Def.:

Sei M eine Menge.

Eine Relation auf M ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times M = \{(x,y) \mid x, y \in M\}$.

Man schreibt auch $\sim$ statt R und für alle $x, y \in M$ def. man:

$x \sim y :\Leftrightarrow (x,y) \in R$

Def.:

Sei M eine Menge und sei $\sim$ eine Relation auf M.

$\sim$ heißt Äquivalenzrelation auf M, falls gilt:

(i) $\sim$ ist refexiv, d.h.:

$\forall x \in M: \; x \sim x$

(ii) $\sim$ ist symmetrisch, d.h.:

$\forall x, y \in M: \; x \sim y \Rightarrow y \sim x$

(iii) $\sim$ ist transitiv, d.h.:

$\forall x, y, z \in M: \; x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M, so def man:

$\forall x \in M: [x] := \{ y \in M \mid x \sim y \}$, $[x]$ heißt Äquivalenzklasse von x

und x heißt Vertreter der Äquivalenzklasse.

$M/\sim \; := \{ [x] \mid x \in M \}$ ist die Menge aller Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$.

Es gilt stets: $M = \dot{\bigcup\limits_{[x] \in M/\sim}} [x]$

Bsp.:

Sei M eine Menge.

$\forall x,y \in M: \quad x \sim y :\Leftrightarrow x = y.$

$\sim$ ist eine Äqui-Rel.:

Seien $x,y,z \in M$. Dann gilt:

(i) $x \sim x \Leftrightarrow x = x$ (w)

(ii) $x \sim y \Rightarrow x = y \Rightarrow y = x \Rightarrow y \sim x$

(iii) $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z \Rightarrow x \sim z$

$[x] = \{ y \in M \mid x \sim y \} = \{ y \in M \mid x = y \} = \{x\}.$

$\Rightarrow M/\sim \; = \{ \{x\} \mid x \in M \}$

$$\dot{\bigcup_{[x] \in M/\sim}} [x] = \dot{\bigcup_{\{x\} \in M/\sim}} \{x\} = \dot{\bigcup_{x \in M}} \{x\} = M.$$

Satz:

Sei M eine Menge und sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M.

Seien $x, y \in M$. Dann sind äquivalent:

(i) $x \sim y$

(ii) $[x] = [y]$.

Bew.:

(i) $\Rightarrow$ (ii) „$\subseteq$" Sei $z \in [x] \Rightarrow x \sim z$ (Def. von $[x]$)

$\Rightarrow z \sim x$ ($\sim$ ist symmetrisch)

$\Rightarrow z \sim x \wedge x \sim y$ (Vor.)

$\Rightarrow z \sim y$ ($\sim$ ist transitiv)

$\Rightarrow y \sim z$ ($\sim$ ist symmetrisch)

$\Rightarrow z \in [y]$ ✓

„$\supseteq$" Analog.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es gilt:

$y \sim y$ ($\sim$ ist reflexiv)

$\Rightarrow y \in [y]$ (Def. von $[y]$)

$\Rightarrow y \in [x]$ (da $[x] = [y]$ nach Vor.)

$\Rightarrow x \sim y$ ✓ (Def. von $[x]$)

$\square$

Bsp.:

Sei M die Menge aller Schüler einer Schule.

$\forall x,y \in M: \quad x \sim y :\Leftrightarrow x$ und y sind in derselben Klasse.

Dann gilt:

$\sim$ ist eine Äqui-Rel.

$[x] = \{ y \in M \mid x \sim y \} = \{ y \in M \mid x$ und y sind in derselben Klasse $\}$

ist genau die Menge aller Schüler, die in derselben Klasse wie x sind,

also die Schulklasse von x.

$M = \bigcup_{[x] \in M/\sim} [x]$ (macht Sinn!)

Seien Anna und Laura 2 Schülerinnen aus M, die in derselben Klasse sind.

Dann gilt zwar Anna $\neq$ Laura.

Aber es gilt Anna $\sim$ Laura und $[\text{Anna}] = [\text{Laura}]$

Anna und Laura sind in dem Sinne gleich, dass sie in derselben Klasse sind.

Äquivalenzrelationen werden immer dann verwendet, wenn man eine Gleichheit "in einem gewissen Sinne" definieren möchte.