UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Vorlesung 15 - Graphen

Diskrete Strukturen (WS 2024-25)

Łukasz Grabowski

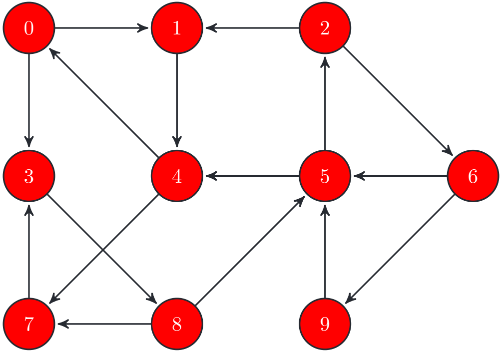
Mathematisches Institut

Übersicht

1. Graphen - Grndlegende Definitionen

- (Gerichteter) Graph ist eine Relation. Wir schreiben (E, K),
  - Menge E ist die Menge der **Ecken**
  - Menge $K \subset E \times E$ ist die MEnge der **Kanten**
- $(s, z) \in K$ heißt **Kante von s zu z** mit **Startecke** s undø**Zielecke** z

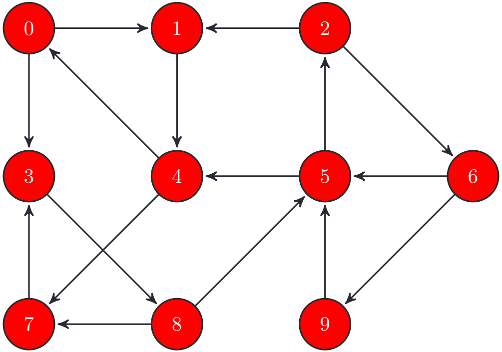
- Intuition:
  - (gerichteter) Graph = Menge von beliebig verbundenen (benannten) Punkten
  - **Ecke** = benannter Punkt
  - **Kante** = gerichtete Verbindung zwischen zwei Punkten



Graph $\mathcal{G} = (E, K)$ ist

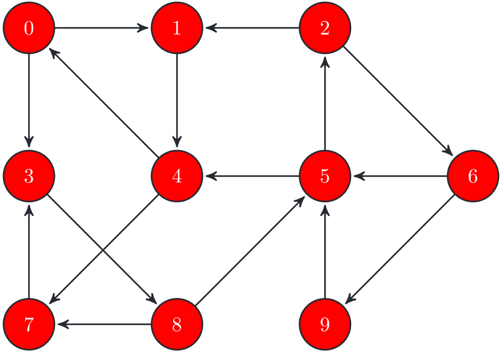
- **endlich**, falls E endlich
- **ungerichtet**, falls K symmetrisch
- **schlingenfrei**, falls K irreflexiv
- Notize:
  - hier nur endliche Graphen
  - $(s, s) \in K$ heißt **Schlinge**
  - Ungerichtete Graphen sind manchmal auch so definiiert: (E, K), wobei K ist eine Menge von Mengen der Form $\{x, y\}$, $x, y \in E$.

Beispiel: **nicht ungerichtet**, aber endlich und schlingenfrei

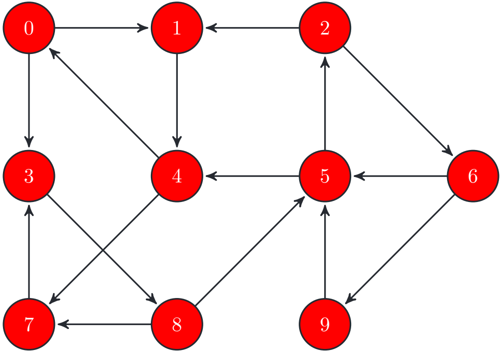


Seien $\mathcal{G} = (E, K)$ Graph und $e \in E$ Ecke

- **Vorgänger von e** sind $V_{\mathcal{G}}(e) := \{s \in E \colon (s, e) \in K\}$
  - (Ecken mit Kante zu e)
- **Nachfolger von e** sind $N_{\mathcal{G}}(e) := \{z \in E \mid (e, z) \in K\}$
  - (Ecken mit Kante von e)
- **Eingangsgrad von e** ist $\text{in-grad}_{\mathcal{G}}(e) := |V_{\mathcal{G}}(e)|$
  - (Anzahl Vorgänger)
- **Ausgangsgrad von e** ist $\text{aus-grad}_{\mathcal{G}}(e) := |N_{\mathcal{G}}(e)|$
  - (Anzahl Nachfolger)



- $V_{\mathcal{G}}(0) = \{4\}$
- $N_{\mathcal{G}}(0) = \{1, 3\}$
- $\text{in-grad}_{\mathcal{G}}(0) = 1$
- $\text{aus-grad}_{\mathcal{G}}(0) = 2$



- $V_{\mathcal{G}}(4) = \{1, 5\}$
- $N_{\mathcal{G}}(4) = \{0, 7\}$
- $\text{in-grad}_{\mathcal{G}}(4) = 2$
- $\text{aus-grad}_{\mathcal{G}}(4) = 2$

Satz

Sei $\mathcal{G} = (E, K)$ Graph.

$$|K| = \sum_{s \in E} \text{aus-grad}_{\mathcal{G}}(s)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} |K| &= |\{(s,z) \colon (s,z) \in K\}| \\ &= \sum_{s \in E} |\{(s,z) \colon (s,z) \in K\}| \\ &= \sum_{s \in E} |\{z \colon (s,z) \in K\}| \\ &= \sum_{s \in E} |N_{\mathcal{G}}(s)| = \sum_{s \in E} \text{aus-grad}_{\mathcal{G}}(s) \end{aligned}$$

□

Ähnlich haben wir auch die folgende Eigenschaft.

Satz

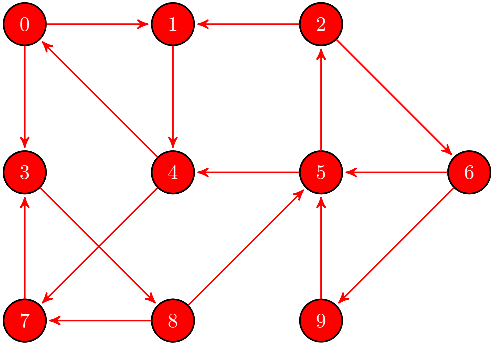
Sei $\mathcal{G} = (E, K)$ *Graph.*

$$|K| = \sum_{s \in E} \text{in-grad}_{\mathcal{G}}(s)$$

$\square$

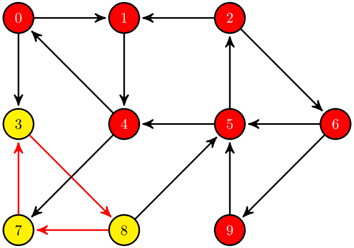
Sei (E, K) Graph, $n \in \mathbb{N}$ und $e_0, \ldots, e_n \in E$

- $(e_0 \to \cdots \to e_n)$ **Weg der Länge n von e_0 nach e_n**, falls $(e_i, e_{i+1}) \in K$ für alle $0 \leq i < n$
  - Weg = Sequenz von Nachfolgerecken
- $(e_0 \to \cdots \to e_n)$ **Pfad von e_0 nach e_n**, falls Weg mit $e_i \neq e_k$ für alle $0 \leq i < k < n$ und $e_n \notin \{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$
  - alle Ecken paarweise verschieden außer u.U. e_0 und e_n
- **Kreis** ist Pfad $(e_0 \to \cdots \to e_n)$ mit $e_0 = e_n$ und $n \geq 3$



- Weg von 6 nach 2: $(6 \to 5 \to 4 \to 7 \to 3 \to 8 \to 5 \to 2)$
  kein Pfad (wiederholt Ecke 5)
- **kein** Weg von 3 nach 0: $(3 \to 8 \to 9 \to 5 \to 2 \to 1 \to 0)$
- Pfad von 3 nach 3 und Kreis: $(3 \to 8 \to 7 \to 3)$

- Graph $\mathcal{G} = (E, K)$ ist **kreisfrei**, falls $\mathcal{G}$ keinen Kreis hat.
- Schlingen sind keine Kreise
- Pfad $(s \to z \to s)$ ist kein Kreis
- **nicht** kreisfrei



- Beidseitige (starke) Erreichbarkeit. Sei $\mathcal{G} = (E, K)$ Graph. Für alle $s, z \in E$ gilt $s \sim_{\mathcal{G}} z$ gdw.
  - Weg von s nach z existiert, und
  - Weg von z nach s existiert.
- Weg (e) der Länge 0 von e nach e für alle $e \in E$

Satz

Sei $\mathcal{G} = (E, K)$ Graph. Dann ist $\sim_{\mathcal{G}}$ eine Äquivalenzrelation auf E.

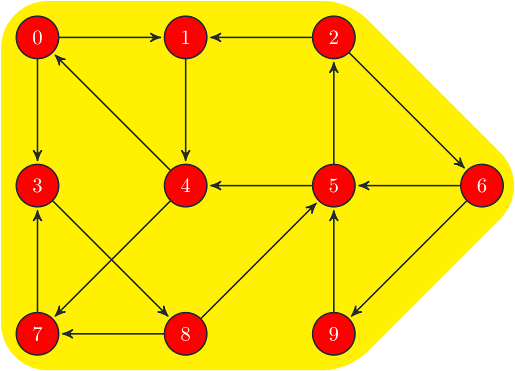
Beweis.

- **reflexiv:** Sei $e \in E$. Weg (e) von e nach e und damit $e \sim_{\mathcal{G}} e$
- **symmetrisch:** Sei $s \sim_{\mathcal{G}} z$
  - Dann existieren Weg von s nach z øund Weg von z nach s, also $z \sim_{\mathcal{G}} s$
- **transitiv:** Seien $s \sim_{\mathcal{G}} y$ und $y \sim_{\mathcal{G}} z$
  - Dann existieren Wege

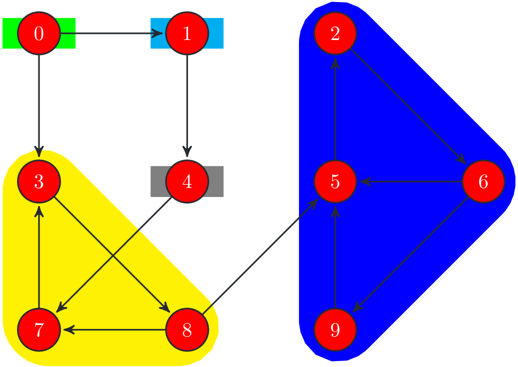
$$(s \to \cdots \to y) \quad (y \to \cdots \to z) \quad (z \to \cdots \to y) \quad (y \to \cdots \to s)$$

  - Also $(s \to \cdots \to y \to \cdots \to z)$ und $(z \to \cdots \to y \to \cdots \to s)$ sind Wege.
  - Damit $s \sim_{\mathcal{G}} z$

Die **starken Zusammenhangskomponenten** eines Graphs $\mathcal{G}$ sind die Äquivalenzklassen von $\sim_{\mathcal{G}}$



1 starke Zusammenhangskomponente $\{0, \ldots, 9\}$

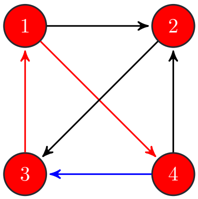


5 starke Zusammenhangskomponenten

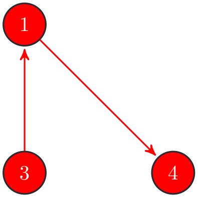
$$\{\{0\}, \{1\}, \{2, 5, 6, 9\}, \{3, 7, 8\}, \{4\}\}$$

Seien $\mathcal{G} = (E, K)$ und $\mathcal{G}' = (E', K')$ Graphen mit $E' \subseteq E$.

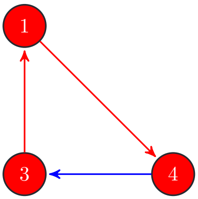
- $\mathcal{G}'$ **Teilgraph von** $\mathcal{G}$, falls $K' \subseteq K$
- $\mathcal{G}'$ **Untergraph von** $\mathcal{G}$, falls $K' = K \cap (E' \times E')$



Graph



Teilgraph
(kein Untergraph)



Untergraph

UNIVERSITÄT
LEIPZIG

VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT!

Łukasz Grabowski
Mathematisches Institut

grabowski@math.uni-leipzig.de