Wahrscheinlichkeitstheorie Übung 1

Lennox Heimann, Nikita Emanuel John Fehér

November 4, 2024

Matrikelnummer Lennox: 3776050
Matrikelnummer Nikita: 3793479

4 | 4

1. •

$$\begin{aligned} P(A \cap B^C) &= P(A \cup B) - P(B) \\ &= 0.5 - 0.45 \\ &= 0.05 \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} P(A^C \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A \cup B) - P(A) \\ &= 0.5 - 0.25 \\ &= 0.25 \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} P\big((A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)\big) &= P(A \cap B^C) + P(A^C \cap B) \\ &= 0.05 + 0.25 \\ &= 0.3 \end{aligned}$$

✓

2/4

2. (a) (a_1)

1. $A \cap B^C \cap C^C$
2. $A \cap B^C \cap C$
3. $A \cap B \cap C$
4. $A \cap B \cap C^C$
5. $A^C \cap B \cap C^C$
6. $A^C \cap B \cap C$
7. $A^C \cap B^C \cap C$

(a_2)

Sylvester:	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbb{P}(A)$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$			
$\mathbb{P}(B)$			$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	
$\mathbb{P}(C)$		$+1$	$+1$			$+1$	$+1$
$-\mathbb{P}(A \cup B)$			-1	-1			
$-\mathbb{P}(A \cup C)$		-1	-1				
$-\mathbb{P}(B \cup C)$			-1			-1	
$\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$			$+1$				
Σ :	1	1	1	1	1	1	1
$\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$

(a_3) A. Induktionsanfang:

$\mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(A_2)-\mathbb{P}(A_1\cap A_2)$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{2} A_i\right) \qquad = \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = *$$

$$\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k-1}\cdot\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le 2}\mathbb{P}(A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_k})\right) \qquad =$$

$$= \sum_{1\le i_1<\ldots<i_1\le 2}\mathbb{P}(A_{i_1}) - \sum_{1\le i_1<\ldots<i_2\le 2}\mathbb{P}(A_{i_1}\cup A_{i_2}) \qquad =$$

$$= \mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(A_2)-\mathbb{P}(A_1\cup A_2) \qquad =$$

$$\overset{Lemma 1.5(e)}{=} \mathbb{P}(A_1\cup A_2)+\mathbb{P}(A_1\cap A_2)-\mathbb{P}(A_1\cap A_2) \qquad = \mathbb{P}(A_1\cup A_2) = *$$

B. Induktionsvoraussetzung:
Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\mathbb{P}(A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_k})\right)$$

3.1

C. Induktionsbedingung($n \mapsto n+1$):
Dann soll auch gelten:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\cdot\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n+1}\mathbb{P}(A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_k})\right)$$

D. Induktionsschritt:

4/4

3. (a) $\Omega := \{W, A, H, R, S, C, E, I, N, L, K, T, O\}$
$p : \Omega \to [0, 1]$
$p := \big\{(W, \frac{1}{26}), (A, \frac{1}{26}), (H, \frac{4}{26}), (R, \frac{2}{26}), (S, \frac{2}{26}), (C, \frac{2}{26}), (E, \frac{4}{26}),$
$(I, \frac{4}{26}), (N, \frac{1}{26}), (L, \frac{1}{26}), (K, \frac{1}{26}), (T, \frac{2}{26}), (O, \frac{1}{26})\big\}$

(b) Es ist kein Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum, weil die Wahrscheinlichkeitsfunktion p für verschiedene Eingaben verschiedene Werte ausgibt.

3.2

(c) $A_1 := \{E\}, p(A_1) = \frac{4}{26}$
$A_2 := \{W, H, R, S, C, N, L, K, T\}, p(A_2) = \frac{16}{26}$
$A_3 := \{A, E, I, O\}, p(A_3) = \frac{10}{26}$

4. $\Omega \subseteq A^3, A = \{1, 2, 3\}$

4/4

(I) (a) $\Omega = \big\{(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,2,1),(1,2,2),(1,2,3),(1,3,1),(1,3,2),(1,3,3),(2,1,1),(2,1,2),(2,1,3),(2,2,1),(2,2,2),(2,2,3),(2,3,1),(2,3,2),(2,3,3),(3,1,1),(3,1,2),(3,1,3),(3,2,1),(3,2,2),(3,2,3),(3,3,1),(3,3,2),(3,3,3)\big\}$

$p(\omega) = \dfrac{1}{|\Omega|} \forall \omega \in \Omega$

(b) $|\Omega| = |A|^3 = 27$

(c) Ja, denn denn allen Elementen von Ω wird die gleiche Wahrscheinlichkeit zugeordnet.

(II) (a) $\Omega = \big\{(1,2,3),(2,1,3),(3,1,2),(1,3,2),(2,3,1),(3,2,1)\big\}$

$p(\omega) = \dfrac{1}{|\Omega|} \forall \omega \in \Omega$

(b) $|\Omega| = |A|! = 6$

(c) Ja, denn denn allen Elementen von Ω wird die gleiche Wahrscheinlichkeit zugeordnet.

(III) (a) $\Omega = \big\{(1,2,3)\big\}$

$p\big((1,2,3)\big) = 1$

(b) $|\Omega| = 1$

(c) Ja, denn denn allen Elementen von Ω wird die gleiche Wahrscheinlichkeit zugeordnet.

(IV) (a) $\Omega = \big\{(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,2,2),(1,3,3),(1,2,3),(2,2,2),(3,3,3),(2,2,3),(2,3,3)\big\}$

$p(\omega) = \dfrac{3!}{a! \cdot b! \cdot c! \cdot 27}$

Wobei: $a :=$ Anzahl 1en in ω, $b :=$ Anzahl 2en in ω
$c :=$ Anzahl 3en in ω.

(b) $|\Omega| = \dbinom{3+3-1}{3} = \dbinom{5}{3} = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$

(c) Nein, z.B. $p\big((1,1,1)\big) = \frac{1}{27} \neq \frac{6}{27} = p\big((1,2,3)\big)$.

Index der Kommentare