Analysis [für Informatiker]
Übungsblatt 6

Nikita Emanuel John Fehér, 3793479
Erik Thun, 3794446

18. November 2024
Mittwoch 11:15-12:45 Drigalla, Stefan Gruppe a

1)

a) Sei

$$a_n = \frac{(1001/1000)^n - 1}{n^3} \text{ und } b_n = 1 + \frac{n^2}{(1002/1000)^n}.$$

Bestimmen Sie (gerne unter Verwendung einer "Rechenhilfe") a_n und b_n für $n = 1, 2, 5, 10, 100, 1000$. Was lässt sich daraus über das Verhalten von a_n und b_n für $n \to \infty$ ableiten?

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0.001 \\
b_1 &= 1.998003992015968063872255489021956087824351297405189620758 48... \\
a_2 &= 0.000250125 \\
b_2 &= 4.98404787231923378791319556495790853422894729503069708885622... \\
a_5 &= 0.000040080080040008 \\
b_5 &= 25.75149302789953494715887355589788182620869928417579763655 40... \\
a_{10} &= 0.00001004512021025221012004501 0001 \\
b_{10} &= 99.02182513762548618785608122897957614901490215947195867374 81... \\
a_{100} &= 0.000000105115697720767968379105237118840189434898800348047 61... \\
b_{100} &= 8189.94297559496999222561343637396839727483706940459906238428... \\
a_{1000} &= 0.000000001716923932235892457383088121947577188964315018836 57... \\
b_{1000} &= 135606.86357962979133737635949046913231791242799357166206196 3...
\end{aligned}$$

Daraus lässt sich folgern das a_n gegen 0 geht und das b_n gegen ∞ geht.

b) Finden Sie für jede der nachstehenden Folgen (a_n) und jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ oder in $\mathbb{R}$ (nicht notwendigerweise das kleinste), das Sie mit den bisher definierten Funktionen ausdrücken können, so dass $|a_n| < \epsilon$ wenn $n \leq N$:

$$\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}, \left(\frac{1}{n(n-\sqrt{2})}\right)_{n=1}^{\infty}, ((-1/2)^n)_{n=1}^{\infty}.$$

c) Untersuchen Sie, ob die nachstehenden Folgen konvergent sind:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n-3}}\right)_{n=4}^{\infty}, \left(\frac{(n-3)^2}{(n+2)}\right)_{n=1}^{\infty}.$$

- $\left(\frac{1}{\sqrt{n-3}}\right)_{n=4}^{\infty}$ ist konvergent, da die folge zerlegt werden kann in $(\sqrt{n-3})_{n=4}^{\infty}$ und $\left(\frac{1}{x}, x=(\sqrt{n-3})\right)_{n=4}^{\infty}$.
- Die folge $(\sqrt{n-3})_{n=4}^{\infty}$ kann wiederum in $(n-3)_{n=4}^{\infty}$ und $(\sqrt{x}, x = (n-3))_{n=4}^{\infty}$ zerlegt werden.
- $(n-3)_{n=4}^{\infty}$ divergiert zu $+\infty$ bei $n \to \infty$
- $\implies (\sqrt{x}, x=(n-3))_{n=4}^{\infty}$ divergiert ebenfalls zu $+\infty$ bei $n \to \infty$.
- $\implies (\sqrt{n-3})_{n=4}^{\infty}$ divergiert zu $+\infty$ bei $n \to \infty$.
- $\implies \left(\frac{1}{x}, x=(\sqrt{n-3})\right)_{n=4}^{\infty}$ konvergiert dementsprechend zu 0

- $\left(\frac{(n-3)^2}{(n+2)}\right)_{n=1}^{\infty}$ ist divergent, da die folge zerlegt werden kann in $((n-3)(n-3))_{n=1}^{\infty}$ und $(n+2)_{n=1}^{\infty}$.
- $((n-3)(n-3))_{n=1}^{\infty}$ kann zerlegt werden in $(n-3)_{n=1}^{\infty}$ und $(n-3)_{n=1}^{\infty}$.
- $(n-3)_{n=1}^{\infty}$ ist divergent zu $+\infty$ bei $n \to \infty$
- $(n+2)_{n=1}^{\infty}$ ist divergent zu $+\infty$ bei $n \to \infty$
- $\implies \left(\frac{n-3}{n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert zu 1
- $\implies \left(\frac{n-3}{n+2} \cdot (n-3)\right)_{n=1}^{\infty}$ divergiert zu $+\infty$

Begründen Sie Ihre Aussagen in b),c) sorgfältig.

2) Berechnen Sie folgende Grenzwerte unter Benutzung der "Algebra für Grenzwerte" und mit ausreichender Begründung.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-5}{n^3+7n-3}, \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n^3+n}{2n^4+100n-35}, \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)^7}{(n+1)^4(n+2)^3}, \lim_{n\to\infty} \frac{3^n n^3+5^n(n+1)}{5^n n+n^5}.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-5}{n^3+7n-3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+7n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n^3+n}{2n^4+100n-35} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n^3+n}{2n^4+100n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n^3}{2n^4} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{2n^4} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)^7}{(n+1)^4(n+2)^3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)^4(n+3)^3}{(n+1)^4(n+2)^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4n^3}{n^4n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^7}{n^7} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{3^n n^3+5^n(n+1)}{5^n n+n^5} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n n^3+5^n n+5^n}{5^n n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n n^3+5^n n}{5^n n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5^n n}{5^n n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} \\
&= 1
\end{aligned}$$