Aufgabe

(a) Sei M die Menge der Teilnehmenden an den Übungen zur Linearen Algebra. Auf M definieren wir eine Relation $\sim$ durch

$$x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; x \text{ und } y \text{ sind in der gleichen Übungsgruppe angemeldet.}$$

Zeigen Sie, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt. Was sind die Äquivalenzklassen?

(b) Entscheiden Sie für die folgenden Relationen auf $\mathbb{Z}$ jeweils, ob sie reflexiv, symmetrisch und transitiv sind. Beweisen Sie gegebenenfalls die Eigenschaft, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(i) $x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; x \neq y$

(ii) $x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; x \leq y$

(iii) $x \sim y$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}$

(iv) $x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; xy \geq 0$

Lösungsskizze zu Aufgabe 1:

(a) Wir prüfen die drei Eigenschaften einer Äquivalenzrelation:

- *reflexiv:* Jeder Student x ist in der gleichen Übungsgruppe wie er selbst.
- *symmetrisch:* Wenn x in der gleichen Übungsgruppe wie y ist, dann ist auch y in der gleichen Übungsgruppe wie x.
- *transitiv:* Wenn x und y in der gleichen Gruppe sind, und y und z in der gleichen Gruppe sind, dann sind auch x und z in der gleichen Gruppe.

Man kann auch die Aufgabe 2(a) benutzen: Bezeichnet G die Menge der Übungsgruppen und ist $f : M \to G$ die Abbildung, die jedem/r Studierenden seine/ihre Übungsgruppe zuordnet, dann ist $x \sim y$ genau dann, wenn $f(x) = f(y)$ gilt. Von solchen Relationen wird in Aufgabe 2(a) gezeigt, dass es sich um Äquivalenzrelationen handelt.

(b) (i)
- *nicht* reflexiv: $0 = 0$
- symmetrisch: wenn $x \neq y$, dann auch $y \neq x$
- *nicht* transitiv, denn $0 \neq 1$ und $1 \neq 0$, aber $0 = 0$

(ii)
- reflexiv: es gilt $x \leq x$ für alle $x \in \mathbb{Z}$
- *nicht* symmetrisch: es gilt $0 \leq 1$, aber $1 \not\leq 0$
- transitiv: aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$

(iii) Es handelt sich um eine Äquivalenzrelation:

- reflexiv: es gilt $x \sim x$ für alle $x \in \mathbb{Z}$
- symmetrisch: für $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt immer $y \sim x$ (und $x \sim y$)
- transitiv: für $x, y, z \in \mathbb{Z}$ gilt immer $x \sim z$ (und $x \sim y$ und $y \sim z$)

(iv)
- reflexiv: es gilt $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{Z}$
- symmetrisch: wenn $xy \geq 0$ gilt, dann auch $yx \geq 0$, denn $xy = yx$
- *nicht* transitiv: es gilt $1 \cdot 0 \geq 0$ und $0 \cdot (-1) \geq 0$, aber $1 \cdot (-1) < 0$

Aufgabe

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Sei die Relation $\sim$ auf X definiert durch

$$x \sim y \ :\Longleftrightarrow \ f(x) = f(y).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Vorschrift $[x] \mapsto f(x)$ eine injektive Abbildung $\overline{f} : X/{\sim} \to Y$ definiert.

(c) Folgern Sie, dass die Abbildung

$$\tilde{f} : X/{\sim} \xrightarrow{\sim} f(X), \quad [x] \mapsto f(x)$$

bijektiv ist und zeigen Sie, dass $f = i \circ \tilde{f} \circ \pi$ gilt, wobei $\pi : X \to X/{\sim}$ die Quotientenabbildung und $i : f(X) \hookrightarrow Y$ die Inklusion des Bildes von f ist.

(d) Beschreiben Sie die Bijektion $X/{\sim} \xrightarrow{\sim} f(X)$ für die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.

Lösungsskizze zu Aufgabe 2:

(a) Wir prüfen die drei Eigenschaften einer Äquivalenzrelation. Wir benutzen, dass die Gleichheitsrelation auf Y eine Äquivalenzrelation ist.

- *reflexiv:* für alle $x \in X$ gilt $f(x) = f(x)$.
- *symmetrisch:* aus $f(x) = f(y)$ folgt $f(y) = f(x)$.
- *transitiv:* wenn $f(x) = f(y)$ und $f(y) = f(z)$ gilt, dann folgt $f(x) = f(z)$.

(b) Die Äquivalenzrelation ist so definiert, dass $f(x) = f(y)$ gilt, wenn $x \sim y$ gilt. Nach Vorlesung liefert daher die Vorschrift $[x] \mapsto f(x)$ eine wohldefinierte Abbildung $\overline{f} : X/{\sim} \to Y$. Um zu zeigen, dass sie injektiv ist, seien $a, b \in X/{\sim}$ zwei Äquivalenzklassen mit $\overline{f}(a) = \overline{f}(b)$. Zu zeigen ist $a = b$. Nach Definition von Äquivalenzklassen gibt es Elemente $x, y \in X$ mit $a = [x]$ und $b = [y]$. Dann gilt $\overline{f}(a) = f(x)$ und $\overline{f}(b) = f(y)$. Nach Voraussetzung gilt $f(x) = f(y)$. Nach Definition der Äquivalenzrelation bedeutet das $x \sim y$, also $[x] = [y]$ und damit $a = b$.

(c) Die Injektivität der Abbildung $\tilde{f}$ wurde in (b) gezeigt. Sie ist auch surjektiv, denn für $y \in f(X)$ gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ (nach Definition des Bildes) und dann gilt $\tilde{f}([x]) = y$, d.h. $[x]$ ist ein Urbild von y unter $\tilde{f}$. Die Gleichheit $f = i \circ \tilde{f} \circ \pi$ bedeutet, dass $f(x) = (i \circ \tilde{f} \circ \pi)(x)$ für alle $x \in X$ gilt. Um dies zu zeigen, sei $x \in X$ beliebig, dann gilt

$$(i \circ \tilde{f} \circ \pi)(x) = (i \circ \tilde{f})([x]) = i(f(x)) = f(x).$$

(d) Die Äquivalenzrelation ist gegeben durch

$$x \sim y \iff x^2 = y^2 \iff x = \pm y.$$

Die Äquivalenzklassen bestehen also aus reellen Zahlen, die bis auf das Vorzeichen gleich sind. Es gibt die zweielementigen Äquivalenzklassen $[x] = \{x, -x\}$ für $x > 0$ und eine einelementige Äquivalenzklasse $[0] = \{0\}$. Das Bild $f(\mathbb{R})$ besteht aus allen reellen Zahlen $y \in \mathbb{R}$, für die ein $x \in \mathbb{R}$ mit $y = x^2$ existiert. Dies sind genau die nichtnegativen reellen Zahlen

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \coloneqq \{y \in \mathbb{R}\ ;\ y \geq 0\},$$

denn es gilt $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und umgekehrt $y = (\sqrt{y})^2$ für $y \geq 0$. Wir erhalten also die Bijektion

$$\tilde{f} : \mathbb{R}/\sim \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad [x] \mapsto x^2.$$

Aufgabe

Wir definieren auf der Menge $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ eine Äquivalenzrelation, indem wir A in Relation zu B setzen, wenn $|A|-|B|$ durch 3 teilbar ist.

(i) Bestimmen Sie alle Äquivalenzklassen bzgl. dieser Äquivalenzrelation.

(ii) Wir bezeichnen mit $\tilde{\sim}$ die Äquivalenzrelation $\sim$, aufgefasst als Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})$. Existieren bzgl. $\tilde{\sim}$ mehr Äquivalenzklassen als bzgl. $\sim$?

Bemerkung: Hier notieren wir mit $|X|$ die Anzahl der Elemente einer Menge X.

(i) $\forall A, B \in P(\{1,2,3,4\}) : A \sim B :\Leftrightarrow 3 \mid (\underbrace{|A|-|B|}_{\in \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}})$

$\Leftrightarrow |A|-|B| \in \{-3,0,3\}$

Sei $A \in P(\{1,2,3,4\})$

$[A]_\sim = \{ B \in P(\{1,2,3,4\}) \mid A \sim B \}$

$= \{ B \in P(\{1,2,3,4\}) \mid |A|-|B| \in \{-3,0,3\} \}$

Für alle $A_1, A_2 \in P(\{1,2,3,4\})$ mit $|A_1| = |A_2|$ gilt:

$[A_1]_\sim = [A_2]_\sim \Leftrightarrow A_1 \sim A_2 \Leftrightarrow 3 \mid (\underbrace{|A_1|-|A_2|}_{=0})$ (w)

Also haben je 2 Mengen mit gleichvielen Elementen dieselbe Äquivalenzklasse.

Daher genügt es, die Mengen $A \in P(\{1,2,3,4\})$ nach der Anzahl ihrer Elemente zu unterscheiden.

Als Repräsentant von $[A]_\sim$ kann eine beliebige Menge $M \in P(\{1,2,3,4\})$ mit $|M| = |A|$ gewählt werden.

1\. Fall: $|A| = 0$:

$\Rightarrow [A]_\sim = \{ B \in P(\{1,2,3,4\}) \mid -|B| \in \{-3,0,3\} \}$

$= \{ B \in P(\{1,2,3,4\}) \mid |B| = 0 \vee |B| = 3 \}$

$= \{ \emptyset, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\} \} = [\emptyset]_\sim$

2\. Fall: $|A| = 1$:

$\Rightarrow [A]_\sim = \{ B \in P(\{1,2,3,4\}) \mid 1-|B| \in \{-3,0,3\} \}$

$= \{ B \in P(\{1,2,3,4\}) \mid |B| = 4 \vee |B| = 1 \}$

$= \{ \{1,2,3,4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\} \} = [\{1\}]_\sim$

3. Fall: $|A| = 2$

$\Rightarrow [A]_\sim = \{ B \in P(\{1,2,3,4\}) \mid 2 - |B| \in \{-3,0,3\} \}$

$= \{ B \in P(\{1,2,3,4\}) \mid |B| = 2 \}$

$= \{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\} \} = [\{1,2\}]_\sim$

4. Fall: $|A| = 3$

Es gilt: $A \sim \emptyset \Leftrightarrow 3 \mid \underbrace{(\underbrace{|A|}_{=3} - \underbrace{|\emptyset|}_{=0})}_{=3}$ (w)

$\Rightarrow [A]_\sim = [\emptyset]_\sim$

5. Fall: $|A| = 4$:

Es gilt: $A \sim \{1\} \Leftrightarrow 3 \mid \underbrace{(\underbrace{|A|}_{=4} - \underbrace{|\{1\}|}_{=1})}_{=3}$ (w)

$\Rightarrow [A]_\sim = [\{1\}]_\sim$

$\Rightarrow \{ [A]_\sim \mid A \in P(\{1,2,3,4\}) \} = \{ [\emptyset]_\sim, [\{1\}]_\sim, [\{1,2\}]_\sim \}$

ist die Menge der Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$

(ii) $\forall A, B \in P(\{1,2,3,4,5\}) : A \hat{\sim} B :\Leftrightarrow 3 \mid (\underbrace{|A| - |B|}_{\in \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}})$

$\Leftrightarrow |A| - |B| \in \{-3,0,3\}$

Wie in (i) gilt:

Für $A \in P(\{1,2,3,4,5\})$

$[A]_\sim = \{ B \in P(\{1,2,3,4,5\}) \mid A \sim B \}$

$= \{ B \in P(\{1,2,3,4,5\}) \mid |A| - |B| \in \{-3,0,3\} \}$

Für alle $A_1, A_2 \in P(\{1,2,3,4,5\})$ mit $|A_1| = |A_2|$ gilt:

$[A_1]_\sim = [A_2]_\sim \Leftrightarrow A_1 \sim A_2 \Leftrightarrow 3 \mid (\underbrace{|A_1| - |A_2|}_{=0})$ (w)

Wie in (i) erhalten wir

$|A| = 0 \quad : \quad [A]_{\hat{\sim}} = [\emptyset]_{\hat{\sim}}$

$|A| = 1 \quad : \quad [A]_{\hat{\sim}} = [\{1\}]_{\hat{\sim}}$

$|A| = 2 \quad : \quad [A]_{\hat{\sim}} = [\{1,2\}]_{\hat{\sim}}$

$|A| = 3 \quad : \quad [A]_{\hat{\sim}} = [\emptyset]_{\hat{\sim}}$

$|A| = 4 \quad : \quad [A]_{\hat{\sim}} = [\{1\}]_{\hat{\sim}}$

wobei die Äquivalenzklassen jetzt aus anderen Mengen bestehen.

Für $|A| = 5$ gilt nun:

$$A \sim \{1,2\} \iff 3 \mid \underbrace{(\underbrace{|A|}_{=5} - \underbrace{|\{1,2\}|}_{=2})}_{=3} \quad (w)$$

$$\Rightarrow [A]_{\hat{\sim}} = [\{1,2\}]_{\hat{\sim}}$$

$$\Rightarrow \{[A]_{\sim} \mid A \in P(\{1,2,3,4,5\})\} = \{[\emptyset]_{\sim}, [\{1\}]_{\sim}, [\{1,2\}]_{\sim}\}$$

ist die Menge der Äquivalenzklassen bzgl. $\hat{\sim}$

Es ex. also nicht mehr Äquivalenzklassen bzgl. $\hat{\sim}$ als bzgl. $\sim$.

Hinweis. In der Lösung wurde folgende Regel benutzt:

Satz:

Sei X eine Menge und sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Seien $x, y \in X$. Dann gilt:

$[x]_\sim = [y]_\sim \iff x \sim y$.

Bew.:

„$\Rightarrow$" $y \in [y]_\sim = [x]_\sim \Rightarrow x \sim y$ $\quad$ $([x]_\sim = \{y \in X \mid x \sim y\})$

($y \in [y]_\sim$, da $y \sim y$ wegen Reflexivität.)

„$\Leftarrow$" „$\subseteq$" Sei $z \in [x]_\sim$, also $x \sim z$. Aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$ (Symmetrie)

Aus $y \sim x$ und $x \sim z$, folgt $y \sim z$ (Transitivität), also $z \in [y]_\sim$

„$\supseteq$" Analog. $\square$