2.3

Für zwei Mengen A, B definieren wir

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Seien A und B Mengen aus einem Universum U. Beweisen Sie folgende Aussagen:

1. Es gilt $A \triangle A = \emptyset$.

$$\begin{aligned} \text{sei } A &= A_1 = A_2 \\ A_1 \triangle A_2 &= (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1) \\ &= (A \setminus A) \cup (A \setminus A) \\ &= \emptyset \cup \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$\square$

2. Es gilt $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

$$\begin{aligned} & A \setminus B = A \cap B^c \\ \iff & A \setminus B \subseteq A \cap B^c \text{ und } A \setminus B \supseteq A \cap B^c \\ & \subseteq : x \in (A \setminus B) \\ & \quad \implies x \in A \text{ und } x \notin B \\ & \quad \implies x \in A \text{ und } x \in B^c \\ & \quad \implies x \in (A \cap B^c) \\ & \supseteq : x \in (A \cap B^c) \\ & \quad \implies x \in A \text{ und } x \in B^c \\ & \quad \implies x \in A \text{ und } x \notin B \\ & \quad \implies x \in (A \setminus B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \\ &= ((A \cap B^c) \cup B) \cap ((A \cap B^c) \cup A^c) \\ &= ((A \cup B) \cap (B^c \cup B)) \cap ((A \cup A^c) \cap (B^c \cup A^c)) \\ &= ((A \cup B) \cap U) \cap (U \cap (B^c \cup A^c)) \\ &= (A \cup B) \cap (B^c \cup A^c)^{cc} \\ &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$

$\square$

3. Es gilt $(A \triangle B) \triangle C = (A \cup B \cup C) \cap (A^c \cup B^c \cup C^c)$.
   Fehlerhaft?