

Aufgaben zur Lehrveranstaltung

## Berechenbarkeit

### Serie 4

---

- ▶ Die Übungsaufgaben werden in den Übungen ab dem 26.5.2025 besprochen.
  - ▶ Abgabeschluss für Hausaufgaben: **8.6.2025 um 22:00 Uhr** im Moodle-Kurs.
  - ▶ Sie können gern in 2er-Gruppen abgeben. Bitte schreiben Sie dazu die Namen und Matrikelnummern beider Personen auf das Blatt und reichen Sie Ihre Lösungen über einen Account ein. Einen Bonuspunkt erhalten Sie in dieser Serie bei Erreichen von 16 Punkten.
- 

#### Übungsaufgabe 4.1 (Ackermann & Co)

Wir betrachten die Ackermann-Funktion  $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , die wie folgt definiert ist:

$$a(x, y) = \begin{cases} y + 1 & \text{falls } x = 0 \\ a(x - 1, 1) & \text{falls } x \neq 0 \text{ und } y = 0 \\ a(x - 1, a(x, y - 1)) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für alle  $s \in \mathbb{N}$  gilt:

- (a)  $a(1, s) = s + 2$
- (b)  $a(2, s) = 2 \cdot s + 3$

#### Übungsaufgabe 4.2 (WHILE-Programme)

- (a) Geben Sie ein WHILE Programm  $P$  in *striker Syntax* an, welches die Funktion  $f : \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$  definiert durch

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n < 23 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

berechnet.

- (b) Sei  $M = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Definiere die charakteristische Funktion  $\chi_M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  durch

$$\chi_M(m) = \begin{cases} 1 & \exists n \in \mathbb{N}: n^2 = m \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

für alle  $m \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass  $\chi_M$  WHILE-berechenbar ist.

### Übungsaufgabe 4.3 (Berechenbarkeit)

Wir definieren die folgenden Mengen von Funktionen:

- $\mathbb{L} = \{f : \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N} \mid f \text{ ist LOOP-berechenbare Funktion}\}$
- $\mathbb{T} = \{f : \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N} \mid f \text{ ist total und WHILE-berechenbare Funktion}\}$
- $\mathbb{W} = \{f : \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N} \mid f \text{ ist WHILE-berechenbare Funktion}\}$
- $\mathbb{F} = \{f : \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N} \mid f \text{ ist eine Funktion}\}$

Beweisen Sie:

$$\emptyset \subsetneq \mathbb{L} \subsetneq \mathbb{T} \subsetneq \mathbb{W} \subsetneq \mathbb{F}$$

### Hausaufgabe 4.4 (Ackermann & Co)

Wir definieren eine Funktion  $h : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$  wie folgt:

$$h(n, a, b) = \begin{cases} b + 1 & \text{falls } n = 0 \\ a & \text{falls } n = 1 \text{ und } b = 0 \\ 0 & \text{falls } n = 2 \text{ und } b = 0 \\ 1 & \text{falls } n \geq 3 \text{ und } b = 0 \\ h(n - 1, a, h(n, a, b - 1)) & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle  $n, a, b \in \mathbb{N}$ . (Hinweis:  $h$  ist als *Hyper-Operator* bekannt.)

(a) Zeigen Sie, dass  $h(1, a, b) = a + b$ , für alle  $a, b \in \mathbb{N}$ . (4)

(b) Zeigen Sie, dass  $h(2, a, b) = a \cdot b$ , für alle  $a, b \in \mathbb{N}$ . (4)

### Hausaufgabe 4.5 (WHILE-Programme)

(a) Geben Sie ein WHILE Programm  $P$  in *striker Syntax* an, welches die Funktion  $f : \mathbb{N}^2 \dashrightarrow \mathbb{N}$  definiert durch

$$f(m, n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } m > n \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

berechnet. (4)

(b) Sei  $T = \{3^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion  $\chi_T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  von  $T$  WHILE-berechenbar ist. (4)

### Hausaufgabe 4.6 (Berechenbarkeit)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Die Funktion  $f$  aus Hausaufgabe 4.5 (a) ist LOOP-berechenbar.
- (b) Die Funktion  $f$  aus Hausaufgabe 4.5 (a) ist WHILE-berechenbar.
- (c) Die Funktion  $\chi_T$  aus Hausaufgabe 4.5 (b) ist LOOP-berechenbar.
- (d) Die Funktion  $h$  aus Hausaufgabe 4.4 ist LOOP-berechenbar.