Analysis [für Informatiker]
Hausaufgabenblatt 1

Nikita Emanuel John Fehér, 3793479
Erik Thun, 3794446

13. Oktober 2025
Mittwoch 13:15-14:45; Schneider, Florian d
Montag 13:15-14:45; Stecker, Leander a

Aufgabe 1. **(4 Punkte)**
Wir werden in der Vorlesung die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ noch genauer kennenlernen. Für dies Aufgabe genügt es aber $\mathbb{N}$ als die Menge aller "Zählzahlen" also Zahlen, mit denen man die Anzahl diskreter Objekte (z.B. Äpfel) angeben kann.

(a) Geben Sie alle Elemente der Menge $\{n \in \mathbb{N} : 2n + 1 < 6\}$ an. 1 Punkt

(b) Geben Sie alle Teilmengen der Menge $\{1, 2, 3\}$ an. 1 Punkt

(c) Geben Sie den Schnitt und die Vereinigung der beiden Mengen 2 Punkte

$$\{1, 10, 9, 5, 2\} \text{ und } \{9, 3, 10, 6, 8, 1, 5\}$$

an.

(a) 1, 2

(b) $\{\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$

(c) $\{1, 10, 9, 5, 2\} \cap \{9, 3, 10, 6, 8, 1, 5\} = \{1, 5, 9, 10\}$

$\{1, 10, 9, 5, 2\} \cup \{9, 3, 10, 6, 8, 1, 5\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10\}$

Aufgabe 2. **(4 Punkte)**

(a) Sei $f : X \to Y$ eine beliebige Abbildung und seien $Y_1, Y_2 \subset Y$ beliebig. Zeigen Sie, dass

i) $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$. 1 Punkt

ii) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$. 2 Punkte

(b) Finden Sie ein Beispiel, sodass $f(X_1 \cap X_2) \neq f(X_1) \cap f(X_2)$. 1 Punkt

(b) $f(x) = x^2$

$f(\{\}) = 0$

$x_1 = 1$

$x_2 = -1$

$f(\{1\} \cap \{-1\}) = f(\{\}) = \{0\} \neq \{1\} = \{1\} \cap \{1\} = f(\{1\}) \cap f(\{-1\})$

(a) i) sei $y \in f(x_1 \cap x_2) \Rightarrow \exists x \in X_1 \cap X_2,\ y = f(x)$

$\Rightarrow x \in X_1$ und $x \in X_2$

$\Rightarrow y \in f(x_1)$ und $y \in f(x_2)$

$\Rightarrow y \in f(x_1) \cap f(x_2)$

$\square$

ii) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$. 2 Punkte

$\subseteq$:

$x \in f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) \Rightarrow \exists y \in Y_1 \cap Y_2$ so dass $x \in f^{-1}(y)$

$\Rightarrow y \in Y_1$ und $y \in Y_2$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(Y_1)$ und $x \in f^{-1}(Y_2)$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$

$\supseteq$: $x \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) \Rightarrow x \in f^{-1}(Y_1)$ und $x \in f^{-1}(Y_2)$

$\Rightarrow \exists y \in Y_1 \cap Y_2,\ x = f^{-1}(y)$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$

$\square$

Aufgabe 3. **(2 Punkte)**

Zeigen Sie, dass folgende Äquivalenz gilt:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ oder } y = 0).$$

Algebraiker formulieren dies als: Keine "Nullteiler" in R bzw. einem Körper.

Widorspruch: angenommen x und y sind beide $\neq 0$

dann $xy = 0$

$\Rightarrow xy = 0 \quad | \cdot y^{-1}$ das geht, da $y \neq 0$

$\Rightarrow x \cdot y \cdot y^{-1} = 0 \cdot y^{-1}$

$\Rightarrow x \cdot 1 = 0$

$\Rightarrow x = 0 \quad \lightning \quad x \neq 0$

$\Rightarrow$ Annahme falsch $\square$

Aufgabe 4. (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die neutralen Elemente der Addition bzw. Multiplikation, d.h. 0 und 1, eindeutig sind.

„+": Widerspruch: 0 ist nicht einziges neutrales Element

weiteres neutrales Element $\alpha \in \mathbb{R}$

$0 + x = x \qquad x \in \mathbb{R}$

$\alpha + x = x$

$0 + \alpha = \alpha$

$\alpha + 0 = 0$

$\alpha + 0 = 0 + \alpha$

$0 = \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$

$0 = \alpha$ ↯

es gibt nur ein neutrales Element auf $\mathbb{R}$

„·": Widerspruch: 1 ist nicht einziges neutrales Element, $\alpha \in \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}$: I) $1 \cdot x = x$

II) $\alpha \cdot x = x$

III) $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1$

$1 \overset{II}{=} \alpha \cdot 1 \overset{III}{=} 1 \cdot \alpha \overset{I}{=} \alpha$

$1 = \alpha$ ↯

es gibt nur ein neutrales Element $\square$