Analysis [für Informatiker]
Übungsblatt 3

Nikita Emanuel John Fehér, 3793479
Erik Thun, 3794446

30. Oktober 2024
Mittwoch 11:15-12:45 Randig, Marvin Gruppe d;
Montag 15:15-16:45 Drigalla, Stefan Gruppe b

1) Finden Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die nachstehende Ungleichung lösen

$$\frac{3x+2}{5x+4} > \frac{7x+6}{9x+8}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{3x+2}{5x+4} &> \frac{7x+6}{9x+8} \\
\frac{3x+2}{5x+4} - \frac{7x+6}{9x+8} &> 0 \\
\frac{(3x+2)\cdot(9x+8)}{(5x+4)\cdot(9x+8)} - \frac{(7x+6)\cdot(5x+4)}{(9x+8)\cdot(5x+4)} &> 0 \\
\frac{(3x+2)\cdot(9x+8) - (7x+6)\cdot(5x+4)}{(5x+4)\cdot(9x+8)} &> 0 \\
\frac{(27x^2+42x+16) - (35x^2+58x+28)}{45x^2+76x+24} &> 0 \\
\frac{-8x^2-16x-12}{45x^2+76x+24} &> 0 \\
\frac{-8(x^2+2x+1.5)}{45x^2+76x+24} &> 0 \\
\frac{-8(x^2+2x+1.5)}{(9x+8)(5x+4)} &> 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} =& \frac{-8(x^2+2x+1.5)}{(9x+8)(5x+4)} \\
f(x) =& -8(x^2+2x+1.5) \\
0 =& -8(x^2+2x+1.5) && \mid : (-8) \\
0 =& x^2+2x+1.5 \\
\implies& f(x) \text{ hat keine Nullstellen} \\
g(x) =& (9x+8)(5x+4) \\
0 =& (9x+8)(5x+4) \\
x_1 =& -\frac{8}{9} \\
x_2 =& -\frac{4}{5} \\
\implies& g(x) \text{ hat 2 Nullstellen an } x = -\frac{8}{9} \text{ und } x = -\frac{4}{5}
\end{aligned}
$$

Unser Graph wird in drei regionen unterteilt: $[-\infty| -\frac{8}{9})$, $(-\frac{8}{9}| -\frac{4}{5})$ und $(-\frac{4}{5}|\infty]$

Wir testen in welchen der Regionen unsere anfangs aussage Wahr ist.

$$\frac{3x+2}{5x+4} > \frac{7x+6}{9x+8}$$

Region 1: $$\frac{3\cdot(-1)+2}{5\cdot(-1)+4} > \frac{7\cdot(-1)+6}{9\cdot(-1)+8}$$

$$1 > 1$$

Nicht Wahr

Region 2: $$\frac{3\cdot(-\frac{15}{18})+2}{5\cdot(-\frac{15}{18})+4} > \frac{7\cdot(-\frac{15}{18})+6}{9\cdot(-\frac{15}{18})+8}$$

$$\frac{\frac{-3\cdot15+2\cdot18}{18}}{\frac{-5\cdot15+4\cdot18}{18}} > \frac{\frac{-7\cdot15+6\cdot18}{18}}{\frac{-9\cdot15+8\cdot18}{18}}$$

$$\frac{-3\cdot15+2\cdot18}{-5\cdot15+4\cdot18} > \frac{-7\cdot15+6\cdot18}{-9\cdot15+8\cdot18}$$

$$\frac{-45+36}{-75+72} > \frac{-105+108}{-135+144}$$

$$+\frac{9}{3} > +\frac{3}{9}$$

$$3 > \frac{1}{3}$$

Wahr

Region 3: $$\frac{3\cdot1+2}{5\cdot1+4} > \frac{7\cdot1+6}{9\cdot1+8}$$

$$\frac{5}{9} > \frac{13}{17}$$

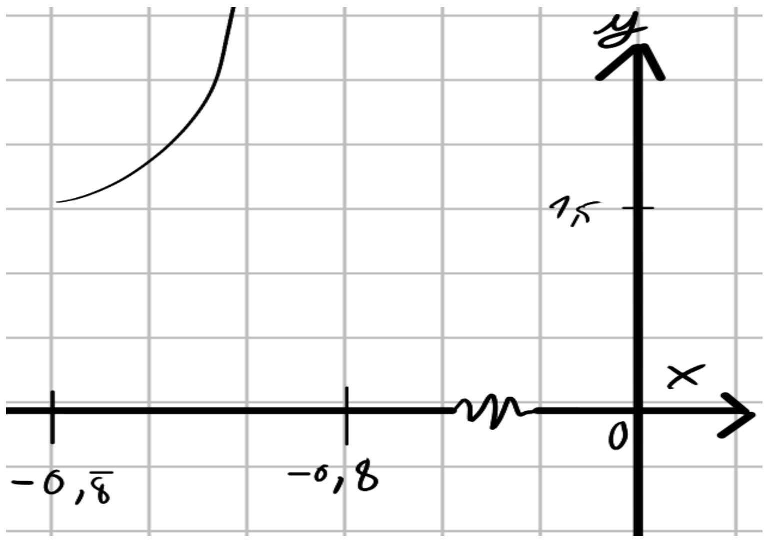
$$\frac{85}{153} > \frac{117}{135}$$

$$85 > 117$$

Nicht Wahr

Das bedeutet unsere Anfangsaussage $\frac{3x+2}{5x+4} > \frac{7x+6}{9x+8}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$: $-\frac{8}{9} < x < -\frac{4}{5}$ Wahr. $\square$

Versuchen Sie, Ihr Ergebnis auch graphisch zu veranschaulichen - die Genauigkeit einer Handskizze ist vollkommen ausreichend.


y
1,5
x
0
$-0,\overline{8}$
$-0,8$

2) Zeigen Sie: wenn $0 < x < y$ reelle Zahlen sind, dann

$$x < \frac{2xy}{x+y} < \frac{x+y}{2} < \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} < y$$

$$\begin{aligned}
x &< \frac{2xy}{x+y} && \mid \cdot (x+y) \\
x \cdot (x+y) &< 2xy && \\
xx + xy &< 2xy && \mid -xy \\
xx &< xy && \mid : x \\
x &< y &&
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{2xy}{x+y} &< \frac{x+y}{2} && \mid \cdot 2 \\
\frac{4xy}{x+y} &< x+y && \mid \cdot (x+y) \\
4xy &< (x+y)^2 && \mid \text{1. binomische Formel} \\
4xy &< x^2 + 2xy + y^2 && \mid -4xy \\
0 &< x^2 - 2xy + y^2 && \mid \text{2. binomische Formel} \\
0 &< (x-y)^2 && \text{ist wahr, siehe Korollar 2.23.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{x+y}{2} &< \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} && \mid ()^2 \\
\frac{(x+y)^2}{4} &< \frac{x^2+y^2}{2} && \mid \cdot 4 \\
x^2 + 2xy + y^2 &< 2(x^2+y^2) && \\
x^2 + 2xy + y^2 &< 2x^2 + 2y^2 && \mid -(x^2+y^2) \\
2xy &< x^2 + y^2 && \mid -2xy \\
0 &< x^2 - 2xy + y^2 && \mid \text{2. binomische Formel} \\
0 &< (x-y)^2 && \text{ist wahr, siehe Korollar 2.23.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} &< y && \mid ()^2 \\
\frac{x^2+y^2}{2} &< y^2 && \mid \cdot 2 \\
x^2 + y^2 &< 2y^2 && \mid -y^2 \\
x^2 &< y^2 && \mid \sqrt{()} \\
x &< y &&
\end{aligned}$$