Logik
Serie 5

Nikita Emanuel John Fehér, 3793479
Erik Thun, 3794446

13. Juni 2025
Mittwoch 09:15-10:45 Keitsch, Jamie; Gruppe e

H 5-1. Terminduktion (2 Pkt.)
Gegeben eine Struktur $\mathfrak{A}$ und zwei Belegungen β und γ. Zeigen Sie per Terminduktion, daß für alle Terme $t \in T$: Falls $\beta|_{\mathrm{var}}(t) = \gamma|_{\mathrm{var}}(t)$, dann $\beta(t) = \gamma(t)$.

H 5-2. Erfüllbarkeit und Co. (3 Pkt.)

Kreuzen Sie in der Tabelle an, ob die betreffende Formel erfüllbar, falsifizierbar, unerfüllbar oder tautologisch ist.

Formel	Erfüllbar	Falsifizierbar	Unerfüllbar	Tautologisch
$\forall x P(x) \rightarrow \exists y P(y)$				
$\forall x Q(x,x) \rightarrow \exists y \forall z Q(z,y)$				
$\forall x \neg P(x) \wedge \exists y P(f(y,y))$				

H 5-3. Modell und Widerlegung (5 Pkt.)

Kreuzen Sie in der Tabelle an, ob die betreffende Struktur $\mathfrak{A}$ ein Modell der Formel φ ist. Geben Sie im Falle einer Widerlegung eine falsifizierende Instanz an. Es gilt:

- $U^{\mathfrak{A}_1} = U^{\mathfrak{A}_2} = U^{\mathfrak{A}_3} = \mathbb{N}, c^{\mathfrak{A}_1} = c^{\mathfrak{A}_2} = c^{\mathfrak{A}_3} = 0, d^{\mathfrak{A}_1} = d^{\mathfrak{A}_2} = d^{\mathfrak{A}_3} = 1$
- $f^{\mathfrak{A}_1}(n,m) = \max(m,n), f^{\mathfrak{A}_2}(n,m) = n \cdot m, f^{\mathfrak{A}_3}(n,m) = n + 1$

Formel	$\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{A}_2$	$\mathfrak{A}_3$
$\forall x(f(x,x) = x \rightarrow (x = c \vee x = d))$			
$\forall x \exists y \exists z f(y,z) = x$			

H 5-4. 3-elementige Universen (5 Pkt.)

a) Gegeben nachfolgende Folgerungsaussagen:

$$\forall x \exists y R(x,y) \models \exists y \forall x R(x,y) \qquad \text{und} \qquad \exists y \forall x R(x,y) \models \forall x \exists y R(x,y)$$

Geben Sie jeweils an, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Begründen Sie im Falschheitsfalle Ihre Antwort mit einer Struktur $\mathfrak{A}$ wobei $\left|U^{\mathfrak{A}}\right| = 3$ gilt.

b) Gegeben die folgenden beiden Formeln

$$\varphi := \forall x(f(x) \neq x \wedge f(f(f(x))) = x) \qquad \text{und} \qquad \psi := \forall x(f(x) \neq x \wedge f(f(x)) = x)$$

Welche der Formeln ist durch eine Struktur $\mathfrak{A}$ mit $\left|U^{\mathfrak{A}}\right| = 3$ erfüllbar? Geben Sie im Erfüllbarkeitsfalle eine bezeugende Interpretation $f^{\mathfrak{A}}$ an bzw. begründen Sie kurz, warum eine solche Interpretation nicht existiert.

c) Geben Sie eine erfüllbare Formel ξ mit $s(\xi) = \{P^1, Q^1\}$ (ohne Verwendung des Gleichheitssymbols) an, sodaß für jedes Modell $(\mathfrak{A}, \beta)$ von ξ gilt: $\left|U^{\mathfrak{A}}\right| \geq 3$. Ohne Begründung!

H 5-5. Semantische Äquivalenz (5 Pkt.)

Gegeben seien die folgenden drei Äquivalenzaussagen:

1. $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
2. $\exists x \varphi \rightarrow \psi \equiv \forall x(\varphi \rightarrow \psi)$ mit $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_{PL}$ und $x \notin \text{frei}(\psi)$
3. $\forall x \exists x \varphi \equiv \exists x \varphi$ mit $\varphi \in \mathcal{F}_{PL}$

Geben Sie im Äquivalenzfalle einen Beweis <u>unter Verwendung der in VL7 angegebenen semantischen Äquivalenzen</u> an. Falls die Äquivalenzaussage nicht gilt, geben Sie eine bezeugende Interpretation $(\mathfrak{A}, \beta)$ an.