Wahrscheinlichkeitstheorie Übung 4

11/16

Lennox Heimann, Merlin Hofmann, Nikita Emanuel John Fehér, Nataliia Kotsiuba

December 15, 2024

Matrikelnummer Lennox: 3776050
Matrikelnummer Merlin: 3792248
Matrikelnummer Nikita: 3793479
Matrikelnummer Nataliia: 3738575

3/4

Aufgabe 1.

a)

X/Y	0	1	2	$\sum$
0	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{16}$
$\sum$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	1

b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) =& 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) \\
=& 0 + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{7}{16} \\
=& \frac{3}{8} + \frac{7}{8} = \frac{5}{4} \\
\mathrm{E}(Y) =& 0 \cdot P(Y=0) + 1 \cdot P(Y=1) + 2 \cdot P(Y=2) \\
=& 0 + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{7}{16} \\
=& \frac{3}{8} + \frac{7}{8} = \frac{5}{4} \\
\mathrm{E}(XY) =& 0 \cdot 0 \cdot P(X=0, Y=0) + 0 \cdot 1 \cdot P(X=0, Y=1) + 0 \cdot 2 \cdot P(X=0, Y=2) \\
&+ 1 \cdot 0 \cdot P(X=1, Y=0) + 1 \cdot 1 \cdot P(X=1, Y=1) + 1 \cdot 2 \cdot P(X=1, Y=2) \\
&+ 2 \cdot 0 \cdot P(X=2, Y=0) + 2 \cdot 1 \cdot P(X=2, Y=1) + 2 \cdot 2 \cdot P(X=2, Y=2) \\
=& 0 + 0 + 0 + 0 + 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 0 + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{16} \\
=& \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{11}{8}
\end{aligned}$$

c)

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Die Kovarianz ist definiert als:

$$\operatorname{cov}(X,Y) := E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right)$$

$$\begin{aligned} E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) &= E(XY) - E(X \cdot E(Y)) - E(E(X) \cdot Y) + E(E(X) \cdot E(Y)) \\ &= E(XY) - E(Y) \cdot E(X) - E(X) \cdot E(Y) + E(X) \cdot E(Y) \\ &= E(XY) - E(Y) \cdot E(X) \end{aligned}$$

$$\operatorname{cov}(X,X) = \operatorname{Var}(X)$$

Nach der Definition der Kovarianz:

$$\operatorname{cov}(X,X) = E\left((X - E(X))(X - E(X))\right)$$

Da $E\left((X - E(X))(X - E(X))\right) = (X{-}E(X))^2 \quad \text{und} \quad \operatorname{Var}(X) = (X{-}E(X))^2$,

$$\Rightarrow \operatorname{cov}(X,X) = \operatorname{Var}(X)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X,Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y) \\ &= \frac{11}{8} - \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} = -\frac{3}{16} \end{aligned}$$

Unabhängigkeit?

3/4

Aufgabe 2.

a)

\mathbb{R}

$$\text{Geg.: ZVe X:}\Omega \to \Re \text{ mit } \mathrm{X}(\Omega) = 0, 1, 2, ...$$

$$\mathrm{P}(X=0) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!},\ \mathrm{P}(X=1) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^1}{1!},\ \mathrm{P}(X=2) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2!}$$

$$\mathrm{k} \in \{0, 1, 2, 3, ...\} \to \text{d.h. } \mathrm{P}(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \text{ für, k} \in \mathrm{X}(\Omega)$$

$$\text{Ges.: } \lambda\text{, sodass einer Verteilung von } \mathrm{P}(X=k), \mathrm{k} \in \mathrm{X}(\Omega)$$

$$\text{Lös.: } \mathrm{P}(X=0) + \mathrm{P}(X=1) + \mathrm{P}(X=2) + ... = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = 1$$

$$(Taylor - Reihe : e^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}) \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(X=k) = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Es bleibt zu zeigen, dass alle P(X=k) nichtnegativ sind

b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= 0 \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} + \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k-1=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&=_{(j=k-1)} \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \\
&=_{\text{Taylor-Reihe}} \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

4/4

Aufgabe 3. Eine unfaire Münze wird zweimal geworfen Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ zeigt sie 1 und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ zeigt sie 0. Sei X die Zufallsvariable, die Anzahl der Erfolge (also 1) misst, sei Y eine Zufallsvariable die den ersten Zeitpunkt des ersten Erfolges misst. Sei ferner Z die Zufallsvariable die das Ergebnis des zweifachen Münzwurfes als binäre Zahl liest und ins Zehnersystem überführt. (Beispiel: $Z((1,1)) = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 = 3$)

a) Geben Sie die Verteilung der 3-dimensionalen Zufallsvariable (X, Y, Z) an.

$$\mathbb{P}(X=0, Y=0, Z=0) = \mathbb{P}((0,0)) = \frac{2}{3}\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$
$$\mathbb{P}(X=1, Y=1, Z=1) = \mathbb{P}((1,0)) = \frac{1}{3}\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$
$$\mathbb{P}(X=1, Y=2, Z=2) = \mathbb{P}((0,1)) = \frac{2}{3}\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$
$$\mathbb{P}(X=2, Y=1, Z=3) = \mathbb{P}((1,1)) = \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\mathbb{P}(X,Y,Z) = (x,y,z) = \begin{cases} \frac{4}{9} & \text{wenn } (x,y,z) = (0,0,0) \\ \frac{2}{9} & \text{wenn } (x,y,z) = (1,1,1) \\ \frac{2}{9} & \text{wenn } (x,y,z) = (1,2,2) \\ \frac{1}{9} & \text{wenn } (x,y,z) = (2,1,3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(hätte gereicht)

$D_{XYZ} = \{((0,0,0), \frac{4}{9}), ((0,0,1),0), ((0,0,2),0), ((0,0,3),0), ((0,1,0),0), ((0,1,1),0), ((0,1,2),0), ((0,1,3),0), ((0,2,0),0), ((0,2,1),0), ((0,2,2),0), ((0,2,3),0), ((1,0,0),0), ((1,0,1),0), ((1,0,2),0), ((1,0,3),0), ((1,1,0),0), ((1,1,1), \frac{2}{9}), ((1,1,2),0), ((1,1,3),0), ((1,2,0),0), ((1,2,1),0), ((1,2,2), \frac{2}{9}), ((2,0,0),0), ((2,0,1),0), ((2,0,2),0), ((2,0,3),0), ((2,1,0),0), ((2,1,1),0), ((2,1,2),0), ((2,1,3), \frac{1}{9}), ((2,2,0),0), ((2,2,1),0), ((2,2,2),0), ((2,2,3),0)\}$

b) Geben Sie die Kreuztabellen für $(X, Y), (Y, Z)$ und (X, Z) an.

XY	0	1	2	$\sum$
0	4/9	0	0	4/9
1	0	2/9	2/9	4/9
2	0	1/9	0	1/9
$\sum$	4/9	1/3	2/9	1

XZ	0	1	2	3	$\sum$
0	4/9	0	0	0	4/9
1	0	2/9	2/9	0	4/9
2	0	0	0	1/9	1/9
$\sum$	4/9	2/9	2/9	1/9	1

Y Z	0	1	2	3	$\sum$
0	4/9	0	0	0	4/9
1	0	2/9	0	1/9	3/9
2	0	0	2/9	0	2/9
$\sum$	4/9	2/9	2/9	1/9	1

Aufgabe 4. Wir betrachten eine Urne mit 5 Kugeln 2 blaue, 2 rote und 1 grüne. Nach jedem Zug legen wir die Kugel zurück in die Urne und legen noch eine zusätzliche Kugel der selben Farbe dazu. Dieses Spiel führen wir insgesamt zweimal durch. Sei X die Anzahl der blaue Kugeln, Y die Anzahl der roten Kugeln und Z die Anzahl der grünen Kugeln nach zwei Zügen. Geben Sie die Verteilung der 3-dimensionalen Zufallsvariable (X, Y, Z) an.

- 2 blaue $(X = 2)$
- 2 rote $(Y = 2)$
- 1 grüne $(Z = 1)$

Verteilung nach dem ersten Zug:
$\mathbb{P}(\text{blau}) = \frac{2}{5}, \mathbb{P}(\text{rot}) = \frac{2}{5}, \mathbb{P}(\text{grün}) = \frac{1}{5}$
Zug $N = 2$

- +Blau $:\to X = 3, Y = 2, Z = 1 \to \mathbb{P}(\text{blau}) = \frac{3}{6}, \mathbb{P}(\text{rot}) = \frac{2}{6}, \mathbb{P}(\text{grün}) = \frac{1}{6}$
- +Rot $:\to X = 2, Y = 3, Z = 1 \to \mathbb{P}(\text{blau}) = \frac{2}{6}, \mathbb{P}(\text{rot}) = \frac{3}{6}, \mathbb{P}(\text{grün}) = \frac{1}{6}$
- +Grün $:\to X = 2, Y = 2, Z = 2 \to \mathbb{P}(\text{blau}) = \mathbb{P}(\text{rot}) = \mathbb{P}(\text{grün}) = \frac{2}{6}$

Da $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A)$,
gilt die Wahrscheinlichkeit für die zwei Züge:

1. Blau-blau:
   $\mathbb{P}(\text{blau}, \text{blau}) = \mathbb{P}(\text{blau im 1. Zug}) \cdot \mathbb{P}(\text{blau im 2. Zug}|\text{blau im 1. Zug})$
   $\mathbb{P}(\text{blau}, \text{blau}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{15}$
2. Blau-rot: $\mathbb{P}(\text{blau}, \text{rot}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{15}$
3. Blau-grün: $\mathbb{P}(\text{blau}, \text{grün}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{15}$
4. Rot-blau: $\mathbb{P}(\text{rot}, \text{blau}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{15}$
5. Rot-rot: $\mathbb{P}(\text{rot}, \text{rot}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{15}$
6. Rot-grün: $\mathbb{P}(\text{rot}, \text{grün}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{15}$
7. Grün-blau: $\mathbb{P}(\text{grün}, \text{blau}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{15}$
8. Grün-rot: $\mathbb{P}(\text{grün}, \text{rot}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{15}$
9. Grün-grün: $\mathbb{P}(\text{grün}, \text{grün}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{15}$