

Valency Bedeutung
 für Informatik & Informatik
 VL vom 21.2.24

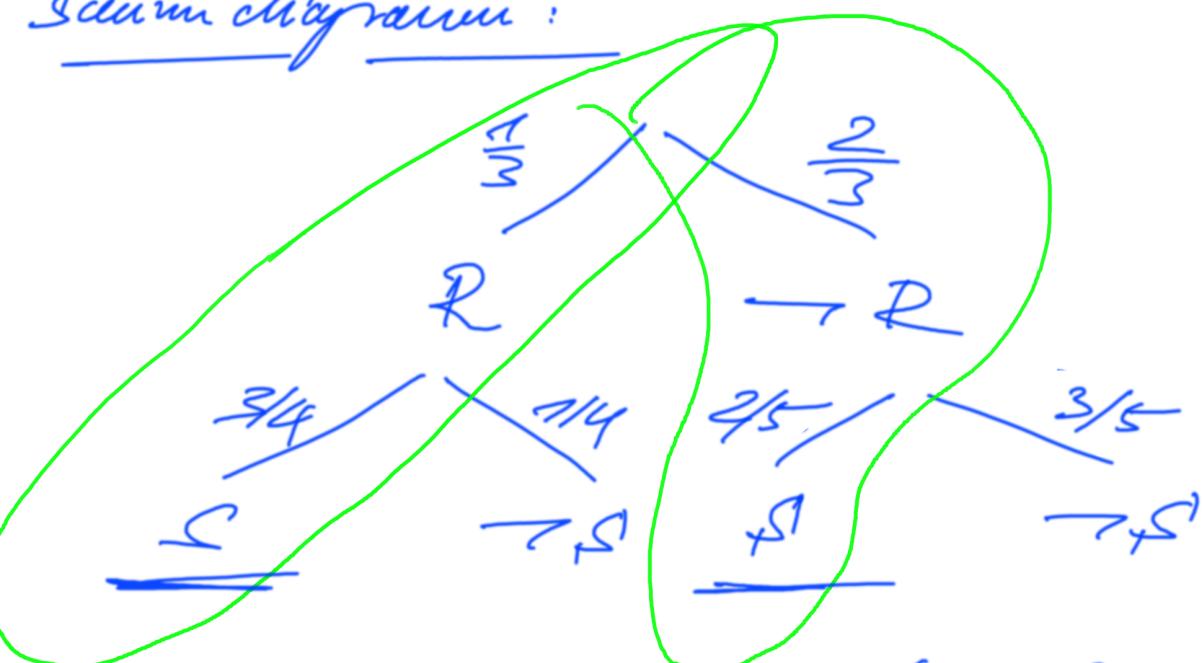
Dozent: Max Renesse

Herr Müller hat mit Wkeit $\frac{3}{4}$
den Regenschirm abgeklopft, wenn es regnet

$\frac{1}{1}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{2}{5}$
 $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{1}$, wenn es nicht regnet
 Es regnet am ersten Tag mit Wkeit $\frac{1}{2}$.

Herrk hat Herr Müller den Regenschirm abgeklopft.
Mit welcher Wkeit regnet es?

baumdiagramm:



$$\underline{1/3} = P(R); \underline{2/3} = P(\neg R)$$

$$\underline{3/4} = P(S|R); \underline{1/4} = P(\neg S|R)$$

$$z_1 = \underline{P(S \rightarrow R)} ; z_2 = P(R \mid S) \quad | \rightarrow R$$

Sehrgut: • $P(R \mid S) = ?$

$$:= \frac{P(R \cap S)}{P(S)}$$

• $P(R \cap S)$ =

$$\boxed{\frac{P(R \cap S)}{P(S)}} \cdot P(S)$$

$$= P(R \mid S) \cdot P(S)$$

$$= \frac{P(R \cap S)}{P(R)} \cdot P(R)$$

$$= P(S \mid R) \cdot P(R)$$

$$= \frac{3}{4} \quad \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$P(S) = P(S \cap R) + P(S \cap \neg R)$$

$$= \frac{P(S \cap R)}{P(R)} P(R) + \frac{P(S \cap \neg R)}{P(\neg R)} P(\neg R)$$

$$= P(S|R) \cdot P(R) + P(S|\neg R) \cdot P(\neg R)$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{4}{15}$$

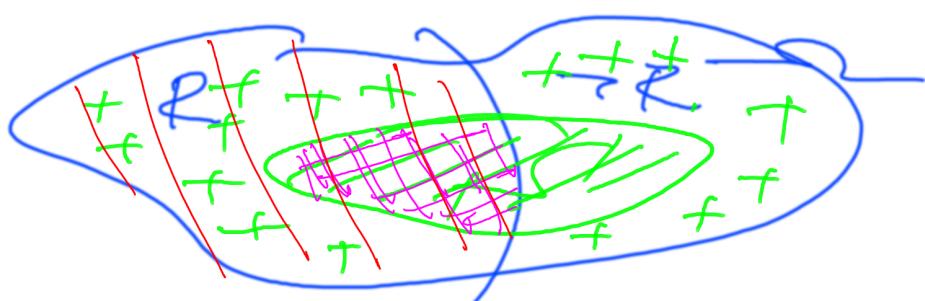
$$= \frac{15 + 16}{60} = \frac{31}{60}$$

$$P(R|S) = \frac{\frac{14}{31}}{\frac{31}{60}} = \frac{\frac{1}{4 \cdot \frac{31}{60}}}{\frac{60}{4 \cdot 31}}$$

$$= \frac{60}{724} = \frac{30}{62} = \frac{15}{31}$$

→ siehe Satz von Bayes
im Skript.

Alternative zum Baumdiagramm:



$$P(S|R) = \frac{\text{"\#"}^4}{\text{"\#"}^3} = \frac{P(S \cap R)}{P(R)}$$

Def.: Zwei Ereignisse A, B heißen unabhängig: $\iff P(A \cap B) = P(A) P(B)$

Bsp.: 2-falter würfelt mit einer fairen Münze:

mathematische Realität:

s = Menge der möglichen Würlepotenzen

$$= \{\{K, K\}, \{K, Z\}, \{Z, Z\}\}.$$

$P(\{\{K, K\}\}) = \frac{1}{4}$; $P(\{a, b\}) = \frac{1}{4}$
alle $a, b \in \{K, Z\}$.

$A :=$ "1. Wurf ergibt Kopf"

$B :=$ "2. Wurf ergibt Zahl".

Und A und B unabhängig?

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P\left(\begin{array}{l} \text{"1. Wurf ergibt Kopf und} \\ \text{2. Wurf ergibt Zahl"} \end{array}\right) \\ &= P(\{\{K, Z\}\}) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{\underline{\{K, K\}}, \underline{\{K, Z\}}\}) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\{\underline{\{K, Z\}}, \underline{\{Z, Z\}}\}) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

$$\stackrel{?}{=} \underbrace{P(A) \cdot P(B)}_{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \quad \checkmark$$

Bew. Falls \neq stet. maßl. von B
Seo gilt

$$P(A|B) = P(A)$$

Bew.: $P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

(Vereinfachung)

$$:= \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)}$$

$$= P(A) \quad \checkmark$$

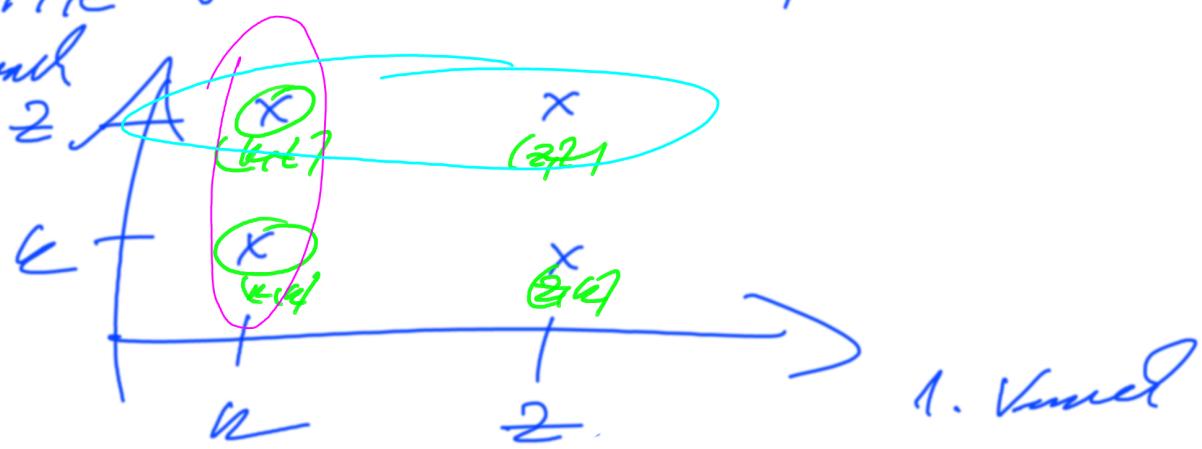
V

Analog: $P(B|A) = P(B)$

Bew. Dies ist äquivalent der Voraussetzung

Spalte für das Konsistent

zVorh

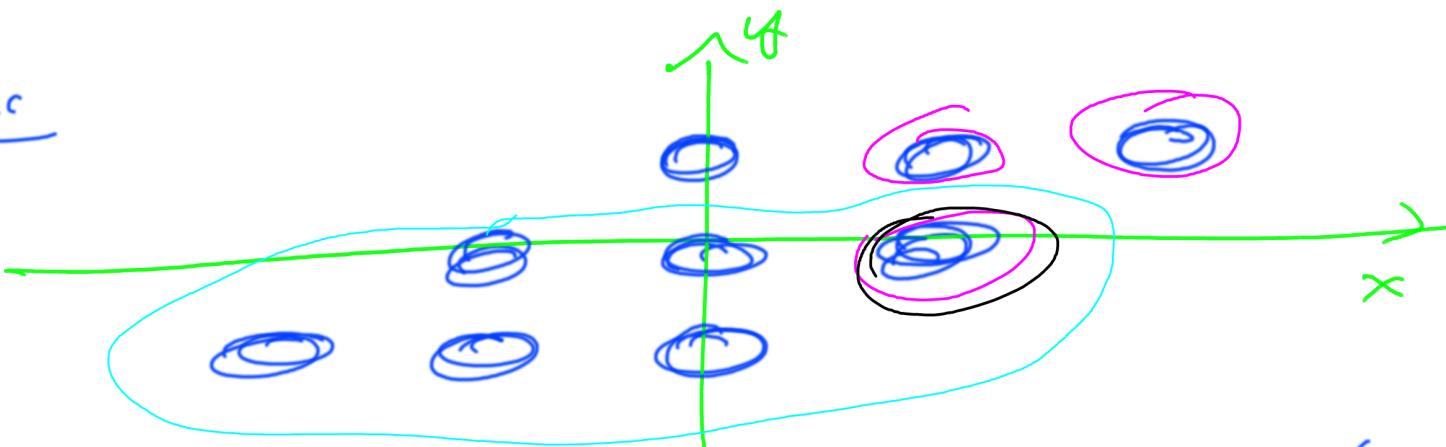


A = 1. mit korr^{*}

$$\textcircled{B} = \text{z. 2. mit Zahl } 4$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Bsp. c



3 Leguen werden wir gleich vergleichen
Wöhl ein Kondi ebenfalls, und gleich
vergleich.

$\textcircled{A} :=$ „x-Koordinate hat mindestens einen
wert > oder jünger 9“

$\textcircled{B} :=$ „y-Koordinate ist höchstens null“.

$A \cap B$

A und B zusammen? ?

$$P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3};$$

$$P(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{9} \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

Y

A und nicht sel. unabhäg.!

$$P(A|B) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{3} = P(A)$$

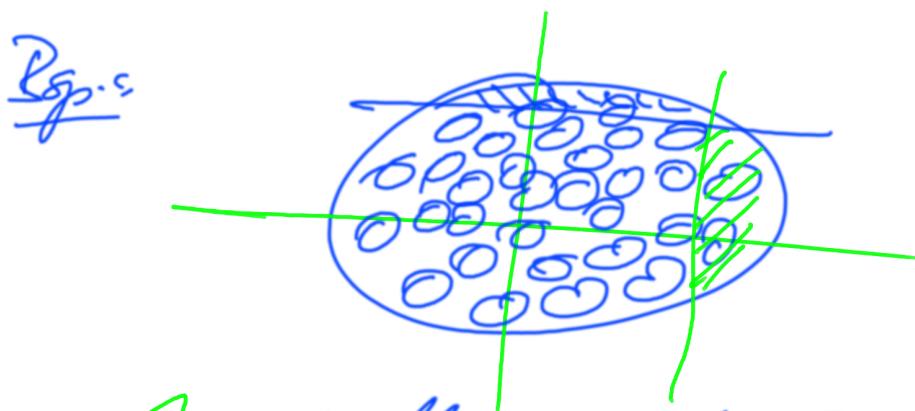
Stochastik für Int und Lat
Colony von 12.11.29



Unabhängigkeit \Leftrightarrow Rechteck gesetzt
für Flächenmaß

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Bem.: $P(B|A) = P(B)$
 $\Leftrightarrow A$ und B stoch. unabhängig.



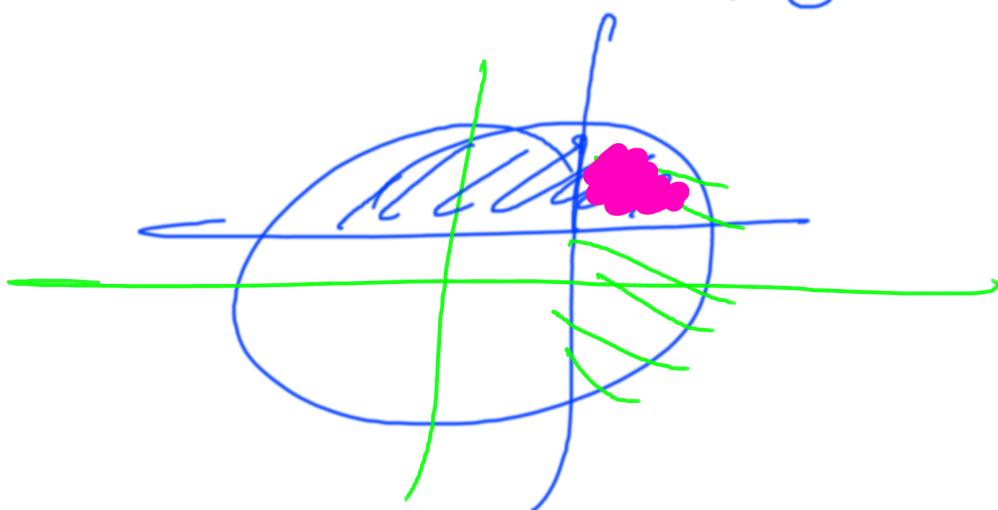
A \Leftrightarrow , in lf jeweils $3/4$ in x -Realty

B \Leftrightarrow , in lf jeweils $3/4$ in z -Richtg.

$$\underline{P(A)} = \underline{P(B)} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|B|}{\pi}$$

$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0.$$

$$= \underbrace{P(A)}_{>0} \cdot \underbrace{P(B)}_{>0} > 0$$



$$P(A \cap B) = \frac{|A|}{\pi} \neq \frac{|A|}{\pi} \cdot \frac{|B|}{\pi}$$

$\xrightarrow{\hspace{1cm}}$

$$(P(A)) \cdot (P(B))$$

Def. Die Ereignisse A_1, \dots, A_n heißen unabhängig, falls $\forall L \leq n$, $i_1, i_2, \dots, i_L \in \{1, \dots, n\}$, $i_k \neq i_l \forall k \neq l$

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_L}) = \prod_{e=1}^L P(A_{i_e}).$$

Die Ereignisse A_1, \dots, A_n heißen paarweise unabhängig, falls $P(A_{i_1} \cap A_{j_1}) = P(A_{i_1}) P(A_{j_1})$ $\forall i_1 \neq j_1$

Bsp.: $A_c, c = 1 \dots 4$ stet. mahl.
 \Rightarrow gew. mahl.
 ↪ i. d.



Beispiel: $\rightarrow = \{1, 2, 3, 4\}$

$$P(\{k\}) = \frac{1}{4}$$

$A_1 = \{1, 2, 3\}, A_2 = \{2, 3\}, A_3 = \{1, 3\}$.

$$\underbrace{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}_{=\emptyset} = P(\emptyset) = 0$$

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

analog $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3); P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$



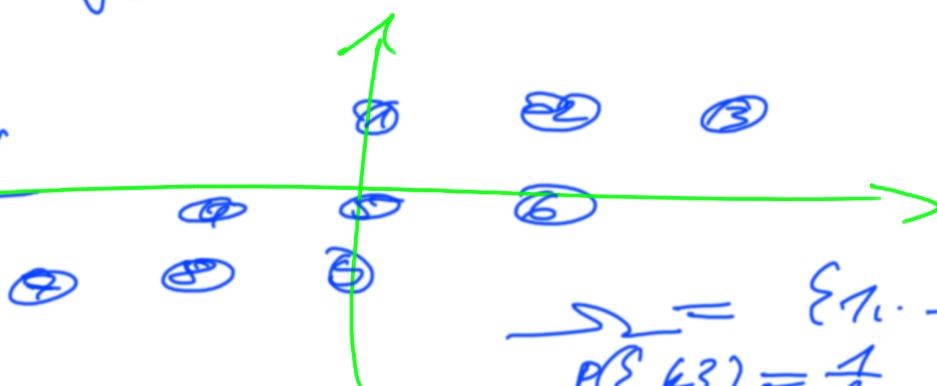
Def.: Eine Abbildung

$$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

nennen wir fiktive Variable. //

Bedeutung: X stellt eine Auszahlungs
funktion auf einer Wette dar.

Beispiel:



$$\rightarrow = \{1, \dots, 9\}$$

$$P(\{k\}) = \frac{1}{9}$$

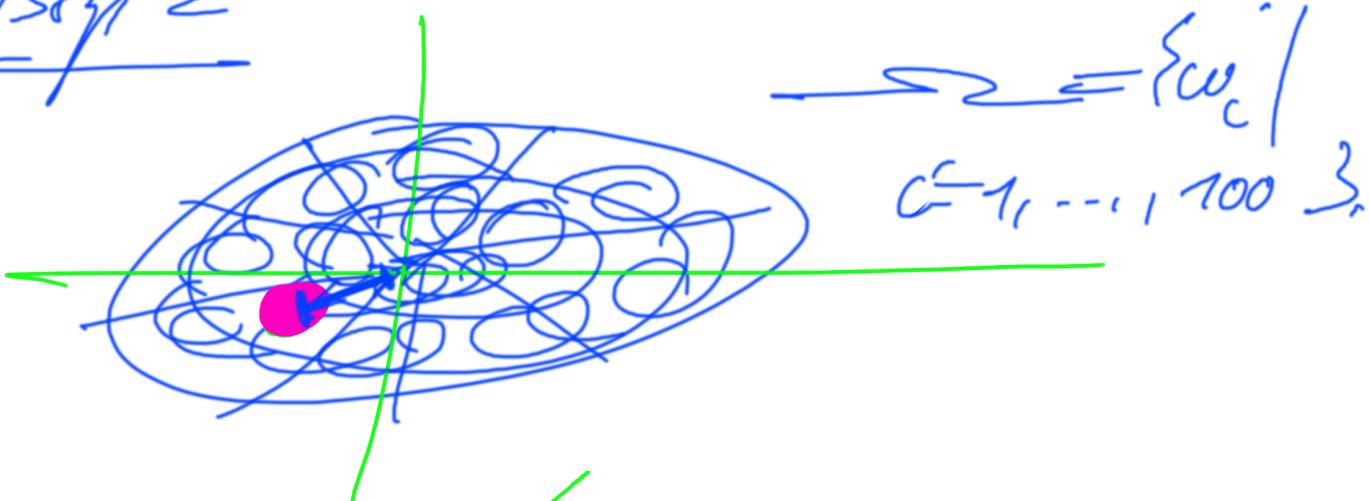
Wortauszählung:

$$X: \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$$

$X(w) =$ x -Koordinaten von w .

w	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$X(w)$	0	1	2	-1	0	1	-2	1	0

Beispiel 2



$$X: \Sigma \longrightarrow \underline{\mathbb{R}}$$

$X(w) =$ Abstand von w zum Zentrum "•"

$$= |w|^p, \quad p = 1, 2, -1.$$

Falls $w = \bullet$

$$\Rightarrow X(w) = |\bullet|^p$$

$$Y: \Omega \xrightarrow{\quad} \underline{\mathbb{R}}$$

$y(w)$ = x -Koordinate von w

$$= w_1 \text{ falls } w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

↓

$$Z: \Omega \xrightarrow{\quad} \underline{\mathbb{R}}$$

$$z(w) := X(w) \cdot y(w)$$

Def., sei $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
eine Zufallsvariable, so nennen
wir

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{w \in \Omega} X(w) p(w) \in \mathbb{R}$$

Erwartungswert von X

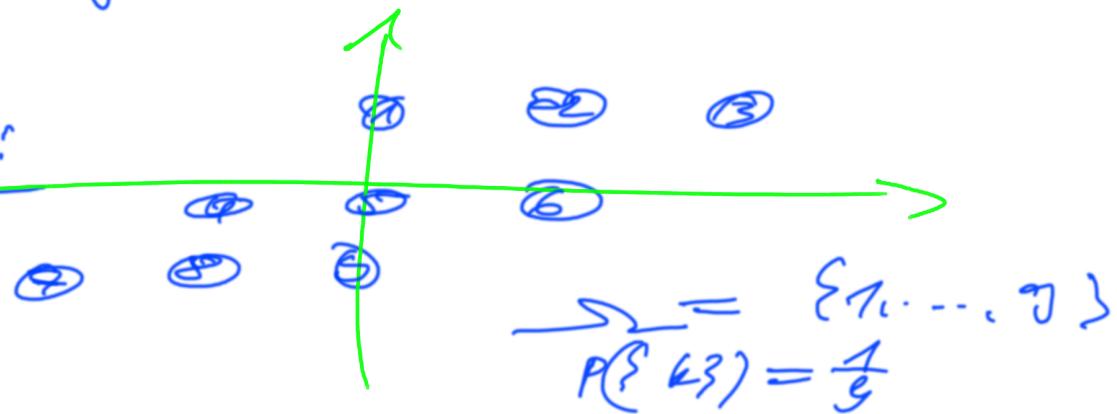
II

Interpretation: mittlere Aussage von X
summiert über alle Ereignisse $w \in \Omega$
gewichtet mit der Wk. der Ereignisse.

Rg:

Beobachtung: X stellt eine Auszählungsfunktion auf einer Menge dar.

Beispiel:



$$X(\omega) = (w_i)^2$$

w	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$X(w)$	0	1	9	16	25	36	49	64	81

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{w \in \Omega} X(w) \underbrace{P(w)}_{\text{max: } \frac{1}{9}}$$

Spezialfall $= \frac{1}{9} \sum_{w \in \Omega} X(w)$

$$= \frac{1}{3} \cdot (0+1+4+1+0+1+4+1+0) \\ = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}. \quad \underline{\underline{4}}$$

Bem. / Lemma: Es sei X eine Zufallsvariable $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Es seien z_1, z_2, \dots, z_n die möglichen Ausfallswerte von X , dann gilt

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{z_i} z_i \cdot P(X=z_i). \quad \underline{\underline{1}}$$

Bsp. s (Teil 1):

Welche Z-Werte können als Ausfallswerte von X vor?

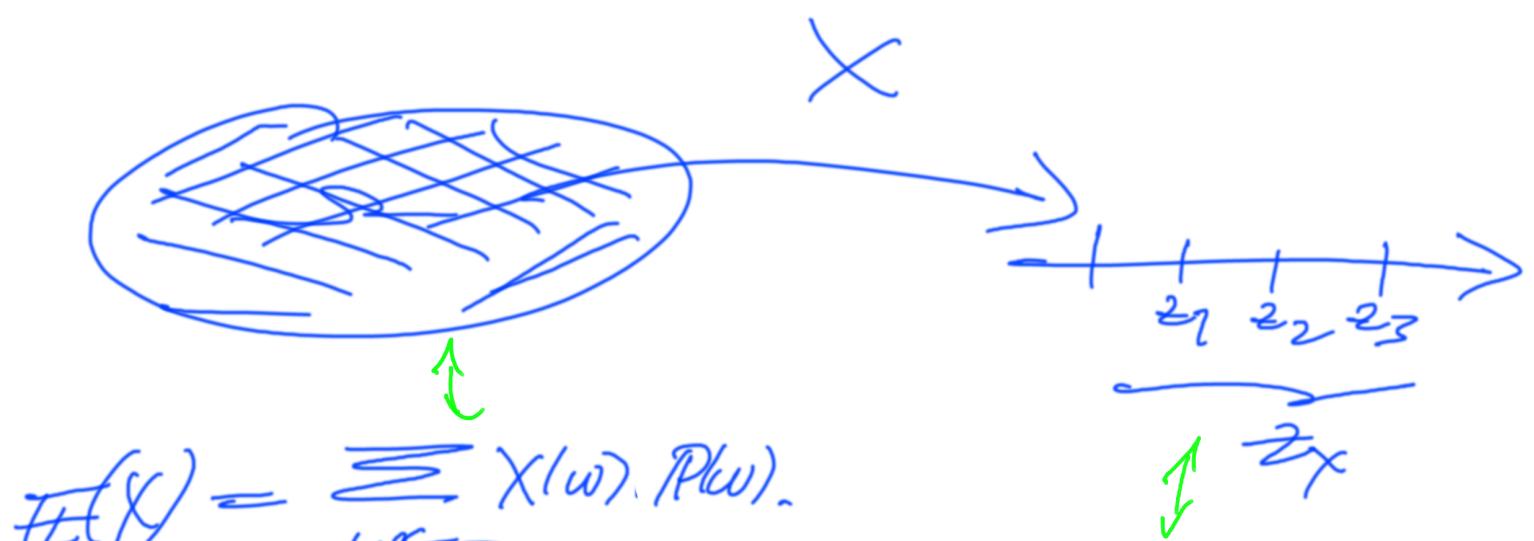
$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_X = \{0, 1, 4, 3\}.$$

$$P(Z=0) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

$$P(Z=1) = \frac{4}{9}$$

$$P(Z=4) = \frac{2}{9}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Def: } E(X) &\stackrel{!}{=} \sum_{\substack{z \in \mathbb{Z}_X \\ z \in X}} z \cdot P(X=z) \\
 &= \underbrace{0 \cdot \frac{1}{3}}_{z=0} + \underbrace{1 \cdot \frac{4}{5}}_{z=1} + \underbrace{4 \cdot \frac{2}{3}}_{z=4} \\
 &= 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{5} + \frac{8}{3} = \frac{12}{5} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}
 \end{aligned}$$



$$E(X) = \sum_{w \in \Omega} X(w) \cdot P(w).$$

=

$$\sum_{z_i \in Z_X} z_i \cdot P(z_i)$$

↓

Bsp. der Schreibweise:

Schreiber auf

$$\begin{aligned}
 \text{II: } E(X) &\stackrel{!}{=} m_X = \mu_X = \langle X \rangle
 \end{aligned}$$

Daf > Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine
Zufallsvariable; $\mu_X = \mathbb{E}(X)$.
Dann heißt

$$\mathbb{E}((X - \mu_X)^2) =: V(X).$$

Varianz von X .

||

Bsp: $w \mapsto [X(w) - \mu_X]^2 = z(w)$

Abschlag der Ausdehnung
um μ_X herum von
der mittleren Ausdehnung
"quadratische Abschlag" -----
----- a.

$$V(X) = \mathbb{E}(z)$$

Interpretation: $V(X) = \mathbb{E}(z)$

ist mittlere quadratische Abweichung
von Mittel.

und Maß für die "Scatter" von X . ||

Bsp.: (Forts.). X



$$X(\omega) = (\omega_1)^2$$

$$\mathbb{E}(X) = \mu_X = \frac{4}{3}.$$

w	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$(X(w) - \mu_X)^2$	$\frac{16}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{64}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{64}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{16}{9}$

$$\mathbb{E}((X - \mu_X)^2)$$

$$= \sum_{w \in \Omega} (X(w) - \mu_X)^2 \underbrace{P(w)}_{= \frac{1}{9}}$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{16}{9} + \frac{7}{9} + \dots + \frac{16}{9} \right)$$

$$= \frac{1}{9} \lceil \frac{180}{9} \rceil = \frac{20}{9}.$$

