UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Probeklausur Logik

10. Juli 2025

$$\varphi = A_1 \vee (\neg A_2 \rightarrow (A_1 \vee A_3))$$

A_1	A_2	A_3	$A_1 \vee A_3$	$\neg A_2$	$\neg A_2 \rightarrow (A_1 \vee A_3)$	φ
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

$$\varphi = A_1 \vee (\neg A_2 \rightarrow (A_1 \vee A_3))$$

A_1	A_2	A_3	$A_1 \vee A_3$	$\neg A_2$	$\neg A_2 \rightarrow (A_1 \vee A_3)$	φ
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1

b) $\neg A_2 \rightarrow (A_1 \vee A_3)$ oder $A_1 \vee A_2 \vee A_3$

c) Ja. Nach Koinzidenzlemma ist die Belegung von A_4 für φ nicht relevant. Wir finden die Interpretation in der sechsten Zeile.

- Was sind Hornformeln?
- Wie kann man überprüfen, ob φ äquivalent zu einer Hornformel ist?

Hornformel: Formel in KNF, wobei jedes Konjunktionsglied maximal ein positives Literal enthält.

Wie kann man überprüfen ob φ äquivalent zu einer Hornformel ist?

- mittels Schnitteigenschaft: Wenn $I_1, I_2 \in Mod(\varphi)$ dann auch $I_1 \cap I_2 \in Mod(\varphi)$
- φ äquivalent zu einer Hornformel gdw. φ besitzt die Schnitteigenschaft

Hat $A_1 \vee (\neg A_2 \rightarrow (A_1 \vee A_3))$ die Schnitteigenschaft? Nein! Z.b. $\{A_1\}$ und $\{A_2\}$ sind Modelle, aber $\{A_1\} \cap \{A_2\} = \emptyset$ ist kein Modell.
D.h. $A_1 \vee (\neg A_2 \rightarrow (A_1 \vee A_3))$ ist nicht äquivalent zu einer Hornformel.

- Wann gilt $\varphi \models \psi$? Wenn $Mod(\varphi) \subseteq Mod(\psi)$

- Wann gilt $\varphi \models \psi$? Wenn $Mod(\varphi) \subseteq Mod(\psi)$
- Wie können wir Modelle von φ und ψ bestimmen?
  Ablesen: φ ist in DNF, d.h. $Mod(\varphi) = \{\{A_2\}, \{A_2, A_3\}\}$
  und ψ ist in KNF, d.h. folgende Interpretationen sind *keine* Modelle: $\{A_2, A_3\}, \{A_1\}, \emptyset \notin Mod(\psi)$

- Wann gilt $\varphi \models \psi$? Wenn $Mod(\varphi) \subseteq Mod(\psi)$
- Wie können wir Modelle von φ und ψ bestimmen?
  Ablesen: φ ist in DNF, d.h. $Mod(\varphi) = \{\{A_2\}, \{A_2, A_3\}\}$
  und ψ ist in KNF, d.h. folgende Interpretationen sind *keine* Modelle: $\{A_2, A_3\}, \{A_1\}, \emptyset \notin Mod(\psi)$
- Gilt $\varphi \models \psi$? Nein, da $\{A_2, A_3\} \in Mod(\varphi)$ aber $\{A_2, A_3\} \notin Mod(\psi)$.

Gilt $\neg(A_1 \wedge \neg A_2) \wedge (\neg A_1 \to A_2) \wedge \neg A_2 \models A_3$?

Ja, da $\neg(A_1 \wedge \neg A_2) \wedge (\neg A_1 \to A_2) \wedge \neg A_2$ unerfüllbar ist.

Wie können wir die Interpolante zweier Formeln φ und ψ bestimmen?

Wie können wir die Interpolante zweier Formeln φ und ψ bestimmen?

for $A_i \in s(\varphi) \setminus s(\psi)$ **do**

$\quad \varphi \leftarrow \varphi[\top/A_i] \vee \varphi[\bot/A_i]$

$$\varphi = (\neg A_3 \to (\neg A_1 \wedge \neg A_2)) \wedge (A_3 \to (A_1 \leftrightarrow A_2))$$
$$\mathrm{s}(\varphi) \setminus \mathrm{s}(\psi) = \{A_3\}$$

$$\begin{aligned}
\xi =& \varphi[\bot/A_3] \vee \varphi[\top/A_3] \\
=& \Big((\neg\bot \to (\neg A_1 \wedge \neg A_2)) \wedge (\bot \to (A_1 \leftrightarrow A_2))\Big) \\
& \vee \Big((\neg\top \to (\neg A_1 \wedge \neg A_2)) \wedge (\top \to (A_1 \leftrightarrow A_2))\Big) \\
\equiv& (\neg\bot \to (\neg A_1 \wedge \neg A_2)) \vee (\top \to (A_1 \leftrightarrow A_2)) \\
\equiv& (\neg A_1 \wedge \neg A_2) \vee (A_1 \leftrightarrow A_2)
\end{aligned}$$

Allgemeines Vorgehen bei strukturellen Induktionen:

Allgemeines Vorgehen bei strukturellen Induktionen:

IA: Zeigt die Aussage für atomare Formeln.

IV: Nehmt an, dass die Aussage für Formeln φ und ψ gelten.

IS: Zeigt die Aussage für Formeln, die φ und ψ mit einem Junktor verknüpfen.

Allgemeines Vorgehen bei strukturellen Induktionen:

für $\mathcal{X}$

IA: Zeigt die Aussage für atomare Formeln.

$$A \in \mathcal{A}$$

IV: Nehmt an, dass die Aussage für Formeln φ und ψ gelten.

IS: Zeigt die Aussage für Formeln, die φ und ψ mit einem Junktor verknüpfen.

$$\varphi \oplus \psi$$

Allgemeines Vorgehen bei strukturellen Induktionen:

für aussagenlogische Formeln

IA: Zeigt die Aussage für atomare Formeln.

$$A \in \mathcal{A}$$

IV: Nehmt an, dass die Aussage für Formeln φ und ψ gelten.

IS: Zeigt die Aussage für Formeln, die φ und ψ mit einem Junktor verknüpfen.

$$\neg\varphi, \quad \varphi \vee \psi, \quad \text{und } \varphi \wedge \psi$$

Allgemeines Vorgehen bei strukturellen Induktionen:

für prädikatenlogische Formeln

IA: Zeigt die Aussage für atomare Formeln.

$$P(t_1, \ldots, t_n) \qquad t_1 = t_2$$

IV: Nehmt an, dass die Aussage für Formeln φ und ψ gelten.

IS: Zeigt die Aussage für Formeln, die φ und ψ mit einem Junktor verknüpfen.

$\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$, und $\varphi \wedge \psi$, sowie $\exists x \varphi$ und $\forall x \varphi$.

Allgemeines Vorgehen bei strukturellen Induktionen:

für $\mathcal{X}$

IA: Zeigt die Aussage für atomare Formeln.

$$A \in \mathcal{A}$$

IV: Nehmt an, dass die Aussage für Formeln φ und ψ gelten.

IS: Zeigt die Aussage für Formeln, die φ und ψ mit einem Junktor verknüpfen.

$$\varphi \oplus \psi$$

Sei $I(A) = 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

IA: Für alle $\varphi = A$ mit $A \in \mathcal{A}$ gilt $I(\varphi) = I(A) = 0$ nach Definition von I.

IV: Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{X}$ zwei Formeln für die gilt, dass $I(\varphi) = I(\psi) = 0$.

IS: Für $\varphi \oplus \psi$ gilt:

$$I(\varphi \oplus \psi) = 1 \iff \text{entweder } I(\varphi) = 1 \text{ oder } I(\psi) = 1$$
$$\overset{\text{IV.}}{\iff} \text{entweder } 0 = I(\varphi) = 1 \text{ oder } 0 = I(\psi) = 1.$$

Da $0 = 1$ nicht gilt, gilt die dritte Aussage nicht. Somit gilt $I(\varphi \oplus \psi) \neq 1$, d.h. $I(\varphi \oplus \psi) = 0$.

Existiert in $\mathcal{X}$ eine Formel äquivalent zu $\neg A_1$?

Existiert in $\mathcal{X}$ eine Formel äquivalent zu $\neg A_1$?

Nein. Sei I die Interpretation, die alle Atome zu falsch auswertet.
Es gilt $I(\neg A_1) = 1$ und wir wissen, dass für alle Formeln φ in $\mathcal{X}$

$$I(\varphi) = 0.$$

$$\varphi = \exists y\Big(R(x,y) \land \exists z R(y,z)\Big) \rightarrow \exists y\Big(P(y) \land R(y,x)\Big).$$

Sei $\mathfrak{A}$ folgende Struktur:

- $U^{\mathfrak{A}} = \{a, b, c, d\}$,
- $R^{\mathfrak{A}} = \{(a,b), (b,c), (c,d)\}$,
- $P^{\mathfrak{A}} = \{a, b, c\}$.

Sei $\beta(x) = \beta(y) = \beta(z) = b$.

1. Ist $(\mathfrak{A}, \beta)$ ein Modell von φ?
2. Geben Sie eine Belegung γ an, sodass $(\mathfrak{A}, \gamma)$ kein Modell von φ ist.
3. Überführen Sie φ in Negationsnormalform.

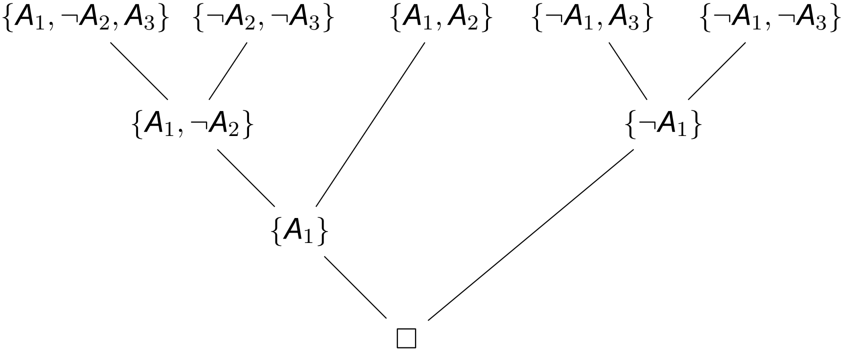
- Ja, da
  $$(\mathfrak{A}, \beta_{[y \mapsto a]})(P(y) \wedge R(y, x)) = 1.$$
  Somit gilt
  $$(\mathfrak{A}, \beta)(\exists y (P(y) \wedge R(y, x))) = 1$$
  und $(\mathfrak{A}, \beta)$ ist ein Modell von φ.
- $\gamma(x) = \gamma(y) = \gamma(z) = a$, da a mit b in Relation steht und b mit c, aber es kein Element $u \in U^{\mathfrak{A}}$ gibt, sodass $(u, a) \in R^{\mathfrak{A}}$.

$$
\begin{aligned}
\varphi &\equiv \neg\exists y(R(x,y) \wedge \exists z R(y,z)) \vee \exists y(P(y) \wedge R(y,x)) \\
&\equiv \forall y \neg(R(x,y) \wedge \exists z R(y,z)) \vee \exists y(P(y) \wedge R(y,x)) \\
&\equiv \forall y(\neg R(x,y) \vee \neg\exists z R(y,z)) \vee \exists y(P(y) \wedge R(y,x)) \\
&\equiv \forall y(\neg R(x,y) \vee \forall z \neg R(y,z)) \vee \exists y(P(y) \wedge R(y,x))
\end{aligned}
$$

Die Formel ist nicht bereinigt, da y mehrmals gebunden wird.

Wendet den Resolutionsalgorithmus an:

$$\{\{A_1, A_2\}, \{A_1, \neg A_2, A_3\}, \{\neg A_1, A_3\}, \{\neg A_1, \neg A_3\}, \{\neg A_2, \neg A_3\}\}.$$


$\{A_1, \neg A_2, A_3\}$
$\{\neg A_2, \neg A_3\}$
$\{A_1, A_2\}$
$\{\neg A_1, A_3\}$
$\{\neg A_1, \neg A_3\}$
$\{A_1, \neg A_2\}$
$\{\neg A_1\}$
$\{A_1\}$
$\square$

Wendet den Unifikationsalgorithmus an:

$$R(z, y, g(y, z)) \qquad \text{und} \qquad R(c, f(v), g(f(v), v)).$$

Substitution		
$[\,]$	$R(z, y, g(y, z))$	$R(c, f(v), g(f(v), v))$
$[z/c]$	$R(c, y, g(y, c))$	$R(c, f(v), g(f(v), v))$
$[z/c][y/f(v)]$	$R(c, f(v), g(f(v), c))$	$R(c, f(v), g(f(v), v))$
$[z/c][y/f(v)][v/c]$	$R(c, f(c), g(f(c), c))$	$R(c, f(c), g(f(c), c))$

Bildet eine Resolvente:

$$\{P(z, f(y)), R(z, y, g(y, z)), \neg Q(z, z)\}$$

$$\{\neg R(c, f(v), g(f(v), v)), Q(v, f(v))\}$$

Resolvente:

$$\{P(c, f(f(c))), \neg Q(c, c), Q(c, f(c))\}.$$

Sei $x \notin \mathrm{frei}(\varphi)$ und $y \notin \mathrm{frei}(\psi)$. Zeigt, dass

$$\forall x \exists y(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists y \forall x(\varphi \wedge \psi).$$

Es gilt ebenso $x \notin \mathrm{frei}(\exists y \varphi)$ und $y \notin \mathrm{frei}(\forall x \psi)$.

$$\begin{aligned}
\forall x \exists y(\varphi \wedge \psi) &\equiv \forall x(\exists y \varphi \wedge \psi) \\
&\equiv \forall x(\psi \wedge \exists y \varphi) \\
&\equiv (\forall x \psi \wedge \exists y \varphi) \\
&\equiv (\exists y \varphi \wedge \forall x \psi) \\
&\equiv \exists y(\varphi \wedge \forall x \psi) \\
&\equiv \exists y(\forall x \psi \wedge \varphi) \\
&\equiv \exists y \forall x(\psi \wedge \varphi) \\
&\equiv \exists y \forall x(\varphi \wedge \psi)
\end{aligned}$$

Beweisen oder widerlegen Sie: Es existiert ein erfüllbarer prädikatenlogischer Satz φ dessen Modelle alle überabzählbar sind.

Beweisen oder widerlegen Sie: Es existiert ein erfüllbarer prädikatenlogischer Satz φ dessen Modelle alle überabzählbar sind.

Gilt nicht. Angenommen φ ist ein prädikatenlogischer Satz, der nur überabzählbare Modelle besitzt. Dann existiert nach Löwenheim-Skolem auch ein abzählbares Modell. (Widerspruch)

Überprüft, dass bei euch im Moodle mindestens 60 Punkte eingetragen sind.

Klausur am 25. Juli 8:30 - 9:30.

Noch Fragen?

Moodle-Forum
schoenherr@informatik.uni-leipzig.de