Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

2. Semantik

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

17. April 2025
Leipzig

In der letzten Vorlesung

Mengenlehre

Syllogismen

Syntax der Aussagenlogik

Rekursive Funktionen

Strukturelle Induktion

Fahrplan für diese Vorlesung

Interpretationen und Modelle
Wahrheitswertetabelle
Erfüllbarkeit, Falsifizierbarkeit und mehr
Koinzidenzlemma

Achtung: Ab heute folgende Klammerkonventionen

1. äußerste Klammern können weggelassen werden, d.h.

   $A_1 \wedge (A_2 \vee A_3)$ statt $(A_1 \wedge (A_2 \vee A_3))$
   $A_1 \wedge A_2 \vee A_3$ ist nicht zulässig

2. innerer Klammerwegfall bei iterierter Konj./Disj., d.h.

   $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee A_4$ statt $(A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3)) \vee A_4$
   $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee A_4$ statt $((A_1 \wedge A_2) \wedge A_3) \vee A_4$

   $\Rightarrow$ Nicht eindeutig, aber ...

Semantik (der Junktoren)

- Syntax beschreibt Gestalt der Formeln
- Aussagen sind sprachliche Gebilde die entweder wahr (1) oder falsch (0) sind (Zweiwertigkeit)
- Wahrheitswert von komplexen Formeln ergibt sich aus Wahrheitswerten der Teilformeln (Wahrheitsfunktionalität)
  - Negation (1-stellig) $f_\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$ (Nicht)

	$f_\neg^1$	$f_\neg^2$	$f_\neg^3$	$f_\neg^4$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Welche Funktion sollte es sein?

Semantik (der Junktoren)

- Syntax beschreibt Gestalt der Formeln
- Aussagen sind sprachliche Gebilde die entweder wahr (1) oder falsch (0) sind (Zweiwertigkeit)
- Wahrheitswert von komplexen Formeln ergibt sich aus Wahrheitswerten der Teilformeln (Wahrheitsfunktionalität)
  - Negation (1-stellig) $f_\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$ (Nicht)

	$f_\neg^1$	$f_\neg^2$	$f_\neg^3$	$f_\neg^4$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

(Wahrheitswert von) $\neg\phi$ ist wahr gdw.
(Wahrheitswert von) ϕ ist falsch.

Semantik (der Junktoren)

- Syntax beschreibt Gestalt der Formeln
- Aussagen sind sprachliche Gebilde die entweder wahr (1) oder falsch (0) sind (Zweiwertigkeit)
- Wahrheitswert von komplexen Formeln ergibt sich aus Wahrheitswerten der Teilformeln (Wahrheitsfunktionalität)
    - Konjunktion (2-stellig) $f_\wedge : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ (Und)

		$f_\wedge^1$	$f_\wedge^2$	$f_\wedge^3$	$f_\wedge^4$	$f_\wedge^5$	$f_\wedge^6$	$f_\wedge^7$	$f_\wedge^8$	$f_\wedge^9$	$f_\wedge^{10}$	$f_\wedge^{11}$	$f_\wedge^{12}$	$f_\wedge^{13}$	$f_\wedge^{14}$	$f_\wedge^{15}$	$f_\wedge^{16}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Welche Funktion sollte es sein?

Semantik (der Junktoren)

- Syntax beschreibt Gestalt der Formeln
- Aussagen sind sprachliche Gebilde die entweder wahr (1) oder falsch (0) sind (Zweiwertigkeit)
- Wahrheitswert von komplexen Formeln ergibt sich aus Wahrheitswerten der Teilformeln (Wahrheitsfunktionalität)
  - Konjunktion (2-stellig) $f_\wedge : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ (Und)

		$f^1_\wedge$	$f^2_\wedge$	$f^3_\wedge$	$f^4_\wedge$	$f^5_\wedge$	$f^6_\wedge$	$f^7_\wedge$	$f^8_\wedge$	$f^9_\wedge$	$f^{10}_\wedge$	$f^{11}_\wedge$	$f^{12}_\wedge$	$f^{13}_\wedge$	$f^{14}_\wedge$	$f^{15}_\wedge$	$f^{16}_\wedge$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

(Der Wahrheitswert von) $\phi \wedge \psi$ ist wahr gdw.
(die Wahrheitswerte von) ϕ und ψ wahr sind.

Semantik (der Junktoren)

- Syntax beschreibt Gestalt der Formeln
- Aussagen sind sprachliche Gebilde die entweder wahr (1) oder falsch (0) sind (Zweiwertigkeit)
- Wahrheitswert von komplexen Formeln ergibt sich aus Wahrheitswerten der Teilformeln (Wahrheitsfunktionalität)
  - Disjunktion (2-stellig) $f_\vee : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ (Oder)

		$f_\vee^1$	$f_\vee^2$	$f_\vee^3$	$f_\vee^4$	$f_\vee^5$	$f_\vee^6$	$f_\vee^7$	$f_\vee^8$	$f_\vee^9$	$f_\vee^{10}$	$f_\vee^{11}$	$f_\vee^{12}$	$f_\vee^{13}$	$f_\vee^{14}$	$f_\vee^{15}$	$f_\vee^{16}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Welche Funktion sollte es sein?

Semantik (der Junktoren)

- Syntax beschreibt Gestalt der Formeln
- Aussagen sind sprachliche Gebilde die entweder wahr (1) oder falsch (0) sind (Zweiwertigkeit)
- Wahrheitswert von komplexen Formeln ergibt sich aus Wahrheitswerten der Teilformeln (Wahrheitsfunktionalität)
  - Disjunktion (2-stellig) $f_\vee : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ (Oder)

		$f_\vee^1$	$f_\vee^2$	$f_\vee^3$	$f_\vee^4$	$f_\vee^5$	$f_\vee^6$	$f_\vee^7$	$f_\vee^8$	$f_\vee^9$	$f_\vee^{10}$	$f_\vee^{11}$	$f_\vee^{12}$	$f_\vee^{13}$	$f_\vee^{14}$	$f_\vee^{15}$	$f_\vee^{16}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

(Der Wahrheitswert von) $\phi \vee \psi$ ist falsch gdw.
(die Wahrheitswerte von) ϕ und ψ falsch sind.

Semantik (rekursiv)

Eine Abbildung $I : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ heißt Belegung/Interpretation.

(Wahrheitswerte für atomare Aussagen)

Wir setzen $\mathcal{B} = \{I \mid I : \mathcal{A} \to \{0, 1\}\}$ (Menge aller Interpretationen)

Definition

Für gegebene Interpretation $I : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ definieren wir

$I^* : \mathcal{F} \to \{0, 1\}$ (Wahrheitswerte für alle Formeln)

1. $I^* : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ mit $A \mapsto I^*(A) = I(A)$
2. $I^*(\neg\phi) = f_\neg(I^*(\phi))$, d.h.
$$I^*(\neg\phi) = 1 \text{ gdw. } I^*(\phi) = 0$$
3. $I^*(\phi \circ \psi) = f_\circ(I^*(\phi), I^*(\psi))$ für $\circ \in \{\wedge, \vee\}$, d.h.
$$I^*(\phi \wedge \psi) = 1 \text{ gdw. } I^*(\phi) = I^*(\psi) = 1,$$
$$I^*(\phi \vee \psi) = 1 \text{ gdw. } I^*(\phi) + I^*(\psi) \geq 1$$

Semantik (rekursiv)

Anmerkungen:

- meist schreiben wir I für I^*, d.h.

$$I(A_1 \wedge (A_2 \vee \neg A_3)) \text{ anstatt } I^*(A_1 \wedge (A_2 \vee \neg A_3))$$

- meist geben wir I nur partiell (nämlich für $s(\phi) \subseteq \mathcal{A}$) an, z.B.

$$I(A_1) = 1,\ I(A_2) = 0,\ I(A_3) = 0 \text{ für } \phi = A_1 \wedge (A_2 \vee \neg A_3)$$

(siehe Koinzidenzlemma)

- meist schreiben wir nicht

$$\begin{aligned} I(A_1 \wedge (A_2 \vee \neg A_3)) &= f_\wedge(I(A_1), I(A_2 \vee \neg A_3)) \\ &= f_\wedge(I(A_1), f_\vee(I(A_2), I(\neg A_3))) \\ &= f_\wedge(I(A_1), f_\vee(I(A_2), f_\neg(I(A_3)))) \\ &= f_\wedge(1, f_\vee(0, f_\neg(0))) \\ &= f_\wedge(1, f_\vee(0, 1)) \\ &= f_\wedge(1, 1) \\ &= 1, \text{ sondern} \end{aligned}$$

$$I(A_1 \wedge (A_2 \vee \neg A_3)) = 1.$$

Wahrheitswertetabellen

Zur Darstellung “aller” Interpretation benutzen wir Wahrheitswertetabellen

A_1	A_2	A_3	$\neg A_3$	$A_2 \vee \neg A_3$	$A_1 \wedge (A_2 \vee \neg A_3)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

Hinweis:

- $|s(\phi)| = n$ ergibt 2^n Zeilen (relevante part. Interpretationen)
- Anordnung der Interpretation in aufsteigender Reihenfolge

Hörsaalaufgabe

Vervollständigen Sie die Wahrheitswertetabelle. Bei Fragen konsultieren Sie die Person rechts oder links von Ihnen. (2 min)

A_1	A_2	$\neg A_2$	$A_1 \lor \neg A_2$	$\neg(A_1 \lor \neg A_2)$
0	0	1	1	0
0	1	0	0	
1	0	1		
1	1			

Hörsaalaufgabe

Vervollständigen Sie die Wahrheitswertetabelle. Bei Fragen konsultieren Sie die Person rechts oder links von Ihnen. (2 min)

A_1	A_2	$\neg A_2$	$A_1 \vee \neg A_2$	$\neg(A_1 \vee \neg A_2)$
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0

Modellbegriff

Eine Interpretation I heißt Modell von ϕ, sofern $I(\phi) = 1$.

Wir setzen $Mod(\phi) = \{I \in \mathcal{B} \mid I \text{ ist Modell von } \phi\}$

(Menge der Modelle)

A_1	A_2	A_3	$\neg A_3$	$A_2 \vee \neg A_3$	$A_1 \wedge (A_2 \vee \neg A_3)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

Eine Interpretation I mit $I(A_1) = 1$, $I(A_2) = 0$ und $I(A_3) = 0$ ist Modell von $A_1 \wedge (A_2 \vee \neg A_3)$. Also, $I \in Mod(A_1 \wedge (A_2 \vee \neg A_3))$.

Modellbegriff

Eine Interpretation I heißt Modell von ϕ, sofern $I(\phi) = 1$.

Wir setzen $Mod(\phi) = \{I \in \mathcal{B} \mid I \text{ ist Modell von } \phi\}$

(Menge der Modelle)

A_1	A_2	A_3	$\neg A_3$	$A_2 \vee \neg A_3$	$A_1 \wedge (A_2 \vee \neg A_3)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

Modelle von $A_1 \wedge (A_2 \vee \neg A_3)$.

Entscheidungsprobleme

Definition (Auswertungsproblem)

Gegeben: Formel $\phi \in \mathcal{F}$, Interpretation $I \in \mathcal{B}$.

Frage: Gilt $I \in Mod(\phi)$?

Satz: Auswertungsproblem ist effizient lösbar - sogar in Linearzeit.

- Beweis siehe VL “Berechenbarkeit”
- Argumentationslinie:
  - jede Formel ϕ der Länge n besitzt maximal n Junktoren
  - jeder Junktor $(\wedge, \vee, \neg)$ wird durch die entsprechende Boolsche Funktion $(f_\wedge, f_\vee, f_\neg)$ in konstanter Zeit ausgewertet

Erfüllbarkeit, Tautologien und Co.

Eine Formel ϕ heißt

erfüllbar,	falls $Mod(\phi) \neq \emptyset$	(mind. 1 Modell)
unerfüllbar,	falls $Mod(\phi) = \emptyset$	(kein Modell)
falsifizierbar,	falls $Mod(\phi) \neq \mathcal{B}$	(nicht alles Modelle)
tautologisch,	falls $Mod(\phi) = \mathcal{B}$	(nur Modelle)
kontingent,	falls $\emptyset \subset Mod(\phi) \subset \mathcal{B}$	(erf. und fals.)

Beispiele:

1. $A_1 \wedge \neg A_2$
2. $A_1 \vee \neg A_1$

   Ausführlich. Für alle $I \in \mathcal{B}$ gilt:
   $I(A_1 \vee \neg A_1) = f_\vee(I(A_1), I(\neg A_1)) = f_\vee(I(A_1), f_\neg(I(A_1))) = 1$,
   da $I(A_1) \neq f_\neg(I(A_1))$ und somit entweder $f_\vee(0,1) = 1$ oder $f_\vee(1,0) = 1$

Entscheidungsprobleme

Definition (Erfüllbarkeitsproblem (SAT))

Gegeben: Eine Formel $\phi \in \mathcal{F}$.

Frage: Ist ϕ erfüllbar?

Definition (Tautologieproblem)

Gegeben: Eine Formel $\phi \in \mathcal{F}$.

Frage: Ist ϕ eine Tautologie?

Es gilt (Reduktionen):

- ϕ falsifizierbar gdw. $\neg\phi$ erfüllbar
- ϕ unerfüllbar gdw. $\neg\phi$ tautologisch

Koinzidenzlemma

- besagt: Auswertung einer Formel hängt nur von der Belegung ihrer atomaren Aussagen ab
- zentral für die Aussagenlogik
- rechtfertigt Wahrheitswertetabellen

Lemma

Gegeben Formel $\phi \in \mathcal{F}$. Für alle Interpretationen $I_1, I_2 \in \mathcal{B}$ gilt: Wenn $I_1(A) = I_2(A)$ für alle $A \in s(\phi)$, dann schon $I_1(\phi) = I_2(\phi)$.

Koinzidenzlemma

Lemma

Gegeben Formel $\phi \in \mathcal{F}$. Für alle Interpretationen $I_1, I_2 \in \mathcal{B}$ gilt: Wenn $I_1(A) = I_2(A)$ für alle $A \in s(\phi)$, dann schon $I_1(\phi) = I_2(\phi)$.

(Eigenschaft $E(\phi)$)

Beweis:

1. Sei $\phi = A$ atomar. Offensichtlich gilt $s(\phi) = \{A\}$. Somit $I_1(\phi) = I_1(A) = I_2(A) = I_2(\phi)$.
2. Gelte $E(\phi)$. Per Definition ist $s(\phi) = s(\neg\phi)$. Folglich:
$$I_1(\neg\phi) = f_\neg(I_1(\phi)) =^{E(\phi)} f_\neg(I_2(\phi)) = I_2(\neg\phi).$$
3. Gelte $E(\phi)$, $E(\psi)$. Für $\circ \in \{\vee, \wedge\}$ ist $s(\phi \circ \psi) = s(\phi) \cup s(\psi)$. Somit, wenn I_1 und I_2 auf $s(\phi \circ \psi)$ übereinstimmen, dann auch auf $s(\phi)$ und $s(\psi)$. Es gilt:
$$I_1(\phi \circ \psi) = f_\circ(I_1(\phi), I_1(\psi)) =^{IV} f_\circ(I_2(\phi), I_2(\psi)) = I_2(\phi \circ \psi)$$

$\square$

Abkürzungen

Wir schreiben:

$\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i$	für	$\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n$	(iterierte Konjunktion)
$\bigvee_{i=1}^{n} \phi_i$	für	$\phi_1 \vee \ldots \vee \phi_n$	(iterierte Disjunktion)
$\bot$	für	$A_1 \wedge \neg A_1$	(Falsum)
$\top$	für	$\neg\bot$	(Verum)
$\phi \rightarrow \psi$	für	$\neg\phi \vee \psi$	(Implikation)
$\phi \leftrightarrow \psi$	für	$(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$	(Biimplikation)

Abkürzungen: Induzierte Semantik

$\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i$ für $\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n$ (iterierte Konjunktion)

Es gilt: $I\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i\right) = 1$ gdw. $I(\phi_1) = \ldots = I(\phi_n) = 1$

$\bigvee_{i=1}^{n} \phi_i$ für $\phi_1 \vee \ldots \vee \phi_n$ (iterierte Disjunktion)

Es gilt: $I\left(\bigvee_{i=1}^{n} \phi_i\right) = 1$ gdw. $I(\phi_1) + \ldots + I(\phi_n) \geq 1$

$\bot$ für $A_1 \wedge \neg A_1$ (Falsum)

Für alle $I \in \mathcal{B}$ gilt: $I(\bot) = 0$ (immer falsch)

$\top$ für $\neg\bot$ (Verum)

Für alle $I \in \mathcal{B}$ gilt: $I(\top) = 1$ (immer wahr)

Abkürzungen: Induzierte Semantik

- Implikation: $\phi \to \psi$ für $\neg\phi \vee \psi$

$$f_{\to} : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$$

		f^1	$f_\wedge$	f^3	f^4	f^5	f^6	f^7	$f_\vee$	f^9	f^{10}	f^{11}	f^{12}	f^{13}	f^{14}	f^{15}	f^{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Welche Funktion ist es?

$I(\phi \to \psi) = I(\neg\phi \vee \psi) = f_\vee(I(\neg\phi), I(\psi)) = f_\vee(f_\neg(I(\phi)), I(\psi))$, d.h.
$I(\phi \to \psi) = 0$, falls $f_\neg(I(\phi)) = I(\psi) = 0$ bzw. $I(\phi) = 1$ und $I(\psi) = 0$

Abkürzungen: Induzierte Semantik

- Implikation: $\phi \to \psi$ für $\neg\phi \vee \psi$ (wenn, dann)

$$f_{\to} : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$$

		f^1	$f_\wedge$	f^3	f^4	f^5	f^6	f^7	$f_\vee$	f^9	f^{10}	f^{11}	f^{12}	f^{13}	$f_\to$	f^{15}	f^{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$\phi \to \psi$ ist falsch gdw. ϕ wahr ist und ψ falsch

Wichtig: Wahrheit von $\phi \to \psi$ garantiert nicht,

1. inhaltlichen oder kausalen Zusammenhang, z.B.
   "Die Erde ist rund." $\to$ "Prof. Obergfell ist Rektorin."

Abkürzungen: Induzierte Semantik

- Implikation: $\phi \rightarrow \psi$ für $\neg\phi \vee \psi$ (wenn, dann)

$$f_{\rightarrow} : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

		f^1	$f_\wedge$	f^3	f^4	f^5	f^6	f^7	$f_\vee$	f^9	f^{10}	f^{11}	f^{12}	f^{13}	$f_\rightarrow$	f^{15}	f^{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$\phi \rightarrow \psi$ ist falsch gdw. ϕ wahr ist und ψ falsch

Wichtig: Wahrheit von $\phi \rightarrow \psi$ garantiert nicht,

2. die Wahrheit von ϕ und ψ, z.B.
   "Die Erde ist eine Scheibe." → "Prof. Baumann ist Rektor."

Abkürzungen: Induzierte Semantik

- Biimplikation: $\phi \leftrightarrow \psi$ für $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$

$$f_{\leftrightarrow} : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$$

		f^1	$f_\wedge$	f^3	f^4	f^5	f^6	f^7	$f_\vee$	f^9	f^{10}	f^{11}	f^{12}	f^{13}	$f_\to$	f^{15}	f^{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Welche Funktion ist es?

Abkürzungen: Induzierte Semantik

- Biimplikation: $\phi \to \psi$ für $\neg\phi \lor \psi$ (genau dann, wenn)

$$f_{\leftrightarrow} : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$$

		f^1	$f_\wedge$	f^3	f^4	f^5	f^6	f^7	$f_\vee$	f^9	$f_\leftrightarrow$	f^{11}	f^{12}	f^{13}	$f_\rightarrow$	f^{15}	f^{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$\phi \leftrightarrow \psi$ ist wahr gdw. ϕ und ψ evaluieren gleich

Anwendung: Detektivarbeit

Anton, **B**ob und **C**lara spielen Fußball. Plötzlich durchfährt der Ball eine Fensterscheibe. Sie geht zu Bruch.

Die Kinder sagen folgendes aus:

Anton sagt: *Bob war es nicht.*
Bob sagt: *Clara war es.*
Clara sagt: *Ich war es.*

Wir wissen, daß genau ein Kind die Wahrheit sagt. Wer hat den Ball geschossen?

Stehe W_I für "I sagt die Wahrheit" und T_I für "I ist der Täter".
Wir modellieren:

Anwendung: Detektivarbeit

Anton, **B**ob und **C**lara spielen Fußball. Plötzlich durchfährt der Ball eine Fensterscheibe. Sie geht zu Bruch.

Die Kinder sagen folgendes aus:

Anton sagt: *Bob war es nicht.*
Bob sagt: *Clara war es.*
Clara sagt: *Ich war es.*

Wir wissen, daß genau ein Kind die Wahrheit sagt. Wer hat den Ball geschossen?

Stehe W_I für "I sagt die Wahrheit" und T_I für "I ist der Täter". Wir modellieren:

$$\phi_1 = (W_A \wedge \neg W_B \wedge \neg W_C) \vee (\neg W_A \wedge W_B \wedge \neg W_C) \vee (\neg W_A \wedge \neg W_B \wedge W_C)$$

Anwendung: Detektivarbeit

Anton, **B**ob und **C**lara spielen Fußball. Plötzlich durchfährt der Ball eine Fensterscheibe. Sie geht zu Bruch.

Die Kinder sagen folgendes aus:

Anton sagt: *Bob war es nicht.*
Bob sagt: *Clara war es.*
Clara sagt: *Ich war es.*

Wir wissen, daß genau ein Kind die Wahrheit sagt. Wer hat den Ball geschossen?

Stehe W_I für "I sagt die Wahrheit" und T_I für "I ist der Täter". Wir modellieren:

$$\phi_1 = (W_A \wedge \neg W_B \wedge \neg W_C) \vee (\neg W_A \wedge W_B \wedge \neg W_C) \vee (\neg W_A \wedge \neg W_B \wedge W_C)$$

$$\phi_2 = T_A \vee T_B \vee T_C$$

Anwendung: Detektivarbeit

Anton, **B**ob und **C**lara spielen Fußball. Plötzlich durchfährt der Ball eine Fensterscheibe. Sie geht zu Bruch.

Die Kinder sagen folgendes aus:

Anton sagt: *Bob war es nicht.*
Bob sagt: *Clara war es.*
Clara sagt: *Ich war es.*

Wir wissen, daß genau ein Kind die Wahrheit sagt. Wer hat den Ball geschossen?

Stehe W_I für "I sagt die Wahrheit" und T_I für "I ist der Täter". Wir modellieren:

$$\phi_1 = (W_A \wedge \neg W_B \wedge \neg W_C) \vee (\neg W_A \wedge W_B \wedge \neg W_C) \vee (\neg W_A \wedge \neg W_B \wedge W_C)$$
$$\phi_2 = T_A \vee T_B \vee T_C$$
$$\phi_3 = W_A \leftrightarrow \neg T_B$$

Anwendung: Detektivarbeit

Anton, **B**ob und **C**lara spielen Fußball. Plötzlich durchfährt der Ball eine Fensterscheibe. Sie geht zu Bruch.

Die Kinder sagen folgendes aus:

Anton sagt: *Bob war es nicht.*
Bob sagt: *Clara war es.*
Clara sagt: *Ich war es.*

Wir wissen, daß genau ein Kind die Wahrheit sagt. Wer hat den Ball geschossen?

Stehe W_I für “I sagt die Wahrheit” und T_I für “I ist der Täter”. Wir modellieren:

$$\phi_1 = (W_A \wedge \neg W_B \wedge \neg W_C) \vee (\neg W_A \wedge W_B \wedge \neg W_C) \vee (\neg W_A \wedge \neg W_B \wedge W_C)$$

$$\phi_2 = T_A \vee T_B \vee T_C$$

$$\phi_3 = W_A \leftrightarrow \neg T_B \qquad \phi_4 = W_B \leftrightarrow T_C$$

Anwendung: Detektivarbeit

Anton, **B**ob und **C**lara spielen Fußball. Plötzlich durchfährt der Ball eine Fensterscheibe. Sie geht zu Bruch.

Die Kinder sagen folgendes aus:

Anton sagt: *Bob war es nicht.*
Bob sagt: *Clara war es.*
Clara sagt: *Ich war es.*

Wir wissen, daß genau ein Kind die Wahrheit sagt. Wer hat den Ball geschossen?

Stehe W_I für "*I* sagt die Wahrheit" und T_I für "*I* ist der Täter". Wir modellieren:

$$\phi_1 = (W_A \wedge \neg W_B \wedge \neg W_C) \vee (\neg W_A \wedge W_B \wedge \neg W_C) \vee (\neg W_A \wedge \neg W_B \wedge W_C)$$

$$\phi_2 = T_A \vee T_B \vee T_C$$

$$\phi_3 = W_A \leftrightarrow \neg T_B \qquad \phi_4 = W_B \leftrightarrow T_C \qquad \phi_5 = W_C \leftrightarrow T_C$$

Anwendung: Detektivarbeit

Anton, **B**ob und **C**lara spielen Fußball. Plötzlich durchfährt der Ball eine Fensterscheibe. Sie geht zu Bruch.

Die Kinder sagen folgendes aus:

Anton sagt: *Bob war es nicht.*
Bob sagt: *Clara war es.*
Clara sagt: *Ich war es.*

Wir wissen, daß genau ein Kind die Wahrheit sagt. Wer hat den Ball geschossen?
Wir modellieren:

$$\phi_1 = (W_A \wedge \neg W_B \wedge \neg W_C) \vee (\neg W_A \wedge W_B \wedge \neg W_C) \vee (\neg W_A \wedge \neg W_B \wedge W_C)$$

$$\phi_2 = T_A \vee T_B \vee T_C$$

$$\phi_3 = W_A \leftrightarrow \neg T_B \qquad \phi_4 = W_B \leftrightarrow T_C \qquad \phi_5 = W_C \leftrightarrow T_C$$

Es gilt: $I \in Mod\left(\bigwedge_{i=1}^{5} \phi_i\right)$ gdw. I löst das Rätsel

Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

2. Semantik

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

17. April 2025
Leipzig