VL vom 18.11.24

<u>Def.</u>: Gegeben ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dann heißt eine Funktion $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ <u>Zufallsvariable</u>.

<u>Bsp.</u>: Zufallsexperiment $\xrightarrow{X}$ Cash

<u>Def.</u>: Sei X eine Zufallsvariable, so heißt

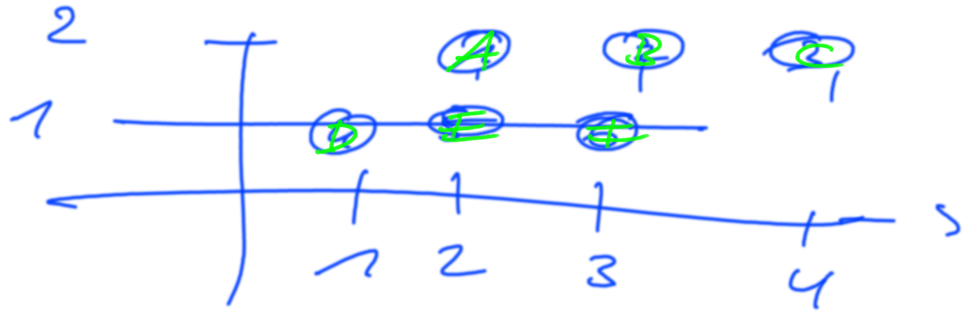
$$\mathbb{E}(X) := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\, \mathbb{P}(\{\omega\})$$

(mittlere "Auszahlung", mittleres Ergebnis von X)

<u>Erwartungswert von X</u>.

$\parallel$

Beispiel:



Experiment: Wähle eine der Kugeln zufällig mit jeweils gleicher W-keit.
($\rightsquigarrow$ Laplace Experiment mit 6 Ausgängen)

$\Omega = \{A, B, C, D, E, F\}$

$P(\omega) = \frac{1}{6}$

$X(\omega) := \omega_1 \cdot \omega_2$ für $\omega = \binom{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{R}^2$.

Wertetabelle für X:

ω	A	B	C	D	E	F
$X(\omega)$	4	6	8	1	2	3
$X^2(\omega)$	16	36	64	1	4	9

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\, \mathbb{P}(\omega)$$

(hier)

$$= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)$$

$$= \frac{24}{6} = \frac{12}{3} = 4.$$

Def.: Sei X eine Zufallsvariable mit $m := \mathbb{E}(X)$. Dann heißt

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}([X-m]^2)$$

Varianz von X. $\perp$

Bedeutung: Varianz misst die mittlere quadratische Abweichung der Zufallsvariable X von ihrem Erwartungswert.

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \underbrace{\underbrace{[X(\omega) - m]}_{\text{Abweichung von der Erwartung}}{}^{2}\, \mathbb{P}(\omega)}_{}$$

mittlere Abweichung

Bem / Lemma:

$$\boxed{V(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2}$$

Bew: $V(X) = \mathbb{E}([X-m]^2)$

$= \mathbb{E}(X^2 - 2Xm + m^2)$

$= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(2Xm) + \mathbb{E}(m^2)$

$= \mathbb{E}(X^2) - 2m\underbrace{\mathbb{E}(X)}_{m} + m^2$

$= \mathbb{E}(X^2) - 2m^2 + m^2$

$= \mathbb{E}(X^2) - m^2$

$= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$

$\perp\!\!\!\perp$

Beispiel: (~~TOTE~~)

ω	A	B	C	D	E	F
$X(\omega)$	4	6	8	1	2	3
$X^2(\omega)$	16	36	64	1	4	9

Bereits bekannt: $m = \mathbb{E}(X) = 4$

$$V(X) = \mathbb{E}\left([X-m]^2\right)$$

Variante 1

$$= \frac{1}{6}\left[(4-4)^2+(6-4)^2+(8-4)^2 + (1-4)^2+(2-4)^2+(3-4)^2\right]$$

Variante

$$= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

Hierzu: $\mathbb{E}(X^2)$

$$= \frac{1}{6}\left[16+36+64+1+4+9\right]$$

$$= \frac{130}{6}$$

$$\leadsto V(X) = \frac{130}{6} - [4]^2$$

$$= \frac{130}{6} - \frac{96}{6}$$

$$= \frac{34}{6} = \frac{17}{3}$$

Satz: (Tschebyschev-Ungleichung)

Sei X eine Zufallsvariable und $\varepsilon > 0$.

Dann gilt

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \mathbb{V}(X).$$

$\mu = 2.00$ Mrd.

$\varepsilon = 10$ Mio.

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq 10 \text{ Mio})$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{[10 \cdot 10^6]^2} \cdot \mathrm{Var}(X)}_{5\,\% = 0.05.}$$

Bedeutung: Kleine Varianz
$\rightsquigarrow$ geringe Wahrscheinlichkeit
einer Abweichung der Zufalls-
variable von ihrem Erwartungswert.

Extremfall: $V(X) = 0$.

$X = m$ mit Wahrscheinlichkeit 1

$\rightsquigarrow$ X hängt gar nicht mehr vom
Zufall ab.

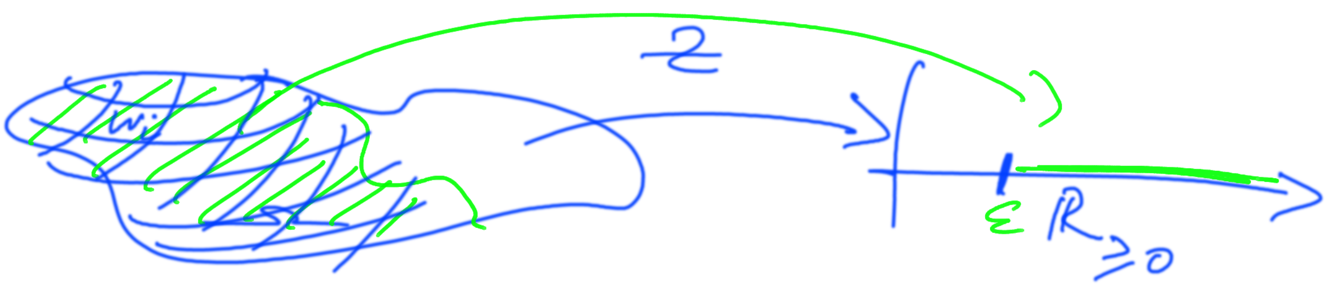
Bew.: Vorbetrachtung:

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum

$Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

Dann gilt $\forall\, \varepsilon > 0$:

$$\boxed{\mathbb{P}(Z > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \mathbb{E}(Z^2)}$$



Begründung:

$$\mathbb{P}(Z > \varepsilon) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid Z(\omega) > \varepsilon\})$$

$$= \mathbb{P}\Big(Z^{-1}(\underbrace{]\varepsilon, \infty[}_{R_{>\varepsilon}})\Big)$$

$$= \sum_{\omega_i \in Z^{-1}(R_{>\varepsilon})} \mathbb{P}(\omega_i)$$

$$= \sum_{\omega_i \in Z^{-1}(R_{>\varepsilon})} 1 \cdot \mathbb{P}(\omega_i)$$

$$= \sum_{\omega_i \in Z^{-1}(R_{>\varepsilon})} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \mathbb{P}(\omega_i)$$

$$\leq \sum_{\omega_i \in Z^{-1}(R_{>\varepsilon})} \frac{Z^2(\omega)}{\varepsilon^2} \mathbb{P}(\omega_i)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \underbrace{\sum_{\omega_i \in Z^{-1}(\mathbb{R}_{>\varepsilon})}}\, Z^2(\omega_i)\,\mathbb{P}(\omega_i)$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon^2} \underbrace{\sum_{\omega \in \Omega}}\, Z^2(\omega)\,\mathbb{P}(\omega)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathbb{E}(Z^2).$$

Bew. Tschebyschew:

$$\mathbb{P}(|X-m|>\varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon^2} V(X),$$

(Wdh. Aussage).

Setze $Z := |X-m| \ge 0$

gesehen:

$$\mathbb{P}(Z>\varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathbb{E}(Z^2)$$

$$\mathbb{P}(|X-m|>\varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\mathbb{E}((X-m)^2)$$

$$\underbrace{\hspace{6em}}_{V(X).}$$

VL vom 19.11.'24

Satz: (Tschebyschev-Ungleichung)

Sei X eine Zufallsvariable;

Dann gilt $\forall \varepsilon > 0$

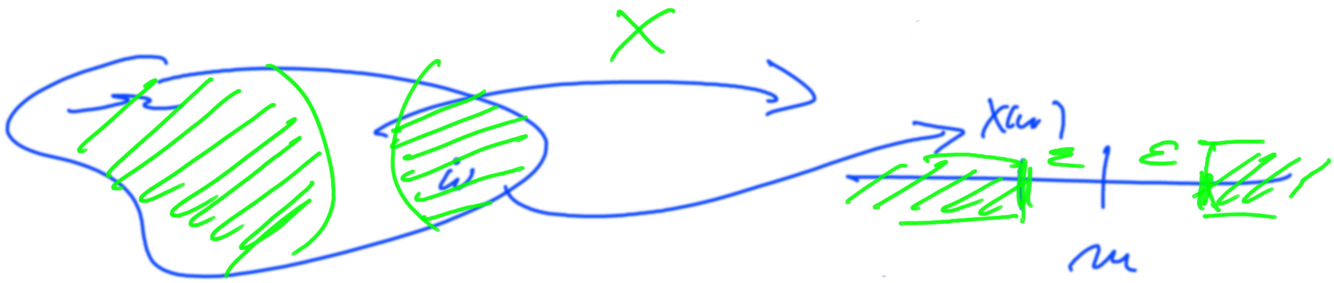
$$\mathbb{P}(|X - m| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \mathrm{Var}(X),$$

wobei $m = \mathbb{E}(X)$.

Bem: Benutzte Kurzschreibweise

$$„\mathbb{P}(|X - m| > \varepsilon)"$$

$$= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid \underbrace{|X(\omega) - m| > \varepsilon}\})$$



Def.: Seien X, Y zwei Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Dann heißen X, Y stochastisch unabhängig, falls

$\forall$ $\underline{A} \subset \mathbb{R}$, $\underline{B} \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{P}(X \in \underline{A} ; Y \in \underline{B})$$
$$= \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B). \quad \underline{\underline{//}}$$

Bem.: ($\mathcal{F} \mathrel{\hat{=}}$ Menge der Ereignisse)

Bsp.: 2-Fache Würfelexperiment, d.h. geworfen wird ein fairer Würfel 2 mal, wobei die beiden Ausführungen physikalisch etc. getrennt durchgeführt werden.

$$\Omega = \{ \omega = \underline{(\omega_1, \omega_2)} \text{ mit } \omega_i \in \{1, \dots, 6\} \}$$

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{36}$$

$X(\omega) = \omega_1^2$ falls $\omega = (\omega_1, \omega_2)$

$Y(\omega) = 5 \omega_2$

mögliche Ausprägungen

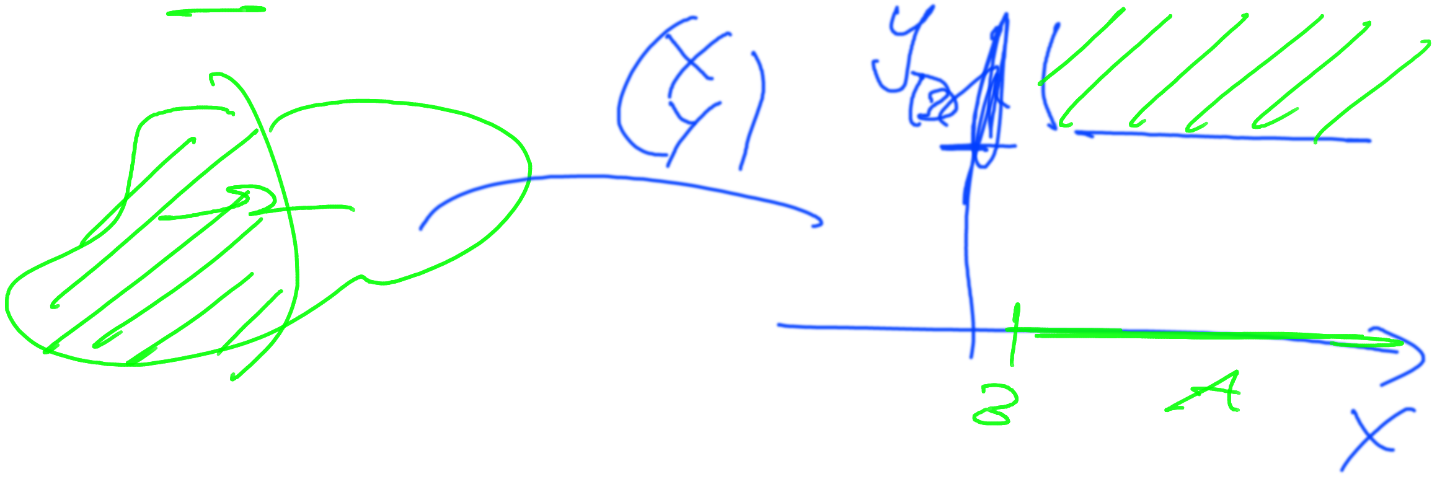
von $\underline{X}$: $1, 4, 9, 16, 25, 36$

$\underline{Y}$: $5, 10, 15, 20, 25, 30$

Sind X und Y stochastisch unabhängig?

Bsp: $\underline{A} := \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{x > 3}\}$

$\underline{B} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \underline{25}\}$



$$\mathbb{P}(X \in A ; Y \in B)$$

$$= \mathbb{P}(X > 3 ; Y \geq 25)$$

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > 3 ; Y \geq 25\}$$

$$= \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \geq 2 ; \omega_2 \geq 5\}$$

$$\#\{\omega \mid X(\omega) > 3 ; Y(\omega) \geq 25\}$$

$$= 10$$

$$\leadsto \mathbb{P}(X \in A ; Y \in B)$$

$$= \frac{5}{18}.$$

$$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{5 \cdot 6}{36} = \frac{30}{36}$$

$$= \frac{5}{6}.$$

$$\mathbb{P}(Y \in B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(X \in A ; Y \in B)$$

$$\stackrel{?}{=} \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B)$$

$$\frac{5}{18} \overset{?}{=} \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18}. \checkmark$$

<u>Satz</u> Es seien X und Y stochastisch unabhängig, dann gilt

$$\boxed{\mathbb{E}(\underbrace{X \cdot Y}_{=Z}) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y).}$$

<u>Bsp:</u>

ω	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$\cdots$	$(2,1)$	$\cdots$	$(6,6)$
X	1	1			4		36
Y	5	10			5		30
Z	5	10			20		$\cdots$

<u>Bsp.:</u> $\mathbb{E}(Z)$

$$= \frac{1}{36}\left[5 + 10 + \cdots + 20 + \cdots\right]$$

$$\overset{!}{=} \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$$

$$= \left(\frac{1}{36}\left[1 + 1 + \cdots + 4 + \cdots 36\right]\right)$$

$$= \frac{1}{36}\left[5+10+\dots+5+\dots+30\right]$$

In Worten: Bei Unabhängigkeit von Zufallsvariablen faktorisiert der Erwartungswertbildung!

Bew.: Z habe die Werte

$z_1, \dots, z_m$

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{z \in Z} z_i \cdot \mathbb{P}(Z = z_i)$$

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega) P(\omega)$$

$$= \sum_{z_i} z_i \cdot \mathbb{P}(Z = z_i)$$

$$= \sum_{y_k, x_l} y_k x_l \, \mathbb{P}(X = x_l, Y = y_k)$$

$$= \sum_{y_k, x_\ell} y_k x_\ell \, \mathbb{P}(X = x_\ell) \, \mathbb{P}(Y = y_\ell)$$

$$= \sum_{y_k, x_\ell} \underbrace{y_k \cdot \mathbb{P}(Y = y_k)} \cdot x_\ell \cdot \mathbb{P}(X = x_\ell)$$

$$= \sum_{y_k} y_k \, \mathbb{P}(Y = y_k) \underbrace{\left(\sum_{x_\ell} x_\ell \cdot \mathbb{P}(X = x_\ell) \right)}_{\mathbb{E}(X)}$$

$$= \mathbb{E}(X) \cdot \underbrace{\sum_{k} y_k \, \mathbb{P}(Y = y_k)}$$

$$= \mathbb{E}(X) \; \mathbb{E}(Y) .$$ $\#$

Bem.: **Def.:** $X_1, X_2, \ldots, X_N$ ZV'en auf Ω. dann heißen $X_1, \ldots, X_N$ stoch. unabhängig, falls

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots, X_N \in A_N)$$

$$= \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 \in A_2) \cdots \mathbb{P}(X_N \in A_N)$$

$\forall A_1, \ldots, A_N \subset \mathbb{R}$. $\#$

Satz: Falls $X_1, \dots, X_N$ stoch. unabhängig

$$\mathbb{E}(X_1 \cdots X_N) = \mathbb{E}(X_1) \cdots \mathbb{E}(X_N)$$

Korollar: Es seien $X_1, \dots, X_N$ stochastisch unabhängig.

Dann gilt

$$Var(\underbrace{X_1 + \dots + X_N}) = Var(X_1) + Var(X_2) \dots + V(X_N).$$

Bew.: $Var(X) = V(X - c)$

$$\Rightarrow V(X) = V(X - m)$$

$$Var(X) = \mathbb{E}((X - m)^2) = \mathbb{E}((\bar{X})^2)$$

wenn $\bar{X} = X - m$. (Zentrierung von X)

$$Var(X_1 + X_2 + \dots X_N)$$

$$= V(\underbrace{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_N}_{\sum_{i=1}^{N} \bar{x}_i})$$

$$= \mathbb{E}\Big(\Big[\sum_{i=1}^{N} \overline{X}_i - \underbrace{\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{N} \overline{X}_i\Big)}_{=0}\Big]^2\Big)$$

$$= \mathbb{E}\Big(\Big(\sum_{i=1}^{N} \overline{X}_i\Big)^2\Big)$$

$$= \mathbb{E}\Big(\Big(\sum_{i=1}^{N} \overline{X}_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{N} \overline{X}_j\Big)\Big)$$

$$= \sum_{i,j} \underbrace{\mathbb{E}(\overline{X}_i \cdot \overline{X}_j)}_{= \begin{cases} \mathbb{E}(\overline{X}_i)\cdot \mathbb{E}(\overline{X}_j) & i \neq j \\ \mathbb{E}(\overline{X}_i^2) & i = j. \end{cases}}$$

$$= \sum_{i\neq j} 0 + \sum_{i=j} \underbrace{\mathbb{E}(\overline{X}_i^2)}_{V(\overline{X}_i) = V(X_i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} V(X_i). \qquad \checkmark$$

Bem.: Ang.: $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0.$

$$V(X+Y) = \mathbb{E}\big((X+Y)^2\big)$$

$$\overset{\text{Ba.}}{=} \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(Y^2) \ ? \ (\checkmark)$$

Korollar, dann

$$\mathbb{E}((X+Y)^2)$$

$$= \mathbb{E}(\underbrace{X^2+2XY+Y^2})$$

$$= \mathbb{E}(X^2) + 2\cdot\underbrace{\cancel{\mathbb{E}(XY)}} + \mathbb{E}(Y^2)$$

$$2\,\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$$

when independent

$$= \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(Y^2). \qquad \perp\!\!\!\perp$$