Matrikelnummer:

Universität Leipzig
Fakultät für Mathematik und Informatik
Institut für Informatik

Prof. Dr. Ringo Baumann
Jamie Keitsch
Moritz Schönherr

Probeklausur Logik

Sommersemester 2025, 10.07.2025

Bearbeitungszeit: **60 Minuten** Gesamtpunktzahl: **60 Punkte**

Allgemeine Hinweise

- Bitte lösen Sie die Aufgaben direkt auf den Aufgabenblättern.
- Versehen Sie jedes Aufgabenblatt mit Ihrer Matrikelnummer.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen dokumentenecht auf, also in blau oder schwarz, *keinesfalls* mit Bleistift und bitte nicht in rot oder grün.
- Als Hilfsmittel ist **ein Blatt DIN A4** zugelassen, das handschriftlich beschrieben oder bedruckt sein darf. Alle anderen Hilfsmittel (Handy, Hefter etc.) sind nicht zugelassen.
- *Viel Erfolg!*

Aufgabe 1 (Wahrheitswertetabelle, Hornformeln)
Gegeben ist die aussagenlogische Formel

$$\varphi = A_1 \vee (\neg A_2 \rightarrow (A_1 \vee A_3))$$

(a) Füllen Sie folgende Wahrheitswertetabelle aus: (4)

A_1	A_2	A_3	$A_1 \vee A_3$	$\neg A_2$	$\neg A_2 \rightarrow (A_1 \vee A_3)$	$A_1 \vee (\neg A_2 \rightarrow (A_1 \vee A_3))$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1

(b) Geben Sie eine Formel ψ an, die äquivalent zu φ und kürzer als φ ist. (1)

(c) Gegeben ist die Interpretation $I(A_1) = 1,\ I(A_2) = 0,\ I(A_3) = 1,\ I(A_4) = 0$. (2)

Ist I ein Modell von φ? Markieren Sie in der Wahrheitswertetabelle die Interpretation I.

(d) Lässt sich φ als Hornformel darstellen? Geben Sie im positiven Fall eine äquivalente Hornformel an, oder begründen Sie kurz warum keine existiert. (3)

Aufgabe 2 (Folgerungsoperator, Interpolation)

(a) Gegeben sind die Formeln (3)

$$\varphi = (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3) \vee (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge A_3)$$
$$\psi = (A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3) \wedge (\neg A_1 \vee A_2 \vee A_3) \wedge (A_1 \vee A_2 \vee A_3).$$

Gilt $\varphi \models \psi$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Gilt $\neg(A_1 \wedge \neg A_2) \wedge (\neg A_1 \rightarrow A_2) \wedge \neg A_2 \models A_3$? Begründen Sie kurz. (2)

(c) Gegeben sind die Formeln (4)

$$\varphi = (\neg A_3 \rightarrow (\neg A_1 \wedge \neg A_2)) \wedge (A_3 \rightarrow (A_1 \leftrightarrow A_2))$$
$$\psi = (A_1 \rightarrow (A_2 \vee A_4)) \wedge (\neg A_5 \rightarrow (\neg A_1 \vee A_2))$$

Geben Sie eine Interpolante ξ mit $\varphi \models \xi$ und $\xi \models \psi$ an.
(Sie dürfen annehmen, dass $\varphi \models \psi$ gilt.)

Aufgabe 3 (Strukturelle Induktion)
Wir definieren die Menge $\mathcal{X}$ der aussagenlogische Formeln mit XOR-Junktor (ausschließendes Oder) induktiv wie folgt:

- für alle atomaren Aussagen $A \in \mathcal{A}$ gilt $A \in \mathcal{X}$,
- für zwei Formeln $\varphi, \psi \in \mathcal{X}$ ist $\varphi \oplus \psi \in \mathcal{X}$.

Es existieren keine weiteren Formeln in $\mathcal{X}$.
Die Semantik ist wie folgt definiert:

$$I(\varphi \oplus \psi) = 1 \qquad \text{gdw.} \qquad \text{entweder } I(\varphi) = 1 \text{ oder } I(\psi) = 1.$$

(a) Sei I die Interpretation, die alle Atome zu falsch auswertet, d.h. $I(A) = 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie mittels struktureller Induktion, dass für alle $\varphi \in \mathcal{X}$ gilt (8)

$$I(\varphi) = 0.$$

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass in $\mathcal{X}$ eine Formel existiert, die äquivalent zu $\neg A_1$ ist. (2)

Allgemeines vorgehen:

IA: Zeigt Aussage für atomare Formeln

IV: Nehmt an das Aussage für Formeln φ und ψ gelten

IS: Zeigt Aussage für Formeln, die φ und ψ mit einem Junktor verknüpfen

a) IA: Sei φ atomar D.h. $\varphi = A_i \in A$
Nun gilt $I(\varphi) = I(A_i) = 0$
IV: Gelte für $\varphi, \psi \in \mathcal{X}$ $I(\varphi) = I(\psi) = 0$
IS: für $\varphi \oplus \psi$ gilt $I(\varphi \oplus \psi) = 1$ gdw entweder $I(\varphi) = 1$ oder $I(\psi) = 1$
Aus IV: $I(\varphi) \neq 1$ und $I(\psi) \neq 1$
Somit gilt nicht, dass entweder $I(\varphi) = 1$ oder $I(\psi) = 1$
Also $I(\varphi \oplus \psi) \neq 1$ und somit $I(\varphi \oplus \psi) = 0$

b) Sei $I(A_i) = 0$ für alle $A_i \in A$
$I(\neg A_1) = 1$ für alle Formeln $\varphi \in \mathcal{X}$ gilt $I(\varphi) = 0$
D.h. für alle $\varphi \in \mathcal{X}$ gilt $\varphi \not\equiv \neg A_1$

Aufgabe 4 (Prädikatenlogik)
Gegeben ist die Formel

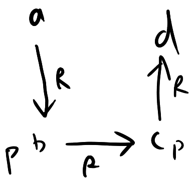
$$\varphi = \exists y\Big(R(x,y) \wedge \exists z R(y,z)\Big) \to \exists y\Big(P(y) \wedge R(y,x)\Big).$$

Sei $\mathfrak{A}$ folgende Struktur:

- $U^{\mathfrak{A}} = \{a, b, c, d\}$,
- $R^{\mathfrak{A}} = \{(a,b), (b,c), (c,d)\}$,
- $P^{\mathfrak{A}} = \{a, b, c\}$.

Sei $\beta(x) = \beta(y) = \beta(z) = b$.

(a) Ist $(\mathfrak{A}, \beta)$ ein Modell von φ? Begründen Sie Ihre Antwort. (4)



(b) Geben Sie eine Belegung γ an, sodass $(\mathfrak{A}, \gamma)$ kein Modell von φ ist. Ohne Begründung. (2)

(c) Lösen Sie die Implikation auf und überführen Sie φ in Negationsnormalform. Ist die resultierende Formel bereinigt? Begründen Sie kurz. (4)

a) $(\mathfrak{A},\beta)$ ist ein Modell: $(\mathfrak{A},\beta_{[y\mapsto a]})(P(y) \wedge R(y,x)) = 1$

somit $(\mathfrak{A},\beta)(\exists y(P(y) \wedge R(y,x)) = 1$

Also $(\mathfrak{A},\beta)(\varphi) = 1$

---

b) $\gamma(x) = a$

$(\mathfrak{A},\gamma)(\exists y(R(x,y) \wedge \exists z R(y,z)) = 1$ da

$(\mathfrak{A},\gamma_{[y\mapsto b]})(R(x,y)) = 1$ und $(\mathfrak{A},\gamma_{[y\mapsto b, z\mapsto c]})(R(y,z)) = 1$

$(\mathfrak{A},\gamma)(\exists y(P(y) \wedge R(y,x)) = 0$, da

für alle $u \in \{a,b,c,d\}$ gilt $(u,a) \notin R^{\mathfrak{A}}$

Somit $(\mathfrak{A},\gamma_{[y\mapsto u]})(P(y) \wedge R(y,x)) = 0$

für alle $u \in \{a,b,c,d\}$

Aufgabe 5 (Resolution)

(a) Wenden Sie den Resolutionsalgorithmus auf folgende Klauselmenge an: (9)

$$\{\{A_1, A_2\}, \{A_1, \neg A_2, A_3\}, \{\neg A_1, A_3\}, \{\neg A_1, \neg A_3\}, \{\neg A_2, \neg A_3\}\}$$

Ist die Klauselmenge erfüllbar? Begründen Sie kurz.

(b) Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus auf folgende atomare Formeln an: (5)

$$R(z, y, g(y, z)) \qquad \text{und} \qquad R(c, f(v), g(f(v), v)).$$

Bilden Sie eine Resolvente der Klauseln

$$\{P(z, f(y)), R(z, y, g(y, z)), \neg Q(z, z)\} \quad \text{und} \quad \{\neg R(c, f(v), g(f(v), v)), Q(v, f(v))\}.$$

Aufgabe 6 (Äquivalenzen)

(a) Sei φ, ψ zwei prädikatenlogische Formeln und sei $x \notin \text{frei}(\varphi)$ und $y \notin \text{frei}(\psi)$. Beweisen Sie, dass (4)

$$\forall x \exists y (\varphi \land \psi) \equiv \exists y \forall x (\varphi \land \psi).$$

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Es existiert ein erfüllbarer prädikatenlogischer Satz φ dessen Modelle alle überabzählbar sind. (3)