Prof. Dr. Ringo Baumann
Moritz Schönherr
Jamie Keitsch

SoSe 2025
Übungsblatt 3
Ausgabe: 09.05.2025

Übungen zur Vorlesung „Logik“
3. Übungsblatt

H 3-1. Disjunktion und Folgerung (2 Pkt.)

Seien $\varphi, \psi, \xi \in \mathcal{F}$. Beweisen bzw. Widerlegen Sie die nachfolgenden Aussagen.

a) $\varphi \vee \psi \models \xi$ gdw. $\varphi \models \xi$ oder $\psi \models \xi$

b) $\varphi \vee \psi \models \xi$ gdw. $\varphi \models \xi$ und $\psi \models \xi$

H 3-2. Folgerung und Unerfüllbarkeit (3 Pkt.)

Gegeben eine Menge $T \subseteq \mathcal{F}$ und eine Formel $\varphi \in \mathcal{F}$. Beweisen Sie:

$$T \models \varphi \quad \text{gdw.} \quad T \cup \{\neg\varphi\} \text{ ist unerfüllbar}$$

H 3-3. Kompaktheitsatz und Endlichkeitssatz (3 Pkt.)

Kompaktheitssatz. Gegeben eine Formelmenge $T \subseteq \mathcal{F}$. Es gilt:

$$T \text{ erfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad \text{jede endliche Teilmenge } T' \subseteq T \text{ ist erfüllbar}$$

Endlichkeitssatz. Gegeben $T \subseteq \mathcal{F}$ und $\varphi \in \mathcal{F}$. Es gilt:

$$T \models \varphi \quad \text{gdw.} \quad \text{es existiert endliche Teilmenge } T' \subseteq T \text{ mit } T' \models \varphi$$

Zeigen Sie, daß aus dem Kompaktheitssatz der Endlichkeitssatz folgt.

H 3-4. Hornformeln und Schnitteigenschaft (6 Pkt.)

a) Gegeben die beiden nachfolgenden Formeln φ und ψ. Sind die Formeln Horn? Falls nein, sind sie semantisch äquivalent zu einer Hornformel? Kurze Begründung.

$$\varphi = (A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3) \wedge (\neg A_1 \vee A_2 \vee A_3) \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3)$$
$$\psi = (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \vee (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3)$$

b) Beweisen Sie, daß jede Hornformel die Schnitteigenschaft erfüllt.

H 3-5. Implikative Form und Markierungsalgorithmus (3 Pkt.)

a) Überführen Sie die nachfolgende Hornformel in ihre implikative Form.

$$(A_1 \vee \neg A_4) \wedge \neg A_1 \wedge A_4 \wedge (\neg A_3 \vee A_2 \vee \neg A_4) \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_2)$$

b) Wenden Sie den Markierungsalgorithmus auf nachfolgende Formel an. Geben Sie im Erfüllbarkeitsfalle ein Modell an.

$$(A_1 \wedge A_6 \to A_3) \wedge (A_4 \to 0) \wedge (A_3 \wedge A_6 \to A_2) \wedge (A_6 \to A_1) \wedge (A_5 \wedge A_2 \to A_4) \wedge (1 \to A_6)$$

H 3-6. Resolution (3 Pkt.)

In VL4 haben wir den Begriff der Resolvente kennengelernt. Ein Operator, der zu einer Klauselmenge M alle möglichen (Einschritt)Resolventen aus M hinzufügt wäre:

$$\mathrm{Res}(M) = M \cup \{R \mid R \text{ ist Resolvente zweier Klauseln aus } M\}$$

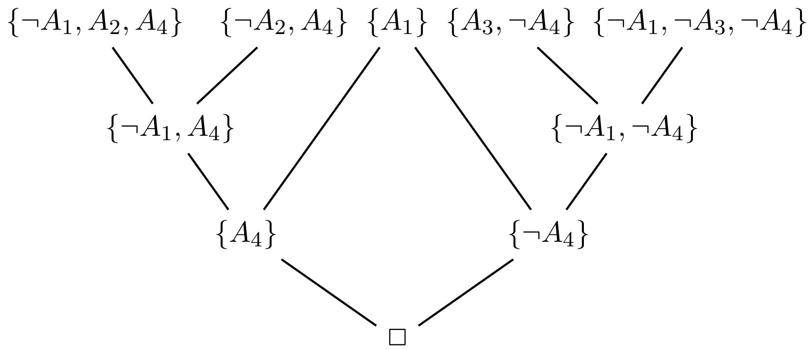
Dies können wir nun iterieren und erhalten die Resolutionshülle $\mathrm{Res}^*(M)$ wie folgt.

$$\mathrm{Res}^0(M) = M \quad \mathrm{Res}^{i+1}(M) = \mathrm{Res}(\mathrm{Res}^i(M)) \quad \mathrm{Res}^*(M) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Res}^i(M)$$

Wir werden in VL5 den berühmten Resolutionssatz zeigen, nämlich:

$$M \text{ unerfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad \square \in \mathrm{Res}^*(M)$$

Das erfolgreiche Ableiten der leeren Klausel wird üblicherweise graphisch veranschaulicht. Beispiel: $M = \{\{A_1\}, \{\neg A_2, A_4\}, \{\neg A_1, A_2, A_4\}, \{A_3, \neg A_4\}, \{\neg A_1, \neg A_3, \neg A_4\}\}$



a) Überprüfen Sie graphisch die Erfüllbarkeit der Menge

$$M = \{\{A_1, A_2, \neg A_3\},\ \{\neg A_2\},\ \{A_2, A_3, A_1\},\ \{A_3\},\ \{\neg A_1, \neg A_3, A_2\}\}$$

Termine:

- Abgabe der Aufgaben bis spätestens 18.05.2025 via moodle.
- Besprechung der Aufgaben ab Montag, dem 19.05.2025 (A-Woche).