UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Vorlesung 8 - Vergleichen der Größen von Mengen, Satz von Cantor-Schröder-Bernstein

Diskrete Strukturen (WS 2024-25)

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

1. Wiederholung

2. Wann haben zwei Mengen gleich viele Elemente - Kardinalitäten

3. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

4. Ordnungsrelation auf Kardinalitäten

5. Formulierung des Satzes von Cantor-Schröder-Bernstein

6. Erster Beweis

7. Kontinuum und Kontinuumshypothese

Für uns die symbole $M \subseteq N$ und $M \subset N$ bedeuten das gleiche, d.h. M ist eine Teilmenge von N

- $f : M \to N$ ist injektiv gdw

- $f: M \to N$ ist injektiv gdw $\big(\forall a, b \in M, a \neq b \to$

- $f : M \to N$ ist injektiv gdw $\big(\forall a, b \in M, a \neq b \to f(a) \neq f(b)\big)$.

- $f : M \to N$ ist injektiv gdw $\big(\forall a, b \in M, a \neq b \to f(a) \neq f(b)\big)$.
- $f : M \to N$ ist surjektiv gdw

- $f: M \to N$ ist injektiv gdw $\big(\forall a, b \in M, a \neq b \to f(a) \neq f(b)\big)$.
- $f: M \to N$ ist surjektiv gdw $\forall b \in N$

- $f : M \to N$ ist injektiv gdw $\big(\forall a, b \in M, a \neq b \to f(a) \neq f(b)\big)$.
- $f : M \to N$ ist surjektiv gdw $\forall b \in N \exists a \in M \mid$

- $f: M \to N$ ist injektiv gdw $\big(\forall a, b \in M, a \neq b \to f(a) \neq f(b)\big)$.
- $f: M \to N$ ist surjektiv gdw $\forall b \in N \exists a \in M \mid f(a) = b$

- $f: M \to N$ ist injektiv gdw $\big(\forall a, b \in M, a \neq b \to f(a) \neq f(b)\big)$.
- $f: M \to N$ ist surjektiv gdw $\forall b \in N \exists a \in M \mid f(a) = b$
- $f: M \to N$ ist bijektiv gdw f ist injektiv und surjektiv.

- $f: M \to N$ ist injektiv gdw $\big(\forall a, b \in M, a \neq b \to f(a) \neq f(b)\big)$.
- $f: M \to N$ ist surjektiv gdw $\forall b \in N \exists a \in M \mid f(a) = b$
- $f: M \to N$ ist bijektiv gdw f ist injektiv und surjektiv.
- Eine Funktion $f: M \to N$ ist

- $f: M \to N$ ist injektiv gdw $\big(\forall a, b \in M, a \neq b \to f(a) \neq f(b)\big)$.
- $f: M \to N$ ist surjektiv gdw $\forall b \in N \exists a \in M \mid f(a) = b$
- $f: M \to N$ ist bijektiv gdw f ist injektiv und surjektiv.
- Eine Funktion $f: M \to N$ ist invertierbar

- $f: M \to N$ ist injektiv gdw $\big(\forall a, b \in M, a \neq b \to f(a) \neq f(b)\big)$.
- $f: M \to N$ ist surjektiv gdw $\forall b \in N \exists a \in M \mid f(a) = b$
- $f: M \to N$ ist bijektiv gdw f ist injektiv und surjektiv.
- Eine Funktion $f: M \to N$ ist invertierbar gdw. eine Funktion $g: N \to M$ existiert,

- $f: M \to N$ ist injektiv gdw $\big(\forall a, b \in M, a \neq b \to f(a) \neq f(b)\big)$.
- $f: M \to N$ ist surjektiv gdw $\forall b \in N \exists a \in M \mid f(a) = b$
- $f: M \to N$ ist bijektiv gdw f ist injektiv und surjektiv.
- Eine Funktion $f: M \to N$ ist invertierbar gdw. eine Funktion $g: N \to M$ existiert, so dass

$$f \,;\, g$$

- $f\colon M \to N$ ist injektiv gdw $\big(\forall a, b \in M, a \neq b \to f(a) \neq f(b)\big)$.
- $f\colon M \to N$ ist surjektiv gdw $\forall b \in N \exists a \in M \mid f(a) = b$
- $f\colon M \to N$ ist bijektiv gdw f ist injektiv und surjektiv.
- Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw. eine Funktion $g\colon N \to M$ existiert, so dass

  $$f\,;g = \mathrm{id}_M$$

  und

- $f\colon M \to N$ ist injektiv gdw $\big(\forall a, b \in M, a \neq b \to f(a) \neq f(b)\big)$.
- $f\colon M \to N$ ist surjektiv gdw $\forall b \in N \exists a \in M \mid f(a) = b$
- $f\colon M \to N$ ist bijektiv gdw f ist injektiv und surjektiv.
- Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw. eine Funktion $g\colon N \to M$ existiert, so dass

  $$f \,;\, g = \mathrm{id}_M$$

  und

  $$g \,;\, f = \mathrm{id}_N.$$

- $f\colon M \to N$ ist injektiv gdw $\big(\forall a, b \in M, a \neq b \to f(a) \neq f(b)\big)$.
- $f\colon M \to N$ ist surjektiv gdw $\forall b \in N \exists a \in M \mid f(a) = b$
- $f\colon M \to N$ ist bijektiv gdw f ist injektiv und surjektiv.
- Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw. eine Funktion $g\colon N \to M$ existiert, so dass
$$f\,;g = \mathrm{id}_M$$
und
$$g\,;f = \mathrm{id}_N.$$
- Äquivalent gesagt:

- $f\colon M \to N$ ist injektiv gdw $\big(\forall a, b \in M, a \neq b \to f(a) \neq f(b)\big)$.
- $f\colon M \to N$ ist surjektiv gdw $\forall b \in N \exists a \in M \mid f(a) = b$
- $f\colon M \to N$ ist bijektiv gdw f ist injektiv und surjektiv.
- Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw. eine Funktion $g\colon N \to M$ existiert, so dass

$$f \,;\, g = \mathrm{id}_M$$

und

$$g \,;\, f = \mathrm{id}_N.$$

- Äquivalent gesagt: für alle $m \in M$ gilt

- $f\colon M \to N$ ist injektiv gdw $\big(\forall a, b \in M, a \neq b \to f(a) \neq f(b)\big)$.
- $f\colon M \to N$ ist surjektiv gdw $\forall b \in N \exists a \in M \mid f(a) = b$
- $f\colon M \to N$ ist bijektiv gdw f ist injektiv und surjektiv.
- Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw. eine Funktion $g\colon N \to M$ existiert, so dass
$$f \,;\, g = \mathrm{id}_M$$
und
$$g \,;\, f = \mathrm{id}_N.$$
- Äquivalent gesagt: für alle $m \in M$ gilt $g(f(m)) = m$

- $f\colon M \to N$ ist injektiv gdw $\big(\forall a, b \in M, a \neq b \to f(a) \neq f(b)\big)$.
- $f\colon M \to N$ ist surjektiv gdw $\forall b \in N \exists a \in M \mid f(a) = b$
- $f\colon M \to N$ ist bijektiv gdw f ist injektiv und surjektiv.
- Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw. eine Funktion $g\colon N \to M$ existiert, so dass
$$f\,;g = \mathrm{id}_M$$
und
$$g\,;f = \mathrm{id}_N.$$
- Äquivalent gesagt: für alle $m \in M$ gilt $g(f(m)) = m$ und für alle $n \in N$ gilt

- $f\colon M \to N$ ist injektiv gdw $\big(\forall a, b \in M, a \neq b \to f(a) \neq f(b)\big)$.
- $f\colon M \to N$ ist surjektiv gdw $\forall b \in N \exists a \in M \mid f(a) = b$
- $f\colon M \to N$ ist bijektiv gdw f ist injektiv und surjektiv.
- Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw. eine Funktion $g\colon N \to M$ existiert, so dass
$$f \,;\, g = \mathrm{id}_M$$
und
$$g \,;\, f = \mathrm{id}_N.$$
- Äquivalent gesagt: für alle $m \in M$ gilt $g(f(m)) = m$ und für alle $n \in N$ gilt $f(g(n)) = n$.

- $f\colon M \to N$ ist injektiv gdw $\big(\forall a, b \in M, a \neq b \to f(a) \neq f(b)\big)$.
- $f\colon M \to N$ ist surjektiv gdw $\forall b \in N \exists a \in M \mid f(a) = b$
- $f\colon M \to N$ ist bijektiv gdw f ist injektiv und surjektiv.
- Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw. eine Funktion $g\colon N \to M$ existiert, so dass
$$f \,;\, g = \mathrm{id}_M$$
und
$$g \,;\, f = \mathrm{id}_N.$$
- Äquivalent gesagt: für alle $m \in M$ gilt $g(f(m)) = m$ und für alle $n \in N$ gilt $f(g(n)) = n$.

Satz. Eine Funktion

- $f\colon M \to N$ ist injektiv gdw $\big(\forall a, b \in M, a \neq b \to f(a) \neq f(b)\big)$.
- $f\colon M \to N$ ist surjektiv gdw $\forall b \in N \exists a \in M \mid f(a) = b$
- $f\colon M \to N$ ist bijektiv gdw f ist injektiv und surjektiv.
- Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw. eine Funktion $g\colon N \to M$ existiert, so dass
$$f \,;\, g = \mathrm{id}_M$$
und
$$g \,;\, f = \mathrm{id}_N.$$
- Äquivalent gesagt: für alle $m \in M$ gilt $g(f(m)) = m$ und für alle $n \in N$ gilt $f(g(n)) = n$.

Satz. Eine Funktion $f\colon M \to N$

- $f: M \to N$ ist injektiv gdw $\big(\forall a, b \in M, a \neq b \to f(a) \neq f(b)\big)$.
- $f: M \to N$ ist surjektiv gdw $\forall b \in N \exists a \in M \mid f(a) = b$
- $f: M \to N$ ist bijektiv gdw f ist injektiv und surjektiv.
- Eine Funktion $f: M \to N$ ist invertierbar gdw. eine Funktion $g: N \to M$ existiert, so dass

$$f\,;g = \mathrm{id}_M$$

und

$$g\,;f = \mathrm{id}_N.$$

- Äquivalent gesagt: für alle $m \in M$ gilt $g(f(m)) = m$ und für alle $n \in N$ gilt $f(g(n)) = n$.

Satz. Eine Funktion $f: M \to N$ ist invertierbar

- $f\colon M \to N$ ist injektiv gdw $\big(\forall a, b \in M, a \neq b \to f(a) \neq f(b)\big)$.
- $f\colon M \to N$ ist surjektiv gdw $\forall b \in N \exists a \in M \mid f(a) = b$
- $f\colon M \to N$ ist bijektiv gdw f ist injektiv und surjektiv.
- Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw. eine Funktion $g\colon N \to M$ existiert, so dass

$$f \,;\, g = \mathrm{id}_M$$

  und

$$g \,;\, f = \mathrm{id}_N.$$

- Äquivalent gesagt: für alle $m \in M$ gilt $g(f(m)) = m$ und für alle $n \in N$ gilt $f(g(n)) = n$.

Satz. Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw.

- $f\colon M \to N$ ist injektiv gdw $\big(\forall a, b \in M, a \neq b \to f(a) \neq f(b)\big)$.
- $f\colon M \to N$ ist surjektiv gdw $\forall b \in N \exists a \in M \mid f(a) = b$
- $f\colon M \to N$ ist bijektiv gdw f ist injektiv und surjektiv.
- Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw. eine Funktion $g\colon N \to M$ existiert, so dass
$$f\,;g = \mathrm{id}_M$$
und
$$g\,;f = \mathrm{id}_N.$$
- Äquivalent gesagt: für alle $m \in M$ gilt $g(f(m)) = m$ und für alle $n \in N$ gilt $f(g(n)) = n$.

Satz. Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw. f ist bijektiv.

Satz.

Satz. (Eindeutigkeit des Inversen)

Satz. (Eindeutigkeit des Inversen) Sei $f\colon M \to N$ und seien $g, g'\colon N \to M$ mit

Satz. (Eindeutigkeit des Inversen) Sei $f\colon M \to N$ und seien $g, g'\colon N \to M$ mit

$$f \,;\, g = \mathrm{id}_M,$$

Satz. (Eindeutigkeit des Inversen) Sei $f\colon M \to N$ und seien $g, g'\colon N \to M$ mit

$$f \mathbin{;} g = \mathrm{id}_M, \quad g \mathbin{;} f = \mathrm{id}_N,$$

Satz. (Eindeutigkeit des Inversen) Sei $f\colon M \to N$ und seien $g, g'\colon N \to M$ mit

$$f \mathbin{;} g = \mathrm{id}_M, \quad g \mathbin{;} f = \mathrm{id}_N,$$

und

$$f \mathbin{;} g' = \mathrm{id}_M,$$

Satz. (Eindeutigkeit des Inversen) Sei $f\colon M \to N$ und seien $g, g'\colon N \to M$ mit

$$f \mathbin{;} g = \mathrm{id}_M, \quad g \mathbin{;} f = \mathrm{id}_N,$$

und

$$f \mathbin{;} g' = \mathrm{id}_M, \quad g' \mathbin{;} f = \mathrm{id}_N.$$

Satz. (Eindeutigkeit des Inversen) Sei $f\colon M \to N$ und seien $g, g'\colon N \to M$ mit

$$f \mathbin{;} g = \mathrm{id}_M, \quad g \mathbin{;} f = \mathrm{id}_N,$$

und

$$f \mathbin{;} g' = \mathrm{id}_M, \quad g' \mathbin{;} f = \mathrm{id}_N.$$

Dann gilt $g = g'$.

Satz. Für jede injektive Funktion $f\colon M \to N$

Satz. Für jede injektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert eine Funktion $g\colon N \to M$,

Satz. Für jede injektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert eine Funktion $g\colon N \to M$, so dass $f;g = \mathrm{id}_M$.

Satz. Für jede injektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert eine Funktion $g\colon N \to M$, so dass $f; g = \mathrm{id}_M$.

Satz. Für jede surjektive Funktion $f\colon M \to N$

Satz. Für jede injektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert eine Funktion $g\colon N \to M$, so dass $f;g = \mathrm{id}_M$.

Satz. Für jede surjektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert eine Funktion $g\colon N \to M$,

Satz. Für jede injektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert eine Funktion $g\colon N \to M$, so dass $f ; g = \mathrm{id}_M$.

Satz. Für jede surjektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert eine Funktion $g\colon N \to M$, so dass $g ; f = \mathrm{id}_N$.

Eine Relation $\preceq$ auf M

Eine Relation $\preceq$ auf M ist eine Ordnungsrelation

Eine Relation $\preceq$ auf M ist eine Ordnungsrelation gdw. sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Eine Relation $\preceq$ auf M ist eine Ordnungsrelation gdw. sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

- $(M, \preceq)$ heißt eine geordnete Menge

Eine Relation $\preceq$ auf M ist eine Ordnungsrelation gdw. sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

- $(M, \preceq)$ heißt eine geordnete Menge oder

> Eine Relation $\preceq$ auf M ist eine Ordnungsrelation gdw. sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

- $(M, \preceq)$ heißt eine geordnete Menge oder eine teilweise geordnete Menge.

Eine Relation $\preceq$ auf M ist eine Ordnungsrelation gdw. sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

- $(M, \preceq)$ heißt eine geordnete Menge oder eine teilweise geordnete Menge.
- Ist $\preceq$ auch vollständig,

Eine Relation $\preceq$ auf M ist eine Ordnungsrelation gdw. sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

- $(M, \preceq)$ heißt eine geordnete Menge oder eine teilweise geordnete Menge.
- Ist $\preceq$ auch vollständig, dann heißt $(M, \preceq)$ auch

Eine Relation $\preceq$ auf M ist eine Ordnungsrelation gdw. sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

- $(M, \preceq)$ heißt eine geordnete Menge oder eine teilweise geordnete Menge.
- Ist $\preceq$ auch vollständig, dann heißt $(M, \preceq)$ auch total geordnete Menge,

Eine Relation $\preceq$ auf M ist eine Ordnungsrelation gdw. sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

- $(M, \preceq)$ heißt eine geordnete Menge oder eine teilweise geordnete Menge.
- Ist $\preceq$ auch vollständig, dann heißt $(M, \preceq)$ auch total geordnete Menge, linear geordnete Menge

Eine Relation $\preceq$ auf M ist eine Ordnungsrelation gdw. sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

- $(M, \preceq)$ heißt eine geordnete Menge oder eine teilweise geordnete Menge.
- Ist $\preceq$ auch vollständig, dann heißt $(M, \preceq)$ auch total geordnete Menge, linear geordnete Menge oder eine Kette.

Eine Relation $\preceq$ auf M ist eine Ordnungsrelation gdw. sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

- $(M, \preceq)$ heißt eine geordnete Menge oder eine teilweise geordnete Menge.
- Ist $\preceq$ auch vollständig, dann heißt $(M, \preceq)$ auch total geordnete Menge, linear geordnete Menge oder eine Kette.
- Insbesondere ist jede total geordnete Menge

Eine Relation $\preceq$ auf M ist eine Ordnungsrelation gdw. sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

- $(M, \preceq)$ heißt eine geordnete Menge oder eine teilweise geordnete Menge.
- Ist $\preceq$ auch vollständig, dann heißt $(M, \preceq)$ auch total geordnete Menge, linear geordnete Menge oder eine Kette.
- Insbesondere ist jede total geordnete Menge auch eine teilweise geordnete Menge.

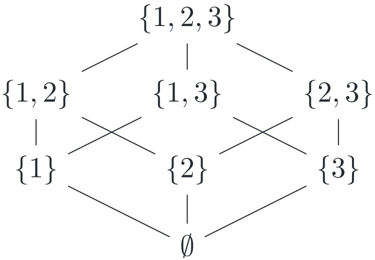
Teilweise geordnete Mengen lassen sich durch Hasse-Diagramme visualisieren.

Teilweise geordnete Mengen lassen sich durch Hasse-Diagramme visualisieren.

Hasse-Digramm für $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$:

Teilweise geordnete Mengen lassen sich durch Hasse-Diagramme visualisieren.

Hasse-Digramm für $(\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \subseteq)$:



Satz. Sei M eine endliche Menge

Satz. Sei M eine endliche Menge und

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion.

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f: M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f: M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis.

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f \colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f: M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} :=$

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$.

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f: M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$,

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f: M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$.

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\to)$

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\to)$ Sei f surjektiv,

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\to)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv.

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\to)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\to)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\to)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\to)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\rightarrow)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ für ein $m \in M$.

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m\in f(M)} c_m$.
- $(\rightarrow)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ fúr ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m\in M} c_m > |M|$.

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\to)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ für ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\rightarrow)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ für ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.
- $(\leftarrow)$

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\rightarrow)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ fúr ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.
- $(\leftarrow)$ Sei f injektiv,

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\rightarrow)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ fúr ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.
- $(\leftarrow)$ Sei f injektiv, aber nicht surjektiv.

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\rightarrow)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ fúr ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.
- $(\leftarrow)$ Sei f injektiv, aber nicht surjektiv. Dann ist

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\to)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ fúr ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.
- $(\leftarrow)$ Sei f injektiv, aber nicht surjektiv. Dann ist $c_m = 1$

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\rightarrow)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ fúr ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.
- $(\leftarrow)$ Sei f injektiv, aber nicht surjektiv. Dann ist $c_m = 1$ für alle $m \in f(M)$

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\to)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ für ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.
- $(\leftarrow)$ Sei f injektiv, aber nicht surjektiv. Dann ist $c_m = 1$ für alle $m \in f(M)$ und

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\to)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ für ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.
- $(\leftarrow)$ Sei f injektiv, aber nicht surjektiv. Dann ist $c_m = 1$ für alle $m \in f(M)$ und $|f(M)| < |M|$.

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\to)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ fúr ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.
- $(\leftarrow)$ Sei f injektiv, aber nicht surjektiv. Dann ist $c_m = 1$ für alle $m \in f(M)$ und $|f(M)| < |M|$. Also auch

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\rightarrow)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ für ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.
- $(\leftarrow)$ Sei f injektiv, aber nicht surjektiv. Dann ist $c_m = 1$ für alle $m \in f(M)$ und $|f(M)| < |M|$. Also auch $\sum_{m \in f(M)} c_m$

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\rightarrow)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ für ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.
- $(\leftarrow)$ Sei f injektiv, aber nicht surjektiv. Dann ist $c_m = 1$ für alle $m \in f(M)$ und $|f(M)| < |M|$. Also auch $\sum_{m \in f(M)} c_m =$

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\to)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ für ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.
- $(\leftarrow)$ Sei f injektiv, aber nicht surjektiv. Dann ist $c_m = 1$ für alle $m \in f(M)$ und $|f(M)| < |M|$. Also auch $\sum_{m \in f(M)} c_m = |f(M)|$

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\rightarrow)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ für ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.
- $(\leftarrow)$ Sei f injektiv, aber nicht surjektiv. Dann ist $c_m = 1$ für alle $m \in f(M)$ und $|f(M)| < |M|$. Also auch $\sum_{m \in f(M)} c_m = |f(M)| <$

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\rightarrow)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ fűr ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.
- $(\leftarrow)$ Sei f injektiv, aber nicht surjektiv. Dann ist $c_m = 1$ für alle $m \in f(M)$ und $|f(M)| < |M|$. Also auch $\sum_{m \in f(M)} c_m = |f(M)| < |M|$.

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\rightarrow)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ fúr ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.
- $(\leftarrow)$ Sei f injektiv, aber nicht surjektiv. Dann ist $c_m = 1$ für alle $m \in f(M)$ und $|f(M)| < |M|$. Also auch $\sum_{m \in f(M)} c_m = |f(M)| < |M|$. Widerspruch.

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\to)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ fúr ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.
- $(\leftarrow)$ Sei f injektiv, aber nicht surjektiv. Dann ist $c_m = 1$ für alle $m \in f(M)$ und $|f(M)| < |M|$. Also auch $\sum_{m \in f(M)} c_m = |f(M)| < |M|$. Widerspruch. $\square$

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\to)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ für ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.
- $(\leftarrow)$ Sei f injektiv, aber nicht surjektiv. Dann ist $c_m = 1$ für alle $m \in f(M)$ und $|f(M)| < |M|$. Also auch $\sum_{m \in f(M)} c_m = |f(M)| < |M|$. Widerspruch. $\square$
- Dieses Resultat

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\rightarrow)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ für ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.
- $(\leftarrow)$ Sei f injektiv, aber nicht surjektiv. Dann ist $c_m = 1$ für alle $m \in f(M)$ und $|f(M)| < |M|$. Also auch $\sum_{m \in f(M)} c_m = |f(M)| < |M|$. Widerspruch. □
- Dieses Resultat gilt nicht

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\rightarrow)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ für ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.
- $(\leftarrow)$ Sei f injektiv, aber nicht surjektiv. Dann ist $c_m = 1$ für alle $m \in f(M)$ und $|f(M)| < |M|$. Also auch $\sum_{m \in f(M)} c_m = |f(M)| < |M|$. Widerspruch. $\square$
- Dieses Resultat gilt nicht für unendliche Mengen.

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f: M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\to)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ für ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.
- $(\leftarrow)$ Sei f injektiv, aber nicht surjektiv. Dann ist $c_m = 1$ für alle $m \in f(M)$ und $|f(M)| < |M|$. Also auch $\sum_{m \in f(M)} c_m = |f(M)| < |M|$. Widerspruch. $\square$
- Dieses Resultat gilt nicht für unendliche Mengen.
  - Z.B. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\to)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ für ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.
- $(\leftarrow)$ Sei f injektiv, aber nicht surjektiv. Dann ist $c_m = 1$ für alle $m \in f(M)$ und $|f(M)| < |M|$. Also auch $\sum_{m \in f(M)} c_m = |f(M)| < |M|$. Widerspruch. $\square$
- Dieses Resultat gilt nicht für unendliche Mengen.
  - Z.B. $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = 2x$

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\rightarrow)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ für ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.
- $(\leftarrow)$ Sei f injektiv, aber nicht surjektiv. Dann ist $c_m = 1$ für alle $m \in f(M)$ und $|f(M)| < |M|$. Also auch $\sum_{m \in f(M)} c_m = |f(M)| < |M|$. Widerspruch. $\square$
- Dieses Resultat gilt nicht für unendliche Mengen.
  - Z.B. $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = 2x$ ist zwar injektiv,

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\to)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ für ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.
- $(\leftarrow)$ Sei f injektiv, aber nicht surjektiv. Dann ist $c_m = 1$ für alle $m \in f(M)$ und $|f(M)| < |M|$. Also auch $\sum_{m \in f(M)} c_m = |f(M)| < |M|$. Widerspruch. $\square$
- Dieses Resultat gilt nicht für unendliche Mengen.
  - Z.B. $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = 2x$ ist zwar injektiv, aber nicht surjektiv.

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\rightarrow)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ für ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.
- $(\leftarrow)$ Sei f injektiv, aber nicht surjektiv. Dann ist $c_m = 1$ für alle $m \in f(M)$ und $|f(M)| < |M|$. Also auch $\sum_{m \in f(M)} c_m = |f(M)| < |M|$. Widerspruch. $\square$
- Dieses Resultat gilt nicht für unendliche Mengen.
  - Z.B. $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = 2x$ ist zwar injektiv, aber nicht surjektiv.
  - $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f : M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\to)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ für ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.
- $(\leftarrow)$ Sei f injektiv, aber nicht surjektiv. Dann ist $c_m = 1$ für alle $m \in f(M)$ und $|f(M)| < |M|$. Also auch $\sum_{m \in f(M)} c_m = |f(M)| < |M|$. Widerspruch. $\square$
- Dieses Resultat gilt nicht für unendliche Mengen.
  - Z.B. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = 2x$ ist zwar injektiv, aber nicht surjektiv.
  - $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \lceil \sqrt{x} \rceil$

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\rightarrow)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ für ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.
- $(\leftarrow)$ Sei f injektiv, aber nicht surjektiv. Dann ist $c_m = 1$ für alle $m \in f(M)$ und $|f(M)| < |M|$. Also auch $\sum_{m \in f(M)} c_m = |f(M)| < |M|$. Widerspruch. $\square$
- Dieses Resultat gilt nicht für unendliche Mengen.
  - Z.B. $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = 2x$ ist zwar injektiv, aber nicht surjektiv.
  - $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \lceil \sqrt{x} \rceil$ ist surjektiv,

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f\colon M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\to)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ für ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.
- $(\leftarrow)$ Sei f injektiv, aber nicht surjektiv. Dann ist $c_m = 1$ für alle $m \in f(M)$ und $|f(M)| < |M|$. Also auch $\sum_{m \in f(M)} c_m = |f(M)| < |M|$. Widerspruch. $\square$
- Dieses Resultat gilt nicht für unendliche Mengen.
  - Z.B. $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = 2x$ ist zwar injektiv, aber nicht surjektiv.
  - $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \lceil \sqrt{x} \rceil$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig,

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$,

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
- Heute werden wir insbesondere sehen

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
- Heute werden wir insbesondere sehen dass es gibt

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
- Heute werden wir insbesondere sehen dass es gibt unendlich viele

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
- Heute werden wir insbesondere sehen dass es gibt unendlich viele Unendlichkeiten.

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
- Heute werden wir insbesondere sehen dass es gibt unendlich viele Unendlichkeiten.
- Erste Beispiele

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
- Heute werden wir insbesondere sehen dass es gibt unendlich viele Unendlichkeiten.
- Erste Beispiele
    - $|\emptyset| \neq |M|$ für alle nicht-leeren Mengen M

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
- Heute werden wir insbesondere sehen dass es gibt unendlich viele Unendlichkeiten.
- Erste Beispiele
  - $|\emptyset| \neq |M|$ für alle nicht-leeren Mengen M
  - $|\{1, 2, 3\}|$

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
- Heute werden wir insbesondere sehen dass es gibt unendlich viele Unendlichkeiten.
- Erste Beispiele
  - $|\emptyset| \neq |M|$ für alle nicht-leeren Mengen M
  - $|\{1, 2, 3\}| =$

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
- Heute werden wir insbesondere sehen dass es gibt unendlich viele Unendlichkeiten.
- Erste Beispiele
  - $|\emptyset| \neq |M|$ für alle nicht-leeren Mengen M
  - $|\{1, 2, 3\}| = |\{6, 9, 11\}|$

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f : M \to N$ existiert.
- Heute werden wir insbesondere sehen dass es gibt unendlich viele Unendlichkeiten.
- Erste Beispiele
    - $|\emptyset| \neq |M|$ für alle nicht-leeren Mengen M
    - $|\{1, 2, 3\}| = |\{6, 9, 11\}|$ via z.B. $\{(1, 6), (2, 9), (3, 11)\}$

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f: M \to N$ existiert.
- Heute werden wir insbesondere sehen dass es gibt unendlich viele Unendlichkeiten.
- Erste Beispiele
  - $|\emptyset| \neq |M|$ für alle nicht-leeren Mengen M
  - $|\{1, 2, 3\}| = |\{6, 9, 11\}|$ via z.B. $\{(1, 6), (2, 9), (3, 11)\}$
  - $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ via Bijektion

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
- Heute werden wir insbesondere sehen dass es gibt unendlich viele Unendlichkeiten.
- Erste Beispiele
  - $|\emptyset| \neq |M|$ für alle nicht-leeren Mengen M
  - $|\{1,\ 2,\ 3\}| = |\{6,\ 9,\ 11\}|$ via z.B. $\{(1,6),\ (2,9),\ (3,11)\}$
  - $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ via Bijektion $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
- Heute werden wir insbesondere sehen dass es gibt unendlich viele Unendlichkeiten.
- Erste Beispiele
  - $|\emptyset| \neq |M|$ für alle nicht-leeren Mengen M
  - $|\{1,\ 2,\ 3\}| = |\{6,\ 9,\ 11\}|$ via z.B. $\{(1,6),\ (2,9),\ (3,11)\}$
  - $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ via Bijektion $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(z) = \begin{cases} 2z & \text{falls } z \geq 0 \\ -(2z+1) & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $\mathcal{U}$ eni Universum von Mengen.

Sei $\mathcal{U}$ eni Universum von Mengen. Dann

Sei $\mathcal{U}$ eni Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit

Sei $\mathcal{U}$ eni Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation

Sei $\mathcal{U}$ eni Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.

Sei $\mathcal{U}$ eni Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.

- Reflexivität:

Sei $\mathcal{U}$ eni Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.

- Reflexivität: id_M is eine Bijektion $M \to M$

Sei $\mathcal{U}$ eni Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.

- Reflexivität: id_M is eine Bijektion $M \to M$ Symmetrie:

Sei $\mathcal{U}$ eni Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.

- Reflexivität: id_M is eine Bijektion $M \to M$ Symmetrie: $f\colon M \to N$ bijektiv,

Sei $\mathcal{U}$ eni Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.

- Reflexivität: id_M is eine Bijektion $M \to M$ Symmetrie: $f\colon M \to N$ bijektiv, dann $f^{-1}\colon N \to M$ bijektiv,

Sei $\mathcal{U}$ eni Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.

- Reflexivität: id_M is eine Bijektion $M \to M$ Symmetrie: $f\colon M \to N$ bijektiv, dann $f^{-1}\colon N \to M$ bijektiv, Transitivität:

Sei $\mathcal{U}$ eni Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.

- Reflexivität: id_M is eine Bijektion $M \to M$ Symmetrie: $f\colon M \to N$ bijektiv, dann $f^{-1}\colon N \to M$ bijektiv, Transitivität: $f\colon A \to B$

Sei $\mathcal{U}$ eni Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.

- Reflexivität: id_M is eine Bijektion $M \to M$ Symmetrie: $f\colon M \to N$ bijektiv, dann $f^{-1}\colon N \to M$ bijektiv, Transitivität: $f\colon A \to B$ $g\colon B \to C$

Sei $\mathcal{U}$ eni Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.

- Reflexivität: id_M is eine Bijektion $M \to M$ Symmetrie: $f\colon M \to N$ bijektiv, dann $f^{-1}\colon N \to M$ bijektiv, Transitivität: $f\colon A \to B$ $g\colon B \to C$ Bijektionen,

Sei $\mathcal{U}$ eni Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.

- Reflexivität: id_M is eine Bijektion $M \to M$ Symmetrie: $f\colon M \to N$ bijektiv, dann $f^{-1}\colon N \to M$ bijektiv, Transitivität: $f\colon A \to B$ $g\colon B \to C$ Bijektionen, dann $f; g$ ist

Sei $\mathcal{U}$ eni Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.

- Reflexivität: id_M is eine Bijektion $M \to M$ Symmetrie: $f\colon M \to N$ bijektiv, dann $f^{-1}\colon N \to M$ bijektiv, Transitivität: $f\colon A \to B$ $g\colon B \to C$ Bijektionen, dann $f;g$ ist auch bijektiv.

Sei $\mathcal{U}$ eni Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.

- Reflexivität: id_M is eine Bijektion $M \to M$ Symmetrie: $f\colon M \to N$ bijektiv, dann $f^{-1}\colon N \to M$ bijektiv, Transitivität: $f\colon A \to B$ $g\colon B \to C$ Bijektionen, dann $f;g$ ist auch bijektiv.

Die Äquivalenzklassen heißen Kardinalitäten.

Sei $\mathcal{U}$ eni Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.

- Reflexivität: id_M is eine Bijektion $M \to M$ Symmetrie: $f\colon M \to N$ bijektiv, dann $f^{-1}\colon N \to M$ bijektiv, Transitivität: $f\colon A \to B$ $g\colon B \to C$ Bijektionen, dann $f;g$ ist auch bijektiv.

  Die Äquivalenzklassen heißen Kardinalitäten.

- Biespiel:

Sei $\mathcal{U}$ eni Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.

- Reflexivität: id_M is eine Bijektion $M \to M$ Symmetrie: $f\colon M \to N$ bijektiv, dann $f^{-1}\colon N \to M$ bijektiv, Transitivität: $f\colon A \to B$ $g\colon B \to C$ Bijektionen, dann $f;g$ ist auch bijektiv.

  Die Äquivalenzklassen heißen Kardinalitäten.

- Biespiel: die Kardinalität von $\{6, 9, 11\}$ heißt

Sei $\mathcal{U}$ eni Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.

- Reflexivität: id_M is eine Bijektion $M \to M$ Symmetrie: $f\colon M \to N$ bijektiv, dann $f^{-1}\colon N \to M$ bijektiv, Transitivität: $f\colon A \to B$ $g\colon B \to C$ Bijektionen, dann $f;g$ ist auch bijektiv.

  Die Äquivalenzklassen heißen Kardinalitäten.

- Biespiel: die Kardinalität von $\{6, 9, 11\}$ heißt "drei".

- Sind alle unendliche Mengen

- Sind alle unendliche Mengen gleichmächtig?

- Sind alle unendliche Mengen gleichmächtig? Andersgesagt:

- Sind alle unendliche Mengen gleichmächtig? Andersgesagt: gibt es nur eine

- Sind alle unendliche Mengen gleichmächtig? Andersgesagt: gibt es nur eine unendliche Kardinalität?

- Sind alle unendliche Mengen gleichmächtig? Andersgesagt: gibt es nur eine unendliche Kardinalität?
- Bevor wie diese Frage betantworten,

- Sind alle unendliche Mengen gleichmächtig? Andersgesagt: gibt es nur eine unendliche Kardinalität?
- Bevor wie diese Frage betantworten, eine kleine Erinnerung:

- Sind alle unendliche Mengen gleichmächtig? Andersgesagt: gibt es nur eine unendliche Kardinalität?
- Bevor wie diese Frage betantworten, eine kleine Erinnerung: die Klasse $\mathcal{U}$ aller Mengen

- Sind alle unendliche Mengen gleichmächtig? Andersgesagt: gibt es nur eine unendliche Kardinalität?
- Bevor wie diese Frage betantworten, eine kleine Erinnerung: die Klasse $\mathcal{U}$ aller Mengen ist selbst

- Sind alle unendliche Mengen gleichmächtig? Andersgesagt: gibt es nur eine unendliche Kardinalität?
- Bevor wie diese Frage betantworten, eine kleine Erinnerung: die Klasse $\mathcal{U}$ aller Mengen ist selbst keine Menge

- Sind alle unendliche Mengen gleichmächtig? Andersgesagt: gibt es nur eine unendliche Kardinalität?
- Bevor wie diese Frage betantworten, eine kleine Erinnerung: die Klasse $\mathcal{U}$ aller Mengen ist selbst keine Menge („Russell Paradox").

- Sind alle unendliche Mengen gleichmächtig? Andersgesagt: gibt es nur eine unendliche Kardinalität?
- Bevor wie diese Frage betantworten, eine kleine Erinnerung: die Klasse $\mathcal{U}$ aller Mengen ist selbst keine Menge ("Russell Paradox").
    - Nehmen wir an,

- Sind alle unendliche Mengen gleichmächtig? Andersgesagt: gibt es nur eine unendliche Kardinalität?
- Bevor wie diese Frage betantworten, eine kleine Erinnerung: die Klasse $\mathcal{U}$ aller Mengen ist selbst keine Menge (“Russell Paradox”).
    - ▶ Nehmen wir an, dass $\mathcal{U}$ eine Menge ist.

- Sind alle unendliche Mengen gleichmächtig? Andersgesagt: gibt es nur eine unendliche Kardinalität?
- Bevor wie diese Frage betantworten, eine kleine Erinnerung: die Klasse $\mathcal{U}$ aller Mengen ist selbst keine Menge ("Russell Paradox").
  - Nehmen wir an, dass $\mathcal{U}$ eine Menge ist. Dann definieren wir $V := \{M \in \mathcal{U} : M \notin M\}$.

- Sind alle unendliche Mengen gleichmächtig? Andersgesagt: gibt es nur eine unendliche Kardinalität?
- Bevor wie diese Frage betantworten, eine kleine Erinnerung: die Klasse $\mathcal{U}$ aller Mengen ist selbst keine Menge (“Russell Paradox”).
    - ▶ Nehmen wir an, dass $\mathcal{U}$ eine Menge ist. Dann definieren wir $V := \{M \in \mathcal{U} : M \notin M\}$. Nun haben wir zwei Möglichkeiten:

- Sind alle unendliche Mengen gleichmächtig? Andersgesagt: gibt es nur eine unendliche Kardinalität?

- Bevor wie diese Frage betantworten, eine kleine Erinnerung: die Klasse $\mathcal{U}$ aller Mengen ist selbst keine Menge ("Russell Paradox").

  - Nehmen wir an, dass $\mathcal{U}$ eine Menge ist. Dann definieren wir $V := \{M \in \mathcal{U} : M \notin M\}$. Nun haben wir zwei Möglichkeiten: $V \in V$

- Sind alle unendliche Mengen gleichmächtig? Andersgesagt: gibt es nur eine unendliche Kardinalität?
- Bevor wie diese Frage betantworten, eine kleine Erinnerung: die Klasse $\mathcal{U}$ aller Mengen ist selbst keine Menge (“Russell Paradox”).
  - Nehmen wir an, dass $\mathcal{U}$ eine Menge ist. Dann definieren wir $V := \{M \in \mathcal{U} : M \notin M\}$. Nun haben wir zwei Möglichkeiten: $V \in V$ oder

- Sind alle unendliche Mengen gleichmächtig? Andersgesagt: gibt es nur eine unendliche Kardinalität?
- Bevor wie diese Frage betantworten, eine kleine Erinnerung: die Klasse $\mathcal{U}$ aller Mengen ist selbst keine Menge ("Russell Paradox").
  - Nehmen wir an, dass $\mathcal{U}$ eine Menge ist. Dann definieren wir $V := \{M \in \mathcal{U} : M \notin M\}$. Nun haben wir zwei Möglichkeiten: $V \in V$ oder $V \notin V$.

- Sind alle unendliche Mengen gleichmächtig? Andersgesagt: gibt es nur eine unendliche Kardinalität?
- Bevor wie diese Frage betantworten, eine kleine Erinnerung: die Klasse $\mathcal{U}$ aller Mengen ist selbst keine Menge (“Russell Paradox”).
    - Nehmen wir an, dass $\mathcal{U}$ eine Menge ist. Dann definieren wir $V := \{M \in \mathcal{U} : M \notin M\}$. Nun haben wir zwei Möglichkeiten: $V \in V$ oder $V \notin V$.
    - Wenn $V \in V$,

- Sind alle unendliche Mengen gleichmächtig? Andersgesagt: gibt es nur eine unendliche Kardinalität?
- Bevor wie diese Frage betantworten, eine kleine Erinnerung: die Klasse $\mathcal{U}$ aller Mengen ist selbst keine Menge ("Russell Paradox").
  - Nehmen wir an, dass $\mathcal{U}$ eine Menge ist. Dann definieren wir $V := \{M \in \mathcal{U} : M \notin M\}$. Nun haben wir zwei Möglichkeiten: $V \in V$ oder $V \notin V$.
  - Wenn $V \in V$, dann schliessen wir,

- Sind alle unendliche Mengen gleichmächtig? Andersgesagt: gibt es nur eine unendliche Kardinalität?
- Bevor wie diese Frage betantworten, eine kleine Erinnerung: die Klasse $\mathcal{U}$ aller Mengen ist selbst keine Menge ("Russell Paradox").
    - Nehmen wir an, dass $\mathcal{U}$ eine Menge ist. Dann definieren wir $V := \{M \in \mathcal{U} : M \notin M\}$. Nun haben wir zwei Möglichkeiten: $V \in V$ oder $V \notin V$.
    - Wenn $V \in V$, dann schliessen wir, durch die Definition von V,

- Sind alle unendliche Mengen gleichmächtig? Andersgesagt: gibt es nur eine unendliche Kardinalität?
- Bevor wie diese Frage betantworten, eine kleine Erinnerung: die Klasse $\mathcal{U}$ aller Mengen ist selbst keine Menge (“Russell Paradox”).
  - Nehmen wir an, dass $\mathcal{U}$ eine Menge ist. Dann definieren wir $V := \{M \in \mathcal{U} : M \notin M\}$. Nun haben wir zwei Möglichkeiten: $V \in V$ oder $V \notin V$.
  - Wenn $V \in V$, dann schliessen wir, durch die Definition von V, dass $V \notin V$.

- Sind alle unendliche Mengen gleichmächtig? Andersgesagt: gibt es nur eine unendliche Kardinalität?

- Bevor wie diese Frage betantworten, eine kleine Erinnerung: die Klasse $\mathcal{U}$ aller Mengen ist selbst keine Menge ("Russell Paradox").

    - Nehmen wir an, dass $\mathcal{U}$ eine Menge ist. Dann definieren wir $V := \{M \in \mathcal{U} : M \notin M\}$. Nun haben wir zwei Möglichkeiten: $V \in V$ oder $V \notin V$.

    - Wenn $V \in V$, dann schliessen wir, durch die Definition von V, dass $V \notin V$. Wenn wir $V \notin V$ annehmen,

- Sind alle unendliche Mengen gleichmächtig? Andersgesagt: gibt es nur eine unendliche Kardinalität?
- Bevor wie diese Frage betantworten, eine kleine Erinnerung: die Klasse $\mathcal{U}$ aller Mengen ist selbst keine Menge ("Russell Paradox").
  - ▶ Nehmen wir an, dass $\mathcal{U}$ eine Menge ist. Dann definieren wir $V := \{M \in \mathcal{U} : M \notin M\}$. Nun haben wir zwei Möglichkeiten: $V \in V$ oder $V \notin V$.
  - ▶ Wenn $V \in V$, dann schliessen wir, durch die Definition von V, dass $V \notin V$. Wenn wir $V \notin V$ annehmen, dann folgt,

- Sind alle unendliche Mengen gleichmächtig? Andersgesagt: gibt es nur eine unendliche Kardinalität?
- Bevor wie diese Frage betantworten, eine kleine Erinnerung: die Klasse $\mathcal{U}$ aller Mengen ist selbst keine Menge (“Russell Paradox”).
  - ▶ Nehmen wir an, dass $\mathcal{U}$ eine Menge ist. Dann definieren wir $V := \{M \in \mathcal{U} : M \notin M\}$. Nun haben wir zwei Möglichkeiten: $V \in V$ oder $V \notin V$.
  - ▶ Wenn $V \in V$, dann schliessen wir, durch die Definition von V, dass $V \notin V$. Wenn wir $V \notin V$ annehmen, dann folgt, dass $V \in V$.

- Sind alle unendliche Mengen gleichmächtig? Andersgesagt: gibt es nur eine unendliche Kardinalität?
- Bevor wie diese Frage betantworten, eine kleine Erinnerung: die Klasse $\mathcal{U}$ aller Mengen ist selbst keine Menge ("Russell Paradox").
  - ▶ Nehmen wir an, dass $\mathcal{U}$ eine Menge ist. Dann definieren wir $V := \{M \in \mathcal{U} : M \notin M\}$. Nun haben wir zwei Möglichkeiten: $V \in V$ oder $V \notin V$.
  - ▶ Wenn $V \in V$, dann schliessen wir, durch die Definition von V, dass $V \notin V$. Wenn wir $V \notin V$ annehmen, dann folgt, dass $V \in V$. Das ist ein Widerspruch.

Satz. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Satz. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Beweis.

Satz. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Beweis. U einen Widerspruch zu bekommen,

Satz. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Beweis. U einen Widerspruch zu bekommen, nehmen wir an

Satz. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Beweis. U einen Widerspruch zu bekommen, nehmen wir an dass $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$.

Satz. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Beweis. U einen Widerspruch zu bekommen, nehmen wir an dass $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Dann existiert eine bijektive Funktion $b \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Satz. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Beweis. U einen Widerspruch zu bekommen, nehmen wir an dass $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Dann existiert eine bijektive Funktion $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Schreibe Bilder als Dezimalzahlen

Satz. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Beweis. U einen Widerspruch zu bekommen, nehmen wir an dass $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Dann existiert eine bijektive Funktion $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Schreibe Bilder als Dezimalzahlen

$$b(0) = \quad a_0 \quad , \quad d_{00} \quad d_{01} \quad d_{02} \quad \cdots \quad d_{0n} \quad \cdots$$

Satz. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Beweis. U einen Widerspruch zu bekommen, nehmen wir an dass $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Dann existiert eine bijektive Funktion $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Schreibe Bilder als Dezimalzahlen

$$\begin{array}{lccccccc} b(0) = & a_0 & , & d_{00} & d_{01} & d_{02} & \cdots & d_{0n} & \cdots \\ b(1) = & a_1 & , & d_{10} & d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & \cdots \end{array}$$

Satz. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Beweis. U einen Widerspruch zu bekommen, nehmen wir an dass $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Dann existiert eine bijektive Funktion $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Schreibe Bilder als Dezimalzahlen

$$
\begin{array}{lccccccc}
b(0) = & a_0 & , & d_{00} & d_{01} & d_{02} & \cdots & d_{0n} & \cdots \\
b(1) = & a_1 & , & d_{10} & d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & \cdots \\
b(2) = & a_2 & , & d_{20} & d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} & \cdots
\end{array}
$$

Satz. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Beweis. U einen Widerspruch zu bekommen, nehmen wir an dass $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Dann existiert eine bijektive Funktion $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Schreibe Bilder als Dezimalzahlen

$$
\begin{array}{rccccccccc}
b(0) = & a_0 & , & d_{00} & d_{01} & d_{02} & \cdots & d_{0n} & \cdots \\
b(1) = & a_1 & , & d_{10} & d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & \cdots \\
b(2) = & a_2 & , & d_{20} & d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Satz. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Beweis. U einen Widerspruch zu bekommen, nehmen wir an dass $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Dann existiert eine bijektive Funktion $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Schreibe Bilder als Dezimalzahlen

$$\begin{array}{rcccccccc}
b(0) = & a_0 & , & \color{red}{d_{00}} & d_{01} & d_{02} & \cdots & d_{0n} & \cdots \\
b(1) = & a_1 & , & d_{10} & \color{red}{d_{11}} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & \cdots \\
b(2) = & a_2 & , & d_{20} & d_{21} & \color{red}{d_{22}} & \cdots & d_{2n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \color{red}{\ddots} & \vdots & \vdots \\
b(n) = & a_n & , & d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \cdots & \color{red}{d_{nn}} & \cdots
\end{array}$$

Satz. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Beweis. U einen Widerspruch zu bekommen, nehmen wir an dass $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Dann existiert eine bijektive Funktion $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Schreibe Bilder als Dezimalzahlen

$$
\begin{array}{rccccccccc}
b(0) = & a_0 & , & d_{00} & d_{01} & d_{02} & \cdots & d_{0n} & \cdots \\
b(1) = & a_1 & , & d_{10} & d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & \cdots \\
b(2) = & a_2 & , & d_{20} & d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
b(n) = & a_n & , & d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Satz. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Beweis. U einen Widerspruch zu bekommen, nehmen wir an dass $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Dann existiert eine bijektive Funktion $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Schreibe Bilder als Dezimalzahlen

$$\begin{array}{rcccccccc}
b(0) = & a_0 & , & \color{red}{d_{00}} & d_{01} & d_{02} & \cdots & d_{0n} & \cdots \\
b(1) = & a_1 & , & d_{10} & \color{red}{d_{11}} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & \cdots \\
b(2) = & a_2 & , & d_{20} & d_{21} & \color{red}{d_{22}} & \cdots & d_{2n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \color{red}{\ddots} & \vdots & \vdots \\
b(n) = & a_n & , & d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \cdots & \color{red}{d_{nn}} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \color{red}{\ddots}
\end{array}$$

Für jedes $i \in \mathbb{N}$,

Satz. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Beweis. U einen Widerspruch zu bekommen, nehmen wir an dass $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Dann existiert eine bijektive Funktion $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Schreibe Bilder als Dezimalzahlen

$$\begin{array}{rccccccccc}
b(0) = & a_0 & , & d_{00} & d_{01} & d_{02} & \cdots & d_{0n} & \cdots \\
b(1) = & a_1 & , & d_{10} & d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & \cdots \\
b(2) = & a_2 & , & d_{20} & d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
b(n) = & a_n & , & d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Für jedes $i \in \mathbb{N}$, wähle eine Ziffer $d_i \in \{1, \ldots, 8\} \setminus \{d_{ii}\}$.

Satz. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Beweis. U einen Widerspruch zu bekommen, nehmen wir an dass $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Dann existiert eine bijektive Funktion $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Schreibe Bilder als Dezimalzahlen

$$
\begin{array}{rccccccccc}
b(0) = & a_0 & , & d_{00} & d_{01} & d_{02} & \cdots & d_{0n} & \cdots \\
b(1) = & a_1 & , & d_{10} & d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & \cdots \\
b(2) = & a_2 & , & d_{20} & d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
b(n) = & a_n & , & d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Für jedes $i \in \mathbb{N}$, wähle eine Ziffer $d_i \in \{1, \ldots, 8\} \setminus \{d_{ii}\}$. Da b surjektiv ist,

Satz. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Beweis. U einen Widerspruch zu bekommen, nehmen wir an dass $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Dann existiert eine bijektive Funktion $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Schreibe Bilder als Dezimalzahlen

$$
\begin{array}{rcccccccc}
b(0) = & a_0 & , & \color{red}{d_{00}} & d_{01} & d_{02} & \cdots & d_{0n} & \cdots \\
b(1) = & a_1 & , & d_{10} & \color{red}{d_{11}} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & \cdots \\
b(2) = & a_2 & , & d_{20} & d_{21} & \color{red}{d_{22}} & \cdots & d_{2n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \color{red}{\ddots} & \vdots & \vdots \\
b(n) = & a_n & , & d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \cdots & \color{red}{d_{nn}} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \color{red}{\ddots}
\end{array}
$$

Für jedes $i \in \mathbb{N}$, wähle eine Ziffer $d_i \in \{1, \ldots, 8\} \setminus \{d_{ii}\}$. Da b surjektiv ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$

Satz. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Beweis. U einen Widerspruch zu bekommen, nehmen wir an dass $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Dann existiert eine bijektive Funktion $b \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Schreibe Bilder als Dezimalzahlen

$$
\begin{array}{rccccccc}
b(0) = & a_0 & , & \color{red}{d_{00}} & d_{01} & d_{02} & \cdots & d_{0n} & \cdots \\
b(1) = & a_1 & , & d_{10} & \color{red}{d_{11}} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & \cdots \\
b(2) = & a_2 & , & d_{20} & d_{21} & \color{red}{d_{22}} & \cdots & d_{2n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \color{red}{\ddots} & \vdots & \vdots \\
b(n) = & a_n & , & d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \cdots & \color{red}{d_{nn}} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \color{red}{\ddots}
\end{array}
$$

Für jedes $i \in \mathbb{N}$, wähle eine Ziffer $d_i \in \{1, \ldots, 8\} \setminus \{d_{ii}\}$. Da b surjektiv ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b(n) = 0, d_0 d_1 d_2 d_3 \ldots$.

Satz. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Beweis. U einen Widerspruch zu bekommen, nehmen wir an dass $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Dann existiert eine bijektive Funktion $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Schreibe Bilder als Dezimalzahlen

$$
\begin{array}{rccccccccc}
b(0) = & a_0 & , & \color{red}{d_{00}} & d_{01} & d_{02} & \cdots & d_{0n} & \cdots \\
b(1) = & a_1 & , & d_{10} & \color{red}{d_{11}} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & \cdots \\
b(2) = & a_2 & , & d_{20} & d_{21} & \color{red}{d_{22}} & \cdots & d_{2n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \color{red}{\ddots} & \vdots & \vdots \\
b(n) = & a_n & , & d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \cdots & \color{red}{d_{nn}} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \color{red}{\ddots}
\end{array}
$$

Für jedes $i \in \mathbb{N}$, wähle eine Ziffer $d_i \in \{1, \ldots, 8\} \setminus \{d_{ii}\}$. Da b surjektiv ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b(n) = 0, d_0 d_1 d_2 d_3 \ldots$.

Was können wir über die n-te Stelle von $b(n)$ sagen?

Satz. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Beweis. U einen Widerspruch zu bekommen, nehmen wir an dass $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Dann existiert eine bijektive Funktion $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Schreibe Bilder als Dezimalzahlen

$$
\begin{array}{rccccccccc}
b(0) = & a_0 & , & \color{red}{d_{00}} & d_{01} & d_{02} & \cdots & d_{0n} & \cdots \\
b(1) = & a_1 & , & d_{10} & \color{red}{d_{11}} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & \cdots \\
b(2) = & a_2 & , & d_{20} & d_{21} & \color{red}{d_{22}} & \cdots & d_{2n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \color{red}{\ddots} & \vdots & \vdots \\
b(n) = & a_n & , & d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \cdots & \color{red}{d_{nn}} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \color{red}{\ddots}
\end{array}
$$

Für jedes $i \in \mathbb{N}$, wähle eine Ziffer $d_i \in \{1, \ldots, 8\} \setminus \{d_{ii}\}$. Da b surjektiv ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b(n) = 0, d_0 d_1 d_2 d_3 \ldots$.

Was können wir über die n-te Stelle von $b(n)$ sagen? Es gilt $d_n =$

Satz. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Beweis. U einen Widerspruch zu bekommen, nehmen wir an dass $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Dann existiert eine bijektive Funktion $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Schreibe Bilder als Dezimalzahlen

$$\begin{array}{rccccccccc}
b(0) = & a_0 & , & d_{00} & d_{01} & d_{02} & \cdots & d_{0n} & \cdots \\
b(1) = & a_1 & , & d_{10} & d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & \cdots \\
b(2) = & a_2 & , & d_{20} & d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
b(n) = & a_n & , & d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Für jedes $i \in \mathbb{N}$, wähle eine Ziffer $d_i \in \{1, \ldots, 8\} \setminus \{d_{ii}\}$. Da b surjektiv ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b(n) = 0, d_0 d_1 d_2 d_3 \ldots$.

Was können wir über die n-te Stelle von $b(n)$ sagen? Es gilt $d_n = d_{nn}$

Satz. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Beweis. U einen Widerspruch zu bekommen, nehmen wir an dass $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Dann existiert eine bijektive Funktion $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Schreibe Bilder als Dezimalzahlen

$$\begin{array}{rcccccccc}
b(0) = & a_0 & , & \color{red}{d_{00}} & d_{01} & d_{02} & \cdots & d_{0n} & \cdots \\
b(1) = & a_1 & , & d_{10} & \color{red}{d_{11}} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & \cdots \\
b(2) = & a_2 & , & d_{20} & d_{21} & \color{red}{d_{22}} & \cdots & d_{2n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \color{red}{\ddots} & \vdots & \vdots \\
b(n) = & a_n & , & d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \cdots & \color{red}{d_{nn}} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \color{red}{\ddots}
\end{array}$$

Für jedes $i \in \mathbb{N}$, wähle eine Ziffer $d_i \in \{1, \ldots, 8\} \setminus \{d_{ii}\}$. Da b surjektiv ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b(n) = 0, d_0 d_1 d_2 d_3 \ldots$.

Was können wir über die n-te Stelle von $b(n)$ sagen? Es gilt $d_n = d_{nn} \neq d_{nn}$.

Satz. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Beweis. U einen Widerspruch zu bekommen, nehmen wir an dass $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Dann existiert eine bijektive Funktion $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Schreibe Bilder als Dezimalzahlen

$$
\begin{array}{rccccccccc}
b(0) = & a_0 & , & d_{00} & d_{01} & d_{02} & \cdots & d_{0n} & \cdots \\
b(1) = & a_1 & , & d_{10} & d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & \cdots \\
b(2) = & a_2 & , & d_{20} & d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
b(n) = & a_n & , & d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Für jedes $i \in \mathbb{N}$, wähle eine Ziffer $d_i \in \{1, \ldots, 8\} \setminus \{d_{ii}\}$. Da b surjektiv ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b(n) = 0, d_0 d_1 d_2 d_3 \ldots$.

Was können wir über die n-te Stelle von $b(n)$ sagen? Es gilt $d_n = d_{nn} \neq d_{nn}$. Dieser Widerspruch zeigt,

Satz. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Beweis. U einen Widerspruch zu bekommen, nehmen wir an dass $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Dann existiert eine bijektive Funktion $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Schreibe Bilder als Dezimalzahlen

$$
\begin{array}{lcccccccc}
b(0) = & a_0 & , & d_{00} & d_{01} & d_{02} & \cdots & d_{0n} & \cdots \\
b(1) = & a_1 & , & d_{10} & d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & \cdots \\
b(2) = & a_2 & , & d_{20} & d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
b(n) = & a_n & , & d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Für jedes $i \in \mathbb{N}$, wähle eine Ziffer $d_i \in \{1, \ldots, 8\} \setminus \{d_{ii}\}$. Da b surjektiv ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b(n) = 0, d_0 d_1 d_2 d_3 \ldots$.

Was können wir über die n-te Stelle von $b(n)$ sagen? Es gilt $d_n = d_{nn} \neq d_{nn}$. Dieser Widerspruch zeigt, dass b kann nicht existieren.

Satz. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Beweis. U einen Widerspruch zu bekommen, nehmen wir an dass $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Dann existiert eine bijektive Funktion $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Schreibe Bilder als Dezimalzahlen

$$
\begin{array}{rccccccccc}
b(0) = & a_0 & , & {\color{red}d_{00}} & d_{01} & d_{02} & \cdots & d_{0n} & \cdots \\
b(1) = & a_1 & , & d_{10} & {\color{red}d_{11}} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & \cdots \\
b(2) = & a_2 & , & d_{20} & d_{21} & {\color{red}d_{22}} & \cdots & d_{2n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & {\color{red}\ddots} & \vdots & \vdots \\
b(n) = & a_n & , & d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \cdots & {\color{red}d_{nn}} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & {\color{red}\ddots}
\end{array}
$$

Für jedes $i \in \mathbb{N}$, wähle eine Ziffer $d_i \in \{1, \ldots, 8\} \setminus \{d_{ii}\}$. Da b surjektiv ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b(n) = 0, d_0 d_1 d_2 d_3 \ldots$.

Was können wir über die n-te Stelle von $b(n)$ sagen? Es gilt $d_n = d_{nn} \neq d_{nn}$. Dieser Widerspruch zeigt, dass b kann nicht existieren. $\square$

- Das war ein “diagonales Argument”.

- Das war ein “diagonales Argument”.
- Die Kardinalität von $\mathbb{N}$

- Das war ein “diagonales Argument”.
- Die Kardinalität von $\mathbb{N}$ heißt

- Das war ein “diagonales Argument”.
- Die Kardinalität von $\mathbb{N}$ heißt “aleph-0”:

- Das war ein “diagonales Argument”.
- Die Kardinalität von $\mathbb{N}$ heißt “aleph-0”: $\aleph_0$.

- Das war ein “diagonales Argument”.
- Die Kardinalität von $\mathbb{N}$ heißt “aleph-0”: $\aleph_0$.
- Die Kardinalität von $\mathbb{R}$

- Das war ein “diagonales Argument”.
- Die Kardinalität von $\mathbb{N}$ heißt “aleph-0”: $\aleph_0$.
- Die Kardinalität von $\mathbb{R}$ heißt

- Das war ein “diagonales Argument”.
- Die Kardinalität von $\mathbb{N}$ heißt “aleph-0”: $\aleph_0$.
- Die Kardinalität von $\mathbb{R}$ heißt “continuum”:

- Das war ein “diagonales Argument”.
- Die Kardinalität von $\mathbb{N}$ heißt “aleph-0”: $\aleph_0$.
- Die Kardinalität von $\mathbb{R}$ heißt “continuum”: $\mathfrak{c}$.

- Wir definieren

- Wir definieren $|M| \leq |N|$

- Wir definieren $|M| \leq |N|$ genau dann wenn

- Wir definieren $|M| \leq |N|$ genau dann wenn es gibt eine Injektion $f\colon M \to N$.

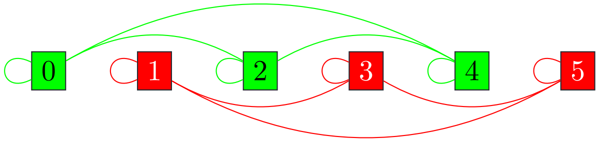
- Wir definieren $|M| \leq |N|$ genau dann wenn es gibt eine Injektion $f\colon M \to N$. Wir möchten erst argumentieren,

- Wir definieren $|M| \leq |N|$ genau dann wenn es gibt eine Injektion $f : M \to N$. Wir möchten erst argumentieren, dass diese Relation wohldefiniert ist.

- Wir definieren $|M| \leq |N|$ genau dann wenn es gibt eine Injektion $f\colon M \to N$. Wir möchten erst argumentieren, dass diese Relation wohldefiniert ist.
- Warum könnte diese Relation überhaupt nicht wohldefiniert sein?

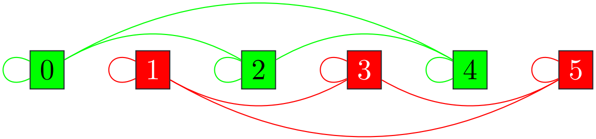
- Wir definieren $|M| \leq |N|$ genau dann wenn es gibt eine Injektion $f\colon M \to N$. Wir möchten erst argumentieren, dass diese Relation wohldefiniert ist.
- Warum könnte diese Relation überhaupt nicht wohldefiniert sein? Betrachten wir ein Beispiel.

- Wir definieren $|M| \leq |N|$ genau dann wenn es gibt eine Injektion $f\colon M \to N$. Wir möchten erst argumentieren, dass diese Relation wohldefiniert ist.
- Warum könnte diese Relation überhaupt nicht wohldefiniert sein? Betrachten wir ein Beispiel.



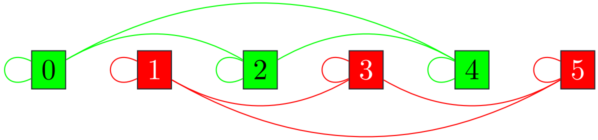
- Wir definieren $|M| \leq |N|$ genau dann wenn es gibt eine Injektion $f \colon M \to N$. Wir möchten erst argumentieren, dass diese Relation wohldefiniert ist.

- Warum könnte diese Relation überhaupt nicht wohldefiniert sein? Betrachten wir ein Beispiel.



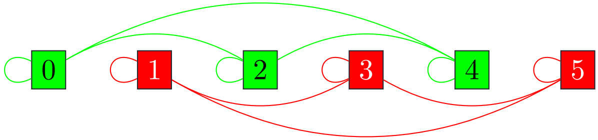
- Die Relation

- Wir definieren $|M| \leq |N|$ genau dann wenn es gibt eine Injektion $f\colon M \to N$. Wir möchten erst argumentieren, dass diese Relation wohldefiniert ist.
- Warum könnte diese Relation überhaupt nicht wohldefiniert sein? Betrachten wir ein Beispiel.



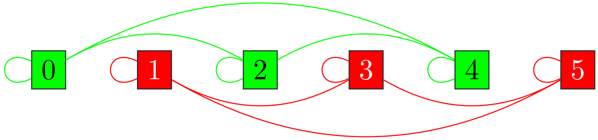
- Die Relation $[i] \prec [j]$

- Wir definieren $|M| \leq |N|$ genau dann wenn es gibt eine Injektion $f\colon M \to N$. Wir möchten erst argumentieren, dass diese Relation wohldefiniert ist.
- Warum könnte diese Relation überhaupt nicht wohldefiniert sein? Betrachten wir ein Beispiel.



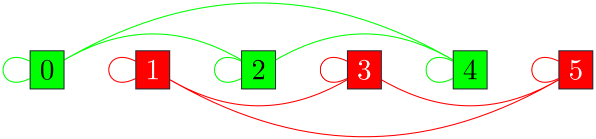
- Die Relation $[i] \prec [j]$ gdw.

- Wir definieren $|M| \leq |N|$ genau dann wenn es gibt eine Injektion $f\colon M \to N$. Wir möchten erst argumentieren, dass diese Relation wohldefiniert ist.
- Warum könnte diese Relation überhaupt nicht wohldefiniert sein? Betrachten wir ein Beispiel.



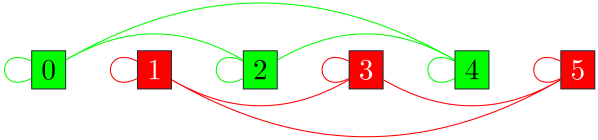
- Die Relation $[i] \prec [j]$ gdw. $i < j$

- Wir definieren $|M| \leq |N|$ genau dann wenn es gibt eine Injektion $f\colon M \to N$. Wir möchten erst argumentieren, dass diese Relation wohldefiniert ist.
- Warum könnte diese Relation überhaupt nicht wohldefiniert sein? Betrachten wir ein Beispiel.



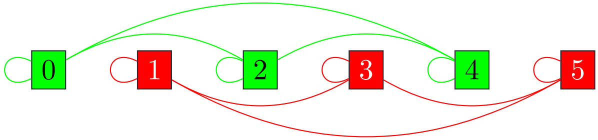
- Die Relation $[i] \prec [j]$ gdw. $i < j$ ist nicht wohldefiniert:

- Wir definieren $|M| \leq |N|$ genau dann wenn es gibt eine Injektion $f: M \to N$. Wir möchten erst argumentieren, dass diese Relation wohldefiniert ist.
- Warum könnte diese Relation überhaupt nicht wohldefiniert sein? Betrachten wir ein Beispiel.



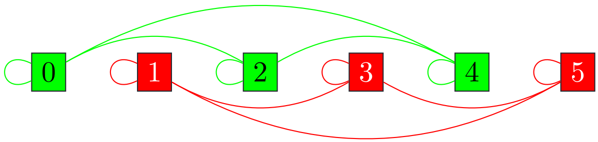
- Die Relation $[i] \prec [j]$ gdw. $i < j$ ist nicht wohldefiniert: $[1] \prec [2] = [0]$

- Wir definieren $|M| \leq |N|$ genau dann wenn es gibt eine Injektion $f : M \to N$. Wir möchten erst argumentieren, dass diese Relation wohldefiniert ist.
- Warum könnte diese Relation überhaupt nicht wohldefiniert sein? Betrachten wir ein Beispiel.



- Die Relation $[i] \prec [j]$ gdw. $i < j$ ist nicht wohldefiniert: $[1] \prec [2] = [0]$ aber auch

- Wir definieren $|M| \leq |N|$ genau dann wenn es gibt eine Injektion $f\colon M \to N$. Wir möchten erst argumentieren, dass diese Relation wohldefiniert ist.
- Warum könnte diese Relation überhaupt nicht wohldefiniert sein? Betrachten wir ein Beispiel.



- Die Relation $[i] \prec [j]$ gdw. $i < j$ ist nicht wohldefiniert: $[1] \prec [2] = [0]$ aber auch $[1] \not\prec [0] = [2]$.

Lemma.

Lemma. Seien M, X, N, Y Mengen,

Lemma. Seien M, X, N, Y Mengen, so dass

Lemma. Seien M, X, N, Y Mengen, so dass $|M| = |X|$

Lemma. Seien M, X, N, Y Mengen, so dass $|M| = |X|$ und

Lemma. Seien M, X, N, Y Mengen, so dass $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$.

Lemma. Seien M, X, N, Y Mengen, so dass $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. Es existiert

Lemma. Seien M, X, N, Y Mengen, so dass $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. Es existiert eine injektive Funktion

Lemma. Seien M, X, N, Y Mengen, so dass $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. Es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$

Lemma. Seien M, X, N, Y Mengen, so dass $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. Es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$ gdw.

Lemma. Seien M, X, N, Y Mengen, so dass $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. Es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$ gdw. es existiert

Lemma. Seien M, X, N, Y Mengen, so dass $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. Es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$ gdw. es existiert eine injektive Funktion

Lemma. Seien M, X, N, Y Mengen, so dass $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. Es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$ gdw. es existiert eine injektive Funktion $g\colon X \to Y$.

Lemma. Seien M, X, N, Y Mengen, so dass $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. Es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$ gdw. es existiert eine injektive Funktion $g\colon X \to Y$.

Beweis.

Lemma. Seien M, X, N, Y Mengen, so dass $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. Es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$ gdw. es existiert eine injektive Funktion $g\colon X \to Y$.

Beweis.

- ($\rightarrow$) Sei $f\colon M \to N$ injektiv.

Lemma. Seien M, X, N, Y Mengen, so dass $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. Es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$ gdw. es existiert eine injektive Funktion $g\colon X \to Y$.

Beweis.

- ($\to$) Sei $f\colon M \to N$ injektiv. Aufgrund der Annahme

Lemma. Seien M, X, N, Y Mengen, so dass $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. Es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$ gdw. es existiert eine injektive Funktion $g\colon X \to Y$.

Beweis.

- ($\to$) Sei $f\colon M \to N$ injektiv. Aufgrund der Annahme $|M| = |X|$

Lemma. Seien M, X, N, Y Mengen, so dass $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. Es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$ gdw. es existiert eine injektive Funktion $g\colon X \to Y$.

Beweis.

- $(\to)$ Sei $f\colon M \to N$ injektiv. Aufgrund der Annahme $|M| = |X|$ und

Lemma. Seien M, X, N, Y Mengen, so dass $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. Es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$ gdw. es existiert eine injektive Funktion $g\colon X \to Y$.

Beweis.

- ($\to$) Sei $f\colon M \to N$ injektiv. Aufgrund der Annahme $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$.

Lemma. Seien M, X, N, Y Mengen, so dass $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. Es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$ gdw. es existiert eine injektive Funktion $g\colon X \to Y$.

Beweis.

- $(\to)$ Sei $f\colon M \to N$ injektiv. Aufgrund der Annahme $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. existieren Bijektionen

Lemma. Seien M, X, N, Y Mengen, so dass $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. Es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$ gdw. es existiert eine injektive Funktion $g\colon X \to Y$.

Beweis.

- $(\to)$ Sei $f\colon M \to N$ injektiv. Aufgrund der Annahme $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. existieren Bijektionen $b\colon X \to M$

Lemma. Seien M, X, N, Y Mengen, so dass $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. Es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$ gdw. es existiert eine injektive Funktion $g\colon X \to Y$.

Beweis.

- ($\to$) Sei $f\colon M \to N$ injektiv. Aufgrund der Annahme $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. existieren Bijektionen $b\colon X \to M$ und

Lemma. Seien M, X, N, Y Mengen, so dass $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. Es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$ gdw. es existiert eine injektive Funktion $g\colon X \to Y$.

Beweis.

- $(\to)$ Sei $f\colon M \to N$ injektiv. Aufgrund der Annahme $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. existieren Bijektionen $b\colon X \to M$ und $c\colon N \to Y$.

Lemma. Seien M, X, N, Y Mengen, so dass $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. Es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$ gdw. es existiert eine injektive Funktion $g\colon X \to Y$.

Beweis.

- ($\to$) Sei $f\colon M \to N$ injektiv. Aufgrund der Annahme $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. existieren Bijektionen $b\colon X \to M$ und $c\colon N \to Y$.

  Dann ist die Funktion $(b\,;f\,;c\colon X \to Y$ injektiv.

Lemma. Seien M, X, N, Y Mengen, so dass $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. Es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$ gdw. es existiert eine injektive Funktion $g\colon X \to Y$.

Beweis.

- ($\to$) Sei $f\colon M \to N$ injektiv. Aufgrund der Annahme $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. existieren Bijektionen $b\colon X \to M$ und $c\colon N \to Y$.

  Dann ist die Funktion $(b\,;f\,;c\colon X \to Y$ injektiv.

- ($\leftarrow$) Durch die Symmetrie der Aussage

Lemma. Seien M, X, N, Y Mengen, so dass $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. Es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$ gdw. es existiert eine injektive Funktion $g\colon X \to Y$.

Beweis.

- ($\to$) Sei $f\colon M \to N$ injektiv. Aufgrund der Annahme $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. existieren Bijektionen $b\colon X \to M$ und $c\colon N \to Y$.

  Dann ist die Funktion $(b\,;f\,;c\colon X \to Y$ injektiv.

- ($\leftarrow$) Durch die Symmetrie der Aussage □

Wortschatz:

Wortschatz: Wir sagen auch

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw.

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw.

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert eine injektive Funktion

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$.

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert eine injektive Funktion $f : M \to N$.

- Für endliche Kardinalitäten

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert eine injektive Funktion $f : M \to N$.

- Für endliche Kardinalitäten erhalten wir

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert eine injektive Funktion $f : M \to N$.

- Für endliche Kardinalitäten erhalten wir die normale Ordnungsrelation

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$.

- Für endliche Kardinalitäten erhalten wir die normale Ordnungsrelation $|\{1, 2\}| \leq |\{2, 3, 4\}|$

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert eine injektive Funktion $f: M \to N$.

- Für endliche Kardinalitäten erhalten wir die normale Ordnungsrelation $|\{1, 2\}| \leq |\{2, 3, 4\}|$
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$.

- Für endliche Kardinalitäten erhalten wir die normale Ordnungsrelation $|\{1, 2\}| \leq |\{2, 3, 4\}|$
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$ vermittels $\iota\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $\iota(n) = n$.

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$.

- Für endliche Kardinalitäten erhalten wir die normale Ordnungsrelation $|\{1, 2\}| \leq |\{2, 3, 4\}|$
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$ vermittels $\iota\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $\iota(n) = n$. Wir haben auch $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$.

- Für endliche Kardinalitäten erhalten wir die normale Ordnungsrelation $|\{1, 2\}| \leq |\{2, 3, 4\}|$
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$ vermittels $\iota\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $\iota(n) = n$. Wir haben auch $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$,

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$.

- Für endliche Kardinalitäten erhalten wir die normale Ordnungsrelation $|\{1, 2\}| \leq |\{2, 3, 4\}|$
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$ vermittels $\iota\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $\iota(n) = n$. Wir haben auch $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$, und $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert eine injektive Funktion $f: M \to N$.

- Für endliche Kardinalitäten erhalten wir die normale Ordnungsrelation $|\{1, 2\}| \leq |\{2, 3, 4\}|$
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$ vermittels $\iota: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $\iota(n) = n$. Wir haben auch $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$, und $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.
- Sei $M \subseteq N$.

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$.

- Für endliche Kardinalitäten erhalten wir die normale Ordnungsrelation $|\{1, 2\}| \leq |\{2, 3, 4\}|$
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$ vermittels $\iota\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $\iota(n) = n$. Wir haben auch $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$, und $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.
- Sei $M \subseteq N$. Dann gilt $|M| \leq |N|$,

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$.

- Für endliche Kardinalitäten erhalten wir die normale Ordnungsrelation $|\{1, 2\}| \leq |\{2, 3, 4\}|$
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$ vermittels $\iota\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $\iota(n) = n$. Wir haben auch $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$, und $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.
- Sei $M \subseteq N$. Dann gilt $|M| \leq |N|$, da $\iota\colon M \to N$,

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$.

- Für endliche Kardinalitäten erhalten wir die normale Ordnungsrelation $|\{1, 2\}| \leq |\{2, 3, 4\}|$
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$ vermittels $\iota\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $\iota(n) = n$. Wir haben auch $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$, und $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.
- Sei $M \subseteq N$. Dann gilt $|M| \leq |N|$, da $\iota\colon M \to N$, mit $\iota(m) = m$,

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert eine injektive Funktion $f \colon M \to N$.

- Für endliche Kardinalitäten erhalten wir die normale Ordnungsrelation $|\{1, 2\}| \leq |\{2, 3, 4\}|$
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$ vermittels $\iota \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $\iota(n) = n$. Wir haben auch $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$, und $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.
- Sei $M \subseteq N$. Dann gilt $|M| \leq |N|$, da $\iota \colon M \to N$, mit $\iota(m) = m$, ist injektiv.

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$.

- Für endliche Kardinalitäten erhalten wir die normale Ordnungsrelation $|\{1, 2\}| \leq |\{2, 3, 4\}|$
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$ vermittels $\iota\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $\iota(n) = n$. Wir haben auch $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$, und $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.
- Sei $M \subseteq N$. Dann gilt $|M| \leq |N|$, da $\iota\colon M \to N$, mit $\iota(m) = m$, ist injektiv.
-

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$.

- Für endliche Kardinalitäten erhalten wir die normale Ordnungsrelation $|\{1, 2\}| \leq |\{2, 3, 4\}|$
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$ vermittels $\iota\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $\iota(n) = n$. Wir haben auch $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$, und $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.
- Sei $M \subseteq N$. Dann gilt $|M| \leq |N|$, da $\iota\colon M \to N$, mit $\iota(m) = m$, ist injektiv.
- Sei $f\colon M \to N$ surjektiv.

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert eine injektive Funktion $f: M \to N$.

- Für endliche Kardinalitäten erhalten wir die normale Ordnungsrelation $|\{1, 2\}| \leq |\{2, 3, 4\}|$
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$ vermittels $\iota: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $\iota(n) = n$. Wir haben auch $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$, und $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.
- Sei $M \subseteq N$. Dann gilt $|M| \leq |N|$, da $\iota: M \to N$, mit $\iota(m) = m$, ist injektiv.
- Sei $f: M \to N$ surjektiv. Dann $|N| \leq |M|$. In der Tat,

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$.

- Für endliche Kardinalitäten erhalten wir die normale Ordnungsrelation $|\{1, 2\}| \leq |\{2, 3, 4\}|$
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$ vermittels $\iota\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $\iota(n) = n$. Wir haben auch $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$, und $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.
- Sei $M \subseteq N$. Dann gilt $|M| \leq |N|$, da $\iota\colon M \to N$, mit $\iota(m) = m$, ist injektiv.
- Sei $f\colon M \to N$ surjektiv. Dann $|N| \leq |M|$. In der Tat, sei $g\colon N \to M$

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$.

- Für endliche Kardinalitäten erhalten wir die normale Ordnungsrelation $|\{1, 2\}| \leq |\{2, 3, 4\}|$
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$ vermittels $\iota\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $\iota(n) = n$. Wir haben auch $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$, und $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.
- Sei $M \subseteq N$. Dann gilt $|M| \leq |N|$, da $\iota\colon M \to N$, mit $\iota(m) = m$, ist injektiv.
- Sei $f\colon M \to N$ surjektiv. Dann $|N| \leq |M|$. In der Tat, sei $g\colon N \to M$ mit $g; f = \mathrm{id}_M$.

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert eine injektive Funktion $f: M \to N$.

- Für endliche Kardinalitäten erhalten wir die normale Ordnungsrelation $|\{1, 2\}| \leq |\{2, 3, 4\}|$
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$ vermittels $\iota: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $\iota(n) = n$. Wir haben auch $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$, und $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.
- Sei $M \subseteq N$. Dann gilt $|M| \leq |N|$, da $\iota: M \to N$, mit $\iota(m) = m$, ist injektiv.
- Sei $f: M \to N$ surjektiv. Dann $|N| \leq |M|$. In der Tat, sei $g: N \to M$ mit $g; f = \mathrm{id}_M$. Dann g ist injektiv:

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$.

- Für endliche Kardinalitäten erhalten wir die normale Ordnungsrelation $|\{1, 2\}| \leq |\{2, 3, 4\}|$
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$ vermittels $\iota\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $\iota(n) = n$. Wir haben auch $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$, und $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.
- Sei $M \subseteq N$. Dann gilt $|M| \leq |N|$, da $\iota\colon M \to N$, mit $\iota(m) = m$, ist injektiv.
- Sei $f\colon M \to N$ surjektiv. Dann $|N| \leq |M|$. In der Tat, sei $g\colon N \to M$ mit $g; f = \mathrm{id}_M$. Dann g ist injektiv: wenn x, y sind so

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$.

- Für endliche Kardinalitäten erhalten wir die normale Ordnungsrelation $|\{1, 2\}| \leq |\{2, 3, 4\}|$
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$ vermittels $\iota\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $\iota(n) = n$. Wir haben auch $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$, und $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.
- Sei $M \subseteq N$. Dann gilt $|M| \leq |N|$, da $\iota\colon M \to N$, mit $\iota(m) = m$, ist injektiv.
- Sei $f\colon M \to N$ surjektiv. Dann $|N| \leq |M|$. In der Tat, sei $g\colon N \to M$ mit $g; f = \mathrm{id}_M$. Dann g ist injektiv: wenn x, y sind so dass $g(x) = g(y)$,

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$.

- Für endliche Kardinalitäten erhalten wir die normale Ordnungsrelation $|\{1, 2\}| \leq |\{2, 3, 4\}|$
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$ vermittels $\iota\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $\iota(n) = n$. Wir haben auch $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$, und $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.
- Sei $M \subseteq N$. Dann gilt $|M| \leq |N|$, da $\iota\colon M \to N$, mit $\iota(m) = m$, ist injektiv.
- Sei $f\colon M \to N$ surjektiv. Dann $|N| \leq |M|$. In der Tat, sei $g\colon N \to M$ mit $g; f = \mathrm{id}_M$. Dann g ist injektiv: wenn x, y sind so dass $g(x) = g(y)$, dann auch $x = f(g(x)) =$

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$.

- Für endliche Kardinalitäten erhalten wir die normale Ordnungsrelation $|\{1, 2\}| \leq |\{2, 3, 4\}|$
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$ vermittels $\iota\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $\iota(n) = n$. Wir haben auch $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$, und $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.
- Sei $M \subseteq N$. Dann gilt $|M| \leq |N|$, da $\iota\colon M \to N$, mit $\iota(m) = m$, ist injektiv.
- Sei $f\colon M \to N$ surjektiv. Dann $|N| \leq |M|$. In der Tat, sei $g\colon N \to M$ mit $g; f = \mathrm{id}_M$. Dann g ist injektiv: wenn x, y sind so dass $g(x) = g(y)$, dann auch $x = f(g(x)) = f(g(y)) = y$.

- Ist das überhaupt eine Ordnungsrelation?

- Ist das überhaupt eine Ordnungsrelation?
  - Reflexivität:

- Ist das überhaupt eine Ordnungsrelation?
  - Reflexivität: $\mathrm{id}_M : M \to M$ ist injektiv,

- Ist das überhaupt eine Ordnungsrelation?
  - Reflexivität: $\mathrm{id}_M : M \to M$ ist injektiv, also $|M| \leq |M|$

- Ist das überhaupt eine Ordnungsrelation?
  - Reflexivität: $\mathrm{id}_M : M \to M$ ist injektiv, also $|M| \leq |M|$
  - Transitivität:

- Ist das überhaupt eine Ordnungsrelation?
  - Reflexivität: $\mathrm{id}_M \colon M \to M$ ist injektiv, also $|M| \leq |M|$
  - Transitivität: $f \colon A \to B$,

- Ist das überhaupt eine Ordnungsrelation?
  - Reflexivität: $\mathrm{id}_M\colon M \to M$ ist injektiv, also $|M| \leq |M|$
  - Transitivität: $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ - Injektionen,

- Ist das überhaupt eine Ordnungsrelation?
  - Reflexivität: $\mathrm{id}_M \colon M \to M$ ist injektiv, also $|M| \leq |M|$
  - Transitivität: $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ - Injektionen, dann $f;g\colon A \to C$ auch Injektion.

- Ist das überhaupt eine Ordnungsrelation?
  - Reflexivität: $\mathrm{id}_M : M \to M$ ist injektiv, also $|M| \leq |M|$
  - Transitivität: $f : A \to B$, $g : B \to C$ - Injektionen, dann $f;g : A \to C$ auch Injektion. Also $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |C|$

- Ist das überhaupt eine Ordnungsrelation?
    - Reflexivität: $\mathrm{id}_M\colon M \to M$ ist injektiv, also $|M| \leq |M|$
    - Transitivität: $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ - Injektionen, dann $f;g\colon A \to C$ auch Injektion. Also $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |C|$ impliziert

- Ist das überhaupt eine Ordnungsrelation?
  - Reflexivität: $\mathrm{id}_M : M \to M$ ist injektiv, also $|M| \leq |M|$
  - Transitivität: $f : A \to B$, $g : B \to C$ - Injektionen, dann $f;g : A \to C$ auch Injektion. Also $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |C|$ impliziert $|A| \leq |C|$.

- Ist das überhaupt eine Ordnungsrelation?
  - Reflexivität: $\mathrm{id}_M : M \to M$ ist injektiv, also $|M| \leq |M|$
  - Transitivität: $f : A \to B$, $g : B \to C$ - Injektionen, dann $f; g : A \to C$ auch Injektion. Also $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |C|$ impliziert $|A| \leq |C|$.
  - Antisymmetrie:

- Ist das überhaupt eine Ordnungsrelation?
  - Reflexivität: $\mathrm{id}_M\colon M \to M$ ist injektiv, also $|M| \le |M|$
  - Transitivität: $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ - Injektionen, dann $f;g\colon A \to C$ auch Injektion. Also $|A| \le |B|$ und $|B| \le |C|$ impliziert $|A| \le |C|$.
  - Antisymmetrie: $f\colon A \to B$ Injektion, $g\colon B \to A$ Injektion

- Ist das überhaupt eine Ordnungsrelation?
  - Reflexivität: $\mathrm{id}_M : M \to M$ ist injektiv, also $|M| \leq |M|$
  - Transitivität: $f : A \to B$, $g : B \to C$ - Injektionen, dann $f ; g : A \to C$ auch Injektion. Also $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |C|$ impliziert $|A| \leq |C|$.
  - Antisymmetrie: $f : A \to B$ Injektion, $g : B \to A$ Injektion (also $|A| \leq |B|$

- Ist das überhaupt eine Ordnungsrelation?
  - Reflexivität: $\mathrm{id}_M \colon M \to M$ ist injektiv, also $|M| \leq |M|$
  - Transitivität: $f \colon A \to B$, $g \colon B \to C$ - Injektionen, dann $f;g \colon A \to C$ auch Injektion. Also $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |C|$ impliziert $|A| \leq |C|$.
  - Antisymmetrie: $f \colon A \to B$ Injektion, $g \colon B \to A$ Injektion (also $|A| \leq |B|$ und

- Ist das überhaupt eine Ordnungsrelation?
  - Reflexivität: $\mathrm{id}_M \colon M \to M$ ist injektiv, also $|M| \leq |M|$
  - Transitivität: $f \colon A \to B$, $g \colon B \to C$ - Injektionen, dann $f;g \colon A \to C$ auch Injektion. Also $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |C|$ impliziert $|A| \leq |C|$.
  - Antisymmetrie: $f \colon A \to B$ Injektion, $g \colon B \to A$ Injektion (also $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$).

- Ist das überhaupt eine Ordnungsrelation?
  - Reflexivität: $\mathrm{id}_M : M \to M$ ist injektiv, also $|M| \leq |M|$
  - Transitivität: $f: A \to B$, $g: B \to C$ - Injektionen, dann $f;g: A \to C$ auch Injektion. Also $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |C|$ impliziert $|A| \leq |C|$.
  - Antisymmetrie: $f: A \to B$ Injektion, $g: B \to A$ Injektion (also $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$). Gibt es eine Bijektion $A \to B$?

- Ist das überhaupt eine Ordnungsrelation?
  - Reflexivität: $\mathrm{id}_M : M \to M$ ist injektiv, also $|M| \le |M|$
  - Transitivität: $f: A \to B$, $g: B \to C$ - Injektionen, dann $f;g: A \to C$ auch Injektion. Also $|A| \le |B|$ und $|B| \le |C|$ impliziert $|A| \le |C|$.
  - Antisymmetrie: $f: A \to B$ Injektion, $g: B \to A$ Injektion (also $|A| \le |B|$ und $|B| \le |A|$). Gibt es eine Bijektion $A \to B$? Das ist nicht klar.

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein)

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen.

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Wir sehen heute zwei Beweise.

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Wir sehen heute zwei Beweise. 1) Beweis mit der Relation die durch f und g erzeugt ist

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Wir sehen heute zwei Beweise. 1) Beweis mit der Relation die durch f und g erzeugt ist 2) mit Fix-Punkte.

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein)

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen.

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f: M \to N$ und $g: N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B: M \to N$.

Beweis. . Wir können annehmen,

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis. . Wir können annehmen, dass

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis. . Wir können annehmen, dass M und N disjunkt sind.

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis. . Wir können annehmen, dass M und N disjunkt sind.

- Wenn dass nicht der Fall ist,

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis. . Wir können annehmen, dass M und N disjunkt sind.

- Wenn dass nicht der Fall ist, dann betrachten

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis. . Wir können annehmen, dass M und N disjunkt sind.

- Wenn dass nicht der Fall ist, dann betrachten wir die Mengen

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis. . Wir können annehmen, dass M und N disjunkt sind.

- Wenn dass nicht der Fall ist, dann betrachten wir die Mengen $M' := \{(m, 0)\colon m \in M\}$, $N' := \{(n, 0)\colon n \in N\}$. Wir haben Bijektionen $M' \to M$,

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis. . Wir können annehmen, dass M und N disjunkt sind.

- Wenn dass nicht der Fall ist, dann betrachten wir die Mengen $M' := \{(m,0)\colon m \in M\}$, $N' := \{(n,0)\colon n \in N\}$. Wir haben Bijektionen $M' \to M$, $N' \to N$, also eine Bijektion zwischen M und N existiert

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis. . Wir können annehmen, dass M und N disjunkt sind.

- Wenn dass nicht der Fall ist, dann betrachten wir die Mengen $M' := \{(m, 0)\colon m \in M\}$, $N' := \{(n, 0)\colon n \in N\}$. Wir haben Bijektionen $M' \to M$, $N' \to N$, also eine Bijektion zwischen M und N existiert gdw

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis. . Wir können annehmen, dass M und N disjunkt sind.

- Wenn dass nicht der Fall ist, dann betrachten wir die Mengen $M' := \{(m,0)\colon m \in M\}$, $N' := \{(n,0)\colon n \in N\}$. Wir haben Bijektionen $M' \to M$, $N' \to N$, also eine Bijektion zwischen M und N existiert gdw eine Bijektion zwischen M' und N' existiert.

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis. . Wir können annehmen, dass M und N disjunkt sind.

- Wenn dass nicht der Fall ist, dann betrachten wir die Mengen $M' := \{(m,0)\colon m \in M\}$, $N' := \{(n,0)\colon n \in N\}$. Wir haben Bijektionen $M' \to M$, $N' \to N$, also eine Bijektion zwischen M und N existiert gdw eine Bijektion zwischen M' und N' existiert.

- Wir betrachten die zwei Relationen f und g auf $M \cup N$, und die Relation V - die kleinste Äquivalenzrelation die f und g enthält.

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis. . Wir können annehmen, dass M und N disjunkt sind.

- ▶ Wenn dass nicht der Fall ist, dann betrachten wir die Mengen $M' := \{(m,0)\colon m \in M\}$, $N' := \{(n,0)\colon n \in N\}$. Wir haben Bijektionen $M' \to M$, $N' \to N$, also eine Bijektion zwischen M und N existiert gdw eine Bijektion zwischen M' und N' existiert.

- Wir betrachten die zwei Relationen f und g auf $M \cup N$, und die Relation V - die kleinste Äquivalenzrelation die f und g enthält.

- Sei $K \subset M \cup N$ eine Äquivalenzklasse von V.

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis. . Wir können annehmen, dass M und N disjunkt sind.

- Wenn dass nicht der Fall ist, dann betrachten wir die Mengen $M' := \{(m,0)\colon m \in M\}$, $N' := \{(n,0)\colon n \in N\}$. Wir haben Bijektionen $M' \to M$, $N' \to N$, also eine Bijektion zwischen M und N existiert gdw eine Bijektion zwischen M' und N' existiert.

- Wir betrachten die zwei Relationen f und g auf $M \cup N$, und die Relation V - die kleinste Äquivalenzrelation die f und g enthält.
- Sei $K \subset M \cup N$ eine Äquivalenzklasse von V. Es reicht uns,

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis. . Wir können annehmen, dass M und N disjunkt sind.

- Wenn dass nicht der Fall ist, dann betrachten wir die Mengen $M' := \{(m,0)\colon m \in M\}$, $N' := \{(n,0)\colon n \in N\}$. Wir haben Bijektionen $M' \to M$, $N' \to N$, also eine Bijektion zwischen M und N existiert gdw eine Bijektion zwischen M' und N' existiert.

- Wir betrachten die zwei Relationen f und g auf $M \cup N$, und die Relation V - die kleinste Äquivalenzrelation die f und g enthält.
- Sei $K \subset M \cup N$ eine Äquivalenzklasse von V. Es reicht uns, eine Bijektion $b_K\colon K \cup M \to K \cup N$ zu konstruieren.

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis. . Wir können annehmen, dass M und N disjunkt sind.

- Wenn dass nicht der Fall ist, dann betrachten wir die Mengen $M' := \{(m, 0)\colon m \in M\}$, $N' := \{(n, 0)\colon n \in N\}$. Wir haben Bijektionen $M' \to M$, $N' \to N$, also eine Bijektion zwischen M und N existiert gdw eine Bijektion zwischen M' und N' existiert.

- Wir betrachten die zwei Relationen f und g auf $M \cup N$, und die Relation V - die kleinste Äquivalenzrelation die f und g enthält.

- Sei $K \subset M \cup N$ eine Äquivalenzklasse von V. Es reicht uns, eine Bijektion $b_K\colon K \cup M \to K \cup N$ zu konstruieren. In der Tat,

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis. . Wir können annehmen, dass M und N disjunkt sind.

- ▶ Wenn dass nicht der Fall ist, dann betrachten wir die Mengen $M' := \{(m,0)\colon m \in M\}$, $N' := \{(n,0)\colon n \in N\}$. Wir haben Bijektionen $M' \to M$, $N' \to N$, also eine Bijektion zwischen M und N existiert gdw eine Bijektion zwischen M' und N' existiert.

- Wir betrachten die zwei Relationen f und g auf $M \cup N$, und die Relation V - die kleinste Äquivalenzrelation die f und g enthält.

- Sei $K \subset M \cup N$ eine Äquivalenzklasse von V. Es reicht uns, eine Bijektion $b_K\colon K \cup M \to K \cup N$ zu konstruieren. In der Tat, falls wir das schaffen,

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis. . Wir können annehmen, dass M und N disjunkt sind.

- Wenn dass nicht der Fall ist, dann betrachten wir die Mengen $M' := \{(m,0)\colon m \in M\}$, $N' := \{(n,0)\colon n \in N\}$. Wir haben Bijektionen $M' \to M$, $N' \to N$, also eine Bijektion zwischen M und N existiert gdw eine Bijektion zwischen M' und N' existiert.

- Wir betrachten die zwei Relationen f und g auf $M \cup N$, und die Relation V - die kleinste Äquivalenzrelation die f und g enthält.
- Sei $K \subset M \cup N$ eine Äquivalenzklasse von V. Es reicht uns, eine Bijektion $b_K\colon K \cup M \to K \cup N$ zu konstruieren. In der Tat, falls wir das schaffen, dann definieren wir $b\colon M \to N$

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis. . Wir können annehmen, dass M und N disjunkt sind.

- ▶ Wenn dass nicht der Fall ist, dann betrachten wir die Mengen $M' := \{(m,0)\colon m \in M\}$, $N' := \{(n,0)\colon n \in N\}$. Wir haben Bijektionen $M' \to M$, $N' \to N$, also eine Bijektion zwischen M und N existiert gdw eine Bijektion zwischen M' und N' existiert.

- Wir betrachten die zwei Relationen f und g auf $M \cup N$, und die Relation V - die kleinste Äquivalenzrelation die f und g enthält.

- Sei $K \subset M \cup N$ eine Äquivalenzklasse von V. Es reicht uns, eine Bijektion $b_K\colon K \cup M \to K \cup N$ zu konstruieren. In der Tat, falls wir das schaffen, dann definieren wir $b\colon M \to N$ durch $b(x) := b_K(x)$ wenn $x \in K$.

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis. . Wir können annehmen, dass M und N disjunkt sind.

- Wenn dass nicht der Fall ist, dann betrachten wir die Mengen $M' := \{(m,0)\colon m \in M\}$, $N' := \{(n,0)\colon n \in N\}$. Wir haben Bijektionen $M' \to M$, $N' \to N$, also eine Bijektion zwischen M und N existiert gdw eine Bijektion zwischen M' und N' existiert.

- Wir betrachten die zwei Relationen f und g auf $M \cup N$, und die Relation V - die kleinste Äquivalenzrelation die f und g enthält.
- Sei $K \subset M \cup N$ eine Äquivalenzklasse von V. Es reicht uns, eine Bijektion $b_K\colon K \cup M \to K \cup N$ zu konstruieren. In der Tat, falls wir das schaffen, dann definieren wir $b\colon M \to N$ durch $b(x) := b_K(x)$ wenn $x \in K$. Weil $\{K \cap M\colon K \in M \cup N/V\}$

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis. . Wir können annehmen, dass M und N disjunkt sind.

- Wenn dass nicht der Fall ist, dann betrachten wir die Mengen $M' := \{(m,0)\colon m \in M\}$, $N' := \{(n,0)\colon n \in N\}$. Wir haben Bijektionen $M' \to M$, $N' \to N$, also eine Bijektion zwischen M und N existiert gdw eine Bijektion zwischen M' und N' existiert.

- Wir betrachten die zwei Relationen f und g auf $M \cup N$, und die Relation V - die kleinste Äquivalenzrelation die f und g enthält.
- Sei $K \subset M \cup N$ eine Äquivalenzklasse von V. Es reicht uns, eine Bijektion $b_K\colon K \cup M \to K \cup N$ zu konstruieren. In der Tat, falls wir das schaffen, dann definieren wir $b\colon M \to N$ durch $b(x) := b_K(x)$ wenn $x \in K$. Weil $\{K \cap M\colon K \in M \cup N/V\}$ eine Zerlegung von M ist,

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis. . Wir können annehmen, dass M und N disjunkt sind.

- Wenn dass nicht der Fall ist, dann betrachten wir die Mengen $M' := \{(m,0)\colon m \in M\}$, $N' := \{(n,0)\colon n \in N\}$. Wir haben Bijektionen $M' \to M$, $N' \to N$, also eine Bijektion zwischen M und N existiert gdw eine Bijektion zwischen M' und N' existiert.

- Wir betrachten die zwei Relationen f und g auf $M \cup N$, und die Relation V - die kleinste Äquivalenzrelation die f und g enthält.

- Sei $K \subset M \cup N$ eine Äquivalenzklasse von V. Es reicht uns, eine Bijektion $b_K\colon K \cup M \to K \cup N$ zu konstruieren. In der Tat, falls wir das schaffen, dann definieren wir $b\colon M \to N$ durch $b(x) := b_K(x)$ wenn $x \in K$. Weil $\{K \cap M\colon K \in M \cup N/V\}$ eine Zerlegung von M ist, schließen wir,

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis. . Wir können annehmen, dass M und N disjunkt sind.

- ▶ Wenn dass nicht der Fall ist, dann betrachten wir die Mengen $M' := \{(m,0)\colon m \in M\}$, $N' := \{(n,0)\colon n \in N\}$. Wir haben Bijektionen $M' \to M$, $N' \to N$, also eine Bijektion zwischen M und N existiert gdw eine Bijektion zwischen M' und N' existiert.

- Wir betrachten die zwei Relationen f und g auf $M \cup N$, und die Relation V - die kleinste Äquivalenzrelation die f und g enthält.

- Sei $K \subset M \cup N$ eine Äquivalenzklasse von V. Es reicht uns, eine Bijektion $b_K\colon K \cup M \to K \cup N$ zu konstruieren. In der Tat, falls wir das schaffen, dann definieren wir $b\colon M \to N$ durch $b(x) := b_K(x)$ wenn $x \in K$. Weil $\{K \cap M\colon K \in M \cup N/V\}$ eine Zerlegung von M ist, schließen wir, dass b

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis. . Wir können annehmen, dass M und N disjunkt sind.

- Wenn dass nicht der Fall ist, dann betrachten wir die Mengen $M' := \{(m, 0)\colon m \in M\}$, $N' := \{(n, 0)\colon n \in N\}$. Wir haben Bijektionen $M' \to M$, $N' \to N$, also eine Bijektion zwischen M und N existiert gdw eine Bijektion zwischen M' und N' existiert.

- Wir betrachten die zwei Relationen f und g auf $M \cup N$, und die Relation V - die kleinste Äquivalenzrelation die f und g enthält.

- Sei $K \subset M \cup N$ eine Äquivalenzklasse von V. Es reicht uns, eine Bijektion $b_K\colon K \cup M \to K \cup N$ zu konstruieren. In der Tat, falls wir das schaffen, dann definieren wir $b\colon M \to N$ durch $b(x) := b_K(x)$ wenn $x \in K$. Weil $\{K \cap M\colon K \in M \cup N/V\}$ eine Zerlegung von M ist, schließen wir, dass b eine Bijektion ist.

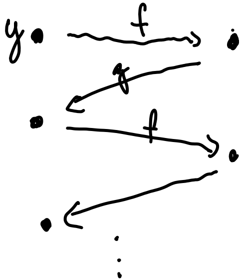
Sei K eine Äquivalenzklasse von V.

Sei K eine Äquivalenzklasse von V.

- In K : gibt's $y \in M$ mit $y \notin g(N)$.

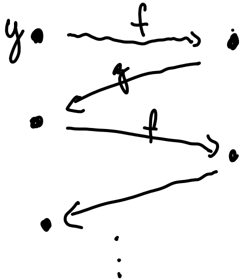
Sei K eine Äquivalenzklasse von V.

- In K : gibt's $y \in M$ mit $y \notin g(N)$.



Sei K eine Äquivalenzklasse von V.

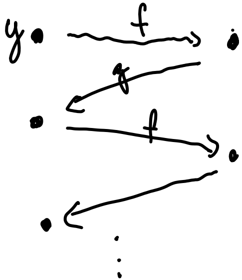
- In K : gibt's $y \in M$ mit $y \notin g(N)$.



- Für $z \in M \cap K$ definieren wir

Sei K eine Äquivalenzklasse von V.

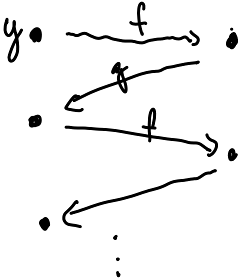
- In K : gibt's $y \in M$ mit $y \notin g(N)$.



- Für $z \in M \cap K$ definieren wir $b_K(z)$

Sei K eine Äquivalenzklasse von V.

- In K : gibt's $y \in M$ mit $y \notin g(N)$.



- Für $z \in M \cap K$ definieren wir $b_K(z) := f(z)$.

- b_K is eine Bijektion:

- b_K is eine Bijektion: Tatsätzlich, $K = \{y, f(y), gf(y), fgf(y), \ldots\}$.

- b_K is eine Bijektion: Tatsätzlich, $K = \{y, f(y), gf(y), fgf(y), \ldots\}$. Alle diese Elemente sind unterschiedlich.

- b_K is eine Bijektion: Tatsätzlich, $K = \{y, f(y), gf(y), fgf(y), \ldots\}$. Alle diese Elemente sind unterschiedlich.
- Erst beweisen wir $y, gf(y), (gf)^2(y), \ldots$ sind unterschiedlich.

- b_K is eine Bijektion: Tatsätzlich, $K = \{y, f(y), gf(y), fgf(y), \ldots\}$. Alle diese Elemente sind unterschiedlich.
- Erst beweisen wir $y, gf(y), (gf)^2(y), \ldots$ sind unterschiedlich.
  - Induktionsbeweis:

- b_K is eine Bijektion: Tatsätzlich, $K = \{y, f(y), gf(y), fgf(y), \ldots\}$. Alle diese Elemente sind unterschiedlich.
- Erst beweisen wir $y, gf(y), (gf)^2(y), \ldots$ sind unterschiedlich.
    - Induktionsbeweis: IA: $y, gf(y)$ sind unterschiedlich,

- b_K is eine Bijektion: Tatsätzlich, $K = \{y, f(y), gf(y), fgf(y), \ldots\}$. Alle diese Elemente sind unterschiedlich.
- Erst beweisen wir $y, gf(y), (gf)^2(y), \ldots$ sind unterschiedlich.
  - ▶ Induktionsbeweis: IA: $y, gf(y)$ sind unterschiedlich, da $y \notin g(N)$.

- b_K is eine Bijektion: Tatsätzlich, $K = \{y, f(y), gf(y), fgf(y), \ldots\}$. Alle diese Elemente sind unterschiedlich.
- Erst beweisen wir $y, gf(y), (gf)^2(y), \ldots$ sind unterschiedlich.
  - Induktionsbeweis: IA: $y, gf(y)$ sind unterschiedlich, da $y \notin g(N)$.
  - IH:

- b_K is eine Bijektion: Tatsätzlich, $K = \{y, f(y), gf(y), fgf(y), \ldots\}$. Alle diese Elemente sind unterschiedlich.
- Erst beweisen wir $y, gf(y), (gf)^2(y), \ldots$ sind unterschiedlich.
  - Induktionsbeweis: IA: $y, gf(y)$ sind unterschiedlich, da $y \notin g(N)$.
  - IH: $y, gf(y), \ldots (gf)^k(y)$ sind unterschiedlich.

- b_K is eine Bijektion: Tatsätzlich, $K = \{y, f(y), gf(y), fgf(y), \ldots\}$. Alle diese Elemente sind unterschiedlich.
- Erst beweisen wir $y, gf(y), (gf)^2(y), \ldots$ sind unterschiedlich.
    - Induktionsbeweis: IA: $y, gf(y)$ sind unterschiedlich, da $y \notin g(N)$.
    - IH: $y, gf(y), \ldots (gf)^k(y)$ sind unterschiedlich.
    - IB: Zu zeigen ist,

- b_K is eine Bijektion: Tatsätzlich, $K = \{y, f(y), gf(y), fgf(y), \ldots\}$. Alle diese Elemente sind unterschiedlich.
- Erst beweisen wir $y, gf(y), (gf)^2(y), \ldots$ sind unterschiedlich.
  - Induktionsbeweis: IA: $y, gf(y)$ sind unterschiedlich, da $y \notin g(N)$.
  - IH: $y, gf(y), \ldots (gf)^k(y)$ sind unterschiedlich.
  - IB: Zu zeigen ist, dass

- b_K is eine Bijektion: Tatsätzlich, $K = \{y, f(y), gf(y), fgf(y), \ldots\}$. Alle diese Elemente sind unterschiedlich.
- Erst beweisen wir $y, gf(y), (gf)^2(y), \ldots$ sind unterschiedlich.
    - Induktionsbeweis: IA: $y, gf(y)$ sind unterschiedlich, da $y \notin g(N)$.
    - IH: $y, gf(y), \ldots (gf)^k(y)$ sind unterschiedlich.
    - IB: Zu zeigen ist, dass $y, gf(y), \ldots (gf)^k(y)$

- b_K is eine Bijektion: Tatsätzlich, $K = \{y, f(y), gf(y), fgf(y), \ldots\}$. Alle diese Elemente sind unterschiedlich.

- Erst beweisen wir $y, gf(y), (gf)^2(y), \ldots$ sind unterschiedlich.

  - Induktionsbeweis: IA: $y, gf(y)$ sind unterschiedlich, da $y \notin g(N)$.

  - IH: $y, gf(y), \ldots (gf)^k(y)$ sind unterschiedlich.

  - IB: Zu zeigen ist, dass $y, gf(y), \ldots (gf)^k(y)$ sind unterschiedlich.

- b_K is eine Bijektion: Tatsätzlich, $K = \{y, f(y), gf(y), fgf(y), \ldots\}$. Alle diese Elemente sind unterschiedlich.
- Erst beweisen wir $y, gf(y), (gf)^2(y), \ldots$ sind unterschiedlich.
  - Induktionsbeweis: IA: $y, gf(y)$ sind unterschiedlich, da $y \notin g(N)$.
  - IH: $y, gf(y), \ldots (gf)^k(y)$ sind unterschiedlich.
  - IB: Zu zeigen ist, dass $y, gf(y), \ldots (gf)^k(y)$ sind unterschiedlich. Durch Widerspruch:

- b_K is eine Bijektion: Tatsätzlich, $K = \{y, f(y), gf(y), fgf(y), \ldots\}$. Alle diese Elemente sind unterschiedlich.

- Erst beweisen wir $y, gf(y), (gf)^2(y), \ldots$ sind unterschiedlich.

  - Induktionsbeweis: IA: $y, gf(y)$ sind unterschiedlich, da $y \notin g(N)$.
  - IH: $y, gf(y), \ldots (gf)^k(y)$ sind unterschiedlich.
  - IB: Zu zeigen ist, dass $y, gf(y), \ldots (gf)^k(y)$ sind unterschiedlich. Durch Widerspruch: sei $(gf)^{k+1}(y) = (gf)^l(y)$, mit $l \leq k$. Da $y \notin g(N)$,

- b_K is eine Bijektion: Tatsätzlich, $K = \{y, f(y), gf(y), fgf(y), \ldots\}$. Alle diese Elemente sind unterschiedlich.

- Erst beweisen wir $y, gf(y), (gf)^2(y), \ldots$ sind unterschiedlich.

  - Induktionsbeweis: IA: $y, gf(y)$ sind unterschiedlich, da $y \notin g(N)$.
  - IH: $y, gf(y), \ldots (gf)^k(y)$ sind unterschiedlich.
  - IB: Zu zeigen ist, dass $y, gf(y), \ldots (gf)^k(y)$ sind unterschiedlich. Durch Widerspruch: sei $(gf)^{k+1}(y) = (gf)^l(y)$, mit $l \leq k$. Da $y \notin g(N)$, folgt

- b_K is eine Bijektion: Tatsätzlich, $K = \{y, f(y), gf(y), fgf(y), \ldots\}$. Alle diese Elemente sind unterschiedlich.

- Erst beweisen wir $y, gf(y), (gf)^2(y), \ldots$ sind unterschiedlich.

  - Induktionsbeweis: IA: $y, gf(y)$ sind unterschiedlich, da $y \notin g(N)$.
  - IH: $y, gf(y), \ldots (gf)^k(y)$ sind unterschiedlich.
  - IB: Zu zeigen ist, dass $y, gf(y), \ldots (gf)^k(y)$ sind unterschiedlich. Durch Widerspruch: sei $(gf)^{k+1}(y) = (gf)^l(y)$, mit $l \leq k$. Da $y \notin g(N)$, folgt $l \geq 1$. Da gf ist injektiv,

- b_K is eine Bijektion: Tatsätzlich, $K = \{y, f(y), gf(y), fgf(y), \ldots\}$. Alle diese Elemente sind unterschiedlich.
- Erst beweisen wir $y, gf(y), (gf)^2(y), \ldots$ sind unterschiedlich.
  - Induktionsbeweis: IA: $y, gf(y)$ sind unterschiedlich, da $y \notin g(N)$.
  - IH: $y, gf(y), \ldots (gf)^k(y)$ sind unterschiedlich.
  - IB: Zu zeigen ist, dass $y, gf(y), \ldots (gf)^k(y)$ sind unterschiedlich. Durch Widerspruch: sei $(gf)^{k+1}(y) = (gf)^l(y)$, mit $l \leq k$. Da $y \notin g(N)$, folgt $l \geq 1$. Da gf ist injektiv, folgt

- b_K is eine Bijektion: Tatsätzlich, $K = \{y, f(y), gf(y), fgf(y), \ldots\}$. Alle diese Elemente sind unterschiedlich.

- Erst beweisen wir $y, gf(y), (gf)^2(y), \ldots$ sind unterschiedlich.

  - Induktionsbeweis: IA: $y, gf(y)$ sind unterschiedlich, da $y \notin g(N)$.

  - IH: $y, gf(y), \ldots (gf)^k(y)$ sind unterschiedlich.

  - IB: Zu zeigen ist, dass $y, gf(y), \ldots (gf)^k(y)$ sind unterschiedlich. Durch Widerspruch: sei $(gf)^{k+1}(y) = (gf)^l(y)$, mit $l \leq k$. Da $y \notin g(N)$, folgt $l \geq 1$. Da gf ist injektiv, folgt $(gf)^k(y) = gf^{l-1}(y)$.

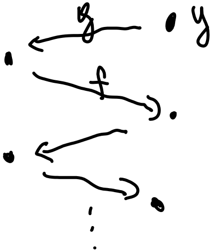
- b_K is eine Bijektion: Tatsätzlich, $K = \{y, f(y), gf(y), fgf(y), \ldots\}$. Alle diese Elemente sind unterschiedlich.
- Erst beweisen wir $y, gf(y), (gf)^2(y), \ldots$ sind unterschiedlich.
  - Induktionsbeweis: IA: $y, gf(y)$ sind unterschiedlich, da $y \notin g(N)$.
  - IH: $y, gf(y), \ldots (gf)^k(y)$ sind unterschiedlich.
  - IB: Zu zeigen ist, dass $y, gf(y), \ldots (gf)^k(y)$ sind unterschiedlich. Durch Widerspruch: sei $(gf)^{k+1}(y) = (gf)^l(y)$, mit $l \leq k$. Da $y \notin g(N)$, folgt $l \geq 1$. Da gf ist injektiv, folgt $(gf)^k(y) = gf^{l-1}(y)$. Widerpsruch mit IA.

- b_K is eine Bijektion: Tatsätzlich, $K = \{y, f(y), gf(y), fgf(y), \ldots\}$. Alle diese Elemente sind unterschiedlich.
- Erst beweisen wir $y, gf(y), (gf)^2(y), \ldots$ sind unterschiedlich.
  - Induktionsbeweis: IA: $y, gf(y)$ sind unterschiedlich, da $y \notin g(N)$.
  - IH: $y, gf(y), \ldots (gf)^k(y)$ sind unterschiedlich.
  - IB: Zu zeigen ist, dass $y, gf(y), \ldots (gf)^k(y)$ sind unterschiedlich. Durch Widerspruch: sei $(gf)^{k+1}(y) = (gf)^l(y)$, mit $l \leq k$. Da $y \notin g(N)$, folgt $l \geq 1$. Da gf ist injektiv, folgt $(gf)^k(y) = gf^{l-1}(y)$. Widerpsruch mit IA.
- Da g eine Injektion ist, sehen wir, dass $y, f(y), gf(y), fgf(y), \ldots$ sind unterschiedliche Elemente.

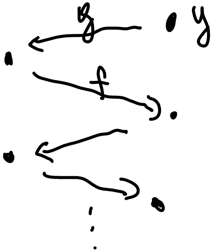
- b_K is eine Bijektion: Tatsätzlich, $K = \{y, f(y), gf(y), fgf(y), \ldots\}$. Alle diese Elemente sind unterschiedlich.
- Erst beweisen wir $y, gf(y), (gf)^2(y), \ldots$ sind unterschiedlich.
  - Induktionsbeweis: IA: $y, gf(y)$ sind unterschiedlich, da $y \notin g(N)$.
  - IH: $y, gf(y), \ldots (gf)^k(y)$ sind unterschiedlich.
  - IB: Zu zeigen ist, dass $y, gf(y), \ldots (gf)^k(y)$ sind unterschiedlich. Durch Widerspruch: sei $(gf)^{k+1}(y) = (gf)^l(y)$, mit $l \leq k$. Da $y \notin g(N)$, folgt $l \geq 1$. Da gf ist injektiv, folgt $(gf)^k(y) = gf^{l-1}(y)$. Widerpsruch mit IA.
- Da g eine Injektion ist, sehen wir, dass $y, f(y), gf(y), fgf(y), \ldots$ sind unterschiedliche Elemente. Es folgt dass b eine Bijetion ist.

- In K gibt's $y \in N$ mit $y \notin f(M)$.

- In K gibt's $y \in N$ mit $y \notin f(M)$.

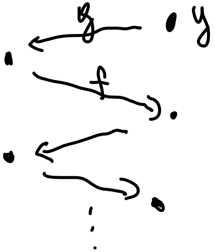


- In K gibt's $y \in N$ mit $y \notin f(M)$.



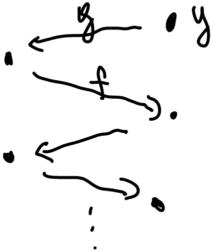
- Für $z \in M \cap K$

- In K gibt's $y \in N$ mit $y \notin f(M)$.



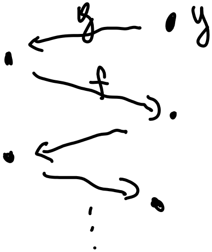
- Für $z \in M \cap K$ definieren wir

- In K gibt's $y \in N$ mit $y \notin f(M)$.



- Für $z \in M \cap K$ definieren wir $b_K(z)$

- In K gibt's $y \in N$ mit $y \notin f(M)$.



- Für $z \in M \cap K$ definieren wir $b_K(z) := g^{-1}(z)$.

- Für alle $z \in M \cap K$

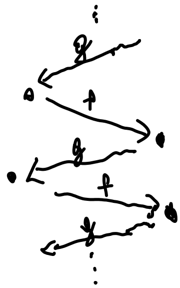
- Für alle $z \in M \cap K$ gilt

- Für alle $z \in M \cap K$ gilt $z \in g(N)$,

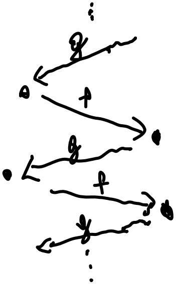
- Für alle $z \in M \cap K$ gilt $z \in g(N)$, und für alle $N \cap K$

- Für alle $z \in M \cap K$ gilt $z \in g(N)$, und für alle $N \cap K$ gilt

- Für alle $z \in M \cap K$ gilt $z \in g(N)$, und für alle $N \cap K$ gilt $z \in f(M)$.

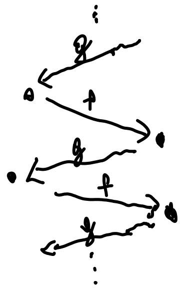


- Für alle $z \in M \cap K$ gilt $z \in g(N)$, und für alle $N \cap K$ gilt $z \in f(M)$.



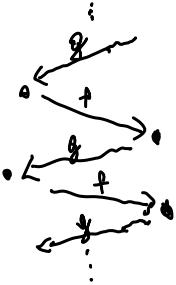
- Für $z \in M \cap K$

- Für alle $z \in M \cap K$ gilt $z \in g(N)$, und für alle $N \cap K$ gilt $z \in f(M)$.



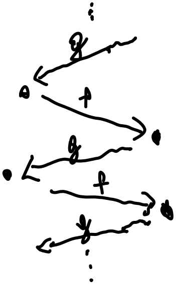
- Für $z \in M \cap K$ definieren wir

- Für alle $z \in M \cap K$ gilt $z \in g(N)$, und für alle $N \cap K$ gilt $z \in f(M)$.



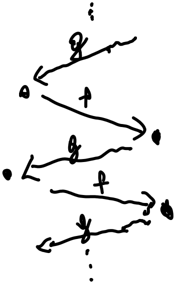
- Für $z \in M \cap K$ definieren wir $b_K(z)$

- Für alle $z \in M \cap K$ gilt $z \in g(N)$, und für alle $N \cap K$ gilt $z \in f(M)$.



- Für $z \in M \cap K$ definieren wir $b_K(z) := f(z)$.

- Für alle $z \in M \cap K$ gilt $z \in g(N)$, und für alle $N \cap K$ gilt $z \in f(M)$.



- Für $z \in M \cap K$ definieren wir $b_K(z) := f(z)$. $\square$

Konsequenz von CSB:

Konsequenz von CSB:

Satz. Die Relation $\leq$ ist eine Ordnungsrelation auf Kardinalitäten.

Konsequenz von CSB:

Satz. Die Relation $\leq$ ist eine Ordnungsrelation auf Kardinalitäten.

Beweis. Transitivität und Reflexivität haben wir schon gesegen.

Konsequenz von CSB:

Satz. Die Relation $\leq$ ist eine Ordnungsrelation auf Kardinalitäten.

Beweis. Transitivität und Reflexivität haben wir schon gesegen.

- **Antisymmetrie:**

Konsequenz von CSB:

Satz. Die Relation $\leq$ ist eine Ordnungsrelation auf Kardinalitäten.

Beweis. Transitivität und Reflexivität haben wir schon gesegen.

- **Antisymmetrie:** Seien $|M| \leq |N|$ und $|N| \leq |M|$.

Konsequenz von CSB:

Satz. Die Relation $\leq$ ist eine Ordnungsrelation auf Kardinalitäten.

Beweis. Transitivität und Reflexivität haben wir schon gesegen.

- **Antisymmetrie:** Seien $|M| \leq |N|$ und $|N| \leq |M|$. Also existieren injektive Funktionen $f: M \to N$ und $g: N \to M$.

Konsequenz von CSB:

Satz. Die Relation $\leq$ ist eine Ordnungsrelation auf Kardinalitäten.

Beweis. Transitivität und Reflexivität haben wir schon gesegen.

- **Antisymmetrie:** Seien $|M| \leq |N|$ und $|N| \leq |M|$. Also existieren injektive Funktionen $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$. Dann existiert auch eine bijektive Funktion $h\colon M \to N$ nach CSB

Konsequenz von CSB:

Satz. Die Relation $\leq$ ist eine Ordnungsrelation auf Kardinalitäten.

Beweis. Transitivität und Reflexivität haben wir schon gesegen.

- **Antisymmetrie:** Seien $|M| \leq |N|$ und $|N| \leq |M|$. Also existieren injektive Funktionen $f: M \to N$ und $g: N \to M$. Dann existiert auch eine bijektive Funktion $h: M \to N$ nach CSB und damit $|M| = |N|$.

Konsequenz von CSB:

Satz. Die Relation $\leq$ ist eine Ordnungsrelation auf Kardinalitäten.

Beweis. Transitivität und Reflexivität haben wir schon gesegen.

- **Antisymmetrie:** Seien $|M| \leq |N|$ und $|N| \leq |M|$. Also existieren injektive Funktionen $f : M \to N$ und $g : N \to M$. Dann existiert auch eine bijektive Funktion $h : M \to N$ nach CSB und damit $|M| = |N|$. □

Ist $\leq$ auf Kardinalitäten total?

Ist $\leq$ auf Kardinalitäten total? D.h. wenn wir zwein Mengen M und N haben,

Ist $\leq$ auf Kardinalitäten total? D.h. wenn wir zwein Mengen M und N haben, gibt's immer eine Injektion $M \to N$ oder eine injektion $N \to M$?

Satz.

Ist $\leq$ auf Kardinalitäten total? D.h. wenn wir zwein Mengen M und N haben, gibt's immer eine Injektion $M \to N$ oder eine injektion $N \to M$?

Satz. (Satz von Hartogs, benutzt das Auswahlaxiom)

Ist $\leq$ auf Kardinalitäten total? D.h. wenn wir zwein Mengen M und N haben, gibt's immer eine Injektion $M \to N$ oder eine injektion $N \to M$?

Satz. (Satz von Hartogs, benutzt das Auswahlaxiom) Die Kardinalitäten $\mathcal{K}$ bilden eine total geordnete Menge $(\mathcal{K}, \leq)$

Ist $\leq$ auf Kardinalitäten total? D.h. wenn wir zwein Mengen M und N haben, gibt's immer eine Injektion $M \to N$ oder eine injektion $N \to M$?

Satz. (Satz von Hartogs, benutzt das Auswahlaxiom) Die Kardinalitäten $\mathcal{K}$ bilden eine total geordnete Menge $(\mathcal{K}, \leq)$

- Ähnlich man kann auch beweisen dass $|\mathbb{N}|$ ist die kleinste unendliche Kardinalität,

Ist $\leq$ auf Kardinalitäten total? D.h. wenn wir zwein Mengen M und N haben, gibt's immer eine Injektion $M \to N$ oder eine injektion $N \to M$?

Satz. (Satz von Hartogs, benutzt das Auswahlaxiom) Die Kardinalitäten $\mathcal{K}$ bilden eine total geordnete Menge $(\mathcal{K}, \leq)$

- Ähnlich man kann auch beweisen dass $|\mathbb{N}|$ ist die kleinste unendliche Kardinalität, manchmal auch $\aleph_0$ genannt.

- Wir sagen dass eine Menge M ist abzählbar gdw. $|M| \leq |\mathbb{N}|$;

- Wir sagen dass eine Menge M ist abzählbar gdw. $|M| \leq |\mathbb{N}|$; d. h. wenn sie höchstens die Kardinalität von $\mathbb{N}$ hat.

- Wir sagen dass eine Menge M ist abzählbar gdw. $|M| \leq |\mathbb{N}|$; d. h. wenn sie höchstens die Kardinalität von $\mathbb{N}$ hat. Jede endliche Menge, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind also abzählbar,

- Wir sagen dass eine Menge M ist abzählbar gdw. $|M| \leq |\mathbb{N}|$; d. h. wenn sie höchstens die Kardinalität von $\mathbb{N}$ hat. Jede endliche Menge, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind also abzählbar, aber $\mathbb{R}$ hingegen nicht.

- Wir sagen dass eine Menge M ist abzählbar gdw. $|M| \leq |\mathbb{N}|$; d. h. wenn sie höchstens die Kardinalität von $\mathbb{N}$ hat. Jede endliche Menge, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind also abzählbar, aber $\mathbb{R}$ hingegen nicht.
- Echt mächtigere Mengen nennen wir auch überabzählbar.

Gibt es unendlich viele unendliche Kardinalitäten?

Satz.

Gibt es unendlich viele unendliche Kardinalitäten?

Satz. (Cantor)

Gibt es unendlich viele unendliche Kardinalitäten?

Satz. (Cantor) Für jede Menge M gelten

Gibt es unendlich viele unendliche Kardinalitäten?

Satz. (Cantor) Für jede Menge M gelten $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$ und

Gibt es unendlich viele unendliche Kardinalitäten?

Satz. (Cantor) Für jede Menge M gelten $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$ und $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$.

Gibt es unendlich viele unendliche Kardinalitäten?

Satz. (Cantor) Für jede Menge M gelten $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$ und $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$.

Beweis.

Gibt es unendlich viele unendliche Kardinalitäten?

Satz. (Cantor) Für jede Menge M gelten $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$ und $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$.

Beweis. Sei $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$, so dass $f(m) = \{m\}$.

Gibt es unendlich viele unendliche Kardinalitäten?

Satz. (Cantor) Für jede Menge M gelten $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$ und $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$.

Beweis. Sei $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$, so dass $f(m) = \{m\}$. Da f injektiv ist, gilt $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$.

Gibt es unendlich viele unendliche Kardinalitäten?

Satz. (Cantor) Für jede Menge M gelten $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$ und $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$.

Beweis. Sei $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$, so dass $f(m) = \{m\}$. Da f injektiv ist, gilt $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$.

Wir zeigen nun $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$ indirekt.

Gibt es unendlich viele unendliche Kardinalitäten?

Satz. (Cantor) Für jede Menge M gelten $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$ und $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$.

Beweis. Sei $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$, so dass $f(m) = \{m\}$. Da f injektiv ist, gilt $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$.

Wir zeigen nun $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$ indirekt. Sei also $|M| = |\mathcal{P}(M)|$.

Gibt es unendlich viele unendliche Kardinalitäten?

Satz. (Cantor) Für jede Menge M gelten $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$ und $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$.

Beweis. Sei $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$, so dass $f(m) = \{m\}$. Da f injektiv ist, gilt $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$.

Wir zeigen nun $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$ indirekt. Sei also $|M| = |\mathcal{P}(M)|$. Damit existiert eine bijektive Funktion $g\colon M \to \mathcal{P}(M)$.

Gibt es unendlich viele unendliche Kardinalitäten?

Satz. (Cantor) Für jede Menge M gelten $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$ und $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$.

Beweis. Sei $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$, so dass $f(m) = \{m\}$. Da f injektiv ist, gilt $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$.

Wir zeigen nun $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$ indirekt. Sei also $|M| = |\mathcal{P}(M)|$. Damit existiert eine bijektive Funktion $g\colon M \to \mathcal{P}(M)$.

Sei

$$X := \Big\{x \in M \mid x \notin g(x)\Big\} \ .$$

Gibt es unendlich viele unendliche Kardinalitäten?

Satz. (Cantor) Für jede Menge M gelten $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$ und $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$.

Beweis. Sei $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$, so dass $f(m) = \{m\}$. Da f injektiv ist, gilt $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$.

Wir zeigen nun $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$ indirekt. Sei also $|M| = |\mathcal{P}(M)|$. Damit existiert eine bijektive Funktion $g\colon M \to \mathcal{P}(M)$.

Sei

$$X := \{x \in M \mid x \notin g(x)\} \ .$$

Da g surjektiv ist, existiert $m \in M$, so dass $g(m) = X$.

Gibt es unendlich viele unendliche Kardinalitäten?

Satz. (Cantor) Für jede Menge M gelten $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$ und $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$.

Beweis. Sei $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$, so dass $f(m) = \{m\}$. Da f injektiv ist, gilt $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$.

Wir zeigen nun $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$ indirekt. Sei also $|M| = |\mathcal{P}(M)|$. Damit existiert eine bijektive Funktion $g\colon M \to \mathcal{P}(M)$.

Sei

$$X := \Big\{x \in M \mid x \notin g(x)\Big\} \ .$$

Da g surjektiv ist, existiert $m \in M$, so dass $g(m) = X$. Ist $m \in g(m) = X$?

Gibt es unendlich viele unendliche Kardinalitäten?

Satz. (Cantor) Für jede Menge M gelten $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$ und $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$.

Beweis. Sei $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$, so dass $f(m) = \{m\}$. Da f injektiv ist, gilt $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$.

Wir zeigen nun $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$ indirekt. Sei also $|M| = |\mathcal{P}(M)|$. Damit existiert eine bijektive Funktion $g\colon M \to \mathcal{P}(M)$.

Sei

$$X := \left\{x \in M \mid x \notin g(x)\right\} \ .$$

Da g surjektiv ist, existiert $m \in M$, so dass $g(m) = X$. Ist $m \in g(m) = X$? Wenn ja dann durch Definition von X folgt $m \notin g(m)$.

Gibt es unendlich viele unendliche Kardinalitäten?

Satz. (Cantor) Für jede Menge M gelten $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$ und $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$.

Beweis. Sei $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$, so dass $f(m) = \{m\}$. Da f injektiv ist, gilt $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$.

Wir zeigen nun $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$ indirekt. Sei also $|M| = |\mathcal{P}(M)|$. Damit existiert eine bijektive Funktion $g\colon M \to \mathcal{P}(M)$.

Sei

$$X := \left\{x \in M \mid x \notin g(x)\right\} .$$

Da g surjektiv ist, existiert $m \in M$, so dass $g(m) = X$. Ist $m \in g(m) = X$? Wenn ja dann durch Definition von X folgt $m \notin g(m)$. Ähnlich wenn $m \notin g(m) = X$ dann folgt $m \in g(m)$.

Gibt es unendlich viele unendliche Kardinalitäten?

Satz. (Cantor) Für jede Menge M gelten $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$ und $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$.

Beweis. Sei $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$, so dass $f(m) = \{m\}$. Da f injektiv ist, gilt $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$.

Wir zeigen nun $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$ indirekt. Sei also $|M| = |\mathcal{P}(M)|$. Damit existiert eine bijektive Funktion $g\colon M \to \mathcal{P}(M)$.

Sei

$$X := \{x \in M \mid x \notin g(x)\} \ .$$

Da g surjektiv ist, existiert $m \in M$, so dass $g(m) = X$. Ist $m \in g(m) = X$? Wenn ja dann durch Definition von X folgt $m \notin g(m)$. Ähnlich wenn $m \notin g(m) = X$ dann folgt $m \in g(m)$. Widerspruch.

Gibt es unendlich viele unendliche Kardinalitäten?

Satz. (Cantor) Für jede Menge M gelten $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$ und $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$.

Beweis. Sei $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$, so dass $f(m) = \{m\}$. Da f injektiv ist, gilt $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$.

Wir zeigen nun $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$ indirekt. Sei also $|M| = |\mathcal{P}(M)|$. Damit existiert eine bijektive Funktion $g\colon M \to \mathcal{P}(M)$.

Sei

$$X := \{x \in M \mid x \notin g(x)\} \ .$$

Da g surjektiv ist, existiert $m \in M$, so dass $g(m) = X$. Ist $m \in g(m) = X$? Wenn ja dann durch Definition von X folgt $m \notin g(m)$. Ähnlich wenn $m \notin g(m) = X$ dann folgt $m \in g(m)$. Widerspruch. $\square$

Es gibt also unendlich viele unendliche Kardinalitäten:

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < \cdots$$

- Die Kardinalität $|\mathbb{R}|$ nennt man auch Kontinuum

- Die Kardinalität $|\mathbb{R}|$ nennt man auch Kontinuum und bezeichnet man sie mit dem Symbol $\mathfrak{c}$.

- Die Kardinalität $|\mathbb{R}|$ nennt man auch Kontinuum und bezeichnet man sie mit dem Symbol $\mathfrak{c}$.
- Gibt es Kardinalitäten zwischen $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ und $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$? Ein Kandidat wäre das reelle Intervall $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

- Die Kardinalität $|\mathbb{R}|$ nennt man auch Kontinuum und bezeichnet man sie mit dem Symbol $\mathfrak{c}$.
- Gibt es Kardinalitäten zwischen $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ und $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$? Ein Kandidat wäre das reelle Intervall $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Doch $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$

- Die Kardinalität $|\mathbb{R}|$ nennt man auch Kontinuum und bezeichnet man sie mit dem Symbol $\mathfrak{c}$.
- Gibt es Kardinalitäten zwischen $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ und $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$? Ein Kandidat wäre das reelle Intervall $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Doch $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$ mit Hilfe von $f(x) := \tan(\pi x)$

- Die Kardinalität $|\mathbb{R}|$ nennt man auch Kontinuum und bezeichnet man sie mit dem Symbol $\mathfrak{c}$.
- Gibt es Kardinalitäten zwischen $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ und $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$? Ein Kandidat wäre das reelle Intervall $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Doch $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$ mit Hilfe von $f(x) := \tan(\pi x)$
- Eine weiterer Kandidat wäre die Potenzmenge von $\mathbb{N}$.

Satz. [Cantor 1874] Es gilt $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Satz. [Cantor 1874] Es gilt $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Beweis. Nach CSB brauchen wir zwie Injektionen zu konstruieren.

Satz. [Cantor 1874] Es gilt $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Beweis. Nach CSB brauchen wir zwie Injektionen zu konstruieren.

- Jede reelle Zahl $x \in (0,1)$ lässt sich eindeutig als $x = [0, d_1 d_2 d_3 d_4 \cdots]_{10}$ mit den Ziffern $d_1, d_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ darstellen,

Satz. [Cantor 1874] Es gilt $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Beweis. Nach CSB brauchen wir zwie Injektionen zu konstruieren.

- Jede reelle Zahl $x \in (0,1)$ lässt sich eindeutig als $x = [0, d_1 d_2 d_3 d_4 \cdots]_{10}$ mit den Ziffern $d_1, d_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ darstellen, so dass kein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $d_i = 9$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \geq n$.

Satz. [Cantor 1874] Es gilt $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Beweis. Nach CSB brauchen wir zwie Injektionen zu konstruieren.

- Jede reelle Zahl $x \in (0,1)$ lässt sich eindeutig als $x = [0, d_1 d_2 d_3 d_4 \cdots]_{10}$ mit den Ziffern $d_1, d_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ darstellen, so dass kein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $d_i = 9$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \geq n$. Dann sei $f(x) := \{[d_1]_{10}, [d_1 d_2]_{10}, [d_1 d_2 d_3]_{10}, \ldots\}$.

Satz. [Cantor 1874] Es gilt $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Beweis. Nach CSB brauchen wir zwie Injektionen zu konstruieren.

- Jede reelle Zahl $x \in (0,1)$ lässt sich eindeutig als $x = [0, d_1 d_2 d_3 d_4 \cdots]_{10}$ mit den Ziffern $d_1, d_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ darstellen, so dass kein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $d_i = 9$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \geq n$. Dann sei $f(x) := \{[d_1]_{10}, [d_1 d_2]_{10}, [d_1 d_2 d_3]_{10}, \ldots\}$. Diese Funktion f ist injektiv.

Satz. [Cantor 1874] Es gilt $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Beweis. Nach CSB brauchen wir zwie Injektionen zu konstruieren.

- Jede reelle Zahl $x \in (0,1)$ lässt sich eindeutig als $x = [0, d_1 d_2 d_3 d_4 \cdots]_{10}$ mit den Ziffern $d_1, d_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ darstellen, so dass kein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $d_i = 9$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \geq n$. Dann sei $f(x) := \{[d_1]_{10}, [d_1 d_2]_{10}, [d_1 d_2 d_3]_{10}, \ldots\}$. Diese Funktion f ist injektiv.
- Sei $X \subseteq \mathbb{N}$.

Satz. [Cantor 1874] Es gilt $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Beweis. Nach CSB brauchen wir zwie Injektionen zu konstruieren.

- Jede reelle Zahl $x \in (0,1)$ lässt sich eindeutig als $x = [0, d_1 d_2 d_3 d_4 \cdots]_{10}$ mit den Ziffern $d_1, d_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ darstellen, so dass kein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $d_i = 9$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \geq n$. Dann sei $f(x) := \{[d_1]_{10}, [d_1 d_2]_{10}, [d_1 d_2 d_3]_{10}, \ldots\}$. Diese Funktion f ist injektiv.
- Sei $X \subseteq \mathbb{N}$. Wir konstruieren die reelle Zahl $g(X) := [0, 1 b_0 b_1 b_2 \cdots]_{10}$ mit $b_i \in \{0, 5\}$,

Satz. [Cantor 1874] Es gilt $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Beweis. Nach CSB brauchen wir zwie Injektionen zu konstruieren.

- Jede reelle Zahl $x \in (0,1)$ lässt sich eindeutig als $x = [0, d_1 d_2 d_3 d_4 \cdots]_{10}$ mit den Ziffern $d_1, d_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ darstellen, so dass kein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $d_i = 9$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \geq n$. Dann sei $f(x) := \{[d_1]_{10}, [d_1 d_2]_{10}, [d_1 d_2 d_3]_{10}, \ldots\}$. Diese Funktion f ist injektiv.
- Sei $X \subseteq \mathbb{N}$. Wir konstruieren die reelle Zahl $g(X) := [0, 1 b_0 b_1 b_2 \cdots]_{10}$ mit $b_i \in \{0, 5\}$, so dass $b_i = 5$ gdw. $i \in X$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Satz. [Cantor 1874] Es gilt $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Beweis. Nach CSB brauchen wir zwie Injektionen zu konstruieren.

- Jede reelle Zahl $x \in (0,1)$ lässt sich eindeutig als $x = [0, d_1 d_2 d_3 d_4 \cdots]_{10}$ mit den Ziffern $d_1, d_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ darstellen, so dass kein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $d_i = 9$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \geq n$. Dann sei $f(x) := \{[d_1]_{10}, [d_1 d_2]_{10}, [d_1 d_2 d_3]_{10}, \ldots\}$. Diese Funktion f ist injektiv.
- Sei $X \subseteq \mathbb{N}$. Wir konstruieren die reelle Zahl $g(X) := [0, 1 b_0 b_1 b_2 \cdots]_{10}$ mit $b_i \in \{0, 5\}$, so dass $b_i = 5$ gdw. $i \in X$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Offenbar ist auch diese Funktion g injektiv.

Satz. [Cantor 1874] Es gilt $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Beweis. Nach CSB brauchen wir zwie Injektionen zu konstruieren.

- Jede reelle Zahl $x \in (0, 1)$ lässt sich eindeutig als $x = [0, d_1 d_2 d_3 d_4 \cdots]_{10}$ mit den Ziffern $d_1, d_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ darstellen, so dass kein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $d_i = 9$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \geq n$. Dann sei $f(x) := \{[d_1]_{10}, [d_1 d_2]_{10}, [d_1 d_2 d_3]_{10}, \ldots\}$. Diese Funktion f ist injektiv.
- Sei $X \subseteq \mathbb{N}$. Wir konstruieren die reelle Zahl $g(X) := [0, 1b_0 b_1 b_2 \cdots]_{10}$ mit $b_i \in \{0, 5\}$, so dass $b_i = 5$ gdw. $i \in X$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Offenbar ist auch diese Funktion g injektiv. $\square$

- Es scheint schwer zu sein eine Menge M mit $|\mathbb{N}| < M < |\mathbb{R}|$ zu finden.

- Es scheint schwer zu sein eine Menge M mit $|\mathbb{N}| < M < |\mathbb{R}|$ zu finden. Dies brachte Georg Cantor in 1878 dazu,

- Es scheint schwer zu sein eine Menge M mit $|\mathbb{N}| < M < |\mathbb{R}|$ zu finden. Dies brachte Georg Cantor in 1878 dazu, die folgende Frage zu stellen,

- Es scheint schwer zu sein eine Menge M mit $|\mathbb{N}| < M < |\mathbb{R}|$ zu finden. Dies brachte Georg Cantor in 1878 dazu, die folgende Frage zu stellen, die als ”Kontinuumshypothese” bekannt ist:

- Es scheint schwer zu sein eine Menge M mit $|\mathbb{N}| < M < |\mathbb{R}|$ zu finden. Dies brachte Georg Cantor in 1878 dazu, die folgende Frage zu stellen, die als "Kontinuumshypothese" bekannt ist: Ist es wahr, dass eine Menge A von reellen Zahlen entweder die gleiche Anzahl von Elementen hat wie die gesamte reelle Linie R, oder die gleiche Anzahl von Elementen hat wie die natürlichen Zahlen N?

- Es scheint schwer zu sein eine Menge M mit $|\mathbb{N}| < M < |\mathbb{R}|$ zu finden. Dies brachte Georg Cantor in 1878 dazu, die folgende Frage zu stellen, die als ”Kontinuumshypothese” bekannt ist: Ist es wahr, dass eine Menge A von reellen Zahlen entweder die gleiche Anzahl von Elementen hat wie die gesamte reelle Linie R, oder die gleiche Anzahl von Elementen hat wie die natürlichen Zahlen N?
- In den folgenden Jahrzehnten wurde diese Frage als eine der dringendsten mathematischen Fragen betrachtet.

- Es scheint schwer zu sein eine Menge M mit $|\mathbb{N}| < M < |\mathbb{R}|$ zu finden. Dies brachte Georg Cantor in 1878 dazu, die folgende Frage zu stellen, die als "Kontinuumshypothese" bekannt ist: Ist es wahr, dass eine Menge A von reellen Zahlen entweder die gleiche Anzahl von Elementen hat wie die gesamte reelle Linie R, oder die gleiche Anzahl von Elementen hat wie die natürlichen Zahlen N?
- In den folgenden Jahrzehnten wurde diese Frage als eine der dringendsten mathematischen Fragen betrachtet. David Hilbert setzte sie im Jahr 1900 an die Spitze seiner Liste der wichtigsten offenen Probleme.

- Es scheint schwer zu sein eine Menge M mit $|\mathbb{N}| < M < |\mathbb{R}|$ zu finden. Dies brachte Georg Cantor in 1878 dazu, die folgende Frage zu stellen, die als ”Kontinuumshypothese” bekannt ist: Ist es wahr, dass eine Menge A von reellen Zahlen entweder die gleiche Anzahl von Elementen hat wie die gesamte reelle Linie R, oder die gleiche Anzahl von Elementen hat wie die natürlichen Zahlen N?
- In den folgenden Jahrzehnten wurde diese Frage als eine der dringendsten mathematischen Fragen betrachtet. David Hilbert setzte sie im Jahr 1900 an die Spitze seiner Liste der wichtigsten offenen Probleme. Auch heute noch wird die Antwort auf diese Frage häufig missverstanden.

- Heute wissen wir dank der gemeinsamen Arbeit von Kurt Gödel aus den 1940er Jahren und Paul Cohen aus den 1960er Jahren, dass diese Frage unmöglich zu beantworten ist.

- Heute wissen wir dank der gemeinsamen Arbeit von Kurt Gödel aus den 1940er Jahren und Paul Cohen aus den 1960er Jahren, dass diese Frage unmöglich zu beantworten ist. (man sagt dass CH “unabhängig von dem ZFC-Axiomensystem ist).

- Heute wissen wir dank der gemeinsamen Arbeit von Kurt Gödel aus den 1940er Jahren und Paul Cohen aus den 1960er Jahren, dass diese Frage unmöglich zu beantworten ist. (man sagt dass CH “unabhängig von dem ZFC-Axiomensystem ist).
- Der Grund dafür ist, ganz informell gesprochen, dass es trotz der genauen mathematischen Definition der reellen Linie verschiedene Modelle der reellen Linie und ihrer Teilmengen gibt,

- Heute wissen wir dank der gemeinsamen Arbeit von Kurt Gödel aus den 1940er Jahren und Paul Cohen aus den 1960er Jahren, dass diese Frage unmöglich zu beantworten ist. (man sagt dass CH “unabhängig von dem ZFC-Axiomensystem ist).
- Der Grund dafür ist, ganz informell gesprochen, dass es trotz der genauen mathematischen Definition der reellen Linie verschiedene Modelle der reellen Linie und ihrer Teilmengen gibt, in denen die Antwort auf die Kontinuumshypothese entweder wahr oder falsch ist.

- Heute wissen wir dank der gemeinsamen Arbeit von Kurt Gödel aus den 1940er Jahren und Paul Cohen aus den 1960er Jahren, dass diese Frage unmöglich zu beantworten ist. (man sagt dass CH “unabhängig von dem ZFC-Axiomensystem ist).
- Der Grund dafür ist, ganz informell gesprochen, dass es trotz der genauen mathematischen Definition der reellen Linie verschiedene Modelle der reellen Linie und ihrer Teilmengen gibt, in denen die Antwort auf die Kontinuumshypothese entweder wahr oder falsch ist.
- Es besteht die entfernte Möglichkeit (so gennante ”Dream Solution”), dass es bessere mathematische Definitionen gibt,

- Heute wissen wir dank der gemeinsamen Arbeit von Kurt Gödel aus den 1940er Jahren und Paul Cohen aus den 1960er Jahren, dass diese Frage unmöglich zu beantworten ist. (man sagt dass CH “unabhängig von dem ZFC-Axiomensystem ist).
- Der Grund dafür ist, ganz informell gesprochen, dass es trotz der genauen mathematischen Definition der reellen Linie verschiedene Modelle der reellen Linie und ihrer Teilmengen gibt, in denen die Antwort auf die Kontinuumshypothese entweder wahr oder falsch ist.
- Es besteht die entfernte Möglichkeit (so gennante ”Dream Solution”), dass es bessere mathematische Definitionen gibt, die genau beschreiben, woran (alle? die meisten?) Mathematiker denken, wenn sie an die reelle Linie und ihre Teilmengen denken.

- Heute wissen wir dank der gemeinsamen Arbeit von Kurt Gödel aus den 1940er Jahren und Paul Cohen aus den 1960er Jahren, dass diese Frage unmöglich zu beantworten ist. (man sagt dass CH “unabhängig von dem ZFC-Axiomensystem ist).
- Der Grund dafür ist, ganz informell gesprochen, dass es trotz der genauen mathematischen Definition der reellen Linie verschiedene Modelle der reellen Linie und ihrer Teilmengen gibt, in denen die Antwort auf die Kontinuumshypothese entweder wahr oder falsch ist.
- Es besteht die entfernte Möglichkeit (so gennante ”Dream Solution”), dass es bessere mathematische Definitionen gibt, die genau beschreiben, woran (alle? die meisten?) Mathematiker denken, wenn sie an die reelle Linie und ihre Teilmengen denken. Dies scheint eine Überzeugung zu sein, die Kurt Gödel manchmal äußerte.

- Heute wissen wir dank der gemeinsamen Arbeit von Kurt Gödel aus den 1940er Jahren und Paul Cohen aus den 1960er Jahren, dass diese Frage unmöglich zu beantworten ist. (man sagt dass CH “unabhängig von dem ZFC-Axiomensystem ist).
- Der Grund dafür ist, ganz informell gesprochen, dass es trotz der genauen mathematischen Definition der reellen Linie verschiedene Modelle der reellen Linie und ihrer Teilmengen gibt, in denen die Antwort auf die Kontinuumshypothese entweder wahr oder falsch ist.
- Es besteht die entfernte Möglichkeit (so gennante ”Dream Solution”), dass es bessere mathematische Definitionen gibt, die genau beschreiben, woran (alle? die meisten?) Mathematiker denken, wenn sie an die reelle Linie und ihre Teilmengen denken. Dies scheint eine Überzeugung zu sein, die Kurt Gödel manchmal äußerte. In der Zwischenzeit fragen sich Mathematiker manchmal halb spaßhaft, ob sie ”an die Kontinuumshypothese glauben”.

UNIVERSITÄT
LEIPZIG

VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT!

Łukasz Grabowski
Mathematisches Institut

grabowski@math.uni-leipzig.de