Wahrscheinlichkeitstheorie für Inf. & Lehramt — Dr. M. Tautenhahn
Wintersemester 2024/2025 — Dr. S. Kliem, A. Weiß

Hausaufgabenblatt 0

Dieses Blatt wiederholt Abiturstoff, der in der Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie benötigt wird.

Einige Notationen, die evtl. nicht bekannt sind:
- Die *Potenzmenge* $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A ist die Menge, die alle Teilmengen von A als Elemente hat. ($\mathcal{P}(A) = \{B | B \subset A\}$).
- Die *Mächtigkeit* einer endlichen Menge A ist die Anzahl ihrer Elemente und wird mit $\#A$ oder $|A|$ bezeichnet. Zum Beispiel ist $\#\{1, 2\} = 2$.
- Der *Binomialkoeffizient* lässt sich mit Hilfe von Fakultäten darstellen $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Aufgabe 1. Es seien $a, b, c \in \mathbb{N}$. Sind folgende Aussagen wahr oder falsch?

(a) $a \in \{\underline{a}, b, c\}$ ✓

(b) $a \subset \{a, b, c\}$ × $\Rightarrow \{a\} \subset \{a, b, c\}$

(c) $\emptyset \subset \{a, b, c\}$ ✓

(d) $\{b\} \subset \{a, b, c\}$ ✓

(e) $\{\emptyset\} \subset \{a, b, c\}$ × $\Rightarrow \{\emptyset\} \subset \{\{\emptyset\}, a, b, c\}$

(f) $\{b\} \in \{a, b, c\}$ × $\Rightarrow \{b\} \in \{a, \{b\}, c\}$

(g) $\emptyset \subset \mathcal{P}(\{a, b, c\})$ ✓

(h) $\emptyset \in \mathcal{P}(\{a, b, c\})$ ✓

Aufgabe 2.

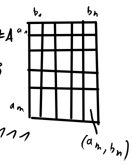
$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ kartesisches Produkt

$\# \Rightarrow$ Kardinalität

(a) Warum gilt

$$\#(A \times B) = \#A \cdot \#B, \qquad \text{falls } A \text{ und } B \text{ endlich,}$$

„Bew": $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ mit $m = \#A$
$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ mit $n = \#B$



sowie

$$\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}, \qquad \text{falls } A \text{ endlich?}$$

„Bew" an Bsp: $A = \{a, b, c, d, e\}$ $\Rightarrow$ 1 1 1 1 1
$A \supseteq B_1 = \{a, b, d\}$ 1 1 0 1 0
$A \supseteq B_2 = \{c, d\}$ 0 0 1 1 0
$A \supseteq \emptyset = \{\}$ 0 0 0 0 0
$B \subseteq A$ wird eindeutig beschrieben
ob a_1 dazugehört ja/nein $\Rightarrow$ 1/0

(b) Warum ist im Allgemeinen $\overline{B} = B^c$

$$\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$

und

$$\mathcal{P}(A \times B) \neq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)?$$

Aufgabe 3. Es seien $A, A_1, A_2, \ldots, B, B_1, B_2, \ldots, C$ Mengen. Zeigen Sie:

(a) (i) $A \setminus B = \underset{A \,\cap\, \overline{B}}{A \cap B^c}$ $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$ $A \cap B^c = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$

(ii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ Bewiese siehe De-Morgan

(iii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. Bewiesen siehe De-Morgan

(b) (i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Lol Gesetze und so (Distributiv,...)

(ii) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

(iii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(iv) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

(c) (i) $A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap B_i)$

–||–

(ii) $A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A \setminus B_i)$

für abzählbar unendliche Mengen

(iii) $A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A \cup B_i)$

(iv) $A \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \setminus B_i)$.

(d) (a) $\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B_i) \subset \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right)$

(b) $\bigcap_{i=1}^{\infty} (A_i \cup B_i) \supset \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \right)$

(c) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass in (i) und (ii) Gleichheit im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 4. Es seien A und B Teilmengen einer Menge Ω. Zeigen Sie folgende Äquivalenzen:

(a) $A \cap B = \emptyset \iff A \subset B^c \iff B \subset A^c$.

(b) $A \subset B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$.

Aufgabe 5. Zeigen Sie folgende Aussagen ($n \in \mathbb{N}$):

(a)

$$\frac{a}{a \cdot b} \quad = t = k.1 \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \quad \text{für alle } k = 1, \ldots, n.$$

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!\,(k-1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!} \quad \text{für } k \leq n$$

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n! - (n-k)!}{k!}$$

$$\binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(n-k-1)!\,(k-1)!} = \frac{n! - (n-k-1)!}{(k-1)!}$$

(b) Binomischer Lehrsatz: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

(c) Folgerung 1 ($x = y = 1$, Zeilensumme im PASCALschen Dreieck)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

(d) Folgerung 2 ($x = -1, y = 1$)

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

(e) Folgerung 3

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}.$$