Überblick

Inhalt

1. Verschiedene (universelle) Berechnungsmodelle
2. Berechenbare Funktionen
3. Komplexitätstheorie

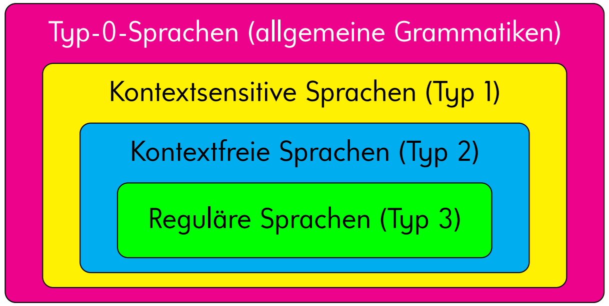
Plakative Fragestellungen

1. Was ist "Berechnung"? (Algorithmus)
2. Was ist "berechenbar"?
3. Wie teuer ist "Berechnung"? (Dimensionen: Zeit und Speicher)

Chomsky-Hierarchie

Noam Chomsky (* 1928)

- Amer. Linguist & Philosoph
- Verfechter Präzision
- Einführung Chomsky-Hierarchie



Chomsky-Grammatik (VL Automaten & Sprachen)

§1.1 Definition (Grammatik; *grammar*)

Grammatik ist Tupel (N, Σ, S, P)

1. endliche Menge N von **Nichtterminalen** *(nonterminals)*
2. endliche Menge Σ von **Terminalen** *(terminals)* mit $N \cap \Sigma = \emptyset$
3. **Startnichtterminal** $S \in N$ *(initial nonterminal)*
4. endliche Menge P von **Produktionen** *(productions)* der Form $\ell \to r$ mit $\ell \in (N \cup \Sigma)^+ \setminus \Sigma^+$ und $r \in ((N \setminus \{S\}) \cup \Sigma)^*$

Notizen

- Linke Produktionsseite ℓ = Sequenz Nichtterminale & Terminale (mind. 1 Nichtterminal)
- Rechte Produktionsseite r = Sequenz Nichtterminale & Terminale (Startnichtterminal darf nicht vorkommen)

Chomsky-Grammatik (VL Automaten & Sprachen)

§1.2 Definition (kontextsensitiv, kontextfrei, regulär)

Grammatik (N, Σ, S, P) ist

- **kontextsensitiv** *(context-sensitive)* falls $|\ell| \leq |r|$,
- **kontextfrei** *(context-free)* falls $\ell \in N$ und $r \neq \varepsilon$, und
- **regulär** *(regular)* falls $\ell \in N$ und $r \in (\Sigma \times N) \cup \Sigma$

für jede Produktion $(\ell \to r) \in P \setminus \{S \to \varepsilon\}$

§1.3 Beispiel

Grammatik $G = (\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \quad S \to S' \quad S' \to aS'a \quad S' \to bS'b \quad S' \to aa \quad S' \to bb$$

kontextsensitiv	kontextfrei	regulär
✓	✓	✗

Chomsky-Grammatik

§1.4 Beispiel

Grammatik $G = (\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P)$ mit Produktionen P

$$S \to S'E \qquad S' \to aS'a \qquad S' \to bS'b \qquad S' \to E$$

$$Ea \to EA \qquad Aa \to aA \qquad Ab \to bA \qquad AE \to Ea$$
$$Eb \to EB \qquad Ba \to aB \qquad Bb \to bB \qquad BE \to Eb$$

$$EE \to \varepsilon$$

kontextsensitiv	kontextfrei	regulär
✗	✗	✗

Semantik (VL Automaten & Sprachen)

§1.5 Definition (Ableitungsschritt; *derivation step*)

Sei $G = (N, \Sigma, S, P)$ Grammatik
Ableitungsrelation $\Rightarrow_G \subseteq (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$ ist

$$\Rightarrow_G = \{(v\ell v', vrv') \mid (\ell \to r) \in P,\ v, v' \in (N \cup \Sigma)^*\}$$

Illustration

- Produktion $\ell \to r \in P$
- Ableitungsschritt $\cdots \ell \cdots \Rightarrow_G \cdots r \cdots$

Semantik

Beispiel (§1.3)

Kontextfreie Grammatik $G = (\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \quad S \to S' \quad S' \to aS'a \quad S' \to bS'b \quad S' \to aa \quad S' \to bb$$

Ableitungsschritte

- Ableitung von $v = abbaabba$

$$S \Rightarrow_G S' \Rightarrow_G aS'a \Rightarrow_G abS'ba \Rightarrow_G abbS'bba \Rightarrow_G \underbrace{abbaabba}_{=v}$$

- Allgemein $S \Rightarrow_G^* ww^R$ für alle $w \in \{a, b\}^*$

Semantik

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = (\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P)$ mit Produktionen P

$$S \to S'E \qquad S' \to aS'a \qquad S' \to bS'b \qquad S' \to E$$
$$Ea \to EA \qquad Aa \to aA \qquad Ab \to bA \qquad AE \to Ea$$
$$Eb \to EB \qquad Ba \to aB \qquad Bb \to bB \qquad BE \to Eb$$
$$EE \to \varepsilon$$

$$S \Rightarrow_G S'E \Rightarrow_G aS'aE \Rightarrow_G abS'baE \Rightarrow_G abEbaE$$
$$\Rightarrow_G abEBaE \Rightarrow_G abEaBE \Rightarrow_G abEaEb \Rightarrow_G abEAEb$$
$$\Rightarrow_G abEEab \Rightarrow_G ab\varepsilon ab = abab$$

Allgemein $S \Rightarrow_G^* ww$ für alle $w \in \{a, b\}^*$

Erzeugte Sprache (VL Automaten & Sprachen)

§1.6 Definition (Erzeugte Sprache; *generated language*)

Sei $G = (N, \Sigma, S, P)$ Grammatik
Die von G **erzeugte Sprache** $L(G) \subseteq \Sigma^*$ ist

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* w\}$$

Beispiel (§1.3)

Kontextfreie Grammatik $G = (\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \quad S \to S' \quad S' \to aS'a \quad S' \to bS'b \quad S' \to aa \quad S' \to bb$$

Erzeugte Sprache $L(G) = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

Erzeugte Sprache

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = (\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P)$ mit Produktionen P

$$\begin{array}{llll} S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\ Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\ Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\ EE \to \varepsilon & & & \end{array}$$

Erzeugte Sprache $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

Sprachklassen (VL Automaten & Sprachen)

§1.7 Definition (Sprachklassen; *language classes*)

Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist

- **regulär** *(regular)*,
  falls reguläre Grammatik G mit $L(G) = L$ existiert
- **kontextfrei** *(context-free)*,
  falls kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L$ existiert
- **kontextsensitiv** *(context-sensitive)*,
  falls kontextsensitive Grammatik G mit $L(G) = L$ existiert

Notizen

- Sprache regulär falls erzeugbar von regulärer Grammatik
- Analog für weitere Sprachklassen

Sprachklassen

Beispiel (§1.3)

Kontextfreie Grammatik $G = (\{S, S'\}, \{a, b\}, S, P)$ mit Produktionen P

$$S \to \varepsilon \quad S \to S' \quad S' \to aS'a \quad S' \to bS'b \quad S' \to aa \quad S' \to bb$$

Erzeugte Sprache $L(G) = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

- Frage: Ist Sprache $L(G)$ kontextfrei?
- Antwort: Ja, denn kontextfreie Grammatik G erzeugt $L(G)$

Sprachklassen

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = (\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P)$ mit Produktionen P

$$\begin{array}{cccc} S \to S'E & S' \to aS'a & S' \to bS'b & S' \to E \\ Ea \to EA & Aa \to aA & Ab \to bA & AE \to Ea \\ Eb \to EB & Ba \to aB & Bb \to bB & BE \to Eb \\ EE \to \varepsilon & & & \end{array}$$

Erzeugte Sprache $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

- Frage: Ist $L(G)$ nicht kontextsensitiv, da G nicht kontextsensitiv?
- Antwort: Nein, nur falls keine kontextsen. Grammatik $L(G)$ erzeugt

Reguläre Sprachen (VL Automaten & Sprachen)

Beschreibung

- Reguläre Grammatik
- Endlicher Automat (nichtdeterministisch oder deterministisch)
- Regulärer Ausdruck

Stichworte

- Normalformen, Determinisierung & Minimierung
- Abschluss- & Entscheidbarkeitsresultate
- Pumping-Lemma

Kontextfreie Sprachen (VL Automaten & Sprachen)

Beschreibung

- Kontextfreie Grammatik
- Kellerautomat (nichtdeterministisch)
- Deterministischer Kellerautomat (strikt schwächer)

Stichworte

- Normalformen & Parsing-Algorithmen
- Abschluss- & Entscheidbarkeitsresultate
- Pumping-Lemma

Kontextsensitive Sprachen

Beschreibung

- Kontextsensitive Grammatik
- Linear beschränkte Turingmaschine (nichtdeterministisch)
- Linear beschränkte det. Turingmaschine (Mächtigkeit unklar)

Stichworte

- Normalformen & Parsing-Algorithmus
- Abschluss- & Entscheidbarkeitsresultate

Typ-0-Sprachen

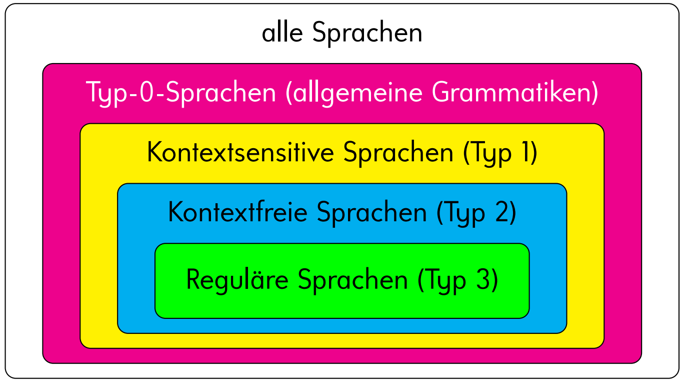
Beschreibung

- Chomsky-Grammatik
- Turingmaschine (nichtdeterministisch oder deterministisch)
- While-Programm, μ-rekursive Funktion (berechenbare Funktion)

Stichworte

- Normalformen & Determinisierung
- Abschluss- & Entscheidbarkeitsresultate

Ausblick — Chomsky-Sprachklassen



$$\text{Typ-3}(\Sigma) \subsetneq \text{Typ-2}(\Sigma) \subsetneq \text{Typ-1}(\Sigma) \subsetneq \text{Typ-0}(\Sigma) \subsetneq \mathcal{P}(\Sigma^*)$$

Ausblick — Chomsky-Sprachklassen

Eigenschaften

- Es gibt Sprachen, die nicht Typ-0 sind
- Es gibt Typ-0-Sprachen mit unentscheidbarem Wortproblem

§1.8 Definition (abzählbar; *countable* — VL Diskrete Strukturen)

Menge M ist **abzählbar** falls injektive Funktion $f\colon M \to \mathbb{N}$ existiert

Notizen

- M abzählbar gdw. jedem $m \in M$ eigene natürliche Zahl zuweisbar
- Natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ abzählbar

Abzählbarkeit

§1.9 Theorem (Abzählbarkeit von $\mathbb{N}^k$)

Menge $\mathbb{N}^k$ abzählbar für alle $k \in \mathbb{N}$

Beweis

Seien $p_1, \dots, p_k$ verschiedene Primzahlen. Definiere $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ durch

$$f(n_1, \dots, n_k) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i} = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} \qquad \text{für alle } n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

Falls $f(m_1, \dots, m_k) = f(n_1, \dots, n_k)$ für $m_1, \dots, m_k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, dann $m_i = n_i$ für alle $1 \leq i \leq k$ da Primfaktorenzerlegung eindeutig. Also ist f injektiv und $\mathbb{N}^k$ damit abzählbar. $\square$

Abzählbarkeit

§1.10 Theorem (Abzählbarkeit von $\mathbb{N}^*$)

Menge $\mathbb{N}^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ abzählbar

Beweis

Menge $\mathbb{N}^k$ abzählbar via injektiver Funktion $f_k \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ nach Thm §1.9. Sei $f \colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f(w) = f_2(|w|, f_{|w|}(w)) \qquad \text{für alle } w \in \mathbb{N}^*$$

Falls $f(w) = f(w')$ für $w, w' \in \mathbb{N}^*$, dann folgen aus Injektivität von f_2 sowohl $|w| = |w'|$ als auch $f_{|w|}(w) = f_{|w'|}(w')$. Weiterhin folgt $w = w'$ aus Injektivität von $f_{|w|} = f_{|w'|}$. Also ist f injektiv und $\mathbb{N}^*$ abzählbar. □

Abzählbarkeit der Grammatiken

1. Kodiere Terminale durch ungerade Zahlen ($a = 1$; $b = 3$)
2. Gerade positive Zahlen für Nichtterminale ($S = 2$; $S' = 4$; $\dots$) (beginnend mit Startnichtterminal)
3. 0 als Trennzeichen

Beispiel (§1.4)

Grammatik $G = (\{S, S', A, B, E\}, \{a, b\}, S, P)$ mit Produktionen P

$S \to S'E$	$S' \to aS'a$	$S' \to bS'b$	$S' \to E$
$Ea \to EA$	$Aa \to aA$	$Ab \to bA$	$AE \to Ea$
$Eb \to EB$	$Ba \to aB$	$Bb \to bB$	$BE \to Eb$
$EE \to \varepsilon$			

$$c(G) = \underbrace{2.0.4.10}_{S \to S'E}.0.\underbrace{4.0.1.4.1}_{S' \to aS'a}.0.\underbrace{4.0.3.4.3}_{S' \to bS'b}.0.\cdots$$

Abzählbarkeit Typ-0-Sprachen

§1.11 Theorem (Abzählbarkeit Typ-0-Sprachen)

Typ-0-Sprachen $\text{Typ-0}(\Sigma) \subseteq \mathcal{P}(\Sigma^*)$ über Alphabet Σ abzählbar

Beweis (nutzt Auswahlaxiom)

Jede Grammatik G kann als Element $c(G) \in \mathbb{N}^*$ kodiert werden (c nicht injektiv). Sei Kodierung der Terminale aus Σ fest.

$$c \colon \{G \mid G \text{ Grammatik über } \Sigma\} \to \mathbb{N}^*$$

Für alle Grammatiken G und G' mit $c(G) = c(G')$ gilt $L(G) = L(G')$. Menge $C = \{c(G) \mid G \text{ Grammatik über } \Sigma\}$ abzählbar da $C \subseteq \mathbb{N}^*$ und $\mathbb{N}^*$ abzählbar gemäß Thm §1.10. Also ist Relation

$$\rho = \{(c(G), L(G)) \mid G \text{ Grammatik über } \Sigma\}$$

surjektive Funktion $\rho \colon C \to \text{Typ-0}(\Sigma)$. Mit Auswahlaxiom existiert $g \colon \text{Typ-0}(\Sigma) \to C$ injektiv (VL Diskrete Strukturen). Sei f aus Thm §1.10. Dann ist $(g\,;f) \colon \text{Typ-0}(\Sigma) \to \mathbb{N}$ injektiv und $\text{Typ-0}(\Sigma)$ abzählbar. □

Abzählbarkeit Typ-0-Sprachen

Notizen

- Thm §1.11 gilt auch ohne Auswahlaxiom
- Betrachte längen-lexikographische Ordnung $\preceq \subseteq \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ auf $\mathbb{N}^*$ (ordne Elemente zunächst nach Länge, dann lexikographisch)
- Ordnung $\preceq$ total und Wohlordnung (für nichtleere Teilmenge $N \subseteq \mathbb{N}^*$ existiert $\min_{\preceq}(N) \in N$)
- Für $\rho \colon C \to \text{Typ-0}(\Sigma)$ surjektiv, definiere $\bar{\rho} \colon \text{Typ-0}(\Sigma) \to \mathbb{N}^*$

$$\bar{\rho}(L) = \min_{\preceq}\{w \in \mathbb{N}^* \mid \rho(w) = L\} \qquad \text{für alle } L \in \text{Typ-0}(\Sigma)$$

- $\bar{\rho}$ wohldefiniert, da $\{w \in \mathbb{N}^* \mid \rho(w) = L\}$ nichtleer (Surjektivität ρ) und somit existiert Minimum
- $\bar{\rho}$ ist offensichtlich injektiv (gleiche Kodierung → gleiche Sprache)
- Also $\text{Typ-0}(\Sigma)$ abzählbar

Überabzählbarkeit aller Sprachen

§1.12 Lemma

Unendliche Menge M abzählbar gdw. Bijektion $f\colon \mathbb{N} \to M$ existiert

§1.13 Theorem (Überabzählbarkeit aller Sprachen)

Menge $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ aller Sprachen über Σ <u>nicht</u> abzählbar

Beweis

Σ^* abzählbar und unendlich. Cantors Theorem (VL Diskrete Strukturen) zeigt, dass $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ strikt mächtiger als Σ^*. Also $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ <u>nicht</u> abzählbar (d.h. überabzählbar). □

Überabzählbarkeit aller Sprachen

Theorem (§1.13 Überabzählbarkeit aller Sprachen)

Menge $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ aller Sprachen über Σ <u>nicht</u> abzählbar

Beweis (detailliert)

Da Σ^* abzählbar unendlich, existiert $f\colon \mathbb{N} \to \Sigma^*$ bijektiv gem. Lm §1.12. Offenbar ist $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ unendlich. Sei $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ abzählbar; d.h. gem. Lm §1.12 existiert $g\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ bijektiv.

Betrachte Sprache $L = \{f(i) \mid i \in \mathbb{N},\ f(i) \notin g(i)\}$.

Da g bijektiv, existiert $i \in \mathbb{N}$ mit $L = g(i)$.
Dann $f(i) \in L$ gdw. $f(i) \notin g(i) = L$. Widerspruch ↯
Also $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ <u>nicht</u> abzählbar. □

Überabzählbarkeit aller Sprachen

Diagonalisierung

$L' \setminus w$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$\cdots$
$g(0)$	$\boxed{\text{✗}}$	✗	✓	✓	$\cdots$
$g(1)$	✗	$\boxed{\text{✓}}$	✓	✗	$\cdots$
$g(2)$	✗	✗	$\boxed{\text{✓}}$	✗	$\cdots$
$g(3)$	✓	✓	✗	$\boxed{\text{✓}}$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
L	✓	✗	✗	✗	$\cdots$

$$L = \{f(i) \mid i \in \mathbb{N},\ f(i) \notin g(i)\}$$

1. Hauptsatz

§1.14 Theorem

Nicht alle Sprachen sind Typ-0

Beweis

Typ-0-Sprachen $\text{Typ-0}(\Sigma)$ über Σ abzählbar gemäß Thm §1.11.
Menge $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ aller Sprachen über Σ überabzählbar gemäß Thm §1.13.
Also $\text{Typ-0}(\Sigma) \subsetneq \mathcal{P}(\Sigma^*)$. □