

### 3.2

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für jede natürliche Zahl  $n \geq 1$  gilt:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

**Induktionsanfang** Es gilt  $n = 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^1 \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} \\ \frac{1}{(2 \cdot 1 - 1)(2 \cdot 1 + 1)} &= \frac{1}{2 + 1} \\ \frac{1}{3} &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

**Induktionshypothese** Sei  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ , nehmen wir an das:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1} \text{ Wahr ist.}$$

**Induktionsbehauptung** Zu zeigen ist  $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} \\ &= \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} + \frac{n}{2n+1} \text{ einsetzen der Induktionshypothese} \\ &= \frac{1}{(2 \cdot n + 2 - 1)(2 \cdot n + 2 + 1)} + \frac{n}{2n+1} \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{n}{2n+1} \\ &= \frac{1 + n(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{2n^2 + 3n + 1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{n+1}{2n+3} \\ &= \frac{n+1}{2n+2+1} \\ &= \frac{n+1}{2(n+1)+1} \end{aligned}$$

□

Schreiben Sie explizit was sind Induktionsanfang, Induktionshypothese und Induktionsbehauptung. Markieren Sie, wo im Beweis die Induktionshypothese verwendet wird.