

Logik

Serie 2

Nikita Emanuel John Fehér, 3793479

Erik Thun, 3794446

25. April 2025

Mittwoch 09:15-10:45 Keitsch, Jamie; Gruppe e

414

H 2-1. Erfüllbarkeit un Co.

- a) Kreuzen Sie in der Tabelle an, ob die betreffende Formel erfüllbar, falsifizierbar, unerfüllbar oder tautologisch ist.

Formel	Erfüllbar	Falsifizierbar	Unerfüllbar	Tautologisch
$(A_1 \rightarrow A_2) \vee (A_2 \rightarrow A_1)$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$(A_1 \vee A_2) \rightarrow A_1$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\neg((A_1 \leftrightarrow A_2) \vee (A_1 \leftrightarrow A_3) \vee (A_2 \leftrightarrow A_3))$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- b) In welcher der beiden möglichen Teilmengenbeziehungen stehen die Mengen M und N zueinander?
Kurze Begründung.

$$M = \{\varphi | \varphi \text{ ist tautologisch}\}$$

$$N = \{\neg\psi | \psi \text{ ist unerfüllbar}\}$$

Es gilt $N \subsetneq M$, da jedes $\neg\psi \in N$ auch eine Tautologie also $\neg\psi \in M$, nicht jede Tautologie hat $\neg\psi$ als Form.

Bsp. $((a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a)) \in M$, aber $\notin N$

H 2-2. Boolesche Funktionen

a) Nachfolgende Tabelle zeigt alle 2-stelligen Booleschen Funktionen

$$f : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$$

$I(\varphi)$	$I(\psi)$	f^1	f_\wedge	f^3	f^4	f^5	f^6	f^7	f_\vee	f^9	f_{\leftrightarrow}	f^{11}	f^{12}	f^{13}	f_{\rightarrow}	f^{15}	f^{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Definieren Sie Formeln ξ_1 , ξ_2 , und ξ_3 unter Verwendung der Formeln φ und ψ sowie der Junktoren \wedge, \vee, \neg , sodass für alle $I \in \mathcal{B}$ gilt:

i) $I(\xi_1) = f^6(I(\varphi), I(\psi))$

Für $\xi_1 = \psi$ ergibt sich $I(\xi_1) = f^6((I(\varphi), I(\psi)))$

ii) $I(\xi_2) = f^9(I(\varphi), I(\psi))$

Für $\xi_2 = \neg(\varphi \vee \psi)$ ergibt sich $I(\xi_2) = f^9((I(\varphi), I(\psi)))$

iii) $I(\xi_3) = f^{12}(I(\varphi), I(\psi))$

Für $\xi_3 = \varphi \neg \psi$ ergibt sich $I(\xi_3) = f^{12}((I(\varphi), I(\psi)))$

Bsp.: Für $\xi = \neg(\varphi \wedge \psi)$ ergibt sich $I(\xi) = f^{15}(I(\varphi), I(\psi))$

3/3

2-3. Wahrheitstabelle

a) Vervollständigen Sie nachfolgende Wahrheitstabelle.

A_1	A_2	A_3	$\neg A_2 \vee A_3$	$A_1 \rightarrow (\neg A_2 \vee A_3)$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

b) Ist die Formel $A_1 \rightarrow (\neg A_2 \vee A_3)$ falsifizierbar? Falls ja, geben Sie eine entsprechende Belegung an.Ja die Formel ist falsifizierbar mit $A_1 = 1, A_2 = 1, A_3 = 0$ 

415 H 2-4. Modelle und Folgerung

- a) Seien $S, T \subseteq F$ Formelmengen. Beweisen Sie die Antimonotonie des Modelloperators:

$$\text{Falls } S \subseteq T, \text{ dann } \text{Mod}(T) \subseteq \text{Mod}(S).$$

Gehen wir von $S \subseteq T$ aus und sei $I \in \text{Mod}(T)$, heißt das I erfüllt alle Formeln aus T .

Desweiteren wissen wir jede Formel in S liegt auch in T (durch $S \subseteq T$), also liegt I auch in S , da wir von T bereits wissen das I dort alle Formeln erfüllt und in S eine Teilmenge von T ist erfüllt I auch für S alle Formeln. Also $I \in \text{Mod}(S)$.

$$\implies \text{Mod}(T) \subseteq \text{Mod}(S)$$

- b) Seien $\varphi, \psi, \xi \in F$ Formeln mit $\text{Mod}(\varphi) = \{I_1, I_2\}$, $\text{Mod}(\psi) = \{I_2, I_3\}$ und $\text{Mod}(\xi) = \{I_1, I_2, I_3, I_4\}$. Bestimmen Sie die nachfolgenden Mengen bzw. begründen Sie kurz, ob aufgeführte Folgerungsrelationen gelten:

i) $\text{Mod}(\xi \wedge \neg\psi)$

$$\{I_1, I_4\}$$

ii) $\varphi \models \psi$

$$\begin{aligned} \varphi \models \psi &\implies \text{Mod}(\varphi) \subseteq \text{Mod}(\psi) \\ &\implies \{I_1, I_2\} \subseteq \{I_2, I_3\} \\ &\implies I_1 \in \{I_2, I_3\} \\ &\implies \text{falsch} \end{aligned}$$

iii) $\xi \models \psi \rightarrow \varphi$

$$\begin{aligned} \xi \models \psi \rightarrow \varphi &\implies \text{Mod}(\xi) \subseteq \text{Mod}(\psi \rightarrow \varphi) \\ &\implies \{I_1, I_2, I_3, I_4\} \subseteq \text{Mod}(\neg\psi \vee \varphi) \\ &\implies \{I_1, I_2, I_3, I_4\} \subseteq \{I_1, I_2, I_3, I_4\} \end{aligned}$$

H 2-5. Semantische Äquivalenz und Normalformen

515 a) Gegeben die Wahrheitstabelle einer Formel φ mit $s(\psi) = \{A_1, A_2\}$.

A_1	A_2	φ
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

i) Bestimmen Sie eine zu φ semantisch äquivalente Formel φ_K in KNF.

$$(\neg A_1 \vee A_2) \wedge (A_1 \vee \neg A_2) \wedge (A_1 \vee A_2)$$

$$\varphi_K = A_1 \vee A_2$$

ii) Bestimmen Sie eine zu φ semantisch äquivalente Formel φ_D in DNF.

$$\varphi_D = (\neg A_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge \neg A_2) \vee (A_1 \wedge A_2)$$

b) Welche der nachfolgenden Formeln sind semantisch äquivalent? Ohne Beweis.

$$\varphi_1 = A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_1)$$

$$\varphi_2 = A_1 \rightarrow A_1$$

$$\varphi_3 = A_2 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_1)$$

$$\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv \varphi_3$$

c) Beweisen Sie, dass: $A_1 \rightarrow A_2 \equiv \neg(A_1 \wedge \neg A_2)$

$$A_1 \rightarrow A_2 \equiv_{\text{Implikation}} \neg A_1 \vee A_2$$

$$\equiv_{\text{doppelte Negation}} \neg \neg(\neg A_1 \vee A_2)$$

$$\equiv_{\text{de Morgan}} \neg(\neg \neg A_1 \wedge \neg A_2)$$

$$\equiv_{\text{Elimination doppelter Negation}} \neg(A_1 \wedge \neg A_2)$$