9.Übung zur Vorlesung Lineare Algebra
für Informatik

Mathematisches Institut, Universität Leipzig

Dozent: Dr. habil. Jan-David Hardtke

Ausgabe: Donnerstag, 6.6.2024
Abgabe: Donnerstag, 13.6.2024 bis 11:00 Uhr im Moodle-Kurs

Wichtig: Die Abgabe muss in Form **einer** pdf-Datei erfolgen und ist mit Namen, Matrikelnummer, Übungstermin und Namen des Übungsleiters zu versehen. Die Aufgaben müssen **selbstständig** bearbeitet werden (d. h. keine Partnerabgabe).

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** Sei V ein reeller Vektorraum und sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Ferner sei $\|\cdot\|$ die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm auf V. Beweisen Sie die *Parallelogrammgleichung*

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 \qquad \forall v, w \in V.$$

Aufgabe 2 (3+1 Punkte)**.** Für einen Vektor $x = (x_1 \dots x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

1) Zeigen Sie, dass $\| \cdot \|_1$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert.
2) Zeigen Sie, dass für $n \geq 2$ die Norm $\| \cdot \|_1$ nicht von einem Skalarprodukt induziert wird.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Wir betrachten die folgenden drei Vektoren im $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es sei $U = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$.
Bestimmen Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens eine Orthonormalbasis von U (bzgl. des euklidischen Skalarprodukts).