# WEIHNACHTS VORLESUNG

## MIT PROF. SCHWARZ

WIE IRRATIONAL DARF ES SEIN?
VON HIMMLISCHER SPHÄRENMUSIK UND
CHAOS IM DREIKÖRPERPROBLEM

**11. DEZEMBER 2024**

**19:15 UHR, HÖRSAAL 3**

Der Glühwein- und Punschverkauf startet 18:30 Uhr vor dem Ziegenledersaal (Innenhof). Dort wird es auch weihnachtliches Gebäck geben.

FSR MATHE
Universität Leipzig

Bringt euch gern einen eigenen Becher mit :)

# Diskrete Strukturen (WS 2024-25) - Halbserie 6

---

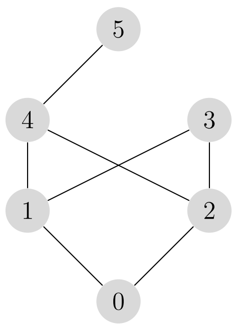
**6.1** **[4]**

Bitte direkt auf Moodle als Quiz antworten.

---

**6.2** **[3]**

Gegeben sei die Menge $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ und die **Ordnungsrelation** $R \subseteq M \times M$, dargestellt als **Hasse-Diagramm**:




(a) Geben Sie $R$ explizit als eine Teilmenge von $M \times M$ an. Geben Sie für $R$

(b) <u>alle</u> maximalen Elemente,

(c) <u>alle</u> oberen Schranken für $\{1,\ 2\}$,

(d) <u>alle</u> unteren Schranken für $\{0,\ 1\}$,

(e) eine Menge $X$ sodass $\inf X$ existiert nicht.

*Solution.*

(a) $\{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(0,5),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(4,5),\ \ (0,0),(1,1),(2,2),(3,3$

(b) 5,3

(c) 3,4,5

(d) 0

(e) Z.B. $\{3,4\}$.

---

**6.3** **[3]**

(a) Sei $R$ eine Ordnugsrelation auf einer Menge $M$. Beweisen Sie, dass $R;R = R$.

(b) Seien $f\colon A \to B$ and $g\colon B \to C$ Funktionen. Beweisen Sie dass wenn $f;g$ ist surjektiv dann $g$ ist surjektiv.

*Solution.*

(a) Sei $(x,y) \in R$. Da $R$ reflexiv ist, $(y,y) \in R$, und deswegen $(x,y) \in R;R$. Das seigt dass $R \subset R;R$. Sei jetzt $(x,z) \in R;R$. Also existiert $y$ mit $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R$. Da $R$ transitiv ist, wir schliessen dass $(x,z) \in R$. Das zeigt dass $R;R \subset R$, weswegen auch $R;R = R$.

(b) Sei $c \in C$. Da $f;g$ surjektv ist, existiert $(a,c) \in f;g$. Deswegen existiert auch $b \in B$ mit $(a, b \in f$ und $(b,c) \in g$. Anders gesagt $g(b) = c$, womit wir gezeigt haben dass $g$ surjektiv ist.

---

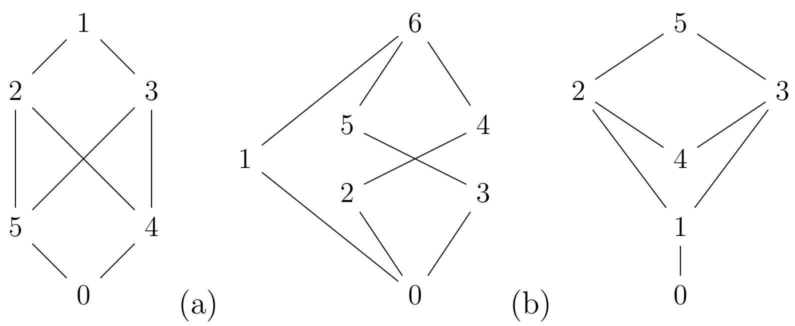
**6.4** Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von **Cantor-Schröder-Bernstein**, dass es existiert eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}^2$.

*Solution.* Satz von CSB besagt, eine bijektive Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ existiert, falls zwei injektive Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ und $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ existieren. Wir zeigen also die Existenz zweier solcher Funktionen $f$ und $g$. Es ist leicht, eine injektive Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ zu definieren; beispielsweise ist $f$ definiert durch $f(x) = (x, 0)$, für alle $x \in \mathbb{N}$, injektiv.

Für die Definition von $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ können wir wie folgt forfahren. Wir definieren $g(n,m) = 1n_k m_k n_{k-1} m_{k-1} \ldots n_0 m_0$, wobei $k+1$ das Maximum der Längen der Dezimaldarstellungen von $n$ und $m$ ist, und $n = \sum_{i=0}^{k} n_i \cdot 10^i$ und $m = \sum_{i=0}^{k} m_i \cdot 10^i$ mit $n_i, m_i \in \{0, \ldots, 9\}$ für alle $i \in \{0, \ldots, k\}$. Die Funktion $g$ ist injektiv, da sich $n$ und $m$ direkt aus $g(n,m)$ ablesen lassen.

---

**6.5** Gegeben seien folgende Hasse-Diagramme.



(a) (b) (c)

Entscheiden Sie jeweils, ob das im Folgenden genannte Infimum bzw. Supremum existiert. Falls ja, geben Sie es an.

| | (a) | (b) | (c) |
|---|---|---|---|
| $\inf\{1,4\}$ | 4 | 0 | ex. nicht |
| $\sup\{4,5\}$ | ex. nicht | 6 | 5 |

---

**6.6** Entscheiden Sie jeweils, ob es sich bei den folgenden Relationen um Abbildungen handelt. Begründen Sie Ihre Antworten.

$$R_1 = \{(m,n) \mid \exists k\ (km = n)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$
$$R_2 = \{(m,n) \mid m + n = 0\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$
$$R_3 = \left\{(m,n) \mid n = \sqrt{m}\right\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

*Solution.* $R_1$ ist keine Abbildung, denn $\forall n\ (1 \mid n)$.
$R_2$ ist eine Abbildung, $m + n$ gilt genau dann wenn $n = -m$
$R_3$ ist keine Abbildung auf $\mathbb{R}$, denn $\sqrt{-1}$ ist nicht definiert. (Allerdings wäre $R_3$ eine Abbildung von $\mathbb{R}_+$ nach $\mathbb{R}$.)

---

**6.7** Geben Sie vier Funktionen $f_1, \ldots, f_4$ mit $f_i \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ für alle $i \in \{1,2,3,4\}$ an, sodass gilt:

(a) $f_1$ ist surjektiv und injektiv,

(b) $f_2$ ist surjektiv und nicht injektiv,

(c) $f_3$ ist injektiv und nicht surjektiv,

(d) $f_4$ ist nicht surjektiv und nicht injektiv.

*Solution.* Mögliche Lösungen könnten sein:

(a) $f_1 = id$,

(b) $f_2(x) = id(x)$, für $x < 0$ und $f_2(x) = x - 1$, für $x \geq 0$,

(c) $f_3(x) = id(x)$, für $x < 0$ und $f_3(x) = x + 1$, für $x \geq 0$,

(d) $f_4 = 0$

---

**6.8** Bestimmen Sie für die gegebenen Funktionen, ob sie surjektiv und/oder injektiv sind! Geben Sie im Falle, dass eine der Eigenschaften nicht gilt, ein Gegenbeispiel an!

(a) $f_1 \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^2$

(b) $f_2 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x^2$

(c) $f_3 \colon [0, 2\pi] \to [-1, 1]$, $x \mapsto sin(x)$

*Solution.* Einige Beispielbegründungen:

(a) $f_1$ ist weder surjektiv (für keine ganze Zahl $z$ gilt $z^2 = 3$) noch injektiv ($-1$ und $1$ werden beide auf $1$ abgebildet),

(b) $f_2$ ist nicht surjektiv (für keine natürliche Zahl $n$ gilt $n^2 = 3$), aber injektiv,

(c) $f_3$ ist surjektiv, aber nicht injektiv ($0$ und $2\pi$ werden beide auf $0$ abgebildet).

---

**6.9** Gegeben sei die Menge $M = \{x, y\}$.

(a) Geben Sie alle **Ordnungsrelationen** auf $M$ an.

(b) Durch welche davon wird $M$ **total geordnet**?

*Solution.*

(a) Ordnungsrelationen sind $R_1 = \{(x, x), (y, y)\}$, $R_2 = \{(x, x), (y, y), (x, y)\}$ und $R_3 = \{(x, x), (y, y), (y, x)\}$.

Aufgrund der Reflexivität, müssen $(x, x)$ und $(y, y)$ in der Relation liegen. Liegt zusätzlich noch $(x, y)$ in der Relation, darf $(y, x)$ aufgrund der Antisymmetrie nicht enthalten sein (und umgekehrt).

(b) $R_2$ und $R_3$ sind vollständige Ordnungsrelationen und somit sind $(M, R_2)$ und $(M, R_3)$ total geordnete Mengen.

---

**6.10** Sei $(M, \preceq)$ eine **total geordnete Menge**. Beweisen Sie die folgende Aussage: für alle $x \in M$ gilt: $x$ ist kleinstes Element von $M$ genau dann, wenn $x$ das minimale Element in $M$ ist.

*Solution.*

($\Rightarrow$) Sei $x$ kleinstes Element von $M$, dann gilt $x \preceq m$ für alle $m \in M$. Wegen Antisymmetrie folgt $m \not\preceq x$ für alle $m \in M \setminus \{x\}$, d.h. $x$ ist minimal in $M$. ($\Leftarrow$) Sei $x$ minimal in $M$, d.h. $m \not\preceq x$ für alle $m \in M \setminus \{x\}$. Wegen Vollständigkeit folgt daraus $x \preceq m$ für alle $m \in M$. Das heißt $x$ ist untere Schranke für $M$ und damit kleinstes Element von $M$.