UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Vorlesung 8 - Vergleichen der Größen von Mengen, Satz von Cantor-Schröder-Bernstein

Diskrete Strukturen (WS 2024-25)

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

1. Wiederholung
2. Wann haben zwei Mengen gleich viele Elemente - Kardinalitäten
3. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$
4. Ordnungsrelation auf Kardinalitäten
5. Formulierung des Satzes von Cantor-Schröder-Bernstein
6. Erster Beweis
7. Kontinuum und Kontinuumshypothese

Für uns die symbole $M \subseteq N$ und $M \subset N$ bedeuten das gleiche, d.h. M ist eine Teilmenge von N

- $f\colon M \to N$ ist injektiv gdw $\big(\forall a, b \in M, a \neq b \to f(a) \neq f(b)\big)$.
- $f\colon M \to N$ ist surjektiv gdw $\forall b \in N \exists a \in M \mid f(a) = b$
- $f\colon M \to N$ ist bijektiv gdw f ist injektiv und surjektiv.
- Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw. eine Funktion $g\colon N \to M$ existiert, so dass

$$f \,;\, g = \mathrm{id}_M$$

  und

$$g \,;\, f = \mathrm{id}_N.$$

- Äquivalent gesagt: für alle $m \in M$ gilt $g(f(m)) = m$ und für alle $n \in N$ gilt $f(g(n)) = n$.

Satz. Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw. f ist bijektiv.

Satz. (Eindeutigkeit des Inversen) Sei $f\colon M \to N$ und seien $g, g'\colon N \to M$ mit

$$f \mathbin{;} g = \mathrm{id}_M, \quad g \mathbin{;} f = \mathrm{id}_N,$$

und

$$f \mathbin{;} g' = \mathrm{id}_M, \quad g' \mathbin{;} f = \mathrm{id}_N.$$

Dann gilt $g = g'$.

Satz. Für jede injektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert eine Funktion $g\colon N \to M$, so dass $f;g = \mathrm{id}_M$.

Satz. Für jede surjektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert eine Funktion $g\colon N \to M$, so dass $g\,;f = \mathrm{id}_N$.

Eine Relation $\preceq$ auf M ist eine Ordnungsrelation gdw. sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

- $(M, \preceq)$ heißt eine geordnete Menge oder eine teilweise geordnete Menge.
- Ist $\preceq$ auch vollständig, dann heißt $(M, \preceq)$ auch total geordnete Menge, linear geordnete Menge oder eine Kette.
- Insbesondere ist jede total geordnete Menge auch eine teilweise geordnete Menge.

Teilweise geordnete Mengen lassen sich durch Hasse-Diagramme visualisieren.

Hasse-Digramm für $(\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \subseteq)$:

$$
\begin{tikzcd}
 & \{1,2,3\} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\{1,2\} \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \{1,3\} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \{2,3\} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \\
\{1\} \arrow[dr, dash] & \{2\} \arrow[d, dash] & \{3\} \arrow[dl, dash] \\
 & \emptyset &
\end{tikzcd}
$$

Satz. Sei M eine endliche Menge und sei $f: M \to M$ eine Funktion. Dann f ist surjektiv gdw f ist injektiv.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{K} := \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- Für $m \in M$, sei $c_m := |f^{-1}(\{m\})|$. Es gilt $c_m \geq 1$ und $|M| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.
- $(\to)$ Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ für ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.
- $(\leftarrow)$ Sei f injektiv, aber nicht surjektiv. Dann ist $c_m = 1$ für alle $m \in f(M)$ und $|f(M)| < |M|$. Also auch $\sum_{m \in f(M)} c_m = |f(M)| < |M|$. Widerspruch. □
- Dieses Resultat gilt nicht für unendliche Mengen.
  - Z.B. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = 2x$ ist zwar injektiv, aber nicht surjektiv.
  - $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \lceil \sqrt{x} \rceil$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
- Heute werden wir insbesondere sehen dass es gibt unendlich viele Unendlichkeiten.
- Erste Beispiele
  - $|\emptyset| \neq |M|$ für alle nicht-leeren Mengen M
  - $|\{1,\ 2,\ 3\}| = |\{6,\ 9,\ 11\}|$ via z.B. $\{(1,6),\ (2,9),\ (3,11)\}$
  - $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ via Bijektion $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(z) = \begin{cases} 2z & \text{falls } z \geq 0 \\ -(2z+1) & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $\mathcal{U}$ eni Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.

- Reflexivität: id_M is eine Bijektion $M \to M$ Symmetrie: $f\colon M \to N$ bijektiv, dann $f^{-1}\colon N \to M$ bijektiv, Transitivität: $f\colon A \to B$ $g\colon B \to C$ Bijektionen, dann $f;g$ ist auch bijektiv.

  Die Äquivalenzklassen heißen Kardinalitäten.

- Biespiel: die Kardinalität von $\{6, 9, 11\}$ heißt "drei".

- Sind alle unendliche Mengen gleichmächtig? Andersgesagt: gibt es nur eine unendliche Kardinalität?
- Bevor wie diese Frage betantworten, eine kleine Erinnerung: die Klasse $\mathcal{U}$ aller Mengen ist selbst keine Menge ("Russell Paradox").
    - Nehmen wir an, dass $\mathcal{U}$ eine Menge ist. Dann definieren wir $V := \{M \in \mathcal{U} : M \notin M\}$. Nun haben wir zwei Möglichkeiten: $V \in V$ oder $V \notin V$.
    - Wenn $V \in V$, dann schliessen wir, durch die Definition von V, dass $V \notin V$. Wenn wir $V \notin V$ annehmen, dann folgt, dass $V \in V$. Das ist ein Widerspruch.

Satz. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Beweis. U einen Widerspruch zu bekommen, nehmen wir an dass $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Dann existiert eine bijektive Funktion $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Schreibe Bilder als Dezimalzahlen

$$
\begin{array}{rcccccccc}
b(0) = & a_0 & , & d_{00} & d_{01} & d_{02} & \cdots & d_{0n} & \cdots \\
b(1) = & a_1 & , & d_{10} & d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & \cdots \\
b(2) = & a_2 & , & d_{20} & d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
b(n) = & a_n & , & d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

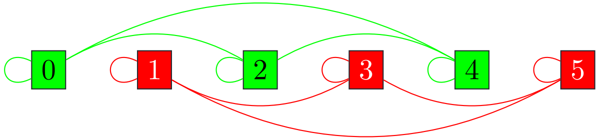
Für jedes $i \in \mathbb{N}$, wähle eine Ziffer $d_i \in \{1, \ldots, 8\} \setminus \{d_{ii}\}$. Da b surjektiv ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b(n) = 0, d_0 d_1 d_2 d_3 \ldots$.

Was können wir über die n-te Stelle von $b(n)$ sagen? Es gilt $d_n = d_{nn} \neq d_{nn}$. Dieser Widerspruch zeigt, dass b kann nicht existieren. $\square$

- Das war ein “diagonales Argument”.
- Die Kardinalität von $\mathbb{N}$ heißt “aleph-0”: $\aleph_0$.
- Die Kardinalität von $\mathbb{R}$ heißt “continuum”: $\mathfrak{c}$.

- Wir definieren $|M| \leq |N|$ genau dann wenn es gibt eine Injektion $f: M \to N$. Wir möchten erst argumentieren, dass diese Relation wohldefiniert ist.

- Warum könnte diese Relation überhaupt nicht wohldefiniert sein? Betrachten wir ein Beispiel.



- Die Relation $[i] \prec [j]$ gdw. $i < j$ ist nicht wohldefiniert: $[1] \prec [2] = [0]$ aber auch $[1] \not\prec [0] = [2]$.

Lemma. Seien M, X, N, Y Mengen, so dass $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. Es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$ gdw. es existiert eine injektive Funktion $g\colon X \to Y$.

Beweis.

- ($\to$) Sei $f\colon M \to N$ injektiv. Aufgrund der Annahme $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. existieren Bijektionen $b\colon X \to M$ und $c\colon N \to Y$.

  Dann ist die Funktion $(b\,;f\,;c\colon X \to Y$ injektiv.

- ($\leftarrow$) Durch die Symmetrie der Aussage $\square$

Wortschatz: Wir sagen auch dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$.

- Für endliche Kardinalitäten erhalten wir die normale Ordnungsrelation $|\{1, 2\}| \leq |\{2, 3, 4\}|$
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$ vermittels $\iota\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $\iota(n) = n$. Wir haben auch $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$, und $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.
- Sei $M \subseteq N$. Dann gilt $|M| \leq |N|$, da $\iota\colon M \to N$, mit $\iota(m) = m$, ist injektiv.
- Sei $f\colon M \to N$ surjektiv. Dann $|N| \leq |M|$. In der Tat, sei $g\colon N \to M$ mit $g; f = \mathrm{id}_M$. Dann g ist injektiv: wenn x, y sind so dass $g(x) = g(y)$, dann auch $x = f(g(x)) = f(g(y)) = y$.

- Ist das überhaupt eine Ordnungsrelation?
  - Reflexivität: $\mathrm{id}_M \colon M \to M$ ist injektiv, also $|M| \leq |M|$
  - Transitivität: $f \colon A \to B$, $g \colon B \to C$ - Injektionen, dann $f;g \colon A \to C$ auch Injektion. Also $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |C|$ impliziert $|A| \leq |C|$.
  - Antisymmetrie: $f \colon A \to B$ Injektion, $g \colon B \to A$ Injektion (also $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$). Gibt es eine Bijektion $A \to B$? Das ist nicht klar.

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Wir sehen heute zwei Beweise. 1) Beweis mit der Relation die durch f und g erzeugt ist 2) mit Fix-Punkte.

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis. . Wir können annehmen, dass M und N disjunkt sind.

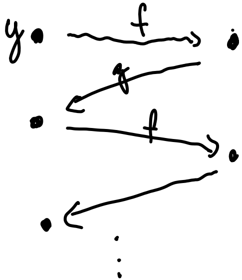
- Wenn dass nicht der Fall ist, dann betrachten wir die Mengen $M' := \{(m,0)\colon m \in M\}$, $N' := \{(n,0)\colon n \in N\}$. Wir haben Bijektionen $M' \to M$, $N' \to N$, also eine Bijektion zwischen M und N existiert gdw eine Bijektion zwischen M' und N' existiert.

- Wir betrachten die zwei Relationen f und g auf $M \cup N$, und die Relation V - die kleinste Äquivalenzrelation die f und g enthält.

- Sei $K \subset M \cup N$ eine Äquivalenzklasse von V. Es reicht uns, eine Bijektion $b_K\colon K \cup M \to K \cup N$ zu konstruieren. In der Tat, falls wir das schaffen, dann definieren wir $b\colon M \to N$ durch $b(x) := b_K(x)$ wenn $x \in K$. Weil $\{K \cap M\colon K \in M \cup N/V\}$ eine Zerlegung von M ist, schließen wir, dass b eine Bijektion ist.

Sei K eine Äquivalenzklasse von V.

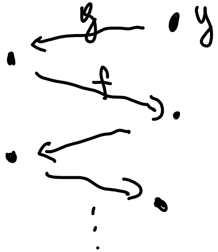
- In K : gibt's $y \in M$ mit $y \notin g(N)$.



- Für $z \in M \cap K$ definieren wir $b_K(z) := f(z)$.

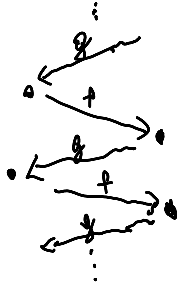
- b_K is eine Bijektion: Tatsätzlich, $K = \{y, f(y), gf(y), fgf(y), \ldots\}$. Alle diese Elemente sind unterschiedlich.
- Erst beweisen wir $y, gf(y), (gf)^2(y), \ldots$ sind unterschiedlich.
    - Induktionsbeweis: IA: $y, gf(y)$ sind unterschiedlich, da $y \notin g(N)$.
    - IH: $y, gf(y), \ldots (gf)^k(y)$ sind unterschiedlich.
    - IB: Zu zeigen ist, dass $y, gf(y), \ldots (gf)^k(y)$ sind unterschiedlich. Durch Widerspruch: sei $(gf)^{k+1}(y) = (gf)^l(y)$, mit $l \leq k$. Da $y \notin g(N)$, folgt $l \geq 1$. Da gf ist injektiv, folgt $(gf)^k(y) = gf^{l-1}(y)$. Widerpsruch mit IA.
- Da g eine Injektion ist, sehen wir, dass $y, f(y), gf(y), fgf(y), \ldots$ sind unterschiedliche Elemente. Es folgt dass b eine Bijetion ist.

- In K gibt's $y \in N$ mit $y \notin f(M)$.



- Für $z \in M \cap K$ definieren wir $b_K(z) := g^{-1}(z)$.

- Für alle $z \in M \cap K$ gilt $z \in g(N)$, und für alle $N \cap K$ gilt $z \in f(M)$.



- Für $z \in M \cap K$ definieren wir $b_K(z) := f(z)$. $\square$

Konsequenz von CSB:

Satz. Die Relation $\leq$ ist eine Ordnungsrelation auf Kardinalitäten.

Beweis. Transitivität und Reflexivität haben wir schon gesegen.

- **Antisymmetrie:** Seien $|M| \leq |N|$ und $|N| \leq |M|$. Also existieren injektive Funktionen $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$. Dann existiert auch eine bijektive Funktion $h\colon M \to N$ nach CSB und damit $|M| = |N|$. $\square$

Ist $\leq$ auf Kardinalitäten total? D.h. wenn wir zwei Mengen M und N haben, gibt's immer eine Injektion $M \to N$ oder eine injektion $N \to M$?

Satz. (Satz von Hartogs, benutzt das Auswahlaxiom) Die Kardinalitäten $\mathcal{K}$ bilden eine total geordnete Menge $(\mathcal{K}, \leq)$

- Ähnlich man kann auch beweisen dass $|\mathbb{N}|$ ist die kleinste unendliche Kardinalität, manchmal auch $\aleph_0$ genannt.

- Wir sagen dass eine Menge M ist abzählbar gdw. $|M| \leq |\mathbb{N}|$; d. h. wenn sie höchstens die Kardinalität von $\mathbb{N}$ hat. Jede endliche Menge, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind also abzählbar, aber $\mathbb{R}$ hingegen nicht.
- Echt mächtigere Mengen nennen wir auch überabzählbar.

Gibt es unendlich viele unendliche Kardinalitäten?

Satz. (Cantor) Für jede Menge M gelten $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$ und $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$.

Beweis. Sei $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$, so dass $f(m) = \{m\}$. Da f injektiv ist, gilt $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$.

Wir zeigen nun $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$ indirekt. Sei also $|M| = |\mathcal{P}(M)|$. Damit existiert eine bijektive Funktion $g\colon M \to \mathcal{P}(M)$.

Sei
$$X := \{x \in M \mid x \notin g(x)\} \ .$$
Da g surjektiv ist, existiert $m \in M$, so dass $g(m) = X$. Ist $m \in g(m) = X$? Wenn ja dann durch Definition von X folgt $m \notin g(m)$. Ähnlich wenn $m \notin g(m) = X$ dann folgt $m \in g(m)$. Widerspruch. $\square$

Es gibt also unendlich viele unendliche Kardinalitäten:

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < \cdots$$

- Die Kardinalität $|\mathbb{R}|$ nennt man auch Kontinuum und bezeichnet man sie mit dem Symbol $\mathfrak{c}$.
- Gibt es Kardinalitäten zwischen $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ und $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$? Ein Kandidat wäre das reelle Intervall $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Doch $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$ mit Hilfe von $f(x) := \tan(\pi x)$
- Eine weiterer Kandidat wäre die Potenzmenge von $\mathbb{N}$.

Satz. [Cantor 1874] Es gilt $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Beweis. Nach CSB brauchen wir zwie Injektionen zu konstruieren.

- Jede reelle Zahl $x \in (0,1)$ lässt sich eindeutig als $x = [0, d_1 d_2 d_3 d_4 \cdots]_{10}$ mit den Ziffern $d_1, d_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ darstellen, so dass kein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $d_i = 9$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \geq n$. Dann sei $f(x) := \{[d_1]_{10}, [d_1 d_2]_{10}, [d_1 d_2 d_3]_{10}, \ldots\}$. Diese Funktion f ist injektiv.
- Sei $X \subseteq \mathbb{N}$. Wir konstruieren die reelle Zahl $g(X) := [0, 1 b_0 b_1 b_2 \cdots]_{10}$ mit $b_i \in \{0, 5\}$, so dass $b_i = 5$ gdw. $i \in X$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Offenbar ist auch diese Funktion g injektiv. $\square$

- Es scheint schwer zu sein eine Menge M mit $|\mathbb{N}| < M < |\mathbb{R}|$ zu finden. Dies brachte Georg Cantor in 1878 dazu, die folgende Frage zu stellen, die als "Kontinuumshypothese" bekannt ist: Ist es wahr, dass eine Menge A von reellen Zahlen entweder die gleiche Anzahl von Elementen hat wie die gesamte reelle Linie R, oder die gleiche Anzahl von Elementen hat wie die natürlichen Zahlen N?
- In den folgenden Jahrzehnten wurde diese Frage als eine der dringendsten mathematischen Fragen betrachtet. David Hilbert setzte sie im Jahr 1900 an die Spitze seiner Liste der wichtigsten offenen Probleme. Auch heute noch wird die Antwort auf diese Frage häufig missverstanden.

- Heute wissen wir dank der gemeinsamen Arbeit von Kurt Gödel aus den 1940er Jahren und Paul Cohen aus den 1960er Jahren, dass diese Frage unmöglich zu beantworten ist. (man sagt dass CH "unabhängig von dem ZFC-Axiomensystem ist).
- Der Grund dafür ist, ganz informell gesprochen, dass es trotz der genauen mathematischen Definition der reellen Linie verschiedene Modelle der reellen Linie und ihrer Teilmengen gibt, in denen die Antwort auf die Kontinuumshypothese entweder wahr oder falsch ist.
- Es besteht die entfernte Möglichkeit (so gennante "Dream Solution"), dass es bessere mathematische Definitionen gibt, die genau beschreiben, woran (alle? die meisten?) Mathematiker denken, wenn sie an die reelle Linie und ihre Teilmengen denken. Dies scheint eine Überzeugung zu sein, die Kurt Gödel manchmal äußerte. In der Zwischenzeit fragen sich Mathematiker manchmal halb spaßhaft, ob sie "an die Kontinuumshypothese glauben".

UNIVERSITÄT
LEIPZIG

VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT!

Łukasz Grabowski
Mathematisches Institut

grabowski@math.uni-leipzig.de