Satz und Def.:

Seien V, W K-Vektorräume.

$\mathrm{Hom}_K(V,W) := \{ f: V \to W \mid f \text{ ist } K\text{-linear} \}$

Für alle $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ und $\lambda \in K$ def. man:

$f+g: V \to W, \ (f+g)(v) = f(v) + g(v)$

$\lambda \cdot f: V \to W, \ (\lambda \cdot f)(v) = \lambda \cdot f(v)$

Dann gilt: $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ ist mit diesen Verknüpfungen ein K-Vektorraum.

Ist speziell $W = K$, so heißt $V^* := \mathrm{Hom}_K(V,K)$ der Dualraum von V.

Satz und Def.:

Seien V, W K-Vektorräume und sei $f: V \to W$ K-linear.

Dann gilt: $f^*: W^* \to V^*$, $f^*(\varphi) := \varphi \circ f$ ist linear.

f^* heißt die zu f duale Abbildung

Satz und Def.:

Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $B = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ ex. genau eine K-lineare Abb. $v_i^*: V \to K$ mit $v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$

Es gilt: $B^* := \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ ist eine Basis von V^*.

$B^* := \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ heißt die zu $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ duale Basis.

Insbes. gilt: $\dim(V) = \dim(V^*)$

Für alle $\varphi \in V^*$ gilt: $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(v_i) \cdot v_i^*$

Satz und Def.:

Seien V, W endlich dimensionale K-Vektorräume mit Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ und sei $f: V \to W$ K-linear.

Dann gilt: $M_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*}(f^*) = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f))^T$