Satz und Def.:

Seien V und W endlich dimensionale K-Vektorräume.

Sei $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V und sei $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_m\}$ eine Basis von W.

Sei $f: V \to W$ linear.

Dann ex. genau eine Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ mit

$$f(v_1) = a_{11} \cdot w_1 + a_{21} \cdot w_2 + \dots + a_{m1} \cdot w_m$$

$$f(v_2) = a_{12} \cdot w_1 + a_{22} \cdot w_2 + \dots + a_{m2} \cdot w_m$$

$$\vdots$$

$$f(v_n) = a_{1n} \cdot w_1 + a_{2n} \cdot w_2 + \dots + a_{mn} \cdot w_m$$

Die Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) := {}_{\mathcal{B}}M(f)_{\mathcal{A}} := [f]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} := A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$

heißt Darstellungsmatrix von f bzgl. der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Die Abb.: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}: \mathrm{Hom}(V, W) \to K^{m \times n}$, $f \mapsto M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$ ist ein Isom.

Bem.:

Es gilt: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = (K_{\mathcal{B}}(f(v_1)), \dots, K_{\mathcal{B}}(f(v_n)))$

Def.:

Sei W endlich dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_m\}$.

Dann gibt es zu jedem $w \in W$ eind. bestimmte $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ mit $w = \lambda_1 \cdot w_1 + \dots + \lambda_m \cdot w_m$

und wir def. $K_{\mathcal{B}}(w) := [w]_{\mathcal{B}} := {}_{\mathcal{B}}w := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$.

Die Abb.: $K_{\mathcal{B}}: W \to K^m$ ist ein Isom.

Bem.:

Es gilt: $K_{\mathcal{B}}(w_j) = e_j \quad (j = 1, \dots, m)$

Satz

Seien V und W endlich dimensionale K-Vektorräume.

Sei $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V und sei $\mathbb{B} = \{w_1, \dots, w_m\}$ eine Basis von W.

Sei $f: V \to W$ linear. Dann gilt:

$$\mathcal{M}_{\mathbb{B}}^{\mathcal{A}}(f) \circ K_A = K_{\mathbb{B}} \circ f$$

Bew.:

Es genügt zu zeigen, dass die beiden linearen Abbildungen auf der Basis A von V übereinstimmen.

$$\mathcal{M}_{\mathbb{B}}^{\mathcal{A}}(f) \circ K_A(v_j) = \mathcal{M}_{\mathbb{B}}^{\mathcal{A}}(f) \cdot e_j = K_{\mathbb{B}}(f(v_j)) = (K_{\mathbb{B}} \circ f)(v_j) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad ✓ \qquad \square$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K_A"'] & W \arrow[d, "K_{\mathbb{B}}"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathcal{M}_{\mathbb{B}}^{\mathcal{A}}(f)"'] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

Bem.:

Es gilt insbesondere $f = K_{\mathbb{B}}^{-1} \circ \mathcal{M}_{\mathbb{B}}^{\mathcal{A}}(f) \circ K_A$

Sei $A := \mathcal{M}_{\mathbb{B}}^{\mathcal{A}}(f)$. Dann gilt:

- $f(v) = 0 \iff K_{\mathbb{B}}^{-1}(A \cdot K_{\mathcal{A}}(v)) = 0 \overset{K_{\mathbb{B}}^{-1} \text{ ist}}{\underset{\text{ein Isom.}}{\iff}} A \cdot K_{\mathcal{A}}(v) = 0$

  $\iff K_{\mathcal{A}}(v) \in \mathrm{Kern}(A) \iff v \in K_{\mathcal{A}}^{-1}(\mathrm{Kern}(A)) \quad \forall v \in V$

  Ist also $\{x_1, \dots, x_K\}$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(A)$, so ist $\{K_{\mathcal{A}}^{-1}(x_1), \dots, K_{\mathcal{A}}^{-1}(x_K)\}$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$, da $K_{\mathcal{A}}^{-1}$ ein Isom. ist.

- $f(V) = K_{\mathbb{B}}^{-1}(A \cdot K_A(V)) = K_{\mathbb{B}}^{-1}(A \cdot \mathbb{R}^n) = K_{\mathbb{B}}^{-1}(\mathrm{Bild}(A))$

  Ist also $\{y_1, \dots, y_K\}$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$, so ist $\{K_{\mathbb{B}}^{-1}(y_1), \dots, K_{\mathbb{B}}^{-1}(y_K)\}$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$, da $K_{\mathbb{B}}^{-1}$ ein Isom. ist.

Satz:

Seien U, V, W endlich dimensionale K-Vektorräume mit Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

Seien $g: U \to V$ und $f: V \to W$ linear. Dann gilt:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(f \circ g) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(g)$$

Satz und Def.:

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum.

Seien $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ Basen von V.

Dann ex. genau eine Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ mit

$$v_1 = a_{11} \cdot w_1 + a_{21} \cdot w_2 + \dots + a_{n1} \cdot w_n$$
$$\vdots$$
$$v_n = a_{1n} \cdot w_1 + a_{2n} \cdot w_2 + \dots + a_{nn} \cdot w_n$$

Die Matrix $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} := A$ heißt Transformationsmatrix bzgl der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Bem.:

(i) Es gilt: $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(id_V)$

(ii) $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ ist invertierbar und es ist $(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^{-1} = T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$.

Satz (Transformationsformel)

Seien V und W endlich dimensionale K-Vektorräume.

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ Basen von V und $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen von W.

Sei $f: V \to W$ linear. Dann gilt:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(f) = T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) \cdot T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}'}$$

Bem.:

Ist $V = W$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ und $\mathcal{A}' = \mathcal{B}'$, so gilt

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) = T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

Satz

Seien V und W endlich dimensionale K-Vektorräume.

Sei $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V und sei $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ eine Basis von W.

Sei $f: V \to W$ ein Isom. Dann gilt:

$$M^{B}_{A}(f^{-1}) = (M^{A}_{B}(f))^{-1}$$

Bew.:

Es gilt: $f \circ f^{-1} = id_W$

$\Rightarrow \quad E_n = M^{B}_{B}(id_W) = M^{B}_{B}(f \circ f^{-1}) = M^{A}_{B}(f) \cdot M^{B}_{A}(f^{-1})$

$\Rightarrow \quad M^{B}_{A}(f^{-1}) = (M^{A}_{B}(f))^{-1}$ $\square$