u_1, u_2 l.u und

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 = \mu_1 \cdot u_1 + \mu_2 \cdot u_2$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \mu_1) \cdot u_1 + (\lambda_2 - \mu_2) \cdot u_2 = 0$$

u_1, u_2 l.u

$$\Rightarrow \lambda_1 - \mu_1 = 0, \quad \lambda_2 - \mu_2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \mu_1, \quad \lambda_2 = \mu_2$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1 = -x_2 - x_3 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:u_1} + x_3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:u_2} \;\middle|\; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{span}\{u_1, u_2\}$$

$\Rightarrow$ U ist ein Unterraum,

$\{u_1, u_2\}$ ist Basis von U

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 1 \quad \cdot(-1) \\ + \\ \quad\quad + \end{array}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot (-1)$$

$$= -1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & \mu - 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 - 2x_4 = \mu - 1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = 1 - 2x_3 - x_4 \\ x_1 = (\mu - 1) - 2x_3 + 2x_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{Lös}(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} \mu - 1 - 2x_3 + 2x_4 \\ 1 - 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \; x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Bsp.:

$$U = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$$

Bestimme Basis von U und ergänze zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{v_3} \text{ Basis von } U$$

Pivotindizes: $j_1 = 1$, $j_2 = 2$, $j_3 = 3$

$$\{v_1, v_2, v_3\} \cup \{e_j \mid j \in \{1,2,3,4\} \setminus \{j_1, j_2, j_3\}\}$$

$$= \{v_1, v_2, v_3\} \cup \{e_4\}$$

$$= \{v_1, v_2, v_3, e_4\} \text{ Basis von } \mathbb{R}^4 \qquad (*)$$

$$\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\e_4\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rang}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\e_4\end{pmatrix} = 4 \Rightarrow (*)$$

Spalte:

$$A \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} j_1 & & j_3 & j_4 \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$j_1 = 1, \quad j_2 = 3, \quad j_3 = 4$

Def.:

Sei G eine Gruppe

G heiß zyklisch

$:\Longleftrightarrow \exists g \in G : \ G = \langle g \rangle$

$= \langle g^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$

$= \langle n \cdot g \mid n \in \mathbb{Z} \}$

Satz:

$\mathbb{Z}_n$ ist zyklisch

$\mathbb{Z}_n = \langle \bar{1} \rangle$

$\langle \bar{1} \rangle = \{ n \cdot \bar{1} \rangle = \{ \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \dots, \overline{n-1} \}$

$= \mathbb{Z}_n$

Satz:

Sei U UG von $\mathbb{Z}_n$

$\Rightarrow U$ zyklisch.

$$\mathcal{A} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}_{v_3} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdot(-1) \; +$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

$\mathcal{A}$ Basis von $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{B} = \{ e_1, e_2, e_3 \}$

$T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(id_V)$

$$id_V(v_1) = v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

$$id_V(v_2) = v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3$$

$$id_V(v_3) = v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3$$

$$\Rightarrow T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(id_V) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

z.z.:

(a) $\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 1 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\det(A) = (-1)^{(n-1)(n-2)/2} \cdot (-n)^{n-1} \cdot (n+1)/2$