Diskrete Strukturen (WS 2023-24) - Halbserie 2

Bitte nur Probleme 2.1, 2.2 und 2.3 einreichen.

2.1 **[4]**

Bitte direkt auf moodle als Quiz lösen.

Solution.

2.2 **[3]**

Betrachten Sie folgende **Mengen**:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{0, 2, 4, 6, 8\} \\ M_2 &= \{0, 2, 4, 6\} \cup \{10, 8, 6\} \\ M_3 &= \{x \in \mathbb{N} \colon 2|x, x < 10\} \\ M_4 &= \{\{0, 2\}, \{4, 6, 8\}\} \end{aligned}$$

(a) Beweisen Sie $M_1 = M_3$.

(b) Widerlegen Sie $M_3 = M_4$.

(c) Widerlegen Sie $M_2 \subseteq M_3$.

Solution.

(a) Sei $x \in \{0, 2, 3, 4, 6, 8\}$. Dann $x \in \mathbb{N}$, $2|x$ ist wahr, und auch $x < 10$ ist wahr. Deswegen $x \in M_1$. Sei $x \in M_3$. Deswegen $x \in \mathbb{N}, x < 10$ und $2|x$. Das bedeutet dass $x \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ also $x \in M_1$.

(b) Wir haben $0 \in M_3$, aber $0 \notin M_4$.

(c) Wir haben $10 \in M_2$ aber $10 \notin M_3$.

2.3 **[3]**

Für zwei Mengen A, B definieren wir

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Seien A und B Mengen aus einem Universum U. Beweisen Sie oder widerlegen Sie folgende Aussagen. Bei einer Widerlegung ist ein Beispiel anzugeben, in dem die gegebene Gleichung nicht gilt.

(a) Es gilt $A \triangle A = \emptyset$.

(b) Es gilt $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

(c) Es gilt $(A \triangle B) \triangle C = (A \cup B \cup C) \cap (A^c \cup B^c \cup C^c)$.

Solution.

(a) $A \triangle A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$

(b) $$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \\ &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \\ &= A \setminus B \cup B \setminus A \end{aligned}$$

(c) In dieser Lösung gab es ursprünglich einen Fehler. Diese Eigenschaft ist nicht wahr. Wir können es sehen, indem wir z.B. $A = \{0, 1\}, B = \{0, 2\}$, $C = \{3\}$ nehmen.

2.4 Wir betrachten das Universum $U = \{a, b, c\}$ und die Formel

$$F = \forall x(\neg A(x) \to B(x)) \wedge \exists x(A(x) \to \neg B(x)).$$

Geben Sie für die Prädikate A und B jeweils Teilmengen von U an, sodass

(a) F erfüllt wird.

(b) F nicht erfüllt wird.

(c) $\neg F$ erfüllt ist.

(d) Formen Sie $\neg F$ so um, dass Negationen nur vor den Atomen stehen.

Solution. Es ist bequem eine mit F equivalente Formel zu schreiben, die keine Implikationen hat:

$$\forall x(A(x) \vee B(x)) \wedge \exists x(\neg A(x) \vee \neg B(x))$$

(a) $A = \{a, b\}, B = \{c\}$

(b) $A = B = \emptyset$ oder $A = B = U$

(c) jede Lösung für (b).

(d) $$\begin{aligned} \neg F &\equiv \neg \forall x(A(x) \vee B(x)) \wedge \neg \exists x(\neg A(x) \vee \neg B(x)) \\ &\equiv \exists x(\neg A(x) \wedge \neg B(x)) \vee \forall x(A(x) \wedge B(x)) \end{aligned}$$

(Mehrfache Anwendung des De-Morgan-Gesetzes)

2.5 Seien A, B, C Mengen aus einem Universum U. Beweisen Sie folgende Aussagen:

1. Es gilt $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
2. Es gilt $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
3. Es gilt $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C^c)$.
4. Es gilt $A \setminus B = B \setminus A$ genau dann wenn $A = B$.

Solution.

1. $(A \cup B) \setminus C = (A \cup B) \cap C^c = (A \cap C^c) \cup (B \cap C^c) = A \setminus C \cup B \setminus C$

2. $(A \setminus B) \setminus C = A \cap B^c \cap C^c = A \cap B^c \cap A \cap C^c = A \setminus B \cap A \setminus C$

3. $A \setminus (B \setminus C) = A \cap (B \cap C^c)^c = A \cap (B^c \cup C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C) = A \setminus B \cup A \setminus C^c$

4. Sei $A = B$, dann ist $A \setminus B = \emptyset = B \setminus A$.
   Sei $A \setminus B = B \setminus A$, dann ist
   $$\begin{aligned} A &= A \cap (B \cup B^c) \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \\ &= (A \cap B) \cup A \setminus B \\ &= (A \cap B) \cup B \setminus A \\ &= (A \cap B) \cup (B \cap A^c) \\ &= B \cap (A \cup A^c) \\ &= B \end{aligned}$$
   Oder: Sei $a \in A$, falls $a \notin B$, dann $a \in A \setminus B = B \setminus A \subseteq B$ (Widerspruch). Also $A \subseteq B$, analog $B \subseteq A$.

2.6 Zeigen Sie durch **vollständige Induktion**, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 0$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1.$$

Markieren Sie, wo im Beweis die **Induktionshypothese** verwendet wird.

Solution. **Induktionsanfang**: Für $n = 0$ gilt $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1 = 2^{n+1} - 1$.
Induktionsschritt:

- **Induktionshypothese**: Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.

- **Induktionsbehauptung**: Zu zeigen ist $\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = 2^{(n+1)+1} - 1$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} 2^i &= \sum_{i=0}^{n} 2^i + 2^{n+1} \\
&\overset{IH}{=} 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} \\
&= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 \\
&= 2^{1+(n+1)} - 1 \\
&= 2^{(n+1)+1} - 1
\end{aligned}
$$