Logik

Teil 3: Mehr zur Prädikatenlogik 1. Stufe

Übersicht Teil 3

Next

3.1 Sequenzenkalkül

3.2 Rekursive Aufzählbarkeit

3.3 Kompaktheit, Sätze von Löwenheim-Skolem

3.4 Ausdrucksstärke: Grundbegriffe und Überblick

3.5 Nicht-Ausdrückbarkeit über Lokalität

Sequenzenkalkül

Wir betrachten einen Kalkül für Gültigkeit in der Prädikatenlogik.

Motivation:

- Grundlage für automatische Theorembeweiser
- Beweis des Kompaktheitssatzes für FO

Im Prinzip könnten wir wieder Resolution verwenden

Wir verwenden aber einen anderen, ebenfalls sehr eleganten Kalkül:

Gentzens Sequenzenkalkül

Der Einfachheit halber verzichten wir auf das Gleichheitsprädikat.

Sequenzen

Definition 3.1 (Sequenz)

Eine Sequenz ist ein Ausdruck der Form $\Gamma \Rightarrow \Delta$,
wobei Γ und Δ endliche Mengen von Sätzen sind. Wir nennen

- Γ das Antezedens und
- Δ das Sukzedens.

Die Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist gültig, wenn $\bigwedge \Gamma \models \bigvee \Delta$, in Worten:

jedes Modell von Γ macht auch mindestens einen Satz aus Δ wahr.

Ist eine Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ gültig, so schreiben wir $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Beispiele für gültige Sequenzen:

- $\{\forall x\, P(x),\ Q(c)\} \ \Rightarrow\ \{P(c) \land Q(c),\ R(c,d)\}$
- $\{P(c) \lor Q(d)\} \ \Rightarrow\ \{P(c),\ Q(d)\}$

Sequenzenkalkül

Der Sequenzenkalkül erlaubt, alle gültigen Sequenzen abzuleiten.

Offensichtlich gilt:

- FO-Satz φ ist Tautologie gdw. die Sequenz $\emptyset \Rightarrow \{\varphi\}$ gültig ist
- FO-Satz φ ist unerfüllbar gdw. die Sequenz $\{\varphi\} \Rightarrow \emptyset$ gültig ist (denn $\bigvee \emptyset$ ist unerfüllbar)

Man kann den Sequenzenkalkül daher auch als Kalkül zum Ableiten aller Tautologien bzw. aller unerfüllbaren Formeln ansehen.

Die zentralen Bestandteile des SK

- **Axiome**

  Sequenzen, die man ohne Beweis/Herleitung als gültig voraussetzt

- **Schlussregeln**

  Im Gegensatz zu Resolution/Hilbert hat der SK recht viele davon:

  2 Stück pro Operator $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$,

  jeweils für die linke und die rechte Seite von Sequenzen

  (positive und negative Form der Regel)

Axiome des SK

Zum Hervorheben von Sätzen in Sequenzen schreiben wir

$$\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \text{statt} \quad \Gamma \cup \{\varphi\} \Rightarrow \Delta \cup \{\psi\}$$

Definition 3.2 (Axiome SK)

Die Axiome des Sequenzenkalküls (SK) sind alle Sequenzen der Form $\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \varphi$.

Axiome sind offensichtlich gültige Sequenzen.

Schlussregeln des SK

$$(\neg \Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \neg)\ \frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}$$

$$(\vee \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \vee)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\wedge \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \varphi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \wedge)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}$$

$$(\exists \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \varphi[c] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x\, \varphi(x) \Rightarrow \Delta}$$

c nicht in Γ, Δ, $\varphi(x)$

$$(\Rightarrow \exists)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, \varphi(x)}$$

$$(\forall \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \varphi[t] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x\, \varphi(x) \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \forall)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[c]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \varphi(x)}$$

c nicht in Γ, Δ, $\varphi(x)$

T3.1

Ableitbarkeit im SK

Die Regeln sind natürlich Schemata, die instantiiert werden:
$\Gamma, \Delta, \varphi, \psi$ werden durch konkrete Formeln/Satzmengen ersetzt.

Definition 3.3 (ableitbare Sequenz)

Eine Sequenz ist ableitbar wenn sie

- ein Axiom des SK ist oder
- unter Regelanwendung aus ableitbaren Sequenzen erzeugt werden kann.

Ist eine Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ableitbar, so schreiben wir: $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$

Beispiele für ableitbare Sequenzen:

Axiom — Axiom

$$\frac{P(c), Q(c) \Rightarrow P(c), R(c) \qquad P(c), Q(c) \Rightarrow Q(c), R(c)}{P(c), Q(c) \Rightarrow P(c) \wedge Q(c), R(c)}$$

Anwendung $(\Rightarrow \wedge)$-Regel

Definition 3.4 (SK-Beweis)

Ein SK-Beweis ist ein (endlicher) Baum, dessen Knoten auf folgende Weise mit Sequenzen beschriftet sind:

- Jedes Blatt ist mit einem Axiom beschriftet
- Jeder innere Knoten entspricht einer Regelanwendung:
  - ist mit Instanz der unteren Zeile einer Schlussregel beschriftet,
  - seine Kinder mit den entsprechenden Instanzen der oberen Zeile.

Beispiel T3.2

Beachte:

- Jeder innere Knoten hat ein oder zwei Kinder.
- Eine Sequenz ist ableitbar gdw. sie als Knotenbeschriftung in einem SK-Beweis auftritt.

Zur Regelanwendung

Beachte:

Die Regeln des SK-Kalküls sind von oben nach unten zu lesen:

wenn obere Sequenz gültig, dann auch untere Sequenz

SK-Beweise bauen wir jedoch von unten nach oben auf:

die herzuleitende Sequenz (unten) aus den Axiomen (oben) herleiten

hier verwendet man die Regeln daher von unten nach oben

Zur Regelanwendung

Wichtiges Detail:

In der Sequenz Γ, φ darf Γ auch φ enthalten, muss aber nicht

Darum darf man bei Anwendung von $(\Rightarrow \exists)$ und $(\forall \Rightarrow)$ im SK-Beweis die verwendete Teilformel „behalten“:

Beispiel $(\forall \Rightarrow)$:

$$(\forall \Rightarrow) \quad \frac{\Gamma, \varphi[t] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x\, \varphi(x) \Rightarrow \Delta}$$

$$\frac{P(c) \Rightarrow P(c) \wedge P(d)}{\forall x\, P(x) \Rightarrow P(c) \wedge P(d)} \qquad \frac{\forall x\, P(x), P(c) \Rightarrow P(c) \wedge P(d)}{\forall x\, P(x) \Rightarrow P(c) \wedge P(d)}$$

(ohne Behalten) (mit Behalten)

Das gilt im Prinzip für alle Regeln, ist aber nur bei $(\Rightarrow \exists)$ und $(\forall \Rightarrow)$ nützlich (und notwendig!)

Korrektheit SK

Theorem 3.5 (Korrektheit SK)

Wenn $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, dann $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$ (jede ableitbare Sequenz ist gültig).

Beweis:

Es genügt zu zeigen:

1. Alle SK-Axiome sind gültig:

   Offensichtlich gilt $\bigwedge \Gamma \models \bigvee \Delta$, wenn es $\varphi \in \Gamma \cap \Delta$ gibt.

2. Wenn eine Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ durch das Anwenden einer Schlussregel auf gültige Sequenzen entsteht, dann ist $\Gamma \Rightarrow \Delta$ gültig:

   Fallunterscheidung: ein Fall pro Regel. $\boxed{\text{T3.3}}$

Vollständigkeit SK

Theorem 3.6 (Vollständigkeit SK)

Wenn $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$, dann $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ (jede gültige Sequenz ist ableitbar).

Beweisidee:

Man beweist das Kontrapositiv:

wenn nicht $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, dann nicht $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$

nicht $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$ bedeutet $\bigwedge \Gamma \not\models \bigvee \Delta$.

Also zu zeigen: es gibt Modell $\mathfrak{A}$ für $\Gamma \cup \neg\Delta$, wobei $\neg\Delta := \{\neg\varphi \mid \varphi \in \Delta\}$

Im Prinzip möchten wir $\mathfrak{A}$ einfach aus Γ „ablesen“;

Nicht-Ableitbarkeit von $\Gamma \Rightarrow \Delta$ soll dann sicherstellen, dass $\mathfrak{A} \models \neg\Delta$

Vollständigkeit SK

Theorem 3.6 (Vollständigkeit SK)

Wenn $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$, dann $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ (jede gültige Sequenz ist ableitbar).

„$\mathfrak{A}$ aus Γ ablesen“: wenn z. B.

$$\Gamma = \{Q_1(c), \neg Q_2(c), \exists x\, P(x), P(c)\} \qquad \Delta = \{Q_2(c), \neg P(c)\}$$

dann ist klar, wie $\mathfrak{A}$ aus Γ abgelesen wird und dass $\mathfrak{A} \models \neg\Delta$.

Das geht aber nicht immer so einfach:

$$\Gamma = \{Q_1(c) \vee Q_2(c), \exists x\, P(x)\} \qquad \Delta = \{\cdots\}$$

Man muss darum Γ und Δ erst vervollständigen.

Wir verwenden Signatur $\tau = \mathsf{Sig}(\Gamma \cup \Delta) \cup C$
wobei C abzählbar unendliche Menge frischer Konstantensymbole

Lemma 3.7 (Vervollständigung)

Wenn nicht $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, dann gibt es Mengen $\Gamma^* \supseteq \Gamma$ und $\Delta^* \supseteq \Delta$ so dass

1. $\Gamma^* \cap \Delta^* = \emptyset$;
2. Wenn $\neg\varphi \in \Gamma^*$, dann $\varphi \in \Delta^*$ und
   wenn $\neg\varphi \in \Delta^*$, dann $\varphi \in \Gamma^*$;
3. Wenn $\varphi \wedge \psi \in \Gamma^*$, dann $\varphi, \psi \in \Gamma^*$ und
   wenn $\varphi \wedge \psi \in \Delta^*$, dann $\varphi \in \Delta^*$ oder $\psi \in \Delta^*$;
4. Wenn $\varphi \vee \psi \in \Gamma^*$, dann $\varphi \in \Gamma^*$ oder $\psi \in \Gamma^*$ und
   wenn $\varphi \vee \psi \in \Delta^*$, dann $\varphi, \psi \in \Delta^*$;
5. Wenn $\exists x\, \varphi(x) \in \Gamma^*$, dann gibt es Grundterm t mit $\varphi[t] \in \Gamma^*$ und
   wenn $\exists x\, \varphi(x) \in \Delta^*$, dann $\varphi[t] \in \Delta^*$ für alle Grundterme t;
6. Wenn $\forall x\, \varphi(x) \in \Gamma^*$, dann $\varphi[t] \in \Gamma^*$ für alle Grundterme t und
   wenn $\forall x\, \varphi(x) \in \Delta^*$, dann gibt es Grundterm t mit $\varphi[t] \in \Delta^*$.

Beweis Lemma 3.7

Wir konstruieren Folgen

$$\Gamma = \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \cdots \text{ und } \Delta = \Delta_0 \subseteq \Delta_1 \subseteq \cdots$$

und setzen $\Gamma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n$ und $\Delta^* = \bigcup_{n \geq 0} \Delta_n$.

Dabei stellen wir sicher, dass

(∗) $\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ nicht ableitbar für alle $n \geq 0$

Man sieht leicht: es gibt Aufzählung

$$(\varphi_0, t_0), (\varphi_1, t_1), \ldots$$

so dass jedes Paar (φ, t) mit φ FO(τ)-Satz und t Grundterm über τ unendlich oft vorkommt.

T3.4

Wir verwenden Paar (φ_n, t_n) für Konstruktion von $\Gamma_{n+1}, \Delta_{n+1}$ aus Γ_n, Δ_n

Beweis Lemma 3.7

Fall $\varphi_n = \neg\psi$.

Zur Erinnerung: 2. Wenn $\neg\psi \in \Gamma^*$, dann $\psi \in \Delta^*$ und wenn $\neg\psi \in \Delta^*$, dann $\psi \in \Gamma^*$;

Wenn $\neg\psi \in \Gamma_n$, dann $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$ und $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{\psi\}$

Wenn $\neg\psi \in \Delta_n$, dann $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\psi\}$ und $\Delta_{n+1} = \Delta_n$

Man prüft leicht, dass $\Gamma_{n+1} \Rightarrow \Delta_{n+1}$ nicht ableitbar, exemplarisch 1. Fall:

Wenn es Ableitung gibt für $\Gamma_{n+1} \Rightarrow \Delta_{n+1}$ = $\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n, \psi$

Dann auch für $\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ = $\Gamma_n, \neg\psi \Rightarrow \Delta_n$

$$\frac{\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n, \psi}{\Gamma_n, \neg\psi \Rightarrow \Delta_n}\ (\neg \Rightarrow)$$

Widerspruch

Hier und in allen anderen Fällen:

Wenn $\varphi_n \notin \Gamma_n \cup \Delta_n$, dann $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$ and $\Delta_{n+1} = \Delta_n$

$\varphi_n \in \Gamma_n \cap \Delta_n$ nicht möglich weil $\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ nicht ableitbar.

Beweis Lemma 3.7

Fall $\varphi_n = \psi_1 \wedge \psi_2$.

Zur Erinnerung: 3. Wenn $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \Gamma^*$, dann $\psi_1, \psi_2 \in \Gamma^*$ und
wenn $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \Delta^*$, dann $\psi_1 \in \Delta^*$ oder $\psi_2 \in \Delta^*$;

Wenn $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \Gamma_n$, dann $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\psi_1, \psi_2\}$ und $\Delta_{n+1} = \Delta_n$

$\Gamma_{n+1} \Rightarrow \Delta_{n+1}$ nicht ableitbar weil sonst mit $(\wedge \Rightarrow)$ auch $\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ ableitbar

Wenn $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \Delta_n$, dann

$\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n \cup \{\psi_1\}$ nicht ableitbar oder $\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n \cup \{\psi_2\}$ nicht ableitbar

weil sonst mit $(\Rightarrow \wedge)$ auch $\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ ableitbar

Dann $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$ und $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{\psi_i\}$ für betreffendes ψ_i

Fall $\varphi_n = \psi_1 \vee \psi_2$ analog.

Beweis Lemma 3.7

Fall $\varphi_n = \exists x\, \psi(x)$.

Zur Erinnerung:

5. Wenn $\exists x\, \psi(x) \in \Gamma^*$, dann gibt es Grundterm t mit $\psi[t] \in \Gamma^*$ und wenn $\exists x\, \psi(x) \in \Delta^*$, dann $\psi[t] \in \Delta^*$ für alle Grundterme t;

Wenn $\exists x\, \psi(x) \in \Gamma_n$, dann wähle $c \in C$, das nicht in Γ_n, Δ_n vorkommt

Setze $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\psi(c)\}$ und $\Delta_{n+1} = \Delta_n$

Wenn $\exists x\, \psi(x) \in \Delta_n$, dann setze $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$ und $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{\psi(t_n)\}$

Wegen ($\exists \Rightarrow$) und ($\Rightarrow \exists$) ist $\Gamma_{n+1} \Rightarrow \Delta_{n+1}$ nicht ableitbar

Fall $\varphi_n = \forall x\, \psi(x)$ analog.

Dann erfüllen $\Gamma^* = \bigcup_{i \geq 0} \Gamma_i$ und $\Delta^* = \bigcup_{i \geq 0} \Delta_i$ alle Bedingungen von Lemma 3.7.

(es ist hier wichtig, dass die Aufzählung „unendlich oft wiederholend“ ist)

Vervollständigung

Lemma 3.7 (Vervollständigung)

Wenn nicht $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, dann gibt es Mengen $\Gamma^* \supseteq \Gamma$ und $\Delta^* \supseteq \Delta$ so dass

1. $\Gamma^* \cap \Delta^* = \emptyset$;
2. Wenn $\neg\varphi \in \Gamma^*$, dann $\varphi \in \Delta^*$ und wenn $\neg\varphi \in \Delta^*$, dann $\varphi \in \Gamma^*$;
3. Wenn $\varphi \wedge \psi \in \Gamma^*$, dann $\varphi, \psi \in \Gamma^*$ und wenn $\varphi \wedge \psi \in \Delta^*$, dann $\varphi \in \Delta^*$ oder $\psi \in \Delta^*$;
4. Wenn $\varphi \vee \psi \in \Gamma^*$, dann $\varphi \in \Gamma^*$ oder $\psi \in \Gamma^*$ und wenn $\varphi \vee \psi \in \Delta^*$, dann $\varphi, \psi \in \Delta^*$;
5. Wenn $\exists x\, \varphi(x) \in \Gamma^*$, dann gibt es Grundterm t mit $\varphi[t] \in \Gamma^*$ und wenn $\exists x\, \varphi(x) \in \Delta^*$, dann $\varphi[t] \in \Delta^*$ für alle Grundterme t;
6. Wenn $\forall x\, \varphi(x) \in \Gamma^*$, dann $\varphi[t] \in \Gamma^*$ für alle Grundterme t und wenn $\forall x\, \varphi(x) \in \Delta^*$, dann gibt es Grundterm t mit $\varphi[t] \in \Delta^*$.

Herbrand-Strukturen

Im Vollständigkeitsbeweis des SK verwenden wir eine Herbrand-Struktur

Das bedeutet:

- A besteht aus allen Grundtermen über Signatur τ
- alle Terme werden als sie selbst interpretiert: $f^{\mathfrak{A}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$

  insbesondere $c^{\mathfrak{A}} = c$ für alle Konstanten c
- die Interpretation der Relationssymbole ist allerdings beliebig

T3.5

Beachte: Herbrand-Strukturen sind höchstens abzählbar unendlich groß

Vollständigkeit SK

Theorem 3.6 (Vollständigkeit SK)

Wenn $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$, dann $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ (jede gültige Sequenz ist ableitbar).

Beweis:

Sei $\Gamma \Rightarrow \Delta$ nicht ableitbar und Γ^*, Δ^* wie in Lemma 3.7

Sei $\mathfrak{A}$ Herbrand-Struktur mit folgender Interpretation der Relationssymbole:

$$R^{\mathfrak{A}} = \{(t_1, \ldots, t_n) \mid R(t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma^*\} \text{ für alle } R.$$

Wir zeigen, dass $\mathfrak{A}$ Modell von $\Gamma \cup \neg\Delta$ ist

Daraus folgt wie gewünscht, dass $\Gamma \Rightarrow \Delta$ nicht gültig.

Wegen $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ und $\Delta \subseteq \Delta^*$ genügt es zu zeigen:

(a) $\varphi \in \Gamma^*$ impliziert $\mathfrak{A} \models \varphi$

(b) $\varphi \in \Delta^*$ impliziert $\mathfrak{A} \not\models \varphi$.

Vollständigkeit SK

(a) $\varphi \in \Gamma^*$ impliziert $\mathfrak{A} \models \varphi$

(b) $\varphi \in \Delta^*$ impliziert $\mathfrak{A} \not\models \varphi$.

Wir zeigen (a) und (b) im Prinzip per Induktion über die Struktur von φ

Allerdings benutzen wir eine spezielle Variante:

Es gelte $\varphi \prec \psi$ wenn φ aus Teilformel von ψ hervorgeht, indem freie Variablen durch Grundterme ersetzt werden

Zum Beispiel $P(f(c)) \prec \exists x\, P(x)$

Nun machen wir Induktion über $\prec$.

Wir betrachten exemplarisch Fälle $\neg$, $\wedge$, $\exists$, lassen $\vee$, $\forall$ als Übung.

Vollständigkeit SK

(a) $\varphi \in \Gamma^*$ impliziert $\mathfrak{A} \models \varphi$

(b) $\varphi \in \Delta^*$ impliziert $\mathfrak{A} \not\models \varphi$.

Fall $\varphi = \neg\psi$

(a) $\neg\psi \in \Gamma^* \Rightarrow \psi \in \Delta^*$ (Punkt 2 von Lemma 3.7)

$\Rightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi$ (IV mit (b))

$\Rightarrow \mathfrak{A} \models \neg\psi$ (Semantik)

(b) $\neg\psi \in \Delta^* \Rightarrow \psi \in \Gamma^*$ (Punkt 2 von Lemma 3.7)

$\Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi$ (IV mit (a))

$\Rightarrow \mathfrak{A} \not\models \neg\psi$ (Semantik)

Vollständigkeit SK

(a) $\varphi \in \Gamma^*$ impliziert $\mathfrak{A} \models \varphi$

(b) $\varphi \in \Delta^*$ impliziert $\mathfrak{A} \not\models \varphi$.

Fall $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$

(a) $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \Gamma^* \Rightarrow \psi_1, \psi_2 \in \Gamma^*$	(Punkt 3 von Lemma 3.7)
$\Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi_1$ und $\mathfrak{A} \models \psi_2$	(IV)
$\Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi_1 \wedge \psi_2$	(Semantik)
(b) $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \Delta^* \Rightarrow \psi_1 \in \Delta^*$ oder $\psi_2 \in \Delta^*$	(Punkt 3 von Lemma 3.7)
$\Rightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi_1$ oder $\mathfrak{A} \not\models \psi_2$	(IV)
$\Rightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi_1 \wedge \psi_2$	(Semantik)

Vollständigkeit SK

(a) $\varphi \in \Gamma^*$ impliziert $\mathfrak{A} \models \varphi$

(b) $\varphi \in \Delta^*$ impliziert $\mathfrak{A} \not\models \varphi$.

Fall $\varphi = \exists x\, \psi(x)$

(a) $\exists x\, \psi(x) \in \Gamma^* \Rightarrow \psi[t] \in \Gamma^*$ für einen Grundterm t (Punkt 5 von Lemma 3.7)

$\Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi[t]$ (IV, Induktion über $\prec$)

$\Rightarrow \mathfrak{A} \models \exists x\, \psi(x)$ (Semantik)

(b) $\exists x\, \psi(x) \in \Delta^* \Rightarrow \psi[t] \in \Delta^*$ für alle Grundterme t (Punkt 5 von Lemma 3.7)

$\Rightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi[t]$ für alle Grundterme t (IV, Induktion über $\prec$)

$\Rightarrow \mathfrak{A} \not\models \exists x\, \psi(x)$ (Semantik + Herbrand)

An dieser Stelle haben wir die Vollständigkeit des SK bewiesen.

Vollständigkeit

Historische Anmerkungen:

- Es war historisch zunächst keineswegs klar, dass es (korrekte und) vollständige Kalküle für FO gibt
- Gödel hat 1929 bewiesen, dass eine Variante des Hilbert-Kalküls für FO vollständig ist
- Darum ist folgendes bekannt als Gödelscher Vollständigkeitssatz: Es gibt vollständige Kalküle für FO
- Vollständigkeit des SK wurde ursprünglich von Gentzen bewiesen.
- Es gibt auch (vollständige) Resolutionskalküle für FO.

Gleichheit

Anmerkung:

- Es reichen wenige Regeln, um das vorgestellte SK-Kalkül auf FO mit Gleichheitsprädikat zu erweitern

$$\frac{\Gamma, t = t \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, t = t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Gamma, t = t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}$$

- Der Vollständigkeitsbeweis wird dann noch etwas komplexer

Mehr zur Prädikatenlogik

Rekursive Aufzählbarkeit

Eine Menge M ist rekursiv aufzählbar wenn es einen Algorithmus gibt, der nacheinander alle Elemente von M produziert

Beachte:

- wir interessieren uns insbesondere für unendliche Mengen M
- der Aufzählalgorithmus terminiert dann also nie!

Mehrfaches Aufzählen stellt kein Problem dar (Eliminieren über Caching) solange schließlich jedes Element erzeugt wird

Wir zeigen im folgenden: FO-Tautologien sind rekursiv aufzählbar

Dies widerspricht nicht der Unentscheidbarkeit (Terminierung!)

Rekursive Aufzählbarkeit

Theorem 3.8 (rekursive Aufzählbarkeit)

Für jede endliche Signatur τ sind rekursiv aufzählbar:

- die Menge aller Tautologien aus $\mathrm{FO}(\tau)$
- die Menge aller unerfüllbaren Sätze aus $\mathrm{FO}(\tau)$

Beweisidee:

- Zentrale Konsequenz aus Vollständigkeit Sequenzenkalkül:

  Für jede FO-Tautologie gibt es einen **endlichen Beweis**
- (Endlicher) SK-Beweis darstellbar als String über endlichem Alphabet
- Es ist leicht, alle Strings aufzuzählen
- String repräsentiert keinen SK-Beweis: tue nichts
- String repräsentiert SK-Beweis einer Tautologie: gib sie aus

Rekursive Aufzählbarkeit

Theorem 3.8 (rekursive Aufzählbarkeit)

Für jede endliche Signatur τ sind rekursiv aufzählbar:

- die Menge aller Tautologien aus $\mathrm{FO}(\tau)$
- die Menge aller unerfüllbaren Sätze aus $\mathrm{FO}(\tau)$

Beweis in (mehr) Detail:

1. FO-Sätze sind offensichtlich darstellbar als Strings über dem Alphabet

$$\{\neg, \wedge, \vee, \exists, \forall, (,), =\} \cup \{0, 1\} \cup \tau.$$

   (Vergl. Kapitel über Aussagenlogik)

   Für Variablennamen

2. Dasselbe gilt für Sequenzen: Erweitere Alphabet um Symbole

$$\Rightarrow \quad \{ \quad \} \quad ,$$

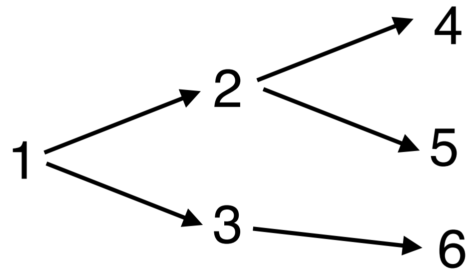
Theorem 3.8 (rekursive Aufzählbarkeit)

Für jede endliche Signatur τ sind rekursiv aufzählbar:

- die Menge aller Tautologien aus FO(τ)
- die Menge aller unerfüllbaren Sätze aus FO(τ)

3. Baum lässt sich mit zusätzlichen Klammersymbolen $\langle$ und $\rangle$ als String repräsentieren

   Z.B.



   als

$$1\langle 2\langle 4\rangle\langle 5\rangle\rangle\langle 3\langle 6\rangle\rangle$$

4. Also lassen sich auch SK-Beweise als Strings repräsentieren: Sie sind Bäume, deren Knoten mit Sequenzen beschriftet sind

   Sei Σ das sich ingesamt ergebende Alphabet

Rekursive Aufzählbarkeit

Theorem 3.8 (rekursive Aufzählbarkeit)

Für jede endliche Signatur τ sind rekursiv aufzählbar:

- die Menge aller Tautologien aus $\mathrm{FO}(\tau)$
- die Menge aller unerfüllbaren Sätze aus $\mathrm{FO}(\tau)$

5. Die Menge aller Tautologien ist rekursiv aufzählbar:

    - Erzeuge alle Strings über Σ
    - Für jeden String prüfe, ob er SK-Beweis repräsentiert dessen Wurzel mit $\emptyset \Rightarrow \{\varphi\}$ beschriftet ist
    - Wenn nein: tue nichts
    - Wenn ja: gib φ aus

    Denn φ ist Tautologie gdw. es SK-Beweis für $\emptyset \Rightarrow \{\varphi\}$ gibt

Analog für unerfüllbare Sätze: $\{\varphi\} \Rightarrow \emptyset$

Beachte: entscheidend ist hier die Endlichkeit von SK-Beweisen.

Theorembeweiser

Vollständige Kalküle liefern also Algorithmen der folgenden Form:

- wenn Eingabe Tautologie, dann terminiert der Algorithmus nach endlicher Zeit und gibt Beweis aus;
- anderenfalls terminiert der Algorithmus nicht

Statt „blind“ Strings aufzuzählen, kann man natürlich auch versuchen, zielgerichtet einen Beweis zu finden.

Auf diesem Prinzip beruhen moderne Theorembeweiser wie `Vampire`, `Paradox`, `Spass`; allerdings wird …

- meist Resolution verwendet (mit aufwendigen Optimierungstechniken)
- durch zusätzliche Verfahren in „vielen Fällen“ auch Terminierung auf Nicht-Tautologien erreicht

Rekursive Aufzählbarkeit

Korollar 3.9

Wenn τ mind. ein binäres Relationssymbol enthält, ist die Menge der erfüllbaren FO(τ)-Sätze nicht rekursiv aufzählbar.

Denn: Wären die erfüllbaren Sätze rekursiv aufzählbar, so gäbe es einen Algorithmus für Erfüllbarkeit:

Um Erfüllbarkeit von φ zu prüfen, zähle simultan die erfüllbaren Sätze und die unerfüllbaren Sätze auf:

erfüllbar	unerfüllbar
φ_1	ψ_1
φ_2	ψ_2
$\vdots$	$\vdots$

Nach endlicher Zeit findet man Eingabesatz φ.

Mehr zur Prädikatenlogik

Kompaktheit

Der Kompaktheitssatz für FO ist wie in der Aussagenlogik formuliert:

Theorem 3.11 (Kompaktheitssatz)

Für alle Mengen von Sätzen $\Gamma \subseteq \text{FO}$ und alle Sätze $\varphi \in \text{FO}$ gilt:

1. Γ ist erfüllbar gdw. jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar ist.
2. $\Gamma \models \varphi$ gdw. endliches $\Gamma_\mathsf{f} \subseteq \Gamma$ existiert mit $\Gamma_\mathsf{f} \models \varphi$.

Wichtige Anwendungen:

- Nicht-Ausdrückbarkeitsbeweise von Eigenschaften in FO
- fundamentale modelltheoretische Resultate
  wie die Sätze von Löwenheim-Skolem

Beweis des Kompaktheitssatzes verwendet Variation des Sequenzenkalküls.

Erweiterter Sequenzenkalkül

Beweis von Kompaktheit erfordert Variation des Sequenzenkalküls:

Anstatt für die Gültigkeit von Sequenzen $\models \Pi \Rightarrow \Delta$
interessiert man sich nun für die Folgerbarkeit von Sequenzen
aus einer (eventuell unendlichen) Formelmenge Γ:

$$\Gamma \models \Pi \Rightarrow \Delta \quad \text{steht für} \quad \Gamma \models \bigwedge \Pi \rightarrow \bigvee \Delta$$

Für eine Menge von Sätzen $\Gamma \subseteq$ FO erhält man die Γ-Erweiterung
des SK durch Hinzufügen der Regel

$$(\Gamma\text{-Regel}) \qquad \frac{\Pi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Pi \Rightarrow \Delta} \qquad \varphi \in \Gamma$$

Theorem 3.12 (Korrektheit+Vollständigkeit erweiterter SK)

$\Pi \Rightarrow \Delta$ in der Γ-Erweiterung des SK ableitbar gdw. $\Gamma \models \Pi \Rightarrow \Delta$

SK-Beweise sind immernoch endlich, auch wenn Γ unendlich

Beweis des Kompaktheitsatzes

Theorem 3.11 (Kompaktheitssatz)

Für alle Mengen von Sätzen $\Gamma \subseteq \text{FO}$ und alle Sätze $\varphi \in \text{FO}$ gilt:

1. Γ ist erfüllbar gdw. jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar ist.
2. $\Gamma \models \varphi$ gdw. endliches $\Gamma_\mathsf{f} \subseteq \Gamma$ existiert mit $\Gamma_\mathsf{f} \models \varphi$.

Beweis Da Punkt 1 leicht aus Punkt 2 folgt, beweisen wir nur Punkt 2.

„$\Leftarrow$“ ist offensichtlich

„$\Rightarrow$“ $\Gamma \models \varphi$ $\Rightarrow$ $\Gamma \models \emptyset \Rightarrow \{\varphi\}$

$\Rightarrow$ $\vdash \emptyset \Rightarrow \{\varphi\}$ in Γ-erweitertem SK

$\Rightarrow$ es gibt (endlichen!) SK-Beweis K für $\emptyset \Rightarrow \{\varphi\}$ in Γ-erweitertem SK

$\Rightarrow$ es gibt SK-Beweis für $\emptyset \Rightarrow \{\varphi\}$ in Γ_f-erweitertem SK, Γ_f die in K verwendeten Sätze aus Γ.

$\Rightarrow$ $\Gamma_\mathsf{f} \models \varphi$ ❑

Nutzen der Kompaktheit

Wir nutzen die Kompaktheit zum Beweis einiger wichtiger modelltheoretischer Resultate, die …

- sich auf die **Größe von Modellen** (also Strukturen) beziehen:
  - Wie groß können die Modelle eines gegebenen Satzes sein?
  - Gibt es Formeln, die nur in endlichen/unendlichen/abzählbaren/überabzählbaren Modellen erfüllbar sind?
- Beobachtungen bezüglich der **Grenzen der Ausdrucksstärke** von FO erlauben:

  Kann man eine Eigenschaft wie „das Modell ist endlich/unendlich/abzählbar/überabzählbar“ in FO ausdrücken?

Unendliche Modelle

Theorem 3.12 (unbeschränkte endliche Modelle)

Wenn ein FO-Satz φ beliebig große endliche Modelle besitzt
(d. h. für jedes $n \geq 0$ gibt es Modell $\mathfrak{A}$ mit $|A| \geq n$),

dann hat φ auch ein unendliches Modell.

Beweis Sei φ ein FO-Satz, der beliebig große Modelle besitzt.

Setze $\Gamma = \{\varphi\} \cup \{\psi_n \mid n \geq 1\}$ wobei

$$\psi_n = \exists x_1 \cdots \exists x_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \qquad \text{(Modell hat Größe } \geq n\text{)}$$

Jedes Modell von Γ ist unendliches Modell von φ

Es genügt also, zu zeigen: Γ ist erfüllbar

Und wegen Kompaktheit genügt sogar: jedes endliche $\Gamma_{\mathsf{f}} \subseteq \Gamma$ ist erfüllbar

Sei also $\Gamma_{\mathsf{f}} \subseteq \Gamma$ endlich. Sei zudem n maximal mit $\psi_n \in \Gamma_{\mathsf{f}}$.

Nach Annahme gibt es Modell $\mathfrak{A}$ von φ mit $|A| \geq n$. $\mathfrak{A}$ ist Modell von Γ_{f}. ❑

Unendliche Modelle

Theorem 3.12 (unbeschränkte endliche Modelle)

Wenn ein FO-Satz φ beliebig große endliche Modelle besitzt
(d. h. für jedes $n \geq 0$ gibt es Modell $\mathfrak{A}$ mit $|A| \geq n$),

dann hat φ auch ein unendliches Modell.

Dieses Thm. impliziert eine **Beschränkung der Ausdrucksstärke** von FO:

Es gibt keinen FO-Satz φ, so dass $\mathfrak{A} \models \varphi$ gdw. $|A|$ endlich.

Das heißt: Endlichkeit ist nicht FO-ausdrückbar.

Für ein festes n ist „Modellgröße $\leq n$" aber natürlich leicht ausdrückbar:

$$\forall x_0 \cdots \forall x_n \left(\bigvee_{0 \leq i < j \leq n} x_i = x_j \right)$$

Löwenheim-Skolem, aufsteigend

Theorem 3.13 (Aufsteigender Satz von Löwenheim-Skolem)

Wenn ein FO-Satz φ ein unendliches Modell besitzt,
dann gibt es für jede Menge U ein Modell $\mathfrak{A}$ von φ mit $|A| \geq |U|$.

Beachte:

Kardinalität von U ist beliebig, es gibt unendlich viele Kardinalitäten.

Das gilt auch auch im unendlichen:

- die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind abzählbar (Kardinalität $\aleph_0$)
- die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind überabzählbar (Kardinalität $> \aleph_0$)
- $2^{\mathbb{R}}$ (Potenzmenge) hat noch größere Kardinalität,
- $2^{2^{\mathbb{R}}}$ noch größere, usw (Satz von Cantor)

Theorem 3.13 impliziert z. B.:
wenn φ unendliches Modell hat, dann auch überabzählbares Modell.

Löwenheim-Skolem, aufsteigend

Theorem 3.13 (Aufsteigender Satz von Löwenheim-Skolem)

Wenn ein FO-Satz φ ein unendliches Modell besitzt,
dann gibt es für jede Menge U ein Modell $\mathfrak{A}$ von φ mit $|A| \geq |U|$.

Beweis Angenommen, φ hat unendliches Modell und U ist Menge.

Sei $\{c_u \mid u \in U\}$ Menge von frischen Konstanten (paarweise verschieden)

Setze

$$\Gamma = \{\varphi\} \cup \{c_u \neq c_v \mid u, v \in U, u \neq v\}$$

Es genügt also, zu zeigen: Γ ist erfüllbar

Also wegen Kompaktheit: jedes endliche $\Gamma_{\mathsf{f}} \subseteq \Gamma$ ist erfüllbar. Sei

$$C = \{c_u \mid u \in U \text{ und } c_u \text{ kommt in } \Gamma_{\mathsf{f}} \text{ vor}\}$$

Sei $\mathfrak{A}$ unendliches Modell von φ. Da C endlich gibt es Injektion

$$\delta : C \to A$$

Modell von Γ_{f}: Erweiterung von $\mathfrak{A}$ um $c_u^{\mathfrak{A}} = \delta(c_u)$ für all $c_u \in C$. ❑

Löwenheim-Skolem, aufsteigend

Theorem 3.13 (Aufsteigender Satz von Löwenheim-Skolem)

Wenn ein FO-Satz φ ein unendliches Modell besitzt,
dann gibt es für jede Menge U ein Modell $\mathfrak{A}$ von φ mit $|A| \geq |U|$.

Es folgt, dass Abzählbarkeit nicht FO-ausdrückbar

Theorem 3.13 gilt auch für Mengen von Sätzen Γ, es folgt z.B.:

Korollar 3.14 (Nicht-Standardmodell der Arithmetik)

Th$(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ hat Modelle, die nicht isomorph zu $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ sind.

Löwenheim-Skolem, absteigend

Theorem 3.15 (Absteigender Satz von Löwenheim-Skolem)

Wenn ein FO-Satz φ ein Modell besitzt,
dann hat φ auch ein endliches oder abzählbar unendliches Modell.

Es gibt also keine FO-Formeln, die nur überabzählbare Modelle haben.

Folgerung: Überabzählbarkeit nicht FO-ausdrückbar

Löwenheim-Skolem, absteigend

Theorem 3.15 (Absteigender Satz von Löwenheim-Skolem)

Wenn ein FO-Satz φ ein Modell besitzt,
dann hat φ auch ein endliches oder abzählbar unendliches Modell.

Beweis

Angenommen, φ ist erfüllbar

Dann $\not\models \{\varphi\} \Rightarrow \emptyset$, also liefert Korrektheit des SK $\not\vdash \{\varphi\} \Rightarrow \emptyset$

Im Vollständigkeitsbeweis des SK wird Modell für $\{\varphi\} \wedge \neg\emptyset$ konstruiert

Herbrandmodell (Universum = Menge aller Terme), also abzählbar unendlich

(Bei Verwendung von Gleichheit ist noch eine Quotientenbildung im Spiel,
die eventuell ein endliches Modell erzeugt)

❑

Mehr zur Prädikatenlogik

Ausdrückbarkeit

In der Informatik ist die **Analyse der Ausdrucksstärke** von Logiken wie FO ein wichtiges Thema, z. B.:

- **Zusammenhang „SQL als FO“:**
  Kann jede gewünschte Anfrage in SQL/FO ausgedrückt werden?

- **FO in der Verifikation von Soft-/Hardware:**
  Welche Systemeigenschaften können in FO beschrieben werden?

- **Zusammenhang von FO zu anderen Teilgebieten der Informatik**
  Insbesondere zu den formalen Sprachen und zur Komplexitätstheorie

Ausdrückbarkeit meist leicht zu zeigen, Nicht-Ausdrückbarkeit schwierig!

Eigenschaften von Strukturen

Ausdrückbarkeit von was? Eigenschaften von Strukturen!

Beispiel 1: Sei R binäres Relationssymbol

Eigenschaft „$R^{\mathfrak{A}}$ ist eine Äquivalenzrelation"

ist ausdrückbar als FO-Satz:

$$\varphi = \forall x\, R(x,x) \;\wedge\; \forall x \forall y\, (R(x,y) \rightarrow R(y,x)) \;\wedge$$
$$\forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$$

Beispiel 2: Betrachte Signatur von Graphen $\{E\}$

Eigenschaft „Graph enthält Clique der Größe 3"

ist ausdrückbar als FO-Satz:

$$\varphi = \exists x \exists y \exists z \,\big(\, E(x,y) \wedge E(y,z) \wedge E(x,z) \wedge$$
$$x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \,\big)$$

Eigenschaften und Ausdrückbarkeit

Definition 3.16 (Eigenschaft, Ausdrückbarkeit)

Eine Eigenschaft ist eine Klasse von Strukturen, die unter Isomorphie abgeschlossen ist.

Eine Eigenschaft P ist FO-ausdrückbar, wenn es einen FO-Satz φ gibt, so dass für alle Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt: $\mathfrak{A} \in P$ gdw. $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Wir nehmen hier eine feste Signatur τ an, über der alle Strukturen und Sätze formuliert sind.

Beispiele:

$$P_1 = \{\mathfrak{A} \mid R^{\mathfrak{A}} \text{ ist eine Äquivalenzrelation}\} \qquad \tau = \{R\}$$

$$P_2 = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ ist Graph, der Clique der Größe 3 enthält}\} \qquad \tau = \{E\}$$

Eigenschaften, die nicht unter Isomorphie abgeschlossen sind, sind nicht interessant und nicht FO-ausdrückbar (Isomorphie-Lemma)

Übersicht Ausdrückbarkeit (bisher)

Eigenschaft: Modellgröße …	**Ausdrückbar?**	
$\leq n \ (n \in \mathbb{N})$	✔	$\forall x_0 \cdots \forall x_n \left(\bigvee_{0 \leq i < j \leq n} x_i = x_j \right)$
$< n, \ = n, \ \neq n, \ \geq n, \ > n$	✔	analog
… endlich, … unendlich	✘	Satz über unbeschränkte endl. Modelle
… abzählbar	✘	Satz von Löwenheim-Skolem, aufsteigend
… überabzählbar	✘	Satz von Löwenheim-Skolem, absteigend

Eigenschaften und Ausdrückbarkeit

In der Informatik sind meist andere Eigenschaften relevant

z.B. Zusammenhang von Graphen, Existenz einer Clique, etc.

Werkzeuge zur Analyse der Ausdrucksstärke:

- Kompaktheitssatz
  das klassische Werkzeug aus der mathematischen Logik
  funktioniert nur, wenn wir auch unendliche Modelle zulassen
- Lokalität
  ein viel flexibleres Werkzeug
  funktioniert auch über der Klasse der endlichen Strukturen

Nicht-Ausdrückbarkeit über Kompaktheit

Zur Erinnerung:

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist zusammenhängend,

wenn es für alle Knoten $v, v' \in V$ eine Knotenfolge $v_1, \ldots, v_n$ gibt,
so dass $v = v_1, \;\; v_n = v'$ und $\{v_i, v_{i+1}\} \in E \quad$ für $1 \leq i < n$

Wir betrachten die Signatur $\tau = \{E\}$ von Graphen

Wir beweisen die Nicht-Ausdrückbarkeit von Zusammenhang in FO mittels Kompaktheit.

Theorem 3.17

Zusammenhang von ungerichteten Graphen ist nicht FO-ausdrückbar.

Wir nehmen hier an, dass Graphen auch unendlich sein dürfen!

Nicht-Ausdrückbarkeit über Kompaktheit

Theorem 3.17

Zusammenhang von ungerichteten Graphen ist nicht FO-ausdrückbar.

Beweis Angenommen, es gibt FO-Satz φ, der Zusammenhang ausdrückt.

Seien c_1, c_2 Konstantensymbole und für $n \geq 1$:

$$\psi_n = \neg\exists x_0 \cdots \exists x_n (c_1 = x_0 \wedge c_2 = x_n \wedge E(x_0, x_1) \wedge \cdots \wedge E(x_{n-1}, x_n))$$

Drückt also aus: es gibt keinen Pfad der Länge n zwischen c_1 und c_2

Sei $\Gamma = \{\varphi\} \cup \{\psi_n \mid n \geq 1\} \cup \{c_1 \neq c_2\}$

Beh.: Γ ist erfüllbar (Kompaktheit) **T3.6**

Modell $\mathfrak{A}$ von Γ erfüllt $\mathfrak{A} \models \varphi$ Also ist Graph $\mathfrak{A}$ zusammenhängend.

Da $\mathfrak{A} \models \psi_n$ für alle $n \geq 1$ und $c_1^{\mathfrak{A}} \neq c_2^{\mathfrak{A}}$, gibt es aber keinen Pfad von $c_1^{\mathfrak{A}}$ zu $c_2^{\mathfrak{A}}$.

Widerspruch ❏

Grenzen des Kompaktheitssatzes

Theorem 3.17

Zusammenhang von ungerichteten Graphen ist nicht FO-ausdrückbar.

Kann man also Zusammenhang auch in SQL nicht ausdrücken?

Leider können wir das nicht folgern, denn

- Datenbankinstanzen entsprechen endlichen Strukturen.
- Das Kompaktheitstheorem gilt auf endlichen Strukturen nicht!
- Der eben geführte Beweis schließt also nicht aus,
  dass es einen FO-Satz φ gibt,
  so dass für alle endlichen Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{gdw.} \quad \mathfrak{A} \text{ zusammenhängend}$$

Grenzen des Kompaktheitssatzes

Theorem 3.18

Das Kompaktheitstheorem gilt nicht in der Klasse der endlichen Strukturen.

Es gilt also nicht:

Eine Menge von FO-Sätzen Γ hat ein endliches Modell gdw.
jede endliche Teilmenge von Γ ein endliches Modell hat

Sei
$$\psi_n = \exists x_1 \cdots \exists x_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j$$
„Universum hat Größe $\geq n$"

$$\Gamma = \{\psi_n \mid n \geq 1\}$$

Jedes endliche $\Gamma_{\mathsf{f}} \subseteq \Gamma$ ist endlich erfüllbar:

wähle beliebige Struktur $\mathfrak{A}$ mit $|A| = \max\{n \mid \psi_n \in \Gamma_{\mathsf{f}}\}$

Offensichtlich ist Γ selbst aber nicht endlich erfüllbar! ❑

Mehr zur Prädikatenlogik

Nicht-Ausdrückbarkeit

Es gilt zahlreiche weitere Werkzeuge, um die Nicht-Ausdrückbarkeit von Eigenschaften in FO zu beweisen, z.B.:

- Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele
- Lokalitätsresultate
- 0/1-Gesetze

Viele davon funktionieren auch für endliche Modelle

Wir werfen hier beispielhaft einen Blick auf Lokalität und werden damit verschiedene Nicht-Ausdrückbarkeitsresultate beweisen

Wir studieren also die Beschränkungen von FO

In diesem Abschnitt betrachten wir nur relationale Signaturen, also keine Funktions- und Konstantensymbole

Lokalität Informell

Betrachten wir nochmal den Zusammenhang von Graphen

Warum ist diese Eigenschaft nicht FO-ausdrückbar?

Versuch:

$$
\begin{aligned}
\varphi = \forall x \forall y\, E(x,y) & \\
& \vee \exists z\, E(x,z) \wedge E(z,y) \\
& \vee \exists z_1 \exists z_2\, E(x,z_1) \wedge E(z_1,z_2) \wedge E(z_2,y) \\
& \dots \\
& \vee \exists z_1 \cdots \exists z_k \quad \dots
\end{aligned}
$$

Da Formeln endlich sind, müssen wir irgendwann aufhören (bei einem $k \geq 1$)

Mit einer festen Formel können wir also nur endlich weit sehen

und insbesondere nur konstant weit: unabhängig vom jeweiligen Graph

Das reicht aber nicht für Zusammenhang:
wie weit wir sehen müssen hängt vom jeweiligen Graphen ab

Lokalität Informell

Das stimmt so natürlich im allgemeinen nicht ganz:

z.B. $P(x) \wedge \exists y\, Q(y)$

Wir können also auch “rumhüpfen” 

Das hilft nur nichts, um Zusammenhang auszudrücken: sind wir

- in dieselbe Zusammenhangskomponente des Graphen gehüpft oder
- in eine andere?

Wir haben keine Kontrolle, können nur:
unkontrolliert hüpfen, dann wieder konstant weit sehen, dann wieder unkontrolliert hüpfen, usw.

Lokalität formalisiert diese Intuitionen

T3.7

Distanz zwischen Elementen

Besonders anschaulich ist die Distanz in Graphen, d.h. Signatur $\tau = \{E\}$

Distanz $d(a_1, a_2)$ zwischen Knoten a_1 und a_2 in (ungerichtetem) Graph G:

Länge des kürzesten Pfades zwischen a_1 und a_2

bzw. ∞ wenn kein solcher Pfad existiert.

Um die Distanz auch für andere Signaturen zu definieren, verwenden wir:

Definition 3.19 (Gaifmangraph)

Der Gaifmangraph einer τ-Struktur $\mathfrak{A}$ ist der ungerichtete Graph $G_{\mathfrak{A}} = (V, E)$ mit

- $V = A$
- E Menge aller Kanten $\{a, b\}$ so dass $a \neq b$ und es ein $R \in \tau$ gibt und ein Tupel $(a_1, \ldots, a_r) \in R^{\mathfrak{A}}$ so dass $a, b \in \{a_1, \ldots, a_r\}$.

T3.8

Distanz zwischen Elementen

Definition 3.20 (Distanz)

Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur und $a_1, a_2 \in A$.

Die Distanz $d(a_1, a_2)$ zwischen a_1 und a_2 in $\mathfrak{A}$ ist die Länge des kürzesten Pfades von a_1 nach a_2 im Gaifman Graph $G_{\mathfrak{A}}$.

Wenn kein solcher Pfad existiert, dann $d(a_1, a_2) = \infty$.

Insbesondere:

- $d(a_1, a_2) = 0$ gdw. $a_1 = a_2$
- $d(a_1, a_2) = 1$ gdw. a_1 und a_2 gemeinsam in einem Tupel $\bar{b} \in R^{\mathfrak{A}}$ vorkommen, für ein beliebiges R

T3.9

Bälle und Nachbarschaften

Definition 3.21 (Ball, Nachbarschaft)

Sei $\mathfrak{A}$ Struktur, $a \in A$ und $r \geq 0$. Der r-Ball um a ist die Menge von Elementen

$$B_r(a) = \{b \in A \mid d(a,b) \leq r\}.$$

Die Struktur $N_r(a)$ ist definiert wie folgt:

- das Universum ist $B_r(a)$
- jedes $R^{N_r(a)}$ ist Einschränkung von $R^{\mathfrak{A}}$ auf $B_r(a)$, also:
  $R^{N_r(a)} = R^{\mathfrak{A}} \cap B_r(a)^k$ wenn R k-stellig.

Die r-Nachbarschaft von a ist das Paar $(N_r(a), a)$

T3.9b

Beachte:

In der Struktur $\mathcal{N}_r(a)$ ist die maximale Distanz zwischen Elementen $2r$.

Nachbarschaftstypen

Definition 3.22 (Nachbarschaftstypen)

Sei $r \geq 0$. Ein r-Nachbarschaftstyp ist ein Paar $(\mathfrak{N}, a)$ so dass $\mathfrak{N}$ eine Struktur ist, $a \in N$, und folgendes gilt:

$$d(a_1, a_2) \leq 2r \text{ für alle } a_1, a_2 \in A.$$

Zwei Nachbarschaftstypen $(\mathfrak{N}, a)$ und $(\mathfrak{M}, b)$ sind isomorph wenn Isomorphismus π von $\mathfrak{N}$ nach $\mathfrak{M}$ existiert mit $\pi(a) = b$

Sei $\rho = (\mathfrak{N}, b)$ ein r-Nachbarschaftstyp. Dann bezeichnet $\#_\rho(\mathfrak{A})$ die Anzahl der Elemente $a \in A$ so dass

$$(N_r(a), a) \text{ isomorph zu } \rho.$$

Wird hier als Konstante verwendet!

T3.9c

Quantorenrang

Der Quantorenrang qr(φ) einer Formel φ ist die Schachtelungstiefe von (universellen und existentiellen) Quantoren in φ.

Definition 3.23 (Quantorenrang)

Sei φ eine FO-Formel. Ihr Quantorenrang qr(φ) ist induktiv wie folgt definiert:

- wenn φ Atom, dann $\text{qr}(\varphi) = 0$
- $\text{qr}(\neg\varphi) = \text{qr}(\varphi)$
- $\text{qr}(\varphi \wedge \psi) = \text{qr}(\varphi \vee \psi) = \max\{\text{qr}(\varphi), \text{qr}(\psi)\}$
- $\text{qr}(\exists x\, \varphi) = \text{qr}(\forall x\, \varphi) = \text{qr}(\varphi) + 1$

Beispiel: $\text{qr}(\exists x\, (\forall y\, P(x,y) \vee \exists z\, \forall y\, Q(x,y,z))) = 3$

Hanf-Lokalität

Hier nun das zentrale Resultat dieses Abschnittes

Theorem 3.24 (Hanf-Lokalität von FO)

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Strukturen und φ ein FO-Satz mit $\mathrm{qr}(\varphi) = k$.

Wenn

$$\#_\rho(\mathfrak{A}) = \#_\rho(\mathfrak{B}) \text{ für alle } 2^k\text{-Nachbarschaftstypen } \rho = (\mathfrak{N}, a)$$

dann $\mathfrak{A} \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{B} \models \varphi$.

T3.10

Wir verzichten auf den (recht aufwendigen) Beweis.

Wir haben bereits gesehen:
Zusammenhang von ungerichteten Graphen ist nicht FO-ausdrückbar.

Wir verwenden Theorem 3.24 um dasselbe Resultat über der Klasse der endlichen Strukturen zu beweisen.

Zusammenhang

Theorem 3.25

Zusammenhang von ungerichteten Graphen ist in der Klasse der endlichen Strukturen nicht FO-ausdrückbar.

Widerspruchsbeweis:

Angenommen, Zusammenhang wäre doch ausdrückbar durch FO-Satz φ

Sei k der Quantorenrang von φ

Wähle ungerichtete (endliche!) Graphen $\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k$ so dass:

- $\mathfrak{A}_k$ besteht aus zwei disjunkten Kreisen der Länge $2 \cdot (2^k + 1)$ (also nicht zusammenhängend)
- $\mathfrak{B}_k$ ein Kreis der Länge $4 \cdot (2^k + 1)$ (also zusammenhängend) **T3.10**

Es genügt, zu zeigen: aus $\mathfrak{B}_k \models \varphi$ folgt $\mathfrak{A}_k \models \varphi$ (Widerspruch)

Zusammenhang

Es genügt, zu zeigen: aus $\mathfrak{B}_k \models \varphi$ folgt $\mathfrak{A}_k \models \varphi$

Theorem 3.24 (Hanf-Lokalität von FO)

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Strukturen und φ ein FO-Satz mit $\mathrm{qr}(\varphi) = k$.

Wenn

$$\#_\rho(\mathfrak{A}) = \#_\rho(\mathfrak{B}) \text{ für alle } 2^k\text{-Nachbarschaftstypen } \rho = (\mathfrak{N}, a)$$

dann $\mathfrak{A} \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{B} \models \varphi$.

Es genügt, zu zeigen: $\#_\rho(\mathfrak{A}_k) = \#_\rho(\mathfrak{B}_k)$ für alle 2^k-Nachbarschaftstypen ρ

Es gibt (bis auf Isomorphie) nur ein ρ mit $\#_\rho(\mathfrak{A}_k) > 0$ oder $\#_\rho(\mathfrak{B}_k) > 0$:

der Pfad der Länge $2 \cdot 2^k$

Also $\#_\rho(\mathfrak{A}_k) = |A| = 4 \cdot (2^k + 1) = |B| = \#_\rho(\mathfrak{B}_k)$

und $\#_{\rho'}(\mathfrak{A}_k) = 0 = \#_{\rho'}(\mathfrak{B}_k)$ für alle $\rho' \neq \rho$

❑

Warum 2^k ?

Theorem 3.24 (Hanf-Lokalität von FO)

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Strukturen und φ ein FO-Satz mit $\mathrm{qr}(\varphi) = k$.

Wenn

$$\#_\rho(\mathfrak{A}) = \#_\rho(\mathfrak{B}) \text{ für alle } 2^k\text{-Nachbarschaftstypen } \rho = (\mathfrak{N}, a)$$

dann $\mathfrak{A} \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{B} \models \varphi$.

Betrachte folgende FO-Formeln:

$$\psi_1(x,y) = E(x,y)$$

$$\psi_2(x,y) = \exists z\,(\psi_1(x,z) \wedge \psi_1(z,y))$$

"Divide and conquer"

$$\psi_3(x,y) = \exists z\,(\psi_2(x,z) \wedge \psi_2(z,y))$$

$$\dots$$

Für $k \geq 1$ drückt die Formel $\varphi_k = \exists u\, \psi_k(x,u)$ mit $\mathrm{qr}(\varphi) = k$ aus:

es gibt einen ausgehenden E-Pfad der Länge 2^k

Methodologie-Theorem

Grundlage für Beweise der Nicht-Ausdrückbarkeit mittels Hanf:

Theorem 3.26 (Methodologie-Theorem 1.0)

Sei P eine Eigenschaft. Wenn es Strukturen $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1), (\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2), \ldots$ gibt so dass für jedes $k \geq 1$ gilt

1. $\mathfrak{A}_k \in P$ und $\mathfrak{B}_k \notin P$ und
2. $\#_\rho(\mathfrak{A}_k) = \#_\rho(\mathfrak{B}_k)$ für alle k-Nachbarschaftstypen ρ

dann ist P nicht FO-ausdrückbar.

T3.11

Funktioniert auch für jede Strukturklasse $\mathcal{K}$ (z. B. alle endlichen Strukturen), solange die Paare $\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k$ aus $\mathcal{K}$ stammen.

Methodologie-Theorem 2.0

Definition 3.27 (lokale Ähnlichkeit)

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Strukturen. Für $r \geq 0$ nennen wir $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ r-lokal ähnlich wenn es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt so dass

$$(N_r(a), a) \text{ isomorph zu } (N_r(f(a)), f(a)) \text{ für alle } a \in A.$$

Wir schreiben dann $\mathfrak{A} \leftrightarrows_r \mathfrak{B}$.

Intuitiv gilt also $\mathfrak{A} \leftrightarrows_r \mathfrak{B}$ wenn man $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nicht durch Teilstrukturen des Durchmessers r unterscheiden kann.

Theorem 3.28 (Methodologie-Theorem 2.0)

Sei P eine Eigenschaft. Wenn es Strukturen $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1), (\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2), \ldots$ gibt so dass für jedes $k \geq 1$ gilt

1. $\mathfrak{A}_k \in P$ und $\mathfrak{B}_k \notin P$ und
2. $\mathfrak{A}_k \leftrightarrows_k \mathfrak{B}_k$

dann ist P nicht FO-ausdrückbar.

T3.12

Azyklizität

Theorem 3.29

Azyklizität von ungerichteten Graphen ist nicht in FO ausdrückbar, weder in der Klasse aller Strukturen noch in der Klasse aller endlichen Strukturen.

Beweis: Für jedes $k \geq 1$ sei

Anzahl Kanten

- $\mathfrak{A}_k$ ein Pfad der Länge $4k + 2$ (also azyklisch)
- $\mathfrak{B}_k$ disjunkte Vereinigung eines Pfades der Länge $2k - 1$ und eines Kreises der Länge $2k + 3$ (also nicht azyklisch)

Es gilt $\mathfrak{A}_k \leftrightarrows_k \mathfrak{B}_k$ **T3.13**

Also folgt Theorem 3.25 aus dem Methodologie-Theorem 2.0 ❏

Obiges Argument zeigt auch: “Die Struktur ist ein Baum” ist nicht in FO ausdrückbar und “Die Struktur ist ein Pfad” auch nicht. Warum?

Erreichbarkeit

Wir betrachten noch ein Beispiel für Formeln mit freien Variablen:
Erreichbarkeit bezüglich einer binären Relation

Beispiel SQL:

Datenbank mit Direktverbindungen einer Fluggesellschaft;
Mittels Erreichbarkeit bekommt alle Verbindungen, mit und ohne Umsteigen.

Theorem 3.30

Sei E eine binäre Relation.

Es gibt keine FO-Formel $\varphi(x, y)$, die Erreichbarkeit entlang E definiert, d. h. so dass für alle Strukturen $\mathfrak{A} = (A, E^{\mathfrak{A}})$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a, b] \quad \text{gdw.} \quad \text{es einen } E\text{-Pfad in } \mathfrak{A} \text{ von } a \text{ nach } b \text{ gibt}$$

T3.14

Nicht-Ausdrückbarkeit

Auch nicht FO-ausdrückbar z. B.:

- EVEN: Größe des Universums ist eine gerade Zahl
- Planarität
- k-Färbbarkeit für beliebiges (fixes) $k \geq 2$
- etc

FO kann also viele Informatik-relevante Eigenschaften nicht ausdrücken

Einige aber schon (zur Erinnerung: z.B. *k*-Clique, *k*-Dominating Set)