Diskrete Strukturen
Pflichtserie 11

Nikita Emanuel John Fehér, 3793479

17. Januar 2025
09:15-10:45 Dietzschold, Johannes

11.1

Sei $\phi : A \to B$ ein Homomorphismus zwischen kommutativen Gruppen. Sei $\ker(\phi) \subset A$ wie folgt definiert: $\ker(\phi) := \{x \in A : \phi(x) = 0_B\}$. Zeigen Sie dass $\ker(\phi)$ ist eine Untergruppe von A. (D.h. Sie müssen zeigen dass a) $0_A \in \ker(\phi)$, b) wenn $x \in \ker(\phi)$ dann auch $-x \in \ker(\phi)$, und c) wenn $x, y \in \ker(\phi)$ dann auch $x + y \in \ker(\phi)$. ($\ker(\phi)$ heißt auch "kern von ϕ")

a) Da ϕ Homomorphismus $\implies \phi(0_A) = 0_B$
$\implies 0_A \in \ker(\phi)$

b) Angenommen $x \in \ker(\phi) \implies \phi(x) = 0_B$
Da ϕ Homomorphismus $\implies \phi(-x) = -\phi(x) = -0_B$
$\implies -x \in \ker(\phi)$

c) Angenommen $x, y \in \ker(\phi) \implies \phi(x) = 0_B$ und $\phi(y) = 0_B$
Da ϕ Homomorphismus: $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y) = 0_B + 0_B = 0_B$
$\implies x + y \in \ker(\phi)$

Da alle drei Bedingungen erfüllt sind gilt: $\ker(\phi)$ Untergruppe A $\square$

11.2

Zeigen Sie dass ein Homomorphismus $\phi : A \to B$ injektiv ist gdw. $\ker(\phi) = \{0_A\}$

"$\implies$": Annahme: ϕ ist injektiv $\implies \phi(x_1) = \phi(x_2) \implies x_1 = x_2$
sei $x_2 = 0_A : \phi(x_1) = \phi(0_A) \implies x_1 = 0_A$
$\implies \ker(\phi) = \{0_A\}$

"$\impliedby$": Annahme: $\ker(\phi) = \{0_A\}$

- Sei $\phi(x_1) = \phi(x_2)$ für $x_1, x_2 \in A$
- Da ϕ Homomorphismus: $\phi(x_1) - \phi(x_2) = \phi(x_1 - x_2)$
- Aus $\phi(x_1) = \phi(x_2)$ folgt: $\phi(x_1 - x_2) = 0_B$
- $x_1 - x_2 \in \ker(\phi) \implies \ker(\phi) = \{0_A\}$
  $\implies x_1 - x_2 = 0_A \implies x_1 = x_2$

$\square$

11.3

Seien $(M,+)$ and $(N,+)$ zwei kommutative Gruppen. Sei $\phi : M \to N$ eine Abbildung mit der Eigenschaft dass $\forall x, y \in M$ haben wir $\phi(x+y) = \phi(x)+\phi(y)$. Zeigen Sie dass $\phi(0_M) = 0_N$ und $\forall x \in M \phi(-x) = -\phi(x)$.

- Zeige $\phi(0_M) = 0_N$
  Setze $x = 0_M, y = 0_M$:

$$\begin{aligned} \phi(x+y) &= \phi(x) + \phi(y) \\ \implies \phi(0_M + 0_M) &= \phi(0_M) + \phi(0_M) \\ \implies \phi(0_M) &= \phi(0_M) + \phi(0_M) && \mid -\phi(0_M) \\ 0_N &= \phi(0_M) \end{aligned}$$

- Zeige $\forall x \in M : \phi(-x) = -\phi(x)$

$$\begin{aligned} x + (-x) &= 0_M && \mid \phi() \\ \implies \phi(x + (-x)) &= \phi(0_M) \\ \implies \phi(x) + \phi(-x) &= \phi(0_M) && \mid \phi(0_M) = 0_N \\ \implies \phi(x) + \phi(-x) &= 0_N && \mid -\phi(x) \\ \implies \phi(-x) &= -\phi(x) \end{aligned}$$

$\square$