Aufgabe 1 (18 Punkte)

In den folgenden Aufgaben sind die Ergebnisse **ohne** *Begründung in den dafür vorgegebenen Kästchen anzugeben. Nebenrechnungen und Ergebnisse ausserhalb der Kästchen werden* **nicht** *gewertet. Jede Aufgabe gibt 1,5 Punkte.*

(a) Gegeben sind die reellen Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist nur eines der Produkte AB bzw. BA definiert. Kreuzen Sie das Richtige an und berechnen Sie dieses.

(b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, so dass das folgende lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat:

$$\begin{aligned} x \quad &- \quad ay &= 1 \\ (a-1)x \quad &- \quad 2y &= 1. \end{aligned}$$

(c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\{u_1, u_2\}$ bezüglich des Standardskalarproduktes von

$$U = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \subset \mathbb{R}^3.$$

(d) Gegeben sind die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$. Geben Sie einen Vektor $v_3 \in \mathbb{R}^3$ an, so dass $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

(e) Bestimmen Sie die Dimension des Unterraums

$$U = \{(w,x,y,z)^T \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^4.$$

(f) Bestimmen Sie die Determinante:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

(g) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Inverse A^{-1} von A.

(h)

(i) Gegeben Sei der Untervektorraum

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \rangle \subset \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $U^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, u \rangle = 0 \; \forall \; u \in U\}$ von U bezüglich des Standardskalarproduktes.

(j) Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Bestimmen Sie die geometrische Vielfachheit $m_g(3)$ des Eigenwertes 3.

(k) Gegeben sind die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 10 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante der Matrix $C := A^{-1}B$.

(l) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_A der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

in faktorisierter Form.

Aufgabe 1 (18 Punkte)

In den folgenden Aufgaben sind die Ergebnisse **ohne** *Begründung in den dafür vorgegebenen Kästchen anzugeben. Nebenrechnungen und Ergebnisse ausserhalb der Kästchen werden* **nicht** *gewertet. Jede Aufgabe gibt 1,5 Punkte.*

(a) Gegeben sind die reellen Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist nur eines der Produkte AB bzw. BA definiert. Kreuzen Sie das Richtige an und berechnen Sie dieses.

$A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$\Rightarrow$ $A \cdot B$ ist nicht def., $\underbrace{B}_{2\times 2} \cdot \underbrace{A}_{2\times 3}$ ist def., $B \cdot A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -3 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, so dass das folgende lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat:

$$\begin{aligned} x \quad - \quad ay &= 1 \\ (a-1)x \quad - \quad 2y &= 1. \end{aligned}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -a & 1 \\ a-1 & -2 & 1 \end{array}\right) \cdot (-(a-1)) \;\; +$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -a & 1 \\ 0 & a^2-a-2 & 2-a \end{array}\right)$$

$$a^2 - a - 2 = 0 \iff a = \frac{1}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{1}{4} + 2}}_{= \frac{3}{2}} \iff a = 2 \lor a = -1$$

$$2 - a = 0 \iff a = 2$$

$\Rightarrow$ Das GLS $A \cdot x = b$ besitzt genau dann unendlich viele Lösungen, wenn $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(A|b) < 2$ ist, d.h. wenn $a = 2$ ist.

(c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\{u_1, u_2\}$ bezüglich des Standardskalarproduktes von

$$U = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \subset \mathbb{R}^3.$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\|v_1\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} u_2' &:= v_2 - \langle u_1, v_2 \rangle \cdot u_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \cdot (2 + 3 - 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\|u_2'\| = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{(-1)^2+7^2+(-5)^2} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{75}$$

$$u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{75}}\cdot\begin{pmatrix}-1\\7\\-5\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \{u_1,u_2\}$ ist eine Orthonormalbasis von U.

(d) Gegeben sind die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 := \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$. Geben Sie einen Vektor $v_3 \in \mathbb{R}^3$ an, so dass $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

$$\begin{pmatrix}v_1^T\\v_2^T\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix} \begin{matrix}\cdot(-2)\\ +\end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Die Pivotindizies sind $j_1 = 1$, $j_2 = 2$

Setze $v_3 := e_3$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Allgemein:

Seien $v_1,\dots,v_m \in \mathbb{R}^n$. Bringe $A := \begin{pmatrix}v_1^T\\ \vdots \\ v_m^T\end{pmatrix}$ auf ZSF.

Seien $j_1,\dots,j_r$ die Pivotindizies. Dann gilt:

$\{v_{j_1},\dots,v_{j_r}\} \cup \{e_j \mid j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j_1,\dots,j_r\}\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^n$.

Probe:

$$\begin{pmatrix}v_1^T\\v_2^T\\v_3^T\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \operatorname{Rang}(v_1,v_2,v_3) = 3 \quad \Rightarrow \{v_1,v_2,v_3\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

(e) Bestimmen Sie die Dimension des Unterraums

$$U = \{(w,x,y,z)^T \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^4.$$

$$U = \{ (w,x,y,z)^T \in \mathbb{R}^4 \mid x = 2y - z \}$$

$$= \{ (w, 2y-z, y, z) \mid w,y,z \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ w \cdot \underbrace{(1,0,0,0)}_{=:v_1} + y \cdot \underbrace{(0,2,1,0)}_{=:v_2} + z \cdot \underbrace{(0,-1,0,1)}_{=:v_3} \mid w,y,z \in \mathbb{R} \}$$

$$= \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ ist ein Erzeugendensystem von U.

Für alle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0 \iff (\lambda_1, 2\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0,0)$$

$$\iff \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ ist linear unabhängig

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ ist eine Basis von U $\Rightarrow \dim(U) = 3$.

Alternativ:

$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f(w,x,y,z) := x - 2y + z$

Setze $A := (0, 1, -2, 1)$

$\Rightarrow f(w,x,y,z) = A \cdot \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $U = \operatorname{Kern}(f)$

$\dim \operatorname{Bild}(f) = \operatorname{Rang}(f) = \operatorname{Rang}(A) = 1$

$\overset{\text{Dim.-Formel für}}{\underset{\text{lin. Abb.}}{\Rightarrow}}$ $\dim \operatorname{Kern}(f) = 4 - \dim \operatorname{Bild}(f) = 4 - 1 = 3 \Rightarrow \dim(U) = 3.$

Satz (Dimensionsformel für lineare Abbildungen) (Sehr wichtig!)

Seien V und W endlich dimensionale K-Vektorräume und sei $f: V \to W$ linear. Dann gilt:

$$\dim(V) = \dim \operatorname{Kern}(f) + \dim \operatorname{Bild}(f)$$

(f) Bestimmen Sie die Determinante:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot(-3) \quad = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot(-2) \quad \cdot 1$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix} \cdot 1$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 1\cdot 2\cdot 1\cdot 6 = 12$$

(g) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Inverse A^{-1} von A.

$$(A\,|\,E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot 1 \quad \cdot(-1)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot \frac{1}{3} \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \cdot(-1)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & -\frac{3}{6} \end{array}\right) \cdot(-1)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{3}{6} \end{array}\right) \cdot(-1) \quad \cdot(-1)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{7}{6} & -\frac{2}{6} & -\frac{3}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{6} & 0 & -\frac{3}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{3}{6} \end{array}\right) \cdot(-2)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{3}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{6} & 0 & -\frac{3}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{3}{6} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{= E_3} \qquad \underbrace{}_{= A^{-1}}$$

Probe: $A \cdot A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = E_3 \checkmark$$

(i) Gegeben Sei der Untervektorraum

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \rangle \subset \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $U^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, u \rangle = 0 \; \forall \; u \in U\}$ von U bezüglich des Standardskalarproduktes.

$u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} U^\perp &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, u_1 \rangle = 0 \wedge \langle x, u_2 \rangle = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_3 = 0 \wedge 2x_2 - 6x_3 = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = -2x_3 \wedge x_2 = 3x_3\} \\ &= \{(-2x_3, 3x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_3 \cdot \underbrace{(-2, 3, 1)}_{=: w_1} \mid x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{span}\{w_1\}. \end{aligned}$$

$\langle x, u_1 \rangle = 0 \wedge \langle x, u_2 \rangle = 0$

Sei $u \in U \Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}: u = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle x, u \rangle &= \langle x, \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 \rangle \\ &= \lambda_1 \langle \underbrace{x, u_1}_{=0} \rangle + \lambda_2 \cdot \langle \underbrace{x, u_2}_{=0} \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

(j) Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Bestimmen Sie die geometrische Vielfachheit $m_g(3)$ des Eigenwertes 3.

$$\mathrm{Rang}(A - 3\cdot E_3) = \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 4-3 & 0 & 1 \\ 2 & 3-3 & 2 \\ 1 & 0 & 4-3 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ + \\ \cdot(-1) \\ + \end{matrix}$$

$$= \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow m_g(3) = \mathrm{geom}(A, 3) = \dim \mathrm{Kern}(A - 3\cdot E_3) = 3 - \mathrm{Rang}(A - 3\cdot E_3) = 3 - 1 = 2$$

$$\left(A \in K^{m\times n} \Rightarrow \dim \mathrm{Kern}(A) = n - \mathrm{Rang}(A) \right)$$

(k) Gegeben sind die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 10 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante der Matrix $C := A^{-1}B$.

$$\det(A) = 2\cdot(-2)\cdot(-1) = 4 \quad \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{4}$$

$$\det(B) = \det(B^T) = \det\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 3\cdot 2\cdot 4 = 24$$

$$\Rightarrow \det(C) = \det(A^{-1}\cdot B) \underset{\text{Multiplikationssatz}}{\overset{\text{Determinanten-}}{=}} \det(A^{-1})\cdot \det(B) = \frac{1}{4}\cdot 24 = 6.$$

(l) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_A der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

in faktorisierter Form.

$$\chi_A(\lambda) = p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{1. Spalte}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} (2-\lambda)\cdot\left((1-\lambda)\cdot(4-\lambda)+2\right) = -(\lambda-2)\cdot(\lambda^2-5\lambda+6)$$

$$= -(\lambda-2)\cdot(\lambda-2)\cdot(\lambda-3) = -(\lambda-2)^2\cdot(\lambda-3).$$