Übungsblatt 2

1) a) Sei für $a, b \in \mathbb{R}$ die Funktion $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f_{a,b}(x) = ax + b$$

definiert. Für welche Paare (a, b) reeller Zahlen ist $f_{a,b}$ injektiv und für welche surjektiv. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $(f_{a,b})^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wann immer diese existiert. 2 Pkte

b) Seien X, Y, Z Mengen und $F : X \to Y$ sowie $G : Y \to Z$ Abbildungen. Zeigen Sie:

i) wenn F und G surjektiv sind, dann ist auch $G \circ F$ surjektiv 1 Pkt

ii) F ist injektiv genau dann wenn für alle $X_1, X_2 \subset X$ die Gleichheit $F(X_1 \cap X_2) = F(X_1) \cap F(X_2)$ gilt. 3 Pkte

2) Auf der Menge $M = \{-32767, -32766, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 32766, 32767\} \cup \{\text{NaN}\}$ erklären wir wie folgt die Addition $\oplus$ und die Multiplikation $\otimes$:

$$n \oplus m = \begin{cases} n + m & \text{falls } n \neq \text{NaN und } m \neq \text{NaN und } n + m \in M, \\ \text{NaN} & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$n \otimes m = \begin{cases} n \cdot m & \text{falls } n \neq \text{NaN und } m \neq \text{NaN und } n \cdot m \in M, \\ \text{NaN} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Welche Körperaxiome erfüllt M mit diesen Rechenvorschriften? Begründen Sie Ihre Behauptung!

Erläuterung: M mit diesen Rechenvorschriften ist ein vereinfachtes Modell der ganzen Maschinenzahlen(Mit welcher Bitlänge? 1^+-Punkt). NaN ist dabei der Überlauf (Not a Number), die Operationen $+, \cdot$ sind wohldefiniert da $M \setminus \{\text{NaN}\} \subset \mathbb{R}$. 5 Punkte

Wie immer, begründen Sie Ihre Aussagen sorgfältig! Skizzen können und sollen der Lösungsfindung dienen, sind aber keine Beweise.

Abgabe am 30.10.2024, Details folgen noch.