Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

1. Organisatorisches und Einführung

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

10. April 2025
Leipzig

Organisatorisches

Vorlesung

Prof. Dr. Ringo Baumann
Paulinum, Raum P819
baumann@informatik.uni-leipzig.de

donnerstags, 13:00 c.t., Hs 9
12 Termine: 10.04., 17.04., 24.04., ~~01.05.~~ Feiertag, 08.05., 15.05., 22.05., ~~29.05.~~ Feiertag, 05.06., 12.06., 19.06., 26.06., 03.07., 10.07.

Folien verfügbar in moodle
Beispiele / Beweise teilweise als Tafelanschrieb

Organisatorisches

Übungen

Moritz Schönherr
`schoenherr@informatik.uni-leipzig.de`

Jamie Keitsch
`keitsch@studserv.uni-leipzig.de`

8 Übungsgruppen, jeweils 6 Termine (modulo Feiertage)

Gruppe a: montags (B-Woche), 09:00 c.t., SG 3-12
28.04., 12.05., 26.05., ~~09.06.~~ Feiertag, 23.06., 07.07.

Gruppe b: montags (A-Woche), 09:00 c.t., SG 3-12
~~21.04.~~ Feiertag, 05.05., 19.05., 02.06., 16.06., 30.06.

Organisatorisches

Übungen

Gruppe c: dienstags (B-Woche), 11:00 c.t., SG 2-14
29.04., 13.05., 27.05., 10.06., 24.06., 08.07.

Gruppe d: dienstags (A-Woche), 11:00 c.t., SG 2-14
22.04., 06.05., 20.05., 03.06., 17.06., 01.07.

Gruppe e: mittwochs (B-Woche), 09:00 c.t., SG 3-14
30.04., 14.05., 28.05., 11.06., 25.06., 09.07.

Gruppe f: mittwochs (A-Woche), 09:00 c.t., SG 3-14
23.04., 07.05., 21.05., 04.06., 18.06., 02.07.

Gruppe g: mittwochs (B-Woche), 15:00 c.t., SG 3-12
30.04., 14.05., 28.05., 11.06., 25.06., 09.07.

Gruppe h: mittwochs (A-Woche), 15:00 c.t., SG 3-12
23.04., 07.05., 21.05., 04.06., 18.06., 02.07.

Organisatorisches

Übungsaufgaben

6 Übungsblätter via moodle
Ausgabe: 10.04., 24.04., 08.05., 22.05., 05.06., 19.06.
Bearbeitung: in festen 2er Gruppen oder alleine
Abgabe: via moodle, spätestens zum 20.04., 04.05., 18.05., 01.06., 15.06., 29.06.

Prüfungs(vor)leistung

1-stündige Klausur am Ende des Semesters
Klausurzulassung: 50% der Punkte der Übungsaufgaben

Fragen?

Vorwissen

VL “Diskrete Strukturen” ist eine sehr gute Grundlage

Menge ist Zusammenfassung einzelner Objekte, sog. Elemente

- $M = \{A_1, 4, v\}$ (extensional)
- $N = \{A_i \mid i = 1 \text{ oder } 4 \leq i \leq 6\}$ (intensional)
- $4 \in M, \quad 4 \notin N$ (Elementbeziehung)
- Falls jedes Element von S auch Element von T ist, schreiben wir $S \subseteq T$ (Teilmengenbeziehung)
- Es gilt: $S = T$ gdw. $S \subseteq T$ und $T \subseteq S$ (Gleichheit)

Grundlegende Operationen auf Mengen

- $S \cup T = \{a \mid a \in S \text{ oder } a \in T\}$ (Vereinigung)
- $S \cap T = \{a \mid a \in S \text{ und } a \in T\}$ (Schnitt)
- $S \setminus T = \{a \mid a \in S \text{ und } a \notin T\}$ (Differenz)
- $2^T = \{S \mid S \subseteq T\}$ (Potenzmenge)

Vorwissen

Menge ist Zusammenfassung einzelner Objekte, sog. Elemente

- $M = \{A_1, 4, v\}$ (extensional)
- $N = \{A_i \mid i = 1 \text{ oder } 4 \leq i \leq 6\}$ (intensional)
- $4 \in M, \quad 4 \notin N$ (Elementbeziehung)
- Falls jedes Element von S auch Element von T ist, schreiben wir $S \subseteq T$ (Teilmengenbeziehung)
- Es gilt: $S = T$ gdw. $S \subseteq T$ und $T \subseteq S$ (Gleichheit)

Grundlegende Operationen auf Mengen

- $M \cup N = \{A_1, 4, v, A_4, A_5, A_6\}$ (Vereinigung)
- $M \cap N = \{A_1\}$ (Schnitt)
- $M \setminus N = \{4, v\}$ (Differenz)
- $2^M = \{\emptyset, \{A_1\}, \{4\}, \{v\}, \{A_1, 4\}, \{A_1, v\}, \{4, v\}, M\}$ (Potenzmenge)

Vorwissen

Produkt, Relation, Funktion

- $S \times T = \{(s, t) \mid s \in S, t \in T\}$ (Produkt)
- $M \times N = \{(A_1, A_1), (A_1, A_4), (A_1, A_5), (A_1, A_6), \ldots, (v, A_6)\}$
- $(v, A_6) \neq (A_6, v)$ (geordnetes Paar)
- $R \subseteq S \times T$ (Relation)
- für jedes $s \in S$, gibt es genau ein $t \in T$ mit $(s, t) \in R$
  Notation: $R(s) = t$ (Nacheindeutigkeit)
- nacheindeutige Relation (Funktion)
- $M \times N$ ist Relation, aber keine Funktion
- $R = \{(A_1, A_1), (4, A_4), (v, A_6)\} \subseteq M \times N$ ist Funktion

$$R : M \to N, \quad m \mapsto R(m)$$

Ebbinghaus, H.-D. (2021).
Einführung in die Mengenlehre. Springer

(kurze) Einführung: Logik

- ist die Lehre vom vernünftigen Schließen
- untersucht die Bedingungen, unter denen das Ziehen einer Konklusion (Schlussfolgerung) aus gegebenen Prämissen (Voraussetzungen) gültig ist
- ist nicht eine, sondern viele

  Aussagenlogik, Prädikatenlogik, Modale Logiken,
  Mehrwertige Logiken, Nichtmonotone Logiken, . . .
- der ersten Stunde: Syllogistik (Aristoteles, 384 - 322 v.Chr.)

(kurze) Einführung

bekannter Syllogismus:

Alle Menschen sind sterblich.	(Prämisse)
Sokrates ist ein Mensch.	(Prämisse)
Sokrates ist sterblich.	(Konklusion)

allgemeine Form:

Alle A sind B.	(Prämisse)
c ist ein A.	(Prämisse)
Daher ist c ein B.	(Konklusion)

Gültiger Schluss aufgrund der Form!

(kurze) Einführung

gültiger Schluss vs. Sinnhaftigkeit der Aussagen

Alle *A*lthkthkalhog sind *B*adkhgldhd.	(Prämisse)
*c*ada ist ein *A*lthkthkalhog.	(Prämisse)
*c*ada ist ein *B*adkhgldhd.	(Konklusion)

gültiger Schluss vs. Wahrheit der Aussagen

Alle Menschen sind unsterblich.	(Prämisse)
Sokrates ist ein Mensch.	(Prämisse)
Sokrates ist unsterblich.	(Konklusion)

Aber, gültiger Schluss garantiert Wahrheit der Konklusion, sofern auch die Prämissen wahr sind.

Literaturhinweise

- Schöning, U. (2000).
  Logik für Informatiker. Spektrum Verlag.
  Kompaktes, leicht verständliches Buch. Behandelt Aussagenlogik, Prädikatenlogik und Logikprogrammierung.

- Rautenberg, W. (2008).
  Einführung in die mathematische Logik. Springer.
  Ein umfassendes Lehrbuch zur mathematischen Logik mit ausführlichen Beweisen und einer Behandlung der Gödelschen Unvollständigkeitssätze.

- Ebbinghaus, H.-D., Flum, J., & Thomas, W. (2018).
  Mathematische Logik. Vieweg und Teubner Verlag.
  Geht weit über die Vorlesungsinhalte hinaus. Behandelt vornehmlich zentrale und tiefgehende Resultate der Prädikatenlogik.

Aussagenlogik

- George Boole (1815 - 1864)
  algebraische Grundlagen der Logik
- Aussagen sind sprachliche Gebilde die entweder wahr oder falsch sind, z.B.

  A: Heute findet die Logikvorlesung statt.

  B: Ich wohne in Leipzig.
- Aussagen können durch Junktoren wie nicht, und und oder miteinander verknüpft werden
- Wahrheit bzw. Falschheit komplexer Aussagen ergibt sich aus den Wahrheitswerten der Teilaussagen (Wahrheitsfunktionalität)

Syntax

Sei $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ die Menge der atomaren Formeln.

Definition

Die Menge der aussagenlogischen Formeln $\mathcal{F}$ ist die $\subseteq$-kleinste Menge, die nachfolgende Eigenschaften erfüllt:

1. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$
2. Sofern $\phi \in \mathcal{F}$, dann auch $\neg\phi \in \mathcal{F}$.
3. Sofern $\phi, \psi \in \mathcal{F}$, dann auch $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi) \in \mathcal{F}$.

Sprechweisen:

- $\neg\phi$: nicht ϕ, Negation von ϕ
- $(\phi \vee \psi)$: ϕ oder ψ, Disjunktion von ϕ und ψ
- $(\phi \wedge \psi)$: ϕ und ψ, Konjunktion von ϕ und ψ

Syntax

Sei $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ die Menge der atomaren Formeln.

Definition

Die Menge der aussagenlogischen Formeln $\mathcal{F}$ ist die $\subseteq$-kleinste Menge, die nachfolgende Eigenschaften erfüllt:

1. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$
2. Sofern $\phi \in \mathcal{F}$, dann auch $\neg\phi \in \mathcal{F}$.
3. Sofern $\phi, \psi \in \mathcal{F}$, dann auch $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi) \in \mathcal{F}$.

Beispiele:

$$(\neg A_1 \wedge A_2)$$

$$\neg((A_1 \vee A_2) \wedge A_3)$$

$$((A_5 \wedge A_5) \wedge A_5) \neq (A_5 \wedge (A_5 \wedge A_5))$$

Strukturelle Induktion

- induktiv definierte Mengen legen ein Induktionsprinzip fest

Definition

Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist die $\subseteq$-kleinste Menge, die nachfolgende Eigenschaften erfüllt:

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. Sofern $n \in \mathbb{N}$, dann auch $n + 1 \in \mathbb{N}$.

Eine Aussage gilt für alle natürlichen Zahlen, sofern:

1. Die Aussage gilt für die Zahl 0. (Induktionsanfang)
2. Wenn die Aussage für $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann auch für $n + 1$. (Induktionsschritt)

Dies ist die sogenannte vollständige Induktion.

Strukturelle Induktion

- induktiv definierte Mengen legen ein Induktionsprinzip fest

Beispiel: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n^2 + n$ ist gerade Zahl (kurz: $E(n)$)

1. Die Aussage gilt für die Zahl 0 $(E(0))$

   $0^2 + 0 = 0 + 0 = 0$ ist gerade Zahl

2. Wenn die Aussage für $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann auch für $n + 1$.

   $(E(n) \Rightarrow E(n+1))$

   - Gelte $E(n)$, d.h. $n^2 + n = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung)
   - Zeige $E(n+1)$, d.h. $(n+1)^2 + (n+1)$ ist gerade Zahl (Induktionsbehauptung)

$$(n+1)^2 + (n+1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = \underbrace{(n^2 + n)}_{2k} + (2n+2) =$$

$$2k + 2(n+1) = 2(k + n + 1) \qquad \square$$

Strukturelle Induktion

Definition

Die Menge der aussagenlogischen Formeln $\mathcal{F}$ ist die $\subseteq$-kleinste Menge, die nachfolgende Eigenschaften erfüllt:

1. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$
2. Sofern $\phi \in \mathcal{F}$, dann auch $\neg\phi \in \mathcal{F}$.
3. Sofern $\phi, \psi \in \mathcal{F}$, dann auch $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi) \in \mathcal{F}$.

Eine Aussage gilt für alle aussagenlogischen Formeln, sofern:

1. Die Aussage gilt für alle $A \in \mathcal{A}$. (Induktionsanfang)
2. Wenn die Aussage für $\phi \in \mathcal{F}$ gilt, dann auch für $\neg\phi$.
3. Wenn die Aussage für $\phi, \psi \in \mathcal{F}$ gilt, dann auch für $(\phi \vee \psi)$ und $(\phi \wedge \psi)$. (Induktionsschritt)

Dies ist die sogenannte Induktion über den Formelaufbau.

Rekursive Funktionen

- induktiv definierte Mengen erlauben rekursive Definitionen

Gegeben eine Menge M (z.B. $M = \mathbb{N}$). Um eine totale Funktion

$$f : \mathcal{F} \to M$$

zu definieren, reicht es:

1. $f : \mathcal{A} \to M$ anzugeben
2. $f(\neg\phi)$ durch $f(\phi)$ zu erklären
   [formaler: Angabe von $H_\neg : M \to M$, sodass $f(\neg\phi) = H_\neg(f(\phi))$]
3. $f((\phi \vee \psi))$ und $f((\phi \wedge \psi))$ durch $f(\phi)$ und $f(\psi)$ zu erklären
   [formaler: Angabe von $H_\vee : M \times M \to M$ und $H_\wedge : M \times M \to M$, sodass $f((\phi \vee \psi)) = H_\vee(f(\phi), f(\psi))$, $f((\phi \wedge \psi)) = H_\wedge(f(\phi), f(\psi))$]

Rekursive Funktionen

- $l : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ (Länge einer Formel)

$$l(A) = 1$$
$$l(\neg\phi) = 1 + l(\phi)$$
$$l((\phi \circ \psi)) = 1 + l(\phi) + 1 + l(\psi) + 1 \quad \text{mit } \circ \in \{\wedge, \vee\}$$

$l((\neg A_1 \vee A_2)) = 1 + l(\neg A_1) + 1 + l(A_2) + 1 =$
$1 + 1 + l(A_1) + 1 + l(A_2) + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$

- $k : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ (Anzahl Klammern)

$$k(A) = 0$$
$$k(\neg\phi) = k(\phi)$$
$$k((\phi \circ \psi)) = 1 + k(\phi) + k(\psi) + 1 \quad \text{mit } \circ \in \{\wedge, \vee\}$$

$k((\neg A_1 \vee A_2)) = 1 + k(\neg A_1) + k(A_2) + 1 = 1 + k(A_1) + k(A_2) + 1 = 2$

- $r : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ (Rang einer Formel)

$$r(A) = 0$$
$$r(\neg\phi) = r(\phi) + 1$$
$$r((\phi \circ \psi)) = \max\{r(\phi), r(\psi)\} + 1 \quad \text{mit } \circ \in \{\wedge, \vee\}$$

$r((\neg A_1 \vee A_2)) = \max\{r(\neg A_1), r(A_2)\} + 1 = \max\{r(A_1) + 1, 0\} + 1 = 2$

Induktion über den Formelaufbau

Beispiel: Für alle $\phi \in \mathcal{F}$ gilt: $k(\phi)$ ist gerade Zahl (kurz: $E(\phi)$)

$$k(A) = 0$$
$$k(\neg\phi) = k(\phi)$$
$$k((\phi \circ \psi)) = 1 + k(\phi) + k(\psi) + 1 \quad \text{mit } \circ \in \{\wedge, \vee\}$$

Beweis:

1. Die Aussage gilt für atomare Aussagen $A \in \mathcal{A}$ $(E(A))$

   $k(A) = 0$ ist gerade Zahl
2. Wenn $E(\phi)$, dann auch $E(\neg\phi)$.
   - Sei $k(\phi) = 2n$ mit $n \in \mathbb{N}$ (IV). Es gilt:

   $$k(\neg\phi) = k(\phi) = 2n$$
3. Wenn $E(\phi)$ und $E(\psi)$, dann auch $E((\phi \circ \psi))$ für $\circ \in \{\wedge, \vee\}$.
   - Sei $k(\phi) = 2n$, $k(\psi) = 2m$ mit $n, m \in \mathbb{N}$ (IV). Es gilt:

   $$k((\phi \circ \psi)) = 1 + k(\phi) + k(\psi) + 1 = 1 + 2n + 2m + 1 = 2(n + m + 1)$$

$\square$

Rekursive Funktionen

- $s : \mathcal{F} \to 2^{\mathcal{A}}$ (Signatur einer Formel)

$$s(A) = \{A\}$$
$$s(\neg\phi) = s(\phi)$$
$$s((\phi \circ \psi)) = s(\phi) \cup s(\psi) \quad \text{mit } \circ \in \{\wedge, \vee\}$$

$$s((\neg A_1 \vee A_2)) = s(\neg A_1) \cup s(A_2) = s(A_1) \cup \{A_2\} = \{A_1, A_2\}$$

- $t : \mathcal{F} \to 2^{\mathcal{F}}$ (Teilformeln einer Formel)

$$t(A) = \{A\}$$
$$t(\neg\phi) = t(\phi) \cup \{\neg\phi\}$$
$$t((\phi \circ \psi)) = t(\phi) \cup t(\psi) \cup \{(\phi \circ \psi)\} \quad \text{mit } \circ \in \{\wedge, \vee\}$$

$$t((\neg A_1 \vee A_2)) = t(\neg A_1) \cup t(A_2) \cup \{(\neg A_1 \vee A_2)\} =$$
$$t(A_1) \cup \{\neg A_1\} \cup t(A_2) \cup \{(\neg A_1 \vee A_2)\} = \{(\neg A_1 \vee A_2), \neg A_1, A_1, A_2\}$$

Rekursive Funktionen

- $s : \mathcal{F} \to 2^{\mathcal{A}}$ (Signatur einer Formel)

$$s(A) = \{A\}$$
$$s(\neg\phi) = s(\phi)$$
$$s((\phi \circ \psi)) = s(\phi) \cup s(\psi) \quad \text{mit } \circ \in \{\wedge, \vee\}$$

- $t : \mathcal{F} \to 2^{\mathcal{F}}$ (Teilformeln einer Formel)

$$t(A) = \{A\}$$
$$t(\neg\phi) = t(\phi) \cup \{\neg\phi\}$$
$$t((\phi \circ \psi)) = t(\phi) \cup t(\psi) \cup \{(\phi \circ \psi)\} \quad \text{mit } \circ \in \{\wedge, \vee\}$$

- $b : \mathcal{F} \to \mathcal{S}$ (Syntaxbaum einer Formel)

$b(A) =$ A

$b(\neg\phi) =$
$$\begin{array}{c} \neg \\ | \\ b(\phi) \end{array}$$

$b((\phi \circ \psi)) =$
$$\begin{array}{ccc} & \circ & \\ / & & \backslash \\ b(\phi) & & b(\psi) \end{array}$$

Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

1. Organisatorisches und Einführung

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

10. April 2025
Leipzig