

Aufgaben zur Lehrveranstaltung

## Berechenbarkeit

### Serie 2

---

- ▶ Die Übungsaufgaben werden in den Übungen ab dem 28.4.2025 besprochen.
  - ▶ Abgabeschluss für Hausaufgaben: **11.5.2025 um 22:00 Uhr** im Moodle-Kurs.
  - ▶ Sie können gern in 2er-Gruppen abgeben. Bitte schreiben Sie dazu die Namen und Matrikelnummern beider Personen auf das Blatt und reichen Sie Ihre Lösungen über einen Account ein. Einen Bonuspunkt erhalten Sie in dieser Serie bei Erreichen von **12** Punkten.
- 

#### Übungsaufgabe 2.1 (Turingmaschinen: Satzform und Ableitungsrelation)

Für alle  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , prüfen Sie, ob es möglich ist, die jeweils fehlende Komponente so zu vervollständigen, dass  $u_i \vdash v_i$  durch Ausführen der Transition  $\delta_i$ . Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a)  $\delta_1 = (q, a) \rightarrow (q', b, \triangleright)$ ,  $u_1 = baqab$ ,  $v_1 = ?$

(b)  $\delta_2 = (q, a) \rightarrow (q', b, \triangleleft)$ ,  $u_2 = \varepsilon qa$ ,  $v_2 = ?$

(c)  $\delta_3 = ?$ ,  $u_1 = \varepsilon qa$ ,  $v_1 = \varepsilon q'b$

(d)  $\delta_4 = (q, a) \rightarrow (q', b, \triangleleft)$ ,  $u_4 = ?$ ,  $v_4 = \varepsilon q'baa$

#### Übungsaufgabe 2.2 (Turingmaschinen: Akzeptierte Sprache)

Sei  $\Sigma = \{0, 1\}$  und  $L \subseteq \Sigma^*$  definiert durch

$$L = \{0^m 1^n \mid n \text{ ist ein Vielfaches von } m\}.$$

Geben Sie eine Turingmaschine  $M$  an, welche  $L$  akzeptiert, d.h.  $L(M) = L$ .

#### Übungsaufgabe 2.3 (Turingmaschinen: Transformationssemantik)

Sei  $\Sigma = \{a, b\}$ . Definiere die längenlexikografische Ordnung  $\sqsubset$  über  $\Sigma^*$  durch  $w \sqsubset w'$  falls  $|w| < |w'|$ , oder  $|w| = |w'|$  und es gibt  $u, v, v' \in \Sigma^*$  mit  $w = u \cdot a \cdot v$  und  $w' = u \cdot b \cdot v'$ .

Weiterhin sei  $g : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  die Funktion, die jedes Wort  $w \in \Sigma^*$  auf seinen eindeutigen längenlexikografischen Nachfolger abbildet. Beispielsweise gilt  $g(\varepsilon) = a$ ,  $g(aab) = aba$  und  $g(bbb) = aaaa$ .

Geben Sie eine Turingmaschine  $M$  an sodass  $T(M) = g$ .

#### Hausaufgabe 2.4 (Turingmaschinen: Satzform und Ableitungsrelation) (4)

Für alle  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , prüfen Sie, ob es möglich ist, die jeweils fehlende Komponente so zu vervollständigen, dass  $u_i \vdash v_i$  durch Ausführen der Transition  $\delta_i$ . Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a)  $\delta_1 = (q, b) \rightarrow (q', a, \diamond), u_1 = bqbb, v_1 = ?$

(b)  $\delta_2 = (q, a) \rightarrow (q', a, \triangleright), u_2 = baqa, v_2 = ?$

(c)  $\delta_3 = ?, u_1 = bqbb, v_1 = bbq'b$

(d)  $\delta_4 = (q, \square) \rightarrow (q', a, \triangleright), u_4 = ?, v_4 = \varepsilon a q' \square$

#### Hausaufgabe 2.5 (Turingmaschinen: Akzeptierte Sprache)

(a) Betrachten Sie die folgende Aussage:

*Für alle  $p \in \mathbb{N}$ , sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) *Eine Zahl  $p$  ist keine Primzahl.*

(ii)  *$p \in \{0, 1\}$ , oder es existieren  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $m \geq 2, n \geq 1, n$  ist Vielfaches von  $m$ , und  $p = m + n$ .*

Beweisen Sie *eine* der beiden Implikationen, d.h. entweder (i) $\Rightarrow$ (ii), oder (ii) $\Rightarrow$ (i). (4)

(b) Sei  $\Sigma = \{0\}$  und  $L \subseteq \Sigma^*$  definiert durch

$$L = \{0^p \mid p \text{ ist keine Primzahl}\}.$$

Geben Sie eine Turingmaschine an, welche  $L$  akzeptiert, d.h.  $L(M) = L$ . (8)

*Hinweis: Ihre Turingmaschine darf selbstverständlich gemäss Vorlesung 3 aus mehreren Turingmaschinen mittels Verkettung, Iteration oder Vereinigung zusammengesetzt werden. Sie dürfen aus Übung oder Vorlesung bekannte Turingmaschinen verwenden.*

#### Hausaufgabe 2.6 (Turingmaschinen: Transformationssemantik) (8)

Sei  $f : \{0\}^* \rightarrow \{0\}^*$  definiert durch  $f(0^n) = 0^{2^n}$ , für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Geben Sie eine Turingmaschine  $M$  an, sodass  $T(M) = f$ .