Serie 1

Nikita Fehér, 3793479
Tim Schlenstedt, 3797524

1.4

a) G ist kontextsensitiv, da $|l| \leq |r|$ bei alle Produktionsregeln
G ist kontextfrei, da $r \neq \varepsilon$
G ist nicht regulär, da $r \in S+S$

b) $S \Rightarrow_G S-S \Rightarrow_G (S)-S \Rightarrow_G (S+S)-S \Rightarrow_G ((S)+S)-S \Rightarrow_G ((S-S)+S)-S)$

$\Rightarrow_G^4 ((x-x)+x)-x)$

c) $L(G) \cap \{(,),x\}^* = L(\{(\}^a \cdot x \cdot \{)\}^a) \mid a \in \mathbb{N}_0$

d) Beweis, dass $L(G)$ keine Typ 3-Sprache ist mittels Pumping Lemma

$z = \underbrace{x}_{u}\underbrace{+}_{v}\underbrace{x}_{w}, \quad z \in L(G)$

Laut Pumping Lemma erzeugt die Sprache dann Wörter der Form

$x+^i x, \ i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ z.B. $i=2$: $x++x$ ↯

1. Fall : $S \to x$

$S+S \Rightarrow_G^2 x+x$

2. Fall : $S \to S-S$

$S+S \Rightarrow_G S-S+S \Rightarrow_G S-S+S-S \Rightarrow_G^4 x-x+x-x$

3. Fall : $S \to (S)$

$S+S \Rightarrow_G (S)+S \Rightarrow_G (S)+(S) \Rightarrow_G^2 (x)+(x)$

4. Fall $S \to S+S$

$S+S \Rightarrow_G S+S+S \Rightarrow_G S+S+S+S \Rightarrow_G^4 x+x+x+x$

$\Rightarrow x++x \notin L(G)$ $\square$

1.5

a) M ist abzählbar $\Rightarrow \exists f: M \to \mathbb{N}$ injektiv

Da $|M'| \leq |M| \Rightarrow \exists g: M' \to M$ injektiv

$\Rightarrow \exists h: M' \to \mathbb{N}$ injektiv und somit M' abzählbar $\square$

b)

Σ^* ist abzählbar, wenn Σ endlich ist

Wörter in Σ^* werden anhand ihrer Länge aufsteigend sortiert, wobei Wörter mit gleicher Länge lexikographisch sortiert werden.

Es ex. nun eine Bijektion $f: \mathbb{N} \to \Sigma^*$.

Mit $f(i)$ erhält man das i-te Wort der Sortierung. $\square$

c)

$P(\mathbb{N}^*)$ ist nicht abzählbar, denn

nach § 1.10 ist $\mathbb{N}^*$ abzählbar und $\mathbb{N}^1$ ist unendlich und Teilmenge von $\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \mathbb{N}^*$ abzählbar und unendlich. Nach Cantors Theorem ist $P(\mathbb{N}^*)$ dann überabzählbar. $\square$

1.6

Sei M überabzählbar. Wir wissen, dass $\mathbb{N}$ abzählbar

$\Rightarrow |M| > |\mathbb{N}|$, da $f: \mathbb{N} \to M$ surjektiv

$\Rightarrow \forall m \in M \; \exists n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow |\mathbb{N}| \geq |M|$ ↯

$\Rightarrow M$ abzählbar

$\square$