Wahrscheinlichkeitstheorie für Inf. & Lehramt — Dr. M. Tautenhahn
Wintersemester 2024/2025 — Dr. S. Kliem, A. Weiß

Hausaufgabenblatt 1

Abgabe bis 4.11.2024 (Mo) um 15.00 auf moodle

Aufgabe 1. Für die Ereignisse A und B seien folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt:

$$P(A) = 0.25,\ P(B) = 0.45,\ P(A \cup B) = 0.5.$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$P(A \cap B^c) \text{ und } P\left((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)\right).$$

Lösung zu Aufgabe 1: (W-Raum Axiome nutzen) — WRaum-ac.tex

Es gelten folgende Rechenregeln:

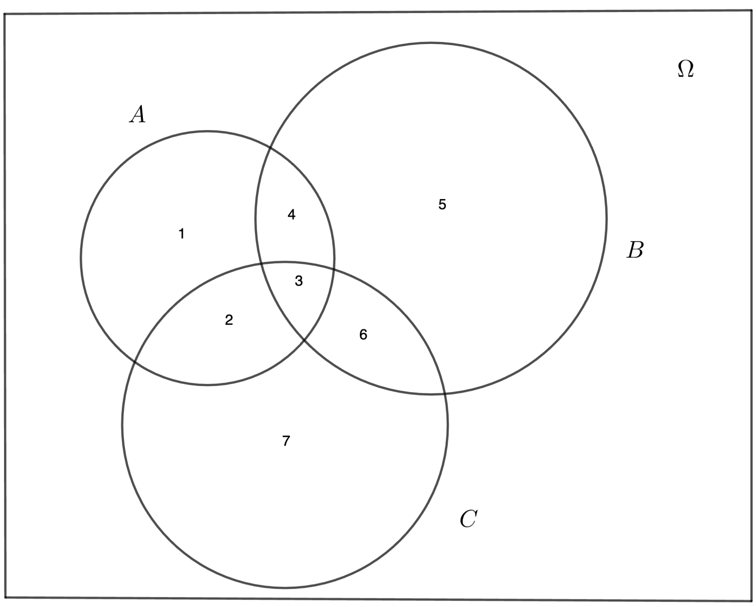
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Damit ergeben sich folgende Lösungen:

- $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - [P(A) + P(B) - P(A \cup B)] = P(A \cup B) - P(B) = 0,5 - 0,45 = 0,05$.
- $P\left((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)\right) = P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) = 0,05 + [P(A \cup B) - P(A)] = 0,05 + 0,5 - 0,25 = 0,3$

Aufgabe 2.

(a) Im Folgenden veranschaulichen wir uns die Formel von Sylvester für den Fall $n = 3$ wie in der Hörsaalübung, Aufgabe 5 für $n = 2$.



(a1) Drücken Sie die Mengen $1 - 7$ jeweils als Schnittmenge dreier Mengen aus.

(a2) Vervollständigen Sie folgende Tabelle.

Sylvester:	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbb{P}(A)$							
$\mathbb{P}(B)$							
$\mathbb{P}(C)$							
$-\mathbb{P}(A \cap B)$							
$-\mathbb{P}(A \cap C)$							
$-\mathbb{P}(B \cap C)$							
$\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$							
$\Sigma:$							
$\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$							

(b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die *Formel von Sylvester* gilt: Sei (Ω, p) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Für alle $n \geq 2$ und $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})\,.$$

Lösung zu Aufgabe 2: (Sylvester) Sylvester.tex

(a1)

$$1 = A \cap B^c \cap C^c \qquad 2 = A \cap B^c \cap C \qquad 3 = A \cap B \cap C \qquad 4 = A \cap B \cap C^c$$
$$5 = A^c \cap B \cap C^c \qquad 6 = A^c \cap B \cap C \qquad 7 = A^c \cap B^c \cap C.$$

(a2)

Sylvester:	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbb{P}(A)$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$			
$\mathbb{P}(B)$			$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	
$\mathbb{P}(C)$		$+1$	$+1$			$+1$	$+1$
$-\mathbb{P}(A \cap B)$			-1	-1			
$-\mathbb{P}(A \cap C)$		-1	-1				
$-\mathbb{P}(B \cap C)$			-1			-1	
$\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$			$+1$				
$\Sigma:$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
$\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$

(b) IA: $n = 2$:

$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ ist korrekt, siehe Lemma 1.5(e)

IV: Aussage gilt für beliebiges aber festes $n \geq 2$.

IS: $n \to n+1$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &\overset{n=2}{=} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) \\
&\overset{IV}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\
&\qquad - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \mathbb{P}((A_{i_1} \cap A_{n+1}) \cap \cdots \cap (A_{i_k} \cap A_{n+1})) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\
&\qquad - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n+1} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \,.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3. Aus dem Wort „WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE“ wird zufällig ein Buchstabe ausgewählt.

(a) Beschreiben Sie dieses Zufallsexperiment mit einem geeigneten diskreten Wahrscheinlichkeitsraum. Geben Sie dazu einen geeigneten Ereignisraum Ω und die zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion $p : \Omega \to [0, 1]$ an.

(b) Handelt es sich um einen Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsraum? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Wir betrachten die Ereignisse

A_1 : Es handelt sich um ein „E“,
A_2 : Es handelt sich um einen Konsonanten,
A_3 : Es handelt sich um einen Vokal.

Definieren Sie die Ereignisse A_1, A_2 und A_3 als Teilmengen von Ω und berechnen Sie deren Wahrscheinlichkeit.

Lösung zu Aufgabe 3: (Laplace1) Laplace1.tex

(a) $\Omega = \{A, C, E, H, I, K, L, N, O, R, S, T, W\}$ mit

$$
p(A) = \frac{1}{26},\ p(C) = \frac{2}{26},\ p(E) = \frac{4}{26},\ p(H) = \frac{4}{26},\ p(I) = \frac{4}{26},\ p(K) = \frac{1}{26},\ p(L) = \frac{1}{26},
$$
$$
p(N) = \frac{1}{26},\ p(O) = \frac{1}{26},\ p(R) = \frac{2}{26},\ p(S) = \frac{2}{26},\ p(T) = \frac{2}{26},\ p(W) = \frac{1}{26}.
$$

(Alternativ: $\Omega = \{A, B, \ldots, Z\}$, dann müssen aber alle überflüssigen Buchstaben danach bei den Elementarwahrscheinlichkeiten Null sein (und erwähnt werden), d.h. $p(B) = 0$, $p(D) = 0$ etc.)

(b) Nein, da z.B. $p(A) \neq p(C)$.

(c) $A_1 = \{E\}$ mit $\mathbb{P}(A_1) = p(E) = \frac{4}{26} = \frac{2}{13}$, $A_2 = \{C, H, K, L, N, R, S, T, W\}$ mit $\mathbb{P}(A_2) = p(C) + \cdots + p(W) = \frac{16}{26} = \frac{8}{13}$ und $\mathbb{P}(A_3) = 1 - \mathbb{P}(A_2) = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$.

Aufgabe 4. Eine Urne enthält drei Kugeln mit den Nummern $1, 2$ und 3. Der Urne werden nacheinander 3 Kugeln wie folgt entnommen.

(I) Nach jedem Zug wird die Kugel zurück gelegt (mit ZL). Die Ziehungsreihenfolge wird auch notiert (mit B(erücksichtigung)dZRF).

(II) Nach jedem Zug wird die Kugel **nicht** zurück gelegt (ohne ZL). Die Ziehungsreihenfolge wird auch notiert (mit BdZRF).

(III) Nach jedem Zug wird die Kugel **nicht** zurück gelegt (ohne ZL). Die Ziehungsreihenfolge wird **nicht** notiert (ohne BdZRF).

(IV) Nach jedem Zug wird die Kugel zurück gelegt (mit ZL). Die Ziehungsreihenfolge wird **nicht** notiert (ohne BdZRF).

Aufgabe:

(a) Beschreiben Sie jedes der vier Zufallsexperimente mit einem geeigneten diskreten Wahrscheinlichkeitsraum. Geben Sie dazu einen geeigneten Ereignisraum $\Omega \subset \{1, 2, 3\}^3$ durch Aufzählung seiner Elemente und die zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion $p : \Omega \to [0, 1]$ an.

(b) Wie groß ist jeweils die Mächtigkeit von Ω?

(c) Handelt es sich jeweils um einen Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsraum oder nicht? Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung zu Aufgabe 4: (Urnen-3-Kugeln) Urnen-3-Kugeln.tex

(I) $\Omega = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 3, 1), (1, 3, 2), (1, 3, 3), (2, \cdots), (3, \cdots)\}$ mit $p(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$, wobei $|\Omega| = 3^3 = 27$. L-raum, da alle Elementarwahrscheinlichkeiten gleich sind.

(II) $\Omega = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$ mit $p(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$, wobei $|\Omega| = 3! = 6$. L-raum, da alle Elementarwahrscheinlichkeiten gleich sind.

(III) $\Omega = \{(1, 2, 3)\}$ mit $p(\{\omega\}) = 1$, wobei $|\Omega| = 1$. L-raum, da alle Elementarwahrscheinlichkeiten gleich sind. (Statt $(1, 2, 3)$ kann natürlich auch $(1, 3, 2)$ oder $(2, 1, 3)$ etc. angegeben werden.)

(IV) $\Omega = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 3, 3), (2, 2, 2), (2, 2, 3), (2, 3, 3), (3, 3, 3)\}$, wobei $p((1, 1, 1)) = p((2, 2, 2)) = p((3, 3, 3)) = 1/27$, $p((1, 1, 2)) = p((1, 1, 3)) = p(1, 2, 2) = p(1, 3, 3) = p(2, 2, 3) = p(2, 3, 3) = 3/27 = 1/9$ und $p(1, 2, 3) = 6/27 = 2/9$. $|\Omega| = 10$. Dies ist kein L-raum, da z.B. $p((1, 1, 1)) \neq p((1, 1, 2))$ ist.

Abgabe: Die Abgabe erfolgt erstmal als Gruppe ($2-4$ Teilnehmer) über moodle. Bitte schreiben Sie auf die erste Seite der Abgabe die vollständigen Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder. Die Übungen müssen selbstständig bearbeitet werden. Ein Gruppenmitglied lädt die Abgabe als eine pdf-Datei für alle hoch. Bitte benennen Sie die Datei wie folgt (Name bezieht sich auf das hochladende Gruppenmitglied):

Vorname-Nachname-MatrNr-HA1.pdf

Zu späte oder nicht lesbare Abgaben oder Entwürfe oder Einzelabgaben werden nicht korrigiert und mit 0 Punkten bewertet. Vergessene Namen von Gruppenmitgliedern können nicht berücksichtigt werden. Alle Gruppenmitglieder sind für das erfolgreiche Hochladen der Abgabe verantwortlich.