Grundlagen Lineare Algebra für Informatiker

Nikita Emanuel John Fehér, 3793479

18. April 2024
Montag 09:15-11:15 Valerie Christiana Sabrina Freund

Aufgabe 1

Berechen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus:

(a) ggT(774, 279)

$$\begin{aligned}
\text{ggT}(774, 279) &\implies 774 : 279 = 2 \text{ Rest } 216 \\
&\implies 279 : 216 = 1 \text{ Rest } 63 \\
&\implies 216 : 63 = 3 \text{ Rest } 27 \\
&\implies 63 : 27 = 2 \text{ Rest } 9 \\
&\implies 27 : 9 = 3 \text{ Rest } 0 \\
\text{ggT}(774, 279) = 9
\end{aligned}$$

(b) ggT(3591, 1491)

$$\begin{aligned}
\text{ggT}(3591, 1491) &\implies 3591 : 1491 = 2 \text{ Rest } 609 \\
&\implies 1491 : 609 = 2 \text{ Rest } 273 \\
&\implies 609 : 273 = 2 \text{ Rest } 63 \\
&\implies 273 : 63 = 4 \text{ Rest } 21 \\
&\implies 63 : 21 = 3 \text{ Rest } 0 \\
\text{ggT}(3591, 1491) = 21
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen jeweils in der Forma $a + ib$ mit reelem a und b dar.

(a) $(5+2i)(3-3i)$

$$\begin{aligned}
(5+2i)(3-3i) &= 5\cdot 3 + 5\cdot(-3i) + 2i\cdot 3 + 2i\cdot(-3i)\\
&= 15 - 15i + 6i - 6i^2\\
&= 15 - 9i - 6\cdot(-1)\\
&= 15 + 6 - 9i\\
&= 21 + (-9)i\\
&= 21 + i(-9)
\end{aligned}$$

(b) $\frac{1}{4-3i}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4-3i} &= \frac{1}{4-3i}\cdot 1\\
&= \frac{1}{4-3i}\cdot\frac{4+3i}{4+3i}\\
&= \frac{1\cdot(4+3i)}{(4-3i)\cdot(4+3i)}\\
&= \frac{4+3i}{4\cdot 4 + 4\cdot(-3i) + 3i\cdot 4 + 3i\cdot(-3i)}\\
&= \frac{4+3i}{16 + (-12i) + 12i + (-9i^2)}\\
&= \frac{4+3i}{16+9}\\
&= \frac{4+3i}{25}\\
&= \frac{4}{25} + \frac{3i}{25}\\
&= \frac{4}{25} + i\frac{3}{25}
\end{aligned}$$

(c) $(1+2i)^2$

$$\begin{aligned}
(1+2i)^2 &= (1+2i)\cdot(1+2i)\\
&= 1\cdot 1 + 1\cdot 2i + 2i\cdot 1 + 2i\cdot 2i\\
&= 1 + 2i + 2i + 4i^2\\
&= 1 + 4i + (-4)\\
&= -3 + 4i\\
&= -3 + i4
\end{aligned}$$

(d) $\frac{2-3i}{2+2i}$

$$\begin{aligned}
\frac{2-3i}{2+2i} &= \frac{2-3i}{2+2i}\cdot 1 \\
&= \frac{2-3i}{2+2i}\cdot\frac{2-2i}{2-2i} \\
&= \frac{(2-3i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} \\
&= \frac{2\cdot 2+2\cdot(-2i)+(-3i)\cdot 2+(-3i)\cdot(-2i)}{(2\cdot 2+2\cdot(-2i)+2i\cdot 2+2i\cdot(-2i)} \\
&= \frac{4+(-4i)+(-6i)+6i^2}{4+(-4i)+4i+(-4i^2)} \\
&= \frac{4-10i+(-6)}{4+4} \\
&= \frac{-2-10i}{8} \\
&= \frac{-2}{8}+\frac{-10i}{8} \\
&= \frac{-1}{4}+i\frac{-5}{4}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Auf der Menge $G := \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, c \neq 0\}$ definieren wir eine verknüpfung durch $(a_1, b_1, c_1) * (a_2, b_2, c_2) := (a_1a_2, a_1b_2 + b_1c_2, c_1c_2)$.

1) Zeigen Sie, dass $(G, *)$ eine Gruppe bildet.

Definition Gruppe:

(a) $G \neq \{\emptyset\}$

(b) Halbgruppe:

$(G, *)$ heißt Halbgruppe, falls: $\forall a, b, c \in G : (a * b) * c = a * (b * c)$

(c) Monoid:

$(G, *)$ heißt Monoid, falls Halbgruppe und: $\exists e \in G \forall a \in G : e*a = a = a*e$

(d) Gruppe:

$(G, *)$ heißt Gruppe, falls Monoid und: $\forall a \in G \exists b \in G : a*b = e = b*a$

Beweis:

(a) Wir setzten $a_1 = 1, b_1 = 0, c_1 = 1, a_2 = 1, b_2 = 0, c_2 = 1$

$$\begin{aligned}\implies (1,0,1) * (1,0,1) &= (1 \cdot 1, 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1, 1 \cdot 1) \\ &= (1, 0+0, 1) \\ &= (1,0,1) \in G\end{aligned}$$

$\square$

(b) Wir setzten $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3), c = (c_1, c_2, c_3)$

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= a * (b * c) \\ (a_1b_1, a_1b_2 + a_2b_3, a_3b_3) * c &= a * (b_1c_1, b_1c_2 + b_2c_3, b_3c_3) \\ ((a_1b_1)c_1, (a_1b_1)c_2 + (a_1b_2 + a_2b_3)c_3, (a_3b_3)c_3) &= (a_1(b_1c_1), a_1(b_1c_2 + b_2c_3) + a_2(b_3c_3), a_3(b_3c_3)) \\ (a_1b_1c_1, a_1b_1c_2 + a_1b_2c_3 + a_2b_3c_3, a_3b_3c_3) &= (a_1b_1c_1, a_1b_1c_2 + a_1b_2c_3 + a_2b_3c_3, a_3b_3c_3)\end{aligned}$$

$\square$

(c) Wir legen e fest: $e = (1,0,1)$

$$\begin{aligned}a * e \implies (a_1, a_2, a_3) * (1,0,1) &= (a_1 \cdot 1, a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1, a_3 \cdot 1) \\ &= (a_1, 0 + a_2, a_3) \\ &= (a_1, a_2, a_3) = a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e * a \implies (1,0,1) * (a_1, a_2, a_3) &= (1 \cdot a_1, 1 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3, 1 \cdot a_3) \\ &= (a_1, a_2 + 0, a_3) \\ &= (a_1, a_2, a_3) = a\end{aligned}$$

$\square$

(d) Wir setzen $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3), e = (1, 0, 1)$
Notation:

multiplikativesInvers $x^{-1} := x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x$
additivesInvers $-x := x + (-x) = 0 = -x + x$

$$
\begin{aligned}
a * b = e \\
&\implies (a_1 b_1, a_1 b_2 + a_2 b_3, a_3 b_3) = (1, 0, 1) \\
&\implies a_1 b_1 = 1 \implies b_1 = a_1^{-1},\ \text{da } a_1 \neq 0 : a_1^{-1} \in \mathbb{R} \setminus 0 \\
&\implies a_1 b_2 + a_2 b_3 = 0 \implies b_2 = -1 \cdot a_2 \cdot a_3^{-1} \cdot a_1^{-1} \\
&\implies a_3 b_3 = 1 \implies b_3 = a_3^{-1},\ \text{da } a_3 \neq 0 : a_3^{-1} \in \mathbb{R} \setminus 0 \\
&\implies b = (a_1^{-1}, -1 \cdot a_2 \cdot a_1^{-1} \cdot a_3^{-1}, a_3^{-1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e = b * a \\
&\implies (1, 0, 1) = (b_1 a_1, b_1 a_2 + b_2 a_3, b_3 a_3) \\
&\implies 1 = b_1 a_1 \implies b_1 = a_1^{-1},\ \text{da } a_1 \neq 0 : a_1^{-1} \in \mathbb{R} \setminus 0 \\
&\implies 0 = b_1 a_2 + b_2 a_3 \implies b_2 = -1 \cdot a_2 \cdot a_3^{-1} \cdot a_1^{-1} \\
&\implies 1 = b_3 a_3 \implies b_3 = a_3^{-1},\ \text{da } a_3 \neq 0 : a_3^{-1} \in \mathbb{R} \setminus 0 \\
&\implies b = (a_1^{-1}, -1 \cdot a_2 \cdot a_1^{-1} \cdot a_3^{-1}, a_3^{-1})
\end{aligned}
$$

$$a * b = b * a = e$$

□

2) Zeigen Sie, dass $(G, *)$ nicht kommutativ ist.

Definition Kommutativ:
$(G, *)$ ist Kommutativ, wenn $\forall a \in G \forall b \in G : a * b = b * a$ gilt.

Beweis:
Wir legen a und b fest: $a = (1, 2, 3), b = (4, 5, 6)$

$$\begin{aligned} a * b &\neq b * a \\ (1,2,3) * (4,5,6) &\neq (4,5,6) * (1,2,3) \\ (1 \cdot 4, 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6, 3 \cdot 6) &\neq (4 \cdot 1, 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3, 6 \cdot 3) \\ (4, 5 + 12, 18) &\neq (4, 8 + 15, 18) \\ (4, 17, 18) &\neq (4, 23, 18) \end{aligned}$$

$\implies (G, *)$ ist nicht Kommutativ

$\square$