1. Das Fundament der Mathematik: Mengen und Abbildungen

Der Begriff der Menge ist fundamental in der Mathematik, formal wenn auch nicht immer am schnellesten oder intuitivsten, lässt sich jedes mathematische Objekt als Menge auffassen. Hierauf beruht die universelle Gültigkeit und absolute Zuverlässigkeit mathematischer Resultate, wenn auch oftmals weniger formale, wie zB geometrisch - anschauliche, Auffassungen dem Verständnis und der Gewinnung neuer Erkenntnis besser dienen. Wir werden hier die mengentheoretisch Sicht wohl mehr als in der Schulmathematik betonen, müssen aber auf ein vollständig formale Abhandlung verzichten.

Diese würde die Sprache der Mathematik (Logik) in einem Umfang benutzen, der noch nicht vorhanden ist. Ihr Aufbau würde unser Vorankommen unnötig verzögern, zumal diese Begriffe der Logik sowieso später im Studium der Informatik gründlicher behandelt werden.

1.1. **Grundlegendes über Mengen.**

Definition 1.1. Menge *(intuitive Definition von G. Cantor)* ist die Zusammenfassung von Objekten (Elementen), die eine bestimmte Eigenschaft ("$P(x)$ gilt") haben.

Wir schreiben $x \in M$ wenn x ein Element von M ist, d.h. zu M gehört, und $x \notin M$ andernfalls. Dies kann schreibt man als

$$M = \{x \; : \; P(x) \text{ ist wahr}\}, \text{ also } x \in M \text{ bedeutet genau, dass } P(x) \text{ gilt.}$$

Den Grundbegriff mathematische Aussage (der sich nur über eine strikte Einschränkung der Formeln, welche diese beschreiben, widerspruchsfrei halten lässt - siehe Fundamentalkrise der Mathematik) führen wir hier aus obigen Gründen nicht formal ein. Wir betreiben also **naive** Mengenlehre, werden aber Situationen vermeiden, die mit den strikten Einschränkungen (Zermelo- Fraenkel oder Bernays-Gödel- von Neumann) kollidieren.

Zwei Mengen A und B sind gleich, wenn sie dieselben Elemente haben, d.h. jedes Element von A auch ein Element von B ist, und umgekehrt jedes Element von B auch in A ist. ("Extensionalitätsprinzip" der ML).

Typischerweise studieren wir $\{x \in X \; : \; P(x)\}$, d.h. die Menge aller x aus einer (grossen fixen "Universal-")Menge X, für die die (mathematische) Aussage $P(x)$ wahr ist. Z.B. kann X die Menge aller natürlichen, ganzen oder reellen Zahlen sein oder auch aller Punkte der Ebene (alle diese Begriffe werden noch definiert).

Beispiel 1.2.

- $\{n \in \mathbb{N} \; : \; n > 5\}$ *alle natürlichen Zahlen größer als* 5, *dh* 6 *und alle nachfolgenden*
- $\{n \in \mathbb{Z} \; : \; \text{es existiert ein } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } n = 2k - 1\}$, *die ungeraden ganzen Zahlen*
- $\{x \in \mathbb{R} \; : \; x^2 \in \mathbb{Q} \& x \geq 0\}$ *- die "Wurzeln" der rationalen Zahlen*

Definition 1.3. *Wir sagen A ist* Teilmenge *von B (Notation $A \subset B$), wenn alle Elemente von A auch zu B gehören. (Statt A Teilmenge von B sagen wir oft A ist kleiner(oder auch kleiner gleich) B).*

Analog zur Ordnungsrelation für reelle Zahlen ist $A \subset B$ gleichbedeutend mit $B \supset A$. wir schreiben $A \subsetneq B$ wenn $A \subset B$ und $A \neq B$ und sagen A ist *strikt* kleiner als B. **Unterschied:** Nicht alle Mengen sind in diesem Sinne vergleichbar! Jedenfalls gilt

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ und } B \subset A),$$

Grundlage einer typischen Methode um die Gleichheit zweier Mengen zu zeigen.

Definition 1.4. *Die leere Menge ist diejenige Menge, welche keine Elemente hat und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.*

Für jedes mathematische Objekt a bezeichnet $\{a\}$ diejenige Menge, die a und nur a als einziges Element enthält. Sie heißt Einermenge mit Element a. (dh $\{a\}$=$\{x\ :\ x$=$a\}$)

Bemerkung: Spätestens jetzt sieht man, wie schwer es allein wäre, den Begriff "gleich sein", z.B. im Sinne von oben, rigoros zu definieren.

DIY: Zeigen Sie als Übung, dass die Mengen $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ und $\{\{\emptyset\}\}$ alle paarweise voneinander verschieden sind.

Definition 1.5. *Aus gegebenen Mengen A, B konstruieren wir*

- $A \cap B = \{x : x \in A \;\&\; x \in B\}$ *Schnittmenge, Durchschnitt von A und B*
- $A \cup B = \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$ *Vereinigung von A und B*
- $A \setminus B = \{x : x \in A \;\&\; x \notin B\}$ *Differenzmenge von A und B*

Die Mengen A und B heißen disjunkt, falls $A \cap B = \emptyset$, d.h. sie keine gemeinsamen Elemente haben.

Es gilt also z.B.

$$\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\} = \{a\} \cup \{a, b\} = \{b, a\}, \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{4, 2, 6\} = \{3, 1, 5\}.$$

Es gibt viele "Rechenregeln" für $\cap$ und $\cup$, wir erwähnen die wichtigsten, die Assoziativität, Kommutativität und Distributivität ausdrücken (symmetrischer als für "+" und "$\cdot$"!!)

Lemma 1.6. *Für alle Mengen A, B und C gilt*

i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
iii) $A \cup B = B \cup A$
iv) $A \cap B = B \cap A$
v) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
vi) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Beweis:(Ihrer Wahl)

Als letzte grundlegende Mengenoperation führen wir die Produktmenge ein, mit der sich z.B. die Euklidische Ebene aus der Zahlengeraden konstruieren lässt. Hierzu brauchen wir den Begriff des geordneten Paares, den klarerweise haben $x-$ und $y-$Koordinate eines Punktes in der Ebene ganz verschiedene Bedeutung! Also $(1,0) \neq (0,1)$, aber bei Mengen gilt ja $\{0,1\} = \{1,0\}$!?

Definition 1.7. *Für die mathematischen Objekte a und b definieren wir das geordnete Paar $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$.*

Dann erhalten wir wie gewünscht

Lemma 1.8. *Für alle mathematischen Objekte a,b,c,d gilt*

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow (a = c \text{ und } b = d).$$

Beweis: *Idee:* Rückrichtung trivial, bleibt z_z aus $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$ folgt $a = c$ und $b = d$. Da a und c einzeln in Mengen auftreten, ist es wohl leichter zuerst $a = c$ z_z.

Dies beweisen wir indirekt , d.h. mit Widerpruch. **Sonst** wäre $a \neq c$ und also $c \notin \{a\}$. Dies zeigt $\{a\} \neq \{c\}$ und $\{a\} \neq \{c,d\}$ wegen des Existenzionalitätsprinzips, also $\{a\} \notin \{\{c\},\{c,d\}\}$ - ein Widerspruch zur Voraussetzung. Damit kann "sonst" nicht eintreten und es muss $a = c$ gelten.

Die Voraussetzung gibt nun also $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a\},\{a,d\}\}$, bleibt $b = d$ zu zeigen. Hierzu machen wir eine vollständige Fallunterscheidung. **Falls** $a = b$, dann folgt $\{\{a\}\} = \{\{a\},\{a,d\}\}$ und also $\{a\} = \{a,d\}$. Dh $d \in \{a\}$ und also $a = b = c = d$. **Sonst** $b \notin \{a\}$, also $\{a,b\} = \{a,d\}$ und somit $b \in \{a,d\}$. Also $b = a$ oder $b = d$, aber $a = b$ war ja gerade mit "sonst" ausgeschlossen, also muss $b = d$ gelten. ☺

Nun können wir Triple $(a,b,c) := ((a,b),c)$, Quadruple $(a,b,c,d) = ((a,b,c),d)$ usw als geordnete Objekte mit analogen Gleichheitskriterien definieren.

Definition 1.9. *Für zwei Mengen A und B ist ihr (kartesisches) Produkt definiert als die Menge*

$$A \times B = \{(a,b)\ ,\ a \in A \,\&\, b \in B\} := \{x\ :\ \text{es existieren } a \in A \text{ und } b \in B \text{ mit } x = (a,b)\}.$$

Die linke, kompaktere Schreibweise wird wegen der Schreibökonomie öfters genutzt.

1.2. **Grundlegendes über Abbildungen.** Wir beginnen mit einer recht abstrakt anmutenden Definitionen, diese ist das Resultat eines Verallgemeinerungsprozesses, der über sehr lange Zeit ging. Beispiele aus der Schulmathematik erläuetern das Ganze aber sehr gut.

Definition 1.10. *Eine Abbildung F bildet eine Menge X in eine Menge Y ab, wenn*

$$F \subset X \times Y, \quad \forall x \in X \exists y \in Y : (x,y) \in F \text{ und } \forall (x,y),(x,y') \in F : y = y'.$$

Wir schreiben dann $F : X \to Y$, und wenn $(x,y) \in F$ dann schreiben wir $y = F(x)$. Wir identifizieren also die Abbildung $F = \{(x,F(x))\ :\ x \in X\}$ direkt mit ihrem "Graphen".

Dann heißt X der Definitionsbereich, mit dmn(F) bezeichnet, und das Bild der Funktion ist im$(F) = \{y \in Y \ : \ \text{existiert ein } x \in X \text{ mit } y = F(x)\}$. Der Wertebereich der Funktion ist (für uns) nicht eindeutig festgelegt: jede Menge, die im(f) enthält, kann als solcher genutzt werden.

Wenn $Y = \mathbb{R}$, (eventuell $\mathbb{C}, \mathbb{R}^n$) nennen wir F oftmals Funktion und benutzen gerne kleine Buchstaben $f, g, h, \ldots$.

Nun ein paar Illustrationen für Funktionen, wir greifen dabei Resulaten aus dem nächsten Kapitel vor, was aber hier erlaubt sein sollte, da diese auch schon in der Schule diskutiert wurden.

Beispiel 1.11.

(1) $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ *definiert durch* $f(a) = 4 - a$ *für* $a \in \{1,2,3\}$
(2) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *definiert als* $f(n) = 1$ *für alle* $(\forall) n \in \mathbb{N}$, *eine konstante Funktion*
(3) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ *definiert als* $f(n) = \frac{1}{n}$ *wenn* $n \in \mathbb{N}$
(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiert durch* $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x$, *die Identität (auf* $\mathbb{R}$*)*
(5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiert durch* $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$, *die Standardparabel*
(6) $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ *definiert durch* $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$, *hierbei* $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 0\}$. *Diese Funktion* f_6 *ist verschieden von der Funktion* f_5 *aus (5), obwohl sie die gleiche Formel nutzt, hat sie ganz andere Eigenschaften, siehe unten. (Def 1.13)*
(7) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiert durch* $f(x) = x$ *wenn* $x \geq 0$ *und* $f(x) = x^3$ *sonst (dh* $x < 0$*), eine der vielen Funktionen/Abbildungen die nicht durch eine (einzige) geschlossene Formel dargestellt werden. (DIY*: kann als Grenzwert einer geschlossenen Formel dargestellt werden)*

Definition 1.12. Bild und Urbild
Sei $F : X \to Y$ eine Abbildung und seien $X' \subset X$ und $Y' \subset Y$ gegeben. Dann definieren wir

$$F(X') = \{F(x) \ : \ x \in X'\} \subset Y \text{ als } F\text{-Bild von } X', \text{ und}$$
$$F^{-1}(Y') = \{x \in X \ , \ F(x) \in Y'\}, \text{ das } F\text{-Urbild von } Y'.$$

Bemerkung/Warnung Das F-Urbild existiert immer, auch wenn die "inverse Funktion F^{-1}", siehe unten, nicht definiert ist. $F(X) = \mathrm{im}(F)$ gilt auch immer.

Lemma 1.13. *Sei $F : X \to Y$ und beliebige $X_1, X_2 \subset X$ sowie $Y_1, Y_2 \subset Y$ gegeben. Dann gilt*

a) $F(X_1 \cup X_2) = F(X_1) \cup F(X_2)$,
b) $F(X_1 \cap X_2) \subset F(X_1) \cap F(X_2)$,
c) $F^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = F^{-1}(Y_1) \cup F^{-1}(Y_2)$ *und*
d) $F^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = F^{-1}(Y_1) \cap F^{-1}(Y_2)$.

Beweis:

Nun wollen wir Begriffe einführen, die beschreiben, inwieweit F eine umkehrbare Abbildung ist.

Definition 1.14. *Eine Abbildung $F : X \to Y$ heißt*

- *injektiv (auch $1-1$ genannt) wenn $F(x) = F(x') \Rightarrow x = x'$,*
- *surjektiv (bildet* auf *Y ab, engl "onto") wenn $\forall y \in Y \exists x \in X : F(x) = y$,*
- *bijektiv wenn F injektiv und surjektiv ist.*

Bemerkung Man sieht sofort: F ist injektiv genau dann wenn das F Urbild jeder Einerteilmenge von Y leer oder eine Einermenge ist. Und F ist surjektiv genau dann wenn $F(X) = Y$ genau dann wenn das Urbild jeder nichtleeren Teilmenge von Y nichtleer ist. Die Beispiele aus 1.11 zeigen, dass eine Abbildung F surjektiv werden kann, ohne F zu ändern, wohl aber das Y, siehe $\hat{f}_2 : \mathbb{N} \to \{1\}, \forall n \in \mathbb{N} : \hat{f}_2(n) = 1$, aber dies geht immer $(Y = F(X))$. Wenn eine Funktion F nicht injektiv ist, muss man einige Paare aus F entfernen um Injektivität zu erreichen (5) versus (6).

Definition 1.15. Inverse- oder Umkehrfunktion *Sei $F : X \to Y$ bijektiv. Dann definieren wir die Umkehrfunktion als*

$F^{-1} : Y \to X$ so: wenn $y \in Y$ dann ist $F^{-1}(y)$ dasjenige $x \in X$ welches $F(x) = y$ erfüllt.

Bemerkung Die Existenz eines solchen x folgt aus der Surjektivität von F, seine Eindeutigkeit da F injektiv ist. **Dann** gilt auch $\forall Y' \subset Y = F^{-1}(Y') = (F^{-1})(Y')$, was die etwas verwirrende aber praktische Notation für F-Urbilder erklärt.

Beispiel 1.16. *Die Funktion f_6 aus Beispiel 11(6) ist injektiv (siehe Übungszettel) und surjektiv (wie der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen aus zeigen wird). Ihre Umkehrfunktion ist die*

$$\text{(Quadrat)Wurzelfunktion} \quad (f_6)^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \text{ mit } (f_6)^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

Der letzte wichtig(st)e Begriff betrifft eine Operation speziell für Abbildungen, die es erlaubt weitere zu konstruieren

Definition 1.17. Zusammensetzung
Seien Mengen X, Y, Z und Abbildungen $F : X \to Y$, $G : Y \to Z$ gegeben, dann definieren wir die Verkettung von G und F als

$$G \circ F : X \to Z \text{ durch } (G \circ F)(x) = G(F(x)) \text{ wenn } x \in X.$$

Es gibt viele sehr allgemeine aber etwas abstrakte Resultate über Verkettung, hier nur 2 ganz einfache, bevor wie die Beispiele aus 1.11 konkret nutzen.

Lemma 1.18. *Seien Mengen X, Y, Z und Abbildungen $F : X \to Y$, $G : Y \to Z$ gegeben.*

Dann ist F injektiv falls $G \circ F$ injektiv ist, und G surjektiv wenn $G \circ F$ so ist. Beide Schlussfolgerungen lassen sich nicht umkehren!

Beweis:

Beispiel 1.19. (1) $f_5 \circ f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f_5 \circ f_3(n) = \frac{1}{n^2}$

(2) *Sei* $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ *definiert als* $d(x) = \sqrt{x}$. *Wenn* g *das quadratische Polynom* $y \mapsto y^2 - 3y + 1$ *für alle reellen* y. *Dann ist* $g \circ f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ *gegeben durch*

$$g \circ f(x) = (\sqrt{x})^2 - 3\sqrt{x} + 1 = x + 1 - 3\sqrt{x} \text{ für alle } x \geq 0.$$

2. Reelle Zahlen

Diese sind das Brot des Analytikers. Für die Konstruktion der reellen Zahlen siehe W.Rudins Buch “Analysis”, wir setzen hier die Existenz gleich voraus. Dann sind die reellen Zahlen eine Menge $\mathbb{R}$ mit

- zwei Rechenoperationen die jedem Paar $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zweier reeller Zahlen ein Element $x + y \in \mathbb{R}$ bzw. $x \cdot y \in \mathbb{R}$ zuordnen, und
- einer Ordnungs- (oder Vergleichsrelation) $<$

so dass die im Folgenden allmählich diskutierten 13 Axiome gelten.

I. Körperaxiome

Davon gibt es 9, und sie betreffen nur die Rechenoperationen (siehe auch Kapitel 2 im Buch Otto Forster, Analysis 1, Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen, elektronische CampusLizenz an der Uni Leipzig)

	Addition		Multiplikation	
(AA)	$(x + y) + z = x + (y + z)$	(MA)	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ Assoziativgesetz
(AK)	$x + y = y + x$	(MK)	$x \cdot y = y \cdot x$	$\forall x, y \in \mathbb{R}$ Kommutativgesetz
(AN)	$\exists 0 \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R} :\ 0 + x = x$	(MN)	$\exists 1 \in \mathbb{R} : (1 \neq 0\ \&\ \forall x \in \mathbb{R} : 1 \cdot x = x)$	neutrales Element
(AI)	$\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$	(MI)	$\forall x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0\, \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$	inverses Element
(DG)	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$			$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ Distributivgesetz

Bemerkung 2.1. Neutrale Elemente in (AN),(MN) sind eindeutig, dies macht die rechten Seiten in (AI),(MI) wohldefiniert.

Denn, z.B. wenn 1 und $1'$ beide neutrale Element der Multiplikation sind, dann gilt ja

$$1' \overset{(MN)x=1'}{=} 1 \cdot 1' \overset{(MK)}{=} 1' \cdot 1 \overset{(MN)x=1}{=} 1,$$

also insgesamt $1' = 1$. Dh, alle möglichen neutralen Elemente der Multiplikation sind in der Tat dasselbe Element.

Das neutrale Element der Addition wird als Null bezeichnet, das neutrale Element der Multiplikation als Eins.

Bemerkung 2.2. Wir sehen, ohne das Distributivgesetz wären die Addition und die Multiplikation fast gleichwertige("isomorphe") Operationen, man beachte allerdings den Ausschluss der Null in (MI). Erst dieses neunte Axiom bricht die weitgehende strukturelle Symmetrie zwischen diese beiden.

Bemerkung 2.3. Inverse Elemente in (AI),(MI) sind eindeutig für gegebenes x, siehe Satz 2.5 für eine allgemeinere Behauptung. Wir schreiben $-x$ bzw. x^{-1} für additives bzw. multiplikatives Inverses.

Bemerkung 2.4. Die 9 Körperaxiome charakterisieren $\mathbb{R}$ noch nicht, es gibt andere (noch zu diskutierende) Körper, welche diese ebenfalls erfüllen. Siehe, zB. Beispiel 2.11. Ein ganz trivialer Körper ist $\{0\}$ mit den Operationen $0 + 0 = 0 = 0 \cdot 0$. Um dieses Beispiel auszuschliessen, fordern wir im Folgenden **immer** $0 \neq 1$.

Satz 2.5. *Eindeutige Lösbarkeit von Gleichungen*

a) $\forall x, y \in \mathbb{R}\, \exists z \in \mathbb{R} : x + z = y$. Dieses z ist eindeutig und durch $z = y + (-x)$ gegeben.
b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0\, \exists z \in \mathbb{R} : xz = y$ Dieses z ist eindeutig und durch $z = y(x^{-1})$ gegeben.

Wir schreiben $z = y - x$ für die Lösung in a) und $z = y/x$ für die Lösung in b).

Beweis:

NuN die b). Analog zu a), aber um multiplikatives Inverses zu nutzen, brauchen wir gemäß (MI) dass $x \neq 0$, wie vorausgesetzt.

Sonst wie zuvor: wenn es ein z mit $x \cdot z = y$, dann erhalten wir durch Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit (x^{-1}) von links wieder eine Gleichheit, nämlich

$$(x^{-1})(xz) = (x^{-1})y.$$

Wir vertauschen die beiden Seiten und formen/vereinfachen die neue rechte Seite:

$$x^{-1} \cdot y = (x^{-1})(xz) \overset{MA}{=} ((x^{-1}x)z \overset{MI}{=} 1 \cdot z = \overset{MN}{=} z.$$

Somit ist $x^{-1}y = yx^{-1}$ der einzige Kandidat für z. Durch Einsetzen lässt sich leicht überprüfen, dass es eine(dh die einzige Lösung ist). Oder wir bemerken eben, dass sich der Übergang von der ersten zur zweiten Gleichung umkehren lässt indem wir letztere mit x von links multiplizieren. Das bedeutet, unsere **Umformungen** waren **äquivalent**. $\square$

Satz 2.6. $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \cdot x = 0.$

Korollar 2.7. *$\forall x \in \mathbb{R} : (-1) \cdot x = -x$.*

Beweis:

$$x + (-1) \cdot x = x \cdot 1 + x \cdot (-1) + = x \cdot (1 + (-1)) = x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0 = x + (-x).$$

Also $x + (-1) \cdot x = x + (-x)$ Daraus folgt mit Addition von $-x$ von links, oder aus Satz 2.5 (dessen Beweis genau dies tut), die Behauptung.

Satz 2.8. *$\forall x, y \in \mathbb{R} : xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ oder $y = 0)$.*
Algebraiker formulieren das als: Keine "Nullteiler" in $\mathbb{R}$ bzw einem Körper/ Integritätsbereich.

Beweis:

Lemma 2.9.

a) $\forall x \in \mathbb{R} : -(-x) = x$
b) $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0 : (x^{-1} \neq 0 \ \& \ (x^{-1})^{-1} = x)$

Beispiel 2.10. $z^2 = 1 \Leftrightarrow (z = 1$ oder $z = -1)$.

Beispiel 2.11. Ein endlicher Körper
$GF(3) = \{0, 1, 2\}$ mit folgenden Rechenregeln ("Restklassen modulo 3" - für Experten).

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

also $2^{-1} = 2$ und $2 = -1$ hier.

Die Überprüfung der neun Körperaxiome von hand ist möglich aber mühsam. (Einfacher gestaltet sich dies z.B. für $GF(2) = \{0, 1\}$ mit entsprechenden Rechenregeln, von denen nur $1 + 1 = 0$ nicht unmittelbar aus (AN),(MN) oder Satz 1.5 folgt). Es zeigt sich, das für jede Primzahl p ein Körper $GF(p)$ mit p Elementen existiert, und die Gültigkeit der Körperaxiome (AA),(MA),(AK),(MK),(AN),(MN) und (DG) folgt leicht aus ähnlichen Aussagen für die die natürlichen Zahlen ohne lästiges Probieren aller Einzelfälle.)

Bemerkung 2.12. *In den bisherigen Beweisen ließen sich die Schlussfolgerungen jeweils leicht aus den Axiomen herleiten. Wir brauchten noch keine feineren Methoden wie z.B. den indirekten Beweis (Widerspruchsbeweis). Dies wird sich im Folgenden ändern.*

Die bisher definierte Körperaxiome ermöglichen Rechnen mit Gleichungen, für das Rechnen mit Ungleichungen brauchen wir den Begriff der (An)Ordnung. (vergleiche Kapitel 3 in O.Forsters Buch) Primär muss man festlegen, welche Zahlen "postiv", d.h. größer als Null sind. Diese Zahlen müssen dann die im Folgenden angeführten Eigenschaften haben:

II. Anordnungsaxiome

Es gibt eine Menge $\mathbb{P}$ von reellen Zahlen (d.h. $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$), so dass

(O.1) $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt *genau* eine der Aussagen: $x \in \mathbb{P}$, $x = 0$, $-x \in \mathbb{P}$ "Trichotomie"

(O.2) Wenn $x \in \mathbb{P}$ & $y \in \mathbb{P}$ dann $x + y \in \mathbb{P}$ "Abgeschlossenheit bezüglich Addition"

(O.3) Wenn $x \in \mathbb{P}$ & $y \in \mathbb{P}$ dann $xy \in \mathbb{P}$ "Abgeschlossenheit bezüglich Multiplikation"

Definition 2.13. Wir sagen

$0 < x$ (d.h. x ist *positiv*) gdw. $x \in \mathbb{P}$; $0 > x$ (d.h. x ist negativ) gdw. $-x \in \mathbb{P}$
$x < y$ (d.h. y größer x) gdw. $0 < y - x$; $x > y$ (d.h. y kleiner x) gdw. $0 > y - x$
$x \leq y$ gdw. ($x < y$ oder $x = y$); $x \geq y$ gdw. ($x > y$ oder $x = y$)

Bemerkung 2.14. a) *jedes $x \in \mathbb{R}$ ist positiv, negativ oder null*

b) *nach Satz 1.5 gilt $x = y \Leftrightarrow 0 = y - x$, also $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y$ oder $x > y$ oder $x = y$*

c) *$x < y \Leftrightarrow -(x - y) = y - x \in \mathbb{P} \Leftrightarrow 0 > x - y \Leftrightarrow y > x$, also y grösser x genau dann wenn x kleiner y*

d) *$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{P}_0 = \mathbb{P} \cup \{0\}$ nichtnegativ*

Satz 2.15. *Transitivität der Ordnung* $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x < y \;\&\; y < z) \Rightarrow x < z$

Beweis

Bemerkung 2.16. *Also $(x \leq y \;\&\; y \leq z) \Rightarrow x \leq z$, mit $x < z$ falls zudem $x < y$ oder $y < z$.*

Lemma 2.17. *Translationsinvarianz* $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$

Beweis

Lemma 2.18. $\forall x, y, u, v \in \mathbb{R} : (x < y \;\&\; u < v) \Rightarrow x + u < y + v$

Beweis

Proposition 2.19. *Spiegelung* $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Leftrightarrow -y < -x$

Beweis

Lemma 2.20. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ *mit* $x < y : (0 < z \Rightarrow zx < zy), (0 > z \Rightarrow zx > zy)$

Beweis

Korollar 2.21. $\forall x, y, u, v \in \mathbb{R} : (0 \leq x < y \;\&\; 0 \leq u < v) \Rightarrow xu < yv$

Beweis

Satz 2.22. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0,$ *und* $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0.$

Beweis: Idee - mit vollständiger Fallunterscheidung.

Korollar 2.23. $0 < 1,$ *da* $1 = 1 \cdot 1 = 1^2$

Obwohl $1 > 0$ und auch die etwas allgemeinere Ungleichung $0 < x^2$, $x \neq 0$ sehr natürlich erscheinen, sind sie zentral für die weitere Entwicklung der Analysis! Weil in GF(3), siehe Beispiel 2.11, $1 + 1 + 1 = 0$ kann in diesem Körper keine geeignete Menge $\mathbb{P}$ "positiver" Elemente gefunden werden.

Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, dass umgekehrt jede positive reelle Zahl auch das Quadrat einer reellen Zahl ist. Dies wird noch ein weiteres (letztes) Axiom brauchen. Zuerst vollenden(zeigen) wir die Rechenregeln für Ungleichungen aus der Schule.

Proposition 2.24. $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

a) $x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0$

b) $0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$ *("Spiegelung an der 1")*

Beweis

a) Wenn $x > 0$, dann $x \neq 0$ und $x^{-1} \neq 0$ (Lemma 1.9.b)). Somit $0 < x^{-1}x^{-1}$ wegen Satz 1.22. Wegen $x > 0$ zeigt Lemma 1.20, dass

$$0 = x \cdot 0 < x(x^{-1} \cdot x^{-1}) = (x \cdot x^{-1})x^{-1} = 1 \cdot x^{-1} = x^{-1}.$$

Umgekehrt, da $(x^{-1})^{-1} = x$ folgt aus dem gerade Gezeigten die Umkehrimplikation.
b) Da $0 < x, y$ gilt nach Teil a), dass $0 < x^{-1}, y^{-1}$ und also $0 < x^{-1}y^{-1}$. Nun nutzen wir wieder Lemma 1.20, um

$$0 = 0(x^{-1}y^{-1}) < y^{-1} = x(x^{-1}y^{-1}) < x^{-1} = y(x^{-1}y^{-1})$$

zu folgern.

Beispiel 2.25. *Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $x > 0$ sowie $y > 0$. Dann gilt $x < y$ genau dann wenn $x^2 < y^2$.*

Beweis

Beispiel 2.26. *Wenn $x, y \in \mathbb{R}$, dann folgt aus $x^2 + y^2 = 0$, dass $x = y = 0$.*

Beweis: Idee Widerspruch und Satz 2.22.

Beispiel 2.27. *Sei $0 < x < y$ und möge $\sqrt{xy}$ existieren (dh. positive Zahl, deren Quadrat xy ist). Dann gilt die AG-Ungleichung (zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel)*

$$y > \frac{x+y}{2} > \sqrt{xy} > x.$$

Beweis: Idee - für die mittlere Ungleichung quadrieren (nutze Bsp 2.25) und quadratische Ergänzung (dh nutze binomischen Formel für Quadrate).

Absolutbetrag, Maximum und Minimum

Definition 2.28. *Sei $x \in \mathbb{R}$, wir definieren den Betrag von x als*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{wenn } x > 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \\ -x & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Bemerkung 2.29. i) *wichtige geometrische Bedeutung: $|x-y|$ Abstand von x zu y*

ii) *aus der Definition (mit* **F***all***U***nterscheidung $x >, =, < 0$) folgt leicht*
$x \leq |x| = |-x|$, $|x| \geq 0$ *mit "=" gdw.* $x = 0$

Lemma 2.30. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

a) $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$ *(und dann $y \geq 0$),*

b) *Sei $\sigma \in \{-1, 1\}$ dann $\sigma x \leq |x|$, und falls $x \geq 0$ dann $|\sigma x| = |x| = x$.*

Beweis: a) Wenn $-y \leq x \leq y$ dann $x \leq y$ und $-x \leq y$. Da $|x| \in \{x, -x\}$, folgt $|x| \leq y$. Umgekehrt, wenn $|x| \leq y$ dann sicher $y \geq 0$ und entweder $x \geq 0$ und somit $y \geq |x| = x \geq 0 \geq -y$ oder $x < 0$ und also $y \geq |x| = -x \geq 0 \geq -y$ impliziert nach Prop. 2.19 $-y \leq -(-x) = x \leq -(-y) = y$. **b)** nutze Bem 2.29.ii).

Definition 2.31. *Sei $x \in \mathbb{R}$, wir definieren das Signum (entspricht Vorzeichen) von x als*

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x > 0 \\ -1 & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Bemerkung 2.32. $\operatorname{sgn}(0)$ *wird im Allgemeinen und in dieser VL als* 1 *definiert, auch* -1 *ist möglich und ebenfalls* $\operatorname{sgn}(0) = 0$ *wird gelegentlich in der Literatur verwendet. In jedem Falle gilt, wie der zweite Punkt in 2.29 (oder direkte FU) zeigt*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad |x| = \operatorname{sgn}(x) \cdot x \text{ und } x = \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|.$$

Dies hilft oftmals, lästige FUen einzusparen.

Satz 2.33. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$*

a) $|xy| = |x||y|$ *Multiplikativität*

b) $|x+y| \leq |x| + |y|$ *Dreiecks-Ungleichung!*

Beweis: Ideen Nutze Lemma 2.30b), für a) mit $\operatorname{sgn}(x)$ und $\operatorname{sgn}(y)$, für b) mit $\operatorname{sgn}(x+y)$.

Definition 2.34. *Seien $x, y \in \mathbb{R}$ gegeben, wir definieren dann*

$$\min(x,y) = \begin{cases} x & \textit{wenn } x \le y \\ y & \textit{wenn } x > y \end{cases}, \ \textit{und} \ \max(x,y) = \begin{cases} y & \textit{wenn } x \le y \\ x & \textit{wenn } x > y \end{cases}.$$

Lemma 2.35. *Für alle $x \in \mathbb{R}$*

$$\max(x,y) = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2} \ \textit{und} \ \min(x,y) = \frac{x+y}{2} - \frac{|x-y|}{2}.$$

Beweis FU:

Die geometrische Bedeutung dieser Formel ist klar: gehe von der Mitte $\frac{x+y}{2}$ zwischen zwei Zahlen x, y den halben Abstand $\frac{|x-y|}{2}$ der beiden Zahlen in positive Richtung und gelange zur grösseren der beiden Zahlen. Analog für $\min(x, y)$.

Mittels $\max(x, y, z) = \max(x, \max(y, z))$ usw. ist Maximum und analog Minimum für beliebige "endliche" (noch zu definieren!) Mengen reeller Zahlen definiert. Diese größten und kleinsten Elemente einer Menge existieren nicht mehr, wenn wir, wie im Folgenden, allgemeine unendliche Mengen betrachten.

Beispiel 2.36. *$M = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ hat kein Minimum, das heißt es gibt kein kleinstes Element in dieser Menge.*

Beweis indirekt

Definition 2.37. *Sei $M \subset \mathbb{R}$ beliebig*

a) *$s \in \mathbb{R}$ ist $\max M$, das Maximum der Menge M, wenn $s \in M$ und $\forall x \in M : x \le s$.*
$s \in \mathbb{R}$ ist $\min M$, das Minimum der Menge M, wenn $s \in M$ und $\forall x \in M : x \ge s$

b) *$s \in \mathbb{R}$ ist obere Schranke (**OS**) für M wenn $\forall x \in M : x \le s$, $s \in \mathbb{R}$ ist untere Schranke (**US**) für M wenn $\forall x \in M : x \ge s$*

- *$s \in \mathbb{R}$ ist **Supremum** von M ($s = \sup M$) wenn s die kleinste aller oberen Schranken von M ist, d.h.*

$$(\forall x \in M : x \le s) \ \& \ (\forall t \ \textit{OS von } M : t \ge s).$$

- *$s \in \mathbb{R}$ ist **Infinimum** von M ($s = \inf M$) wenn s die größte aller unteren Schranken von M ist, d.h.*

$$(\forall x \in M : x \ge s) \ \& \ (\forall t \ \textit{US von } M : t \le s).$$

- *M ist von oben (bzw. unten) beschränkt wenn es eine obere (bzw. untere Schranke) für M gibt. M beschränkt wenn von unten und oben beschränkt.*

Beispiel 2.36. *(Fortsetzung) $M = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ hat keine OS, s ist US gdw. $s \leq 0$, also $\inf M = 0$ aber $\sup M$ existiert nicht.*

Beweis

Die Existenz von inf und sup wann immer es entsprechende Schranken gibt, gilt nicht nur für so einfache Mengen wie dieses M (Intervall), sondern im Allgemeinen. Das unterscheidet $\mathbb{R}$ von anderen Körpern und ist formuliert im letzten noch benötigten

III. Vollständigkeitsaxiom

(VA) Für jede nichtleere und von oben beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ existiert das Supremum $\sup M$.

Lemma 2.38. *Sei M eine Menge reeller Zahlen, dann ($\exists \max M \Leftrightarrow \sup M \in M$)*

Beweis

Proposition 2.39. *Sei $M \subset \mathbb{R}$ nichtleer und von oben beschränkt, $s \in \mathbb{R}$. Dann*

a) $s \geq \sup M \Leftrightarrow \forall m \in M : m \leq s$

b) $s = \sup M \Leftrightarrow (\forall m \in M : m \leq s \;\&\; \forall \varepsilon > 0 \;\exists m \in M : s - \varepsilon < m)$

Approximationsprinzip

Beweis

Lemma 2.40. *Seien $M, N \subset \mathbb{R}$ nichtleer und von oben beschränkt. Dann*

a) $\inf(-M) = -\sup M$,

b) $\sup(M+N) = \sup M + \sup N$,

wobei $-M = \{-m : m \in M\}$ ist die "Spiegelung" von M, und $M + N = \{m + n : m \in M \;\&\; n \in N\}$ die Summe der beiden Mengen ist.

Beweis Teil a) siehe ÜZ4. Teil b) etwas schwerer - aber nicht wirklich schwer: nutzen Approximationseigenschaft und $\frac{\varepsilon}{2}$-Trick.

Nun die erste überraschende und wichtige Konsequenz des Vollständigkeitsaxioms.

Satz 2.41. *Für alle positiven reellen x existiert ein eindeutiges $w > 0$, so dass $w^2 = x$.*

Wir schreiben für diese Zahl $w = \sqrt{x}$ und nennen sie Wurzel aus(von) x.
Beweis Eindeutigkeit schon gezeigt. Die Schlüsselidee für Existenz ist zu zeigen, dass $w^2 = x$ wobei $w = \sup\{y > 0 \;:\; y^2 < x\}$. Hierfür sowohl $w^2 > x$ als auch $w^2 < x$ durch "Linearisierung der Quadratfunktion" zu Widersprüchen führen.

Dass heißt, z_z die Ungleichungen $x^2 > 2$ und $x^2 < 2$ bleiben gültig wenn x nur "wenig" geändert wird. Hierzu explizite (und geeignete! - je nach Typ der Ungleichung) Vereinfachungen von $(x+\delta)^2 = x^2 + 2\delta x + \delta^2$ finden. Stabilität von Ungleichungen wie $f(x) > y$ hat mit "Stetigkeit" der Funktion f zu tun - diese erhalten wir später allgemeiner ohne explizites Rechnen ("softer") für den "Zwischenwertsatz". Deshalb diesen Beweis verstehen!!

Zahlbereiche

Nachdem wir alle grundlegenden Axiome für $\mathbb{R}$ eingeführt und erste Anwendungen gesehen haben, benennen wir noch wichtige Teilmengen von $\mathbb{R}$ – wie die natürlichen, die ganzen und die rationalen Zahlen.

Definition 2.42. *$M \subset \mathbb{R}$ heißt* induktiv *wenn $1 \in M$ und $\forall n \in \mathbb{R} : n \in M \Rightarrow n+1 \in M$.*

zB $\mathbb{R} \supset (0, \infty) \supset [1, \infty) \supset \{1\} \cup [2, \infty)$ sind 4 verschiedene induktive Mengen.

Satz 2.43. *Es gibt eine* kleinste *induktiven Menge, dh. sie ist Teilmenge jeder induktiven Menge. Diese kleinste induktive Menge ist eindeutig, wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet und ihre Elemente werden natürliche Zahlen genannt.*

Beweis- Idee: der Durchschnitt der Familie aller induktiven Mengen ist induktiv - das heißt, wir definieren

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{R} \ : \ \text{wenn } M \subset \mathbb{R} \text{ dann } n \in M \ \},$$

und zeigen dieses $\mathbb{N}$ ist induktiv - trivialerweise die kleinste.

Korollar 2.44. *(Schwaches) Induktionsprinzip: M induktiv $\Rightarrow \mathbb{N} \subset M$. Also wenn P eine mathematische Aussage ist, so dass: $P(1)$ wahr ist und für alle $n \in \mathbb{N}$ aus $P(n)$ wahr auch $P(n+1)$ wahr folgt, dann gilt $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis- Idee: Nur überprüfen, dass die Menge M aller $n \in \mathbb{N}$, für die $P(n)$ gilt, induktiv ist. Aber das ist ja trivial!

Bemerkung Wenn $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, dann $(0 \in M$ und $(n \in M \Rightarrow n+1 \in M))$ impliziert $\mathbb{N}_0 \subset M$, da $0+1 \in M$ also M induktiv und somit $\mathbb{N} \subset M$, Also wenn P mathematische Aussage, so dass: $P(0)$ und $\forall n \in \mathbb{N}_0 : P(n) \Rightarrow P(n+1)$, dann gilt $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Definition 2.45. Summen-und Produktsymbol *Für $n, m, k \in \mathbb{N}_0$ setzen wir ("rekursive Definition")*

$$\sum_{k=n}^{n-1} a_k = 0 \text{ (leere Summe) }, \forall m \geq n-1 : \sum_{k=n}^{m+1} a_k = \left(\sum_{k=n}^{m} a_k \right) + a_{m+1}$$

$$\prod_{k=n}^{n-1} a_k = 1 \text{ (leeres Produkt) }, \forall m \geq n-1 : \prod_{k=n}^{m+1} a_k = \left(\prod_{k=n}^{m} a_k \right) \cdot a_{m+1}$$

$$a^n = \prod_{k=1}^{n} a, \text{ Potenz } \quad (a^0 = 1 \text{ wenn } a \neq 0), n! = \prod_{k=1}^{n} k, \text{ Fakultät } \quad (0! = 1)$$

Mit Induktion kann man zeigen, diese Symbole sind für $a_k \in \mathbb{R}$ immer wohl definiert.

Satz 2.46. *Bernoullische Ungleichung:*
a) $\forall n \in \mathbb{N} \, \forall x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1 : \quad (1+x)^n \geq 1 + nx$.
b) Überdies gilt $\forall n \in \mathbb{N} \, \forall x \in \mathbb{R}$ wenn $n \geq 2 (= 1+1)$ und $(x \geq -1 \;\&\; x \neq 0)$ dann

$$(1+x)^n > 1 + nx. \qquad (*)$$

Beweis-Idee: Falls $n = 1$ oder $x = 0$ sind Behauptungen a) and b) trivial. Also oBdA $x \neq 0$ und $n \neq 1, \Rightarrow n \geq 2$ (wird noch gezeigt). Somit b) z_z, hierzu fixieren wir $x \in [-1, 0) \cup (0, \infty)$, betrachten die Aussage
$P(n) (= P_x(n)) : (n = 1$ oder $(*)$ gilt) und beweisen sie mit Induktion.

Proposition 2.47. *Für* $n \in \mathbb{N}$ *sei* $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. *Dann* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$.

Beweis Idee: zB $\frac{a_m}{a_{m-1}} > 1$ für $m(= n+1) \in \mathbb{N}$ mit Bernoullischer Ungleichung 2.26.a) beweisen (Dieser (Doppel)Bruch ist einfacher zu behandeln, schließlich nur m^2 im Nenner). Keine Induktion nötig!

Definition 2.48. *Für* $n, k \in \mathbb{N}_0$ *ist der Binominalkoeffizient definiert durch*

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(= \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k(k-1)\cdot\ldots\cdot 1}\right) & \textit{für } 0 \le k \le n \\ 0 & \textit{wenn } k > n. \end{cases}$$

$$\text{z.B.} \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = n, n > 0, \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, 0 \le k \le n.$$

Lemma 2.49. *Vom Pascalschen Dreieck*

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \forall k \in \mathbb{N} : \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Beweis Wenn $k > n$ Definition direkt nutzen, sonst Bruchrechnung.

Satz 2.50. Binominalsatz *Mit der (Zusatz)Vereinbarung* $0^0 = 1$ *gilt*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}_0 : (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Beweis Idee: Induktion in n. Enstehen $\sum_{k=0}^{n}$ und $\sum_{k=1}^{n+1}$, den gemeinsamen Teil $\sum_{k=1}^{n}$ mit Lemma 2.49 behandeln.

Obwohl wir $\mathbb{N}$ über die Eigenschaft induktive Menge definiert haben, erlaubt es als Zahlenbereich, die Rechenoperationen, wie aus der Elementarmathematik gewohnt, auszuführen.

Lemma 2.51.

$$\forall n, m \in \mathbb{N}: \; n + m \in \mathbb{N} \;\&\; n \cdot m \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Idee – mit Induktion, zuerst für beliebiges aber fixes $n \in \mathbb{N}$ Induktion in m machen für die Addition. Dies dann nutzen, um wieder für beliebiges aber fixes $n \in \mathbb{N}$ Induktion in m für die Multiplikation zu machen. $P_n^+(m) : n{+}m \in \mathbb{N}$, $P_n^\cdot(m) : n{\cdot}m \in \mathbb{N}$. P_n^+ — DIY, für $P_n^\cdot(m) \Rightarrow P_n^\cdot(m+1)$ nutzen Distributivgesetz und den Teil für "+".

Lemma 2.52.

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; n = 1 \textit{ oder } (n > 1 \;\&\; n - 1 \in \mathbb{N}).$$

Insbesondere ist $1 = \min \mathbb{N}$.

Beweis- Idee: $[1, \infty) \supset \mathbb{N}$ da induktiv und $M = \mathbb{N} \setminus \{n\}$ echte Teilmenge von $\mathbb{N}$ also keine induktive Menge.

Oder Induktion in n – Standard: Nennen obige Aussage $P(n)$, dann $P(1)$ trivial.

Nun z_z, dass $\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Da $1 = 1^2 > 0$ folgt $2 = 1 + 1 > 1$ und $2 - 1 = 1 \in \mathbb{N}$, also gilt $P(2)$ und somit obige Implikation für $n = 1$.

Sonst $n \neq 1$ und weil $P(n)$ gilt also $n > 1$. Damit $n + 1 > n > 1$ und wie zuvor $(n + 1) - 1 \in \mathbb{N}$, also wieder $P(n + 1)$ wahr. $\square$

Satz 2.53.

$$\forall n, m \in \mathbb{N}: \ n \leq m \ \textit{oder} \ n - m \in \mathbb{N}. \quad (: P_n(m))$$

Beweis-Idee: für fixes n Induktion in m, hierbei Lemma 2.52 für $m = 1$ und $k = n - m$ nutzen.

Wir haben also gezeigt: $m < n$ in $\mathbb{N} \Rightarrow m \leq n - 1$, denn $n - m \in \mathbb{N}$ also $n - m \geq 1$.

Definition 2.54. $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$ *sind die ganzen Zahlen.*

Proposition 2.55. *a)* $\mathbb{Z} = \mathbb{N} - \mathbb{N} = \{n - m \,:\, n, n \in \mathbb{N}\}$.
b) (Deshalb) $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x + y, x - y, x \cdot y \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Idee - In a) nur $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N} - \mathbb{N}$ nichttrivial, nutzen Lemma 2.53. Für b): nutze a) und Lemma 2.51 (mit oder ohne FU).

Definition 2.56. $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \,:\, p \in \mathbb{Z} \;\&\; q \in \mathbb{N}\}$ *sind die rationalen Zahlen. Also* $q \neq 0$*!*

Klarerweise $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Bemerkung 2.57. $(\mathbb{Q}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}})$ *mit* $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{P} \cap \mathbb{Q}$ *erfüllt die 9 Körperaxiome und die 3 Anordungsaxiome, dies lässt sich einfach überprüfen — da* $\frac{p}{q}\frac{m}{n} = \frac{pm}{qn}$ *und* $\frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{pn+qm}{qn}$*, führen die Operation* $+, \cdot$ *von* $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ *nach* $\mathbb{Q}$ *zurück,* $-\frac{p}{q} = \frac{-p}{q}$ *und* $(\frac{p}{q})^{-1} = \frac{q}{p}$ *für* $p > 0$*,* $(\frac{p}{q})^{-1} = \frac{-q}{-p}$ *für* $p < 0$ *zeigt die Existenz der Inversen in* $\mathbb{Q}$*.*

Starke Induktion

mal etwas Neues

Satz 2.58. Wohlordnung der natürlichen Zahlen *Sei* $M \subset \mathbb{N}$ *nichtleer, dann existiert* $\min M$.

Beweis Idee – Für beliebiges aber fixes solches M mit Induktion (Korollar 2.44) in n zeigen:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists m \in M : m \leq n \Rightarrow \exists \min M.$$

Korollar 2.59. Starkes Induktionsprinzip *Sei* P *eine mathematische Aussage, so dass* $P(1)$ *und* $\forall n \in \mathbb{N} : (\forall k \in \mathbb{N} : k \leq n \Rightarrow P(k)) \Rightarrow P(n+1)$. *Dann gilt* $P(n)$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis Idee: Betrachte $M = \{n \in \mathbb{N} \ : \ P(n) \text{ falsch } \}$. Falls $M \neq \emptyset$ gibt es einen Widerspruch für $n = \min M - 1 \in \mathbb{N}$ da wegen $P(1)$ sicher $\min M \neq 1$.

Bemerkungen

- auch als Prinzip der "least criminals" bekannt, eine gute Übersetzung wäre: die kleinsten/ersten "Bösewichte" im Sinne von minimalen Gegenbeispielen. Es ist oftmals einfacher, die Existenz solcher als die Existenz allgemeiner Gegenbeispiele auszuschliessen.
- warum *starkes* Induktionsprinzip genannt: Um das entscheidende $P(n+1)$ zu beweisen, können wir nunmehr $P(1), P(2), \ldots, P(n)$ voraussetzen. Bisher konnten wir nur $P(n)$ annehmen und also haben wir nun eine "stärkere" Beweismethode, die es erlaubt, mehr und "stärkere" Aussagen zu beweisen.
- eine einfacherere (meine Liebings-)Formulierung, die allerdings von der bekannten Formulierung "$\Rightarrow P(n+1)$" abweicht ist folgende.

  Sei P eine mathematische Aussage, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ $P(n)$ gilt, falls $\forall k \in \mathbb{N} : k < n \Rightarrow P(k)$. Dann gilt $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

  (DIY: zB $P(1)$ gilt dann)

Definition 2.60. *Wir sagen p ist Primzahl, wenn* $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ *und*
$$(p = n \cdot m, \ \text{mit } n, m \in \mathbb{N}) \Rightarrow (n = 1 \ \text{oder } m = 1)).$$
Behauptung: *Jedes* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n > 1$ *ist Produkt (eventuell einfaktorieles) endlich vieler Primzahlen. (Die Eindeutigkeit der Produktdarstellung ist viel tiefliegender!)*

Beweis: Mit starker Induktion einfachst, mit Kor. 2.44 (schwache Induktion) unklar!

Lemma 2.61. $\forall n \in \mathbb{N} : (\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k$ *oder* $\exists l \in \mathbb{N} : n = 2l - 1)$*, und nur einer der Fälle tritt ein. (nennen* n *dann gerade bzw ungerade).*

Beweis: Induktion, Widerspruch zu $1 = \min \mathbb{N}$ für Eindeutigkeit des Falles.

Satz 2.62. *(Der Klassiker)* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$*, d.h. die Diagonale im Einheitsquadrat ist irrational.*

Beweis: Idee- Mit $\lightning$, betrachte eine Bruchdarstellung mit kleinstem Nenner. Zeige Zähler & Nenner gerade, wir können also kürzen! $M = \{q \in \mathbb{N} \ : \ \exists p \in \mathbb{N} : p^2/q^2 = 2\} \neq \emptyset$.

Rational versus Reell

Weil nicht alle reellen Zahlen rational sind, müssen wir das Verhältnis von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ studieren. Wir beginnen mit der folgenden Aussage, die auf Archimedes zurückgeführt wird, obwohl er Eudoxos von Knidos als Urheber erwähnt. Die Bezeichnung "Axiom" ist zwar in der Literatur aus historischen Gründen üblich, in der Theorie der reellen Zahlen jedoch unbegründet, da es sich hier um eine Konsequenz aus unseren 13 Axiomen handelt.

Satz 2.63. (Archimedisches "Axiom") *Die Menge* $\mathbb{N}$ *der natürlichen Zahlen ist in* $\mathbb{R}$ *nicht von oben beschränkt.*

Beweis: Idee: Mit $\lightning$, betrachte dazu $\sup \mathbb{N}$ und Approximationsprinzip.

Korollar 2.64. (Eudoxos) $\forall x \in \mathbb{R} : x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$

Beweis: Idee: folgt direkt aus dem Archimedischen Axiom.

Nunmehr können wir zeigen, dass obwohl nicht alle Zahlen rational sind, die rationalen Zahlen zumindest alle Zahlen gut annähern können.

Satz 2.65. (Rationale Zahlen sind dicht) *Für alle* $x < y$ *reell existiert* $z \in \mathbb{Q}$*, die* $x < z < y$ *erfüllt.*

Beweis: Idee: Erst nach $\mathbb{R}_+$ verschieben. Nun führen kleine Schritte zum Ziel!

Die komplexen Zahlen

Als letzten Körper führen wir die komplexen Zahlen ein, in diesem Körper ist die in $\mathbb{R}$ unlösbare Gleichung $x^2 + 1 = 0$ leicht lösbar.

Definition 2.66. *Wir betrachten* $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \,:\, a, b \in \mathbb{R}\}$ *mit den Operationen*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Dann ist $\mathbb{C}$ ein Körper mit Nullelement $(0, 0)$ (neutral für "+") und Einselement $(1, 0)$ (neutral für "·").

Bemerkung 2.67.

- *nur die Axiome (MA), (MK) und (DG) erfordern etwas Arbeit*
- *für* $(a, b) \neq (0, 0)$ *ist* $(a/(a^2 + b^2), -b/(a^2 + b^2))$ *das mulitiplikative Inverse !!*
- $\mathbb{R} \equiv \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C}$, *d.h.* $x \to (x, 0)$ *gibt* $\mathbb{R}$ *als Unterkörper von* $\mathbb{C}$ *- wir haben* $x + y \to (x, 0) + (y, 0)$ *und* $x \cdot y \to (x, 0) \cdot (y, 0)$
- $(0, 1)^2 = (-1, 0)$**!!** *Wir schreiben* i *für* $(0, 1)$ *und* $a + bi$ *für* (a, b) *Somit* $i^2 = -1$ *und* $\mathbb{C}$ *kann* nicht *angeordnet werden, d.h. es gibt kein* $\mathbb{P} \subset \mathbb{C}$, *das (O.1), (O.2) und (O.3) erfüllt.*
- *Definition von "·" lässt sich "motivieren" aus Körperaxiomen und* $(0, 1)^2 = (-1, 0)$.

Definition 2.68. *Für* $z = a + bi = (a, b) \in \mathbb{C}$ *definieren wir*

$$Re(z) = a, Im(z) = b, |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ Realteil, Imaginärteil und Betrag von } z$$

sowie

$$\bar{z} = a - bi \text{ die zu } z \text{ komplex konjugierte Zahl.}$$

Wie in $\mathbb{R}$ ist $|z|$ der Abstand von z zum Ursprung ($\mathbb{C}$ wird mit der Euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ identifiziert).

Lemma 2.69. $\forall z, w \in \mathbb{C}$

a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ *!*

b) $\overline{\overline{z}} = z, |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = |\bar{z}|, Re(z) = (z + \bar{z})/2, Im(z) = (z - \bar{z})/2i.$

Beweis: Zweite Teilbehauptung von a) in der Tat entscheidend, zB Satz 2.70.c) & d).

Satz 2.70. *Für alle* $z, w \in \mathbb{C}$

a) $|Re(z)| \leq |z|, |Im(z)| \leq |z|$ *und* $|Re(z)| = |z| \Leftrightarrow Im(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

b) $|z| \geq 0, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ *(wie in* $\mathbb{R}$*)*

c) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ *Multiplikativität* *(wie in* $\mathbb{R}$*)*

d) $|z + w| \leq |z| + |w|$ Δ*-Ungleichung* *(wie in* $\mathbb{R}$*)*

Beweis:

ENDE VL8 11.11.24 (minus rat versus reel)

Proposition 2.71. Komplexe Quadratwurzeln *Für gegebenes* $c \in \mathbb{C}$ *suchen wir* alle *(da kein "Positives" ausgezeichnet ist)* $w \in \mathbb{C}$ *mit* $w^2 = c$.

Hierbei $w^2 = 0 \Leftrightarrow w = 0$, *und wenn* $c \neq 0$ *dann ist*

$$w_1 = \sqrt{\frac{|c| + Re(c)}{2}} + \sigma \sqrt{\frac{|c| - Re(c)}{2}} i \text{ wo } \sigma = \begin{cases} 1 & \text{für } Im(c) \geq 0 \\ -1 & \text{für } Im(c) < 0 \end{cases}$$

eine Lösung, die einzige andere Lösung ist $w_2 = -w_1$.

Jede quadratische Gleichung

$$0 = z^2 + az + b = (z + \frac{a}{2})^2 - (\frac{a^2}{4} - b) = (z + \frac{a}{2} + w)(z + \frac{a}{2} - w)$$

wobei $w^2 = \frac{a^2}{4} - b$ *kann somit in* $\mathbb{C}$ *gelöst werden.*

Beweis:

Im Zusammenhang mit der Exponentialfunktion und der Eulerschen Formel werden wir bald einen geometrischeren Zugang zu den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ finden, der diese als Ebene und die Rechenoperationen als geometrische Verschiebungen und Drehstreckungen interpretiert.

Zum Beispiel, wenn $(0, z, w) \in \mathbb{C}$ ein Dreieck Δ in der komplexen Ebene darstellt und $u \in \mathbb{C}$, dann hat das Dreieck $(0+u = u, z+u, w+u)$ wieder Seiten der Länge $|z|, |w|, |z-w|$ (also kongruent und parallel zu Δ) und das Dreieck $(0 \cdot u = 0, z \cdot u, w \cdot u)$ Seiten der Länge $|z| \cdot |u|, |w| \cdot |u|, |z-w| \cdot |u|$, ist also ähnlich zu Δ und hat somit gleiche Winkel.

3. Folgen und Reihen

Definition 3.1. *Eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$ (in $\mathbb{C}$,M) ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad n \mapsto a_n$ ($n \mapsto z_n \in \mathbb{C}$, $n \mapsto x_n \in M$), dh. jedem $n \in \mathbb{N}$ ist ein Folgenglied a_n (z_n, x_n) zugeordnet.*

Definition 3.2. *Sei $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ Folge in $\mathbb{C}$. Wir sagen, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ hat* Grenzwert *$z \in \mathbb{C}$ wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N (= N_\varepsilon) \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |z - z_n| < \varepsilon.$$

Folge heißt konvergent, wenn sie einen Grenzwert hat, sonst divergent.

Bemerkung
a) die vollkommen analoge Definition wird benutzt für den reellen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ und die reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, da $|a_n - a|_{\mathbb{R}} = |a_n - a|_{\mathbb{C}}$, konvergieren reelle konvergente Folgen auch in $\mathbb{C}$.

b) die Annahme, dass $N = (N_\varepsilon) \in \mathbb{N}$, also eine natürliche Zahl ist, ist nicht wirklich notwendig und wird im Folgenden ausgelassen, auch wenn sie in der Literatur sehr oft gemacht wird. In der Tat, wenn für ein gegebenes $\varepsilon > 0 \; \exists N (= N_\varepsilon) \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |z - z_n| < \varepsilon$, dann gibt es nach dem Archimedes' Axiom ein $\hat{N} \in \mathbb{N}$ mit $\hat{N} > N$ und also $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq \hat{N} \Rightarrow n \geq N \Rightarrow |z - z_n| < \varepsilon$.

Satz 3.3. *Jede konvergente Folge hat* genau *einen Grenzwert.*

Beweis: Idee: Dreiecksungleichung benutzen, Abstand zwischen zwei (potentiellen) GWen ist "beliebig klein".

Wir schreiben $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ oder auch ($z_n \to z$ für $n \to \infty$) wenn die Folge $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ den Grenzwert z hat.

Definition 3.4. *Eine Folge ist* Nullfolge (**NF**) *wenn $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.*

Beispiel 3.5. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, *siehe Eudoxos 2.64.*

Definition 3.6. $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ *eine beschränkte Folge* **BF** *wenn* $\exists M \, \forall n \geq 1 : |z_n| \leq M$, *d.h. es gibt einen (vielleicht großen) Kreis, der die gesamte Folge enthält. (Reelle Folge genauso: ist beschränkt wenn in einem endlichen Intervall* $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Proposition 3.7. a) *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*
b) *Sei* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ *Nullfolge und* $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ *beschränkt, dann ist* $(z_n u_n)_{n=1}^{\infty}$ *wieder Nullfolge*

Beweis-Idee: Δ-Ungleichung und 2.70.c) - Multiplikativität des Betrages.

Lemma 3.8. a) *Sei* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ *eine komplexe Folge und* $z \in \mathbb{C}$, *dann*

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n \Leftrightarrow (z - z_n)_{n=1}^{\infty} \text{ Nullfolge} \Leftrightarrow (|z - z_n|)_{n=1}^{\infty} \text{ reelle Nullfolge.}$$

b) *Wenn* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ *Nullfolgen sind, dann ist* $(z_n + u_n)_{n=1}^{\infty}$ *auch eine Nullfolge.*

Beweis–Idee: a) offensichtliche Reformulierung, für b) die Δ-UGl.

Korollar 3.9. Algebra für Grenzwerte *Seien* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ *konvergente Folgen in* $\mathbb{C}$

a) $\forall \alpha \in \mathbb{C} : \lim_{n\to\infty}(z_n + \alpha w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n + \alpha \lim_{n\to\infty} w_n$ *(*$\alpha = \pm 1$ *wichtig)*
b) $\lim_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} w_n$
c) *Wenn* $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$ *dann g* $\exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N : \, z_n \neq 0$ *und* $(z_n^{-1})_{n=N}^{\infty}$ *hat Grenzwert* $(\lim_{n\to\infty} z_n)^{-1} = \lim_n z_n^{-1}$.

Beweis-Idee: einfachst mit Prop 3.7 und Lemma 3.8

Bemerkung: Es gab am 14.11.25 eine lebhafte Diskussion (in der VL und danach), ob ein anderer als unser Grenzwertbegriff möglich bzw "besser" ist. Insbesondere wurde ein Konzept erwähnt, dass im allgemeinen als **H**äufungs**P**unkt bekannt.

Wenn $(a_n)_1^\infty$ eine reelle oder komplexe Folge ist, dann ist a ein Häufungspunkt wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : |a - a_n| < \varepsilon$$

.

Man kann leicht sehen, dass a ein HP der Folge $(a_n)_1^\infty$ ist genau dann wenn es eine strikt wachsende Folge $(n_k)_1^\infty$ gibt, so dass $\lim_{k\to\infty} a_{n-k} = a$, dies ist aber hier nicht notwendig zu überprüfen.

In jedem Falle lässt sich zeigen, dass jede beschränkte Folge mindest einen HP aber eventuell auch unendlich viele HP hat. Dieser Begriff scheint also viel nützlicher als der des GW, denn letzterer existiert oftmals gar nicht. Er hat aber einen entscheidenden Nachteil: es gibt keine Entsprechung zu Korollar 3.9, keine "Algebra für Häufungspunkte", zB ist die Menge der HP von $(a_n + b_n)_1^\infty$ ist durch die Mengen der HP von $(a_n)_1^\infty$ und von $(b_n)_1^\infty$.

Als Beispiel betrachten wir die Folgen $\hat{a}$ mit $a_n = (-1)^n$ und $\hat{b}$ mit $b_n = (-1)^{n+1} = -a_n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Es ist leicht zu überprüfen, dass $HP(\hat{a}) = HP(\hat{b}) = \{-1, 1\}$ gleich sind, aber
$HP(\hat{a} + \hat{a}) = HP((2(-1)^n)_1^\infty) = \{-2, 2\}$ und gleichzeitig $HP(\hat{a} + \hat{b}) = HP((0)_1^\infty) = \{0\}$!

Beispiel 3.10. a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+23}{n^2+2024n+42} = 2$

b) *Wenn* $0 < t < 1$, *dann* $\lim_{n\to\infty} t^n = 0$.

c) *Wenn* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| < 1$ *dann* $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$ *und* $\forall k \in \mathbb{N} :\ \lim_{n\to\infty} n^k z^n = 0$

Beweis—Ideen in a) geschickt kürzen schafft viele Nullfolgen, dann Algebra für GW, b) Bernoulli gibt $\frac{1}{t^n} > \frac{1}{\varepsilon}$ wenn $n > N = \frac{1}{((1/t)-1)\varepsilon}$, c) $Z_z \exists C_k \in (0, \infty) \forall n : |n^k z^n| \leq C_k (\frac{1+|z|}{2})^n$.

Konvergenz in $\mathbb{C}$ kann auf Konvergenz reeller Folgen zurückgeführt werden:

Proposition 3.11. *Sei $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ eine komplexe Folge.*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z| = 0 \Leftrightarrow (\lim\limits_{n\to\infty} Re(z_n) = Re(z)\ \&\ \lim\limits_{n\to\infty} Im(z_n) = Im(z))$.

b) *wenn $z_n \in \mathbb{R}$ für alle n, und $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ dann $z \in \mathbb{R}$.*

Beweis: DIY

Somit hat eine reelle Folge einen Grenzwert im Reellen genau dann wenn sie einen Grenzwert im Komplexen hat. Vergleiche mit der Situation bzgl. $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$!

Nun zum Zusammenhang von Konvergenz und Ungleichungen.

Satz 3.12. *Möge $a_n \to a, b_n \to b$ für $n \to \infty$ und seien alle a_n, b_n reell.*

a) *Wenn $a_n \leq b_n$ für alle n, dann $a \leq b$.*

b) Sandwichprinzip *Wenn $(c_n)_1^{\infty}$ Folge in $\mathbb{R}$ mit $\forall n : a_n \leq c_n \leq b_n$ und wenn $a = b$ dann $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.*

Beweis–Idee a) mit Widerspruch, in b) z_z $\lim_{n\to\infty} c_n$ existiert und a) nutzen, oder $(c_n - a_n) = t_n(b_n - a_n)$, $(t_n)_0^{\infty}$ in $[0,1]$ BF und $(b_n - a_n)_1^{\infty}$ NF.

Für Konvergenz in $\mathbb{R}$ gibt es sehr allgemeine und nützliche Kriterien, könnte man auch in Bsp 3.10.b) und c) nutzen.

Definition 3.13. *Wir sagen eine Folge $(a_n)_n^{\infty}$ ist monoton wachsend (fallend) wenn*

$$\forall n < m : a_n \leq a_m \ \ (a_n \geq a_m).$$

Induktion gibt: $(a_n)_n^{\infty}$ monoton wachsend (fallend) gdw. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}\ \ (a_n \geq a_{n+1})$

Satz 3.14. Monotonie und Konvergenz *Sei* $(a_n)_n^\infty$ *eine beschränkte und monoton wachsende (fallende)* **reelle** *Folge. Dann ist* $(a_n)_n^\infty$ *konvergent mit Grenzwert* $\sup_{n\geq 1} a_n$ *(*$\inf_{n\geq 1} a_n$*).*

Beweis-Idee: Nur für wachsende $(a_n)_n^\infty$ (sonst $(-a_n)_n^\infty$ betrachten). Zeigen a_n kann nicht wieder runter, wenn es größer als $\sup_n a_n - \varepsilon$ war (+ Approximationsprinzip 2.39).

Beispiel 3.15. a) $e := \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ *Eulersche Zahl,* $2 < e < 3$*,*

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Beweis(Idee): in a) betrachten $a_n = (\frac{n+1}{n})^n$, nach 2.47 monoton wachsend. z_z ist (von oben) beschränkt. Das ist nicht so einfach, wir beweisen $b_n = (\frac{n+1}{n})^{n+1}$ ist ein monton fallende Folge. Dann ist klar

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n = a_n\frac{n+1}{n} \leq b_1 = 4 \text{ und } b_n \geq a_n \geq a_1 = 2,$$

also existieren $\alpha = \lim_n a, \beta = \lim_n b_n \in [2,4]$. Ausserdem $\beta = \lim_n a_n \lim_n \frac{n+1}{n} = \alpha$. Diesen gemeinsamen GW nennt man e, er liegt im $(2.4, 3)$ da $a_4 > 2.4$ und $b_6 < 2.99$. Um z_z, dass (b_n) fällt argumentieren wir wie im Beweis von 2.47. Wenn $n \geq 2$, dann

$$\begin{aligned}
\frac{b_{n-1}}{b_n} &= \frac{(n/n-1)^n}{(n+1/n)^{n+1}} = \frac{n^{2n+1}}{((n+1)(n-1))^n(n+1)} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n\frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\\
&\geq \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\left(1-\frac{n-1}{n^2-1}\right) \text{ mit Bernoulli für 1.Klammer, 2. Klammer erweitert}\\
&= 1+\frac{n-(n-1)}{n^2-1} - \frac{n(n-1)}{(n^2-1)^2} = 1+\frac{1\cdot(n^2-1)-n^2+n}{(n^2-1)^2} = 1+\frac{n-1}{(n^2-1)^2} > 1.
\end{aligned}$$

Das zeigt a).

In b) ist Monotonie nicht entscheiden, aber das Sandwich-Lemma: Dazu nutzen wir das quadratische Glied im Binomischen Satz für $(1+a_n)^n$. Zunächst $(1/\sqrt{n})$ ist positive fallende Folge, hat einen GW ℓ und $\ell^2 = \lim_n \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_n \frac{1}{n} = 0$, also $\lim_n 1/\sqrt{n} = 0$ (geht auch direkt). Nun für alle $n > 1$

$$n \leq 2(n-1) = \binom{n}{2}(\frac{2}{\sqrt{n}})^2 \leq (1+\frac{2}{\sqrt{n}})^n \Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1+\frac{2}{\sqrt{n}},$$

und die Behauptung folgt aus Satz 3.12.b) da $\lim_n 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} = 1$.

Definition 3.16. *Sei $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in M (beliebige Menge). Wenn $(n_k)_{k=1}^\infty$ eine strikt wachsende ($n_{k+1} > n_k$) Folge in $\mathbb{N}$ ist, dann ist $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$, also $k \mapsto x_{(n_k)}$,eine Teilfolge von $(x_n)_{n=1}^\infty$.*

Bemerkung Das strikte Wachstum erzwingt $n_k \geq k$, also erbt TF den $\lim_{n\to\infty} x_n$, falls der existiert.

Proposition 3.17. *Jede reelle Folge$(x_n)_{n=1}^\infty$ hat eine monotone Teilfolge!*

Beweis: (Schon am Ende der letzten VL) Betrachten die Menge aller Aussichtspunkte

$$AP = \{n \in \mathbb{N} \ : \ \forall k \in \mathbb{N} : k > n \Rightarrow a_k < a_n\}.$$

Falls es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $\forall n \in AP n \leq N$ (dh AP ist endlich), dann setzen wir $n_1 = N+1$ und iterativ $n_{k+1} = \min\{m > n_k \ : \ a_m \geq a_n\}$, diese Menge ist nicht leer, da $n_k \notin AP$. Also gilt $n_k < n_{k+1}$ und $a_{n_{k+1}} \geq a_{n_k}$, dh wir haben eine monoton wachsende TF.

Sonst gilt $\forall m \in \mathbb{N}$ existiert $n > m$ mit $n \in AP$. Wir definieren dann iterativ $n_1 = \min AP$ und $n_{k+1} = \min\{m > n_k \ : \ m \in AP\}$, wieder wohldefiniert da die Menge nichtleer ist. Weil $n_{k+1} > n_k$ und $n_k \in AP$ folgt $a_{n_{k+1}} < a_{n_k}$, die TF ist fallend. $\square$

Es gilt: Teilfolge einer Teilfolge ist immer auch Teilfolge der ursprünglichen Folge. Und, jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist wiederum konvergent mit demselben Grenzwert.

Satz 3.18. Bolzano-Weierstrass *Jede beschränkte reelle Folge hat eine (monotone) konvergente Teilfolge. Ebenfalls gilt: jede* **komplexe** *Folge $(z_n)_1^\infty$ hat eine konvergente Teilfolge.*

Beweis–Idee: Reelle Folge 3.17 und 3.14. Bei komplexer Folge TF $(n_k)_k$ finden, so dass $(Re(z_{n_k}))_k$ konvergiert , dann *darin(!)* TF $(k_l)_l$ finden, so dass $(Im(z_{n_{k_l}}))_l$ konvergiert.

Beispiel 3.19. Kettenbrüche *Sei $a > 0$. Dann*

$$a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cdots}}}} = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + 1} = \alpha_0.$$

in Sinne des Grenzwertes.

Beweis-Idee: Sei a_n, der n-te Kettenbruch, dann ist $a_{n+1} = f(a_n)$ der um einen Bruchstrich längere, wobei $f(x) = a + \frac{1}{x}$, also x und alle a_n sind positiv, ab $n \geq 2$ auch größer als

a. Wir (sollten) zeigen: der Startwert $a_1 > 0$ spielt keine Rolle für den GW, dafür reicht es zu zeigen, dass es für jedes $a_1 > 0$ solchen GW$\alpha = \alpha(a_1)$ gibt.

Denn dann $f(\alpha) = \alpha \geq a$, weil $\alpha \geq a$ und nach Korollar 3.9 Algebra GW

$$f(\alpha) = f(\lim_n a_n) = \lim_n f(a_n) = \lim_n a_n + 1 = \alpha$$

Und der einzige positive "Fixpunkt" α_0 von f, dh $f(\alpha_0) = \alpha_0$, löst $\alpha_0 = a + \frac{1}{\alpha_0}$ und somit $\alpha_0^2 - a\alpha_0 - 1 = 0$ dh $(\alpha - \frac{a}{2})^2 = 1 + (\frac{a}{2})^2$ wie oben angegeben. Dh dann wenn der GW $\alpha(a_1)$ existiert ist er automatisch gleich α_0!

Da f strikt fallend ist, ist die Folge $(a_n)_n$ nicht monoton, denn es gilt ja $a_{n-1} < a_n \Leftrightarrow a_n = f(a_{n-1)} > f(a_n) = a_{n+1}$. Aber $f^2 = f \circ f$ ist dann strikt wachsend (DIY)! Dh, beide TF $(a_{2n})_n$ und $(a_{2n-1})_n$ sind monoton, hoffentlich beschränkt und haben also jeweils einen GW α_g und α_u größer gleich a. Wenn $\alpha_u = \alpha_g$, dann ist es der GW der ganzen Folge $(a_n)_1^\infty$, der Beweis ist beendet.

Um letztere zu zeigen, betrachten wir f^2 oder besser noch $\Delta(x) = f^2(x) - x$ genauer, und die Nullstelle und das Vorzeichen zu verstehen.

$$\Delta(x) = \left(a + \frac{1}{a + \frac{1}{x}}\right) - x = \left(a + \frac{x}{ax+1}\right) - x = \frac{(a^2x + a) + x - (ax^2 - x)}{ax+1} = \frac{-a(x^2 - ax - 1)}{ax+1}.$$

Wenn $x > 0$ gilt für die Vorzeichen also

$$\operatorname{sgn}(\Delta(x)) = -\operatorname{sgn}(x^2 - ax - 1) = -\operatorname{sgn}((x - \frac{a}{2})^2 - (1 + \frac{a^2}{4})),$$

die quadratische Ergaänzung von oben. Dh in $(0, \infty)$ ist $\Delta(x) = 0$ gwd $x = \alpha_0$, ist positiv in $(0, \alpha_0)$ und negativ in (α, ∞). Somit $a_{n+2} = a_n + \Delta(a_n) > a_n$ wenn $a_n \in (0, \alpha_0)$ und $a_{n+2} < a_n$ wenn $a_n > \alpha_0$. Da $f(\alpha_0) = \alpha_0$ und f strikt fallend, gilt $f((0, \alpha_0)) \subset (\alpha_0, \infty)$ und $f(\alpha_0, \infty) \subset (a, \alpha_0)$. Also, da oBdA $a_1 < \alpha_0$ ist $(a_{2n-1})_1^\infty$ strikt wachsend und in $(0, \alpha_0)$ und $(a_{2n}$ strikt fallend in (α_0, ∞). Beide TF sind also BF und es gibt nach Satz 3.14 $\alpha_u = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} \in (a, \alpha_0]$ sowie $\alpha_g = \lim_{n\to\infty} a_{2n} \in [\alpha_0, \infty)$.

Wir argumentieren wie oben für f nun für f^2 und erhalten aus 3.9 Algebra für GW, dass

$$\alpha_u = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} f\big(f(a_{2n-1})\big) = f\big(\lim_{n\to\infty} f(a_{2n-1})\big) = f(f(\lim_{n\to\infty} a_{2n-1})) = f^2(\alpha_u).$$

Somit $\Delta(\alpha_u) = 0$ und also $\alpha_u = \alpha_0$, analog $\alpha_g = \alpha_0 = \lim_{n\to\infty} a_n$.

In VL kürzeren Beweis, der $|\alpha_0 - a_{n+1}| \leq \frac{1}{\alpha_0}|\alpha_0 - a_n|$ nutzt - Differenzenquotient von f! Funktioniert ohne weitere Anstrengungen wenn $a \geq 1$.

Nunmehr wollen wir entscheiden, wann eine allgemeine Folge konvergent ist, ohne deren Grenzwert kennen zu müssen!

Definition 3.20. *Eine (komplexe) Folge* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ *ist eine Cauchy-Folge (oder auch Fundamentalfolge genannt) wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N (= N_\varepsilon) \in \mathbb{N} \, \forall n, m \geq N : |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Proposition 3.21. *Sei* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ *eine Cauchy-Folge in* $\mathbb{C}$*, dann*

a) $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ *ist beschränkt*
b) *Wenn für eine Teilfolge* $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z$ *dann* $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ *für die ganze Folge.*

Beweis: a) trivial und b) einfach, immer nur ΔUGl. Nun zu den "Details" :

Korollar 3.22. Cauchy-Kriterium *Eine (komplexe) Folge ist konvergent genau dann wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis:

Anwendung dieser allgemeinen Konvergenzsätze beim Verstehen "unendlicher Summen", wichtige Funktionen wie $\sin x, \cos x, e^x$ durch solche "unendlichen Polynome" $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gegeben.

$$\text{Idee: } a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Definition 3.23. *Für $(z_n)_{n=1}^\infty$ in $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ ist $s_n = \sum_{k=1}^n z_k$ die n-te Partialsumme dieser Folge. Die Folge $(s_n)_{n=1}^\infty$ nennt man* Reihe $\sum_k z_k$ $(= \sum_n z_n)$.

Reihe $\sum_k z_k$ konvergent(divergent) gdw. $(s_n)_{n=1}^\infty$ eine konvergente(divergente) Folge ist. Wir schreiben $\sum_{k=1}^\infty z_k = s$, die Summe der Reihe, wenn $s_n \to s$ für $n \to \infty$.

Die Zahlen z_k sind die Glieder der Reihe $\sum_k z_k$.

Proposition 3.24. Algebra für Reihen *Seien $\sum_n z_n$,$\sum_n w_n$ konvergente Reihen in $\mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann $\sum_n (\alpha z_n + \beta w_n)$ konvergent und*

$$\sum_{n=1}^\infty (\alpha z_n + \beta w_n) = \alpha \sum_{n=1}^\infty z_n + \beta \sum_{n=1}^\infty w_n.$$

Beweis: Direkt aus 3.9 Algebra für GW.

Problem oft: keine expliziten Formeln für s_n, brauchen allgemeine Konvergenzsätze. Und keine Formel für Produkte!

Satz 3.25. Cauchy-Kriterium für Reihen

$$\sum_n z_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists N\, (= N_\varepsilon)\, \forall n \geq N\, \forall l \geq 1 : \left| \sum_{k=n+1}^{n+l} z_k \right| < \varepsilon.$$

Beweis-Idee: nur Reformulierung von 3.22 für Partialsummen, da $|s_{n+l} - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+l} z_k \right|$

Korollar 3.26.

a) $\exists N\, \forall n \geq N : z_n = w_n$, *dann ($\sum_n z_n$ konv. $\Leftrightarrow$ $\sum_n w_n$ konv.), die Summen der Reihen können natürlich verschieden sein!*

b) **Notwendige** Bedingung: $\sum_n z_n$ *konv.* $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

Beweis:

Beispiel 3.27. harmonische Reihe $\sum_n \frac{1}{n}$ *divergent! (Obwohl* $\frac{1}{n} \to 0$.*)*

Beweis:

Proposition 3.28. Beschränktheit *Sei* $a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$. *Dann*

$$\sum_n a_n \textit{ konv.} \Leftrightarrow \exists C \, \forall n \sum_{k=1}^{n} a_k \leq C \text{ (d.h. } (s_n)_n \textit{ beschränkt).}$$

Beweis: Idee– nutze 3.14 da Folge der Partialsummen monoton.

Korollar 3.29. Vergleichskriterium *Sei* $0 \leq a_n \leq b_n \; \forall n (\geq N)$. *Dann*

$$\Big(\sum_n b_n \textit{ konv.} \Rightarrow \sum_n a_n \textit{ konv.}\Big) \;\&\; \Big(\sum_n a_n \textit{ div.} \Rightarrow \sum_n b_n \textit{ div.}\Big)$$

Beweis:

Beispiel 3.30.

a) Geometrische Reihe $\forall z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \Leftrightarrow \sum_n z^n$ *konv.* $\Big(\& \; \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ *dann*$\Big)$.

b) *Teleskopische R.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1$ *konvergent,* $\sum_n \frac{1}{n^2}$ *auch (Summe schwer(er):* $\frac{\pi^2}{6}$*).*

Proposition 3.31. Wurzel- & Quotientenkriterium *Sei* $a_n \geq 0\, \forall n$.

a) $(\exists C\, \exists a < 1\, \forall n : a_n \leq C a^n) \Rightarrow \sum_n a_n$ *konv.*

b) $(\exists N\, \exists q < 1\, \forall n \geq N : a_{n+1} \leq q a_n) \Rightarrow \sum_n a_n$ *konv.*

Bemerkung: Voraussetzung$_{b)}$ $\Rightarrow$Voraussetzung$_{a)}$ und nicht umgekehrt, z.B. für Folge $a_{2n} = 1/3^n$ und $a_{2n+1} = 1/2^n$ ist a) erfüllt mit $a = 1/\sqrt{2}$ aber nicht b) weil $a_{2n+1}/a_{2n} = (3/2)^n \gg 1$. Quotientenkriterium aber oft einfacher auszuwerten, deshalb erstmal das Verhalten von a_{n+1}/a_n für grosse n versuchen zu verstehen.

Einfach nutzbare Kriterien: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow a)$, $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n < 1 \Rightarrow b)$.

Vorsicht: $\forall n : a_{n+1}/a_n < 1$ impliziert *nicht* die Konvergenz, z.B. siehe $a_n = 1/n$.

Beweis: Idee 2.29 und 2.30 kombinieren.

Satz 3.32. Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen. *Sei* $a_n \geq 0, a_n \to 0$ *für* $n \to \infty$ *und* $\boxed{\forall n : a_n \geq a_{n+1}}$. *Dann ist* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *konvergent.*

Beweis: Idee $s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq s_7 \geq \ldots s_8 \geq s_6 \geq s_4 \geq s_2$ und $s_{2k+1} - s_{2k} \to 0$ wenn $k \to \infty$.

Beispiel 3.33. $\frac{1}{2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots \leq 1$ *alternierende harmonische Reihe*

Bemerkung 3.34. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *kann sich durch Umordnen (unendlich vieler)* a_n *ändern (sogar divergieren).*

Wir betrachten konkret die alternierende harmonische Reihe, und definieren folgende Umordnung

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{29} - \frac{1}{8} + \ldots$$

Die Idee ist, ähnlich wie bei der harmonischen Reihe positive Blöck der Länge 2^k aus Reziproken ungerader Zahlen zu bilden und nur mit einem negativen Reziproken der k-ten geraden Zahl zu kombinieren. Da wir nur mit jeder zweiten (da ungeraden) Zahl arbeiten, wird die Summe über den positiven Block ungefähr $1/4$ statt des vorherigen $1/2$ sein, aber noch immer viel grösser als das Reziproke der k-ten geraden Zahl. Somit muss die Folge der Partialsummen über diese Blöcke (bestimmt) divergent sein. Die formale Rechnung erfordert ewas Sorgfalt, wird nur im Skript präsentiert. Wir erhalten für das allgemeine Reihenglied

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2(n-k)+1} & \text{wenn } 2^{k-1} + k - 2 < n < 2^k + k - 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ -\frac{1}{2k} & \text{wenn } n = 2^k + k - 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Dann ergibt sich für die Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$$\begin{aligned} s_{2^{k+1}+(k+1)-1} - s_{2^k+k-1} &= \sum_{n=2^k+k}^{2^{k+1}+k-1} \frac{1}{2(n-k)-1} - \frac{1}{2(k+1)} \\ &= \sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{2l-1} - \frac{1}{2(k+1)} \geq (2^{k+1} - 2^k)\frac{1}{2(2^{k+1}-1)-1} - \frac{1}{2(k+1)} \\ &\geq (2^k)\frac{1}{2 \cdot 2^{k+1}} - \frac{1}{2(k+1)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(k+1)} \geq \frac{1}{8} \text{ wenn } k \geq 3 \end{aligned}$$

Es folgt (mit Induktion) $s_{2^{k+3}+(k+3)-1} \geq s_{10} + (k/8)$, und die Folge $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ist somit unbeschränkt und also divergent, genauer gesagt $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$.

Wir können die der gerade gezeigte Konstruktion zugrundelegende Idee sehr weitgehend verallgemeinern. Nötig ist hierbei immer, dass sowohl die Summe der positiven Glieder alleine und auch die Summe der negativen Glieder alleine unbeschränkt wird. Zuerst eine Definition, die dies ausschließt.

Definition 3.35. *Eine komplexe Reihe* $\sum_{n}^{\infty} z_n$ *heisst* absolut *konvergent wenn die dazugehörige Reihe der Beträge* $\sum_{n}^{\infty} |z_n|$ *konvergiert.*

Bemerkung 3.36. *Es folgt aus der Dreiecksungleichung und dem Cauchykriterium Satz 3.25 sofort, dass jede absolut konvergente Reihe auch konvergiert (vergleiche Beweis 3.39 (*)),*

Satz 3.37. *(*Riemann*) Sei $\sum_n a_n$ eine konvergente reelle Reihe, die* nicht *absolut konvergiert. Dann gibt es für jedes $s \in \mathbb{R}$ eine Permutation (d.h. Bijektion,d.h. Umordnung) σ von $\mathbb{N}$ so dass*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = s.$$

Es gibt auch Pertumationen $\sigma_\pm$ so dass

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_{\sigma_\pm(n)} = \pm\infty, \ \text{d.h. } \forall K \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \pm \sum_{m=1}^{n} a_{\sigma_\pm(m)} \geq K.$$

Beweis-Idee Sei also $s \in \mathbb{R}$, die Definition von σ ist ein einfacher Algorithmus. Wir setzen zuerst

$$I_+ = \{n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0\} \text{ und } I_- = \{n \in \mathbb{N} : a_n < 0\},$$

und wählen die Startwerte $I_+(0) = I_+, I_-(0) = I_-$ sowie $k = 0$. Nun wird induktiv definiert

$$\sigma(k+1) = \begin{cases} \min I_+(k) & \text{wenn } \sum_{l=1}^k a_{\sigma(l)} < s \\ \min I_-(k) & \text{wenn } \sum_{l=1}^k a_{\sigma(l)} \geq s \end{cases}, \text{ also dann } \begin{matrix} a_{\sigma(k+1)} \geq 0 \\ a_{\sigma(k+1)} < 0 \end{matrix},$$

sowie $I_+(k+1) = I_+(k) \setminus \{\sigma(k+1)\}$ und $I_-(k+1) = I_-(k) \setminus \{\sigma(k+1)\}$ — effektiv wird natürlich nur eine der Mengen geändert. Nun können wir den induktiven Definitionschritt iterieren.

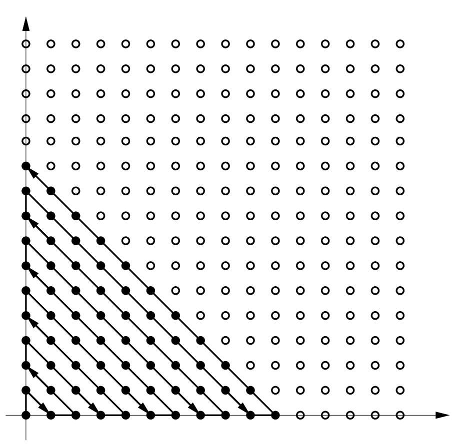
Bedeutend anspruchsvoller ist es nun z_z, dass σ tatsächlich eine Permutation von ganz $\mathbb{N}$ ist. Dies werden wir in der VL nicht tun, der Beweis davon steht in Moodle. Für gewünschten GW $\pm\infty$ können wir wie im Beispiel in Bem 3.34 vorgehen

Das gerade studierte Phänomen mag etwas "konstruiert erscheinen". Es ist zweifelsohne von grosser praktischer Bedeutung, wenn wir Produkte von Reihen studieren - z.B. um die fundamentale Identität $e^{x+y} = e^x e^y$ herzuleiten. Es gibt tatsächlich keinen kanonischen Weg wie die Produkte der unendliche vielen Paare der Glieder zweier Reihen anzuordnen sind, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 3.38. *Wir betrachten die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n/\sqrt{n+1}$, *wegen des Leibnizkriteriums konvergiert diese Reihe. Was ist nun das Produkt der Reihe mit sich selbst?*

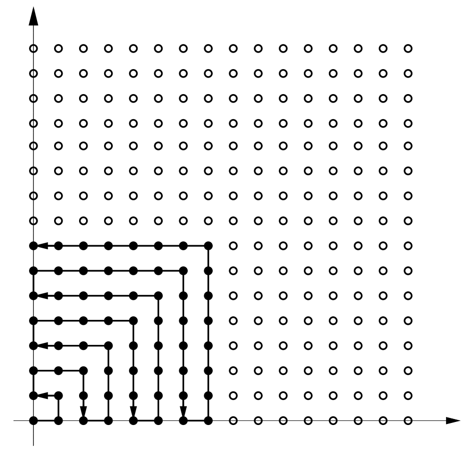
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\sqrt{m+1}}\right)\stackrel{?}{=}\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0}\frac{(-1)^{n+m}}{\sqrt{n+1}\sqrt{m+1}},$$

insbesondere, was bedeutet die rechte Doppelsumme? Es gibt wohl zwei "gleichnatürliche" Wege, $\sum a_n b_m$ *über* $\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$ *zu summieren. Diese sind in folgenden Bildern zusammen mit den entstehenden Partialsummen dargestellt.*



$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}$$

Dreieckssumme



$$\sum_{k=0}^{K}\sum_{\max\{n,m\}=k}a_n b_m=\left(\sum_{n=0}^{K}a_n\right)\left(\sum_{m=0}^{K}b_m\right)$$

Quadratsumme

In unserem Beispiel erhalten wir eine konvergente und eine divergente Folge von Partialsummen. Klarerweise

erfüllt die Quadratsumme: $\left(\sum_{n=0}^{K}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{K}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)\to\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)^2$ *wenn* $K\to\infty$

gemäss der Algebra konvergenter Folgen. Und mit der Ungleichung aus dem Beweis von 3.32 Leibniz sieht man leicht, dass auch alle Zwischensummen (nur ein Teil des letzten Quadratrandes in der vorgegebenen Reihenfolge summiert) zum selben GW **konvergieren**.

Andererseits $0\le(\sqrt{k+1}-\sqrt{n-k+1})^2=n+2-2\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}$, *(oder AG-GM UGl),*

$$\Rightarrow\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}\le\frac{n+2}{2}\text{ und also }\Big(\frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}\ge\frac{2}{n+2}\forall k\in\{0,1,\dots,n\}.$$

Somit

$$\Big|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}\Big|\ge\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{n+2}\ge\frac{2(n+1)}{n+2}\ge 1\text{ für alle }n\in\mathbb{N}_0$$

also gehen die Glieder der äusseren Reihe(entspricht einzelnen Summen über "neuen"Dreiecksrand) nicht gegen Null und die linke Doppelreihe (Dreieckssumme) **konvergiert NICHT**.

Satz 3.39. *Absolut konvergente Reihen beeinflußt Umordnen nicht!*

a) Satz von Dirirchlet *Sei* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *eine absolut konvergente komplexe Reihe (d.h* $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ *konvergent). Dann ist* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *konvergent, und* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_\sigma(n)$ *für jede Umordnung* σ *von* $\mathbb{N}$ *(d.h.* $\forall n \in \mathbb{N} : \sigma(n) \in \mathbb{N}$ *und für jedes* $m \in \mathbb{N}$ *gibt es genau ein* $n \in \mathbb{N} : \sigma(n) = m$.*)*

b) Cauchyprodukt *Seien* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ *absolut konvergente komplexe Reihen. Dann ist Quadratsumme gleich Dreieckssumme eine komplexe Zahl, genauer* $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0} z_n w_m$ *ist eine absolut konvergente (verallgemeinerte) Reihe und*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} z_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} z_k w_{n-k}.$$

Beweis-Idee entscheidend ist a). Dann folgt b) wenn wir die beiden Anordnungen von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ aus Bsp 3.38 nutzen. Die rechte (immer am Rand der Quadrate entlang) liefert, für die enstprechende Betragsreihe in der wachsenden Folge von Partialsummen die TF, die Summen über volle Quadrate entspricht und eine BF ist, denn

$$\forall K \ : \sum_{(n,k):0\le m,k\le K} |z_m w_k| = \sum_{n=0}^{K} |z_n| \sum_{n=0}^{K} |w_n| \le \left(\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} |w_n|\right) \in \mathbb{R}.$$

Die Reihe für $z_m w_k$ ist also in der rechten, und nach a) damit jeder Anordnung absolut konvergent und auch die Summe der eigentlichen Glieder ist unabhänging von der Reihenfolge.

Für a) Sei $s_a = \sum_1^{\infty} |z_n| \in \mathbb{R}$ und σ eine beliebige Permutation von $\mathbb{N}$. Wenn $n \in \mathbb{N}$, existiert $N(n) = \max_{k\le n} \sigma(k)$ und also $\sum_{k=1}^{n} |z_{\sigma(n)}| \le \sum_{m=1}^{N(n)} |z_m| \le s_a$, dh $\sum_n |z_{\sigma(n)}|$ konvergiert und $\sum_{k=1}^{\infty} |z_{\sigma(n)}| \le s_a = \sum_1^{\infty} |z_n|$. Wenn wir σ^{-1} auf die Reihe $\sum_n |z_{\sigma(n)}|$ anwenden folgt die umgekehrte UGl, also σ ändert Summe der Beträge nicht.

Wir zeigen nun: wegen 3.25 ist jede absolut konvergente Reihe auch konvergent und $z_z : s = s'$ wobei $s = \sum_1^{\infty} z_n$ sowie $s' = \sum_1^{\infty} z_{\sigma(n)}$. Dazu beliebiges $\varepsilon > 0$ wählen, dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\left|s_a - \sum_1^N |z_n|\right| < \varepsilon$. Nun sehen wir: wenn $A \subset M$ endlich und $\min A > N$

$$\Rightarrow \sum_{n\in A} |z_n| \le \sum_{n=\min A}^{\max A} |z_n| \le \sum_{n=N+1}^{\max A} |z_n| = \sum_{n=1}^{\max A} |z_n| - \sum_{n=1}^{N} |z_n| \le s_a - \sum_{n=1}^{N} |z_n| < \varepsilon \qquad (*).$$

Damit ist Cauchkriterium 3.25 für $\sum_n^{\infty} z_n$ und also auch $\sum_n^{\infty} z_{\sigma(n)}$ erfüllt, die Summen z, z' existieren. Ausserdem, wenn $n > N$ und auch $m \ge M_n = \max_{k\le N} \sigma^{-1}(k)$ dann haben wir (DIY) $\quad B = \sigma(\{1,\dots,m\}) \supset \{1,\dots,n\}$ und $\min A > n > N$ für $A = B \setminus \{1,\dots,n\}$. Wir erhalten

$$|\sum_{k=1}^{m} z_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^{n} z_k| = |\sum_{k\in A} z_k| \le \sum_{k\in A} |z_k| < \varepsilon \text{ nach } (*).$$

Wenn $m \to \infty$ folgt im GW $|s' - \sum_{k_1}^{n} z_k| \le \varepsilon$ für alle $n > N$ und schließlich mit $n \to \infty$ auch $|s' - s| \le \varepsilon$. Da ε positiv, aber beliebig war gilt $s' = s$ $\square$

Anwend.: Exponentialfunktion(+ Geschwister), Funktionalgleichung mit Cauchyprodukt

Definition 3.40. *Für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ definieren wir die Exponential-, Kosinus und Sinusfunktion durch*

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \ \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \ \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Satz 3.41. *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ sind $\exp(z), \cos(z)$ und $\sin(z)$ als Summe absolut konvergenter Reihen wohldefiniert und erfüllen*

a) $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ **eine der WICHTIGSTEN Formeln in Analysis**, *die FUNKIONALGLEICHUNG für die Exponentialfunktion.*
b) $\cos(-z) = \cos(z)$ *und* $\sin(-z) = -\sin(z)$
c) $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$ *- die* **Eulersche Formel**, *und also* $\cos(z) = \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz)), \sin(z) = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))$.
d) $\forall z \in \mathbb{C} : (\cos(z))^2 + (\sin(z))^2 = 1$, *wenn* $z \in \mathbb{R}$ *dann* $\cos(z), \sin(z)$ *auch reell und in* $[-1, 1]$.

Beweis:

Korollar 3.42. Additionstheoreme *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$:*

$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \ \& \ \sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w).$$

Beweis: DIY/ÜZ

4. Funktionen - Stetigkeit und Grenzwerte

Beispiel 4.1. *Funktionen: Alte und neue Bekannte*

a) $|\cdot| : x \mapsto |x|$ *Betragsfunktion auf* $\mathbb{R}$,$\mathbb{C}$

b) $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x > 0\}$, $\sqrt{\cdot} : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}_+$ *Wurzelfunktion, ihre Inverse ist* $(\sqrt{\cdot})^{-1} = (x \mapsto x^2)_{|\mathbb{R}_+}$

c) $[\cdot] : x \in \mathbb{R} \mapsto \max\{l \in \mathbb{Z} : l \leq x\}$, *dann* $[x] \in \mathbb{Z}$ *"der ganze Teil" von* x, *"Gaussklammer",* $\lfloor\cdot\rfloor : x \mapsto x - [x]$ *gebrochene Teil von* x,

Bemerkung: die Existenz von $[x]$, nutzt Existenz von Minima in $\mathbb{N}$, zB kann man zeigen (DIY) $x \geq 0 \Rightarrow [x] = \min(\{n \in \mathbb{N} : n > x\}) - 1$ und
$x < 0 \Rightarrow [x] = -\min(\{n \in \mathbb{N} : n \geq -x\})$.

Definition 4.2. *Sei* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, *dann ist* $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ *ein(e) Polynom(funktion) wenn*

$$\exists n \in \mathbb{N}_0 \exists a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K} \text{ so dass } \forall z \in \mathbb{K} : f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad (\text{also } f(0) = a_0).$$

Die Zahlen $a_0, \ldots, a_n$ *sind Koeffizienten der Polynomdarstellung, wenn* $a_n \neq 0$ *dann ist* a_n *Leitkoeffizient und* n *der Grad der Polynomdarstellung. Wenn* $\forall n : a_n = 0$, *dann ist der dazugehörige Grad* $-\infty$.

Nun definieren wir $deg(f)$ *als Minimum aller Grade von Polynomdarstellungen von* f, *zB* $f(z) = 0$ *für alle* $z \in K$ *gdw* $deg(f) = -\infty$ *und* $\exists c \neq 0 \forall z \in K : f(z) = c$ *gdw* $deg(f) = 0$.

Unsere Definition von $\deg(f)$ ist recht umständlich und schwer zu überprüfen, da wir noch nicht gezeigt haben, dass (in unendlichen Körpern) die Polynomdarstellung einer Funktion im Wesentlichen eindeutig ist. Dies tun wir nun. Bereits jetzt wissen wir aber schon $\deg(f \cdot g) \leq \deg(f) + \deg(g)$.

Satz 4.3. *Sei* f *ein Polynom mit* $deg(f) \geq 1$ & $f(z_0) = 0$ *für ein* $z_0 \in \mathbb{K}$. *Dann gibt es ein Polynom* g *mit* $deg(g) = deg(f) - 1$ & $(\forall z : f(z) = (z - z_0)g(z))$.

Beweisidee: Polynomdivision mit Rest — zuerst (mit Induktion in $\deg(f) \geq 1$) zeigen $\forall z_1 \in \mathbb{K}\ \exists r_{z_1} \in \mathbb{K}\ \exists g_{z_1}$ Polynom s.d.:$(\forall z : f(z) = (z - z_1)g_{z_1}(z) + r_{z_1})$ & $\deg(g_{z_1}) < \deg(f)$. Nun, wenn $z_1 = z_0 = z$ & also $f(z) = 0 = (z - z_1) \Rightarrow r_{z_0} = 0$ und können $g = g_{z_0}$ wählen.

Korollar 4.4.

a) *deg*$(f) = n \geq 0 \Rightarrow \{z \in \mathbb{K} \ : \ f(z) = 0\}$ *hat höchstens* n *Elemente.*

b) *Sei* $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $g(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k$ & $\{z \ : \ f(z) = g(z)\} >$ *habe mehr als* n *Elemente. Dann*

$$(a_0 = b_0) \ \& \ (a_1 = b_1) \ \& \ \ldots \ \& \ (a_n = b_n),$$

d.h. die Polynomkoeffizienten sind eindeutig(bis auf Nullen vor dem Leitkoeffizienten) bestimmt durch die Polynomfunktion, da $\mathbb{K}$ *unendlich. Somit gilt auch*

$$\mathit{deg}(f \cdot g) = \mathit{deg}(f) + \mathit{deg}(g).$$

Beweisidee: a) Wieder Induktion in $\deg(f)$, $\deg(f) = 0 \Rightarrow f \equiv c \neq 0$ und Satz 4.3. In b) $f - g$ betrachten.

Nun wollen wir "allgemeine" Funktionen (z.B. $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$) und deren analytischen Eigenschaften genauer studieren.

Definition 4.5. *Sei* X *Menge (gewöhnlich* $X \subset \mathbb{R}, \mathbb{C}$*) mit* $X \neq \emptyset$*, dann*
$\mathcal{F}_{\mathbb{K}}(X) = \{f \ : \ f : X \to \mathbb{K}\}$ *sind die* $\mathbb{K}$*-wertigen Funktionen auf* X*.*
Für $f, g \in \mathcal{F}_{\mathbb{K}}(x), \lambda \in \mathbb{K}$ *definieren wir* $\lambda f, f + g, f \cdot g \in \mathcal{F}_K(X)$ *durch*

$$\lambda f : x \mapsto \lambda\,(f(x)), f + g : x \mapsto f(x) + g(x), f \cdot g : x \mapsto f(x)g(x) \quad \forall x \in X.$$

Bemerkung: Später werden wir in der Sprache der Linearen Algebra sagen: $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}(X)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit zusätzlicher Operation "Produkt $\cdot$" (heißt dann $\mathbb{K}$-Algebra), $0_{\mathcal{F}} : x \mapsto 0 \, \forall x \in X$. Wenn $\mathbb{K}$ aus dem Kontext klar (oder die Wahl keine Rolle spielt) wird nur $\mathcal{F}(X)$ geschrieben, meistens reicht es dann aus, den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ zu verstehen.

Die wichtigste Eigenschaft im Folgenden ist nun

Definition 4.6. *Sei* $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ *(oder* $\emptyset \neq X \subset \mathbb{C}$*) und* $f \in \mathcal{F}(X)$*. Dann sagen wir*

- f *ist* stetig in $a \in X$ *wenn* $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in X : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$,
- *andernfalls ist* f unstetig in a *(*$a \in X$*),*
- f *stetig auf* X *wenn* $\forall a \in X : f$ *stetig in* a*. Ansonsten ist* f *nicht stetig auf* X*.*

Bemerkung 4.7. $f \in \mathcal{F}(X), a \in X$*. Dann* f *unstetig in* $0 \Leftrightarrow \exists \varepsilon_a > 0 \forall \delta > 0 \, \exists x \in X :$ $|x - a| < \delta \ \& \ |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon_a$*. (*$> \varepsilon'_a$ *möglich zu erzielen:* $\varepsilon'_a = \varepsilon_a/2$*).*

Beispiel 4.8. a) *Betragsfunktion* $|\cdot|$ *stetig auf* $\mathbb{R}$, wissen wir sicher, wenn Sie ÜZ 8, 2.a) lösen: $\forall x, y \in \mathbb{R} : ||x| - |y|| \leq |x - y|$. Also für festes $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig setze $\delta = \varepsilon > 0$, dann $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - a| < \delta$ gilt $||x| - |a|| \leq |x - a| < \varepsilon$ wie gefordert. Vollkommen analog ist $|\cdot|$ stetig auf $\mathbb{C}$.

b) *ganze Teil* $x \mapsto [x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ *unstetig in* $a \in \mathbb{R}$ *genau dann wenn* $a \in \mathbb{Z}$ *(und dann immer* $\varepsilon_a = 1$ *im Sinne von 4.7 wählbar.) Wenn* $a \notin \mathbb{Z}$ *betrachte* $M = \{k \in \mathbb{Z} : |k - a| < \frac{1}{2}\}$. *Wenn* $M = \emptyset$ *setze* $\delta_a = \frac{1}{2}$. *Sonst* M *eine Einermenge (da* $\mathbb{Z} - \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ + Δ*-UGl) und setze* $\delta_a = |a - k|$ *für* $M = \{k\}$, *dieses* δ_a *erfüllt die Forderung in Def 4.6 für alle* $\varepsilon > 0$*!*

Satz 4.9. *Sei* $f \in \mathcal{F}(X), a \in X$. *Dann ist* f *stetig in* a *genau dann wenn* $\forall (a_n)_n$ *Folge in* X*:* $(\lim_n a_n = a \Rightarrow \lim_n f(a_n) = f(a))$.

Bemerkung: Satz 4.9 kann interpretiert werden als: f stetig, dann $\lim_n f(a_n) = f(\lim_n a_n)$, also "stetige Funktion und (Folgen)Grenzwertübergang sind vertauschbar".

Beweis– Idee: Die schwere(re) Rückrichtung nutzt Bemerkung 4.7, mit $\lightning$ beweisen, dazu $\delta = \frac{1}{n}$ für $n \to \infty$ benutzen um konvergente Folge als "Gegenbeispiel" zu finden.

Korollar 4.10. Algebra für stetige Funktionen *Seien* $f, g \in \mathcal{F}_{\mathbb{K}}(X)$ *beide stetig in* $a \in X$. *Dann sind* $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ *alle drei* $\lambda f, f+g, f \cdot g$ *stetig in* a.

Wenn ausserdem $g(a) \neq 0$, *dann* $\exists \delta > 0 \, \forall x \in X : |x-a| < \delta \Rightarrow g(x) \neq 0$ *und*

$$\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathcal{F}(X \cap \{x : |x-a| < \delta\}) \text{ ist stetig in } a.$$

Beweis: Idee mit Satz 4.9 auf Algebra für Folgengrenzwerte Korollar reduzieren.

Korollar 4.11. *Sei* $f \in \mathcal{F}(X)$ *stetig auf* X. *Wenn* $f(X) \subset \mathbb{K} \setminus \{0\}$ *dann* $\frac{1}{f} \in \mathcal{F}(X)$ *stetig auf* X. *(da* $x \mapsto 1$ *stetig können wir Korollar 4.10 in jedem* $a \in X$ *nutzen.)*

Ein neue Möglichkeit, um stetige Funktionen zu erzeugen ist die Verknüpfung — dies war für Folgen im Allgemeinen nicht möglich, obwohl Ähnlickeiten zur "$\Rightarrow$"-Implikation in Satz 4.9 unübersehbar sein sollten.

Satz 4.12. Kettenregel *Seien* $f \in \mathcal{F}(X)$, $g \in \mathcal{F}(Y)$ *mit* $f(X) \subset Y$. *Wenn* f *stetig in* $a \in X$ *und* g *stetig in* $f(a) (\in Y)$, *dann ist* $g \circ f \in \mathcal{F}(X)$ *stetig in* a.

Beweis: Idee Folgt sofort aus Satz 4.9.

Korollar 4.13.

a) *Funktionen* $x \mapsto 1$, $id : x \mapsto x$, $id \cdot id : x \mapsto x^2$ *usw.* $x \mapsto x^k$, $k \in \mathbb{N}$ *sind stetig, also jedes Polynom stetig (auf* $\mathbb{K}$*).*

b) $f \in \mathcal{F}(X)$ *stetig in* $a \in X$ *dann* $|f(\cdot)| : x \mapsto |f(x)|$ *auch stetig in* a.

Beispiel 4.14.

a) $\forall z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 \Rightarrow |\exp(z) - 1| \leq 2|z|$

b) $\exp, \cos, \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *sind stetig auf* $\mathbb{C}$.

Beweis:

Definition 4.15. *Für $X \subset \mathbb{R}$ (oder $X \subset \mathbb{C}$) nichtleer definieren wir*

$$C_{\mathbb{K}}(X) = \{f \in \mathcal{F}_{\mathbb{K}}(X), f \text{ stetig auf } X\} \quad (C \text{ von "continuous"}).$$

Hier $X = [a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$, besonders interessant, weil jedes $f \in C([a,b])$ gute "globale" Eigenschaften hat, die im Wesentlichen Konsequenzen des Bolzano-Weierstrass-Satzes 3.18 sind.

Satz 4.16. *Sei $f \in C_{\mathbb{R}}([a,b])$. Dann ist $f([a,b]) \subset \mathbb{R}$ beschränkt und*

$$\max_{x\in[a,b]} f(x), \min_{x\in[a,b]} f(x) \text{ existieren.}$$

("Maximum und Minimum werden angenommen").

Beweis:Idee Wähle Folge $(x_n)_n$ so dass $f(x_n)$ nach $+\infty$ bestimmt divergiert und betrachte konvergente TF $(x_{n_k})_k$ mit GW in $[a,b]$ und Satz 4.9 für ↯. Also $f([a,b])$ von oben beschränkt. Nun betrachte $(y_n)_n$ so dass $f(y_n) \to \sup f([a,b])$ und wähle konvergente TF $(y_{n_k})_k \to y$ mit $f(y) = \max f([a,b])$.

Bespiel Sei $X = (0,1]$, dann $f(x) = \frac{1}{x}$ stetig auf X aber unbeschränkt von oben, also Abgeschlossenheit des Intervalls wesentlich.

Weitere gute Eigenschaft stetiger Funktionen: Gleichung $f(x) = \gamma$ hat (oftmals) Lösungen.

Satz 4.17. *"Zwischenwertsatz" Sei $f \in C_{\mathbb{R}}[a,b]$ und $f(a) < \gamma < f(b)$(oder $f(a) > \gamma > f(b)$). Dann $\exists x \in (a,b) : f(x) = \gamma$.*

Beweis:Idee x "langsam" erhöhen, bis es die Gleichung löst, zeigen f kann γ nicht "überspringen." Genauer, beweisen: wenn $f(a) < f(b)$ dann ist
$x = \sup(\{t \in [a,b] : f(t) < \gamma\}$ eine Lösung. Sonst $-f, -\gamma$ betrachten. (Vollkommen analog zur Existenz der reellen $\sqrt{x}$ wenn $x > 0$, Satz 2.41)

Korollar 4.18. Sei $f \in C_{\mathbb{R}}([a,b])$, dann $f([a,b]) = [\min_{x\in[a,b]} f(x), \max_{x\in[a,b]} f(x)]$.

Beweis: Nach Satz 3.19 existieren $x-, x_+ \in [a,b]$ mit $f(x-) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ und $f(x_+) = \max_{x\in[a,b]} f(x)]$. Dann $f([a,b]) \subset [f(x_-), f(x_+)]$ klar. OBdA $f(x_-) < f(x_+)$ und nun ZWS nutzen.

Beispiel 4.19. *Jedes reelle Polynom f von ungeradem Grad n hat eine reelle Nullstelle.*

Beweis-Idee: Betrachte stetiges $g(x) = f(x)/(1+|x|^n)$, $\lim_n g(n)$ und $\lim_n g(-n)$ sowie ZWS.

Definition 4.20. *Ist $X \subset \mathbb{R}(X \neq \emptyset)$, dann heißt $f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}(X)$*

- streng *monoton wachsend (bzw. fallend), wenn* $\forall x, y \in X : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ *(bzw. $f(y) < f(x)$)*
- *monoton wachsend (bzw. fallend), wenn* $\forall x, y \in X : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ *(bzw. $f(y) \leq f(x)$)*

Beispiel 4.21. $\forall x \in (0,2) : \sin(x) > 0$. *Daraus folgt, dass* $\cos(x)$ *strikt monoton fallend in* $[0,2]$ *mit einer einzigen Nullstelle - bezeichnet* $\frac{\pi}{2}$. *Dann* $\sin(\pi/2) = 1$ *und* $\forall z (\in \mathbb{C})$:

$$\sin(z+\frac{\pi}{2}) = \cos(z) \;\&\; \cos(z+\frac{\pi}{2}) = -\sin(z) \Rightarrow \sin(z+\pi) = -\sin(z) \;\&\; \cos(z+\pi) = -\cos(\pi).$$

Beweis:

Eine stetige (reelle) Funktion hat eine stetige Umkehrfunktion (oder gar keine), die Struktur stetiger injektiver reeller Funktionen ist einfach.

Proposition 4.22. *$f \in C_{\mathbb{R}}([a,b])$ ist injektiv $\Leftrightarrow$ (f ist* streng *monoton wachsend oder f ist* streng *monoton fallend).*

Beweis-Idee: Sonst Widerspruch mit ZWS.

Satz 4.23. *Sei $f \in C_{\mathbb{R}}([a,b])$ injektiv. Dann $f^{-1} \in C_{\mathbb{R}}([f(a), f(b)])$ (bzw. $\in C_{\mathbb{R}}([f(b), f(a)])$, falls $f(a) > f(b)$).*

Beweis-Idee: Nutze Bemerkung 3.10 sowie BW für indirekten Beweis, der sehr allgemein ist, dh nicht nur im Reellen gilt.

Proposition 4.24. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend, stetig und* $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.

Beweis-Idee: Nutzt $\exp(x) \geq 1+x$ wenn $x > 0$, Funktionalgleichung für exp (& ZWS).

Definition 4.25. $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *ist* $(\exp_{|\mathbb{R}})^{-1}$, *die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion.*

Proposition 4.26. *Es gilt*

a) $\forall x \in \mathbb{R}: \log(\exp(x)) = x, \forall t > 0 : \exp(\log(t)) = t.$

b) $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *stetig, streng monoton wachsend und surjektiv (Bild ist ganz* $\mathbb{R}$*).*

c) $\forall s, t > 0$*:* $\log(st) = \log(s) + \log(t).$

Beweis: JDI

Definition 4.27. *Potenzfunktion für* reelle *Exponenten* $p \in \mathbb{R}$ & $\forall x > 0 : x^p = \exp(p \cdot \log x)$

Proposition 4.28. *Definition 4.27 ist eine "Verallgemeinerung" der Potenzen mit ganzem Exponent (aber nur für positive Basis). Es gilt FÜR REELLE EXPONENTEN(!!)*

$$\forall x, y > 0 \forall p, q \in \mathbb{R} : x^p x^q = x^{p+q}, (x^p)^q = x^{pq}, (xy)^p = x^p y^p.$$

Beweis: einfach: nutzen Funktionalgleichungen.

Bemerk.: Nun können wir auch $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ einfach definieren (vorher $\sqrt[n]{x} = \sup\{y \geq 0, y^n \leq x\}$).

Es ist oftmals wichtig, $f(x)$ mit x nahe a zu verstehen, auch wenn $f(a)$ nicht definiert ist (Unterschied zu stetiger Funktion, trotzdem Analogien). Um dieses Verhalten eindeutig zu machen, muss f auf (vielen) Punkten beliebig nahe zu a definiert sein.

Definition 4.29. *Sei* $X \subset \mathbb{K}$*, dann ist* $a \in \mathbb{K}$ *ein Häufungspunkt von* X*, wenn* $\forall \delta > 0$ $\#\{x \in X, |x - a| < \delta\} = \infty$*, wir setzen* $X' = \{a \in \mathbb{K}, a \text{ Häufungspunkt von } X\}$*.*

Bemerkung 4.30. $a \in X' \Leftrightarrow \forall n : \{x \in X, 0 < |x - a| < \frac{1}{n}\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists (a_n)_n \subset X \setminus \{a\} : a_n \to a$ *für* $n \to \infty \Leftrightarrow \exists$ *injektive Folge* $(a_n)_n \subset X : a_n \to a$ *für* $n \to \infty$*.*

Beweis:

Beispiel 4.31.

a) $\#X < \infty$ *(X endlich)* $\Rightarrow X' = \emptyset$
b) $(a,b)' = [a,b]$
c) $(\mathbb{Q} \cap (0,1))' = [0,1]$

Beweis:

Definition 4.32. *Sei $X \subset \mathbb{K}$ und $a \in X'$. Dann hat f in a Grenzwert ℓ* ($\lim_{x\to a} f(x) = \ell$) *wenn* $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in X : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Bemerkung: $a \in X' \Rightarrow$ Grenzwert ℓ eindeutig, deshalb Grenzwert nur für Häufungspunkte definiert. (Vergleiche Satz 3.3.)

Proposition 4.33. $f \in \mathcal{F}(X)$ & $a \in X', \ell \in \mathbb{K}$. *Dann sind äquivalent*

a) $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$
b) $\forall (x_n)_n \subset X \setminus \{a\} : x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to \ell$
c) $\widetilde{f} : X \cup \{a\} \to \mathbb{K}$ *mit* $\widetilde{f}(x) = f(x), \forall x \in X \setminus \{a\}, \widetilde{f}(a) = \ell$ *ist stetig in a*

Beweis:

Bemerkung 4.34. *Analog GW $\ell \in \{-\infty, +\infty\}$ oder in $a \in \{-\infty, +\infty\}$ definieren wenn $im(f) \subset \mathbb{R}$ bzw $X = dmn(f) \subset \mathbb{R}$. Hierbei nutzen wir 3.36.b) mit bestimmter Divergenz als Definition. Analog gilt für $X \subset \mathbb{R}$ und $a \in \{-\infty, +\infty\}$, dass $a \in X'$ wenn es eine Folge $(a_n)_n$ in X gibt, die bestimmt gegen ℓ divergiert.*

Korollar 4.35. Algebra für Grenzwerte *Wenn $f, g \in \mathcal{F}(X)$ in $a \in X'$ Grenzwerte in $\mathbb{K}$ haben, dann*

a) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lim_{x\to a} \lambda f + g = \lambda \lim_{x\to a} f + \lim_{x\to a} g$
b) $\lim_{x\to a} f \cdot g = \lim_{x\to a} f \cdot \lim_{x\to a} g$
c) $\forall x \in X \setminus \{a\} : f(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} f \leq \lim_{x\to a} g$

Beweis: Folgt sofort aus 3.13 bzw Algebra für Folgengrenzwerte.

Korollar 4.36. Kettenregeln für Grenzwerte *Sei* $f \in \mathcal{F}(X)$, $a \in X'$ & $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$. *Dann*

a) $(g \in \mathcal{F}(Y \cup \{\ell\})$ *stetig in* $\ell, f(X) \subset Y) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}(g \circ f)(x) = g\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$ *(äussere KR)*

b) *(*$h \in \mathcal{F}(Y)$, $b \in Y'$, $\lim_{y\to b} h(y) = a$ *und* $h(Y \setminus \{b\}) \subset X \setminus \{a\}$*)*
$\Rightarrow \lim_{y\to b}(f \circ h)(y) = \lim_{x\to a} f = l$. *(innere KR)*

Beweis:

Korollar 4.37. $f \in \mathcal{F}(X)$, $a \in X'$ *und* $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \neq 0$. *Dann* $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}$ *(obwohl* $\frac{1}{f}$ *nur auf Teilmenge von* X *definiert!).*

Beispiel 4.38. *(Grenzwerte von Funktionen, die undefiniert in a sind)*

a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{(1/x) - (1/a)}{x - a} = \dfrac{-1}{a^2}$ *für jedes* $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

b) $\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$ *für alle* $a \in \mathbb{C}$ & $\forall n \in \mathbb{N}$,

c) $\lim_{x\to a} \frac{\exp(x) - \exp(a)}{x - a} = \exp(a)$ *wenn* $a \in \mathbb{C}$.

d) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \sin x = 1$ *für* $X = \mathbb{C}$, $\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ *für* $X = \mathbb{R}$ *!*

Beweis:

Beispiel 4.39. *Exponentialfunktion und Eulersche Zahl e*
Man kann leicht zeigen, dass

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exp(\frac{1}{n+1}) \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \exp(\frac{1}{n})$$

und beweist daraus, dass

$$\exp(1) = e \quad \textit{also} \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

wobei die linke Darstellung bedeutend *schneller konvergiert. In Zukunft werden wir deshalb die Notation* $\exp(x)$ *und* e^x *gleichberechtigt verwenden, aber siehe die weiter unten diskutierten Probleme mit komplexen Potenzen.*

Beweis:

Beispiel 4.40. *e ist irrational.*

Beweis:

Beispiel 4.41. *Die Summe der alternierenden harmonischen Reihe ...*
Das müssen wir aus Zeitgründen überspringen, ist aber in Ana 1 für Mathematiker, Moodle Kurs 2022.

Wir betrachten Funktionen definiert auf einem (abgeschlossenen oder offenen) Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ($I = \mathbb{R}$ auch möglich). Viele Definitionen und Resultate gelten auch für $I = \mathbb{C}$, wir werden dies vermerken. Aber für die Anschaulichkeit sollte zunächst $f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}(I)$, $I \subset \mathbb{R}$, vorgestellt werden.

Diese Material lässt sich auch weniger konzentriert und enger an den Schulstoff angelehnt (dh ohne Idee aus 5.2.a) in Otto Forster, Analysis I Kapitel 15 und 16 finden (siehe `https://katalog.ub.uni-leipzig.de/Record/0-1654010022#holdings` als Campuslizenz.)

Definition 5.1. *$f \in \mathcal{F}(I)$ ist differenzierbar in $a \in I$, wenn die Ableitung*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

d.h. der Grenzwert der Differenzenquotienten (Sekantenanstiege des Graphen) von f, in $\mathbb{R}$ existiert. Wir sagen f is differenzierbar auf I wenn f in jedem $a \in I$ differenzierbar ist.

Bemerkung 5.2. a) *Diese übliche Definition der Ableitung ist äquivalent zur* **Definition von Caratheodory**: *$f'(a) = \ell$ wenn es eine Funktion $g \in \mathcal{F}(I)$ gibt, so dass*

(i) *$g(a) = \ell$,*

(ii) *g ist in a stetig, und*

(iii) *$\forall x \in I : f(x) - f(a) = g(x)(x - a)$.*

Vergleiche mit Prop 4.33, die zweite und dritte Bedingung bedeuten, dass der Differenzenquotient einen GW (nämlich $g(a)$) hat, und sind also äquivalent zur Existenz der Ableitung. Die erste Bedingung sagt, dass diese Ableitung den Wert ℓ hat. Eine solche Funktion g ist dann natürlich eindeutig (auch in $x = a$ da stetig), wir nennen sie $CHF_{f,a}$ - **C***aratheodory* **H***ilfs***F***unktion.*

b) *Es gilt $\ell = f'(a)$ genau dann, wenn die affine Hilfsfunktion $h_a(x) = f(a) + \ell(x - a)$ die Funktion f nahe a "gut" (d.h. von Ordnung höher als eins) approximiert, genauer $\ell = f'(a) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} |(f - h_a)x|/|x - a| = 0$. (Wenn f beliebig oft differenzierbar ist, dann gilt $(f - h_a)x \sim \frac{1}{N!} f^{(N)}(a)(x - a)^N$ wobei $N = \min\{n \geq 2\, ;\, f^{(n)}(a) \neq 0\}$, falls $N (> 1)$ existiert und heisst dann Ordnung des Verschwindens von $f - h_a$, siehe Taylorreihe im Folgenden).*

Beispiel 5.3. a) *$\forall n \in \mathbb{N}_0$ ist $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto x^n$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f_n'(a) = na^{n-1} \, \forall a \in \mathbb{R}$ ($f_0(a) = 1, f_0'(a) = 0 \, \forall a$),*

b) *$f_{-1}(x) = \frac{1}{x}$ ist definiert und differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $f_{-1}'(a) = \frac{-1}{a^2}$,*

c) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist differenzierbar auf* $\mathbb{R}$ *mit* $\exp' = \exp$,

d) $\sin, \cos$ *sind auf* $\mathbb{R}$ *differenzierbar mit* $\sin'(a) = \cos(a)$ & $\cos'(a) = -sin(a)$.

e) *Wenn $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir die ungewöhnliche Funktion*

$$WaMo_k(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x^k}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ist in jedem x in $\mathbb{R}$ differenzierbar , $WaMo_k'(0) = 0$ und $WaMo_k'$ in der Null unstetig! Ausserdem ist $WaMo_1'$ beschränkt auf $\mathbb{R}$, und $WaMo_k'$ nahe 0 unbeschränkt wenn $k \geq 2$!

Diese Resultate (ausser e)!) gelten auch in $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, über die komplexe Darstellung des Sinus und Kosinus aus der Exponentialfunktion mittels Eulerscher Formel folgt d) zB. aus c). Die Behauptungen a),b),c) wurden in 4.38 bewiesen.

Details d): da immer $\cos(t) = \frac{1}{2}(\exp(it) + \exp(-it))$, gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a} &= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to a} i\cdot\frac{\exp(ix)-\exp(ia)}{ix-ia} - \lim_{x\to a} i\cdot\frac{\exp(-ix)-\exp(-ia)}{(-ix)-(-ia)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\lim_{z\to ia} i\cdot\frac{\exp(z)-\exp(ia)}{z-ia} - \lim_{u\to -ia} i\cdot\frac{\exp(u)-\exp(-ia)}{u-(-ia)}\right) \quad \textit{mit } z = ix, u = -ix \\
&= \frac{1}{2}(i\exp'(ia) - i\exp'(-ia)) = \frac{-1}{2i}(\exp(ia)-\exp(-ia)) = -\sin(a),
\end{aligned}$$

also $\cos'(a) = \sin'(a)$. Hier nutzten wir in der 2.Zeile, dass wir wegen 4.38.c) wissen, dass die auftretenden GW über $\mathbb{C}$ existieren. Der Beweis, dass $\sin'(a) = \cos(a)$ ist analog, DIY.

Details e): Aus dem Kalkül in Satz 5.5 und 5.6 folgt (wie auch aus der Schule bekannt), dass für alle $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt

$$WaMo_k'(a) = 2a\sin(\frac{1}{a^k}) - (k+1)a^{1-k}\cos(a^{-k}).$$

Ausserdem, da $|\sin(t)| \leq 1$ für alle reellen t, gilt immer

$$\frac{|\,WaMo_k(t) - WaMo_k(0)|}{|t-0|} \leq \frac{|t^2|}{|t|} \leq |t|,$$

also folgt $WaMo_k'(0) = 0$ aus Definition 5.1. Unbeschränktheit bzw Unstetigkeit von $WaMo_k'$ bei Null, ergeben sich leicht aus der obigen Formel wenn wir hier die Nullfolge $a_n = 1/\sqrt[k]{\pi n}$ in $WaMo_k'$ einsetzen, dann haben wir $\cos(a_n^{-k}) = \cos(\pi n) = (-1)^n$, und also

$$\lim_{n\to\infty} WaMo_1'(a_{2n}) = -2 \qquad \textit{and} \qquad \lim_{n\to\infty} WaMo_1'(a_{2n+1}) = +2.$$

Wenn $k > 1$, dann

$$|\lim_{n\to\infty} WaMo_k'(a_n))| = +\infty \ \textit{sowie}\ (-1)^{n+1}\, WaMo_k'(a_n) > 0 \ \textit{wenn}\ n > N_k.$$

Satz 5.4. WICHTIG: *$f \in \mathcal{F}(I)$ differenzierbar in $a \in I \Rightarrow f$ stetig in a.*

Beweis-Idee: Caratheodory Definition und Algebra stetiger Funktionen

Warnung: Diese Implikation ist nicht umkehrbar, z.B. $f(x) = \sqrt{x}$ in $0 \in [0,1]$.

Ähnlich wie zuvor erhalten wir "algebraische Regeln" für das Rechnen mit Ableitungen. Diese unterscheiden sich für Multiplikation und Division von dem *vorher Gewohnten!*

Satz 5.5. Differentialkalkulus *Seien $f, g \in \mathcal{F}(I)$ beide in $a \in I$ differenzierbar. Dann*

a) $\forall \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a)$

b) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$. *(Produktregel)* **UNTERSCHIED zu GW von Produkten**

Beweis-Idee: JDI mit Algebra von GW, wir nutzen Caratheodory:

Wiederum liefert die Verknüpfung differenzierbarer Funktionen differenzierbare Funktionen.

Satz 5.6. Kettenregel *Seien $f : I \to J$, $g \in \mathcal{F}(J)$ und $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle. Wenn f differenzierbar in $a \in I$ und g differenzierbar in $f(a)$, dann ist $g \circ f$ differenzierbar in a mit*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Beweis-Idee: CaratheodoryDef und Satz 5.4. Detailierter

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) = g(f(x)) &= g(f(a)) + CHF_{g,f(a)}(f(x))(f(x) - f(a)) \quad \text{da } \exists g'(f(a)) \\ &= (g \circ f)(a) + CHF_{g,f(a)}(f(x))CHF_{f,a}(x)(x - a) \quad \text{da } \exists f'(a),\end{aligned}$$

Wegen Satz 5.4 ist f stetig in a und also ist $x \mapsto CHF_{g,f(a)}(f(x))CHF_{f,a}(x)$ stetig in a, somit gleich dem gesuchten $CHF_{g\circ f,a}$ und also $(g \circ f)'(a) = CHF_{g\circ f,a}(a) = g'(f(a))f'(a)$.

Bem.: WARNUNG Häufige Beweisansätze beruhend auf

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x - a} = \frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{f(x) - f(a)} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

funktoniern nur wenn $f(x) \neq f(a)$ nahe a, also zB nicht für $f = \mathrm{WaMo}_k$ und $a = 0$.

Korollar 5.7. *Seien $f, g \in \mathcal{F}(I)$ beide in $a \in I$ differenzierbar und sei $g(a) \neq 0$. Dann*

a) *ist $\frac{1}{g} : x \mapsto \frac{1}{g(x)}$ differenzierbar in a mit $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^2}$,*

b) *folgt somit aus der Produktregel auch die* Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Bemerkung Alle in diesem Kapitel bis jetzt bisher formulierten Aussagen gelten auch wenn wir Kreise I, J in $\mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\mathbb{C}$-wertige Funktionen betrachten, und können in vollkommener Analogie bewiesen werden. **Im Weiteren** beschränken wir uns, **falls nicht anders gesagt**, auf **$\mathbb{R}$-wertige** Funktionen auf **reellen Intervallen** - überdies besser vorstellbar.

Satz 5.8. Inverse Funktion *Sei* $f \in C((a,b))$ injektiv *und differenzierbar mit* $f'(x_0) \neq 0$ *in* $x_0 \in (a,b)$. *Dann ist* f^{-1} *definiert auf einem offenen Intervall* J *mit* $y_0 = f(x_0) \in J$ *und ist differenzierbar in* y_0, *wobei* $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Beweis-Idee: ZB. mit Prop 4.22 über strikte Monotonie , Satz 4.23 (f^{-1} ist stetig) und KR für GW Korollar 4.36. Wir berechnen $CHF(f^{-1}, f(a))$ - einfacher!

Details: Nach 4.18 (ZWS) und 4.22 ist $I = f(a,b))$ ein offenes Intervall, und nach nach 5.2.a) gilt

$$\forall x \in (a,b) \setminus \{x_0\} : f(x) - f(x_0) = CHF_{f,x_0}(x)(x - x_0) \neq 0, \text{d.h.}$$

$\forall y \in I \setminus \{y_0\}$ und $x = f^{-1}(y)$: $\quad f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = (x - x_0) = \dfrac{1}{CHF_{f,x_0}(f^{-1}(y))}(y - y_0).$

Da CHF_{f,x_0} in x_0 stetig und ungleich Null ist, ist auch $y \mapsto \frac{1}{CHF_{f,x_0}(f^{-1}(y))}$ stetig in y_0 und also gleich CHF_{f^{-1},y_0}. Dh

$$(f^{-1})'(y_0) = CHF_{f^{-1},y_0}(y_0) = \frac{1}{CHF_{f,x_0}(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{CHF_{f,x_0}(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Bem.: $f(x) = x^3$ zeigt: nur f injektiv reicht nicht, $\tilde{f}(x) = x + \mathrm{WaMo}_2(x)$ zeigt: nur $\tilde{f}$ stetig und $\tilde{f}'(x_0) \neq 0$ reicht nicht als Voraussetzung für (lokale) Invertierbarkeit, denn bei Monotonie kann die Ableitung Vorzeichnen nicht wechseln!

Beispiel 5.9.

a) *Polynom* $p(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ *ist auf* $\mathbb{R}$ *differenzierbar,* $p'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\alpha_k x^{k-1}$.

b) $\forall n \in \mathbb{Z}$ *ist* $f_n : x \mapsto x^n$ *auf* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *defin. und differenzierb.,* $f_n'(a) = na^{n-1}\ \forall a \neq 0$.

c) $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *ist differenzierbar auf* $(0, \infty)$ *mit* $\log'(a) = 1/a\ \forall a > 0$.

d) $\forall p \in \mathbb{R}$ *ist* $f_p : x \mapsto x^p$ *auf* $(0, \infty)$ *definiert und differenzierbar mit* $f_p'(x) = px^{p-1}$.

e) *Auf* $(0, \infty)$ *sei* $f(x) = x^x = \exp(x \log(x))$, *also*

$$f'(x) = \exp(x \log(x))(1 \cdot \log(x) + x \cdot \frac{1}{x}) = (1 + \log(x))x^x,$$

nach Kettenregel, so (nur einfacher) zeigt man auch d).

f) *Definieren* $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ *für alle* $x \notin \{(k + \frac{1}{2})\pi \ :\ k \in \mathbb{Z}\}$. *Dann ist Tangens* π*-periodisch und*

$$\tan'(x) = 1/(\cos(x))^2 = 1 + (\tan(x))^2 > 0 \text{ wo definiert,}$$

tan *wächst also streng monoton auf jedem Teilintervall seines Definitionsbereiches.*

$$\Rightarrow \exists \arctan : (-\infty, \infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\Rightarrow \arctan'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k \ \ \forall x \in (-1, 1).$$

Gibt dann Reihendarstellung für $\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}(-1)^k x^{2k+1}$, *einfach gliedweise integriert- dass das klappt wird noch gezeigt. zB* $\Rightarrow \frac{\pi}{6} = \arctan(\frac{1}{\sqrt{3}})$ *(denn* $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$*) beliebig genau berechenbar!! (Betrüblicherweise langsame Konvergenz)*

Beweis:

Wir betrachten auch höhere Ableitungen:

Definition 5.10. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, wenn $\forall a \in I$ die Funktion f in a differenzierbar ist, dann ist $a \mapsto f'(a)$ eine Funktion $f' \in \mathcal{F}(I)$. Wenn f' differenzierbar in $a \in I$, dann ist $(f')'(a) = f''(a)$ die 2. Ableitung von f in a.*

Allgemeiner: $f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

$$C^n(I) = \{f \in \mathcal{F}(I) \ : \ f \text{ n-mal differenzierbar } \ \& \ f^{(n)} \in C(I)\}.$$

$$\Rightarrow C(I) = C^0(I) \supset C^1(I) \supset C^2(I) \dots, \ \text{setzen } C^\infty(I) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C^n(I).$$

Beispiel 5.11.
- *$f(x) = \exp(x)$, dann $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ da $\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)} = f$ stetig.*
- *$g(x) = \frac{1}{x}$ dann $g \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, weil $g^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)} \, \forall x \neq 0$.*
- *$h(x) = x|x|$, $h'(x) = 2|x|$ also $h \in C^1(\mathbb{R}) \setminus C^2(\mathbb{R})$. Dies kann im Komplexen nicht passieren: $f \in C^1(\mathbb{C}) \Rightarrow f \in C^\infty(\mathbb{C})$!! $\Rightarrow$ Mathematik studieren!! !!☺*

Wir betrachten die ursprüngliche Motivation der Differentialrechnung, das Finden von Maximum und Minimum (auf einem offenen Intervall).

Definition 5.12. *Sei $f \in \mathcal{F}(X)$, $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X$ ist* lokale Maximalstelle(Minimalstelle) *von f wenn $\exists \delta > 0$ so dass*

$$\forall x \in X : |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(a) (f(x) \geq f(a)).$$

Dann ist $f(a)$ lokales Maximum(Minimum) von f.

Bemerk.: Wir sagen a ist lokale Extremstelle wenn a lokale Minimal- oder lokale Maximalstelle ist. Analog sprechen wir von "striktem Maximum (Minimum)" wenn

$$\exists \delta > 0 \, \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > f(a) (f(x) < f(a)).$$

Satz 5.13. Fermat **Notwendige** *Bedingung: Sei I ein* offenes *Intervall. Wenn $x_0 \in I$ eine lokale Extremstelle von $f \in \mathcal{F}(I)$ und f in x_0 differenzierbar , dann $f'(x_0) = 0$.*

Beweis-Idee: "linke mit rechter" Ableitung vergleichen, oBdA lokale Min-Stelle!

Definition 5.14. *$a \in I$ ist kritischer (auch "stationärer" genannt) Punkt von $f \in \mathcal{F}(I)$ wenn $f'(a) = 0$.*

Bemerk.: Wenn $I = [0, 1]$ mit $f(x) = x$ differenzierbar in I, dann ist **keine** der lokalen Extremstellen $0, 1$ kritisch. Also I offen wichtig, sonst Endpunkte gesondert untersuchen.

Funktion $g(x) = x^3$, $x_0 = 0$ zeigt, dass $f'(x_0) = 0$ keine hinreichende Bedingung für x_0 lokale Extremstelle.

Satz 5.15. Rolle *$f \in C([a,b])$ und f auf (a,b) differenzierbar . Wenn $f(a) = f(b)$ dann $\exists x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = 0$.*

Beweis-Idee: Maxium/Minimum suchen, wird ObdA im Inneren angenommen

Satz 5.16. Mittelwertsatz (MWS) *$f \in C([a,b])$ und f auf (a,b) differenzierbar . Dann*

$$\exists x_0 \in (a,b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0).$$

Beweis-Idee: betrachte $h(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ und nutze Rolle, da $h(a) = h(b) = f(a)$.

Bemerkung: Wenn wir die Funktion

$$f : [0,1] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, f(x) = \begin{cases} x & \text{wenn } x^2 < 2 \\ x - 2 & \text{wenn } x^2 > 2 \end{cases},$$

betrachten dann sehen wir dass $f' = 1$ überall im Definitionsbereich, aber f nicht wachsend ist, der MWS (und der Satz von Rolle) gilt also in $\mathbb{Q}$ nicht. Es braucht das Vollständigkeitsaxiom damit das scheinbar Offensichtliche wirklich folgt!

Verallgemeinerter MWS (5.17) wird nach hinten geschoben, würde aber auch hier passen.

Nun können wir höhere Ableitungen benutzen, um *hinreichende* Bedingungen für lokale Extrema zu finden.

Satz 5.23. *Sei f in $x_0 \in (a,b)$ zweimal differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$. Dann*

- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ *ist strikte lokale Minimumstelle von f,*
- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ *ist strikte lokale Maximumstelle von f,*
- $f''(x_0) = 0$ *erlaubt keine Aussage über das Vorliegen einer Extremstelle.*

Beweis-Idee: WICHTIG!! eigentlich muss $f''(x_0)$ gar nicht existieren, wir sehen aus MWS: x_0 strikte lokale Minstelle wenn $f'(x_0 - h) < 0 < f'(x_0 + h)$ für alle $h \in (0, \varepsilon)$, und genau das folgt zB wenn $f''(x_0) > 0 = f'(x_0)$.

Wir wenden den MWS nun an, um auch allgemeiner aus einer lokalen Aussage (über die Ableitung) eine globale (Monotonie) herzuleiten.

Korollar 5.18. *Sei $f \in C([a,b])$ und f auf (a,b) differenzierbar . Dann*

a) *$(\forall x \in (a,b) : f'(x) \geq 0) \Leftrightarrow f$ monoton wachsend auf $[a,b]$. (Analog $f' \leq 0 \Leftrightarrow f$ monoton fallend.)*

b) *$\forall x \in (a,b) : f'(x) > 0) \Rightarrow f$ streng monoton wachsend auf $[a,b]$.*

zB: $e^\pi > \pi^e$.

Die Rückimplikation in b) gilt *nicht*, wie $x \mapsto x^3$ zeigt. Man kann leicht überprüfen, dass unter den Voraussetzung dieses Korollars f streng monoton wachsend auf $[a,b]$ genau dann wenn $((\forall x \in (a,b) : f'(x) \geq 0)\&(\forall x < y \in [a,b] \exists z \in (x,y) : f'(z) > 0))$. Die Konstruktion solch exotischer minimalistischer Funktionen ist schwer.

Nun können wir auch schon (einfachste) Differentialgleichungen rigeros lösen

Korollar 5.19. a) *$\forall x \in (a,b) : f'(x) = 0 \Leftrightarrow \exists c \forall x \in (a,b) : f(x) = c$.*

b) *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Dann $f(x) = f(0)\exp(x)$.*

Beweis: a) direkt aus MWS, b) da $(f(x) \cdot \exp(-x))' = \exp(-x)(f'(x) - f(x)) = 0$ ist nach a) $\forall x : f(x)\exp(-x) = f(0)\exp(-0) = f(0)$.

Wir überspringen/verschieben die Anwendungen des Verallgemeinerten MWS auf später und zeigen, was MWS alles kann.

Definition 5.24. *Ein $f \in \mathcal{F}(I)$, mit I Intervall, ist* konvex *wenn*

$$\forall x, z \in I \, \forall \lambda \in [0,1] : f((1-\lambda)x + \lambda z) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(z),$$

hier oBdA $x < z$.

Satz 5.25. *Sei $f \in \mathcal{F}(I)$, mit $I = (a,b)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) *f konvex in I*

b) *$\forall x < y < z$ in I gilt $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$*

c) $\forall y \in I \, \exists l \in \mathbb{R} \, \forall x \in I : f(x) \geq f(y) + l(x-y)$

d) $\forall n \in \mathbb{N} \, \forall x_1, \ldots, x_n \in I \, \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ *mit* $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ *gilt die* **Jensensche Ungleichung:**

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

[Idee: betrachte $y = \sum_1^n \lambda_i x_i$ in c)]

Beweis:

Satz 5.26. *f differenzierbar im Intervall I, dann f konvex in I genau dann wenn f' monoton wachsend in I.*

Beweis-Idee: Äquivalenz zu 5.25.b) zeigen, "$\Leftarrow$" mit MWS.

Korollar 5.27. *Sei f zweimal diffbar in $I = (a,b)$. Dann f konvex gdw $\forall x \in I : f''(x) \geq 0$.*

Bemerk: Wir nennen f *konkav* wenn $-f$ konvex ist, d.h. wenn $\forall x, y\, \forall \lambda \in (0,1) : f(\lambda x + (1-\lambda)y)) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. Also wenn die benötigten Ableitungen existieren, gilt f konkav gdw. f' mononton fallend gdw. $f'' \leq 0$.

Proposition 5.28. *$f \in C((a,b))$ und sei x_0 kritischer Punkt von f. Wenn f konvex (konkav) auf $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, dann ist x_0 Minimalstelle (Maximalstelle) - sogar global in ganz (a,b).*

Beweis-Idee: Wenn $f'(x_0)$ existiert und ℓ wie in 5.25.c gewählt, dann folgt wie im Beweis von 5.13 Fermat

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+\frac{1}{n}) - f(x_0)}{(x_0+\frac{1}{n}) - x_0} \geq \ell \geq \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0-\frac{1}{n}) - f(x_0)}{(x_0-\frac{1}{n}) - x_0} = f'(x_0).$$

Im kritischen Punkt ist also $\ell = 0$ und damit $f(x) \geq f(y)$ für alle $x \in I$.

Beispiel 5.29. (1) exp *konvex auf* $\mathbb{R}$,

(2) *$\alpha \geq 1$ oder $\alpha \leq 0$ dann $x \mapsto x^\alpha$ konvex auf* $(0,\infty)$.

(2') *$0 \leq \alpha \leq 1$ dann $x \mapsto x^\alpha$ konkav auf* $(0,\infty)$.

(3) log *konkav auf* $(0,\infty)$.

4) sin *konkav wo nichtnegativ, zB auf* $[0,\pi]$*, und konvex wo nichtpositiv, zB* $[\pi, 2\pi]$*. Der* cos *genauso, aber auf anderen (verschobenen) Intervallen. (da $f'' = -f$.)*

Nun zurück zum Übersprungenen

Satz 5.17. Verallgemeinerter MWS $f, g \in C([a,b])$ *und* f, g *auf* (a,b) *differenzierbar . Dann*

$$\exists x_0 \in (a,b) : (f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0).$$

Beweis-Idee: betrachten $h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$ und können Satz von Rolle nutzen, da $h(a) = h(b) = f(a)g(b) - f(b)g(a)$. Wenn $h'(x_0) = 0$, sieht man sofort, dass x_0 die Behauptung erfüllt.

Ein erstaunliche Verallgemeinerung des MWS, in diesem war einfach $g(x) = x$. Gleichwohl lässt sie sich vorstellen als $f(b) - f(a) = g(b) - g(a)$ bedeutet, dass f nicht überall schneller wachsen kann als g und auch g nicht überall schneller wachsen kann als f

Satz 5.20. l'Hospitalsche Regel *Seien* f, g *auf* $(a,b) \subset \mathbb{R}$ *differenzierbar. Mit Notation* $\lim\limits_{x\to a_+} \equiv \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}$*, nehmen wir an*

a) $\exists \ell_f = lim_{x\to a_+} f(x) \& \exists \ell_g = lim_{x\to a_+} g(x)$*, wobei* $(\ell_f, \ell_g) \in \{(0,0), (\pm\infty, \pm\infty)\}$
b) $\forall x \in (a,b) : g'(x) \neq 0$ *(eventuell b näher an a wählen),*

dann $\lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in [-\infty, \infty]$ *impliziert* $\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Wir benutzen hierbei (und erinnern erneut an) die bereits erwähnten Idee uneigentlicher (dh unendlicher) Grenzwerte.

Definition 5.21. *Sei* $X \subset \mathbb{R}, a \in X'$ *und* $f \in \mathcal{F}(X)$*. Dann* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty(-\infty)$ *wenn*

$$\forall T \in \mathbb{R}\, \exists \delta > 0\, \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > T(f(x) < T).$$

Analog, wenn $(\alpha, \infty) \subset X, f \in \mathcal{F}(X)$ *dann*

$$\lim_{x\to+\infty} = l \in \mathbb{R} \text{ wenn } \forall \varepsilon > 0\, \exists C : x > C \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon,$$

$$\lim_{x\to+\infty} = +\infty(-\infty) \text{ wenn } \forall T\, \exists C : x > C \Rightarrow f(x) > T(f(x) < T),$$

mit der entsprechenden Definition von $\lim_{x\to-\infty} f(x)$*, hier* $x < C$*, (C negativ).*

Beweis Satz 5.18: Idee Sei zunächst $a \in \mathbb{R}$. Der Fall $(\ell_f, \ell_g) = (0,0)$ folgt direkt aus dem verallgemeinerten MWS 5.17, da f und g sich bis nach a stetig definieren lassen. Falls ℓ_f, ℓ_g unendlich, dann oBdA $\ell_g = +\infty$ wegen $g' \neq 0$ ist g injektiv (MWS/Satz von Rolle) also (da $\ell_g = +\infty$) strikt fallend auf (a,b). Wir substituieren $y = g(x)$ und müssen also zeigen, dass $\ell = \lim_{y\to+\infty} \frac{h(y)}{y}$ wobei $h(y) = (f(g^{-1}(y))$, also mit KR und Ableitung der Inversen folgt $\lim_{y\to\infty} h'(y) = \lim_{y\to\infty} f'(g^{-1}(y))/g'(g^{-1}(y)) = \ell$ da $g^{-1}(y) \to a_+$ wenn $y \to +\infty$.

Falls $\ell \in \mathbb{R}$ betrachten wir statt h die Funktion $h(y) - \ell \cdot y$, also oBdA $\ell = 0$ und z_z ist $\lim_{y\to\infty} h(y)/y = 0$. Aber wenn $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein Y_0 s.d. $|h'(y)| < \varepsilon/2$ falls $y > Y_0$. Nach MWS also $|h(y) - h(Y_0)| < \varepsilon(y - Y_0)/2$ dh nach Δ-UGl gilt $|h(y)/y| < |h(Y_0)|/y + (\varepsilon/2)(y - Y_0)/y < \varepsilon$ wenn $y > \max(Y_0, 2|h(Y_0)|/\varepsilon)$, wie verlangt.

Wenn andererseits $\ell = +\infty$, dann gibt es für jedes $T > 0$ ein Y_T so dass $h' > 2T + 2$ auf (Y_z, ∞) und also nach MWS für jedes $y > y_T$ haben wir $h(y)/y > (h(Y)/y) + (T+1)2(y - Y_T)/y > (-1) + T + 1 = T$ wenn $y > \max(st|h(Y_T), 2Y_t)$, also auch $\lim_{y\to+\infty} h(y)/y = +\infty = \ell$. Letztlich, wenn $\ell = -\infty$ betrachte $-h$.

Zu guter letzt, wenn $a = -\infty$, dann setzen wir $y = -1/x$ also $lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \lim_{y\to 0+} \hat{f}(y)/\hat{h}(y)$ wobei $\hat{f}(y) = f(-1/y)$ und $\hat{g}(y) = g(1/y)$, also wiederum

$$\lim_{y\to 0_+} \frac{\hat{f}'(y)}{\hat{g}'(y)} = \lim_{y\to 0_+} \frac{f'(-1/y)\frac{1}{y^2}}{g'(-1/y)\frac{1}{y^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$$

und aus dem Vorherigen folgt $\lim_{y\to 0+} \hat{f}(y)/\hat{h}(y) = \ell$. □

Beispiel 5.22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3} = -\dfrac{1}{6}, \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x = 1.$

Beweis:

Nun wollen wir höhere als die 2. Ableitung betrachten, diese beschreiben das Verhalten einer Funktion nahe eines Punktes, indem sie ein sehr gut approximierendes Polynom, das Taylorsche Polynom liefern. Diese Approximation ist wichtig, da sich eigentlich nur Polynome für allgemeines $x \in \mathbb{R}$ effektiv berechnen lassen - aber besonders interessante Funktionen oftmals (zusammen mit ihren Ableitungen) einfach in speziellen Punkten berechenbar sind.

Die naive Idee ist wie folgt: Wenn ein gegebenes $f \in \mathcal{F}((-\delta, \delta))$ ein Polynom p ist, dann können wir dessen Koeffizienten aus den Ableitungen von f in 0 ablesen. In der Tat, falls $p(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^j$, dann $\alpha_0 = p(0) = f(0)$. Weiterhin $f'(0) = p'(0) = \sum_{k=0}^{n} k\alpha_k x^k_{|x=0} = \alpha_1$,

$$f''(0) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\alpha_k x^k_{|x=0} = 1 \cdot 2\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{f''(0)}{1 \cdot 2},$$

$$\text{Analog } \alpha_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \forall k \leq n \text{ und } f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Wenn f also ein Polynom ist, ist es durch seine Ableitungen im sogenannten "Entwicklungspunkt" (hier die Null) vollständig bestimmt. Wir beantworten nun die Frage, was passiert, wenn f kein Polynom, aber wenigstens genügend oft differenzierbar ist, und betrachten hierbei auch einen allgemeinen Entwicklungspunkt.

Definition 5.30. Taylorsche Formel *Sei $f \in C^n([c,d])$ und $a \in (c,d)$. Wenn $f^{(n)}$ differenzierbar auf (c,d), dann haben wir für den Entwicklungspunkt a*

$$\forall x \in (c,d) : f(x) = T_n^f(x;a) + R_n^f(x;a),$$

wobei $T_n^f(x;a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ das Taylorpolynom von Ordnung n für f im Entwicklungspunkt a ist und Restglied $R_n^f(x;a)$ der Ordnung n ist.

Bemerkung: $R_n^f(x;a)$ kann auf verschiedene Weisen abgeschätzt werden kann. Recht leicht zu zeigen (wenn partielles Integrieren eingeführt wurde) ist: sei $f \in C^{n+1}([c,d])$ und $[a,x] \subset [c,d]$ dann gilt (und kann in Weiteren benutzt werden)

$$|R_n^f(x;a)| \leq \max_{t \in [a,x]} |f^{(n+1)}(t)| \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Proposition 5.31. a) *Sei $f : (b,c) \to \mathbb{R}$ gegeben, $(n-1)$ mal in (b,c) differenzierbar und möge $f^{(n)}(a), a \in (b,c)$, existieren. Dann $\lim_{x \to a} |f(x) - T_f^n(x;a)|/|x-a|^n = 0$.*

b) *Sei p_1, p_2 Polynome von Grad höchstens n und sei für ein $a \in \mathbb{R}$ $\lim_{x-c} |p_1(x) - p_2(x)|/|x-a|^n = 0$. Dann ist $p_1 = p_2$. (Hierbei reicht auch ein einseitiger GW)*

Zusammenfassend lässt sich sagen: wenn f in a mindestens n-mal differenzierbar ist und $\lim_{x \to a} |p(x) - f(x)|/|x-a|^n = 0$, $p = T_n^f(\cdot, a)$, das entsprechende Taylorpolynom.
Beweisidee: mit Induktion, l'Hospital bzw Abspaltung von Linearfaktoren.

6. Integralrechnung

Nun wollen wir das Integral einführen. Das geht, vor allem berechungstechnisch am einfachsten wenn wir es mit Differentialrechung in Beziehung bringen. Diese Idee ist aus der Schule hoffentlich bekannt, wir wollen sie exakt herleiten.

Definition 6.1. *Wenn* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*, dann ist* F *eine Stammfunktion von* f *(auf* $[a,b]$*), wenn:* $\forall x \in (a,b) : F'(x) = f(x)$ & $FnC([a,b])$.

Bemerkung: F_1 und F_2 beide Stammfunktion von $f \Rightarrow \forall x : (F_1 - F_2)'(x) = 0 \Rightarrow \exists c \forall x : F_1(x) - F_2(x) = c$ ist eine Konstante nach MWS, dh die Stammfunktion ist eindeutig bis auf additive Konstante.

Definition 6.2. *Wenn* $f \in \mathfrak{R}([a,b])$ & F *Stammfunktion von* f *auf* $[a,b]$*, dann definieren wir das Newtonsche Integral von* f *über* $[a,b]$ *als*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = (N)\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: F|_a^b.$$

Wenn wir davon ausgehen, dass für $f : [a,b] \to [0,\infty)$ das Integral $\int_a^b f(x); dx$ gleich der Fläche $A_f(a,b)$ unter dem Graphen ist (dh die Fläche von $\{(x,y) \ : \ 0 \le y \le f(x)\}$ - wobei wir nicht wirklich wissen, wie Fläche exakt definiert ist!!-, dann sollte diese Begriff additiv sein, also $A_f(a,c) + A_f(c,b) =_f (a,b)$ wenn $a < c < b$ und auch

$$\inf_{[c,b]} f \cdot |b-c| \le A_f(c,b) \le \sup_{[c,b]} f \cdot |b-c|$$

muss gelten, woraus sofort folgt, dass die Funktion $F : c \mapsto A_f(a,c)$ in c die Ableitung $f(c)$ hat, falls f dort stetig. Wenn f also auf ganz $[a,b]$ stetig ist und eine Stammfunktion F hat, dann muss die Fläche $A_f([a,b])$ nach MWS gleich $F(b) - F(a)$ sein.

Was die Fläche ist, klären wir später. Jetzt wollen wir verstehen wie man das Newtonintegral oftmals berechnen, also die Stammfunktion finden kann. Die allgemeine Existenz eine STF für jedes stetige f können wir auch erst später zeigen,

Satz 6.3. *(Substitution)*
Seien $f : [c,d] \to \mathbb{R}, g : [a,b] \to (c,d)$ *stetig, und differenzierbar in* (a,b) *und* F *eine Stammfunktion von* f. *Dann*

a) $F \circ g$ *ist Stammfunktion von* $(f \circ g)g'$ *auf* $[a,b]$

b) *also haben wir*

$$\int\limits_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy.$$

Beweis: nur nachrechnen und Def 6.2 nutzen

Bemerkung g muss hier keine injektive Funktion sein, obwohl dies normalerweise bei einer "Variablentransformation" angenommen wird. Falls allerdings $g(a) > g(b)$ dann müssen wir die Vereinbarung $\int_c^d = -\int_c^d$ nutzen, bzw erhalten diese aus dem Satz mit $g(x) = a + b - x$.

Satz 6.4. *(Partielles Integrieren)*
Sei F *Stammfunktion von* $f \in \mathfrak{F}([a,b])$ *und* G *die STF von* $g \in \mathfrak{F}([a,b])$*Dann ist* FG *ist Stammfunktion von* $fG + Fg$ *auf* $[a,b]$, *und somit*

$$\int\limits_a^b f(x)G(x)dx = FG|_a^b - \int\limits_a^b F(x)g(x)dx.$$

Beweis: nur nachrechnen und Def 6.2 nutzen

Beispiel 6.5. a) $\frac{-\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_a^b \tan(x)\,dx = \log\left(\frac{cos(a)}{\cos(b)}\right).$

b) $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$, *dh. die Fläche des Einheitskreises ist* π. *(wobei* $\frac{\pi}{2}$ *analytisch definiert war als kleinste positive Nullstelle des* cos *!)*

c) *Für* $n \geq 2$ *gilt die rekursive Formel*

$$\int_0^y \sin^n(x)\,dx = -\frac{1}{n}\cos(y)\sin^{n-1}(y) + \frac{n-1}{n}\int_0^y \sin^{n-2}(x)\,dx,$$

welche wiederholt angewandt die Berechnung von $\int_0^y \sin^n(x)\,dx$ *erlaubt.*

d) *aus c) "läßt sich (nicht ganz einfach) herleiten* $\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1} := \lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\frac{4n^2}{4n^2-1}$.
(das Wallis'sche Produkt , Wallis 1616-1703 Oxford)

Satz 6.6. *Integralrestglied in Taylorreihe Sei* $f \in C^{n+1}([c,d])$.*Dann gilt für alle* $a, x \in [c,d]$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k + R_n^f(x;a) \text{ mit } R_n^f(x;a) = \int_a^x \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Bemerkung Diese Restgliedform liefert sofort die am Ende von Kapitel 5 behauptete Restgliedabschätzung.

Berechnen der Stammfunktionen

Wir betrachten jetzt "gute" (z.B. C^1-)Funktionen, wo Existenz der **ST**amm**F**unktion gesichert, Substitution & partielles Integrieren möglich, demonstrieren einiger Methoden zum Finden der STF.

Definition 6.7. *Wenn $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ STF hat, dann schreiben wir*

$$\int f = \int f(x)dx = \{F \in C[a, b] \,:\, F'(x) = f(x) \forall x \in (a, b)\} \neq \emptyset,$$

also

$$\int f = \{F + c, F \text{ eine SFT von } f \text{ auf } [a, b], c \in \mathbb{R}\}(= [F] \text{ für jedes } F \in \int f).$$

Wir kennen bisher folgende STF:

- $\int x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ auf $\mathbb{R}$ $\forall \alpha > 0$, auf $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ $\forall \alpha \neq -1, \alpha < 0$
- $\int \frac{1}{x} = \log(|x|) + c$ auf $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
- $\int \exp = \exp + c$, $\int \sin = -\cos + c$, $\int \cos = \sin + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2} = \tan + c$ auf $k\pi + (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\int \frac{1}{\sin^2} = [-\cot] = (\frac{-\cos}{\sin}) + c$ auf $k\pi + (0, \pi), k \in \mathbb{Z}$
- $\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x) + c_2$ auf $\mathbb{R}$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin + c$ auf $(-1, 1)$

Folgende Regeln hatten wir bereits hergeleitet:

- $F \in C^1$ STF von $f, g \in C^1 \Rightarrow \int fg = Fg - \int Fg'$ (partielle Integration 5.22.)
- F STF von $f : [a, b] \to \mathbb{R}, g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ stetig & $\forall x \in (\alpha, \beta) \exists g'$ dann

$$\int (f \circ g)g' = (\int f) \circ g = F \circ g + c,$$

also wenn g^{-1} existiert, dann

$$\Rightarrow \int f = (\int (f \circ g)g') \circ g^{-1}$$

(Diesen zweite Regel nutzen, wenn man im Integranden nicht die Struktur $(f \circ g)g'$ erkennt, siehe z.B. 6.8.c) unten)

Beispiel 6.8. a) $\int \exp(x) \sin(x)dx = \frac{1}{2} \exp(x) \cdot (\sin x - \cos x) + c$ *mit part. Integration*

b) $\int \log x = \int 1 \cdot \log x = x \cdot \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} = (\log x - 1)x + c$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}^3} = (\int \frac{\cosh}{\cosh^3}) \circ \sin h^{-1} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c$ *mit* $x = \sinh(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}), \cosh(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) = \sinh'(t)$, *dann* $(\cosh(x))^2 = 1 + (\sinh(x))^2$*!*

Definition 6.9. *Rationale Funktionen sind Funktionen von der Form $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, mit p, q Polynome und q nicht identisch Null. Also ist die rationale Funktion f auf $\mathbb{R} \setminus M$ definiert und C^∞, wobei M höchsten $\deg q$ viele Elemente hat.*

Beispiel 6.10. a) $\int \frac{dx}{x^2-5x+6} = \int \frac{1}{(x-2)(x-3)}dx = \int \frac{(x-2)-(x-3)}{(x-2)(x-3)}dx = \int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x-2} =$
$\log|x-3| - \log|x-2| + c = \log(|\frac{x-3}{x-2}|) + c$ *auf* $(-\infty, 2), (2,3)$ *und* $(3,\infty)$

b) $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}dx = \int \frac{6(\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{3}(x-3))}{(x-2)(x-3)}dx = 3\int \frac{dx}{x-3} - 2\int \frac{dx}{x-2}$
$= 3\log|x-3| - 2\log|x-2|$ *auf* $(-\infty, 2), (2,3)$ *und* $(3,\infty)$

Appendix A. Notationen

Wir werden die hier zusammengetragenen Begriffe und Symbole in der Vorlesung jeweils bei Bedarf einführen, dieses Kapitel dient also zur nochmaligen Übersicht.

Definition A.1. Menge *(intuitive Definition von G. Cantor)* ist die Zusammenfassung von Objekten (Elementen), die eine bestimmte Eigenschaft ("die mathematische Aussage $P(x)$ gilt") haben.

Wir schreiben $x \in M$ wenn x ein Element von M ist, d.h. zu M gehört, und $x \notin M$ andernfalls.

Typischerweise studieren wir $\{x \in X \,:\, P(x)\}$, d.h. die Menge aller x aus einer (grossen fixen "Universal-")Menge X, für die die (mathematische) Aussage $P(x)$ wahr ist.

Wir sagen M ist Teilmenge von N (Notation $M \subset N$), wenn alle Elemente von M auch zu N gehören, zwei Mengen sind gleich wenn sie genau die gleichen Elemente haben. (Statt M Teilmenge von N sagen wir oft M ist kleiner(oder auch kleiner gleich) N). Analog zur Ordnungsrelation für reelle Zahlen ist $M \subset N$ gleichbedeutend mit $N \supset M$. wir schreiben $M \subsetneq N$ wenn $M \subset N$ und $M \neq N$ und sagen M ist *strikt* kleiner als N.

Aus gegebenen Mengen M, N konstruieren wir

- $M \cap N = \{x \,:\, x \in M \;\&\; x \in N\}$ Schnittmenge, Durchschnitt von M und N
- $M \cup N = \{x \,:\, x \in M \text{ oder } x \in N\}$ Vereinigung
- $M \setminus N = \{x \,:\, x \in M \;\&\; x \notin N\}$ Differenzmenge
- $M \times N = \{(x, y) \,:\, x \in M \;\&\; y \in N\}$ Produktmenge, wobei $(x, y) = (x', y')$ genau dann wenn $x = x'$ und $y = y'$ - geordnete Paare. Man kann diese auch als Mengen darstellen, zB. $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.
- $\mathfrak{P}(M) = \{N \,:\, N \subset M\}$ die Potenzmenge von M

Spezielle Notation ist reserviert für

- $\emptyset$ leere Menge, enthält *kein* Element
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ natürliche Zahlen
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2 - 1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ganze Zahlen
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \,:\, m \in \mathbb{Z} \;\&\; n \in \mathbb{N}\}$ rationale Zahlen
- $\mathbb{R}$ reellen Zahlen
- $\mathbb{C}$ die komplexen Zahlen

Warnung: $\{\emptyset\} \neq \emptyset$!

Ausserdem bezeichnen wir Intervalle von ganzen oder reellen Zahlen durch die üblichen Notationen (die später flexibler gehandhabt werden):

- $\{k, \dots, m\} = \{l \in \mathbb{Z} \,:\, k \leq l \leq m\}$ wenn $k, m \in \mathbb{Z}$, das ist eine Teilmenge von $\mathbb{N}_0$ bzw. $\mathbb{N}$ wenn $k \in \mathbb{N}_0$ bzw. $k \in \mathbb{N}$,
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall für $a, b \in \mathbb{R}$,
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}$ offenes Intervall für $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, wobei wir $\pm\infty$ nicht als Teil des (algebraischen) Körpers $\mathbb{R}$ betrachten können, aber annehmen, dass $\forall x \in \mathbb{R} \,:\, -\infty < x < \infty$.
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x < b\}$ rechts offenes (halboffenes) Intervall für $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

- $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \leq b\}$ links offenes (halboffenes) Intervall für $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$.

Definition A.2. Quantoren Wir benutzen die Abkürzungen

- $\forall x \ldots$ bedeutet "für alle x gilt ..."
- $\exists x \ldots$ bedeutet "es gibt ein x so dass ..."

Weitere (logische (Junktoren) und andere) Symbole:

- & für "und"
- $\Rightarrow$ für "impliziert" und auch $\curvearrowright$ im sehr ähnlichen Sinne von "also"
- $\Leftrightarrow$ für "genau dann wenn"
- $\lightning$ für "Widerspruch" (erzielt)
- $\#$ für Kardinalität, dh. Anzahl der Elemente einer Menge
- ☺, $\Box$ für q.e.d, d.h. Beweis beendet
-  für Warnung

Eine Abbildung F bildet eine Menge X in eine Menge Y ab, wenn

$$F \subset M \times N, \quad \forall x \in X \exists y \in Y : (x,y) \in F \text{ und } \forall (x,y), (x,y') \in F : y = y'.$$

Wenn $(x,y) \in F$ dann schreiben wir $y = F(x)$. Wir identifizieren also die Abbildung $F = \{(x, F(x)) \;:\; x \in X\}$ mit ihrem "Graphen". Wenn $Y = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}^n$) nennen wir F oftmals Funktion und benutzen gerne kleine Buchstaben $f, g, h, \ldots$.

Eine Abbildung $F : X \to Y$ heißt

- injektiv (auch $1-1$ genannt) wenn $F(x) = F(x') \Rightarrow x = x'$,
- surjektiv (bildet *auf* Y ab, engl "onto") wenn $\forall y \in Y \exists x \in X : F(x) = y$,
- bijektiv wenn F injektiv und surjektiv ist.