

Aufgabe:

Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ def durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 - 2x_3, -x_1 - x_2 + 4x_3, 3x_1 - x_2)$$

Bestimmen Sie eine Basis von $\text{Kern}(f)$ und von $\text{Bild}(f)$

Lösung:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(x) = A \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

$$\text{Kern}(f) = \text{Kern}(A) = \text{Lös}(A, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV} + (-3) \cdot \text{I}]{\begin{matrix} \text{II} + (-2) \cdot \text{I} \\ \text{III} + \text{I} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV} + (-1) \cdot \text{II}]{\text{III} + \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

$$2x_2 - 6x_3 = 0$$

$$\stackrel{\text{II}}{\Rightarrow} x_2 = \frac{1}{2} \cdot 6x_3 = 3x_3 \quad \stackrel{\text{I}}{\Rightarrow} x_1 = x_2 - 2x_3 = 3x_3 - 2x_3 = x_3$$

$$\Rightarrow \text{Kern}(A) = \{(x_3, 3x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \{x_3 \cdot \underbrace{(1, 3, 1)}_{=: u_1} \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \text{span}(u_1)$$

$$\Rightarrow \{u_1\} \text{ ist eine Basis von } \text{Kern}(f)$$

Schreibe $A = (a_1 \ a_2 \ a_3)$. Die Pivotindizes von A sind $j_1 = 1, j_2 = 2$.

$$\Rightarrow \{a_{j_1}, a_{j_2}\} = \{a_1, a_2\} = \{(1, 2, -1, 3), (-1, 0, -1, -1)\} \text{ ist eine Basis von } \text{Bild}(f).$$

Alternativ:

$$\text{Bild}(f) = f(\mathbb{R}^3) = f(\text{span}(e_1, e_2, e_3)) = \text{span}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \text{span}(A \cdot e_1, A \cdot e_2, A \cdot e_3)$$

$$\begin{pmatrix} A \cdot e_1 \\ A \cdot e_2 \\ A \cdot e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} + (-2) \cdot \text{II}]{\text{II} + \text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} + 3 \cdot \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \{(1, 2, -1, 3), (0, 2, -2, 2)\}$ ist eine Basis von $\text{Bild}(f)$.

Kontrolle:

$$\dim \text{Kern}(f) + \dim \text{Bild}(f) = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3. \quad \checkmark$$

Aufgabe:

Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ def durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 - x_3, 2x_1 + x_3, 5x_1 + 2x_2 + 4x_3)$$

Bestimmen Sie eine Basis von $\text{Kern}(f)$ und von $\text{Bild}(f)$

Lösung:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow f(x) = A \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

$$\text{Kern}(f) = \text{Kern}(A) = \text{Lös}(A, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{II} + (-2) \cdot \text{I} \\ \text{III} + (-5) \cdot \text{I}}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 12 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} + (-3) \cdot \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$$

$$4x_2 + 3x_3 = 0$$

$$\stackrel{\text{II}}{\Rightarrow} x_2 = -\frac{3}{4}x_3 \stackrel{\text{I}}{\Rightarrow} x_1 = 2x_2 + x_3 = 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}x_3\right) + x_3 = -\frac{1}{2}x_3$$

$$\Rightarrow \text{Kern}(A) = \left\{ \left(-\frac{1}{2}x_3, -\frac{3}{4}x_3, x_3 \mid x_3 \in \mathbb{R}\right\} = \left\{ x_3 \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, 1\right)}_{=: u_1} \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}(u_1)$$

$\Rightarrow \{u_1\}$ ist eine Basis von $\text{Kern}(f)$.

Schreibe $A = (a_1 \ a_2 \ a_3)$. Die Pivotindizes von A sind $j_1 = 1, j_2 = 2$.

$\Rightarrow \{a_{j_1}, a_{j_2}\} = \{a_1, a_2\} = \{(1, 2, 5), (-2, 0, 2)\}$ ist eine Basis von $\text{Bild}(f)$.

Kontrolle:

$$\dim \text{Kern}(f) + \dim \text{Bild}(f) = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3. \quad \checkmark$$

Aufgabe:

Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ def durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - x_2, x_1 + x_3)$$

Bestimmen Sie eine Basis von $\text{Kern}(f)$ und von $\text{Bild}(f)$

Lösung:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f(x) = A \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{II} + (-2) \cdot \text{I} \\ \text{III} + (-1) \cdot \text{I}}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-1 \cdot \text{III} \\ \text{II} \leftrightarrow \text{III}}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{III} + 3 \cdot \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dim \text{Bild}(f) = \text{Rang}(A) = 3 \Rightarrow \text{Bild}(f) = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \{e_1, e_2, e_3\} \text{ ist eine Basis von } \text{Bild}(f).$$

Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen gilt:

$$\dim \text{Kern}(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Bild}(f) = 3 - 3 = 0 \Rightarrow \text{Kern}(f) = \{0\}$$

$\Rightarrow \emptyset$ ist eine Basis von $\text{Kern}(f)$.

Aufgabe:

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ def durch

$$f(x, y) = (x - y, y - x, x)$$

Bestimmen Sie eine Basis von $\text{Kern}(f)$ und von $\text{Bild}(f)$

Lösung:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(x) = A \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

$$\text{Kern}(f) = \text{Kern}(A) = \text{Lös}(A, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} + (-1) \cdot \text{I}]{\text{II} + \text{I}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} \leftrightarrow \text{III}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\Rightarrow \text{Kern}(A) = \{(0, 0)\} \Rightarrow \emptyset \text{ ist eine Basis von } \text{Kern}(f).$$

Schreibe $A = (a_1 \ a_2)$. Die Pivotindizes von A sind $j_1 = 1, j_2 = 2$.

$$\Rightarrow \{a_{j_1}, a_{j_2}\} = \{a_1, a_2\} = \{(1, -1, 1), (-1, 1, 0)\} \text{ ist eine Basis von } \text{Bild}(f).$$

Alternativ:

$$\text{Bild}(f) = f(\mathbb{R}^2) = f(\text{span}(e_1, e_2)) = \text{span}(f(e_1), f(e_2)) = \text{span}(A \cdot e_1, A \cdot e_2)$$

$$\begin{pmatrix} A \cdot e_1 \\ A \cdot e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} + \text{I}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \{(1, -1, 1), (0, 0, 1)\} \text{ ist eine Basis von } \text{Bild}(f).$$

Kontrolle:

$$\dim \text{Kern}(f) + \dim \text{Bild}(f) = 0 + 2 = 2 = \dim \mathbb{R}^2. \quad \checkmark$$