UNIVERSITÄT LEIPZIG

Vorlesung 9 - Mächtigkeit von Mengen

Diskrete Strukturen (WS 2023-24)

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig,

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$,

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
  - Z.B. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
  - Z.B. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$
  - $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$,

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
  - Z.B. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$
  - $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, $|\mathcal{P}(X)| \neq |\mathcal{X}|$

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
  - Z.B. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$
  - $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, $|\mathcal{P}(X)| \neq |\mathcal{X}|$ Andere Notation:

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
  - Z.B. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$
  - $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, $|\mathcal{P}(X)| \neq |\mathcal{X}|$ Andere Notation: $\mathcal{P}(X) = 2^X$.

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f: M \to N$ existiert.
  - Z.B. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$
  - $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, $|\mathcal{P}(X)| \neq |\mathcal{X}|$ Andere Notation: $\mathcal{P}(X) = 2^X$.
- Sei $\mathcal{U}$ ein Universum von Mengen.

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
  - Z.B. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$
  - $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, $|\mathcal{P}(X)| \neq |\mathcal{X}|$ Andere Notation: $\mathcal{P}(X) = 2^X$.
- Sei $\mathcal{U}$ ein Universum von Mengen. Dann

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
  - Z.B. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$
  - $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, $|\mathcal{P}(X)| \neq |\mathcal{X}|$ Andere Notation: $\mathcal{P}(X) = 2^X$.
- Sei $\mathcal{U}$ ein Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
  - Z.B. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$
  - $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, $|\mathcal{P}(X)| \neq |\mathcal{X}|$ Andere Notation: $\mathcal{P}(X) = 2^X$.
- Sei $\mathcal{U}$ ein Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f : M \to N$ existiert.
  - Z.B. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$
  - $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, $|\mathcal{P}(X)| \neq |\mathcal{X}|$ Andere Notation: $\mathcal{P}(X) = 2^X$.
- Sei $\mathcal{U}$ ein Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
  - Z.B. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$
  - $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, $|\mathcal{P}(X)| \neq |\mathcal{X}|$ Andere Notation: $\mathcal{P}(X) = 2^X$.
- Sei $\mathcal{U}$ ein Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.
- Die Äquivalenzklassen heißen Kardinalitäten.

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
  - Z.B. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$
  - $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, $|\mathcal{P}(X)| \neq |\mathcal{X}|$ Andere Notation: $\mathcal{P}(X) = 2^X$.
- Sei $\mathcal{U}$ ein Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.
- Die Äquivalenzklassen heißen Kardinalitäten.
- (Cantor -Schröder-Bernstein)

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
  - Z.B. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$
  - $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, $|\mathcal{P}(X)| \neq |\mathcal{X}|$ Andere Notation: $\mathcal{P}(X) = 2^X$.
- Sei $\mathcal{U}$ ein Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.
- Die Äquivalenzklassen heißen Kardinalitäten.
- (Cantor -Schröder-Bernstein) Seien $f\colon A \to B$

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f : M \to N$ existiert.
  - Z.B. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$
  - $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, $|\mathcal{P}(X)| \neq |\mathcal{X}|$ Andere Notation: $\mathcal{P}(X) = 2^X$.
- Sei $\mathcal{U}$ ein Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.
- Die Äquivalenzklassen heißen Kardinalitäten.
- (Cantor -Schröder-Bernstein) Seien $f : A \to B$ und

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
  - Z.B. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$
  - $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, $|\mathcal{P}(X)| \neq |\mathcal{X}|$ Andere Notation: $\mathcal{P}(X) = 2^X$.
- Sei $\mathcal{U}$ ein Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.
- Die Äquivalenzklassen heißen Kardinalitäten.
- (Cantor -Schröder-Bernstein) Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to A$ injektive Funktionen.

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
  - Z.B. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$
  - $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, $|\mathcal{P}(X)| \neq |\mathcal{X}|$ Andere Notation: $\mathcal{P}(X) = 2^X$.
- Sei $\mathcal{U}$ ein Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.
- Die Äquivalenzklassen heißen Kardinalitäten.
- (Cantor -Schröder-Bernstein) Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to A$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
  - Z.B. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$
  - $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, $|\mathcal{P}(X)| \neq |\mathcal{X}|$ Andere Notation: $\mathcal{P}(X) = 2^X$.
- Sei $\mathcal{U}$ ein Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.
- Die Äquivalenzklassen heißen Kardinalitäten.
- (Cantor -Schröder-Bernstein) Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to A$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $h\colon A \to B$.

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
  - Z.B. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$
  - $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, $|\mathcal{P}(X)| \neq |\mathcal{X}|$ Andere Notation: $\mathcal{P}(X) = 2^X$.
- Sei $\mathcal{U}$ ein Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.
- Die Äquivalenzklassen heißen Kardinalitäten.
- (Cantor -Schröder-Bernstein) Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to A$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $h\colon A \to B$.
  - Wir definieren

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
  - Z.B. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$
  - $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, $|\mathcal{P}(X)| \neq |\mathcal{X}|$ Andere Notation: $\mathcal{P}(X) = 2^X$.
- Sei $\mathcal{U}$ ein Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.
- Die Äquivalenzklassen heißen Kardinalitäten.
- (Cantor -Schröder-Bernstein) Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to A$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $h\colon A \to B$.
  - Wir definieren $|M| \leq |N|$

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
  - Z.B. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$
  - $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, $|\mathcal{P}(X)| \neq |\mathcal{X}|$ Andere Notation: $\mathcal{P}(X) = 2^X$.
- Sei $\mathcal{U}$ ein Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.
- Die Äquivalenzklassen heißen Kardinalitäten.
- (Cantor -Schröder-Bernstein) Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to A$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $h\colon A \to B$.
  - Wir definieren $|M| \leq |N|$ genau dann wenn

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
  - Z.B. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$
  - $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, $|\mathcal{P}(X)| \neq |\mathcal{X}|$ Andere Notation: $\mathcal{P}(X) = 2^X$.
- Sei $\mathcal{U}$ ein Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.
- Die Äquivalenzklassen heißen Kardinalitäten.
- (Cantor -Schröder-Bernstein) Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to A$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $h\colon A \to B$.
  - Wir definieren $|M| \leq |N|$ genau dann wenn es gibt eine Injektion $f\colon M \to N$.

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
    - Z.B. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$
    - $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, $|\mathcal{P}(X)| \neq |\mathcal{X}|$ Andere Notation: $\mathcal{P}(X) = 2^X$.
- Sei $\mathcal{U}$ ein Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.
- Die Äquivalenzklassen heißen Kardinalitäten.
- (Cantor -Schröder-Bernstein) Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to A$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $h\colon A \to B$.
    - Wir definieren $|M| \leq |N|$ genau dann wenn es gibt eine Injektion $f\colon M \to N$. Das ist eine Ornungsrelation.

- $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.

- $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
  - Nach CBS,

- $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
  - Nach CBS, wir brauchen Injektionen

- $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
  - Nach CBS, wir brauchen Injektionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$

- $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
  - Nach CBS, wir brauchen Injektionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ und

- $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
  - Nach CBS, wir brauchen Injektionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ und $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

- $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
  - ▶ Nach CBS, wir brauchen Injektionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ und $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ zu konstruieren.

- $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
  - Nach CBS, wir brauchen Injektionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ und $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ zu konstruieren.
  - $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$;

- $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
  - Nach CBS, wir brauchen Injektionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ und $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ zu konstruieren.
  - $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$; Z.B.

- $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
  - Nach CBS, wir brauchen Injektionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ und $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ zu konstruieren.
  - $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$; Z.B. $f(x) := (x, 0)$,

- $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
  - Nach CBS, wir brauchen Injektionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ und $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ zu konstruieren.
  - $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$; Z.B. $f(x) := (x, 0)$,
  - $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

- $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
  - Nach CBS, wir brauchen Injektionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ und $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ zu konstruieren.
  - $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$; Z.B. $f(x) := (x, 0)$,
  - $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$: $g(n, m) := 1n_k m_k n_{k-1} m_{k-1} \ldots n_0 m_0$,

- $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
  - Nach CBS, wir brauchen Injektionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ und $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ zu konstruieren.
  - $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$; Z.B. $f(x) := (x, 0)$,
  - $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$: $g(n, m) := 1n_k m_k n_{k-1} m_{k-1} \dots n_0 m_0$, wobei

- $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
  - Nach CBS, wir brauchen Injektionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ und $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ zu konstruieren.
  - $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$; Z.B. $f(x) := (x, 0)$,
  - $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$: $g(n, m) := 1n_k m_k n_{k-1} m_{k-1} \ldots n_0 m_0$, wobei $k + 1$ ist das Maximum der Längen der Dezimaldarstellungen von n und m,

- $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
  - Nach CBS, wir brauchen Injektionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ und $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ zu konstruieren.
  - $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$; Z.B. $f(x) := (x, 0)$,
  - $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$: $g(n, m) := 1n_k m_k n_{k-1} m_{k-1} \dots n_0 m_0$, wobei $k + 1$ ist das Maximum der Längen der Dezimaldarstellungen von n und m, und $n = \sum_{i=0}^{k} n_i \cdot 10^i$

- $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
  - Nach CBS, wir brauchen Injektionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ und $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ zu konstruieren.
  - $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$; Z.B. $f(x) := (x, 0)$,
  - $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$: $g(n, m) := 1n_k m_k n_{k-1} m_{k-1} \ldots n_0 m_0$, wobei $k + 1$ ist das Maximum der Längen der Dezimaldarstellungen von n und m, und $n = \sum_{i=0}^{k} n_i \cdot 10^i$ und $m = \sum_{i=0}^{k} m_i \cdot 10^i$

- $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
  - Nach CBS, wir brauchen Injektionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ und $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ zu konstruieren.
  - $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$; Z.B. $f(x) := (x, 0)$,
  - $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$: $g(n, m) := 1n_k m_k n_{k-1} m_{k-1} \dots n_0 m_0$, wobei $k + 1$ ist das Maximum der Längen der Dezimaldarstellungen von n und m, und $n = \sum_{i=0}^{k} n_i \cdot 10^i$ und $m = \sum_{i=0}^{k} m_i \cdot 10^i$ mit $n_i, m_i \in \{0, \dots, 9\}$ für alle $i \in \{0, \dots, k\}$.

- $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

- $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
  - $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$.

- $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
  - $|\mathbb{R}| = |(0, 1)|$. Nach CBS

- $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
  - $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$. Nach CBS reicht die Injektionen

- $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
  - $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$. Nach CBS reicht die Injektionen $f\colon (0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$

- $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
  - $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$. Nach CBS reicht die Injektionen $f\colon (0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und

- $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
  - $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$. Nach CBS reicht die Injektionen $f\colon (0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (0,1)$ zu konstruieren.

- $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
  - $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$. Nach CBS reicht die Injektionen $f\colon (0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (0,1)$ zu konstruieren.
  - Jede reelle Zahl $x \in (0,1)$

- $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
  - $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$. Nach CBS reicht die Injektionen $f\colon (0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (0,1)$ zu konstruieren.
  - Jede reelle Zahl $x \in (0,1)$ lässt sich eindeutig

- $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
  - $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$. Nach CBS reicht die Injektionen $f\colon (0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (0,1)$ zu konstruieren.
  - Jede reelle Zahl $x \in (0,1)$ lässt sich eindeutig als $x = [0, d_1 d_2 d_3 d_4 \cdots]_{10}$ darstelen,

- $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
  - $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$. Nach CBS reicht die Injektionen $f\colon (0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (0,1)$ zu konstruieren.
  - Jede reelle Zahl $x \in (0,1)$ lässt sich eindeutig als $x = [0, d_1 d_2 d_3 d_4 \cdots]_{10}$ darstelen, mit den Ziffern $d_1, d_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$,

- $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
  - $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$. Nach CBS reicht die Injektionen $f\colon (0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (0,1)$ zu konstruieren.
  - Jede reelle Zahl $x \in (0,1)$ lässt sich eindeutig als $x = [0, d_1 d_2 d_3 d_4 \cdots]_{10}$ darstelen, mit den Ziffern $d_1, d_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, so dass kein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit

- $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
    - $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$. Nach CBS reicht die Injektionen $f\colon (0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (0,1)$ zu konstruieren.
    - Jede reelle Zahl $x \in (0,1)$ lässt sich eindeutig als $x = [0, d_1 d_2 d_3 d_4 \cdots]_{10}$ darstelen, mit den Ziffern $d_1, d_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, so dass kein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $d_i = 9$ für alle $i \in \mathbb{N}$

- $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
  - $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$. Nach CBS reicht die Injektionen $f\colon (0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (0,1)$ zu konstruieren.
  - Jede reelle Zahl $x \in (0,1)$ lässt sich eindeutig als $x = [0, d_1 d_2 d_3 d_4 \cdots]_{10}$ darstelen, mit den Ziffern $d_1, d_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, so dass kein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $d_i = 9$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \geq n$.

- $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
  - $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$. Nach CBS reicht die Injektionen $f\colon (0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (0,1)$ zu konstruieren.
  - Jede reelle Zahl $x \in (0,1)$ lässt sich eindeutig als $x = [0, d_1 d_2 d_3 d_4 \cdots]_{10}$ darstelen, mit den Ziffern $d_1, d_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, so dass kein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $d_i = 9$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \geq n$.

- $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
  - $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$. Nach CBS reicht die Injektionen $f\colon (0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (0,1)$ zu konstruieren.
  - Jede reelle Zahl $x \in (0,1)$ lässt sich eindeutig als $x = [0, d_1 d_2 d_3 d_4 \cdots]_{10}$ darstelen, mit den Ziffern $d_1, d_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, so dass kein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $d_i = 9$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \geq n$.
  - Dann sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathcal{P}((0,1)) \to \mathbb{R}$ so definiert:

- $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
  - $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$. Nach CBS reicht die Injektionen $f\colon (0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (0,1)$ zu konstruieren.
  - Jede reelle Zahl $x \in (0,1)$ lässt sich eindeutig als $x = [0, d_1 d_2 d_3 d_4 \cdots]_{10}$ darstelen, mit den Ziffern $d_1, d_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, so dass kein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $d_i = 9$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \geq n$.
  - Dann sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathcal{P}((0,1)) \to \mathbb{R}$ so definiert: $f(x) := \{[d_1]_{10},\ [d_1 d_2]_{10},\ [d_1 d_2 d_3]_{10}, \ldots\}$

- $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}|$

- $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}|$
- Wir wissen $|\mathbb{Q}| \geq |\mathbb{Z}|$,

- $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}|$
- Wir wissen $|\mathbb{Q}| \geq |\mathbb{Z}|$, also es reicht zu zeigen

- $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}|$
- Wir wissen $|\mathbb{Q}| \geq |\mathbb{Z}|$, also es reicht zu zeigen dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z}|$.

- $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}|$
- Wir wissen $|\mathbb{Q}| \geq |\mathbb{Z}|$, also es reicht zu zeigen dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z}|$.
- Wir wissen auch $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2|$,

- $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}|$
- Wir wissen $|\mathbb{Q}| \geq |\mathbb{Z}|$, also es reicht zu zeigen dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z}|$.
- Wir wissen auch $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2|$, also es reicht zu zeigen

- $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}|$
- Wir wissen $|\mathbb{Q}| \geq |\mathbb{Z}|$, also es reicht zu zeigen dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z}|$.
- Wir wissen auch $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2|$, also es reicht zu zeigen dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}^2|$.

- $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}|$
- Wir wissen $|\mathbb{Q}| \geq |\mathbb{Z}|$, also es reicht zu zeigen dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z}|$.
- Wir wissen auch $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2|$, also es reicht zu zeigen dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}^2|$.
- Die positiven rationalen Zahlen

- $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}|$
- Wir wissen $|\mathbb{Q}| \geq |\mathbb{Z}|$, also es reicht zu zeigen dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z}|$.
- Wir wissen auch $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2|$, also es reicht zu zeigen dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}^2|$.
- Die positiven rationalen Zahlen entsprechen den nicht weiter kürzbaren Brüchen $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}_+$.

- $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}|$
- Wir wissen $|\mathbb{Q}| \geq |\mathbb{Z}|$, also es reicht zu zeigen dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z}|$.
- Wir wissen auch $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2|$, also es reicht zu zeigen dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}^2|$.
- Die positiven rationalen Zahlen entsprechen den nicht weiter kürzbaren Brüchen $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}_+$. Also wir haben eine Injektion $f\colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$, mit $f(\frac{m}{n}) = (m, n)$.

- $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}|$
- Wir wissen $|\mathbb{Q}| \geq |\mathbb{Z}|$, also es reicht zu zeigen dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z}|$.
- Wir wissen auch $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2|$, also es reicht zu zeigen dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}^2|$.
- Die positiven rationalen Zahlen entsprechen den nicht weiter kürzbaren Brüchen $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}_+$. Also wir haben eine Injektion $f\colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$, mit $f(\frac{m}{n}) = (m, n)$.
- Jetzt bauen wir die Injektion

- $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}|$
- Wir wissen $|\mathbb{Q}| \geq |\mathbb{Z}|$, also es reicht zu zeigen dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z}|$.
- Wir wissen auch $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2|$, also es reicht zu zeigen dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}^2|$.
- Die positiven rationalen Zahlen entsprechen den nicht weiter kürzbaren Brüchen $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}_+$. Also wir haben eine Injektion $f\colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$, mit $f(\frac{m}{n}) = (m, n)$.
- Jetzt bauen wir die Injektion $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

- $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}|$
- Wir wissen $|\mathbb{Q}| \geq |\mathbb{Z}|$, also es reicht zu zeigen dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z}|$.
- Wir wissen auch $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2|$, also es reicht zu zeigen dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}^2|$.
- Die positiven rationalen Zahlen entsprechen den nicht weiter kürzbaren Brüchen $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}_+$. Also wir haben eine Injektion $f\colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$, mit $f(\frac{m}{n}) = (m, n)$.
- Jetzt bauen wir die Injektion $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
  - $g(\frac{m}{n}) := (m, n)$

- $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}|$
- Wir wissen $|\mathbb{Q}| \geq |\mathbb{Z}|$, also es reicht zu zeigen dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z}|$.
- Wir wissen auch $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2|$, also es reicht zu zeigen dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}^2|$.
- Die positiven rationalen Zahlen entsprechen den nicht weiter kürzbaren Brüchen $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}_+$. Also wir haben eine Injektion $f\colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$, mit $f(\frac{m}{n}) = (m, n)$.
- Jetzt bauen wir die Injektion $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
  - $g(\frac{m}{n}) := (m, n)$ wenn $ggt(m, n) = 1$, $m, n > 0$,

- $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}|$
- Wir wissen $|\mathbb{Q}| \geq |\mathbb{Z}|$, also es reicht zu zeigen dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z}|$.
- Wir wissen auch $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2|$, also es reicht zu zeigen dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}^2|$.
- Die positiven rationalen Zahlen entsprechen den nicht weiter kürzbaren Brüchen $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}_+$. Also wir haben eine Injektion $f\colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$, mit $f(\frac{m}{n}) = (m, n)$.
- Jetzt bauen wir die Injektion $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
  - $g(\frac{m}{n}) := (m, n)$ wenn $ggt(m, n) = 1$, $m, n > 0$,
  - $g(\frac{-m}{n}) := (-m, n)$

- $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}|$
- Wir wissen $|\mathbb{Q}| \geq |\mathbb{Z}|$, also es reicht zu zeigen dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z}|$.
- Wir wissen auch $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2|$, also es reicht zu zeigen dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}^2|$.
- Die positiven rationalen Zahlen entsprechen den nicht weiter kürzbaren Brüchen $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}_+$. Also wir haben eine Injektion $f\colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$, mit $f(\frac{m}{n}) = (m, n)$.
- Jetzt bauen wir die Injektion $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
  - $g(\frac{m}{n}) := (m, n)$ wenn $ggt(m, n) = 1$, $m, n > 0$,
  - $g(\frac{-m}{n}) := (-m, n)$ $ggt(m, n) = 1$, $m, n > 0$

- $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}|$
- Wir wissen $|\mathbb{Q}| \geq |\mathbb{Z}|$, also es reicht zu zeigen dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z}|$.
- Wir wissen auch $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2|$, also es reicht zu zeigen dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}^2|$.
- Die positiven rationalen Zahlen entsprechen den nicht weiter kürzbaren Brüchen $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}_+$. Also wir haben eine Injektion $f\colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$, mit $f(\frac{m}{n}) = (m, n)$.
- Jetzt bauen wir die Injektion $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
  - $g(\frac{m}{n}) := (m, n)$ wenn $ggt(m, n) = 1$, $m, n > 0$,
  - $g(\frac{-m}{n}) := (-m, n)$ $ggt(m, n) = 1$, $m, n > 0$
  - $g(0) := (0, 0)$.

Satz

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ *abzählbar.*

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ *abzählbar. Dann* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *ist auch abzählbar.*

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1,$

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1,$

Satz

Seien $A_1, A_2, \dots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \dots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1, 2,$

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1, 2, 1,$

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - ▶ $1, 1, 2, 1, 2,$

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1, 2, 1, 2, 3,$

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1,$

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - ▶ $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2,$

Satz

Seien $A_1, A_2, \dots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \dots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3,$

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4,$

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - ▶ $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1,$

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2,$

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
    - $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3,$

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4,$

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5,$

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ \ldots$

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ \ldots$
- Wir haben Bijektionen

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ \ldots$
- Wir haben Bijektionen $\beta_i : \mathbb{N} \to B_i$.

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ \ldots$
- Wir haben Bijektionen $\beta_i \colon \mathbb{N} \to B_i$. Wir haben auch Injektionen

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ \ldots$
- Wir haben Bijektionen $\beta_i \colon \mathbb{N} \to B_i$. Wir haben auch Injektionen $\alpha_i \colon A_i \to \mathbb{N}$.

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ \ldots$
- Wir haben Bijektionen $\beta_i \colon \mathbb{N} \to B_i$. Wir haben auch Injektionen $\alpha_i \colon A_i \to \mathbb{N}$.
- Wir definieren $s \colon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}$,

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ \ldots$
- Wir haben Bijektionen $\beta_i \colon \mathbb{N} \to B_i$. Wir haben auch Injektionen $\alpha_i \colon A_i \to \mathbb{N}$.
- Wir definieren $s \colon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}$, so dass $s(x)$

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ \ldots$
- Wir haben Bijektionen $\beta_i \colon \mathbb{N} \to B_i$. Wir haben auch Injektionen $\alpha_i \colon A_i \to \mathbb{N}$.
- Wir definieren $s \colon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}$, so dass $s(x)$ ist die kleinste i

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ \ldots$
- Wir haben Bijektionen $\beta_i \colon \mathbb{N} \to B_i$. Wir haben auch Injektionen $\alpha_i \colon A_i \to \mathbb{N}$.
- Wir definieren $s \colon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}$, so dass $s(x)$ ist die kleinste i mit $x \in A_i$.

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ \ldots$
- Wir haben Bijektionen $\beta_i \colon \mathbb{N} \to B_i$. Wir haben auch Injektionen $\alpha_i \colon A_i \to \mathbb{N}$.
- Wir definieren $s \colon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}$, so dass $s(x)$ ist die kleinste i mit $x \in A_i$.
- Schließlich können wir

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ \ldots$
- Wir haben Bijektionen $\beta_i \colon \mathbb{N} \to B_i$. Wir haben auch Injektionen $\alpha_i \colon A_i \to \mathbb{N}$.
- Wir definieren $s\colon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}$, so dass $s(x)$ ist die kleinste i mit $x \in A_i$.
- Schließlich können wir die Injektion $F\colon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}$ definieren,

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ \ldots$
- Wir haben Bijektionen $\beta_i \colon \mathbb{N} \to B_i$. Wir haben auch Injektionen $\alpha_i \colon A_i \to \mathbb{N}$.
- Wir definieren $s\colon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}$, so dass $s(x)$ ist die kleinste i mit $x \in A_i$.
- Schließlich können wir die Injektion $F\colon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}$ definieren, wie folgt:

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ \ldots$
- Wir haben Bijektionen $\beta_i \colon \mathbb{N} \to B_i$. Wir haben auch Injektionen $\alpha_i \colon A_i \to \mathbb{N}$.
- Wir definieren $s \colon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}$, so dass $s(x)$ ist die kleinste i mit $x \in A_i$.
- Schließlich können wir die Injektion $F \colon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}$ definieren, wie folgt: $F(x) := \beta_{s(x)}(\alpha_{s(x)}(x))$.

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ \ldots$
- Wir haben Bijektionen $\beta_i \colon \mathbb{N} \to B_i$. Wir haben auch Injektionen $\alpha_i \colon A_i \to \mathbb{N}$.
- Wir definieren $s\colon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}$, so dass $s(x)$ ist die kleinste i mit $x \in A_i$.
- Schließlich können wir die Injektion $F\colon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}$ definieren, wie folgt: $F(x) := \beta_{s(x)}(\alpha_{s(x)}(x))$.
  - Falls $F(x) = F(y)$,

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ \ldots$
- Wir haben Bijektionen $\beta_i \colon \mathbb{N} \to B_i$. Wir haben auch Injektionen $\alpha_i \colon A_i \to \mathbb{N}$.
- Wir definieren $s \colon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}$, so dass $s(x)$ ist die kleinste i mit $x \in A_i$.
- Schließlich können wir die Injektion $F \colon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}$ definieren, wie folgt: $F(x) := \beta_{s(x)}(\alpha_{s(x)}(x))$.
  - Falls $F(x) = F(y)$, dann $s(x) = s(y)$,

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - ▶ $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ \ldots$
- Wir haben Bijektionen $\beta_i \colon \mathbb{N} \to B_i$. Wir haben auch Injektionen $\alpha_i \colon A_i \to \mathbb{N}$.
- Wir definieren $s \colon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}$, so dass $s(x)$ ist die kleinste i mit $x \in A_i$.
- Schließlich können wir die Injektion $F \colon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}$ definieren, wie folgt: $F(x) := \beta_{s(x)}(\alpha_{s(x)}(x))$.
  - ▶ Falls $F(x) = F(y)$, dann $s(x) = s(y)$, weil die Bilde

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - ▶ $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ \ldots$
- Wir haben Bijektionen $\beta_i \colon \mathbb{N} \to B_i$. Wir haben auch Injektionen $\alpha_i \colon A_i \to \mathbb{N}$.
- Wir definieren $s \colon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}$, so dass $s(x)$ ist die kleinste i mit $x \in A_i$.
- Schließlich können wir die Injektion $F \colon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}$ definieren, wie folgt: $F(x) := \beta_{s(x)}(\alpha_{s(x)}(x))$.
  - ▶ Falls $F(x) = F(y)$, dann $s(x) = s(y)$, weil die Bilde von verschiedenEN β_i's disjunkt sind.

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ \ldots$
- Wir haben Bijektionen $\beta_i \colon \mathbb{N} \to B_i$. Wir haben auch Injektionen $\alpha_i \colon A_i \to \mathbb{N}$.
- Wir definieren $s \colon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}$, so dass $s(x)$ ist die kleinste i mit $x \in A_i$.
- Schließlich können wir die Injektion $F \colon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}$ definieren, wie folgt: $F(x) := \beta_{s(x)}(\alpha_{s(x)}(x))$.
  - Falls $F(x) = F(y)$, dann $s(x) = s(y)$, weil die Bilde von verschiedenEN β_i's disjunkt sind. Dann die Injektivität folgt

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ \ldots$
- Wir haben Bijektionen $\beta_i \colon \mathbb{N} \to B_i$. Wir haben auch Injektionen $\alpha_i \colon A_i \to \mathbb{N}$.
- Wir definieren $s \colon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}$, so dass $s(x)$ ist die kleinste i mit $x \in A_i$.
- Schließlich können wir die Injektion $F \colon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}$ definieren, wie folgt: $F(x) := \beta_{s(x)}(\alpha_{s(x)}(x))$.
  - Falls $F(x) = F(y)$, dann $s(x) = s(y)$, weil die Bilde von verschiedenEN β_i's disjunkt sind. Dann die Injektivität folgt da $\alpha_{s(x)}$ and $\beta_{s(x)}$ sind beide injektiv.

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ \ldots$
- Wir haben Bijektionen $\beta_i \colon \mathbb{N} \to B_i$. Wir haben auch Injektionen $\alpha_i \colon A_i \to \mathbb{N}$.
- Wir definieren $s \colon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}$, so dass $s(x)$ ist die kleinste i mit $x \in A_i$.
- Schließlich können wir die Injektion $F \colon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}$ definieren, wie folgt: $F(x) := \beta_{s(x)}(\alpha_{s(x)}(x))$.
  - Falls $F(x) = F(y)$, dann $s(x) = s(y)$, weil die Bilde von verschiedenEN β_i's disjunkt sind. Dann die Injektivität folgt da $\alpha_{s(x)}$ and $\beta_{s(x)}$ sind beide injektiv. $\square$

Sei X eine Menge. Dann definieren wir

Sei X eine Menge. Dann definieren wir $\mathcal{P}_{<\infty}(X) :=$

Sei X eine Menge. Dann definieren wir $\mathcal{P}_{<\infty}(X) := \{A \subset X : |A| < \infty\}$.

Sei X eine Menge. Dann definieren wir $\mathcal{P}_{<\infty}(X) := \{A \subset X : |A| < \infty\}$.

Satz

Sei X eine Menge. Dann definieren wir $\mathcal{P}_{<\infty}(X) := \{A \subset X : |A| < \infty\}$.

Satz

$\mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{N})$

Sei X eine Menge. Dann definieren wir $\mathcal{P}_{<\infty}(X) := \{A \subset X : |A| < \infty\}$.

Satz

$\mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{N})$ *ist abzählbar.*

Sei X eine Menge. Dann definieren wir $\mathcal{P}_{<\infty}(X) := \{A \subset X : |A| < \infty\}$.

Satz

$\mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{N})$ *ist abzählbar.*

Beweis.

Sei X eine Menge. Dann definieren wir $\mathcal{P}_{<\infty}(X) := \{A \subset X : |A| < \infty\}$.

Satz

$\mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{N})$ *ist abzählbar.*

Beweis.

- Es reicht zu zeigen dass $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt dass $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ ist abzählbar.

Sei X eine Menge. Dann definieren wir $\mathcal{P}_{<\infty}(X) := \{A \subset X : |A| < \infty\}$.

Satz

$\mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{N})$ *ist abzählbar.*

Beweis.

- Es reicht zu zeigen dass $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt dass $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ ist abzählbar.
- Wir haben eine Surjektion $\mathbb{N}^k \to \mathcal{P}_k(\mathbb{N})$: $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mapsto \{a_1, \ldots, a_k\}$.

Sei X eine Menge. Dann definieren wir $\mathcal{P}_{<\infty}(X) := \{A \subset X : |A| < \infty\}$.

Satz

$\mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{N})$ *ist abzählbar.*

Beweis.

- Es reicht zu zeigen dass $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt dass $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ ist abzählbar.
- Wir haben eine Surjektion $\mathbb{N}^k \to \mathcal{P}_k(\mathbb{N})$: $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mapsto \{a_1, \ldots, a_k\}$. Also es reicht zu zeigen, dass $\mathbb{N}^k$ ist abzählbar.

Sei X eine Menge. Dann definieren wir $\mathcal{P}_{<\infty}(X) := \{A \subset X : |A| < \infty\}$.

Satz

$\mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{N})$ *ist abzählbar.*

Beweis.

- Es reicht zu zeigen dass $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt dass $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ ist abzählbar.
- Wir haben eine Surjektion $\mathbb{N}^k \to \mathcal{P}_k(\mathbb{N})$: $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mapsto \{a_1, \ldots, a_k\}$. Also es reicht zu zeigen, dass $\mathbb{N}^k$ ist abzählbar.
-

Sei X eine Menge. Dann definieren wir $\mathcal{P}_{<\infty}(X) := \{A \subset X : |A| < \infty\}$.

Satz

$\mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{N})$ *ist abzählbar.*

Beweis.

- Es reicht zu zeigen dass $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt dass $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ ist abzählbar.
- Wir haben eine Surjektion $\mathbb{N}^k \to \mathcal{P}_k(\mathbb{N})$: $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mapsto \{a_1, \ldots, a_k\}$. Also es reicht zu zeigen, dass $\mathbb{N}^k$ ist abzählbar.
- Wir beweisen mit Induktion

Sei X eine Menge. Dann definieren wir $\mathcal{P}_{<\infty}(X) := \{A \subset X \colon |A| < \infty\}$.

Satz

$\mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{N})$ *ist abzählbar.*

Beweis.

- Es reicht zu zeigen dass $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt dass $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ ist abzählbar.
- Wir haben eine Surjektion $\mathbb{N}^k \to \mathcal{P}_k(\mathbb{N})$: $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mapsto \{a_1, \ldots, a_k\}$. Also es reicht zu zeigen, dass $\mathbb{N}^k$ ist abzählbar.
- Wir beweisen mit Induktion $|\mathbb{N}^k| = |\mathbb{N}|$.

Sei X eine Menge. Dann definieren wir $\mathcal{P}_{<\infty}(X) := \{A \subset X : |A| < \infty\}$.

Satz

$\mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{N})$ *ist abzählbar.*

Beweis.

- Es reicht zu zeigen dass $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt dass $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ ist abzählbar.
- Wir haben eine Surjektion $\mathbb{N}^k \to \mathcal{P}_k(\mathbb{N})$: $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mapsto \{a_1, \ldots, a_k\}$. Also es reicht zu zeigen, dass $\mathbb{N}^k$ ist abzählbar.
- Wir beweisen mit Induktion $|\mathbb{N}^k| = |\mathbb{N}|$.
    - IA: $k = 2$ Wir wissen $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.

Sei X eine Menge. Dann definieren wir $\mathcal{P}_{<\infty}(X) := \{A \subset X : |A| < \infty\}$.

Satz

$\mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{N})$ *ist abzählbar.*

Beweis.

- Es reicht zu zeigen dass $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt dass $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ ist abzählbar.
- Wir haben eine Surjektion $\mathbb{N}^k \to \mathcal{P}_k(\mathbb{N})$: $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mapsto \{a_1, \ldots, a_k\}$. Also es reicht zu zeigen, dass $\mathbb{N}^k$ ist abzählbar.
- Wir beweisen mit Induktion $|\mathbb{N}^k| = |\mathbb{N}|$.
  - IA: $k = 2$ Wir wissen $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
  - IH: $|\mathbb{N}^k| = |\mathbb{N}|$ wenn $k \geq 1$.

Sei X eine Menge. Dann definieren wir $\mathcal{P}_{<\infty}(X) := \{A \subset X : |A| < \infty\}$.

Satz

$\mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{N})$ *ist abzählbar.*

Beweis.

- Es reicht zu zeigen dass $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt dass $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ ist abzählbar.
- Wir haben eine Surjektion $\mathbb{N}^k \to \mathcal{P}_k(\mathbb{N})$: $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mapsto \{a_1, \ldots, a_k\}$. Also es reicht zu zeigen, dass $\mathbb{N}^k$ ist abzählbar.
- Wir beweisen mit Induktion $|\mathbb{N}^k| = |\mathbb{N}|$.
  - IA: $k = 2$ Wir wissen $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
  - IH: $|\mathbb{N}^k| = |\mathbb{N}|$ wenn $k \geq 1$.
  - IB: zu zeigen ist $|\mathbb{N}^{k+1}| = |\mathbb{N}|$.

Sei X eine Menge. Dann definieren wir $\mathcal{P}_{<\infty}(X) := \{A \subset X : |A| < \infty\}$.

Satz

$\mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{N})$ *ist abzählbar.*

Beweis.

- Es reicht zu zeigen dass $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt dass $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ ist abzählbar.
- Wir haben eine Surjektion $\mathbb{N}^k \to \mathcal{P}_k(\mathbb{N})$: $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mapsto \{a_1, \ldots, a_k\}$. Also es reicht zu zeigen, dass $\mathbb{N}^k$ ist abzählbar.
- Wir beweisen mit Induktion $|\mathbb{N}^k| = |\mathbb{N}|$.
  - IA: $k = 2$ Wir wissen $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
  - IH: $|\mathbb{N}^k| = |\mathbb{N}|$ wenn $k \geq 1$.
  - IB: zu zeigen ist $|\mathbb{N}^{k+1}| = |\mathbb{N}|$. Es gilt $|\mathbb{N}^{k+1}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}^k|$.

Sei X eine Menge. Dann definieren wir $\mathcal{P}_{<\infty}(X) := \{A \subset X : |A| < \infty\}$.

Satz

$\mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{N})$ *ist abzählbar.*

Beweis.

- Es reicht zu zeigen dass $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt dass $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ ist abzählbar.
- Wir haben eine Surjektion $\mathbb{N}^k \to \mathcal{P}_k(\mathbb{N})$: $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mapsto \{a_1, \ldots, a_k\}$. Also es reicht zu zeigen, dass $\mathbb{N}^k$ ist abzählbar.
- Wir beweisen mit Induktion $|\mathbb{N}^k| = |\mathbb{N}|$.
  - IA: $k = 2$ Wir wissen $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
  - IH: $|\mathbb{N}^k| = |\mathbb{N}|$ wenn $k \geq 1$.
  - IB: zu zeigen ist $|\mathbb{N}^{k+1}| = |\mathbb{N}|$. Es gilt $|\mathbb{N}^{k+1}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}^k|$. Aus dem Übungsblatt

Sei X eine Menge. Dann definieren wir $\mathcal{P}_{<\infty}(X) := \{A \subset X : |A| < \infty\}$.

Satz

$\mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{N})$ *ist abzählbar.*

Beweis.

- Es reicht zu zeigen dass $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt dass $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ ist abzählbar.
- Wir haben eine Surjektion $\mathbb{N}^k \to \mathcal{P}_k(\mathbb{N})$: $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mapsto \{a_1, \ldots, a_k\}$. Also es reicht zu zeigen, dass $\mathbb{N}^k$ ist abzählbar.
- Wir beweisen mit Induktion $|\mathbb{N}^k| = |\mathbb{N}|$.
  - IA: $k = 2$ Wir wissen $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
  - IH: $|\mathbb{N}^k| = |\mathbb{N}|$ wenn $k \geq 1$.
  - IB: zu zeigen ist $|\mathbb{N}^{k+1}| = |\mathbb{N}|$. Es gilt $|\mathbb{N}^{k+1}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}^k|$. Aus dem Übungsblatt und aus IH

Sei X eine Menge. Dann definieren wir $\mathcal{P}_{<\infty}(X) := \{A \subset X : |A| < \infty\}$.

Satz

$\mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{N})$ *ist abzählbar.*

Beweis.

- Es reicht zu zeigen dass $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt dass $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ ist abzählbar.
- Wir haben eine Surjektion $\mathbb{N}^k \to \mathcal{P}_k(\mathbb{N})$: $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mapsto \{a_1, \ldots, a_k\}$. Also es reicht zu zeigen, dass $\mathbb{N}^k$ ist abzählbar.
- Wir beweisen mit Induktion $|\mathbb{N}^k| = |\mathbb{N}|$.
  - IA: $k = 2$ Wir wissen $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
  - IH: $|\mathbb{N}^k| = |\mathbb{N}|$ wenn $k \geq 1$.
  - IB: zu zeigen ist $|\mathbb{N}^{k+1}| = |\mathbb{N}|$. Es gilt $|\mathbb{N}^{k+1}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}^k|$. Aus dem Übungsblatt und aus IH folgt

Sei X eine Menge. Dann definieren wir $\mathcal{P}_{<\infty}(X) := \{A \subset X : |A| < \infty\}$.

Satz

$\mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{N})$ *ist abzählbar.*

Beweis.

- Es reicht zu zeigen dass $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt dass $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ ist abzählbar.
- Wir haben eine Surjektion $\mathbb{N}^k \to \mathcal{P}_k(\mathbb{N})$: $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mapsto \{a_1, \ldots, a_k\}$. Also es reicht zu zeigen, dass $\mathbb{N}^k$ ist abzählbar.
- Wir beweisen mit Induktion $|\mathbb{N}^k| = |\mathbb{N}|$.
  - IA: $k = 2$ Wir wissen $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
  - IH: $|\mathbb{N}^k| = |\mathbb{N}|$ wenn $k \geq 1$.
  - IB: zu zeigen ist $|\mathbb{N}^{k+1}| = |\mathbb{N}|$. Es gilt $|\mathbb{N}^{k+1}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}^k|$. Aus dem Übungsblatt und aus IH folgt $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}^k| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$.

Sei X eine Menge. Dann definieren wir $\mathcal{P}_{<\infty}(X) := \{A \subset X : |A| < \infty\}$.

Satz

$\mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{N})$ *ist abzählbar.*

Beweis.

- Es reicht zu zeigen dass $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt dass $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ ist abzählbar.
- Wir haben eine Surjektion $\mathbb{N}^k \to \mathcal{P}_k(\mathbb{N})$: $(a_1, a_2, \dots, a_k) \mapsto \{a_1, \dots, a_k\}$. Also es reicht zu zeigen, dass $\mathbb{N}^k$ ist abzählbar.
- Wir beweisen mit Induktion $|\mathbb{N}^k| = |\mathbb{N}|$.
  - IA: $k = 2$ Wir wissen $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
  - IH: $|\mathbb{N}^k| = |\mathbb{N}|$ wenn $k \geq 1$.
  - IB: zu zeigen ist $|\mathbb{N}^{k+1}| = |\mathbb{N}|$. Es gilt $|\mathbb{N}^{k+1}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}^k|$. Aus dem Übungsblatt und aus IH folgt $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}^k| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$. Also auch $|\mathbb{N}^{k+1}| = |\mathbb{N}|$.

Sei X eine Menge. Dann definieren wir $\mathcal{P}_{<\infty}(X) := \{A \subset X : |A| < \infty\}$.

Satz

$\mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{N})$ *ist abzählbar.*

Beweis.

- Es reicht zu zeigen dass $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt dass $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ ist abzählbar.
- Wir haben eine Surjektion $\mathbb{N}^k \to \mathcal{P}_k(\mathbb{N})$: $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mapsto \{a_1, \ldots, a_k\}$. Also es reicht zu zeigen, dass $\mathbb{N}^k$ ist abzählbar.
- Wir beweisen mit Induktion $|\mathbb{N}^k| = |\mathbb{N}|$.
  - IA: $k = 2$ Wir wissen $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
  - IH: $|\mathbb{N}^k| = |\mathbb{N}|$ wenn $k \geq 1$.
  - IB: zu zeigen ist $|\mathbb{N}^{k+1}| = |\mathbb{N}|$. Es gilt $|\mathbb{N}^{k+1}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}^k|$. Aus dem Übungsblatt und aus IH folgt $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}^k| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$. Also auch $|\mathbb{N}^{k+1}| = |\mathbb{N}|$. $\square$

Die Iteration ist ein wesentliches Prinzip

Die Iteration ist ein wesentliches Prinzip in Rainer Mathematik

Die Iteration ist ein wesentliches Prinzip in Rainer Mathematik und

Die Iteration ist ein wesentliches Prinzip in Rainer Mathematik und in der Programmierung.

Die Iteration ist ein wesentliches Prinzip in Rainer Mathematik und in der Programmierung. Ein wichtiger Aspekt der Iteration

Die Iteration ist ein wesentliches Prinzip in Rainer Mathematik und in der Programmierung. Ein wichtiger Aspekt der Iteration sind die sogenannte

Die Iteration ist ein wesentliches Prinzip in Rainer Mathematik und in der Programmierung. Ein wichtiger Aspekt der Iteration sind die sogenannte Fixpunkte.

Die Iteration ist ein wesentliches Prinzip in Rainer Mathematik und in der Programmierung. Ein wichtiger Aspekt der Iteration sind die sogenannte Fixpunkte.
Sei $f : M \to M$

Die Iteration ist ein wesentliches Prinzip in Rainer Mathematik und in der Programmierung. Ein wichtiger Aspekt der Iteration sind die sogenannte Fixpunkte.
Sei $f : M \to M$ eine Funktion

Die Iteration ist ein wesentliches Prinzip in Rainer Mathematik und in der Programmierung. Ein wichtiger Aspekt der Iteration sind die sogenannte Fixpunkte. Sei $f: M \to M$ eine Funktion auf einer Menge M.

Die Iteration ist ein wesentliches Prinzip in Rainer Mathematik und in der Programmierung. Ein wichtiger Aspekt der Iteration sind die sogenannte **Fixpunkte**. Sei $f: M \to M$ eine Funktion auf einer Menge M. Ein **Fixpunkt** von f

Die Iteration ist ein wesentliches Prinzip in Rainer Mathematik und in der Programmierung. Ein wichtiger Aspekt der Iteration sind die sogenannte Fixpunkte. Sei $f : M \to M$ eine Funktion auf einer Menge M. Ein Fixpunkt von f ist ein Element $m \in M$,

Die Iteration ist ein wesentliches Prinzip in Rainer Mathematik und in der Programmierung. Ein wichtiger Aspekt der Iteration sind die sogenannte Fixpunkte. Sei $f: M \to M$ eine Funktion auf einer Menge M. Ein Fixpunkt von f ist ein Element $m \in M$, so dass $f(m) = m$.

Die Iteration ist ein wesentliches Prinzip in Rainer Mathematik und in der Programmierung. Ein wichtiger Aspekt der Iteration sind die sogenannte Fixpunkte. Sei $f: M \to M$ eine Funktion auf einer Menge M. Ein Fixpunkt von f ist ein Element $m \in M$, so dass $f(m) = m$.

Beispiele

Die Iteration ist ein wesentliches Prinzip in Rainer Mathematik und in der Programmierung. Ein wichtiger Aspekt der Iteration sind die sogenannte Fixpunkte. Sei $f: M \to M$ eine Funktion auf einer Menge M. Ein Fixpunkt von f ist ein Element $m \in M$, so dass $f(m) = m$.

Beispiele

- Die Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Die Iteration ist ein wesentliches Prinzip in Rainer Mathematik und in der Programmierung. Ein wichtiger Aspekt der Iteration sind die sogenannte Fixpunkte. Sei $f: M \to M$ eine Funktion auf einer Menge M. Ein Fixpunkt von f ist ein Element $m \in M$, so dass $f(m) = m$.

Beispiele

- Die Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) := x + 1$

Die Iteration ist ein wesentliches Prinzip in Rainer Mathematik und in der Programmierung. Ein wichtiger Aspekt der Iteration sind die sogenannte Fixpunkte. Sei $f: M \to M$ eine Funktion auf einer Menge M. Ein Fixpunkt von f ist ein Element $m \in M$, so dass $f(m) = m$.

Beispiele

- Die Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) := x + 1$ hat keine Fixpunkte.

Die Iteration ist ein wesentliches Prinzip in Rainer Mathematik und in der Programmierung. Ein wichtiger Aspekt der Iteration sind die sogenannte Fixpunkte. Sei $f: M \to M$ eine Funktion auf einer Menge M. Ein Fixpunkt von f ist ein Element $m \in M$, so dass $f(m) = m$.

Beispiele

- Die Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) := x + 1$ hat keine Fixpunkte.
- Die Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Die Iteration ist ein wesentliches Prinzip in Rainer Mathematik und in der Programmierung. Ein wichtiger Aspekt der Iteration sind die sogenannte Fixpunkte. Sei $f : M \to M$ eine Funktion auf einer Menge M. Ein Fixpunkt von f ist ein Element $m \in M$, so dass $f(m) = m$.

Beispiele

- Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) := x + 1$ hat keine Fixpunkte.
- Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $n \mapsto \lceil \sqrt{n} \rceil$

Die Iteration ist ein wesentliches Prinzip in Rainer Mathematik und in der Programmierung. Ein wichtiger Aspekt der Iteration sind die sogenannte Fixpunkte. Sei $f: M \to M$ eine Funktion auf einer Menge M. Ein Fixpunkt von f ist ein Element $m \in M$, so dass $f(m) = m$.

Beispiele

- Die Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) := x + 1$ hat keine Fixpunkte.
- Die Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $n \mapsto \lceil \sqrt{n} \rceil$ hat die Fixpunkte

Die Iteration ist ein wesentliches Prinzip in Rainer Mathematik und in der Programmierung. Ein wichtiger Aspekt der Iteration sind die sogenannte Fixpunkte. Sei $f\colon M \to M$ eine Funktion auf einer Menge M. Ein Fixpunkt von f ist ein Element $m \in M$, so dass $f(m) = m$.

Beispiele

- Die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) := x + 1$ hat keine Fixpunkte.
- Die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $n \mapsto \lceil \sqrt{n} \rceil$ hat die Fixpunkte 0, 1 und 2.

Beispiel - Die Methode von Newton

Beispiel - Die Methode von Newton

- Gegeben:

Beispiel - Die Methode von Newton

- Gegeben: eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Beispiel - Die Methode von Newton

- Gegeben: eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Ziel:

Beispiel - Die Methode von Newton

- Gegeben: eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Ziel: $x \in \mathbb{R}$ zu finden,

Beispiel - Die Methode von Newton

- Gegeben: eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Ziel: $x \in \mathbb{R}$ zu finden, mit $f(x) = 0$.

Beispiel - Die Methode von Newton

- Gegeben: eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Ziel: $x \in \mathbb{R}$ zu finden, mit $f(x) = 0$.
- Algorithmus von Newton:

Beispiel - Die Methode von Newton

- Gegeben: eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Ziel: $x \in \mathbb{R}$ zu finden, mit $f(x) = 0$.
- Algorithmus von Newton: wir nehmen $x_0 \in \mathbb{R}$,

Beispiel - Die Methode von Newton

- Gegeben: eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Ziel: $x \in \mathbb{R}$ zu finden, mit $f(x) = 0$.
- Algorithmus von Newton: wir nehmen $x_0 \in \mathbb{R}$, dann definieren wir

Beispiel - Die Methode von Newton

- Gegeben: eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Ziel: $x \in \mathbb{R}$ zu finden, mit $f(x) = 0$.
- Algorithmus von Newton: wir nehmen $x_0 \in \mathbb{R}$, dann definieren wir $x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Beispiel - Die Methode von Newton

- Gegeben: eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Ziel: $x \in \mathbb{R}$ zu finden, mit $f(x) = 0$.
- Algorithmus von Newton: wir nehmen $x_0 \in \mathbb{R}$, dann definieren wir $x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ und allgemein

Beispiel - Die Methode von Newton

- Gegeben: eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Ziel: $x \in \mathbb{R}$ zu finden, mit $f(x) = 0$.
- Algorithmus von Newton: wir nehmen $x_0 \in \mathbb{R}$, dann definieren wir $x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ und allgemein $x_k := x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$

Beispiel - Die Methode von Newton

- Gegeben: eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Ziel: $x \in \mathbb{R}$ zu finden, mit $f(x) = 0$.
- Algorithmus von Newton: wir nehmen $x_0 \in \mathbb{R}$, dann definieren wir $x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ und allgemein $x_k := x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$
  - Fixpunkte sind die gesuchte Lösungen.

Beispiel - Die Methode von Newton

- Gegeben: eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Ziel: $x \in \mathbb{R}$ zu finden, mit $f(x) = 0$.
- Algorithmus von Newton: wir nehmen $x_0 \in \mathbb{R}$, dann definieren wir $x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ und allgemein $x_k := x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$
  - Fixpunkte sind die gesuchte Lösungen. Sehr häufig

Beispiel - Die Methode von Newton

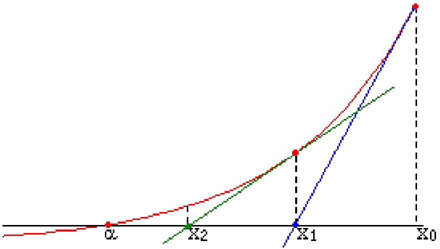
- Gegeben: eine differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Ziel: $x \in \mathbb{R}$ zu finden, mit $f(x) = 0$.
- Algorithmus von Newton: wir nehmen $x_0 \in \mathbb{R}$, dann definieren wir $x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ und allgemein $x_k := x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$
  - Fixpunkte sind die gesuchte Lösungen. Sehr häufig konvergieren Iterationen

Beispiel - Die Methode von Newton

- Gegeben: eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Ziel: $x \in \mathbb{R}$ zu finden, mit $f(x) = 0$.
- Algorithmus von Newton: wir nehmen $x_0 \in \mathbb{R}$, dann definieren wir $x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ und allgemein $x_k := x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$
  - ▶ Fixpunkte sind die gesuchte Lösungen. Sehr häufig konvergieren Iterationen zu einem Fixpunkt.

Beispiel - Die Methode von Newton

- Gegeben: eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Ziel: $x \in \mathbb{R}$ zu finden, mit $f(x) = 0$.
- Algorithmus von Newton: wir nehmen $x_0 \in \mathbb{R}$, dann definieren wir $x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ und allgemein $x_k := x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$
  - ▶ Fixpunkte sind die gesuchte Lösungen. Sehr häufig konvergieren Iterationen zu einem Fixpunkt.



- Wir möchten Fixpunkte benutzen,

- Wir möchten Fixpunkte benutzen, um einen alternativen Beweis

- Wir möchten Fixpunkte benutzen, um einen alternativen Beweis von CBS

- Wir möchten Fixpunkte benutzen, um einen alternativen Beweis von CBS zu geben

- Wir möchten Fixpunkte benutzen, um einen alternativen Beweis von CBS zu geben
  Wir beginnen mit der Erinnerung an das folgende Lemma.

- Wir möchten Fixpunkte benutzen, um einen alternativen Beweis von CBS zu geben
  Wir beginnen mit der Erinnerung an das folgende Lemma.

Lemma.

- Wir möchten Fixpunkte benutzen, um einen alternativen Beweis von CBS zu geben
  Wir beginnen mit der Erinnerung an das folgende Lemma.

Lemma. Sei M eine Menge.

- Wir möchten Fixpunkte benutzen, um einen alternativen Beweis von CBS zu geben
  Wir beginnen mit der Erinnerung an das folgende Lemma.

Lemma. Sei M eine Menge. Wir betrachten die teilweise geordnete Menge $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$.

- Wir möchten Fixpunkte benutzen, um einen alternativen Beweis von CBS zu geben
  Wir beginnen mit der Erinnerung an das folgende Lemma.

Lemma. Sei M eine Menge. Wir betrachten die teilweise geordnete Menge $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$.
Sei $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(M)$.

- Wir möchten Fixpunkte benutzen, um einen alternativen Beweis von CBS zu geben. Wir beginnen mit der Erinnerung an das folgende Lemma.

Lemma. Sei M eine Menge. Wir betrachten die teilweise geordnete Menge $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$. Sei $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(M)$. Dann $\bigcup \mathcal{X}$ ist die kleinste obere Schranke von $\mathcal{X}$.

- Wir möchten Fixpunkte benutzen, um einen alternativen Beweis von CBS zu geben
  Wir beginnen mit der Erinnerung an das folgende Lemma.

Lemma. Sei M eine Menge. Wir betrachten die teilweise geordnete Menge $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$. Sei $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(M)$. Dann $\bigcup \mathcal{X}$ ist die kleinste obere Schranke von $\mathcal{X}$. D.h.

- Wir möchten Fixpunkte benutzen, um einen alternativen Beweis von CBS zu geben
  Wir beginnen mit der Erinnerung an das folgende Lemma.

Lemma. Sei M eine Menge. Wir betrachten die teilweise geordnete Menge $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$. Sei $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(M)$. Dann $\bigcup \mathcal{X}$ ist die kleinste obere Schranke von $\mathcal{X}$. D.h.

$$\bigcup \mathcal{X} \subseteq U$$

- Wir möchten Fixpunkte benutzen, um einen alternativen Beweis von CBS zu geben. Wir beginnen mit der Erinnerung an das folgende Lemma.

Lemma. Sei M eine Menge. Wir betrachten die teilweise geordnete Menge $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$. Sei $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(M)$. Dann $\bigcup \mathcal{X}$ ist die kleinste obere Schranke von $\mathcal{X}$. D.h.

$$\bigcup \mathcal{X} \subseteq U$$

für alle $U \in {\uparrow}\mathcal{X}$

Satz. (Lemma von Knaster-Tarski)

Satz. (Lemma von Knaster-Tarski) Sei $f\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$

Satz. (Lemma von Knaster-Tarski) Sei $f : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$

Satz. (Lemma von Knaster-Tarski) Sei $f\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$.

Satz. (Lemma von Knaster-Tarski) Sei $f\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$. Dann hat f einen Fixpunkt.

Satz. (Lemma von Knaster-Tarski) Sei $f\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$. Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis.

Satz. (Lemma von Knaster-Tarski) Sei $f: \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$. Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis. Seien

Satz. (Lemma von Knaster-Tarski) Sei $f\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$. Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis. Seien

$$\mathcal{Q} :=$$

Satz. (Lemma von Knaster-Tarski) Sei $f\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$. Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis. Seien

$$\mathcal{Q} := \{X \in \mathcal{P}(M) \mid X \subseteq f(X)\}$$

Satz. (Lemma von Knaster-Tarski) Sei $f: \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$. Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis. Seien

$$\mathcal{Q} := \{X \in \mathcal{P}(M) \mid X \subseteq f(X)\}$$

und $N :=$

Satz. (Lemma von Knaster-Tarski) Sei $f\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$. Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis. Seien

$$\mathcal{Q} := \{X \in \mathcal{P}(M) \mid X \subseteq f(X)\}$$

und $N := \bigcup \mathcal{Q}$.

Satz. (Lemma von Knaster-Tarski) Sei $f: \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$. Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis. Seien

$$\mathcal{Q} := \{X \in \mathcal{P}(M) \mid X \subseteq f(X)\}$$

und $N := \bigcup \mathcal{Q}$.

- Wir zeigen jetzt

Satz. (Lemma von Knaster-Tarski) Sei $f\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$. Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis. Seien

$$\mathcal{Q} := \{X \in \mathcal{P}(M) \mid X \subseteq f(X)\}$$

und $N := \bigcup \mathcal{Q}$.

- Wir zeigen jetzt dass $f(N) = N$,

Satz. (Lemma von Knaster-Tarski) Sei $f: \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$. Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis. Seien

$$\mathcal{Q} := \{X \in \mathcal{P}(M) \mid X \subseteq f(X)\}$$

und $N := \bigcup \mathcal{Q}$.

- Wir zeigen jetzt dass $f(N) = N$, d.h. N is ein Fixpunkt von f.

Satz. (Lemma von Knaster-Tarski) Sei $f\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$. Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis. Seien

$$\mathcal{Q} := \{X \in \mathcal{P}(M) \mid X \subseteq f(X)\}$$

und $N := \bigcup \mathcal{Q}$.

- Wir zeigen jetzt dass $f(N) = N$, d.h. N is ein Fixpunkt von f.
- Für jede Menge $X \in \mathcal{Q}$ gilt $X \subseteq N$.

Satz. (Lemma von Knaster-Tarski) Sei $f\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$. Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis. Seien

$$\mathcal{Q} := \{X \in \mathcal{P}(M) \mid X \subseteq f(X)\}$$

und $N := \bigcup \mathcal{Q}$.

- Wir zeigen jetzt dass $f(N) = N$, d.h. N is ein Fixpunkt von f.
- Für jede Menge $X \in \mathcal{Q}$ gilt $X \subseteq N$. Deswegen gilt

Satz. (Lemma von Knaster-Tarski) Sei $f : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$. Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis. Seien

$$\mathcal{Q} := \{X \in \mathcal{P}(M) \mid X \subseteq f(X)\}$$

und $N := \bigcup \mathcal{Q}$.

- Wir zeigen jetzt dass $f(N) = N$, d.h. N is ein Fixpunkt von f.
- Für jede Menge $X \in \mathcal{Q}$ gilt $X \subseteq N$. Deswegen gilt $X \subseteq f(X) \subseteq f(N)$.

Satz. (Lemma von Knaster-Tarski) Sei $f\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$. Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis. Seien

$$\mathcal{Q} := \{X \in \mathcal{P}(M) \mid X \subseteq f(X)\}$$

und $N := \bigcup \mathcal{Q}$.

- Wir zeigen jetzt dass $f(N) = N$, d.h. N is ein Fixpunkt von f.
- Für jede Menge $X \in \mathcal{Q}$ gilt $X \subseteq N$. Deswegen gilt $X \subseteq f(X) \subseteq f(N)$.
- Es folgt

Satz. (Lemma von Knaster-Tarski) Sei $f : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$. Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis. Seien

$$\mathcal{Q} := \{X \in \mathcal{P}(M) \mid X \subseteq f(X)\}$$

und $N := \bigcup \mathcal{Q}$.

- Wir zeigen jetzt dass $f(N) = N$, d.h. N is ein Fixpunkt von f.
- Für jede Menge $X \in \mathcal{Q}$ gilt $X \subseteq N$. Deswegen gilt $X \subseteq f(X) \subseteq f(N)$.
- Es folgt dass $f(N)$

Satz. (Lemma von Knaster-Tarski) Sei $f : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$. Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis. Seien

$$\mathcal{Q} := \{X \in \mathcal{P}(M) \mid X \subseteq f(X)\}$$

und $N := \bigcup \mathcal{Q}$.

- Wir zeigen jetzt dass $f(N) = N$, d.h. N is ein Fixpunkt von f.
- Für jede Menge $X \in \mathcal{Q}$ gilt $X \subseteq N$. Deswegen gilt $X \subseteq f(X) \subseteq f(N)$.
- Es folgt dass $f(N)$ ist eine obere Schranke von $\mathcal{Q}$.

Satz. (Lemma von Knaster-Tarski) Sei $f\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$. Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis. Seien

$$\mathcal{Q} := \{X \in \mathcal{P}(M) \mid X \subseteq f(X)\}$$

und $N := \bigcup \mathcal{Q}$.

- Wir zeigen jetzt dass $f(N) = N$, d.h. N is ein Fixpunkt von f.
- Für jede Menge $X \in \mathcal{Q}$ gilt $X \subseteq N$. Deswegen gilt $X \subseteq f(X) \subseteq f(N)$.
- Es folgt dass $f(N)$ ist eine obere Schranke von $\mathcal{Q}$. Deswegen $N = \bigcup \mathcal{Q} \subseteq f(N)$.

Satz. (Lemma von Knaster-Tarski) Sei $f: \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$. Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis. Seien

$$\mathcal{Q} := \{X \in \mathcal{P}(M) \mid X \subseteq f(X)\}$$

und $N := \bigcup \mathcal{Q}$.

- Wir zeigen jetzt dass $f(N) = N$, d.h. N is ein Fixpunkt von f.
- Für jede Menge $X \in \mathcal{Q}$ gilt $X \subseteq N$. Deswegen gilt $X \subseteq f(X) \subseteq f(N)$.
- Es folgt dass $f(N)$ ist eine obere Schranke von $\mathcal{Q}$. Deswegen $N = \bigcup \mathcal{Q} \subseteq f(N)$.
- Auch gilt: $f(N) \subseteq f(f(N))$,

Satz. (Lemma von Knaster-Tarski) Sei $f\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$. Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis. Seien

$$\mathcal{Q} := \{X \in \mathcal{P}(M) \mid X \subseteq f(X)\}$$

und $N := \bigcup \mathcal{Q}$.

- Wir zeigen jetzt dass $f(N) = N$, d.h. N is ein Fixpunkt von f.
- Für jede Menge $X \in \mathcal{Q}$ gilt $X \subseteq N$. Deswegen gilt $X \subseteq f(X) \subseteq f(N)$.
- Es folgt dass $f(N)$ ist eine obere Schranke von $\mathcal{Q}$. Deswegen $N = \bigcup \mathcal{Q} \subseteq f(N)$.
- Auch gilt: $f(N) \subseteq f(f(N))$, wodurch $f(N) \in \mathcal{Q}$.

Satz. (Lemma von Knaster-Tarski) Sei $f\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$. Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis. Seien

$$\mathcal{Q} := \{X \in \mathcal{P}(M) \mid X \subseteq f(X)\}$$

und $N := \bigcup \mathcal{Q}$.

- Wir zeigen jetzt dass $f(N) = N$, d.h. N is ein Fixpunkt von f.
- Für jede Menge $X \in \mathcal{Q}$ gilt $X \subseteq N$. Deswegen gilt $X \subseteq f(X) \subseteq f(N)$.
- Es folgt dass $f(N)$ ist eine obere Schranke von $\mathcal{Q}$. Deswegen $N = \bigcup \mathcal{Q} \subseteq f(N)$.
- Auch gilt: $f(N) \subseteq f(f(N))$, wodurch $f(N) \in \mathcal{Q}$. Es folgt also $f(N) \subseteq \bigcup Q = N$,

Satz. (Lemma von Knaster-Tarski) Sei $f\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$. Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis. Seien

$$\mathcal{Q} := \{X \in \mathcal{P}(M) \mid X \subseteq f(X)\}$$

und $N := \bigcup \mathcal{Q}$.

- Wir zeigen jetzt dass $f(N) = N$, d.h. N is ein Fixpunkt von f.
- Für jede Menge $X \in \mathcal{Q}$ gilt $X \subseteq N$. Deswegen gilt $X \subseteq f(X) \subseteq f(N)$.
- Es folgt dass $f(N)$ ist eine obere Schranke von $\mathcal{Q}$. Deswegen $N = \bigcup \mathcal{Q} \subseteq f(N)$.
- Auch gilt: $f(N) \subseteq f(f(N))$, wodurch $f(N) \in \mathcal{Q}$. Es folgt also $f(N) \subseteq \bigcup Q = N$, und deswegen auch $N = f(N)$,

Satz. (Lemma von Knaster-Tarski) Sei $f : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$. Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis. Seien

$$\mathcal{Q} := \{X \in \mathcal{P}(M) \mid X \subseteq f(X)\}$$

und $N := \bigcup \mathcal{Q}$.

- Wir zeigen jetzt dass $f(N) = N$, d.h. N is ein Fixpunkt von f.
- Für jede Menge $X \in \mathcal{Q}$ gilt $X \subseteq N$. Deswegen gilt $X \subseteq f(X) \subseteq f(N)$.
- Es folgt dass $f(N)$ ist eine obere Schranke von $\mathcal{Q}$. Deswegen $N = \bigcup \mathcal{Q} \subseteq f(N)$.
- Auch gilt: $f(N) \subseteq f(f(N))$, wodurch $f(N) \in \mathcal{Q}$. Es folgt also $f(N) \subseteq \bigcup Q = N$, und deswegen auch $N = f(N)$, $\square$

Beispiele

Beispiele

- Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Beispiele

- Sei $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) := x + 1$.

Beispiele

- Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) := x + 1$. Wir betrachten jetzt f

Beispiele

- Sei $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) := x + 1$. Wir betrachten jetzt f als eine Funktion auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Beispiele

- Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) := x + 1$. Wir betrachten jetzt f als eine Funktion auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
-

Beispiele

- Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) := x + 1$. Wir betrachten jetzt f als eine Funktion auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- Für welche Teilmengen $X \subseteq \mathbb{N}$ gilt $f(X) = X$?

Beispiele

- Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) := x + 1$. Wir betrachten jetzt f als eine Funktion auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- Für welche Teilmengen $X \subseteq \mathbb{N}$ gilt $f(X) = X$? Für $X = \emptyset$

Beispiele

- Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) := x + 1$. Wir betrachten jetzt f als eine Funktion auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- Für welche Teilmengen $X \subseteq \mathbb{N}$ gilt $f(X) = X$? Für $X = \emptyset$
- Sei $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ wie folgt definiert:

Beispiele

- Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) := x + 1$. Wir betrachten jetzt f als eine Funktion auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- Für welche Teilmengen $X \subseteq \mathbb{N}$ gilt $f(X) = X$? Für $X = \emptyset$
- Sei $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ wie folgt definiert:

$$g(X) := X \cup f(X).$$

Beispiele

- Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) := x + 1$. Wir betrachten jetzt f als eine Funktion auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- Für welche Teilmengen $X \subseteq \mathbb{N}$ gilt $f(X) = X$? Für $X = \emptyset$
- Sei $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ wie folgt definiert:

$$g(X) := X \cup f(X).$$

Fixpunkte:

Beispiele

- Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) := x + 1$. Wir betrachten jetzt f als eine Funktion auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- Für welche Teilmengen $X \subseteq \mathbb{N}$ gilt $f(X) = X$? Für $X = \emptyset$
- Sei $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ wie folgt definiert:

$$g(X) := X \cup f(X).$$

Fixpunkte: $\emptyset$,

Beispiele

- Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) := x + 1$. Wir betrachten jetzt f als eine Funktion auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- Für welche Teilmengen $X \subseteq \mathbb{N}$ gilt $f(X) = X$? Für $X = \emptyset$
- Sei $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ wie folgt definiert:

$$g(X) := X \cup f(X).$$

Fixpunkte: $\emptyset$, $\mathbb{N}$,

Beispiele

- Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) := x+1$. Wir betrachten jetzt f als eine Funktion auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- Für welche Teilmengen $X \subseteq \mathbb{N}$ gilt $f(X) = X$? Für $X = \emptyset$
- Sei $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ wie folgt definiert:

$$g(X) := X \cup f(X).$$

Fixpunkte: $\emptyset$, $\mathbb{N}$, $X_k := \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\}$ mit $k \in \mathbb{N}$.

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein)

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f: M \to N$ und $g: N \to M$ injektive Funktionen.

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis.

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis.

- Wir definieren die Funktion

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis.

- Wir definieren die Funktion $h\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$:

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis.

- Wir definieren die Funktion $h\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$:

$$h(X) := M \setminus g\big(N \setminus f(X)\big) \ .$$

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis.

- Wir definieren die Funktion $h\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$:

$$h(X) := M \setminus g\big(N \setminus f(X)\big) \quad .$$

- Für alle $X \subseteq Y \subseteq M$ gilt

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis.

- Wir definieren die Funktion $h\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$:

$$h(X) := M \setminus g\big(N \setminus f(X)\big) \ .$$

- Für alle $X \subseteq Y \subseteq M$ gilt $f(X) \subseteq f(Y)$

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis.

- Wir definieren die Funktion $h\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$:

$$h(X) := M \setminus g\big(N \setminus f(X)\big) \ .$$

- Für alle $X \subseteq Y \subseteq M$ gilt $f(X) \subseteq f(Y)$ also auch

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis.

- Wir definieren die Funktion $h\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$:

$$h(X) := M \setminus g\big(N \setminus f(X)\big) \ .$$

- Für alle $X \subseteq Y \subseteq M$ gilt $f(X) \subseteq f(Y)$ also auch $N \setminus f(Y) \subseteq N \setminus f(X)$,

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis.

- Wir definieren die Funktion $h\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$:

$$h(X) := M \setminus g\big(N \setminus f(X)\big) \ .$$

- Für alle $X \subseteq Y \subseteq M$ gilt $f(X) \subseteq f(Y)$ also auch $N \setminus f(Y) \subseteq N \setminus f(X)$, und deswegen auch

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis.

- Wir definieren die Funktion $h\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$:

$$h(X) := M \setminus g\big(N \setminus f(X)\big) \ .$$

- Für alle $X \subseteq Y \subseteq M$ gilt $f(X) \subseteq f(Y)$ also auch $N \setminus f(Y) \subseteq N \setminus f(X)$, und deswegen auch

$$g\big(N \setminus f(Y)\big) \subseteq g\big(N \setminus f(X)\big).$$

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis.

- Wir definieren die Funktion $h\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$:

$$h(X) := M \setminus g\big(N \setminus f(X)\big) \quad .$$

- Für alle $X \subseteq Y \subseteq M$ gilt $f(X) \subseteq f(Y)$ also auch $N \setminus f(Y) \subseteq N \setminus f(X)$, und deswegen auch

$$g\big(N \setminus f(Y)\big) \subseteq g\big(N \setminus f(X)\big).$$

D.h. $h(X) \subseteq h(Y)$.

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis.

- Wir definieren die Funktion $h\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$:

$$h(X) := M \setminus g\big(N \setminus f(X)\big) \ .$$

- Für alle $X \subseteq Y \subseteq M$ gilt $f(X) \subseteq f(Y)$ also auch $N \setminus f(Y) \subseteq N \setminus f(X)$, und deswegen auch

$$g\big(N \setminus f(Y)\big) \subseteq g\big(N \setminus f(X)\big).$$

D.h. $h(X) \subseteq h(Y)$.

- Nach dem Lemma von Knaster-Tarski

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis.

- Wir definieren die Funktion $h\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$:

$$h(X) := M \setminus g\big(N \setminus f(X)\big) \quad .$$

- Für alle $X \subseteq Y \subseteq M$ gilt $f(X) \subseteq f(Y)$ also auch $N \setminus f(Y) \subseteq N \setminus f(X)$, und deswegen auch

$$g\big(N \setminus f(Y)\big) \subseteq g\big(N \setminus f(X)\big).$$

  D.h. $h(X) \subseteq h(Y)$.

- Nach dem Lemma von Knaster-Tarski existiert also

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis.

- Wir definieren die Funktion $h\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$:

$$h(X) := M \setminus g\big(N \setminus f(X)\big) \; .$$

- Für alle $X \subseteq Y \subseteq M$ gilt $f(X) \subseteq f(Y)$ also auch $N \setminus f(Y) \subseteq N \setminus f(X)$, und deswegen auch

$$g\big(N \setminus f(Y)\big) \subseteq g\big(N \setminus f(X)\big).$$

  D.h. $h(X) \subseteq h(Y)$.

- Nach dem Lemma von Knaster-Tarski existiert also ein Fixpunkt

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis.

- Wir definieren die Funktion $h\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$:

$$h(X) := M \setminus g\big(N \setminus f(X)\big) \ .$$

- Für alle $X \subseteq Y \subseteq M$ gilt $f(X) \subseteq f(Y)$ also auch $N \setminus f(Y) \subseteq N \setminus f(X)$, und deswegen auch

$$g\big(N \setminus f(Y)\big) \subseteq g\big(N \setminus f(X)\big).$$

  D.h. $h(X) \subseteq h(Y)$.

- Nach dem Lemma von Knaster-Tarski existiert also ein Fixpunkt $F \subseteq M$ für h.

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis.

- Wir definieren die Funktion $h\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$:

$$h(X) := M \setminus g\big(N \setminus f(X)\big) \quad .$$

- Für alle $X \subseteq Y \subseteq M$ gilt $f(X) \subseteq f(Y)$ also auch $N \setminus f(Y) \subseteq N \setminus f(X)$, und deswegen auch

$$g\big(N \setminus f(Y)\big) \subseteq g\big(N \setminus f(X)\big).$$

 D.h. $h(X) \subseteq h(Y)$.

- Nach dem Lemma von Knaster-Tarski existiert also ein Fixpunkt $F \subseteq M$ für h. Es gilt

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis.

- Wir definieren die Funktion $h\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$:

$$h(X) := M \setminus g\big(N \setminus f(X)\big) \ .$$

- Für alle $X \subseteq Y \subseteq M$ gilt $f(X) \subseteq f(Y)$ also auch $N \setminus f(Y) \subseteq N \setminus f(X)$, und deswegen auch

$$g\big(N \setminus f(Y)\big) \subseteq g\big(N \setminus f(X)\big).$$

  D.h. $h(X) \subseteq h(Y)$.

- Nach dem Lemma von Knaster-Tarski existiert also ein Fixpunkt $F \subseteq M$ für h. Es gilt

$$M \setminus F = M \setminus h(F) =$$

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis.

- Wir definieren die Funktion $h\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$:

$$h(X) := M \setminus g\big(N \setminus f(X)\big) \ .$$

- Für alle $X \subseteq Y \subseteq M$ gilt $f(X) \subseteq f(Y)$ also auch $N \setminus f(Y) \subseteq N \setminus f(X)$, und deswegen auch

$$g\big(N \setminus f(Y)\big) \subseteq g\big(N \setminus f(X)\big).$$

  D.h. $h(X) \subseteq h(Y)$.

- Nach dem Lemma von Knaster-Tarski existiert also ein Fixpunkt $F \subseteq M$ für h. Es gilt

$$M \setminus F = M \setminus h(F) = M \setminus \Big(M \setminus g\big(N \setminus f(F)\big)\Big) =$$

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis.

- Wir definieren die Funktion $h\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$:

$$h(X) := M \setminus g\big(N \setminus f(X)\big) \ .$$

- Für alle $X \subseteq Y \subseteq M$ gilt $f(X) \subseteq f(Y)$ also auch $N \setminus f(Y) \subseteq N \setminus f(X)$, und deswegen auch

$$g\big(N \setminus f(Y)\big) \subseteq g\big(N \setminus f(X)\big).$$

  D.h. $h(X) \subseteq h(Y)$.

- Nach dem Lemma von Knaster-Tarski existiert also ein Fixpunkt $F \subseteq M$ für h. Es gilt

$$M \setminus F = M \setminus h(F) = M \setminus \Big(M \setminus g\big(N \setminus f(F)\big)\Big) = g\big(N \setminus f(F)\big) \ .$$

- Wir definieren eine Funktion $B\colon M \to N$ durch

- Wir definieren eine Funktion $B\colon M \to N$ durch

$$B(m) := f(m) \text{ wenn } m \in F$$

- Wir definieren eine Funktion $B\colon M \to N$ durch

$$B(m) := f(m) \text{ wenn } m \in F$$

$$B(m) := g^{-1}(m) \text{ wenn } m \in M \setminus F$$

- Wir definieren eine Funktion $B\colon M \to N$ durch

$$B(m) := f(m) \text{ wenn } m \in F$$

$$B(m) := g^{-1}(m) \text{ wenn } m \in M \setminus F$$

Wir möchten zeigen dass B ist bijektiv.

- Wir definieren eine Funktion $B\colon M \to N$ durch

$$B(m) := f(m) \text{ wenn } m \in F$$

$$B(m) := g^{-1}(m) \text{ wenn } m \in M \setminus F$$

  Wir möchten zeigen dass B ist bijektiv.

- **Surjektivität:**

- Wir definieren eine Funktion $B\colon M \to N$ durch

$$B(m) := f(m) \text{ wenn } m \in F$$

$$B(m) := g^{-1}(m) \text{ wenn } m \in M \setminus F$$

  Wir möchten zeigen dass B ist bijektiv.

- **Surjektivität:** Sei $n \in N$.

- Wir definieren eine Funktion $B\colon M \to N$ durch

$$B(m) := f(m) \text{ wenn } m \in F$$

$$B(m) := g^{-1}(m) \text{ wenn } m \in M \setminus F$$

Wir möchten zeigen dass B ist bijektiv.

- **Surjektivität:** Sei $n \in N$. Falls $n \in f(F)$,

- Wir definieren eine Funktion $B\colon M \to N$ durch

$$B(m) := f(m) \text{ wenn } m \in F$$

$$B(m) := g^{-1}(m) \text{ wenn } m \in M \setminus F$$

  Wir möchten zeigen dass B ist bijektiv.

- **Surjektivität:** Sei $n \in N$. Falls $n \in f(F)$, dann existiert $m \in F$, so dass $f(m) = n$.

- Wir definieren eine Funktion $B\colon M \to N$ durch

$$B(m) := f(m) \text{ wenn } m \in F$$

$$B(m) := g^{-1}(m) \text{ wenn } m \in M \setminus F$$

  Wir möchten zeigen dass B ist bijektiv.

- **Surjektivität:** Sei $n \in N$. Falls $n \in f(F)$, dann existiert $m \in F$, so dass $f(m) = n$. Damit gilt $B(m) = n$.

- Wir definieren eine Funktion $B\colon M \to N$ durch

$$B(m) := f(m) \text{ wenn } m \in F$$

$$B(m) := g^{-1}(m) \text{ wenn } m \in M \setminus F$$

  Wir möchten zeigen dass B ist bijektiv.

- **Surjektivität:** Sei $n \in N$. Falls $n \in f(F)$, dann existiert $m \in F$, so dass $f(m) = n$. Damit gilt $B(m) = n$. Sonst ist $n \in N \setminus f(F)$

- Wir definieren eine Funktion $B\colon M \to N$ durch

$$B(m) := f(m) \text{ wenn } m \in F$$

$$B(m) := g^{-1}(m) \text{ wenn } m \in M \setminus F$$

  Wir möchten zeigen dass B ist bijektiv.

- **Surjektivität:** Sei $n \in N$. Falls $n \in f(F)$, dann existiert $m \in F$, so dass $f(m) = n$. Damit gilt $B(m) = n$. Sonst ist $n \in N \setminus f(F)$ und damit

$$g(n) \in g\big(N \setminus f(F)\big) = M \setminus F.$$

- Wir definieren eine Funktion $B\colon M \to N$ durch

$$B(m) := f(m) \text{ wenn } m \in F$$

$$B(m) := g^{-1}(m) \text{ wenn } m \in M \setminus F$$

Wir möchten zeigen dass B ist bijektiv.

- **Surjektivität:** Sei $n \in N$. Falls $n \in f(F)$, dann existiert $m \in F$, so dass $f(m) = n$. Damit gilt $B(m) = n$. Sonst ist $n \in N \setminus f(F)$ und damit

$$g(n) \in g\big(N \setminus f(F)\big) = M \setminus F.$$

Also $B\big(g(n)\big) = n$.

Injektivität: Seien $x, y \in M$ mit $B(x) = B(y)$.

Injektivität: Seien $x, y \in M$ mit $B(x) = B(y)$.

- Sei $B(x) \in f(F)$.

Injektivität: Seien $x, y \in M$ mit $B(x) = B(y)$.

- Sei $B(x) \in f(F)$. Erst zeigen wir dass $x, y \in F$.

Injektivität: Seien $x, y \in M$ mit $B(x) = B(y)$.

- Sei $B(x) \in f(F)$. Erst zeigen wir dass $x, y \in F$. Sonst wenn z.b. $x \in M \setminus F$,

Injektivität: Seien $x, y \in M$ mit $B(x) = B(y)$.

- Sei $B(x) \in f(F)$. Erst zeigen wir dass $x, y \in F$. Sonst wenn z.b. $x \in M \setminus F$, dann deswegen dass $M \setminus F = g\big(N \setminus f(F)\big)$,

Injektivität: Seien $x, y \in M$ mit $B(x) = B(y)$.

- Sei $B(x) \in f(F)$. Erst zeigen wir dass $x, y \in F$. Sonst wenn z.b. $x \in M \setminus F$, dann deswegen dass $M \setminus F = g\big(N \setminus f(F)\big)$, würden wir $B(x) = g^{-1}(x) \in N \setminus f(F)$ haben ,

Injektivität: Seien $x, y \in M$ mit $B(x) = B(y)$.

- Sei $B(x) \in f(F)$. Erst zeigen wir dass $x, y \in F$. Sonst wenn z.b. $x \in M \setminus F$, dann deswegen dass $M \setminus F = g\big(N \setminus f(F)\big)$, würden wir $B(x) = g^{-1}(x) \in N \setminus f(F)$ haben , was jedoch $B(x) \in f(F)$ widerspricht.

Injektivität: Seien $x, y \in M$ mit $B(x) = B(y)$.

- Sei $B(x) \in f(F)$. Erst zeigen wir dass $x, y \in F$. Sonst wenn z.b. $x \in M \setminus F$, dann deswegen dass $M \setminus F = g\big(N \setminus f(F)\big)$, würden wir $B(x) = g^{-1}(x) \in N \setminus f(F)$ haben , was jedoch $B(x) \in f(F)$ widerspricht. Also gilt $x, y \in F$.

Injektivität: Seien $x, y \in M$ mit $B(x) = B(y)$.

- Sei $B(x) \in f(F)$. Erst zeigen wir dass $x, y \in F$. Sonst wenn z.b. $x \in M \setminus F$, dann deswegen dass $M \setminus F = g\big(N \setminus f(F)\big)$, würden wir $B(x) = g^{-1}(x) \in N \setminus f(F)$ haben , was jedoch $B(x) \in f(F)$ widerspricht. Also gilt $x, y \in F$. Damit gilt auch $x = y$, da f injektiv ist.

Injektivität: Seien $x, y \in M$ mit $B(x) = B(y)$.

- Sei $B(x) \in f(F)$. Erst zeigen wir dass $x, y \in F$. Sonst wenn z.b. $x \in M \setminus F$, dann deswegen dass $M \setminus F = g\big(N \setminus f(F)\big)$, würden wir $B(x) = g^{-1}(x) \in N \setminus f(F)$ haben , was jedoch $B(x) \in f(F)$ widerspricht. Also gilt $x, y \in F$. Damit gilt auch $x = y$, da f injektiv ist.
- Sei $B(x) \notin f(F)$.

Injektivität: Seien $x, y \in M$ mit $B(x) = B(y)$.

- Sei $B(x) \in f(F)$. Erst zeigen wir dass $x, y \in F$. Sonst wenn z.b. $x \in M \setminus F$, dann deswegen dass $M \setminus F = g\big(N \setminus f(F)\big)$, würden wir $B(x) = g^{-1}(x) \in N \setminus f(F)$ haben , was jedoch $B(x) \in f(F)$ widerspricht. Also gilt $x, y \in F$. Damit gilt auch $x = y$, da f injektiv ist.
- Sei $B(x) \notin f(F)$. Dann gilt $x, y \in M \setminus F$,

Injektivität: Seien $x, y \in M$ mit $B(x) = B(y)$.

- Sei $B(x) \in f(F)$. Erst zeigen wir dass $x, y \in F$. Sonst wenn z.b. $x \in M \setminus F$, dann deswegen dass $M \setminus F = g\big(N \setminus f(F)\big)$, würden wir $B(x) = g^{-1}(x) \in N \setminus f(F)$ haben , was jedoch $B(x) \in f(F)$ widerspricht. Also gilt $x, y \in F$. Damit gilt auch $x = y$, da f injektiv ist.

- Sei $B(x) \notin f(F)$. Dann gilt $x, y \in M \setminus F$, also $x = g(B(x)) = g(B(y)) = y$.

Injektivität: Seien $x, y \in M$ mit $B(x) = B(y)$.

- Sei $B(x) \in f(F)$. Erst zeigen wir dass $x, y \in F$. Sonst wenn z.b. $x \in M \setminus F$, dann deswegen dass $M \setminus F = g\big(N \setminus f(F)\big)$, würden wir $B(x) = g^{-1}(x) \in N \setminus f(F)$ haben , was jedoch $B(x) \in f(F)$ widerspricht. Also gilt $x, y \in F$. Damit gilt auch $x = y$, da f injektiv ist.

- Sei $B(x) \notin f(F)$. Dann gilt $x, y \in M \setminus F$, also $x = g(B(x)) = g(B(y)) = y$. $\square$

- Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.

- Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
- Das Supremum $\sup X$ von X ist das kleinste Element von $\uparrow X$,

- Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
- Das Supremum $\sup X$ von X ist das kleinste Element von $\uparrow X$, also die kleinste obere Schranke für X.

- Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
- Das Supremum $\sup X$ von X ist das kleinste Element von $\uparrow X$, also die kleinste obere Schranke für X.
- Das Infimum $\inf X$ von X ist das größte Element von $\downarrow X$,

- Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
- Das Supremum $\sup X$ von X ist das kleinste Element von $\uparrow X$, also die kleinste obere Schranke für X.
- Das Infimum $\inf X$ von X ist das größte Element von $\downarrow X$, also die größte untere Schranke für X.

- Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
- Das Supremum $\sup X$ von X ist das kleinste Element von $\uparrow X$, also die kleinste obere Schranke für X.
- Das Infimum $\inf X$ von X ist das größte Element von $\downarrow X$, also die größte untere Schranke für X.
- Suprema/Infima existieren nicht immer.

- Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
- Das Supremum $\sup X$ von X ist das kleinste Element von $\uparrow X$, also die kleinste obere Schranke für X.
- Das Infimum $\inf X$ von X ist das größte Element von $\downarrow X$, also die größte untere Schranke für X.
- Suprema/Infima existieren nicht immer. Als Beispiel betrachten wir $\mathbb{R}$ mit üblicher Ordnungsrelation. Dann $\mathbb{R}$ selbst hat kein Supremum und kein Infimum.

- Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
- Das Supremum $\sup X$ von X ist das kleinste Element von $\uparrow X$, also die kleinste obere Schranke für X.
- Das Infimum $\inf X$ von X ist das größte Element von $\downarrow X$, also die größte untere Schranke für X.
- Suprema/Infima existieren nicht immer. Als Beispiel betrachten wir $\mathbb{R}$ mit üblicher Ordnungsrelation. Dann $\mathbb{R}$ selbst hat kein Supremum und kein Infimum.
- Noch ein Beispiel:

- Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
- Das Supremum $\sup X$ von X ist das kleinste Element von $\uparrow X$, also die kleinste obere Schranke für X.
- Das Infimum $\inf X$ von X ist das größte Element von $\downarrow X$, also die größte untere Schranke für X.
- Suprema/Infima existieren nicht immer. Als Beispiel betrachten wir $\mathbb{R}$ mit üblicher Ordnungsrelation. Dann $\mathbb{R}$ selbst hat kein Supremum und kein Infimum.
- Noch ein Beispiel: Die Menge M von allen endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$,

- Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
- Das Supremum $\sup X$ von X ist das kleinste Element von $\uparrow X$, also die kleinste obere Schranke für X.
- Das Infimum $\inf X$ von X ist das größte Element von $\downarrow X$, also die größte untere Schranke für X.
- Suprema/Infima existieren nicht immer. Als Beispiel betrachten wir $\mathbb{R}$ mit üblicher Ordnungsrelation. Dann $\mathbb{R}$ selbst hat kein Supremum und kein Infimum.
- Noch ein Beispiel: Die Menge M von allen endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, mit der Teilmengerelation $\subseteq$.

- Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
- Das Supremum $\sup X$ von X ist das kleinste Element von $\uparrow X$, also die kleinste obere Schranke für X.
- Das Infimum $\inf X$ von X ist das größte Element von $\downarrow X$, also die größte untere Schranke für X.
- Suprema/Infima existieren nicht immer. Als Beispiel betrachten wir $\mathbb{R}$ mit üblicher Ordnungsrelation. Dann $\mathbb{R}$ selbst hat kein Supremum und kein Infimum.
- Noch ein Beispiel: Die Menge M von allen endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, mit der Teilmengerelation $\subseteq$. Dann hat M kein Supremum.

- Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
- Das Supremum $\sup X$ von X ist das kleinste Element von $\uparrow X$, also die kleinste obere Schranke für X.
- Das Infimum $\inf X$ von X ist das größte Element von $\downarrow X$, also die größte untere Schranke für X.
- Suprema/Infima existieren nicht immer. Als Beispiel betrachten wir $\mathbb{R}$ mit üblicher Ordnungsrelation. Dann $\mathbb{R}$ selbst hat kein Supremum und kein Infimum.
- Noch ein Beispiel: Die Menge M von allen endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, mit der Teilmengerelation $\subseteq$. Dann hat M kein Supremum.
- Sei M eine Menge, und sei $X \subset \mathcal{P}(M)$.

- Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
- Das Supremum $\sup X$ von X ist das kleinste Element von $\uparrow X$, also die kleinste obere Schranke für X.
- Das Infimum $\inf X$ von X ist das größte Element von $\downarrow X$, also die größte untere Schranke für X.
- Suprema/Infima existieren nicht immer. Als Beispiel betrachten wir $\mathbb{R}$ mit üblicher Ordnungsrelation. Dann $\mathbb{R}$ selbst hat kein Supremum und kein Infimum.
- Noch ein Beispiel: Die Menge M von allen endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, mit der Teilmengerelation $\subseteq$. Dann hat M kein Supremum.
- Sei M eine Menge, und sei $X \subset \mathcal{P}(M)$. Dann $\mathcal{M}$ hat Supremum und Infimum in $\mathcal{P}$,

- Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
- Das Supremum $\sup X$ von X ist das kleinste Element von $\uparrow X$, also die kleinste obere Schranke für X.
- Das Infimum $\inf X$ von X ist das größte Element von $\downarrow X$, also die größte untere Schranke für X.
- Suprema/Infima existieren nicht immer. Als Beispiel betrachten wir $\mathbb{R}$ mit üblicher Ordnungsrelation. Dann $\mathbb{R}$ selbst hat kein Supremum und kein Infimum.
- Noch ein Beispiel: Die Menge M von allen endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, mit der Teilmengerelation $\subseteq$. Dann hat M kein Supremum.
- Sei M eine Menge, und sei $X \subset \mathcal{P}(M)$. Dann $\mathcal{M}$ hat Supremum und Infimum in $\mathcal{P}$, und es gilt

- Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
- Das Supremum $\sup X$ von X ist das kleinste Element von $\uparrow X$, also die kleinste obere Schranke für X.
- Das Infimum $\inf X$ von X ist das größte Element von $\downarrow X$, also die größte untere Schranke für X.
- Suprema/Infima existieren nicht immer. Als Beispiel betrachten wir $\mathbb{R}$ mit üblicher Ordnungsrelation. Dann $\mathbb{R}$ selbst hat kein Supremum und kein Infimum.
- Noch ein Beispiel: Die Menge M von allen endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, mit der Teilmengerelation $\subseteq$. Dann hat M kein Supremum.
- Sei M eine Menge, und sei $X \subset \mathcal{P}(M)$. Dann $\mathcal{M}$ hat Supremum und Infimum in $\mathcal{P}$, und es gilt $\sup X = \bigcup X$,

- Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
- Das Supremum $\sup X$ von X ist das kleinste Element von $\uparrow X$, also die kleinste obere Schranke für X.
- Das Infimum $\inf X$ von X ist das größte Element von $\downarrow X$, also die größte untere Schranke für X.
- Suprema/Infima existieren nicht immer. Als Beispiel betrachten wir $\mathbb{R}$ mit üblicher Ordnungsrelation. Dann $\mathbb{R}$ selbst hat kein Supremum und kein Infimum.
- Noch ein Beispiel: Die Menge M von allen endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, mit der Teilmengerelation $\subseteq$. Dann hat M kein Supremum.
- Sei M eine Menge, und sei $X \subset \mathcal{P}(M)$. Dann $\mathcal{M}$ hat Supremum und Infimum in $\mathcal{P}$, und es gilt $\sup X = \bigcup X$, $\inf X = \bigcap X$.

- Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
- Das Supremum $\sup X$ von X ist das kleinste Element von $\uparrow X$, also die kleinste obere Schranke für X.
- Das Infimum $\inf X$ von X ist das größte Element von $\downarrow X$, also die größte untere Schranke für X.
- Suprema/Infima existieren nicht immer. Als Beispiel betrachten wir $\mathbb{R}$ mit üblicher Ordnungsrelation. Dann $\mathbb{R}$ selbst hat kein Supremum und kein Infimum.
- Noch ein Beispiel: Die Menge M von allen endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, mit der Teilmengerelation $\subseteq$. Dann hat M kein Supremum.
- Sei M eine Menge, und sei $X \subset \mathcal{P}(M)$. Dann $\mathcal{M}$ hat Supremum und Infimum in $\mathcal{P}$, und es gilt $\sup X = \bigcup X$, $\inf X = \bigcap X$.
- Dieser Satz motiviert folgende Notation:

- Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
- Das Supremum $\sup X$ von X ist das kleinste Element von $\uparrow X$, also die kleinste obere Schranke für X.
- Das Infimum $\inf X$ von X ist das größte Element von $\downarrow X$, also die größte untere Schranke für X.
- Suprema/Infima existieren nicht immer. Als Beispiel betrachten wir $\mathbb{R}$ mit üblicher Ordnungsrelation. Dann $\mathbb{R}$ selbst hat kein Supremum und kein Infimum.
- Noch ein Beispiel: Die Menge M von allen endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, mit der Teilmengerelation $\subseteq$. Dann hat M kein Supremum.
- Sei M eine Menge, und sei $X \subset \mathcal{P}(M)$. Dann $\mathcal{M}$ hat Supremum und Infimum in $\mathcal{P}$, und es gilt $\sup X = \bigcup X$, $\inf X = \bigcap X$.
- Dieser Satz motiviert folgende Notation: Sei $(M, \subseteq)$ eine geordnete Menge,

- Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
- Das Supremum $\sup X$ von X ist das kleinste Element von $\uparrow X$, also die kleinste obere Schranke für X.
- Das Infimum $\inf X$ von X ist das größte Element von $\downarrow X$, also die größte untere Schranke für X.
- Suprema/Infima existieren nicht immer. Als Beispiel betrachten wir $\mathbb{R}$ mit üblicher Ordnungsrelation. Dann $\mathbb{R}$ selbst hat kein Supremum und kein Infimum.
- Noch ein Beispiel: Die Menge M von allen endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, mit der Teilmengerelation $\subseteq$. Dann hat M kein Supremum.
- Sei M eine Menge, und sei $X \subset \mathcal{P}(M)$. Dann $\mathcal{M}$ hat Supremum und Infimum in $\mathcal{P}$, und es gilt $\sup X = \bigcup X$, $\inf X = \bigcap X$.
- Dieser Satz motiviert folgende Notation: Sei $(M, \subseteq)$ eine geordnete Menge, und $x, y \in M$.

- Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
- Das Supremum $\sup X$ von X ist das kleinste Element von $\uparrow X$, also die kleinste obere Schranke für X.
- Das Infimum $\inf X$ von X ist das größte Element von $\downarrow X$, also die größte untere Schranke für X.
- Suprema/Infima existieren nicht immer. Als Beispiel betrachten wir $\mathbb{R}$ mit üblicher Ordnungsrelation. Dann $\mathbb{R}$ selbst hat kein Supremum und kein Infimum.
- Noch ein Beispiel: Die Menge M von allen endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, mit der Teilmengerelation $\subseteq$. Dann hat M kein Supremum.
- Sei M eine Menge, und sei $X \subset \mathcal{P}(M)$. Dann $\mathcal{M}$ hat Supremum und Infimum in $\mathcal{P}$, und es gilt $\sup X = \bigcup X$, $\inf X = \bigcap X$.
- Dieser Satz motiviert folgende Notation: Sei $(M, \subseteq)$ eine geordnete Menge, und $x, y \in M$. Dann schreiben wir

- Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
- Das Supremum $\sup X$ von X ist das kleinste Element von $\uparrow X$, also die kleinste obere Schranke für X.
- Das Infimum $\inf X$ von X ist das größte Element von $\downarrow X$, also die größte untere Schranke für X.
- Suprema/Infima existieren nicht immer. Als Beispiel betrachten wir $\mathbb{R}$ mit üblicher Ordnungsrelation. Dann $\mathbb{R}$ selbst hat kein Supremum und kein Infimum.
- Noch ein Beispiel: Die Menge M von allen endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, mit der Teilmengerelation $\subseteq$. Dann hat M kein Supremum.
- Sei M eine Menge, und sei $X \subset \mathcal{P}(M)$. Dann $\mathcal{M}$ hat Supremum und Infimum in $\mathcal{P}$, und es gilt $\sup X = \bigcup X$, $\inf X = \bigcap X$.
- Dieser Satz motiviert folgende Notation: Sei $(M, \subseteq)$ eine geordnete Menge, und $x, y \in M$. Dann schreiben wir $x \vee y := \sup(\{x, y\})$,

- Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
- Das Supremum $\sup X$ von X ist das kleinste Element von $\uparrow X$, also die kleinste obere Schranke für X.
- Das Infimum $\inf X$ von X ist das größte Element von $\downarrow X$, also die größte untere Schranke für X.
- Suprema/Infima existieren nicht immer. Als Beispiel betrachten wir $\mathbb{R}$ mit üblicher Ordnungsrelation. Dann $\mathbb{R}$ selbst hat kein Supremum und kein Infimum.
- Noch ein Beispiel: Die Menge M von allen endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, mit der Teilmengerelation $\subseteq$. Dann hat M kein Supremum.
- Sei M eine Menge, und sei $X \subset \mathcal{P}(M)$. Dann $\mathcal{M}$ hat Supremum und Infimum in $\mathcal{P}$, und es gilt $\sup X = \bigcup X$, $\inf X = \bigcap X$.
- Dieser Satz motiviert folgende Notation: Sei $(M, \subseteq)$ eine geordnete Menge, und $x, y \in M$. Dann schreiben wir $x \vee y := \sup(\{x, y\})$, $x \wedge y := \inf(\{x, y\})$.

- $(M, \subseteq)$ heißt Verband

- $(M, \subseteq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ und $x \wedge y$ existieren.

- $(M, \subseteq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ und $x \wedge y$ existieren.
- $(M, \subseteq)$ heißt vollständiger Verband

- $(M, \subseteq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ und $x \wedge y$ existieren.
- $(M, \subseteq)$ heißt vollständiger Verband gdw. für alle $X \subseteq M$ wir habe dass $\sup X$ und $\inf X$ existieren.

Beispiele

- $(M, \subseteq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ und $x \wedge y$ existieren.
- $(M, \subseteq)$ heißt vollständiger Verband gdw. für alle $X \subseteq M$ wir habe dass $\sup X$ und $\inf X$ existieren.

Beispiele

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ und $(\mathbb{R}, \leq)$ sind alle Verbände.

- $(M, \subseteq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ und $x \wedge y$ existieren.
- $(M, \subseteq)$ heißt vollständiger Verband gdw. für alle $X \subseteq M$ wir habe dass $\sup X$ und $\inf X$ existieren.

Beispiele

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ und $(\mathbb{R}, \leq)$ sind alle Verbände. Sie sind alle nicht vollständig.

- $(M, \subseteq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ und $x \wedge y$ existieren.
- $(M, \subseteq)$ heißt vollständiger Verband gdw. für alle $X \subseteq M$ wir habe dass $\sup X$ und $\inf X$ existieren.

Beispiele

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ und $(\mathbb{R}, \leq)$ sind alle Verbände. Sie sind alle nicht vollständig.
- Wir haben gesehen

- $(M, \subseteq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ und $x \wedge y$ existieren.
- $(M, \subseteq)$ heißt vollständiger Verband gdw. für alle $X \subseteq M$ wir habe dass $\sup X$ und $\inf X$ existieren.

Beispiele

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ und $(\mathbb{R}, \leq)$ sind alle Verbände. Sie sind alle nicht vollständig.
- Wir haben gesehen dass für jede Menge M

- $(M, \subseteq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ und $x \wedge y$ existieren.
- $(M, \subseteq)$ heißt vollständiger Verband gdw. für alle $X \subseteq M$ wir habe dass $\sup X$ und $\inf X$ existieren.

Beispiele

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ und $(\mathbb{R}, \leq)$ sind alle Verbände. Sie sind alle nicht vollständig.
- Wir haben gesehen dass für jede Menge M gilt dass

- $(M, \subseteq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ und $x \wedge y$ existieren.
- $(M, \subseteq)$ heißt vollständiger Verband gdw. für alle $X \subseteq M$ wir habe dass $\sup X$ und $\inf X$ existieren.

Beispiele

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ und $(\mathbb{R}, \leq)$ sind alle Verbände. Sie sind alle nicht vollständig.
- Wir haben gesehen dass für jede Menge M gilt dass $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ist ein vollständiger Verband.

- $(M, \subseteq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ und $x \wedge y$ existieren.
- $(M, \subseteq)$ heißt vollständiger Verband gdw. für alle $X \subseteq M$ wir habe dass $\sup X$ und $\inf X$ existieren.

Beispiele

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ und $(\mathbb{R}, \leq)$ sind alle Verbände. Sie sind alle nicht vollständig.
- Wir haben gesehen dass für jede Menge M gilt dass $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ist ein vollständiger Verband.
- Sei $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(M)$ die Menge von allen endlichen Mengen.

- $(M, \subseteq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ und $x \wedge y$ existieren.
- $(M, \subseteq)$ heißt vollständiger Verband gdw. für alle $X \subseteq M$ wir habe dass $\sup X$ und $\inf X$ existieren.

Beispiele

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ und $(\mathbb{R}, \leq)$ sind alle Verbände. Sie sind alle nicht vollständig.
- Wir haben gesehen dass für jede Menge M gilt dass $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ist ein vollständiger Verband.
- Sei $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(M)$ die Menge von allen endlichen Mengen. Dann $\mathcal{Q}$ is ein Verband.

- $(M, \subseteq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ und $x \wedge y$ existieren.
- $(M, \subseteq)$ heißt vollständiger Verband gdw. für alle $X \subseteq M$ wir habe dass $\sup X$ und $\inf X$ existieren.

Beispiele

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ und $(\mathbb{R}, \leq)$ sind alle Verbände. Sie sind alle nicht vollständig.
- Wir haben gesehen dass für jede Menge M gilt dass $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ist ein vollständiger Verband.
- Sei $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(M)$ die Menge von allen endlichen Mengen. Dann $\mathcal{Q}$ is ein Verband. $\mathcal{Q}$ ist vollstandig

- $(M, \subseteq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ und $x \wedge y$ existieren.
- $(M, \subseteq)$ heißt vollständiger Verband gdw. für alle $X \subseteq M$ wir habe dass $\sup X$ und $\inf X$ existieren.

Beispiele

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ und $(\mathbb{R}, \leq)$ sind alle Verbände. Sie sind alle nicht vollständig.
- Wir haben gesehen dass für jede Menge M gilt dass $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ist ein vollständiger Verband.
- Sei $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(M)$ die Menge von allen endlichen Mengen. Dann $\mathcal{Q}$ is ein Verband. $\mathcal{Q}$ ist vollstandig gdw.

- $(M, \subseteq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ und $x \wedge y$ existieren.
- $(M, \subseteq)$ heißt vollständiger Verband gdw. für alle $X \subseteq M$ wir habe dass $\sup X$ und $\inf X$ existieren.

Beispiele

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ und $(\mathbb{R}, \leq)$ sind alle Verbände. Sie sind alle nicht vollständig.
- Wir haben gesehen dass für jede Menge M gilt dass $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ist ein vollständiger Verband.
- Sei $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(M)$ die Menge von allen endlichen Mengen. Dann $\mathcal{Q}$ is ein Verband. $\mathcal{Q}$ ist vollstandig gdw. M ist eine endliche Menge.

- $(M, \subseteq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ und $x \wedge y$ existieren.
- $(M, \subseteq)$ heißt vollständiger Verband gdw. für alle $X \subseteq M$ wir habe dass $\sup X$ und $\inf X$ existieren.

Beispiele

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ und $(\mathbb{R}, \leq)$ sind alle Verbände. Sie sind alle nicht vollständig.
- Wir haben gesehen dass für jede Menge M gilt dass $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ist ein vollständiger Verband.
- Sei $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(M)$ die Menge von allen endlichen Mengen. Dann $\mathcal{Q}$ is ein Verband. $\mathcal{Q}$ ist vollstandig gdw. M ist eine endliche Menge.
- Jeder vollständiger Verband $\mathcal{M}$

- $(M, \subseteq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ und $x \wedge y$ existieren.
- $(M, \subseteq)$ heißt vollständiger Verband gdw. für alle $X \subseteq M$ wir habe dass $\sup X$ und $\inf X$ existieren.

Beispiele

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ und $(\mathbb{R}, \leq)$ sind alle Verbände. Sie sind alle nicht vollständig.
- Wir haben gesehen dass für jede Menge M gilt dass $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ist ein vollständiger Verband.
- Sei $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(M)$ die Menge von allen endlichen Mengen. Dann $\mathcal{Q}$ is ein Verband. $\mathcal{Q}$ ist vollstandig gdw. M ist eine endliche Menge.
- Jeder vollständiger Verband $\mathcal{M}$ hat das kleinste

- $(M, \subseteq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ und $x \wedge y$ existieren.
- $(M, \subseteq)$ heißt vollständiger Verband gdw. für alle $X \subseteq M$ wir habe dass $\sup X$ und $\inf X$ existieren.

Beispiele

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ und $(\mathbb{R}, \leq)$ sind alle Verbände. Sie sind alle nicht vollständig.
- Wir haben gesehen dass für jede Menge M gilt dass $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ist ein vollständiger Verband.
- Sei $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(M)$ die Menge von allen endlichen Mengen. Dann $\mathcal{Q}$ is ein Verband. $\mathcal{Q}$ ist vollstandig gdw. M ist eine endliche Menge.
- Jeder vollständiger Verband $\mathcal{M}$ hat das kleinste und das grosste Element.

- $(M, \subseteq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ und $x \wedge y$ existieren.
- $(M, \subseteq)$ heißt vollständiger Verband gdw. für alle $X \subseteq M$ wir habe dass $\sup X$ und $\inf X$ existieren.

Beispiele

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ und $(\mathbb{R}, \leq)$ sind alle Verbände. Sie sind alle nicht vollständig.
- Wir haben gesehen dass für jede Menge M gilt dass $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ist ein vollständiger Verband.
- Sei $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(M)$ die Menge von allen endlichen Mengen. Dann $\mathcal{Q}$ is ein Verband. $\mathcal{Q}$ ist vollstandig gdw. M ist eine endliche Menge.
- Jeder vollständiger Verband $\mathcal{M}$ hat das kleinste und das grosste Element. Sie sind, bzw., $\inf \mathcal{M}$ und $\sup \mathcal{M}$.

Satz. Jeder endliche Verband ist vollständig.

Satz. Jeder endliche Verband ist vollständig.

Beweis. Sei $(M, \preceq)$ ein Verband.

Satz. Jeder endliche Verband ist vollständig.

Beweis. Sei $(M, \preceq)$ ein Verband. Wir beweisen durch Induktion über $n = |X|$:

Satz. Jeder endliche Verband ist vollständig.

Beweis. Sei $(M, \preceq)$ ein Verband. Wir beweisen durch Induktion über $n = |X|$: Für jede endliche nicht-leere Teilmenge $X \subseteq M$ existiert $\sup X$.

Satz. Jeder endliche Verband ist vollständig.

Beweis. Sei $(M, \preceq)$ ein Verband. Wir beweisen durch Induktion über $n = |X|$: Für jede endliche nicht-leere Teilmenge $X \subseteq M$ existiert $\sup X$. (Der Beweis bezüglich $\inf X$ ist ähnlich.)

Satz. Jeder endliche Verband ist vollständig.

Beweis. Sei $(M, \preceq)$ ein Verband. Wir beweisen durch Induktion über $n = |X|$: Für jede endliche nicht-leere Teilmenge $X \subseteq M$ existiert $\sup X$. (Der Beweis bezüglich $\inf X$ ist ähnlich.)

- **Induktionsanfang:** Sei $n = 1 = |X|$ und $x \in X$.

Satz. Jeder endliche Verband ist vollständig.

Beweis. Sei $(M, \preceq)$ ein Verband. Wir beweisen durch Induktion über $n = |X|$: Für jede endliche nicht-leere Teilmenge $X \subseteq M$ existiert $\sup X$. (Der Beweis bezüglich $\inf X$ ist ähnlich.)

- **Induktionsanfang:** Sei $n = 1 = |X|$ und $x \in X$. Dann ist $x \preceq x$

Satz. Jeder endliche Verband ist vollständig.

Beweis. Sei $(M, \preceq)$ ein Verband. Wir beweisen durch Induktion über $n = |X|$: Für jede endliche nicht-leere Teilmenge $X \subseteq M$ existiert $\sup X$. (Der Beweis bezüglich $\inf X$ ist ähnlich.)

- **Induktionsanfang:** Sei $n = 1 = |X|$ und $x \in X$. Dann ist $x \preceq x$ und für alle oberen Schranken z von X

Satz. Jeder endliche Verband ist vollständig.

Beweis. Sei $(M, \preceq)$ ein Verband. Wir beweisen durch Induktion über $n = |X|$: Für jede endliche nicht-leere Teilmenge $X \subseteq M$ existiert $\sup X$. (Der Beweis bezüglich $\inf X$ ist ähnlich.)

- **Induktionsanfang:** Sei $n = 1 = |X|$ und $x \in X$. Dann ist $x \preceq x$ und für alle oberen Schranken z von X gilt offenbar $x \preceq z$.

Satz. Jeder endliche Verband ist vollständig.

Beweis. Sei $(M, \preceq)$ ein Verband. Wir beweisen durch Induktion über $n = |X|$: Für jede endliche nicht-leere Teilmenge $X \subseteq M$ existiert $\sup X$. (Der Beweis bezüglich $\inf X$ ist ähnlich.)

- **Induktionsanfang:** Sei $n = 1 = |X|$ und $x \in X$. Dann ist $x \preceq x$ und für alle oberen Schranken z von X gilt offenbar $x \preceq z$. Also ist $x = \sup X$.

Satz. Jeder endliche Verband ist vollständig.

Beweis. Sei $(M, \preceq)$ ein Verband. Wir beweisen durch Induktion über $n = |X|$: Für jede endliche nicht-leere Teilmenge $X \subseteq M$ existiert $\sup X$. (Der Beweis bezüglich $\inf X$ ist ähnlich.)

- **Induktionsanfang:** Sei $n = 1 = |X|$ und $x \in X$. Dann ist $x \preceq x$ und für alle oberen Schranken z von X gilt offenbar $x \preceq z$. Also ist $x = \sup X$.
- Sei $n \in \mathbb{N}_+$ beliebig.

Satz. Jeder endliche Verband ist vollständig.

Beweis. Sei $(M, \preceq)$ ein Verband. Wir beweisen durch Induktion über $n = |X|$: Für jede endliche nicht-leere Teilmenge $X \subseteq M$ existiert $\sup X$. (Der Beweis bezüglich $\inf X$ ist ähnlich.)

- **Induktionsanfang:** Sei $n = 1 = |X|$ und $x \in X$. Dann ist $x \preceq x$ und für alle oberen Schranken z von X gilt offenbar $x \preceq z$. Also ist $x = \sup X$.
- Sei $n \in \mathbb{N}_+$ beliebig.
  - **Induktionshypothese:** Für jedes $X \subseteq M$ mit $|X| = n$ existiert $\sup X$.

Satz. Jeder endliche Verband ist vollständig.

Beweis. Sei $(M, \preceq)$ ein Verband. Wir beweisen durch Induktion über $n = |X|$: Für jede endliche nicht-leere Teilmenge $X \subseteq M$ existiert $\sup X$. (Der Beweis bezüglich $\inf X$ ist ähnlich.)

- **Induktionsanfang:** Sei $n = 1 = |X|$ und $x \in X$. Dann ist $x \preceq x$ und für alle oberen Schranken z von X gilt offenbar $x \preceq z$. Also ist $x = \sup X$.
- Sei $n \in \mathbb{N}_+$ beliebig.
  - **Induktionshypothese:** Für jedes $X \subseteq M$ mit $|X| = n$ existiert $\sup X$.
  - **Induktionsbehauptung:** Für jedes $X \subseteq M$ mit $|X| = n + 1$ existiert $\sup X$.

Satz. Jeder endliche Verband ist vollständig.

Beweis. (Fortzetzung)

Satz. Jeder endliche Verband ist vollständig.

Beweis. (Fortzetzung)

- Sei $X \subseteq M$ mit $|X| = n + 1$ und $z \in X$.

Satz. Jeder endliche Verband ist vollständig.

Beweis. (Fortzetzung)

- Sei $X \subseteq M$ mit $|X| = n + 1$ und $z \in X$. Gemäß Induktionshypothese existiert ein $y = \sup(X \setminus \{z\})$.

Satz. Jeder endliche Verband ist vollständig.

Beweis. (Fortzetzung)

- Sei $X \subseteq M$ mit $|X| = n + 1$ und $z \in X$. Gemäß Induktionshypothese existiert ein $y = \sup\big(X \setminus \{z\}\big)$. Wir zeigen, dass $z \vee y = \sup X$.

Satz. Jeder endliche Verband ist vollständig.

Beweis. (Fortzetzung)

- Sei $X \subseteq M$ mit $|X| = n + 1$ und $z \in X$. Gemäß Induktionshypothese existiert ein $y = \sup\bigl(X \setminus \{z\}\bigr)$. Wir zeigen, dass $z \vee y = \sup X$.
- Es gilt $x \preceq z \vee y$ für alle $x \in X$.

Satz. Jeder endliche Verband ist vollständig.

Beweis. (Fortzetzung)

- Sei $X \subseteq M$ mit $|X| = n + 1$ und $z \in X$. Gemäß Induktionshypothese existiert ein $y = \sup\big(X \setminus \{z\}\big)$. Wir zeigen, dass $z \vee y = \sup X$.
- Es gilt $x \preceq z \vee y$ für alle $x \in X$. Sei $m \in M$, so dass $x \preceq m$ für alle $x \in X$.

Satz. Jeder endliche Verband ist vollständig.

Beweis. (Fortzetzung)

- Sei $X \subseteq M$ mit $|X| = n + 1$ und $z \in X$. Gemäß Induktionshypothese existiert ein $y = \sup(X \setminus \{z\})$. Wir zeigen, dass $z \vee y = \sup X$.
- Es gilt $x \preceq z \vee y$ für alle $x \in X$. Sei $m \in M$, so dass $x \preceq m$ für alle $x \in X$. Also auch $z \preceq m$ und $y \preceq m$.

Satz. Jeder endliche Verband ist vollständig.

Beweis. (Fortzetzung)

- Sei $X \subseteq M$ mit $|X| = n + 1$ und $z \in X$. Gemäß Induktionshypothese existiert ein $y = \sup\bigl(X \setminus \{z\}\bigr)$. Wir zeigen, dass $z \vee y = \sup X$.
- Es gilt $x \preceq z \vee y$ für alle $x \in X$. Sei $m \in M$, so dass $x \preceq m$ für alle $x \in X$. Also auch $z \preceq m$ und $y \preceq m$. Damit allerdings auch $z \vee y \preceq m$.

Satz. Jeder endliche Verband ist vollständig.

Beweis. (Fortzetzung)

- Sei $X \subseteq M$ mit $|X| = n + 1$ und $z \in X$. Gemäß Induktionshypothese existiert ein $y = \sup(X \setminus \{z\})$. Wir zeigen, dass $z \vee y = \sup X$.
- Es gilt $x \preceq z \vee y$ für alle $x \in X$. Sei $m \in M$, so dass $x \preceq m$ für alle $x \in X$. Also auch $z \preceq m$ und $y \preceq m$. Damit allerdings auch $z \vee y \preceq m$. $\square$

Satz.

Satz. Für jeden Verband $(M, \preceq)$ und alle $x, y, z \in M$ gelten

Satz. Für jeden Verband $(M, \preceq)$ und alle $x, y, z \in M$ gelten

- $x \vee y = y \vee x$ und $x \wedge y = y \wedge x$ Kommutativität

Satz. Für jeden Verband $(M, \preceq)$ und alle $x, y, z \in M$ gelten

- $x \vee y = y \vee x$ und $x \wedge y = y \wedge x$ — Kommutativität
- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ und $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ — Assoziativität

Satz. Für jeden Verband $(M, \preceq)$ und alle $x, y, z \in M$ gelten

- $x \vee y = y \vee x$ und $x \wedge y = y \wedge x$ Kommutativität
- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ und $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ Assoziativität
- $x \vee (x \wedge y) = x$ und $x \wedge (x \vee y) = x$ Absorption

Satz. Für jeden Verband $(M, \preceq)$ und alle $x, y, z \in M$ gelten

- $x \vee y = y \vee x$ und $x \wedge y = y \wedge x$ Kommutativität
- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ und $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ Assoziativität
- $x \vee (x \wedge y) = x$ und $x \wedge (x \vee y) = x$ Absorption

Beweis. Z.B. beweisen wir dass $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

Satz. Für jeden Verband $(M, \preceq)$ und alle $x, y, z \in M$ gelten

- $x \vee y = y \vee x$ und $x \wedge y = y \wedge x$ — Kommutativität
- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ und $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ — Assoziativität
- $x \vee (x \wedge y) = x$ und $x \wedge (x \vee y) = x$ — Absorption

Beweis. Z.B. beweisen wir dass $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

$x \wedge (y \wedge z) \geq x$ und $x \wedge (y \wedge z) \geq y \wedge z$.

Satz. Für jeden Verband $(M, \preceq)$ und alle $x, y, z \in M$ gelten

- $x \vee y = y \vee x$ und $x \wedge y = y \wedge x$ Kommutativität
- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ und $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ Assoziativität
- $x \vee (x \wedge y) = x$ und $x \wedge (x \vee y) = x$ Absorption

Beweis. Z.B. beweisen wir dass $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

$x \wedge (y \wedge z) \geq x$ und $x \wedge (y \wedge z) \geq y \wedge z$. Also $x \wedge (y \wedge z) \geq x$

Satz. Für jeden Verband $(M, \preceq)$ und alle $x, y, z \in M$ gelten

- $x \vee y = y \vee x$ und $x \wedge y = y \wedge x$ Kommutativität
- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ und $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ Assoziativität
- $x \vee (x \wedge y) = x$ und $x \wedge (x \vee y) = x$ Absorption

Beweis. Z.B. beweisen wir dass $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

$x \wedge (y \wedge z) \geq x$ und $x \wedge (y \wedge z) \geq y \wedge z$. Also $x \wedge (y \wedge z) \geq x$ und $x \wedge (y \wedge z) \geq y$

Satz. Für jeden Verband $(M, \preceq)$ und alle $x, y, z \in M$ gelten

- $x \vee y = y \vee x$ und $x \wedge y = y \wedge x$ Kommutativität
- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ und $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ Assoziativität
- $x \vee (x \wedge y) = x$ und $x \wedge (x \vee y) = x$ Absorption

Beweis. Z.B. beweisen wir dass $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

$x \wedge (y \wedge z) \geq x$ und $x \wedge (y \wedge z) \geq y \wedge z$. Also $x \wedge (y \wedge z) \geq x$ und $x \wedge (y \wedge z) \geq y$ und $x \wedge (y \wedge z) \geq z$.

Satz. Für jeden Verband $(M, \preceq)$ und alle $x, y, z \in M$ gelten

- $x \vee y = y \vee x$ und $x \wedge y = y \wedge x$ Kommutativität
- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ und $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ Assoziativität
- $x \vee (x \wedge y) = x$ und $x \wedge (x \vee y) = x$ Absorption

Beweis. Z.B. beweisen wir dass $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

$x \wedge (y \wedge z) \geq x$ und $x \wedge (y \wedge z) \geq y \wedge z$. Also $x \wedge (y \wedge z) \geq x$ und $x \wedge (y \wedge z) \geq y$ und $x \wedge (y \wedge z) \geq z$.

Damit sehen wir $x \wedge (y \wedge z) \geq x \wedge y$,

Satz. Für jeden Verband $(M, \preceq)$ und alle $x, y, z \in M$ gelten

- $x \vee y = y \vee x$ und $x \wedge y = y \wedge x$ — Kommutativität
- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ und $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ — Assoziativität
- $x \vee (x \wedge y) = x$ und $x \wedge (x \vee y) = x$ — Absorption

Beweis. Z.B. beweisen wir dass $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

$x \wedge (y \wedge z) \geq x$ und $x \wedge (y \wedge z) \geq y \wedge z$. Also $x \wedge (y \wedge z) \geq x$ und $x \wedge (y \wedge z) \geq y$ und $x \wedge (y \wedge z) \geq z$.

Damit sehen wir $x \wedge (y \wedge z) \geq x \wedge y$, und deswegen

$$x \wedge (y \wedge z) \geq (x \wedge y) \wedge z.$$

Satz. Für jeden Verband $(M, \preceq)$ und alle $x, y, z \in M$ gelten

- $x \vee y = y \vee x$ und $x \wedge y = y \wedge x$ — Kommutativität
- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ und $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ — Assoziativität
- $x \vee (x \wedge y) = x$ und $x \wedge (x \vee y) = x$ — Absorption

Beweis. Z.B. beweisen wir dass $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

$x \wedge (y \wedge z) \geq x$ und $x \wedge (y \wedge z) \geq y \wedge z$. Also $x \wedge (y \wedge z) \geq x$ und $x \wedge (y \wedge z) \geq y$ und $x \wedge (y \wedge z) \geq z$.

Damit sehen wir $x \wedge (y \wedge z) \geq x \wedge y$, und deswegen

$$x \wedge (y \wedge z) \geq (x \wedge y) \wedge z.$$

Ähnlich zeigen wir $(x \wedge y) \wedge z \geq x \wedge (y \wedge z)$,

Satz. Für jeden Verband $(M, \preceq)$ und alle $x, y, z \in M$ gelten

- $x \vee y = y \vee x$ und $x \wedge y = y \wedge x$ — Kommutativität
- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ und $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ — Assoziativität
- $x \vee (x \wedge y) = x$ und $x \wedge (x \vee y) = x$ — Absorption

Beweis. Z.B. beweisen wir dass $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

$x \wedge (y \wedge z) \geq x$ und $x \wedge (y \wedge z) \geq y \wedge z$. Also $x \wedge (y \wedge z) \geq x$ und $x \wedge (y \wedge z) \geq y$ und $x \wedge (y \wedge z) \geq z$.

Damit sehen wir $x \wedge (y \wedge z) \geq x \wedge y$, und deswegen

$$x \wedge (y \wedge z) \geq (x \wedge y) \wedge z.$$

Ähnlich zeigen wir $(x \wedge y) \wedge z \geq x \wedge (y \wedge z)$, also $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$,

UNIVERSITÄT
LEIPZIG

VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT!

Łukasz Grabowski
Mathematisches Institut

grabowski@math.uni-leipzig.de