Logik
Serie 5

Nikita Emanuel John Fehér, 3793479
Erik Thun, 3794446

13. Juni 2025
Mittwoch 09:15-10:45 Keitsch, Jamie; Gruppe e

H 5-1. Terminduktion (2 Pkt.)
Gegeben eine Struktur $\mathfrak{A}$ und zwei Belegungen β und γ. Zeigen Sie per Terminduktion, daß für alle Terme $t \in T$: Falls $\beta|_{\text{var}}(t) = \gamma|_{\text{var}}(t)$, dann $\beta(t) = \gamma(t)$.

IA: $t = x$ (Variable)

$\text{var}(t) = \{x\}$, $\beta|_{\text{var}(t)} = \gamma|_{\text{var}(t)}$

$\Rightarrow \beta|_{\{x\}} = \gamma|_{\{x\}}$

$\Rightarrow \beta(x) = \gamma(x)$

$t = c$ (Konstante)

$\text{var}(t) = \emptyset \Rightarrow \beta(c) = c^{\mathfrak{A}} = \gamma(c)$

IV $t_1, \dots, t_n$

$\beta|_{\text{var}(t_i)} = \gamma|_{\text{var}(t_i)} \Rightarrow \beta(t_i) = \gamma(t_i)$

IS $t = f(t_1, \dots, t_n)$

$\text{var}(t) = \bigcup \text{var}(t_i) \Rightarrow \beta(t_i) = \gamma(t_i) \Rightarrow \beta(t) = \gamma(t)$

H 5-2. Erfüllbarkeit und Co. (3 Pkt.)

Kreuzen Sie in der Tabelle an, ob die betreffende Formel erfüllbar, falsifizierbar, unerfüllbar oder tautologisch ist.

Formel	Erfüllbar	Falsifizierbar	Unerfüllbar	Tautologisch
$\forall x P(x) \to \exists y P(y)$	X			X
$\forall x Q(x,x) \to \exists y \forall z Q(z,y)$	X	X		
$\forall x \neg P(x) \land \exists y P(f(y,y))$			X	

H 5-3. Modell und Widerlegung (5 Pkt.)

Kreuzen Sie in der Tabelle an, ob die betreffende Struktur $\mathfrak{A}$ ein Modell der Formel φ ist. Geben Sie im Falle einer Widerlegung eine falsifizierende Instanz an. Es gilt:

- $U^{\mathfrak{A}_1} = U^{\mathfrak{A}_2} = U^{\mathfrak{A}_3} = \mathbb{N}, c^{\mathfrak{A}_1} = c^{\mathfrak{A}_2} = c^{\mathfrak{A}_3} = 0, d^{\mathfrak{A}_1} = d^{\mathfrak{A}_2} = d^{\mathfrak{A}_3} = 1$
- $f^{\mathfrak{A}_1}(n,m) = \max(m,n), f^{\mathfrak{A}_2}(n,m) = n \cdot m, f^{\mathfrak{A}_3}(n,m) = n+1$

Formel	$\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{A}_2$	$\mathfrak{A}_3$
$\forall x(f(x,x) = x \to (x = c \vee x = d))$	x=2	X	X
$\forall x \exists y \exists z f(y,z) = x$	X	X	x=0

— $x = 2 \Rightarrow f(2,2) = 2 = x$ ✓

$\Rightarrow (x = c \vee x = d)$ muss auch wahr sein damit Implikation wahr

$\Rightarrow (2 \neq 0 \vee 2 \neq 1) \Rightarrow$ Falsch

— $f(y,z) = y+1$

$x = 0$

$x \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow x$ kann 0 sein

$\Rightarrow y+1 > 0$

$\Rightarrow y+1 \neq 0$

$\Rightarrow f(y,z) \neq 0 = x$

H 5-4. 3-elementige Universen (5 Pkt.)

a) Gegeben nachfolgende Folgerungsaussagen:

$$1)\quad \forall x \exists y R(x,y) \models \exists y \forall x R(x,y) \qquad \text{und} \qquad 2)\ \exists y \forall x R(x,y) \models \forall x \exists y R(x,y)$$

Geben Sie jeweils an, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Begründen Sie im Falschheitsfalle Ihre Antwort mit einer Struktur $\mathfrak{A}$ wobei $\left|U^{\mathfrak{A}}\right| = 3$ gilt.

b) Gegeben die folgenden beiden Formeln

$$1)\ \varphi := \forall x (f(x) \neq x \wedge f(f(f(x))) = x) \qquad \text{und} \qquad 2)\ \psi := \forall x (f(x) \neq x \wedge f(f(x)) = x)$$

Welche der Formeln ist durch eine Struktur $\mathfrak{A}$ mit $\left|U^{\mathfrak{A}}\right| = 3$ erfüllbar? Geben Sie im Erfüllbarkeitsfalle eine bezeugende Interpretation $f^{\mathfrak{A}}$ an bzw. begründen Sie kurz, warum eine solche Interpretation nicht existiert.

c) Geben Sie eine erfüllbare Formel ξ mit $s(\xi) = \{P^1, Q^1\}$ (ohne Verwendung des Gleichheitssymbols) an, sodaß für jedes Modell $(\mathfrak{A}, \beta)$ von ξ gilt: $\left|U^{\mathfrak{A}}\right| \geq 3$. Ohne Begründung!

a) 1) Falsch:

$U = \{a, b, c\}$, $R = \{(a,b), (b,c), (c,a)\}$

$\forall x \exists y R(x,y)$ gilt

$\exists y \forall x R(x,y)$ gilt nicht

a) 2) Wahr

b) 1) Erfüllbar Bsp: $U = \{0, 1, 2\}$

$f^{\mathfrak{A}}(0) = 1$

$f^{\mathfrak{A}}(1) = 2$

$f^{\mathfrak{A}}(2) = 1$

b) 2) nicht erfüllbar

$f(x) \neq x \Rightarrow f$ hat keinen „Fixpunkt"

$f(f(x)) = x \Rightarrow f(x) = x' \Rightarrow f(f(x)) = f(x') = x$

$\Rightarrow$ jedes element befindet sich in einen Zyklus der länge 2

$\Rightarrow$ da $|U^{\mathcal{A}}| = 3$ kann $f(f(x)) = x$ nicht für alle x gelten

$U = \{a, b, c)$

Fall 1 $\quad f(a) = b \Rightarrow f(b) = a$

Fall 1.1 $\quad f(c) = a \Rightarrow f(a) = c \quad \lightning_{f(a)=b}$

1.2. $\quad f(c) = b \Rightarrow f(b) = c \quad \lightning\ f(b) = a$

$\vdots$

c)

$$\varphi = \left(\forall x \left(\neg\left(P(x) \land Q(x)\right)\right) \land \left(\exists x \left(P(x)\right)\right) \land \left(\exists x \left(Q(x)\right)\right) \land \left(\exists x \left(\neg P(x) \land \neg Q(x)\right)\right)\right.$$

H 5-5. Semantische Äquivalenz (5 Pkt.)

Gegeben seien die folgenden drei Äquivalenzaussagen:

1. $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
2. $\exists x\varphi \rightarrow \psi \equiv \forall x(\varphi \rightarrow \psi)$ mit $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_{PL}$ und $x \notin \text{frei}(\psi)$
3. $\forall x \exists x\varphi \equiv \exists x\varphi$ mit $\varphi \in \mathcal{F}_{PL}$

Geben Sie im Äquivalenzfalle einen Beweis unter Verwendung der in VL7 angegebenen semantischen Äquivalenzen an. Falls die Äquivalenzaussage nicht gilt, geben Sie eine bezeugende Interpretation $(\mathfrak{A}, \beta)$ an.

1. Gilt nicht: $A = \{a, b\}$, $P^{\mathfrak{A}} = \{a\}$, $Q^{\mathfrak{A}} = \{b\}$

$\Rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$ ist Wahr

$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ ist Falsch

2. Gilt $\exists x \varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \exists x \varphi \vee \psi$ (implikation)

$\equiv \forall x \neg \varphi \vee \psi$ (De Morgansche Gesetze)

$\equiv \forall x (\neg \varphi \vee \psi)$ (Scopusverschiebung)

$\equiv \forall x (\varphi \rightarrow \psi)$ (Implikation)

3. Gilt: sei y eine Variable nicht in φ

$\Rightarrow \forall x \exists x \varphi \equiv \forall y \exists x \varphi$

$\psi := \exists x \varphi$, da y nicht in $\exists x \varphi$ frei vorkommt

$\Rightarrow$ (Scopusverschiebung) $\forall y \psi \equiv \psi$

$\Rightarrow \forall y (\exists x \varphi) \equiv \exists x \varphi$

$\Rightarrow \forall x \exists x \varphi \equiv \exists x \varphi$