Diskrete Strukturen (WS 2023-24) - Halbserie 1

Bitte nur Probleme 1.1, 1.2 und 1.3 einreichen.

1.1 (bitte direkt auf moodle als Quiz-Frage antworten.) **[4]**

1.2 **[3]**

Es seien die folgenden **Prädikate** gegeben:

- $Z(x)$: x ist eine ganze Zahl,
- $P(x)$: x ist eine Primzahl,
- $E(x)$: x ist eine gerade Zahl,
- $D(x, y)$: x ist durch y teilbar.

Formalisieren Sie folgende Aussagen:

1. Es gibt eine Primzahl, die gerade ist.
2. Jede ganze Zahl ist durch eine Primzahl teilbar.
3. Es gibt keine Primzahl, die durch eine gerade Zahl teilbar ist.

Solution.

1. $\exists x(P(x) \land E(x))$
2. $\forall x(Z(x) \to (\exists y(P(y) \land D(x, y)))$
3. $\neg\exists x(P(x) \land \exists y(E(y) \land D(x, y)))$

1.3 **[3]**

Gegeben sei die folgende Aussage:

Wenn eine ganze Zahl gerade ist, so besitzt sie mindestens zwei verschiedene Teiler.

Geben Sie die **Kontraposition** dieser Aussage

1. in natürlicher Sprache
2. als prädikatenlogische Formel an. Verwenden Sie die Prädikate aus Aufgabe 1.2.

Solution.

1. Die Kontraposition lautet: Wenn eine ganze Zahl nicht mindestens zwei verschiedene Teiler besitzt, so ist sie keine gerade Zahl.

2. Formalisierung (andere Lösungen sind auch möglich):

$$\forall x(Z(x) \rightarrow ((\neg \exists y \exists z(y \neq z \wedge D(x, y) \wedge D(x, z))) \rightarrow \neg E(x)))$$

1.4 Es seien P und Q Prädikate.
Sind die folgenden **Äquivalenzen** wahr? Wenn nicht dann geben Sie ein Gegenbeispiel an. Wenn ja, dann beweisen Sie es mit zwei Implikationen.

1. $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ ist äquivalent zu $\exists x(P(x)) \wedge \exists x(Q(x))$

2. $\exists x(P(x) \vee Q(x))$ ist äquivalent zu $\exists x(P(x)) \vee \exists x(Q(x))$

Solution.

1. Falsch. Begründung durch Gegenbeispiel, wähle z.B. Universum $\mathbb{Z}$, $P =$ Gerade, $Q =$ Ungerade: Die rechte Formel gilt, die linke Formel gilt nicht.

2. Wahr.

   ($\Rightarrow$) Angenommen $\exists x(P(x) \vee Q(x))$. Es gibt also ein Element a sodass $P(a) \vee Q(a)$ gilt. Wir machen eine Fallunterscheidung:
   (1) Angenommen $P(a)$ gilt. Dann gilt $\exists x P(x)$ und daraus folgt $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$.
   (2) Angenommen $P(a)$ gilt nicht. Nach Annahme gilt also $Q(a)$. Also gilt auch $\exists x Q(x)$ und daraus folgt $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$.

   ($\Leftarrow$) Angenommen $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ gilt. Also gilt $\exists x P(x)$ oder es gilt $\exists x Q(x)$. Wir machen eine Fallunterscheidung:
   (1) Angenommen $\exists x P(x)$. Sei also a ein Element für das $P(a)$ gilt. Dann gilt auch $P(a) \vee Q(a)$ und damit gilt auch $\exists x(P(x) \vee Q(x))$.
   (2) Angenommen $\exists x P(x)$ gilt nicht. Dann muss nach Annahme $\exists x Q(x)$ gelten. Sei also a ein Element mit $Q(a)$. Daraus folgt $P(a) \vee Q(a)$ und damit gilt $\exists x(P(x) \vee Q(x))$ auch in diesem Fall.

1.5 Es seien die folgenden Prädikate gegeben:

- $\mathit{Student}(x)$ drückt aus, dass x ein Student ist,
- $\mathit{Professor}(y)$ drückt aus, dass y ein Professor ist,
- $\mathit{Dopsball}(z)$ drückt aus, dass z ein Dopsball ist,

- $\mathit{Spielt}(x, z)$ drückt aus, dass x mit z spielt.

Formalisieren Sie folgende Aussagen:

1. Es gibt einen Professor, der mit einem Dopsball spielt.
2. Jeder Student spielt mit einem Dopsball.
3. Es gibt keinen Dopsball, mit dem alle Studenten spielen.
4. Es gibt einen Studenten und einen Professor sodass beide mit dem selben Dopsball spielen.

Solution.

1. $\exists y \exists z(\mathit{Professor}(y) \land \mathit{Dopsball}(z) \land \mathit{Spielt}(y, z))$
2. $\forall x(\mathit{Student}(x) \to \exists z(\mathit{Dopsball}(z) \land \mathit{Spielt}(x, z)))$
3. $\neg\exists z.(\mathit{Dopsball}(z) \land \forall x(\mathit{Student}(x) \to \mathit{Spielt}(x, z))$
4. $\exists x \exists y \exists z(\mathit{Student}(x) \land \mathit{Professor}(y) \land \mathit{Dopsball}(z) \land \mathit{Spielt}(x, z) \land \mathit{Spielt}(y, z))$

1.6 Wir betrachten das Universum $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Definieren Sie für die folgenden Formeln die Prädikate A und B jeweils so, dass die Formel erfüllt wird. Prädikate lassen sich als Teilmengen des Universums $\mathbb{N}_0$ definieren.

1. $\forall x A(x) \land \exists x(A(x) \to B(x))$
2. $\forall x \forall y(A(x) \land B(y) \to x = y)$
3. $\exists x \exists y(A(x) \land \neg A(y) \land \forall z(B(z) \to \neg(z = z)))$
4. $\neg(\exists x A(x) \to \exists x(\neg B(x) \to \neg A(x)))$

Solution.

1. allgemein $A = \mathbb{N}_0$, $B \neq \emptyset$
   z. B. $A = B = \mathbb{N}_0$
2. entweder haben beide Mengen nur ein Element und es gilt $A = B$ oder $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$
3. allgemein $\emptyset \neq A \neq \mathbb{N}_0, B = \emptyset$
   z. B. $A = \{0\}, B = \emptyset$
4. äquivalent zu $\exists x A(x) \land \forall x(A(x) \land \neg B(x))$
   $A = \mathbb{N}_0, B = \emptyset$

1.7 Betrachten Sie folgende **Mengen**:

$$M_1 = \{0, 2, 4\}$$
$$M_2 = \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x \text{ ist gerade und } x < 5\}$$
$$M_3 = \{0\}$$
$$M_4 = \{x \in \mathbb{N}_0 \mid \forall k(k \in \mathbb{N} \to k \geq x)\}$$

1. Beweisen Sie $M_1 = M_2$.
2. Widerlegen Sie $M_1 = M_3$.
3. Beweisen Sie $M_3 \subseteq M_4$.

Solution. Beweis durch Zeigen der Inklusion in beide Richtungen:

$M_1 \subseteq M_2$: Fallunterscheidung über alle Elemente in M_1:
$0 \in M_1$. Da $0 < 5$ und gerade folgt $0 \in M_2$.
$2 \in M_1$. Da $2 < 5$ und gerade folgt $2 \in M_2$.
$4 \in M_1$. Da $4 < 5$ und gerade folgt $4 \in M_2$.

$M_2 \subseteq M_1$: Sei $x \in M_2$. Daraus folgt $x < 5$ und x ist gerade. Also ist x entweder $0, 2$ oder 4. Also $x \in M_1$.

$2 \in M_1$ aber $2 \notin M_3$. Daraus folgt $M_1 \not\subseteq M_3$, also $M_1 \neq M_3$.Nur 0 ist Element von M_3. Da jede natürliche Zahl größer gleich 0 ist, gilt $\forall k(k \in \mathbb{N} \to k \geq 0)$ und damit $0 \in M_4$.

1.8 Sei U eine Menge mit $A, B \subseteq U$.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen mithilfe einer **Äquivalenzkette**. Geben Sie für jeden Schritt an, welche Umformungsregel angewendet wurde.

1. $A \cup (A \cap B) = A$ (Absorptionsgesetz)
2. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (Symmetrische Differenz)

Solution.

1. Wir zeigen $\forall x(x \in A \cup (A \cap B) \leftrightarrow x \in A)$. Sei $x \in U$. Es gilt:

$$\begin{aligned} x \in A \cup (A \cap B) &\text{ ist äquivalent zu } x \in A \lor x \in A \cap B && (\text{Def. } \cup) \\ &\text{ ist äquivalent zu } x \in A \lor (x \in A \land x \in B) && (\text{Def. } \cap) \\ &\text{ ist äquivalent zu } x \in A && (\text{Absorpt.}) \end{aligned}$$

Hinweis: Im letzten Schritt verwenden wir das Absorptionsgesetz für die Aussagenlogik und nicht das Absorptionsgesetz für Mengen, das wir in dieser Aufgabe beweisen.

2. Wir zeigen $\forall x(x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B))$. Sei $x \in U$. Es gilt:

$x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

ist äquivalent zu $x \in A \setminus B \vee x \in B \setminus A$ (Def. $\cup$)

ist äquivalent zu $(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$ (Def. $\setminus$)

ist äquivalent zu $((x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in B)$
$\wedge ((x \in A \wedge x \notin B) \vee x \notin A)$ (Distr.)

ist äquivalent zu $(x \in B \vee (x \in A \wedge x \notin B))$
$\wedge (x \notin A \vee (x \in A \wedge x \notin B))$ (Kommut. $\vee$)

ist äquivalent zu $((x \in B \vee x \in A) \wedge (x \in B \vee x \notin B))$
$\wedge ((x \notin A \vee x \in A) \wedge (x \notin A \vee x \notin B))$ (Distr.)

ist äquivalent zu $(x \in B \vee x \in A) \wedge (x \notin A \vee x \notin B)$ (Tautol.)

ist äquivalent zu $(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin B)$ (Kommut. $\vee$)

ist äquivalent zu $((x \in A \vee x \in B)) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)$ (DeMorgan)

ist äquivalent zu $((x \in A \vee x \in B)) \wedge x \notin (A \cap B)$ (Def. $\cap$)

ist äquivalent zu $x \in A \cup B \wedge x \notin (A \cap B)$ (Def. $\cup$)

ist äquivalent zu $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (Def. $\setminus$)