bzgl. der Basen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$ .

Die Abb.:  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}: \text{Hom}(V, W) \rightarrow K^{m \times n}$ ,  $f \mapsto M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$  ist ein Isom.

Bem.:

$$\text{Es gilt: } M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = (K_{\mathcal{B}}(f(v_1)), \dots, K_{\mathcal{B}}(f(v_n)))$$

Def.:

Sei  $W$  endlich dimensionaler  $K$ -Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_m\}$ .

Dann gibt es zu jedem  $w \in W$  eind. bestimmte  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$  mit  $w = \lambda_1 \cdot w_1 + \dots + \lambda_m \cdot w_m$

$$\text{und wir def. } K_{\mathcal{B}}(w) := [w]_{\mathcal{B}} := {}_{\mathcal{B}}w := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}.$$

Die Abb.:  $K_{\mathcal{B}}: W \rightarrow K^m$  ist ein Isom.

Bem.:

$$\text{Es gilt: } K_{\mathcal{B}}(w_j) = e_j \quad (j = 1, \dots, m)$$

## Satz

Seien  $V$  und  $W$  endlich dimensionale  $K$ -Vektorräume.

Sei  $A = \{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $V$  und sei  $B = \{w_1, \dots, w_m\}$  eine Basis von  $W$ .

Sei  $f: V \rightarrow W$  linear. Dann gilt:

$$M_B^A(f) \circ K_A = K_B \circ f$$

Bew.:

Es genügt zu zeigen, dass die beiden linearen Abbildungen auf der Basis  $A$  von  $V$  übereinstimmen.

$$M_B^A(f) \circ K_A(v_j) = M_B^A(f) \cdot e_j = K_B(f(v_j)) = (K_B \circ f)(v_j) \quad \forall j=1, \dots, n \quad \checkmark \quad \square$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ K_A \downarrow & & \downarrow K_B \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{M_B^A(f)} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

Bem.:

Es gilt insbesondere  $f = K_B^{-1} \circ M_B^A(f) \circ K_A$

Sei  $A := M_B^A(f)$ . Dann gilt:

$$\bullet \quad f(v) = 0 \Leftrightarrow K_B^{-1}(A \cdot K_A(v)) = 0 \quad \begin{array}{l} K_B^{-1} \text{ ist} \\ \text{ein Isom.} \end{array} \Leftrightarrow A \cdot K_A(v) = 0$$

$$\Leftrightarrow K_A(v) \in \text{Kern}(A) \Leftrightarrow v \in K_A^{-1}(\text{Kern}(A)) \quad \forall v \in V$$

Ist also  $\{x_1, \dots, x_k\}$  eine Basis von  $\text{Kern}(A)$ , so ist  $\{K_A^{-1}(x_1), \dots, K_A^{-1}(x_k)\}$

eine Basis von  $\text{Kern}(f)$ , da  $K_A^{-1}$  ein Isom. ist.

$$\bullet \quad f(V) = K_B^{-1}(A \cdot K_A(V)) = K_B^{-1}(A \cdot \mathbb{R}^n) = K_B^{-1}(\text{Bild}(A))$$

Ist also  $\{y_1, \dots, y_k\}$  eine Basis von  $\text{Bild}(A)$ , so ist  $\{K_B^{-1}(y_1), \dots, K_B^{-1}(y_k)\}$

eine Basis von  $\text{Bild}(f)$ , da  $K_B^{-1}$  ein Isom. ist.

### Satz:

Seien  $U, V, W$  endlich dimensionale  $K$ -Vektorräume mit Basen  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$ .

Seien  $g: U \rightarrow V$  und  $f: V \rightarrow W$  linear. Dann gilt:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(f \circ g) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(g)$$

### Satz und Def.:

Sei  $V$  ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektorraum.

Seien  $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\}$  und  $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$  Basen von  $V$ .

Dann ex. genau eine Matrix  $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$  mit

$$v_1 = a_{11} \cdot w_1 + a_{21} \cdot w_2 + \dots + a_{n1} \cdot w_n$$

$\vdots$

$$v_n = a_{1n} \cdot w_1 + a_{2n} \cdot w_2 + \dots + a_{nn} \cdot w_n$$

Die Matrix  $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} := A$  heißt Transformationsmatrix bzgl. der Basen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$ .

### Bem.:

(i) Es gilt:  $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\text{id}_V)$

(ii)  $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$  ist invertierbar und es ist  $(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^{-1} = T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ .

### Satz (Transformationsformel)

Seien  $V$  und  $W$  endlich dimensionale  $K$ -Vektorräume.

Seien  $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$  Basen von  $V$  und  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  Basen von  $W$ .

Sei  $f: V \rightarrow W$  linear. Dann gilt:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(f) = T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) \cdot T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}'}$$

### Bem.:

Ist  $V = W$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$  und  $\mathcal{A}' = \mathcal{B}'$ , so gilt

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) = T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

## Satz

Seien  $V$  und  $W$  endlich dimensionale  $K$ -Vektorräume.

Sei  $A = \{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $V$  und sei  $B = \{w_1, \dots, w_n\}$  eine Basis von  $W$ .

Sei  $f: V \rightarrow W$  ein Isom. Dann gilt:

$$M_A^B(f^{-1}) = (M_B^A(f))^{-1}$$

Bew.:

Es gilt:  $f \circ f^{-1} = \text{id}_W$

$$\Rightarrow E_n = M_B^B(\text{id}_W) = M_B^B(f \circ f^{-1}) = M_B^A(f) \cdot M_A^B(f^{-1})$$

$$\Rightarrow M_A^B(f^{-1}) = (M_B^A(f))^{-1}$$

