Universität Leipzig
Institut für Informatik
Sommersemester 2025

Prof. Dr. Andreas Maletti,
Dr. habil. Karin Quaas,
Fabian Sauer

Aufgaben zur Lehrveranstaltung

Berechenbarkeit

Serie 5

- Die Übungsaufgaben werden in den Übungen ab dem 9.6.2025 besprochen.
- Abgabeschluss für Hausaufgaben: **22.6.2025 um 22:00 Uhr** im Moodle-Kurs.
- Sie können gern in 2er-Gruppen abgeben. Bitte schreiben Sie dazu die Namen und Matrikelnummern beider Personen auf das Blatt und reichen Sie Ihre Lösungen über einen Account ein. Einen Bonuspunkt erhalten Sie in dieser Serie bei Erreichen von **12** Punkten.

Übungsaufgabe 5.1 (Primitiv Rekursive Funktionen)

Gegeben sei die folgende primitiv rekursive Definition der Funktion h:

$$h = \mathrm{pr}[\mathrm{nf}\langle 0^{(0)}\rangle, \pi_1^{(3)}\langle 2^{(2)}, \pi_2^{(2)}, 0^{(2)}\rangle]$$

Geben Sie für alle Teilfunktionen von h die Stelligkeit an, sowie welche Funktionen diese berechnen.

Übungsaufgabe 5.2 (Primitiv Rekursive Funktionen)

Geben Sie für jede der folgenden Funktionen eine primitiv rekursive Darstellung an.

(a) $f_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} : (a_1, a_2) \mapsto |a_1 - a_2|$ für alle $(a_1, a_2) \in \mathbb{N}^2$.

Hinweis: $|a_1 - a_2| = \mathrm{sub}(a_1, a_2) + \mathrm{sub}(a_2, a_1)$ *für alle* $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$.

(b) $f_2 : \mathbb{N}^2 \to \{0, 1\} : (a_1, a_2) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } a_1 = a_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ für alle $(a_1, a_2) \in \mathbb{N}^2$.

Hinweis: $a_1 = a_2$ *gdw.* $\mathrm{sub}(1, |a_1 - a_2|) = 1$ *für alle* $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$.

(c) $f_3 : \mathbb{N}^3 \to \{0, 1\} : (a_1, a_2, a_3) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } a_1 + a_2 = a_3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ für alle $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{N}^3$.

(d) $f_4 : \mathbb{N}^3 \to \{0, 1\} : (a_1, a_2, a_3) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls es } a \leq a_1 \text{ gibt sodass } a + a_2 = a_3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ für alle $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{N}^3$.

Übungsaufgabe 5.3 (μ-rekursive Funktionen)

(a) Sei $f_5 = \mu\text{sub}\langle 1^{(3)}, f_3 \rangle$, mit f_3 wie in Übungsaufgabe 5.2 definiert. Berechnen Sie $f_5(2,5)$ und $f_5(8,5)$. Welche Funktion berechnet f_5?

(b) Sei $f_6 = \mu\text{sub}\langle \pi_2^{(2)}, \pi_1^{(2)} \rangle$ und $f_7 = \pi_1^{(1)}$. Zeigen Sie, dass $f_6 = f_7$ gilt.

Hausaufgabe 5.4 (Primitiv Rekursive Funktionen) (10)

Gegeben sei die folgende primitiv rekursive Definition der Funktion h:

$$h = \text{pr}[3^{(2)}, \pi_2^{(3)} \langle 0^{(4)}, \text{nf}\langle \pi_2^{(4)} \rangle, 1^{(4)} \rangle]$$

Geben Sie für alle Teilfunktionen von h die Stelligkeit an, sowie welche Funktionen diese berechnen.

Hausaufgabe 5.5 (Primitiv Rekursive Funktionen)

Geben Sie für jede der folgenden Funktionen eine primitiv rekursive Darstellung an.

(a) $g_1 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N} : (a_1, a_2, a_3) \mapsto \begin{cases} a_2 & \text{falls } a_1 = 0 \\ a_3 & \text{sonst} \end{cases}$ für alle $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{N}$. (4)

(b) $g_2 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N} : (a_1, a_2, a_3) \mapsto \begin{cases} a_1 & \text{falls } a_3 = 0 \\ a_2 & \text{sonst} \end{cases}$ für alle $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{N}$. (2)

(c) $g_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : a_1 \mapsto a_1!$ für alle $a_1 \in \mathbb{N}$. (4)

Hausaufgabe 5.6 (μ-rekursive Funktionen)

(a) Welche Funktion berechnet μg_3, mit g_3 wie in Hausaufgabe 5.5 definiert? (1)

(b) Sei $g_4 = \mu f_4$, mit f_4 wie in Übungsaufgabe 5.2 definiert. Berechnen Sie $g_4(4,4)$, $g_4(4,5)$ und $g_4(5,4)$. Welche Funktion berechnet g_4? (4)