11.2

Zeigen Sie dass ein Homomorphismus $\phi : A \to B$ injektiv ist gdw. $\ker(\phi) = \{0_A\}$

"$\implies$": Annahme: ϕ ist injektiv $\implies \phi(x_1) = \phi(x_2) \implies x_1 = x_2$
sei $x_2 = 0_A : \phi(x_1) = \phi(0_A) \implies x_1 = 0_A$
$\implies \ker(\phi) = \{0_A\}$

"$\impliedby$": Annahme: $\ker(\phi) = \{0_A\}$

- Sei $\phi(x_1) = \phi(x_2)$ für $x_1, x_2 \in A$
- Da ϕ Homomorphismus: $\phi(x_1) - \phi(x_2) = \phi(x_1 - x_2)$
- Aus $\phi(x_1) = \phi(x_2)$ folgt: $\phi(x_1 - x_2) = 0_B$
- $x_1 - x_2 \in \ker(\phi) \implies \ker(\phi) = \{0_A\}$
  $\implies x_1 - x_2 = 0_A \implies x_1 = x_2$

$\square$