12/16

Wahrscheinlichkeitstheorie Übung N

Lennox Heimann, Merlin Hofmann, Nikita Emanuel John Fehér, Nataliia Kotsiuba

January 26, 2025

Matrikelnummer Lennox: 3776050
Matrikelnummer Merlin: 3792248
Matrikelnummer Nikita: 3793479
Matrikelnummer Nataliia: 3738575

Aufgabe 1 Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = \mu \in \mathbb{R}$ und Varianz $\mathrm{Var}(Y) = \sigma^2 > 0$. Das heißt, X ist verteilt mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

2/4

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

und es gilt

$$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \int_a^b f_X(x)dx$$

für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ Wir definieren nun die Zufallsvariable

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Wir wissen bereits, dass Y normalverteilt mit Erwartungswert $\mathbb{E}(Y) = 0$ und Varianz $\mathrm{Var}(Y) = 1$ ist. Wir bezeichnen mit Φ die Verteilungsfunktion von Y, d.h.

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Numerische/gerundete Werte von $\Phi(t)$ finden Sie weiter unten in der angehangenen Tabelle. In einer weiteren Tabelle finden sie numerische Werte wichtiger Quantile der Standardnormalverteilung. Eine reelle Zahl t heißt p-Quantil der (reellwertigen) Zufallsvariablen Z, falls

$$\mathbb{P}(Z \leq t) \geq p \text{ und } \mathbb{P}(t \leq Z) \geq 1 - p$$

(a) Zeigen Sie, dass $\Phi(t) = 1 - \Phi(-t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Daher reicht es $\Phi(t)$ für nicht negative t zu tabellieren.

(b) Begründen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Sei nun $\mu = 100$ und $\sigma^2 = 16$, d.h. X ist normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 100$ und Varianz $\sigma^2 = 16$.

(c) Berechnen Sie (näherungsweise) die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X \leq 95)$ und $\mathbb{P}(95 \leq X \leq 110)$ mit Hilfe der Verteilungstabellen.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq 95) &= \Phi\left(\frac{95-100}{4}\right) \\
&= \Phi\left(-\frac{5}{4}\right) \\
&= \Phi(-1,25) \\
&= 1 - \Phi(1,25) \\
&= 1 - 0,8944 \\
&= 0,1056
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(95 \leq X \leq 110) &= \Phi\left(\frac{110-100}{4}\right) - \Phi\left(\frac{95-100}{4}\right) \\
&= \Phi(2,5) - 0,1056 \\
&= 0,9938 \\
&= 0,8882
\end{aligned}$$

(d) Berechnen das 0,9-Quantil von X mit Hilfe der Quantiltabelle.

$$\begin{aligned}
z_0,9 = 1,28155 &= \frac{b-100}{4} && | \cdot 4 \\
5,12620 &= b - 100 && | + 100 \\
105,12620 &= b
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 In einer Klinik wird eine Studie zum Gesundheitszustand von Frühgeburten durchgeführt. Das Geburtsgewicht eines in der 28ten Schwangerschaftswoche geborenen Kindes wird als normalverteilte Zufallsgröße mit Erwartungswert 1000 g und Standardabweichung 50 g angenommen. 2/4

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein in der 28ten Schwangerschaftswoche geborenes Kind ein Gewicht zwischen 982 g und 1050 g hat?

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(082 \leq X \leq 1050) &= \Phi\left(\frac{1050-1000}{50}\right) - \Phi\left(\frac{982-1000}{50}\right) \\
&= \Phi(1) - \Phi(-0,36) \\
&= 0.8413 - (1 - 0.6406) \\
&= 0.8413 - 1 + 0.6406 \\
&= 0,4819
\end{aligned}$$

(b) Berechnen Sie das 10 %-Quantil des Geburtsgewichts. Was sagt es aus?

geg.: $P(X \leqq \ q_{01})$
Standartisierung: $P(X \leqq z_{01}) = 0,1$
aus Tabelle $\hookrightarrow z_{01} = 0,5398$
$z_{01} = \frac{x_p - \mu}{\sigma} \Longrightarrow x_p = \mu + \sigma \cdot z_{01} = 1000_g + 50_g \cdot 0.5398 = 1026,99_g$ f

(c) Geben Sie ein um den Erwartungswert symmetrisches Intervall an, in dem mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % das Geburtsgewicht liegt.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(1000-y \leq X \leq 1000+y) &= \Phi\left(\frac{1000+y-1000}{50}\right) - \Phi\left(\frac{1000-y-1000}{50}\right) \\
&= \Phi(y/50) - (1 - \Phi(y/50)) \\
0,95 &= 2\Phi(y/50) - 1 && | +1 \\
1,95 &= 2\Phi(y/50) && | \cdot 2^{-1} \\
0,975 &= \Phi(y/50) \\
\Phi(1,96) &= \Phi(y/50) \\
1,96 &= y/50 && | \cdot 50 \\
98 &= y
\end{aligned}$$

[902, 1098]

4/4

Aufgabe 3 Wir werfen eine faire Münze $n = 10$ mal bzw. $n = 20$ mal.

(a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens $0,6 \cdot n$ mal Kopf fällt, exakt.

$n = 10$

$$
\begin{aligned}
1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\binom{10}{10} + ... + \binom{10}{7} \right) &= 1 - \frac{1}{2^{10}} \cdot (1 + 10 + 45 + 120) \\
&= 1 - \frac{1}{2^{10}} \cdot 176 \\
&= 1 - \frac{11}{64} \\
&= \frac{53}{64}
\end{aligned}
$$

$n = 20$

$$
\begin{aligned}
1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \cdot \left(\binom{20}{20} + ... + \binom{20}{13} \right) &= 1 - \frac{1}{2^{20}} \cdot (13980) \\
&= 1 - \frac{34495}{262144} \\
&= \frac{227649}{262144}
\end{aligned}
$$

in diesem Fall könnt ihr gern einen Taschenrechner benutzen und eine gerundete Dezimalzahl als Lösung angeben :)

(b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens $0,6 \cdot n$ mal Kopf fällt, approximativ mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes.

Nach dem GWS gilt: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, wobei:

$$\mu = n \cdot p, \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

Für $n = 10$, $p = 0.5$:

$$\mu = 10 \cdot 0.5 = 5,$$

$$\sigma = \sqrt{10 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = \sqrt{1.58}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens $0.6 \cdot n$ mal Kopf fällt, wird approximiert durch:

$$P(X \leq k) \approx P\left(Z \leq \frac{k-\mu}{\sigma}\right), \quad \text{wobei } Z \sim N(0,1)$$

Für $k = 6$:

$$P(X \leq 6) \approx P\left(Z \leq \frac{6-5}{\sqrt{1.58}}\right) = P(Z \leq 0.63) \approx 0.7357$$

Für $n = 20$, $p = 0.5$:

$$\mu = 20 \cdot 0.5 = 10,$$

$$\sigma = \sqrt{20 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = \sqrt{2.24}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens $0.6 \cdot n$ (für $n = 20$) mal Kopf fällt, wird approximiert durch:

$$P(X \leq k) \approx P\left(Z \leq \frac{k-\mu}{\sigma}\right), \quad \text{wobei } Z \sim N(0,1)$$

Für $k = 12$:

$$P(X \leq 12) \approx P\left(Z \leq \frac{12-10}{\sqrt{2.24}}\right) = P(Z \leq 0.63) \approx 0.8133$$

4/4

Aufgabe 4 Auf einer Zuchtperlenfarm werden Muscheln gezüchtet, dabei bringt jede Muschel mit einer Wahrscheinlichkeit von 2% eine Perle hervor (und dies unabhängig vom Geschehen in allen anderen Muscheln). Beantworten Sie die folgende Frage jeweils durch exakte Rechnung und durch Anwenden der Poissonapproximation:
Wie viele Muscheln muss man mindestens öffnen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 50% mindestens eine Perle zu finden?

1. Exakte Rechnung

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Muschel eine Perle hervorbringt, beträgt $p = 0.02$. $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ Zu zeigen: $n_{\min}$, sodass $P(X \geq 1) > 0.5$.

$$P(0 \text{ Perlen zu finden}) = (1-p)^n = 0.98^n$$

$$P(\text{mindestens eine Perle zu finden}) = 1 - P(0 \text{ Perlen zu finden}) = 1 - 0.98^n$$

Wir setzen die Bedingung:

$$1 - (1-p)^n > 0.5$$

$$-(1-p)^n > 0.5 - 1$$

$$-(1-p)^n > -0.5$$

$$(1-p)^n < 0.5$$

$$0.98^n < 0.5$$

$$\ln(0.98^n) < \ln(0.5)$$

$$n \cdot \ln(0.98) < \ln(0.5)$$

$$n > \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.98)} \approx \frac{-0.693}{-0.0202} \approx 34.4 \approx 35$$

2. Poisson-Verteilung

$X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, wobei $\lambda = n \cdot p$. Die Wahrscheinlichkeit für k Treffer ist gegeben durch:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Für $P(0 \text{ Perlen})$ gilt:

$$P(0 \text{ Perlen}) = e^{-\lambda}$$

$$P(\text{mindestens 1 Perle}) = 1 - e^{-\lambda}$$

Zu zeigen: $n_{\min}$, sodass $P(X \geq 1) > 0.5$.

$$P(\text{mindestens 1 Perle}) > 0.5$$

$$1 - e^{-\lambda} > 0.5$$
$$-e^{-\lambda} > -0.5$$
$$e^{-\lambda} < 0.5$$

$$\ln(e^{-\lambda}) < \ln(0.5)$$
$$-\lambda \cdot \ln(e) < \ln(0.5)$$
$$\lambda \cdot \ln(e) > -\ln(0.5) \approx 0.693$$

Da $\lambda = n \cdot p$, folgt:

$$n \cdot p > 0.693$$
$$n > \frac{0.693}{p} = \frac{0.693}{0.02} \approx 34.65$$