Hörsaalübungsblatt 2

Aufgabe 1. Geben Sie beim Lösen dieser Aufgabe auch immer den von Ihnen verwendeten diskreten Wahrscheinlichkeitsraum an.

(a) In einer Klasse mit 20 Schülern hat jeden Tag einer Tafeldienst. Es ist möglich, dass ein Schüler mehrfach drankommt. Wie viele Wochentafeldienstpläne (5 Tage) gibt es?

(b) An einem Tennisturnier nehmen 15 Personen teil. Wie viele mögliche Kombinationen gibt es für das Finalspiel?

(c) Am Sonntagmorgen geht Peter zur Bäckerei, um Brötchen für das Familienfrühstück zu kaufen. Die Bäckerei bietet fünf verschiedene Sorten Brötchen an. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn Peter sechs Brötchen kauft? (Dabei können wir annehmen, dass es von jeder Sorte Brötchen noch mindestens sechs Stück gibt.)

(d) An einem Marathon nehmen 42 Personen teil. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die ersten drei Plätze?

(e) Erika möchte drei Zimmer in ihrer Wohnung in verschiedenen Farben streichen. Jedes Zimmer soll eine andere Farbe haben. Im Baumarkt gibt es 7 Farben die ihr gefallen. Wie viele Möglichkeiten die Zimmer zu streichen gibt es?

(f) Bei einer Eisdiele gibt es 19 verschiedene Sorten Eis. Wie viele Möglichkeiten gibt es ein Eis mit 3 Kugeln zusammenzustellen? Die Reihenfolge mit der die Eiskugeln in das Eis kommen soll keine Rolle speilen.

(g) Aus einer Gruppe von 13 Studienteilnehmern werden 4 Personen für ein Experiment ausgewählt. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?

(h) Wie viele Möglichkeiten gibt es einen Blumenstrauß mit 23 Blumen aus 5 Blumenarten zu erstellen?

Lösung zu Aufgabe 1: (Kombinatorik Tafel) KombinatorikTafel-mitWRaum.tex

(a) Es handelt sich um das Urnenmodell mit Zurücklegen und mit Reihenfolge, also sind

$$20^5 = 3200000$$

Tafelpläne möglich.

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 20\}^5 = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_5) : \omega_1, \dots, \omega_5 \in \{1, 2, \dots, 50\}\}$$
$$\text{mit } \; p(\omega) = 1/|\Omega| \; \text{ für alle } \omega \in \Omega$$

(ein Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum).

(b) Hierbei ziehen wir zwei aus 15 ohne Zurücklegen und ohne Reihenfolge, da A vs. B das gleiche Finalspiel ist wie B vs. A. Also gibt es

$$\binom{15}{2} = \frac{15!}{2!13!} = \frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1} = 105$$

Möglichkeiten.

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_1, \omega_2 \in \{1, 2, \ldots, 15\}, \omega_1 < \omega_2\}$$
$$\text{mit} \quad p(\omega) = 1/|\Omega| \quad \text{für alle } \omega \in \Omega$$

(ein Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum).

(c) Da es von jeder Sorte noch ausreichend Brötchen gibt, handelt es sich um Ziehen mit Zurücklegen und ohne Reihenfolge, also gibt es

$$\binom{5+6-1}{6} = \frac{10!}{6!4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

Möglichkeiten.

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_6) : \omega_1, \ldots, \omega_6 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \omega_1 \leq \omega_2 \leq \ldots \leq \omega_5\}.$$

Schreibe $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ mit $n_1 + \cdots + n_5 = 6$, $n_1, \ldots, n_5 \in \{0, 1, \ldots, 6\}$ als Abkürzung dafür, dass n_i Brötchen vom Typ i ausgewählt wurden, dann ist

$$p(\omega) = \frac{\binom{6}{n_1}\binom{6-n_1}{n_2}\binom{6-n_1-n_2}{n_3}\binom{6-n_1-n_2-n_3}{n_4}\binom{6-n_1-n_2-n_3-n_4}{n_5}}{5^6} \quad \text{für } \omega \in \Omega$$

(kein! Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum), d.h. z.B. für $(6, 0, 0, 0, 0)$, $p(\omega) = 1/5^6$ aber für $(1, 0, 0, 2, 3)$, $p(\omega) = \frac{\binom{6}{1}\binom{5}{0}\binom{5}{0}\binom{5}{2}\binom{3}{3}}{5^6} = \frac{6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot 1}{5^6} = 60/5^6$.

(d) Das hier betrachtete Urnenmodell ist ohne Zurücklegen und mit Reihenfolge:

$$\frac{42!}{(42-3)!} = 42 \cdot 41 \cdot 40 = 68880.$$

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \{1, 2, \ldots, 42\}, \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\}$$
$$\text{mit} \quad p(\omega) = 1/|\Omega| \quad \text{für alle } \omega \in \Omega$$

(ein Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum).

(e) Da es verschiedene Farben sein sollen ziehen wir ohne Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge, da wir die Zimmer klar unterscheiden können:

$$\frac{7!}{(7-3)!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$$

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \{1, 2, \ldots, 7\}, \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\}$$
$$\text{mit} \quad p(\omega) = 1/|\Omega| \quad \text{für alle } \omega \in \Omega$$

(ein Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum).

(f) Wir Ziehen mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge:

$$\binom{19+3-1}{3} = \frac{21!}{3!18!} = \frac{21 \cdot 20 \cdot 19}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1330.$$

(Wenn wir die Reihenfolge beachten, erhalten wir $19^3 = 6859$.)

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \{1, 2, \dots, 19\}, \omega_1 \le \omega_2 \le \omega_3\}$$

mit

$$p(\omega) = \begin{cases} 1/19^3, & |\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}| = 1 \text{ (d.h. nur eine Sorte vertreten)}, \\ 3/19^3, & |\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}| = 2, \\ 3!/19^3, & |\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}| = 3, \end{cases}$$

(kein! Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum).

(g) Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Reihenfolge:

$$\binom{13}{4} = \frac{13!}{4!(13-4)!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 715.$$

$$\begin{aligned} &\Omega = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_4) : \omega_1, \dots, \omega_4 \in \{1, 2, \dots, 13\}, \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4\} \\ &\text{mit } \ p(\omega) = 1/|\Omega| \ \text{ für alle } \omega \in \Omega \end{aligned}$$

(ein Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum).

(h) Wir Ziehen mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge, also gibt es

$$\binom{5+23-1}{23} = \frac{27!}{23!(27-23)!} = 17550$$

Möglichkeiten.

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{23}) : \omega_1, \dots, \omega_{23} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \omega_i \le \omega_j \text{ für } i \ne j\}.$$

Schreibe $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ mit $n_1 + \dots + n_5 = 23$, $n_1, \dots, n_5 \in \{0, 1, \dots, 23\}$ als Abkürzung dafür, dass n_i Blumen vom Typ i ausgewählt wurden, dann ist

$$p(\omega) = \frac{\binom{23}{n_1}\binom{23-n_1}{n_2}\binom{23-n_1-n_2}{n_3}\binom{23-n_1-n_2-n_3}{n_4}\binom{23-n_1-n_2-n_3-n_4}{n_5}}{5^{23}} \quad \text{für } \omega \in \Omega$$

(kein! Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum).

Aufgabe 2.

Geben Sie beim Lösen dieser Aufgabe immer den von Ihnen verwendeten Wahrscheinlichkeitsraum Ω an!

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einem gut durchgemischten Skatspiel alle vier Asse direkt übereinander liegen. Ein Skatspiel besteht aus 32 Karten, darunter vier Asse.

(b) Welches Ereignis hat die größere Wahrscheinlichkeit? Beim 4-maligen Würfeln mit einem Würfel mindestens eine Sechs oder beim 24-maligen Würfeln mit zwei Würfeln mindestens einen Sechserpasch zu werfen?

(c) Ein Würfel wird 7 mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jede der Ziffern $1, \dots, 6$ mindestens einmal dabei vorkommt?

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Skatrunde nach dem Geben zwei Buben im Skat liegen? Der Skat besteht aus zwei zur Seite gelegten Karten. Es gibt vier Buben unter den 32 Karten.

Lösung zu Aufgabe 2: (Skat und Würfeln) SkatWuerfeln.tex

(a)

$$\Omega = \{(k_1, \ldots, k_{32}) : k_i \text{ ist eine Skatkarte}, i \in \{1, \ldots, 32\}\}$$

Damit ist Ω ein Laplaceraum mit $\#\Omega = 32!$. Ist A das Ereignis, dass alle vier Asse übereinander liegen, dann ist $\#A = 29 \cdot 28! \cdot 4!$, da die Position des Beginns des Ass-Stapels festgelegt werden muss und danach 28 Karten (keine Asse) und die 4 Asse (im 4-er Stapel) angeordnet werden müssen. Also

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{29!4!}{32!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{32 \cdot 31 \cdot 30} = \frac{1}{1240} \approx 0.0008064516$$

(b) *4-maliges Würfeln:*

$$\Omega_1 = \{0, 1\}^4$$

dabei steht 0 für „keine 6“ und 1 für „eine 6“ in einem Wurf, was mit Wahrscheinlichkeit 5/6 bzw. 1/6 eintritt.

Das Ereignis A sei dann „mindestens eine 6“. Betrachte $A^c =$„keine 6“.

$$\mathbb{P}(A^c) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \implies \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.5177469.$$

24-maliges Würfeln:

$$\Omega_2 = \{0, 1\}^{24}$$

mit $0 =$ „kein Sechserpasch“, $1 =$ „Sechserpasch“ mit Wkt. $\frac{35}{36}$ bzw. $\frac{1}{36}$.

Das Ereignis B sei dann „mindestens ein Sechserpasch“. Betrachte $B^c =$„kein Sechserpasch“.

$$\mathbb{P}(B^c) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \implies \mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.4914039.$$

Also ist Ereignis A wahrscheinlicher.

(c)

$$\Omega = \{1, \ldots, 6\}^7$$

Dann ist $\#\Omega = 6^7$ und für $A =$„jede Ziffer kommt einmal vor“ gilt

$$\#A = 6! \cdot 7 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}$$

Mit $\frac{7 \cdot 6}{2} = \binom{7}{2}$ wählt man die 2 der 7 Positionen, wo eine Ziffer doppelt vorkommt. Damit ergibt die Belegung der ersten Position, die der zweiten. Dann sind noch 6 Plätze mit 6 Ziffern zu belegen, was 6! Möglichkeiten ergibt.

Es ergibt sich

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}}{6^7} = \frac{70}{6^4} \approx 0.05401235$$

(d)

$$\Omega = \{(k_1, k_2) : k_1 < k_2 \text{ ist Skatkarte }, \ i = 1, 2\}$$

Dann ist $\#\Omega = \binom{32}{2}$ und $A =$„zwei Buben im Skat“ mit $\#A = \binom{4}{2}$.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{!30!2!}{32!} = \frac{4 \cdot 3}{32 \cdot 31} \approx 0.01209677$$

Aufgabe 3. Sei p_n die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Klasse von n Kindern wenigstens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben. Vereinfachend sei dabei angenommen, dass kein Kind am 29. Februar geboren ist und alle anderen Geburtstage gleich wahrscheinlich sind. Zeigen Sie (unter Verwendung der Ungleichung $1 - x \leq \mathrm{e}^{-x}$)

$$p_n \geq 1 - \mathrm{e}^{-n(n-1)/730},$$

und bestimmen Sie ein möglichst kleines n mit $p_n \geq 1/2$.

Lösung zu Aufgabe 3: (Geburtstagsproblem) geburtstag.tex

Sei $\Omega = \{1, \dots, 365\}^n$ mit $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$. Das kodiert n Kinder, und ω_i bezeichnet den Geburtstag des i-ten Kindes. Es gilt $|\Omega| = 365^n$.

Betrachte $A = \{\omega \in \Omega : \forall i \neq j \colon \omega_i \neq \omega_j\}$, die Menge aller Geburtstagskombinationen, bei denen keine zwei Geburtstage gleich sind. Es gilt $|A| = \frac{365!}{(365-n)!} = \prod_{j=0}^{n-1}(365 - j)$. Der Anteil dieser Geburtstagskonstellationen an allen möglichen Konstellationen ist

$$\frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\prod_{j=0}^{n-1}(365 - j)}{365^n} = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{365 - j}{365} = \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{365}\right) \leq \prod_{j=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-j/365} = \mathrm{e}^{\sum_{j=0}^{n-1} -j/365} = \mathrm{e}^{-\frac{n(n-1)}{2 \cdot 365}}.$$

Hier haben wir die für alle $x \in \mathbb{R}$ gültige Ungleichung $1 - x \leq \mathrm{e}^{-x}$ benutzt. Also folgt

$$p_n = \frac{|\Omega \setminus A|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega| - |A|}{|\Omega|} = 1 - \frac{|A|}{|\Omega|} \geq 1 - \mathrm{e}^{-\frac{n(n-1)}{730}}.$$

Wir möchten $p_n \geq 1/2$, also verlangen wir

$$1 - \mathrm{e}^{-\frac{n(n-1)}{730}} \geq 1/2.$$

Das kann man auflösen zu

$$\begin{aligned} 1/2 \geq \mathrm{e}^{-\frac{n(n-1)}{730}} &\iff (0 > -\ln(2) =) \ln(1/2) \geq -\frac{n(n-1)}{730} \iff \ln(2) \leq \frac{n(n-1)}{730} \\ &\iff n^2 - n - 730 \ln(2) \geq 0 \\ &\iff n \geq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 730 \ln 2} \approx 22.99994315, \end{aligned}$$

d.h. $n = 23$. Zur Probe: $p_{23} \geq 0,500002$.