Berechenbarkeit

Vorlesung 1: Überblick

4. April 2024

Team & Sprechstunden

Hausaufgabenkontrolle

- Riko Kister
- Tristan Schauder
- Alexander Vopel

Team & Sprechstunden

Hausaufgabenkontrolle

- Riko Kister
- Tristan Schauder
- Alexander Vopel

Sprechstunden

▸ Andreas Maletti	
maletti@informatik.uni-leipzig.de	montags, 17–18 Uhr
▸ Erik Paul	
epaul@informatik.uni-leipzig.de	nach Vereinbarung
▸ Karin Quaas	
quaas@informatik.uni-leipzig.de	nach Vereinbarung
▸ Fabian Sauer	
sauer@informatik.uni-leipzig.de	nach Vereinbarung

Veranstaltungen

- Vorlesung: donnerstags, jede Woche, 17:15–18:45 Uhr, Hs. 5

  Andreas Maletti

- Übungen: montags, dienstags & mittwochs, alle 14 Tage

Woche	Wochentag	Zeit	Raum	Übungsleiter
A-Woche	montags	11:15–12:45	P-801	Erik Paul
	dienstags	11:15–12:45	P-801	Fabian Sauer
	dienstags	15:15–16:45	SG 2-14	Karin Quaas
	mittwochs	11:15–12:45	SG 3-12	Karin Quaas
B-Woche	montags	11:15–12:45	P-801	Erik Paul
	dienstags	11:15–12:45	P-801	Fabian Sauer
	dienstags	15:15–16:45	SG 2-14	Karin Quaas
	mittwochs	11:15–12:45	SG 3-12	Karin Quaas

Termine — Modul Berechenbarkeit

Übungen	Vorlesung
2.4. __________	4.4. Überblick
9.4. __________	11.4. Turingmaschine I (Übungsblatt 1)
16.4. Übung 1 B-Woche	18.4. Turingmaschine II
23.4. Übung 1 A-Woche	25.4. Loop-Programme (Übungsblatt 2)
30.4. Übung 2 B-Woche (Mittwoch Feiertag)	2.5. While-Programme
7.5. Übung 2 A-Woche	9.5. __________ (Übungsblatt 3)
14.5. Übung 3 B-Woche (Montag Feiertag)	16.5. Rekursion I

Übungen	Vorlesung
21.5. Übung 3 A-Woche	23.5. Rekursion II (Übungsblatt 4)
28.5. Übung 4 B-Woche	30.5. Entscheidbarkeit
4.6. Übung 4 A-Woche	6.6. Unentscheidbarkeit (Übungsblatt 5)
11.6. Übung 5 B-Woche	13.6. Spez. Probleme
18.6. Übung 5 A-Woche	20.6. Klasse P (Übungsblatt 6)
25.6. Übung 6 B-Woche	27.6. NP-Vollständigkeit
2.7. Übung 6 A-Woche	4.7. Komplexitätsklassen

Materialien und Literatur

Materialien

- Ankündigungen, Kursmaterialien & Vorlesungsaufzeichnungen

  ▸ Moodle-Kurs

Materialien und Literatur

Materialien

- Ankündigungen, Kursmaterialien & Vorlesungsaufzeichnungen

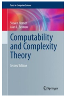
  ▸ Moodle-Kurs

- Literatur zum Selbststudium & zur Vertiefung
  (in der Bibliothek als Buch verfügbar)

Uwe Schöning

▸ Theoretische Informatik — kurz gefasst

Spektrum Akademischer Verlag, 5. Auflage, 2008



Steven Homer, Alan L. Selman

▸ Computability and Complexity Theory

Springer-Verlag, 2. Auflage, 2011

Prüfung

Termine

- Prüfungsabmeldung bis 8. Juni 2024 um 23:59 Uhr

Prüfung

- Klausur, 60 min
- Hilfsmittel: 1 DIN-A4-Blatt mit Notizen
  (beschrieben, bedruckt, etc.)

Begleitende Aufgaben

Aufgaben

- Keine Prüfungsvorleistung
- Hausaufgaben zur Selbstkontrolle und für Klausur-Bonuspunkte
  (6 Serien; 4 Serien bis 8. Juni)

Begleitende Aufgaben

Aufgaben

- Keine Prüfungsvorleistung
- Hausaufgaben zur Selbstkontrolle und für Klausur-Bonuspunkte
  (6 Serien; 4 Serien bis 8. Juni)

- Abgabe Hausaufgaben via Moodle
  (Informationen & Termin auf Aufgabenblatt)
- Gruppenabgabe (max. Gruppengröße 2) möglich
  (nur ein Gruppenmitglied lädt Lösung hoch
  Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder auf Abgabe)

Bonuspunkte

Erreichte Hausaufgaben-Punkte	Klausur-Bonuspunkte (Anteil)
$\leq$ 60	Prüfungsteilnahme überdenken
61–70	+1 Punkt ($\approx$ 2%)
71–80	+2 Punkte ($\approx$ 3%)
81–90	+3 Punkte (5%)
91–100	+4 Punkte ($\approx$ 7%)
101–110	+5 Punkte ($\approx$ 8%)
$\geq$ 111	+6 Punkte (10%)

Überblick

Inhalt

1. Verschiedene (universelle) Berechnungsmodelle
2. Berechenbare Funktionen
3. Komplexitätstheorie

Überblick

Inhalt

1. Verschiedene (universelle) Berechnungsmodelle
2. Berechenbare Funktionen
3. Komplexitätstheorie

Plakative Fragestellungen

1. Was ist "Berechnung"? (Algorithmus)
2. Was ist "berechenbar"?
3. Wie teuer ist "Berechnung"? (Dimensionen: Zeit und Speicher)

Bitte Fragen direkt stellen!

Chomsky-Hierarchie

Noam Chomsky (* 1928)

- Amer. Linguist & Philosoph
- Verfechter Präzision
- Einführung Chomsky-Hierarchie

© Ministerio de Cultura de la Nación Argentina

Typ-0-Sprachen (allgemeine Grammatiken)

Kontextsensitive Sprachen (Typ 1)

Kontextfreie Sprachen (Typ 2)

Reguläre Sprachen (Typ 3)

§1.1 Definition (Grammatik; engl. *grammar*)

Grammatik ist Tupel (N, Σ, S, P)

1. endliche Menge N von Nichtterminalen (engl. *nonterminals*)
2. endliche Menge Σ von Terminalen (engl. *terminals*) mit $N \cap \Sigma = \emptyset$
3. Startnichtterminal $S \in N$ (engl. *initial nonterminal*)
4. endliche Menge P von Produktionen (engl. *productions*)
   der Form $\ell \to r$ mit $\ell \in (N \cup \Sigma)^+ \setminus \Sigma^+$ und $r \in \big((N \setminus \{S\}) \cup \Sigma\big)^*$

§1.1 Definition (Grammatik; engl. *grammar*)

Grammatik ist Tupel (N, Σ, S, P)

1. endliche Menge N von Nichtterminalen (engl. *nonterminals*)
2. endliche Menge Σ von Terminalen (engl. *terminals*) mit $N \cap \Sigma = \emptyset$
3. Startnichtterminal $S \in N$ (engl. *initial nonterminal*)
4. endliche Menge P von Produktionen (engl. *productions*)
   der Form $\ell \to r$ mit $\ell \in (N \cup \Sigma)^+ \setminus \Sigma^+$ und $r \in \big((N \setminus \{S\}) \cup \Sigma\big)^*$

Notizen

- Linke Produktionsseite ℓ = Sequenz von Nichtterminalen & Terminalen
  (mind. 1 Nichtterminal muss vorkommen)

§1.1 Definition (Grammatik; engl. *grammar*)

Grammatik ist Tupel (N, Σ, S, P)

1. endliche Menge N von Nichtterminalen (engl. *nonterminals*)
2. endliche Menge Σ von Terminalen (engl. *terminals*) mit $N \cap \Sigma = \emptyset$
3. Startnichtterminal $S \in N$ (engl. *initial nonterminal*)
4. endliche Menge P von Produktionen (engl. *productions*)
   der Form $\ell \to r$ mit $\ell \in (N \cup \Sigma)^+ \setminus \Sigma^+$ und $r \in \big((N \setminus \{S\}) \cup \Sigma\big)^*$

Notizen

- Linke Produktionsseite ℓ = Sequenz von Nichtterminalen & Terminalen
  (mind. 1 Nichtterminal muss vorkommen)
- Rechte Produktionsseite r = Sequenz von Nichtterminalen & Terminalen
  (Startnichtterminal darf nicht vorkommen)

§1.2 Definition (kontextsensitiv, kontextfrei, regulär)

Grammatik (N, Σ, S, P) ist

- kontextsensitiv (engl. *context-sensitive*) falls $|\ell| \leq |r|$,
- kontextfrei (engl. *context-free*) falls $\ell \in N$ und $r \neq \varepsilon$, und
- regulär (engl. *regular*) falls $\ell \in N$ und $r \in (\Sigma \times N) \cup \Sigma$

für jede Produktion $(\ell \to r) \in P \setminus \{S \to \varepsilon\}$

§1.2 Definition (kontextsensitiv, kontextfrei, regulär)

Grammatik (N, Σ, S, P) ist

- kontextsensitiv (engl. *context-sensitive*) falls $|\ell| \leq |r|$,
- kontextfrei (engl. *context-free*) falls $\ell \in N$ und $r \neq \varepsilon$, und
- regulär (engl. *regular*) falls $\ell \in N$ und $r \in (\Sigma \times N) \cup \Sigma$

für jede Produktion $(\ell \to r) \in P \setminus \{S \to \varepsilon\}$

§1.3 Beispiel

Grammatik $G = \big(\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \qquad S \to S' \qquad S' \to aS'a \qquad S' \to bS'b \qquad S' \to aa \qquad S' \to bb$$

§1.2 Definition (kontextsensitiv, kontextfrei, regulär)

Grammatik (N, Σ, S, P) ist

- kontextsensitiv (engl. *context-sensitive*) falls $|\ell| \leq |r|$,
- kontextfrei (engl. *context-free*) falls $\ell \in N$ und $r \neq \varepsilon$, und
- regulär (engl. *regular*) falls $\ell \in N$ und $r \in (\Sigma \times N) \cup \Sigma$

für jede Produktion $(\ell \to r) \in P \setminus \{S \to \varepsilon\}$

§1.3 Beispiel

Grammatik $G = \big(\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$S \to \varepsilon \qquad S \to S' \qquad S' \to aS'a \qquad S' \to bS'b \qquad S' \to aa \qquad S' \to bb$

kontextsensitiv	kontextfrei	regulär

§1.2 Definition (kontextsensitiv, kontextfrei, regulär)

Grammatik (N, Σ, S, P) ist

- kontextsensitiv (engl. *context-sensitive*) falls $|\ell| \leq |r|$,
- kontextfrei (engl. *context-free*) falls $\ell \in N$ und $r \neq \varepsilon$, und
- regulär (engl. *regular*) falls $\ell \in N$ und $r \in (\Sigma \times N) \cup \Sigma$

für jede Produktion $(\ell \to r) \in P \setminus \{S \to \varepsilon\}$

§1.3 Beispiel

Grammatik $G = \big(\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \qquad S \to S' \qquad S' \to aS'a \qquad S' \to bS'b \qquad S' \to aa \qquad S' \to bb$$

kontextsensitiv	kontextfrei	regulär
✓		

§1.2 Definition (kontextsensitiv, kontextfrei, regulär)

Grammatik (N, Σ, S, P) ist

- kontextsensitiv (engl. *context-sensitive*) falls $|\ell| \leq |r|$,
- kontextfrei (engl. *context-free*) falls $\ell \in N$ und $r \neq \varepsilon$, und
- regulär (engl. *regular*) falls $\ell \in N$ und $r \in (\Sigma \times N) \cup \Sigma$

für jede Produktion $(\ell \to r) \in P \setminus \{S \to \varepsilon\}$

§1.3 Beispiel

Grammatik $G = \big(\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \qquad S \to S' \qquad S' \to aS'a \qquad S' \to bS'b \qquad S' \to aa \qquad S' \to bb$$

kontextsensitiv	kontextfrei	regulär
✓	✓	

§1.2 Definition (kontextsensitiv, kontextfrei, regulär)

Grammatik (N, Σ, S, P) ist

- kontextsensitiv (engl. *context-sensitive*) falls $|\ell| \leq |r|$,
- kontextfrei (engl. *context-free*) falls $\ell \in N$ und $r \neq \varepsilon$, und
- regulär (engl. *regular*) falls $\ell \in N$ und $r \in (\Sigma \times N) \cup \Sigma$

für jede Produktion $(\ell \to r) \in P \setminus \{S \to \varepsilon\}$

§1.3 Beispiel

Grammatik $G = \big(\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$S \to \varepsilon \qquad S \to S' \qquad S' \to aS'a \qquad S' \to bS'b \qquad S' \to aa \qquad S' \to bb$

kontextsensitiv	kontextfrei	regulär
✓	✓	✗

§1.4 Beispiel

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{llll}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

§1.4 Beispiel

Grammatik $G = (\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P)$ mit Produktionen P

$$S \to S'E \qquad S' \to aS'a \qquad S' \to bS'b \qquad S' \to E$$

$$Ea \to EA \qquad Aa \to aA \qquad Ab \to bA \qquad AE \to Ea$$

$$Eb \to EB \qquad Ba \to aB \qquad Bb \to bB \qquad BE \to Eb$$

$$EE \to \varepsilon$$

kontextsensitiv	kontextfrei	regulär

§1.4 Beispiel

Grammatik $G = (\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{llll}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

kontextsensitiv	kontextfrei	regulär
✗		

§1.4 Beispiel

Grammatik $G = (\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{cccc}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

kontextsensitiv	kontextfrei	regulär
✗	✗	

§1.4 Beispiel

Grammatik $G = (\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{llll}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

kontextsensitiv	kontextfrei	regulär
✗	✗	✗

§1.5 Definition (Ableitungsschritt)

Sei $G = (N, \Sigma, S, P)$ Grammatik
Ableitungsrelation $\Rightarrow_G \subseteq (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$ ist

$$\Rightarrow_G = \{(v\ell v', vrv') \mid (\ell \to r) \in P,\ v, v' \in (N \cup \Sigma)^*\}$$

§1.5 Definition (Ableitungsschritt)

Sei $G = (N, \Sigma, S, P)$ Grammatik
Ableitungsrelation $\Rightarrow_G \subseteq (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$ ist

$$\Rightarrow_G = \{(v\ell v', vrv') \mid (\ell \to r) \in P,\ v, v' \in (N \cup \Sigma)^*\}$$

Illustration

- Produktion $\ell \to r \in P$
- Ableitungsschritt $\cdots \ell \cdots \Rightarrow_G \cdots r \cdots$

Beispiel (§1.3)

Kontextfreie Grammatik $G = \big(\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \qquad S \to S' \qquad S' \to aS'a \qquad S' \to bS'b \qquad S' \to aa \qquad S' \to bb$$

Ableitungsschritte:

- Ableitung von $v = abbaabba$:

$$S \Rightarrow_G S' \Rightarrow_G aS'a \Rightarrow_G abS'ba \Rightarrow_G abbS'bba \Rightarrow_G \underbrace{abbaabba}_{=v}$$

Beispiel (§1.3)

Kontextfreie Grammatik $G = \big(\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$S \to \varepsilon \qquad S \to S' \qquad S' \to aS'a \qquad S' \to bS'b \qquad S' \to aa \qquad S' \to bb$

Ableitungsschritte:

- Ableitung von $v = abbaabba$:

$$S \Rightarrow_G S' \Rightarrow_G aS'a \Rightarrow_G abS'ba \Rightarrow_G abbS'bba \Rightarrow_G \underbrace{abbaabba}_{=v}$$

Beispiel (§1.3)

Kontextfreie Grammatik $G = (\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P)$ mit Produktionen P

$S \to \varepsilon \qquad S \to S' \qquad S' \to aS'a \qquad S' \to bS'b \qquad S' \to aa \qquad S' \to bb$

Ableitungsschritte:

- Ableitung von $v = abbaabba$:

$$S \Rightarrow_G S' \Rightarrow_G aS'a \Rightarrow_G abS'ba \Rightarrow_G abbS'bba \Rightarrow_G \underbrace{abbaabba}_{=v}$$

Beispiel (§1.3)

Kontextfreie Grammatik $G = (\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P)$ mit Produktionen P

$S \to \varepsilon \qquad S \to S' \qquad S' \to aS'a \qquad S' \to bS'b \qquad S' \to aa \qquad S' \to bb$

Ableitungsschritte:

- Ableitung von $v = abbaabba$:

$$S \Rightarrow_G S' \Rightarrow_G aS'a \Rightarrow_G abS'ba \Rightarrow_G abbS'bba \Rightarrow_G \underbrace{abbaabba}_{=v}$$

Beispiel (§1.3)

Kontextfreie Grammatik $G = \big(\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \qquad S \to S' \qquad S' \to aS'a \qquad S' \to bS'b \qquad S' \to aa \qquad S' \to bb$$

Ableitungsschritte:

- Ableitung von $v = abbaabba$:

$$S \Rightarrow_G S' \Rightarrow_G aS'a \Rightarrow_G abS'ba \Rightarrow_G abbS'bba \Rightarrow_G \underbrace{abbaabba}_{=v}$$

Semantik

Beispiel (§1.3)

Kontextfreie Grammatik $G = (\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \qquad S \to S' \qquad S' \to aS'a \qquad S' \to bS'b \qquad S' \to aa \qquad S' \to bb$$

Ableitungsschritte:

- Ableitung von $v = abbaabba$:

$$S \Rightarrow_G S' \Rightarrow_G aS'a \Rightarrow_G abS'ba \Rightarrow_G abbS'bba \Rightarrow_G \underbrace{abbaabba}_{=v}$$

- Allgemein $S \Rightarrow_G^* ww^R$ für alle $w \in \{a, b\}^*$

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{llll}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow_G S'E \Rightarrow_G aS'aE \Rightarrow_G abS'baE \Rightarrow_G abEbaE \\
&\Rightarrow_G abEBaE \Rightarrow_G abEaBE \Rightarrow_G abEaEb \Rightarrow_G abEAEb \\
&\Rightarrow_G abEEab \Rightarrow_G ab\varepsilon ab = abab
\end{aligned}
$$

Allgemein $S \Rightarrow_G^* ww$ für alle $w \in \{a, b\}^*$

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$\begin{array}{cccc}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
S &\Rightarrow_G S'E \Rightarrow_G aS'aE \Rightarrow_G abS'baE \Rightarrow_G abEbaE \\
&\Rightarrow_G abEBaE \Rightarrow_G abEaBE \Rightarrow_G abEaEb \Rightarrow_G abEAEb \\
&\Rightarrow_G abEEab \Rightarrow_G ab\varepsilon ab = abab
\end{aligned}$$

Allgemein $S \Rightarrow_G^* ww$ für alle $w \in \{a, b\}^*$

Semantik

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{llll}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow_G S'E \Rightarrow_G aS'aE \Rightarrow_G abS'baE \Rightarrow_G abEbaE \\
&\Rightarrow_G abEBaE \Rightarrow_G abEaBE \Rightarrow_G abEaEb \Rightarrow_G abEAEb \\
&\Rightarrow_G abEEab \Rightarrow_G ab\varepsilon ab = abab
\end{aligned}
$$

Allgemein $S \Rightarrow_G^* ww$ für alle $w \in \{a, b\}^*$

Semantik

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$\begin{array}{llll} S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\ Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\ Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\ EE \to \varepsilon & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow_G S'E \Rightarrow_G aS'aE \Rightarrow_G abS'baE \Rightarrow_G abEbaE \\ &\Rightarrow_G abEBaE \Rightarrow_G abEaBE \Rightarrow_G abEaEb \Rightarrow_G abEAEb \\ &\Rightarrow_G abEEab \Rightarrow_G ab\varepsilon ab = abab \end{aligned}$$

Allgemein $S \Rightarrow_G^* ww$ für alle $w \in \{a, b\}^*$

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{rlrlrlrl}
S & \to S'E & S' & \to aS'a & S' & \to bS'b & S' & \to E \\
Ea & \to EA & Aa & \to aA & Ab & \to bA & AE & \to Ea \\
Eb & \to EB & Ba & \to aB & Bb & \to bB & BE & \to Eb \\
EE & \to \varepsilon & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow_G S'E \Rightarrow_G aS'aE \Rightarrow_G abS'baE \Rightarrow_G abEbaE \\
&\Rightarrow_G abEBaE \Rightarrow_G abEaBE \Rightarrow_G abEaEb \Rightarrow_G abEAEb \\
&\Rightarrow_G abEEab \Rightarrow_G ab\varepsilon ab = abab
\end{aligned}
$$

Allgemein $S \Rightarrow_G^* ww$ für alle $w \in \{a, b\}^*$

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$\begin{array}{llll} S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\ Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\ Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\ EE \to \varepsilon & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow_G S'E \Rightarrow_G aS'aE \Rightarrow_G abS'baE \Rightarrow_G abEbaE \\ &\Rightarrow_G abEBaE \Rightarrow_G abEaBE \Rightarrow_G abEaEb \Rightarrow_G abEAEb \\ &\Rightarrow_G abEEab \Rightarrow_G ab\varepsilon ab = abab \end{aligned}$$

Allgemein $S \Rightarrow_G^* ww$ für alle $w \in \{a, b\}^*$

Semantik

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{llll}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow_G S'E \Rightarrow_G aS'aE \Rightarrow_G abS'baE \Rightarrow_G abEbaE \\
&\Rightarrow_G abEBaE \Rightarrow_G abEaBE \Rightarrow_G abEaEb \Rightarrow_G abEAEb \\
&\Rightarrow_G abEEab \Rightarrow_G ab\varepsilon ab = abab
\end{aligned}
$$

Allgemein $S \Rightarrow_G^* ww$ für alle $w \in \{a, b\}^*$

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = (\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{llll}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow_G S'E \Rightarrow_G aS'aE \Rightarrow_G abS'baE \Rightarrow_G abEbaE \\
&\Rightarrow_G abEBaE \Rightarrow_G abEaBE \Rightarrow_G abEaEb \Rightarrow_G abEAEb \\
&\Rightarrow_G abEEab \Rightarrow_G ab\varepsilon ab = abab
\end{aligned}
$$

Allgemein $S \Rightarrow_G^* ww$ für alle $w \in \{a, b\}^*$

Semantik

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$\begin{array}{llll}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
S &\Rightarrow_G S'E \Rightarrow_G aS'aE \Rightarrow_G abS'baE \Rightarrow_G abEbaE \\
&\Rightarrow_G abEBaE \Rightarrow_G abEaBE \Rightarrow_G abEaEb \Rightarrow_G abEAEb \\
&\Rightarrow_G abEEab \Rightarrow_G ab\varepsilon ab = abab
\end{aligned}$$

Allgemein $S \Rightarrow_G^* ww$ für alle $w \in \{a, b\}^*$

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{llll}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow_G S'E \Rightarrow_G aS'aE \Rightarrow_G abS'baE \Rightarrow_G abEbaE \\
&\Rightarrow_G abEBaE \Rightarrow_G abEaBE \Rightarrow_G abEaEb \Rightarrow_G abEAEb \\
&\Rightarrow_G abEEab \Rightarrow_G ab\varepsilon ab = abab
\end{aligned}
$$

Allgemein $S \Rightarrow_G^* ww$ für alle $w \in \{a, b\}^*$

Semantik

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{llll}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow_G S'E \Rightarrow_G aS'aE \Rightarrow_G abS'baE \Rightarrow_G abEbaE \\
&\Rightarrow_G abEBaE \Rightarrow_G abEaBE \Rightarrow_G abEaEb \Rightarrow_G abEAEb \\
&\Rightarrow_G abEEab \Rightarrow_G ab\varepsilon ab = abab
\end{aligned}
$$

Allgemein $S \Rightarrow_G^* ww$ für alle $w \in \{a, b\}^*$

§1.6 Definition (Erzeugte Sprache; engl. *generated language*)

Sei $G = (N, \Sigma, S, P)$ Grammatik
Die von G erzeugte Sprache $L(G) \subseteq \Sigma^*$ ist

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* w\}$$

Erzeugte Sprache

§1.6 Definition (Erzeugte Sprache; engl. *generated language*)

Sei $G = (N, \Sigma, S, P)$ Grammatik
Die von G erzeugte Sprache $L(G) \subseteq \Sigma^*$ ist

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* w\}$$

Beispiel (§1.3)

Kontextfreie Grammatik $G = \big(\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \qquad S \to S' \qquad S' \to aS'a \qquad S' \to bS'b \qquad S' \to aa \qquad S' \to bb$$

Erzeugte Sprache

§1.6 Definition (Erzeugte Sprache; engl. *generated language*)

Sei $G = (N, \Sigma, S, P)$ Grammatik
Die von G erzeugte Sprache $L(G) \subseteq \Sigma^*$ ist

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* w\}$$

Beispiel (§1.3)

Kontextfreie Grammatik $G = \bigl(\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P\bigr)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \qquad S \to S' \qquad S' \to aS'a \qquad S' \to bS'b \qquad S' \to aa \qquad S' \to bb$$

Erzeugte Sprache $L(G) = \bigl\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\bigr\}$

Erzeugte Sprache

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{llll}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{llll}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

Erzeugte Sprache $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

§1.7 Definition (Sprachklassen)

Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist

- regulär (engl. *regular*),
  falls reguläre Grammatik G mit $L(G) = L$ existiert
- kontextfrei (engl. *context-free*),
  falls kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L$ existiert
- kontextsensitiv (engl. *context-sensitive*),
  falls kontextsensitive Grammatik G mit $L(G) = L$ existiert

§1.7 Definition (Sprachklassen)

Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist

- regulär (engl. *regular*),
  falls reguläre Grammatik G mit $L(G) = L$ existiert
- kontextfrei (engl. *context-free*),
  falls kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L$ existiert
- kontextsensitiv (engl. *context-sensitive*),
  falls kontextsensitive Grammatik G mit $L(G) = L$ existiert

Notizen

- Sprache regulär falls erzeugbar von regulärer Grammatik
- Analog für weitere Sprachklassen

Beispiel (§1.3)

Kontextfreie Grammatik $G = \big(\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \qquad S \to S' \qquad S' \to aS'a \qquad S' \to bS'b \qquad S' \to aa \qquad S' \to bb$$

Erzeugte Sprache $L(G) = \big\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\big\}$

Beispiel (§1.3)

Kontextfreie Grammatik $G = (\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \qquad S \to S' \qquad S' \to aS'a \qquad S' \to bS'b \qquad S' \to aa \qquad S' \to bb$$

Erzeugte Sprache $L(G) = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

Frage

Ist Sprache $L(G)$ kontextfrei?

Beispiel (§1.3)

Kontextfreie Grammatik $G = (\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \qquad S \to S' \qquad S' \to aS'a \qquad S' \to bS'b \qquad S' \to aa \qquad S' \to bb$$

Erzeugte Sprache $L(G) = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

Frage

Ist Sprache $L(G)$ kontextfrei?

Antwort

Ja, denn kontextfreie Grammatik G erzeugt $L(G)$

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{cccc}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

Erzeugte Sprache $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{cccc}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

Erzeugte Sprache $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

Frage

G nicht kontextsensitiv, also ist $L(G)$ nicht kontextsensitiv. Korrekt?

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = (\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{llll}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

Erzeugte Sprache $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

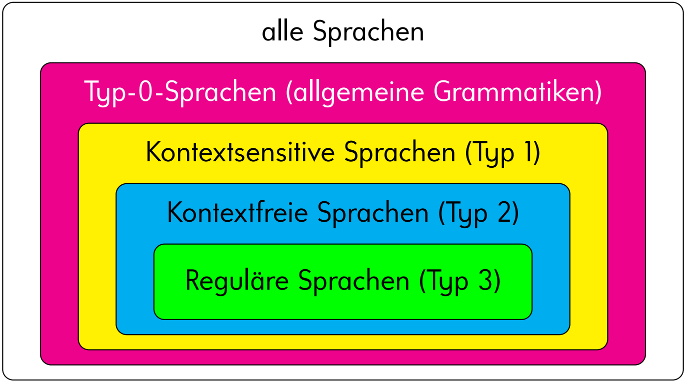
Frage

G nicht kontextsensitiv, also ist $L(G)$ nicht kontextsensitiv. Korrekt?

Antwort

Nein, dafür dürfte keine kontextsensitive Grammatik $L(G)$ erzeugen

Chomsky-Sprachklassen



$$\text{Typ-3}(\Sigma) \subseteq \text{Typ-2}(\Sigma) \subseteq \text{Typ-1}(\Sigma) \subseteq \text{Typ-0}(\Sigma) \subseteq \mathcal{P}(\Sigma^*)$$

Beschreibung reguläre Sprachen

- Reguläre Grammatik
- Endlicher Automat (nichtdeterministisch oder deterministisch)
- Regulärer Ausdruck

Reguläre Sprachen

Beschreibung reguläre Sprachen

- Reguläre Grammatik
- Endlicher Automat (nichtdeterministisch oder deterministisch)
- Regulärer Ausdruck

Stichworte

- Normalformen, Determinisierung & Minimierung
- Abschluss- & Entscheidbarkeitsresultate
- Pumping-Lemma

Kontextfreie Sprachen

Beschreibung kontextfreie Sprachen

- Kontextfreie Grammatik
- Kellerautomat (nichtdeterministisch)
- Deterministischer Kellerautomat (strikt schwächer)

Kontextfreie Sprachen

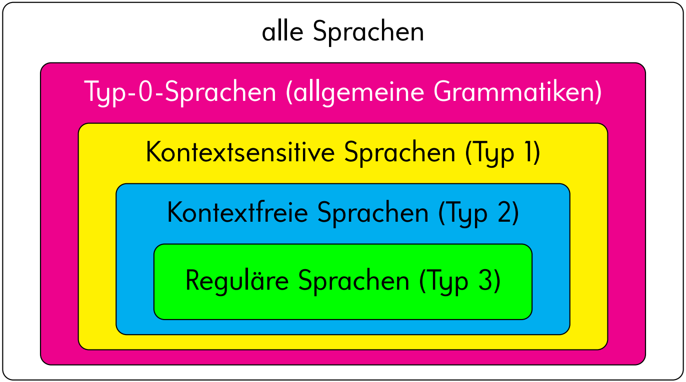
Beschreibung kontextfreie Sprachen

- Kontextfreie Grammatik
- Kellerautomat (nichtdeterministisch)
- Deterministischer Kellerautomat (strikt schwächer)

Stichworte

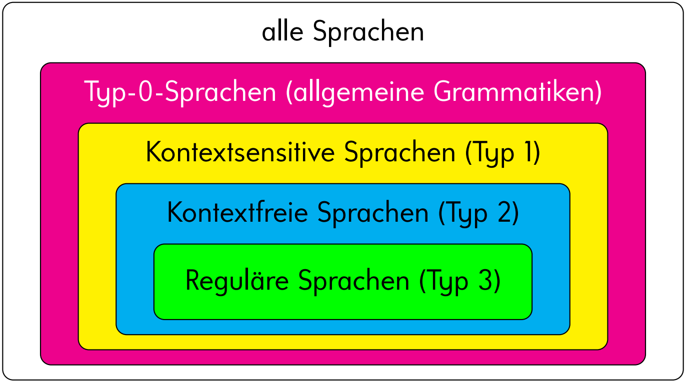
- Normalformen & Parsing-Algorithmen
- Abschluss- & Entscheidbarkeitsresultate
- Pumping-Lemma

Chomsky-Sprachklassen



$$\text{Typ-3}(\Sigma) \subsetneq \text{Typ-2}(\Sigma) \subsetneq \text{Typ-1}(\Sigma) \subseteq \text{Typ-0}(\Sigma) \subseteq \mathcal{P}(\Sigma^*)$$

Chomsky-Sprachklassen



$$\text{Typ-3}(\Sigma) \subsetneq \text{Typ-2}(\Sigma) \subsetneq \text{Typ-1}(\Sigma) \subseteq \text{Typ-0}(\Sigma) \subseteq \mathcal{P}(\Sigma^*)$$

Kontextsensitive Sprachen

Beschreibung kontextsensitive Sprachen

- Kontextsensitive Grammatik
- Linear beschränkte Turingmaschine (nichtdeterministisch)
- Linear beschränkte det. Turingmaschine (Mächtigkeit unklar)

Kontextsensitive Sprachen

Beschreibung kontextsensitive Sprachen

- Kontextsensitive Grammatik
- Linear beschränkte Turingmaschine (nichtdeterministisch)
- Linear beschränkte det. Turingmaschine (Mächtigkeit unklar)

Stichworte

- Normalformen & Parsing-Algorithmus
- Abschluss- & Entscheidbarkeitsresultate

Typs-0-Sprachen

Beschreibung Typ-0-Sprachen

- Chomsky-Grammatik
- Turingmaschine (nichtdeterministisch oder deterministisch)
- While-Programm, μ-rekursive Funktion, ... (berechenbare Funktion)

Typs-0-Sprachen

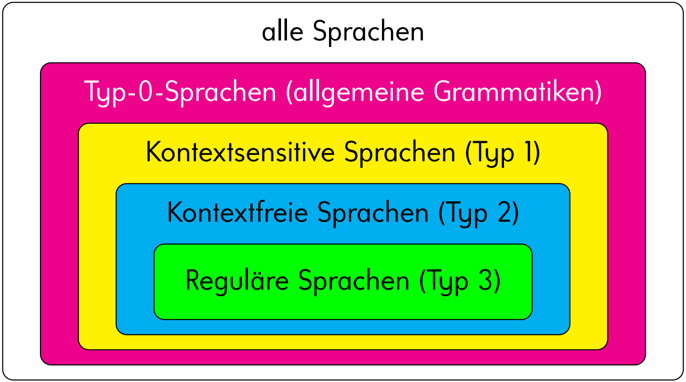
Beschreibung Typ-0-Sprachen

- Chomsky-Grammatik
- Turingmaschine (nichtdeterministisch oder deterministisch)
- While-Programm, μ-rekursive Funktion, ... (berechenbare Funktion)

Stichworte

- Normalformen & Determinisierung
- Abschluss- & Entscheidbarkeitsresultate

Ausblick — Chomsky-Sprachklassen



$$\text{Typ-3}(\Sigma) \subsetneq \text{Typ-2}(\Sigma) \subsetneq \text{Typ-1}(\Sigma) \subsetneq \text{Typ-0}(\Sigma) \subsetneq \mathcal{P}(\Sigma^*)$$

Ausblick — Chomsky-Sprachklassen

Eigenschaften

- Es gibt Sprachen, die nicht Typ-0 sind

Ausblick — Chomsky-Sprachklassen

Eigenschaften

- Es gibt Sprachen, die nicht Typ-0 sind
- Es gibt Typ-0-Sprachen mit unentscheidbarem Wortproblem

Eigenschaften

- Es gibt Sprachen, die nicht Typ-0 sind
- Es gibt Typ-0-Sprachen mit unentscheidbarem Wortproblem

Eigenschaften

- Es gibt Sprachen, die nicht Typ-0 sind
- Es gibt Typ-0-Sprachen mit unentscheidbarem Wortproblem

§1.8 Definition (abzählbar; engl. *countable*)

Menge M ist abzählbar falls injektive Funktion $f\colon M \to \mathbb{N}$ existiert

Ausblick — Chomsky-Sprachklassen

Eigenschaften

- Es gibt Sprachen, die nicht Typ-0 sind
- Es gibt Typ-0-Sprachen mit unentscheidbarem Wortproblem

§1.8 Definition (abzählbar; engl. *countable*)

Menge M ist abzählbar falls injektive Funktion $f\colon M \to \mathbb{N}$ existiert

Notizen

- M abzählbar gdw. jedem $m \in M$ eigene natürliche Zahl zuweisbar
- Natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ abzählbar

§1.9 Theorem (Abzählbarkeit von $\mathbb{N}^k$)

Menge $\mathbb{N}^k$ abzählbar für alle $k \in \mathbb{N}$

§1.9 Theorem (Abzählbarkeit von $\mathbb{N}^k$)

Menge $\mathbb{N}^k$ abzählbar für alle $k \in \mathbb{N}$

Beweis.

Seien $p_1, \ldots, p_k$ verschiedene Primzahlen.

§1.9 Theorem (Abzählbarkeit von $\mathbb{N}^k$)

Menge $\mathbb{N}^k$ abzählbar für alle $k \in \mathbb{N}$

Beweis.

Seien $p_1, \ldots, p_k$ verschiedene Primzahlen. Sei $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f(n_1, \ldots, n_k) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i} = p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k} \qquad \text{für alle } n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$$

§1.9 Theorem (Abzählbarkeit von $\mathbb{N}^k$)

Menge $\mathbb{N}^k$ abzählbar für alle $k \in \mathbb{N}$

Beweis.

Seien $p_1, \dots, p_k$ verschiedene Primzahlen. Sei $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f(n_1, \dots, n_k) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i} = p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k} \qquad \text{für alle } n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

Falls $f(m_1, \dots, m_k) = f(n_1, \dots, n_k)$ für $m_1, \dots, m_k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$,
dann folgt $m_i = n_i$ für alle $1 \leq i \leq k$ da Primfaktorenzerlegung eindeutig.

§1.9 Theorem (Abzählbarkeit von $\mathbb{N}^k$)

Menge $\mathbb{N}^k$ abzählbar für alle $k \in \mathbb{N}$

Beweis.

Seien $p_1, \dots, p_k$ verschiedene Primzahlen. Sei $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f(n_1, \dots, n_k) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i} = p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k} \qquad \text{für alle } n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

Falls $f(m_1, \dots, m_k) = f(n_1, \dots, n_k)$ für $m_1, \dots, m_k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, dann folgt $m_i = n_i$ für alle $1 \leq i \leq k$ da Primfaktorenzerlegung eindeutig. Also ist f injektiv und $\mathbb{N}^k$ damit abzählbar. $\square$

§1.10 Theorem (Abzählbarkeit von $\mathbb{N}^*$)

Die Menge $\mathbb{N}^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ ist abzählbar

§1.10 Theorem (Abzählbarkeit von $\mathbb{N}^*$)

Die Menge $\mathbb{N}^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ ist abzählbar

Beweis.

Menge $\mathbb{N}^k$ abzählbar via $f_k \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ nach Theorem §1.9.
Sei $f \colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f(w) = f_2\big(|w|, f_{|w|}(w)\big) \qquad \text{für alle } w \in \mathbb{N}^*$$

§1.10 Theorem (Abzählbarkeit von $\mathbb{N}^*$)

Die Menge $\mathbb{N}^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ ist abzählbar

Beweis.

Menge $\mathbb{N}^k$ abzählbar via $f_k \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ nach Theorem §1.9.
Sei $f \colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f(w) = f_2\big(|w|, f_{|w|}(w)\big) \qquad \text{für alle } w \in \mathbb{N}^*$$

Falls $f(w) = f(w')$ für $w, w' \in \mathbb{N}^*$, dann $|w| = |w'|$ und $f_{|w|}(w) = f_{|w'|}(w')$, da f_2 injektiv.

§1.10 Theorem (Abzählbarkeit von $\mathbb{N}^*$)

Die Menge $\mathbb{N}^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ ist abzählbar

Beweis.

Menge $\mathbb{N}^k$ abzählbar via $f_k \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ nach Theorem §1.9.
Sei $f \colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f(w) = f_2\big(|w|, f_{|w|}(w)\big) \qquad \text{für alle } w \in \mathbb{N}^*$$

Falls $f(w) = f(w')$ für $w, w' \in \mathbb{N}^*$, dann $|w| = |w'|$ und $f_{|w|}(w) = f_{|w'|}(w')$, da f_2 injektiv. Weiterhin folgt $w = w'$ aus der Injektivität von $f_{|w|} = f_{|w'|}$.

§1.10 Theorem (Abzählbarkeit von $\mathbb{N}^*$)

Die Menge $\mathbb{N}^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ ist abzählbar

Beweis.

Menge $\mathbb{N}^k$ abzählbar via $f_k \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ nach Theorem §1.9.
Sei $f \colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f(w) = f_2\big(|w|, f_{|w|}(w)\big) \qquad \text{für alle } w \in \mathbb{N}^*$$

Falls $f(w) = f(w')$ für $w, w' \in \mathbb{N}^*$, dann $|w| = |w'|$ und $f_{|w|}(w) = f_{|w'|}(w')$, da f_2 injektiv. Weiterhin folgt $w = w'$ aus der Injektivität von $f_{|w|} = f_{|w'|}$.
Also ist f injektiv und $\mathbb{N}^*$ damit abzählbar. □

Abzählbarkeit der Grammatiken

1. Kodiere Terminale durch ungerade Zahlen ($a = 1$; $b = 3$)
2. Gerade positive Zahlen für Nichtterminale ($S = 2$; $S' = 4$; $A = 6$; $\dots$)
3. 0 als Trennzeichen

Abzählbarkeit der Grammatiken

1. Kodiere Terminale durch ungerade Zahlen ($a = 1$; $b = 3$)
2. Gerade positive Zahlen für Nichtterminale ($S = 2$; $S' = 4$; $A = 6$; $\dots$)
3. 0 als Trennzeichen

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \big(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\big)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{rlrlrlrl}
S & \to S'E & S' & \to aS'a & S' & \to bS'b & S' & \to E \\
Ea & \to EA & Aa & \to aA & Ab & \to bA & AE & \to Ea \\
Eb & \to EB & Ba & \to aB & Bb & \to bB & BE & \to Eb \\
EE & \to \varepsilon & & & & & &
\end{array}
$$

Abzählbarkeit der Grammatiken

1. Kodiere Terminale durch ungerade Zahlen ($a = 1$; $b = 3$)
2. Gerade positive Zahlen für Nichtterminale ($S = 2$; $S' = 4$; $A = 6$; $\dots$)
3. 0 als Trennzeichen

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = \bigl(\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P\bigr)$ mit Produktionen P

$$
\begin{array}{llll}
S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\
Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\
Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\
EE \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

$$
c(G) = \underbrace{2.0.4.10}_{S \to S'E}.0.\underbrace{4.0.1.4.1}_{S' \to aS'a}.0.\underbrace{4.0.3.4.3}_{S' \to bS'b}.0.\cdots
$$

Abzählbarkeit Typ-0-Sprachen

§1.11 Theorem (Abzählbarkeit der Typ-0-Sprachen)

Menge $\text{Typ-0}(\Sigma) \subseteq \mathcal{P}(\Sigma^*)$ der Typ-0-Sprachen über Alphabet Σ abzählbar

§1.11 Theorem (Abzählbarkeit der Typ-0-Sprachen)

Menge $\mathrm{Typ\text{-}0}(\Sigma) \subseteq \mathcal{P}(\Sigma^*)$ der Typ-0-Sprachen über Alphabet Σ abzählbar

Beweis (nutzt Auswahlaxiom).

Mit Hilfe von c kann jede Grammatik als Element von $\mathbb{N}^*$ kodiert werden
(c nicht injektiv)

$$c\colon \{G \mid G \text{ Grammatik über } \Sigma\} \to \mathbb{N}^*$$

Abzählbarkeit Typ-0-Sprachen

§1.11 Theorem (Abzählbarkeit der Typ-0-Sprachen)

Menge $\mathrm{Typ}\text{-}0(\Sigma) \subseteq \mathcal{P}(\Sigma^*)$ der Typ-0-Sprachen über Alphabet Σ abzählbar

Beweis (nutzt Auswahlaxiom).

Mit Hilfe von c kann jede Grammatik als Element von $\mathbb{N}^*$ kodiert werden (c nicht injektiv)

$$c\colon \{G \mid G \text{ Grammatik über } \Sigma\} \to \mathbb{N}^*$$

Für alle Grammatiken G und G' mit $c(G) = c(G')$ gilt $L(G) = L(G')$.

§1.11 Theorem (Abzählbarkeit der Typ-0-Sprachen)

Menge $\text{Typ-0}(\Sigma) \subseteq \mathcal{P}(\Sigma^*)$ der Typ-0-Sprachen über Alphabet Σ abzählbar

Beweis (nutzt Auswahlaxiom).

Mit Hilfe von c kann jede Grammatik als Element von $\mathbb{N}^*$ kodiert werden
(c nicht injektiv)

$$c\colon \{G \mid G \text{ Grammatik über } \Sigma\} \to \mathbb{N}^*$$

Für alle Grammatiken G und G' mit $c(G) = c(G')$ gilt $L(G) = L(G')$.
Sei $C = \{c(G) \mid G \text{ Grammatik über } \Sigma\}$.
C abzählbar da $C \subseteq \mathbb{N}^*$ und $\mathbb{N}^*$ abzählbar gemäß Theorem §1.10.

Abzählbarkeit Typ-0-Sprachen

§1.11 Theorem (Abzählbarkeit der Typ-0-Sprachen)

Menge $\text{Typ-0}(\Sigma) \subseteq \mathcal{P}(\Sigma^*)$ der Typ-0-Sprachen über Alphabet Σ abzählbar

Beweis (nutzt Auswahlaxiom).

Mit Hilfe von c kann jede Grammatik als Element von $\mathbb{N}^*$ kodiert werden (c nicht injektiv)

$$c\colon \{G \mid G \text{ Grammatik über } \Sigma\} \to \mathbb{N}^*$$

Für alle Grammatiken G und G' mit $c(G) = c(G')$ gilt $L(G) = L(G')$.
Sei $C = \{c(G) \mid G \text{ Grammatik über } \Sigma\}$.
C abzählbar da $C \subseteq \mathbb{N}^*$ und $\mathbb{N}^*$ abzählbar gemäß Theorem §1.10.
Also ist Relation $\rho = \{(c(G), L(G)) \mid G \text{ Grammatik über } \Sigma\}$ surjektive Funktion $\rho\colon C \to \text{Typ-0}(\Sigma)$.

Abzählbarkeit Typ-0-Sprachen

§1.11 Theorem (Abzählbarkeit der Typ-0-Sprachen)

Menge $\text{Typ-0}(\Sigma) \subseteq \mathcal{P}(\Sigma^*)$ der Typ-0-Sprachen über Alphabet Σ abzählbar

Beweis (nutzt Auswahlaxiom).

Mit Hilfe von c kann jede Grammatik als Element von $\mathbb{N}^*$ kodiert werden (c nicht injektiv)

$$c \colon \{G \mid G \text{ Grammatik über } \Sigma\} \to \mathbb{N}^*$$

Für alle Grammatiken G und G' mit $c(G) = c(G')$ gilt $L(G) = L(G')$.
Sei $C = \{c(G) \mid G \text{ Grammatik über } \Sigma\}$.
C abzählbar da $C \subseteq \mathbb{N}^*$ und $\mathbb{N}^*$ abzählbar gemäß Theorem §1.10.
Also ist Relation $\rho = \big\{\big(c(G), L(G)\big) \mid G \text{ Grammatik über } \Sigma\big\}$ surjektive Funktion $\rho \colon C \to \text{Typ-0}(\Sigma)$. Damit ist $\text{Typ-0}(\Sigma)$ abzählbar. □

Notizen

- Theorem §1.11 gilt auch ohne Auswahlaxiom

Abzählbarkeit der Typ-0-Sprachen

Notizen

- Theorem §1.11 gilt auch ohne Auswahlaxiom
- Betrachte längen-lexikographische Ordnung $\preceq \subseteq \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ auf $\mathbb{N}^*$
  (ordne Elemente zunächst nach Länge und dann lexikographisch)

Abzählbarkeit der Typ-0-Sprachen

Notizen

- Theorem §1.11 gilt auch ohne Auswahlaxiom
- Betrachte längen-lexikographische Ordnung $\preceq \subseteq \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ auf $\mathbb{N}^*$
  (ordne Elemente zunächst nach Länge und dann lexikographisch)
- Ordnung $\preceq$ total und Wohlordnung
  (für nichtleere Teilmenge $N \subseteq \mathbb{N}^*$ existiert $\min_{\preceq}(N) \in N$)

Abzählbarkeit der Typ-0-Sprachen

Notizen

- Theorem §1.11 gilt auch ohne Auswahlaxiom
- Betrachte längen-lexikographische Ordnung $\preceq \subseteq \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ auf $\mathbb{N}^*$
  (ordne Elemente zunächst nach Länge und dann lexikographisch)
- Ordnung $\preceq$ total und Wohlordnung
  (für nichtleere Teilmenge $N \subseteq \mathbb{N}^*$ existiert $\min_{\preceq}(N) \in N$)
- Für $\rho \colon C \to \text{Typ-0}(\Sigma)$ surjektiv, sei $\bar{\rho} \colon \text{Typ-0}(\Sigma) \to \mathbb{N}^*$ gegeben durch

$$\bar{\rho}(L) = \min_{\preceq}\{w \in \mathbb{N}^* \mid \rho(w) = L\} \qquad \text{für alle } L \in \text{Typ-0}(\Sigma)$$

Notizen

- Theorem §1.11 gilt auch ohne Auswahlaxiom
- Betrachte längen-lexikographische Ordnung $\preceq\ \subseteq \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ auf $\mathbb{N}^*$
  (ordne Elemente zunächst nach Länge und dann lexikographisch)
- Ordnung $\preceq$ total und Wohlordnung
  (für nichtleere Teilmenge $N \subseteq \mathbb{N}^*$ existiert $\min_{\preceq}(N) \in N$)
- Für $\rho \colon C \to \text{Typ-0}(\Sigma)$ surjektiv, sei $\bar{\rho} \colon \text{Typ-0}(\Sigma) \to \mathbb{N}^*$ gegeben durch

$$\bar{\rho}(L) = \min_{\preceq}\{w \in \mathbb{N}^* \mid \rho(w) = L\} \qquad \text{für alle } L \in \text{Typ-0}(\Sigma)$$

  Menge $\{w \in \mathbb{N}^* \mid \rho(w) = L\}$ nichtleer da ρ surjektiv.
  Also existiert Minimum und $\bar{\rho}$ ist injektiv. Damit ist $\text{Typ-0}(\Sigma)$ abzählbar.

§1.12 Lemma

Unendliche Menge M abzählbar gdw. Bijektion $f\colon \mathbb{N} \to M$ existiert

§1.12 Lemma

Unendliche Menge M abzählbar gdw. Bijektion $f\colon \mathbb{N} \to M$ existiert

Beweis.

(kleine Übung) $\square$

Überabzählbarkeit aller Sprachen

§1.13 Theorem (Überabzählbarkeit aller Sprachen)

Menge $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ aller Sprachen über Σ nicht abzählbar

Überabzählbarkeit aller Sprachen

§1.13 Theorem (Überabzählbarkeit aller Sprachen)

Menge $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ aller Sprachen über Σ nicht abzählbar

Beweis.

Σ^* abzählbar und unendlich.
$\mathcal{P}(\Sigma^*)$ strikt mächtiger als Σ^* gemäß Cantors Theorem.
Also $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ nicht abzählbar (d.h. überabzählbar). $\square$

Theorem (§1.13 Überabzählbarkeit aller Sprachen)

Menge $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ aller Sprachen über Σ nicht abzählbar

Beweis (detailliert).

Da Σ^* abzählbar unendlich, existiert $f\colon \mathbb{N} \to \Sigma^*$ bijektiv gem. Lemma §1.12.

Theorem (§1.13 Überabzählbarkeit aller Sprachen)

Menge $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ aller Sprachen über Σ nicht abzählbar

Beweis (detailliert).

Da Σ^* abzählbar unendlich, existiert $f\colon \mathbb{N} \to \Sigma^*$ bijektiv gem. Lemma §1.12. Offenbar ist $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ unendlich. Sei $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ abzählbar; d.h. gem. Lemma §1.12 existiert $g\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ bijektiv.

Überabzählbarkeit aller Sprachen

Theorem (§1.13 Überabzählbarkeit aller Sprachen)

Menge $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ aller Sprachen über Σ nicht abzählbar

Beweis (detailliert).

Da Σ^* abzählbar unendlich, existiert $f\colon \mathbb{N} \to \Sigma^*$ bijektiv gem. Lemma §1.12. Offenbar ist $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ unendlich. Sei $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ abzählbar; d.h. gem. Lemma §1.12 existiert $g\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ bijektiv.

Betrachte Sprache

$$L = \{ f(i) \mid i \in \mathbb{N},\ f(i) \notin g(i) \}$$

Da g bijektiv, existiert $i \in \mathbb{N}$ mit $L = g(i)$.

Überabzählbarkeit aller Sprachen

Theorem (§1.13 Überabzählbarkeit aller Sprachen)

Menge $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ aller Sprachen über Σ nicht abzählbar

Beweis (detailliert).

Da Σ^* abzählbar unendlich, existiert $f \colon \mathbb{N} \to \Sigma^*$ bijektiv gem. Lemma §1.12. Offenbar ist $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ unendlich. Sei $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ abzählbar; d.h. gem. Lemma §1.12 existiert $g \colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ bijektiv.

Betrachte Sprache

$$L = \{ f(i) \mid i \in \mathbb{N},\ f(i) \notin g(i) \}$$

Da g bijektiv, existiert $i \in \mathbb{N}$ mit $L = g(i)$.
Dann $f(i) \in L$ gdw. $f(i) \notin g(i) = L$.

Überabzählbarkeit aller Sprachen

Theorem (§1.13 Überabzählbarkeit aller Sprachen)

Menge $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ aller Sprachen über Σ nicht abzählbar

Beweis (detailliert).

Da Σ^* abzählbar unendlich, existiert $f\colon \mathbb{N} \to \Sigma^*$ bijektiv gem. Lemma §1.12. Offenbar ist $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ unendlich. Sei $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ abzählbar; d.h. gem. Lemma §1.12 existiert $g\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ bijektiv.

Betrachte Sprache

$$L = \big\{ f(i) \mid i \in \mathbb{N},\, f(i) \notin g(i) \big\}$$

Da g bijektiv, existiert $i \in \mathbb{N}$ mit $L = g(i)$.
Dann $f(i) \in L$ gdw. $f(i) \notin g(i) = L$. Widerspruch ↯
Also $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ nicht abzählbar. □

Diagonalisierung

$L' \setminus w$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$\cdots$
$g(0)$	$\boxed{✗}$	✗	✓	✓	$\cdots$
$g(1)$	✗	$\boxed{✓}$	✓	✗	$\cdots$
$g(2)$	✗	✗	$\boxed{✓}$	✗	$\cdots$
$g(3)$	✓	✓	✗	$\boxed{✓}$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
L	✓	✗	✗	✗	$\cdots$

$$L = \{f(i) \mid i \in \mathbb{N},\ f(i) \notin g(i)\}$$

§1.14 Theorem

Nicht alle Sprachen sind Typ-0

Beweis.

Typ-0-Sprachen $\text{Typ-0}(\Sigma)$ über Σ abzählbar gemäß Theorem §1.11.

§1.14 Theorem

Nicht alle Sprachen sind Typ-0

Beweis.

Typ-0-Sprachen $\mathrm{Typ}\text{-}0(\Sigma)$ über Σ abzählbar gemäß Theorem §1.11.
Menge $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ aller Sprachen über Σ überabzählbar gemäß Theorem §1.13.

§1.14 Theorem

Nicht alle Sprachen sind Typ-0

Beweis.

Typ-0-Sprachen $\text{Typ-0}(\Sigma)$ über Σ abzählbar gemäß Theorem §1.11.
Menge $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ aller Sprachen über Σ überabzählbar gemäß Theorem §1.13.
Also $\text{Typ-0}(\Sigma) \subsetneq \mathcal{P}(\Sigma^*)$. □

Zusammenfassung

- Wiederholung reguläre & kontextfreie Sprachen
- Chomsky-Grammatiken & Ableitungen
- Typ-0(Σ) $\subsetneq \mathcal{P}(\Sigma^*)$ (Nicht alle Sprachen sind Typ-0)

Erste Übungsserie erscheint nächste Woche