Übungsblatt 12 A

1) Der harmonische Oszillator/Federschwinger Sei $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und möge für jedes reelle x gelten $y''(x)+y(x) = 0$. Zeigen Sie: wenn $y(0) = y'(0) = 0$ dann ist $y(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. *[Hinweis: Betrachten Sie $E_y(x) = y^2(x)+(y'(x))^2$ und leiten Sie eine Differentialgleichung für E_y ab.]* 2^*Pkt

   Welche physikalische Größe stellt E_y dar? 1^*Pkt

   Beweisen Sie nun: Wenn y eine allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung $y'' + y = 0$ auf $\mathbb{R}$ ist, dann gilt

   $$\text{für jedes reelle } x: \quad y(x) = y(0)\cos(x) + y'(0)\sin(x).$$

   [Hinweis: Betrachten Sie die Differenz von linker und rechter Seite der behaupteten Formel.] 1^*Pkt

2) Zeigen Sie, dass die Funktion $-\cos(x)$ auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ konvex ist, und leiten Sie daraus her, dass (mit klassichem Winkelargument im Kosinus) für jedes spitzwinklige Dreieck mit Innenwinkel α, β und γ gilt

   $$\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos\gamma) \leq \frac{3}{2}.$$

   Finden Sie alle spitzwinkligen Dreiecke bei denen Gleichheit auftritt! $3^* + 2^*$ Punkte *[Hinweis: Für den zweiten Teil von 5.25 d) und insbesondere c) nochmal genau inspizieren.]*

3) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte, zB mit der l'Hospitalschen Regel 5.20.

   $$\lim_{x\to 1} \frac{x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}, \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\sin(x)} \right), \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x^3) - x^3}{\sin(x^3) - x^3}.$$

   (Die l'Hospitalsche Regel ist oft sehr nützlich, aber ohne weiteres Nachdenken nicht immer das Schnellste. Sorgfältige Vereinfachung in der Vorbereitung und auch während der Rechnung verkürzt diese oft erheblich.) 1+2+2 Punkte

Hinweis: Die verbleibenden 10 Pflichtpunkte vom zwölften ÜZ werden auf zwei Blätter 12 A und 12 B gleichmäßig verteilt um klausurtypische Aufgabentypen hervorzuheben! Bleiben Sie dran,

Wie immer, begründen Sie Ihre Aussagen sorgfältig! Skizzen können und sollen der Lösungsfindung dienen, sind aber keine Beweise.

Bitte geben Sie pro Lösungsteam nur EINE Lösung ab !!!, die Korrekturen verzögern sich sonst unnötig. Danke.

Nach der Vorlesung abgegebene Lösungen werden nicht voll bewertet!

Abgabe am 23.1.2024 11:00 online(Moodlekurs) oder 17:15 HS2 zur Vorlesung.