Übungsblatt 7

1) Im Folgenden finden Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel für die jeweilige Behauptung
   a) Sei $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge, so dass die beiden Teilfolgen $(z_{2n})_{n=1}^{\infty}$,$(z_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ konvergieren und beide Grenzwerte gleich sind. Dann ist auch $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent. 2 Punkte
   b) Sei $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge, so dass die drei Teilfolgen $(w_{2n})_{n=1}^{\infty}$,$(w_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ und $(w_{3n})_{n=1}^{\infty}$ konvergieren. Dann ist, auch ohne jegliche weiteren Voraussetzung über Gleichheit von Grenzwerten, die Gesamtfolge $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent. 2 Punkte
   c)* Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge, so dass jede Teilfolge der Form $(a_{kn})_{n=1}^{\infty}$, mit $k \in \mathbb{N}$ und $k > 1$, konvergiert. Dann muss auch $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergieren. 5* Punkte
   d) Sei $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ eine konvergente Folge natürlicher Zahlen, dh $\forall n \in \mathbb{N} : d_n \in \mathbb{N}$. Dann muss $(d_n)_1^{\infty}$ letztendlich konstant sein, dh es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \geq N : a_N = a_n$. 1 Punkt
2) Bestimmen Sie

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}},$$

   d.h. finden Sie (analog zur aber einfacher als in der Vorlesung) eine Folge endlicher Formeln, deren "Grenzwert" obige Formel ist, zeigen Sie, dass die Folge der dazugehörigen Werte konvergiert, und finden Sie deren Grenzwert.

   Genauer
   a) Sei $f(x) = \sqrt{x+2}$ auf $(0, \infty)$, Ist f monoton, wenn ja wie? Welche Fixpunkte hat es?
   b) Zeigen Sie, es gibt ein $\alpha > 0$ so dass $f((0, \alpha)) \subset (0, \alpha)$ und $f((\alpha, \infty)) \subset (\alpha, \infty)$.
   c) Sei $a_1 > 0$ und $a_{n+1} = f(a_n)$. Zeigen Sie, dass die Folge immer $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ monoton und beschränkt ist.
   d) Beweisen Sie, dass der Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty}$ existiert und die Gleichung $f(a) = a$ erfüllt. (**Warnung:** die Algebra für Grenzwerte 3.9 kann nicht einfach auf die Wurzeln in f angewandt werden! Eine geeignete Umformulierung der iterativen Folgendefinition kann leicht zum Grenzwert $n \to \infty$ genommen werden.)

   Wie immer, ein Bild kann helfen (auch ohne Punkte). $1 + 1 + 2 + 1$ Punkte

Wie immer, begründen Sie Ihre Aussagen sorgfältig! Skizzen können und sollen der Lösungsfindung dienen, sind aber keine Beweise.

Bitte geben Sie pro Lösungsteam nur EINE Lösung ab !!!, die Korrekturen verzögern sich sonst unnötig. Danke.

Nach der Vorlesung abgegebene Lösungen werden nicht voll bewertet!

Abgabe am 5.12.2024 11:00 online(Moodlekurs) oder 17:15 HS2 zur Vorlesung.