10-201-2108-1.VL01 Logik – Übungsblatt 6

Lovis Rentsch

2025-06-28

in Zusammenarbeit mit: Karl Zschiebsch

Problem 1: 5,5/8

1.1 3/4

	NNF	BF	PNF	SNF
$\neg\forall x \exists y (P(x,y) \land \forall z \neg R(z,y))$		✓		
$\forall x \neg P(x) \lor (\exists x R(x,y) \land \forall z \neg R(z,y))$	✓	~~✓~~		~~✓~~
$\exists y \forall x \neg (P(x,y) \lor \neg Q(y))$		✓	✓	
$\forall x \forall y (\neg P(x,y) \lor \neg Q(y))$	✓	✓	✓	✓

1.2

$$\begin{aligned}
\forall x \exists y \neg \forall z P(f(x,y),z) \land \neg \forall x \exists z Q(x,z,y) &\equiv \forall x \exists y \exists z \neg P(f(x,y),z) \land \exists x \exists z \neg Q(x,z,y) \\
&\equiv \forall x \exists y \exists z \neg P(f(x,y),z) \land \exists u \exists v \neg Q(u,v,w) \\
&\equiv \forall x \exists y \exists z \exists u \exists v \neg P(f(x,y),z) \land \neg Q(u,v,w)
\end{aligned}$$

1.1

1.3

$$\begin{aligned}
\exists x \forall y \forall z \exists u \exists v (P(y,z,u) \land Q(x,u,v)) &\equiv \forall y \forall z \exists u \exists v (P(y,z,u) \land Q(c,u,v)) \\
&\equiv \forall y \forall z \exists v (P(y,z,g(y,z)) \land Q(c,g(y,z),v)) \\
&\equiv \forall y \forall z (P(y,z,g(y,z)) \land Q(c,g(y,z),h(y,z)))
\end{aligned}$$

Problem 2: 2/8

2.1

$$\varphi_1 = P(f(x),z) \land Q(g(z,x))$$
$$\{c, f(c), g(c,c), f(f(c)), g(f(c),c), g(c,f(c))\} \in D(\varphi_1)$$

2.2

$$\varphi_2 = \forall x \forall y \forall z (P(x,c) \land (Q(d) \to P(y,z)))$$

2.2.a

Es gibt die Herbrand-Strukturen P,Q,P.

2.2.b

Konstanten c und d $\Rightarrow U^{\mathfrak{A}} = \{c,d\}$

$$P^{\mathfrak{A}} = \{(c,c)\}$$
$$Q^{\mathfrak{A}} = \{d\}$$

2.2.c

$$P^{\mathfrak{B}} = \{(c,c),(d,c)\}$$
$$Q^{\mathfrak{B}} = \{c\}$$

2.3

Für $t \in D(\varphi_3)$ ist $P(t, f(t))$ $(t_1 = t, t_2 = f(t))$ und es gilt $f^{\mathfrak{C}} = f(t)$ also auch $f^{\mathfrak{C}}(t) = f(t) = t_2$. Wir sehen dass $(t, f(t)) \in P^{\mathfrak{C}}$ also ist C ein Herbrand-Modell. (✓)

2.4

Problem 3: 2/4

3.1

$$\varphi = \forall x \forall y(\neg R(x, y) \wedge R(c, f(c)))$$

3.1.a

$$D(\varphi) = \{c, f(c), f(f(c)), ...\}$$

$$\begin{gathered}\{\\ (\neg R(c, c) \wedge R(c, f(c))),\\ (\neg R(c, f(c)) \wedge R(c, f(c))),\\ (\neg R(f(c), c) \wedge R(c, f(c))),\\ (\neg R(f(c), f(c)) \wedge R(c, f(c))),\\ \} \in E(\varphi)\end{gathered}$$

✓

3.1.b

Ja er terminiert mit "φ unerfüllbar". ✓

3.2

Wir wissen, dass φ erfüllbar ist genau dann wenn φ ein Herbrand-Modell hat. Wenn wir nun die Allgemeingültigkeit zeigen wollen, riecht es zu zeigen, dass $\neg\varphi$ unerfüllbar ist, also kein Herbrand-Modell hat.

2.1

Index der Kommentare

1.1 ist eine freie Variable, die darf nicht einfach so umbenannt werden

2.1 und wie ist dafür die Vorgehensweise algorithmisch?