Übungsblatt 4

Paula Ewald, 3706225
Tim Schlenstedt, 3797524

Hausaufgabe 4

Sei V die Menge der Damen

$$M_n = \{ \bigvee_{i=\{1,\dots,n\}} (x_{v,i}) \mid v \in V \} \cup \{ \bigwedge_{i\in\{0,\dots,n-1\}} (\bigwedge_{j\in\{0,\dots,n-1-i\}} (\neg(x_{v,n,1+i} \wedge x_{w,n-j,1+i+j}))) \mid v,w \in V \}$$

$$\cup \{ \bigwedge_{i\in\{0,\dots,n-1\}} (\bigwedge_{j\in\{0,\dots,n-1-i\}} (\neg(x_{v,n-i,1} \wedge x_{w,n-i-j,1+j}))) \mid v,w \in V \}$$

$$\cup \{ \bigwedge_{i\in\{0,\dots,n-1\}} (\bigwedge_{j\in\{0,\dots,n-1-i\}} (\neg(x_{v,1,1+i} \wedge x_{w,1+j,1+i+j}))) \mid v,w \in V \}$$

$$\cup \{ \bigwedge_{i\in\{0,\dots,n-1\}} (\bigwedge_{j\in\{0,\dots,n-1-i\}} (\neg(x_{v,1+i,1} \wedge x_{w,1+i+j,1+j}))) \mid v,w \in V \}$$

$$\cup \{ \bigwedge_{i\in\{1,\dots,n\}} (\bigwedge_{j\in\{1,\dots,n\}} (\bigwedge_{k\in\{1,\dots,n\}} (\neg(x_{v,i,j} \wedge x_{w,k,j})))) \mid v,w \in V \}$$

$$\cup \{ \bigwedge_{i\in\{1,\dots,n\}} (\bigwedge_{j\in\{1,\dots,n\}} (\bigwedge_{k\in\{1,\dots,n\}} (\neg(x_{v,j,i} \wedge x_{w,j,k})))) \mid v,w \in V \}$$

Die Formelmenge ist korrekt, da wir nach der Initialisierung der Damen zunächst ausgeschlossen haben, dass zwei Damen auf der selben Diagonale stehen können und anschließend auch, dass sie nicht in der selben Spalte und auch nicht in der selben Reihe stehen können.

Hausaufgabe 5

(a) $\varphi = \{ F_{0,0} \wedge C_{0,1},\ F_{0,0} \wedge B_{1,0},\ C_{0,1} \wedge D_{1,1},\ B_{1,0} \wedge D_{2,2},$
$B_{1,0} \wedge E_{2,0},\ D_{1,1} \wedge A_{2,1},\ E_{2,0} \wedge A_{2,1} \}$

(b) Zu zeigen: Es ex. ein $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ Mosaik

Aus B1 folgt: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt dass ein $m \times n$ Mosaik genau dann ex., wenn $M_{\{0,\dots,m-1\} \times \{0,\dots,n-1\}}$ erfüllbar ist.
Somit gilt für $M_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, dass jede endliche Teilmenge erfüllbar ist und dadurch folgt aus dem Kompaktheitssatz, dass $M_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ erfüllbar ist.
$\overset{B1}{\Rightarrow}$ Genau dann existiert ein $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ Mosaik.

(c) Wenn $n \times n$ Mosaike existieren, wurden diese aus m Fliesen geschaffen.
Da neue Mosaike durch Aneinanderreihen von Fliesen entstehen und diese wiederverwendet werden können, können $n \times n$ Mosaike beliebig erweitert werden.
Es existiert also ein $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ Mosaik.

Hausaufgabe 6

(a)

f_1:

$x \mapsto 1$

$y = 4$, sodass $(x,y) \in S^{\mathfrak{A}}$

$x \mapsto 2$

$y = 3$, sodass $(x,y) \in R^{\mathfrak{A}}$

$x \mapsto 3$

$y = 2$, sodass $(x,y) \in R^{\mathfrak{A}}$

f_2:

$x \mapsto 2$

$y = 3$, sodass $(x,y) \in R^{\mathfrak{A}}$ und $(x,y) \notin S^{\mathfrak{A}}$

$$\underbrace{(1 \vee 0 \to 1)}_{1} \wedge \underbrace{(0 \to 1)}_{1}$$

$\Rightarrow \mathfrak{A} \models f_2(2)$

$x \mapsto 3$

$y = 1$, sodass $(x,y) \in R^{\mathfrak{A}}$ und $(x,y) \notin S^{\mathfrak{A}}$

$y = 2$, sodass $(x,y) \in R^{\mathfrak{A}}$ und $(x,y) \notin S^{\mathfrak{A}}$

$\forall y$ gilt $(1 \vee 0 \to 1)$

und $\forall y$ gilt $(0 \to 0)$

$$\underbrace{(1 \vee 0 \to 1)}_{1} \wedge \underbrace{(0 \to 0)}_{1}$$

$\Rightarrow \mathfrak{A} \models f_2(3)$

(b)

$$f_1(x) = \exists y\,((R(x,y) \wedge S(x,y)) \vee (R(y,x) \wedge S(y,x)))$$

Die Relationen R und S bestehen zusammen nur zwischen den Elementen 1 und 2.

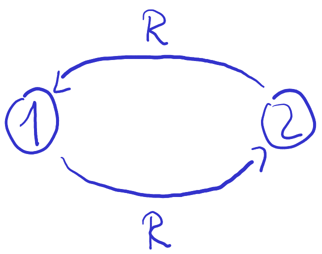
$$f_2(x) = \exists y\,(\neg(S(y,x)))$$

3, 4, 5 sind die Elemente, auf die keine Relation S zeigt.

(c) Die Aussage ist falsch. Angenommen $M = \{4\}$, dann $\text{aus}(\mathfrak{A}, f_M) \neq M$, denn die Elemente 4 und 5 haben die gleichen Relationen.

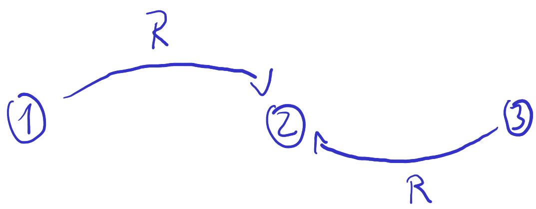
Hausaufgabe 7

(a)



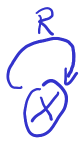
Alle Elemente x zeigen mittels Relation R auf ein weiteres Element

(b)



Es gilt nicht für alle x, y, dass sie durch R auf ein anderes Element zeigen, jedoch für jeweils mindestens ein Element.

(c)



Es gibt ein Element, dass auf alle Anderen zeigt und die Elemente auf die gezeigt wird, sind gleich dem Element.

(d)