Def.:

Sei V ein K-Vektorraum und sei $M \subseteq V$.

(i) $\text{span}(M) := \langle M \rangle := L(M) := \{ \underbrace{\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n}_{\text{heißt Linearkombination von } v_1, \ldots, v_n} \mid n \in \mathbb{N}_0,\ v_1, \ldots, v_n \in M,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \}$

heißt lineare Hülle von M.

(ii) M heißt Erzeugendensystem von V $:\Leftrightarrow$ $\text{span}(M) = V$.

Bem.:

(i) $\text{span}(\emptyset) = \{0\}$

(ii) Ist $M = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$, so ist $\text{span}(M) = \{ \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \} =: \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$

Def.:

Sei V ein K-Vektorraum.

V heißt endlich erzeugt $:\Leftrightarrow$ V hat ein endliches Erzeugendensystem.

Satz:

Sei V ein K-Vektorraum und sei $M \subseteq V$. Dann gilt:

(i) $\text{span}(M)$ ist ein Unterraum von V mit $M \subseteq \text{span}(M)$

(ii) Ist $W \subseteq V$ ein Unterraum von V mit $M \subseteq W$, dann gilt: $\text{span}(M) \subseteq W$.

(d.h.: $\text{span}(M)$ ist der kleinste Unterraum von V der M enthält.)

Def.:

Sei V ein K-Vektorraum und seien $v_1,\dots,v_n \in V$.

(i) $v_1,\dots,v_n$ sind linear unabhängig

$:\Leftrightarrow$ $(v_1,\dots,v_n)$ ist linear unabhängig

$:\Leftrightarrow$ $\forall \lambda_1,\dots,\lambda_n \in K: \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$.

$(\Leftrightarrow)$

(ii) $v_1,\dots,v_n$ sind linear abhängig

$:\Leftrightarrow$ $(v_1,\dots,v_n)$ ist linear abhängig

$:\Leftrightarrow$ $v_1,\dots,v_n$ sind nicht linear unabhängig

$\Leftrightarrow$ $\exists \lambda_1,\dots,\lambda_n \in K: \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n = 0 \wedge \exists i \in \{1,\dots,n\}: \lambda_i \neq 0$.

(iii) $v_1,\dots,v_n$ heißt Erzeugendensystem von V

$:\Leftrightarrow$ $(v_1,\dots,v_n)$ ist ein Erzeugendensystem von V

$:\Leftrightarrow$ $\operatorname{span}\{v_1,\dots,v_n\} = V$

(iv) $v_1,\dots,v_n$ heißt Basis von V

$:\Leftrightarrow$ $(v_1,\dots,v_n)$ ist eine Basis von V

$:\Leftrightarrow$ $(v_1,\dots,v_n)$ ist linear unabhängig und ein Erzeugendensystem von V.

Also:

Die Vektoren $v_1,\dots,v_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn gilt:

Die Gleichung: $\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n = 0$ hat nur die triviale Lösung $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$.

Def.:

Sei V ein K-Vektorraum und sei $M \subseteq V$.

(i) M heißt linear unabhängig $:\Leftrightarrow$ $\forall v_1, \dots, v_n \in M$ paarw. versch.: $v_1, \dots, v_n$ sind linear unabhängig

(ii) M heißt linear abhängig $:\Leftrightarrow$ $\exists v_1, \dots, v_n \in M$ paarw. versch.: $v_1, \dots, v_n$ sind linear abhängig.

(iii) M heißt Basis von V $:\Leftrightarrow$ M ist ein Erzeugendensystem und M ist linear unabhängig.

Bsp.:

(i) $\emptyset$ ist linear unabhängig und daher eine Basis von $\{0\}$.

(ii) $\{v\}$ ist linear unabhängig $\Leftrightarrow$ $v \neq 0$.

„$\Rightarrow$" Es gelte $v = 0$. Setze $\lambda := 1 \in K$. Dann ist $\lambda \cdot v = 1 \cdot 0 = 0$ und $\lambda \neq 0$.

Also ist $\{v\}$ linear abhängig.

„$\Leftarrow$" Es gelte $\{v\}$ ist linear abhängig. Dann ex. ein $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$ mit $\lambda \cdot v = 0$

Also ist $v = \lambda^{-1} \cdot \lambda \cdot v = \lambda^{-1} \cdot 0 = 0$.

(iii) Sind $v_1, v_2 \in V$ mit $v_1 \neq v_2$, so gilt:

$\{v_1, v_2\}$ ist linear abhängig $\Leftrightarrow$ $\exists \lambda \in K$: $v_1 = \lambda \cdot v_2$ oder $v_2 = \lambda \cdot v_1$

„$\Rightarrow$" Es gelte $\{v_1, v_2\}$ ist linear abhängig. Dann ex. $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ mit $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 = 0$

und $\lambda_1 \neq 0$ oder $\lambda_2 \neq 0$. O.B.d.A. sei $\lambda_1 \neq 0$. Dann ist $v_1 = \underbrace{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}_{=:\lambda} \cdot v_2$

„$\Leftarrow$" Es gelte: $\exists \lambda \in K$: $v_1 = \lambda \cdot v_2$ oder $v_2 = \lambda \cdot v_1$.

O.B.d.A sei $v_1 = \lambda \cdot v_2$. Dann ist $\underbrace{1}_{\neq 0} \cdot v_1 + (-\lambda) \cdot v_2 = 0$

Also ist $\{v_1, v_2\}$ linear abhängig.

Bsp:

(1) $\emptyset$ ist eine Basis von $\{0\}$.

(2) $\{e_1, \dots, e_n\}$ ist eine Basis von K^n $\left(e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in K^n \right)$

- $\operatorname{span}(e_1, \dots, e_n) = \{ \lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_n \cdot e_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \right\} = K^n$ ✓
- Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ und gelte $\lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_n \cdot e_n = 0$

  $\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0.$ ✓

(3) $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ ist eine Basis von $K_{\leq n}[x]$.

- $\operatorname{span}(1, x, x^2, \dots, x^n) = \{ \lambda_n \cdot x^n + \dots + \lambda_1 \cdot x + \lambda_0 \, 1 \mid \lambda_0, \dots, \lambda_n \in K \} = K_{\leq n}[x]$ ✓
- Seien $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in K$ und gelte $\lambda_n \cdot x^n + \dots + \lambda_1 \cdot x + \lambda_0 \cdot 1 = 0 = 0 \cdot x^n + \dots + 0 \cdot x + 0$

  $\Rightarrow \lambda_0, \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0.$ ✓

Satz:

Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Dann gilt:

(i) V hat eine endliche Basis und jede Basis von V ist endlich.

(ii) Je zwei Basen von V haben gleich viele Elemente.

Def.:

Sei V ein K-Vektorraum.

(i) Ist V endlich erzeugt und hat V eine Basis B mit $|B| = n$, so def. wir $\dim(V) := n$

(ii) Ist V nicht endlich erzeugt, so def. wir $\dim(V) := \infty$

$\dim(V)$ heißt Dimension von V.

Bsp:

(1) $\dim(\{0\}) = 0$, denn $\emptyset$ ist eine Basis von $\{0\}$.

(2) $\dim(K^n) = n$

(3) $\dim(K_{\leq n}[x]) = n+1$

Satz:

Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n$ und seien $v_1, \dots, v_m \in V$. Dann gilt:

(1) Ist $\{v_1, \dots, v_m\}$ ein Erz. Syst. von V, dann gilt $m \geq n$.

Ist also $m < n$, so kann $\{v_1, \dots, v_m\}$ kein Erz. Syst. von V sein.

(2) Ist $\{v_1, \dots, v_m\}$ l.u., dann gilt $m \leq n$.

Ist also $m > n$, so ist $\{v_1, \dots, v_m\}$ l.a.

(3) Ist $\{v_1, \dots, v_m\}$ eine Basis von V, dann gilt $m = n$.

(4) Ist $m = n$, dann ist äquivalent:

(i) $\{v_1, \dots, v_m\}$ ist l.u.

(ii) $\{v_1, \dots, v_m\}$ ist ein Erz. Syst. von V

(iii) $\{v_1, \dots, v_m\}$ ist eine Basis von V

(5) Ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V, dann gilt:

Für jedes $v \in V$ ex. eindeutig bestimmte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$: $v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$.

Satz (Basisergänzungssatz):

Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n$ und sei $\{v_1, \dots, v_m\}$ linear unabhängig. Dann gilt:

$\exists\, v_{m+1}, \dots, v_n \in V: \{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ ist eine Basis von V.

Also: Man kann jede linear unabhängige Menge $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$ zu einer Basis von V ergänzen.

Satz:

Sei V ein K-Vektorraum, seien $v_1, \dots, v_n \in V$ paarw. verschieden und sei $M = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Dann ist äquivalent:

(i) $\{v_1, \dots, v_n\}$ ist linear abhängig

(ii) $\exists\, i \in \{1, \dots, n\}: v_i \in \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$

(iii) $\exists\, i \in \{1, \dots, n\}: \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\} = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$.

Bew.:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Es gelte: $\{v_1, \dots, v_n\}$ ist linear abhängig.

$$\Rightarrow \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K: \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n = 0 \ \wedge\ \exists\, i \in \{1, \dots, n\}: \lambda_i \neq 0.$$

$$\Rightarrow -\lambda_i \cdot v_i = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_{i-1} \cdot v_{i-1} + \lambda_{i+1} \cdot v_{i+1} + \dots + \lambda_n \cdot v_n$$

$$\overset{\lambda_i \neq 0}{\Rightarrow} v_i = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right) \cdot v_1 + \dots + \left(-\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\right) \cdot v_{i-1} + \left(-\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right) \cdot v_{i+1} + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_i}\right) \cdot v_n$$

$$\in \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Es gelte: $\exists\, i \in \{1, \dots, n\}: v_i \in \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$

z.z.: $\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\} = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$.

„$\subseteq$" Klar.

„$\supseteq$" $\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ ist ein Unterraum von V mit

$\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$

$\Rightarrow \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$. $\square$

Problem:

Gegeben seien $a_1, \dots, a_m \in K^n$

- Untersuchen Sie ob $\{a_1, \dots, a_m\}$ linear unabhängig, ein Erzeugendensystem bzw. eine Basis von K^n ist.
- Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{span}\{a_1, \dots, a_m\}$
- Ergänzen Sie eine Basis von $\mathrm{span}\{a_1, \dots, a_m\}$ zu einer Basis von K^n.

Kochrezept:

Schreibe $a_1, \dots, a_m$ als Zeilenvektoren untereinander und mache daraus eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$$

Bringe A auf ZSF.

$$A \to \begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{1j_1} & \cdots & * & * & \cdots & * & \cdots & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{2j_2} & \cdots & * & \cdots & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\
 & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & & \cdots & \\
0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{rj_r} & \cdots & * \\
0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & & \cdots & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_r \\ b_{r+1} \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

mit $b_1, \dots, b_r \in K^n \setminus \{0\}$ und $b_{r+1}, \dots, b_m = 0$, $1 \leq r \leq m$.

Dann gilt: $\{b_1, \dots, b_r\}$ ist eine Basis von $\mathrm{span}\{a_1, \dots, a_m\}$, denn:

- $\mathrm{span}\{b_1, \dots, b_r\} = \mathrm{span}\{b_1, \dots, b_m\} = \mathrm{span}\{a_1, \dots, a_m\}$,

  (elementare Zeilenumformungen ändern die lineare Hülle nicht, denn die lineare Hülle ist ein Teilraum)

- $\{b_1, \dots, b_r\}$ ist linear unabhängig.

  (Die Zeilenvektoren einer Matrix in ZSF sind immer linear unabhängig.)

Insbesondere gilt $\dim(\mathrm{span}\{a_1, \dots, a_m\}) = r$ $\quad$ ($= \mathrm{Rang}(A) = r$)

Zusatz:

Sind $a_1', \dots, a_n' \in K^m$ die Spaltenvektoren von A, so gilt: $\{a_{j_1}', \dots, a_{j_r}'\}$ ist eine Basis von $\mathrm{span}\{a_1, \dots, a_m\}$.

Es gilt:

(1) $\{a_1, \dots, a_m\}$ ist linear unabhängig $\iff r = m$

(2) $\{a_1, \dots, a_m\}$ ist ein Erzeugendensystem von K^n $\iff r = n$

(3) $\{a_1, \dots, a_m\}$ ist eine Basis von K^n $\iff r = m = n$

(4) $\{b_1, \dots, b_r\} \cup \{e_j \mid j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_r\}\}$ ist eine Basis von K^n

Bew.:

(1) „$\Rightarrow$" Sei $\{a_1, \dots, a_m\}$ linear unabhängig. $\{a_1, \dots, a_m\}$ ist ein Erzeugendensystem von $V := \operatorname{span}\{a_1, \dots, a_m\}$, also eine Basis von V. Wegen $\dim(V) = r$, folgt $r = m$

„$\Leftarrow$" Sei $r = m$. Dann gilt für $V := \operatorname{span}\{a_1, \dots, a_m\}$, dass $\dim(V) = r = m$.

$\{a_1, \dots, a_m\}$ ist ein Erzeugendensystem von V.

Also ist $\{a_1, \dots, a_m\}$ linear unabhängig

(2) „$\Rightarrow$" Sei $\{a_1, \dots, a_m\}$ ist ein Erzeugendensystem von K^n

$\Rightarrow \dim(\operatorname{span}\{a_1, \dots, a_m\}) = n$. Andererseits gilt: $\dim(\operatorname{span}\{a_1, \dots, a_m\}) = r$

Also ist $r = n$

„$\Leftarrow$" Sei $r = n$. Dann ist $\dim(\operatorname{span}\{a_1, \dots, a_m\}) = n$. Wegen $\dim(K^n) = n$ folgt $\operatorname{span}\{a_1, \dots, a_m\} = K^n$, d.h. $\{a_1, \dots, a_m\}$ ist ein Erzeugendensystem von K^n.

(3) Folgt aus (1) und (2).

Bsp.:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 .$$

(1) Untersuchen Sie ob $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ linear unabhängig, ein Erzeugendensystem bzw. eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist.

(2) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{span}\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ und ergänzen Sie diese zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

Lösung:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{II + (-1)\cdot I \\ IV + (-2)\cdot I}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{III + (-1)\cdot II \\ IV + (-3)\cdot II}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{IV + (-2)\cdot III \\ -\frac{1}{2}\cdot III}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\operatorname{Rang}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 3 < 4 = \dim \mathbb{R}^4$ $\Rightarrow$ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ist kein Erz. Syst. von $\mathbb{R}^4$.

$\operatorname{Rang}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 3 < 4 = |\{a_1, a_2, a_3, a_4\}|$ $\Rightarrow$ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ist nicht linear unabhängig.

$\{b_1, b_2, b_3\}$ ist eine Basis von $\operatorname{span}\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

Die Pivotindizes sind $j_1 = 1$, $j_2 = 2$, $j_3 = 3$.

$\Rightarrow$ $\{b_1, b_2, b_3\} \cup \{e_4\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^4$. $\quad \left(e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$