Aufgabe:

Seien U und V 4-dimensionale Unterräume von $\mathbb{R}^6$.

Welche Dimensionen für $U \cap V$ sind möglich?

Lösung:

Nach der Dimensionsformel für Unterräume gilt:

$$\dim(U \cap V) = \underbrace{\dim(U)}_{=4} + \underbrace{\dim(V)}_{=4} - \underbrace{\dim(\underbrace{U+V}_{U \subseteq \cdot \subseteq \mathbb{R}^6})}_{\in \{4,5,6\}} \in \{2,3,4\}. \qquad \square$$

Aufgabe:

Gibt es Unterräume $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^5$ mit $\dim(U_1) = 4$, $\dim(U_2) = 3$ und $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$?

Lösung:

Angenommen, solche Unterräume gäbe es.

Nach der Dimensionsformel für Unterräume gilt:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2) = 3 + 4 - 1 = 6 > 5 = \dim(\mathbb{R}^5) \lightning$$

$\Rightarrow$ Nein! $\square$

Satz (Dimensionsformel für Unterräume)

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume von V.

Dann gilt:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$

Aufgabe

Sei $n \geq 2$ und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum sowie $W_1 \neq W_2$ Untervektorräume von V mit $\dim W_1 = \dim W_2 = n-1$.

a) Zeigen Sie, dass $V = W_1 + W_2$

b) Zeigen Sie, dass $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ genau dann, wenn $n = 2$.

Lösung:

a) Entweder ist $\dim(W_1 + W_2) = n$ oder $= n-1$. Wäre $\dim(W_1+W_2) = n-1$, dann wäre nach Dimensionsformel für Unterräume

$$\dim(W_1 \cap W_2) = 2n - 2 - (n-1) = n-1$$

und damit $W_1 = W_2$, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Damit ist $\dim(W_1 + W_2) = n$ und $W_1 + W_2 = V$.

b) Dimensionsformel für Unterräume impliziert, dass $n = \dim V = 2n - 2 - \dim(W_1 \cap W_2)$, d.h. $\dim(W_1 \cap W_2) = n-2$. Dann ist $\dim W_1 \cap W_2 = \{0\}$ genau dann, wenn $n = 2$.

(a) $W_1 \subseteq W_1 + W_2 \quad \Rightarrow \quad n-1 = \dim(W_1) \leq \dim(W_1+W_2) \leq \dim(V) = n$

$\Rightarrow \quad \dim(W_1+W_2) \in \{n-1; n\}$

$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1+W_2) = 2n-2-\dim(W_1+W_2) \quad (*)$

Angenommen: $\dim(W_1+W_2) = n-1$

$\Rightarrow \dim(W_1 \cap W_2) = n-1 = \dim(W_1)$.

$W_1 \cap W_2$ ist ein U.R. von W_1. Wegen $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1)$, folgt $W_1 \cap W_2 = W_1$

Analog folgt: $W_1 \cap W_2 = W_2$.

$\Rightarrow W_1 = W_2$ ↯. $\Rightarrow \dim(W_1+W_2) = n = \dim(V) \Rightarrow W_1 + W_2 = V$.

(b) Wegen $(*)$ und (a) gilt:

$\dim(W_1 \cap W_2) \overset{(*)}{=} 2n-2-\underbrace{\dim(W_1+W_2)}_{\overset{(a)}{=} V} \overset{(a)}{=} 2n-2-n = n-2$

$\Rightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\} \Leftrightarrow \dim(W_1 \cap W_2) = 0 \Leftrightarrow n-2 = 0 \Leftrightarrow n = 2$.

Satz (Dimensionsformel für Unterräume)

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume von V.

Dann gilt:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$

Satz:

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Dann gilt:

(i) U ist endlich dimensional und $\dim(U) \leq \dim(V)$.

(ii) $U = V \iff \dim(U) = \dim(V)$.

Aufgabe:

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und seien $U_1, U_2, U_3 \subseteq V$ Unterräume von V.

Leiten Sie eine Formel her für $\dim(U_1 + U_2 + U_3)$.

Lösung:

Wende die Dimensionsformel für Unterräume an auf $(U_1 + U_2)$ und U_3

$$\Rightarrow \dim(U_1+U_2+U_3) = \dim((U_1+U_2)+U_3) = \dim(U_1+U_2) + \dim(U_3) - \dim((U_1+U_2)\cap U_3)$$

$$= \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_3) - \dim((U_1+U_2)\cap U_3)$$

$$= \dim(U_1) + \dim(U_2) + \dim(U_3) - \dim(U_1 \cap U_2) - \dim((U_1+U_2)\cap U_3)$$

Satz (Dimensionsformel für Unterräume)

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume von V.

Dann gilt:

$$\dim(U_1+U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$

Aufgabe

Gibt es Untervektorräume U_1, U_2, U_3 und U_4 von $\mathbb{R}^3$ mit $U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq U_3 \subsetneq U_4 \subsetneq \mathbb{R}^3$? Wenn ja, geben Sie ein konkretes Beispiel solcher Räume U_1, U_2, U_3, U_4 an (keine weitere Begründung notwendig). Wenn nein, begründen Sie.

Lösung:

Angenommen, solche Unterräume gäbe es. Dann gilt:

$3 = \dim(\mathbb{R}^3) > \dim U_4 > \dim U_3 > \dim U_2 > \dim U_1 \geq 0$

$\Rightarrow \dim U_4 \leq 2 \Rightarrow \dim U_3 \leq 1 \Rightarrow \dim U_2 \leq 0 \Rightarrow \dim U_1 < 0$ ↯

$\Rightarrow$ Nein!

Satz:

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Dann gilt:

(i) U ist endlich dimensional und $\dim(U) \leq \dim(V)$.

(ii) $U = V \iff \dim(U) = \dim(V)$.