Hausaufgabenblatt 6 Erik Thun 3794446, Paula Ewald 3706225, Tim Schlenstedt 3797524

15/16

Aufg 1

3/4

c) $\mu = 100$, $\sigma^2 = 16$, $\mathbb{E}(X) = 100$, $Var(X) = 16$

$\mathbb{P}(X \leq 95) = \Phi\left(\frac{95-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(-1{,}25) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$ ✓

$$\mathbb{P}(95 \leq X \leq 110) = \Phi\left(\frac{110-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{95-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= \Phi(2{,}5) - 0{,}1056$$
$$= 0{,}9938 - 0{,}1056$$
$$= 0{,}8882$$ ✓

d) 0,9 - Quantil

$\gamma = 0{,}9 \quad z_\gamma = 1{,}28155$

$z_\gamma = \frac{t-\mu}{\sigma} \iff z_\gamma \cdot \sigma + \mu = t$

$t = 1{,}28155 \cdot 4 + 100 = 5{,}1262 + 100 = 105{,}1262$ ✓

Aufg 2

4/4

a) $\mu = 1000 \quad \sigma = 50$

Sei $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \quad F(Y) = \Phi(Y)$

ges: $\mathbb{P}(982 \leq X \leq 1050)$

$$\mathbb{P}(982 \leq X \leq 1050) = \Phi\left(\frac{1050-1000}{50}\right) - \Phi\left(\frac{982-1000}{50}\right)$$
$$= \Phi(1) - \Phi\left(-\frac{36}{100}\right)$$
$$= 0{,}8413 - (1 - 0{,}6406)$$
$$= 0{,}8413 - 0{,}3594$$
$$= 0{,}4819$$ ✓

b) 0,1 - Quantil

$0{,}1 = 1 - 0{,}9 = 1 - \Phi(1{,}28155) = \Phi(-1{,}28155) = \Phi(z)$

$z = \frac{t-\mu}{\sigma} \iff z \cdot \sigma + \mu = t$

$t = (-1{,}28155) \cdot 50 + 1000 = -64{,}0775 + 1000 = 935{,}9225$ ✓

Es sagt aus, dass 10% der Geburtsgewichte kleiner gleich ca. 935,9g sind. ✓

c) $\mathbb{P}(\overset{\mathbb{E}(X)}{\downarrow}1000 \leq X \leq 1000 + z) \overset{!}{=} 0{,}475$

$$0{,}475 = \Phi\left(\frac{1000+z-1000}{50}\right) - \Phi\left(\frac{1000-1000}{50}\right)$$

$$0{,}475 = \Phi\left(\frac{z}{50}\right) - \Phi(0)$$

$$0{,}475 = \Phi\left(\frac{z}{50}\right) - 0{,}5$$

$$\Leftrightarrow 0{,}975 = \Phi\left(\frac{z}{50}\right)$$

Aus Tabelle $0{,}975 = \Phi(1{,}96)$

$\Rightarrow \frac{z}{50} = 1{,}96 \qquad \Leftrightarrow z = 98$

Das Intervall ist $[902, 1098]$.

Aufg 3

a) $n_1 = 10 \qquad n_2 = 20 \qquad$ ~~Kopf = 4~~ ~~Zahl = 0~~

4/4

$$\mathbb{P}(X = n_1 \cdot 0{,}6) = \mathbb{P}(X=6) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\binom{10}{10} + \binom{10}{9} + \binom{10}{8} + \binom{10}{7}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{1024} \cdot (1+10+45+120)$$

$$= 1 - \frac{1}{1024} \cdot 176$$

$$= 1 - \frac{11}{64}$$

$$= \frac{53}{64} \approx 0{,}828$$

$$\mathbb{P}(X = n_2 \cdot 0{,}6) = \mathbb{P}(X = 12) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \left(\binom{20}{20} + \binom{20}{19} + \binom{20}{18} + \binom{20}{17} + \binom{20}{16} + \binom{20}{15} + \binom{20}{14} + \binom{20}{13}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{1048576} \cdot (1+20+190+1140+4845+15504+38760+77520)$$

$$= 1 - \frac{1}{1048576} \cdot 137980$$

$$= \frac{227.649}{262.144} \approx 0{,}868$$

b) $\mathbb{E}_1(X) = \mu_1 = n_1 \cdot p = 10 \cdot 0{,}5 = 5 \qquad \sigma_1 = \sqrt{Var_1(X)} = n_1 \cdot p \cdot (1-p) = \sqrt{2{,}5}$

$\mathbb{E}_2(X) = \mu_2 = n_2 \cdot p = 10 \qquad \sigma_2 = \sqrt{Var_2(X)} = n_2 \cdot p \cdot (1-p) = \sqrt{5}$

$\mathbb{P}(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$\mathbb{P}(X \leq n_1 \cdot p = 6) = \Phi\left(\frac{6-5}{\sqrt{2{,}5}}\right) \approx \Phi(0{,}63) = 0{,}7357$

$\mathbb{P}(X \leq n_2 \cdot p = 12) = \Phi\left(\frac{12-10}{\sqrt{5}}\right) \approx \Phi(0{,}89) = 0{,}8133$

Aufgrund des ZGS ist X normalverteilt.

Aufg 4

Berechnung $(1-0{,}02)^x \geq 0{,}5$

$$0{,}98^x \leq 0{,}5 \quad | \log_{0{,}98}$$

$$x \leq \log_{98}(0{,}5)$$

$$x \leq 34{,}3096... \approx 34{,}31$$

Poissonapproximation: $\mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$ $\quad \lambda = n \cdot p$

$n = ?$, $p = 0{,}02$

mindestens 1 Erfolg $\Rightarrow 1 - \mathbb{P}(X=0)$

$$0{,}5 \geq 1 - \mathbb{P}(X=0) \overset{\text{Poisson-App.}}{\approx} 1 - \frac{(n \cdot 0{,}02)^0 \cdot e^{-n \cdot 0{,}02}}{0!}$$

$$= 1 - e^{-n \cdot 0{,}02}$$

$$0{,}5 \geq 1 - e^{-n \cdot 0{,}02} \quad |-1 \quad | \cdot (-1)$$

$$0{,}5 \leq e^{-n 0{,}02} \quad | \ln \quad | :(-0{,}02)$$

$$\frac{\ln(0{,}5)}{(-0{,}02)} \leq n$$

$$34{,}6573... \leq n$$

$$\approx 34{,}66 \leq n$$

Da man nur ganze Muscheln öffnen kann, muss man laut beiden 35 Muscheln öffnen.

Aufg 1

b) $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Y \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$