Aufgabe Überprüfen Sie, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind.

(i) $(2,1,0),(1,0,1),(-2,-3,4) \in \mathbb{R}^3$

(ii) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$

(iii) $1+x^2, x+x^3, x^2+x^3 \in \mathbb{R}_3[x]$
Tipp: Sie dürfen die Tatsache benutzen, dass ein Polynom genau dann das Nullpolynom ist, wenn alle Koeffizienten verschwinden.

(i) $\underbrace{(2,1,0)}_{=:v_1}, \underbrace{(1,0,1)}_{=:v_2}, \underbrace{(-2,-3,4)}_{=:v_3}$

Für alle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 2\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 \quad - 3\lambda_3 &= 0 \quad \cdot(-2) \\ \lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} \lambda_1 \quad - 3\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \quad \cdot(-1) \\ \lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} \lambda_1 \quad - 3\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \lambda_2 = -4\lambda_3, \ \lambda_1 = 3\lambda_3, \ \lambda_3 \in \mathbb{R}.$$

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen

$\Rightarrow$ v_1, v_2, v_3 sind linear abhängig.

(ii) $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:v_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:v_4}$

Für alle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 + \lambda_4 \cdot v_4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_4 & \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad \lambda_4 = 0 \,,\quad \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \,,\quad \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \,,\quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda_4 = 0, \quad \lambda_3 = -\lambda_4 = 0 \,,\quad \lambda_2 = -\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \,,\quad \lambda_1 = -\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0$

$\Rightarrow$ v_1, v_2, v_3, v_4 sind linear unabhängig.

(iii) $\underbrace{1 + x^2}_{=: v_1}, \underbrace{x + x^3}_{=: v_2}, \underbrace{x^2 + x^3}_{=: v_3}$

Für alle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 \cdot (1 + x^2) + \lambda_2 \cdot (x + x^3) + \lambda_3 \cdot (x^2 + x^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda_2 + \lambda_3) \cdot x^3 + (\lambda_3 + \lambda_1) \cdot x^2 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \,,\quad \lambda_3 + \lambda_1 = 0 \,,\quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0 \,,\quad \lambda_3 = -\lambda_1 = 0$$

$\Rightarrow$ v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig.

Aufgabe Überprüfen Sie, ob die folgenden Mengen jeweils eine Basis des entsprechenden Vektorraums sind.

(i) $\{e_1, e_2, e_3, e_5\}$ in $\mathbb{R}^5$

(ii) $\{e_1 + e_3, e_2 + e_3, e_1 + e_2\}$ in $\mathbb{R}^3$

(iii) $\{1 + x + x^2, x + x^2 + x^3, 1 + x + x^3, 1 + x^2 + x^3\}$ in $\mathbb{R}_3[x]$

(iv) $\{1 + x^2, x + x^2, 1 + x, 3 - x^2\}$ in $\mathbb{R}_3[x]$

(i) $|\{e_1, e_2, e_3, e_5\}| = 4 < 5 = \dim \mathbb{R}^5$

$\Rightarrow \{e_1, e_2, e_3, e_5\}$ ist keine Basis von $\mathbb{R}^5$.

(ii) $\{\underbrace{e_1+e_3}_{=:v_1}, \underbrace{e_2+e_3}_{=:v_2}, \underbrace{e_1+e_2}_{=:v_3}\}$

Für alle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot (e_1 + e_3) + \lambda_2 \cdot (e_2 + e_3) + \lambda_3 \cdot (e_1 + e_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_3) \cdot e_1 + (\lambda_2 + \lambda_3) \cdot e_2 + (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot e_3 = 0$$

$\{e_1, e_2, e_3\}$ ist linear unabhängig

$$\Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 \quad + \lambda_3 & = & 0 \quad \cdot(-1) \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \quad & = & 0 \quad + \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 \quad + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \quad \cdot(-1) \\ \lambda_2 - \lambda_3 & = & 0 \quad + \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 \quad + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ -2\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = 0, \quad \lambda_2 = -\lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 = -\lambda_3 = 0$$

$\Rightarrow$ v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig

Es ist $|\{v_1, v_2, v_3\}| = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

(iii) $\{\underbrace{1+x+x^2}_{=:v_1}, \underbrace{x+x^2+x^3}_{=:v_2}, \underbrace{1+x+x^3}_{=:v_3}, \underbrace{1+x^2+x^3}_{=:v_4}\}$

Für alle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 + \lambda_4 \cdot v_4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 \cdot (1+x+x^2) + \lambda_2 \cdot (x+x^2+x^3) + \lambda_3 \cdot (1+x+x^3) + \lambda_4 \cdot (1+x^2+x^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4) \cdot x^3 + (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4) \cdot x^2 + (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) \cdot x + (\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrrl} & \lambda_2 & + \lambda_3 & + \lambda_4 & = 0 \\ \lambda_1 & + \lambda_2 & & + \lambda_4 & = 0 \quad \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \\ \lambda_1 & + \lambda_2 & + \lambda_3 & & = 0 \quad + \\ \lambda_1 & & + \lambda_3 & + \lambda_4 & = 0 \quad \quad \quad + \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrrl} & \lambda_2 & + \lambda_3 & + \lambda_4 & = 0 \quad \cdot 1 \\ \lambda_1 & + \lambda_2 & & + \lambda_4 & = 0 \\ & & \lambda_3 & - \lambda_4 & = 0 \\ & -\lambda_2 & + \lambda_3 & & = 0 \quad + \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrrl} & \lambda_2 & + \lambda_3 & + \lambda_4 & = 0 \\ \lambda_1 & + \lambda_2 & & + \lambda_4 & = 0 \\ & & \lambda_3 & - \lambda_4 & = 0 \quad \cdot(-2) \\ & & 2\lambda_3 & + \lambda_4 & = 0 \quad + \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrrl} & \lambda_2 & + \lambda_3 & + \lambda_4 & = 0 \\ \lambda_1 & + \lambda_2 & & + \lambda_4 & = 0 \\ & & \lambda_3 & - \lambda_4 & = 0 \\ & & & 3\lambda_4 & = 0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \lambda_4 = 0, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0, \quad \lambda_2 = -\lambda_3 - \lambda_4 = 0, \quad \lambda_1 = -\lambda_2 - \lambda_4 = 0$

$\Rightarrow$ v_1, v_2, v_3, v_4 sind linear unabhängig

Es ist $|\{v_1, v_2, v_3, v_4\}| = 4 = \dim \mathbb{R}_3[x]$

$\Rightarrow$ $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}_3[x]$

(iv) $\{\underbrace{1+x^2}_{=:v_1}, \underbrace{x+x^2}_{=:v_2}, \underbrace{1+x}_{=:v_3}, \underbrace{3-x^2}_{=:v_4}\}$

Für alle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 + \lambda_4 \cdot v_4}_{=: p} \neq x^3$$

da $\operatorname{grad}(p) \leq 2$

$\Rightarrow \quad x^3 \notin \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$

$\Rightarrow \quad \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ist kein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}_3[x]$

$\Rightarrow \quad \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ist keine Basis von $\mathbb{R}_3[x]$

Aufgabe:

Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf lineare Unabhängigkeit:

(a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

(b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

(c) $M = \{ X^3 - 2X + 3,\ X^3 - 2X^2 + 2X - 1,\ X^3 - 1,\ X^3 - 2X + 5 \} \subseteq \mathbb{R}_{\leq 3}[X].$

(d) $M = \{ \sin(x), \cos(x), \sin(2x) \} \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Lösung:

(a) $M = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{=:v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{=:v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=:v_3} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Für alle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gilt:

$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} \lambda_1 & +2\lambda_2 & & = 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & +3\lambda_3 & = 0 \\ -2\lambda_1 & -3\lambda_2 & -\lambda_3 & = 0 \end{array} \right. \qquad \cdot(-1),\ 2\cdot$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} \lambda_1 & +2\lambda_2 & & = 0 \\ & -3\lambda_2 & +3\lambda_3 & = 0 \\ & \lambda_2 & -\lambda_3 & = 0 \end{array} \right. \qquad \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} \lambda_1 & +2\lambda_2 & & = 0 \\ & \lambda_2 & -\lambda_3 & = 0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3,\ \lambda_1 = -2\lambda_2 = -2\lambda_3,\ \lambda_3 \in \mathbb{R}$ beliebig

$\Rightarrow$ Das Gleichungssystem hat nichttriviale Lösungen

$\Rightarrow$ M ist linear abhängig.

Alternativ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} + 2\cdot\text{I}]{\text{II} + (-1)\cdot\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{II} \leftrightarrow \text{III}]{\text{II} + 3\cdot\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Kern}(A) = 3 - \mathrm{rang}(A) = 3 - 2 = 1 \neq 0$

$\Rightarrow \mathrm{Kern}(A) \neq \{0\} \quad \Rightarrow M$ ist linear abhängig.

(Ist $A \in K^{m \times n}$, so gilt: $\dim \mathrm{Kern}(A) = n - \mathrm{rang}(A)$)

Allgemein:

Seien $v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{m1} \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \; v_n = \begin{pmatrix} v_{1n} \\ v_{2n} \\ v_{mn} \end{pmatrix} \in K^m.$

Für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ gilt:

$\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n = 0 \quad (1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 \cdot v_{11} + \lambda_2 \cdot v_{12} + \dots + \lambda_n \cdot v_{1n} = 0 \\ \lambda_1 \cdot v_{21} + \lambda_2 \cdot v_{22} + \dots + \lambda_n \cdot v_{2n} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 \cdot v_{1n} + \lambda_2 \cdot v_{2n} + \dots + \lambda_n \cdot v_{mn} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0 \quad (2) \quad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & & v_{mn} \end{pmatrix}$$

Es ist äquivalent:

(i) $\{v_1, \dots, v_n\}$ ist linear unabhängig

(ii) Die Gleichung (1) hat nur die triviale Lösung $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$

(iii) Das lineare Gleichungssystem (2) hat nur die triviale Lösung $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

(iv) $\mathrm{Kern}(A) = \{0\} \qquad (\mathrm{Kern}(A) = \{ x \in K^n \mid A \cdot x = 0 \})$

(b) $M = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=:v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:v_3} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Für alle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gilt:

$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} \lambda_1 - \lambda_2 & & = 0 & \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \\ \lambda_1 \quad\quad + \lambda_3 & & = 0 & + \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & & = 0 & + \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} \lambda_1 - \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_3 & = 0 \end{array} \right.$$

$\Leftrightarrow \lambda_3 = 0, \ \lambda_2 = -\lambda_3 = 0, \ \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$\Rightarrow$ M ist lin. unabh.

Zusatz:

Wegen $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = |\{v_1, v_2, v_3\}|$ folgt bereits, dass M eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

(c) $M = \{ \underbrace{X^3 - 2X + 3}_{=:v_1}, \underbrace{X^3 - 2X^2 + 2X - 1}_{=:v_2}, \underbrace{X^3 - 1}_{=:v_3}, \underbrace{X^3 - 2X + 5}_{=:v_4} \} \subseteq \mathbb{R}_{\leq 3}[X]$.

Für alle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ gilt:

$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 + \lambda_4 \cdot v_4 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot (X^3 - 2X + 3) + \lambda_2 \cdot (X^3 - 2X^2 + 2X - 1) + \lambda_3 \cdot (X^3 - 1) + \lambda_4 \cdot (X^3 - 2X + 5) = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \cdot X^3 + (-2\lambda_2) \cdot X^2 + (-2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_4) \cdot X + (3\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + 5\lambda_4) = 0$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & = & 0 & \cdot 2 \quad , \cdot(-3) \\ -2\lambda & = & 0 & \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 \quad\quad - 2\lambda_4 & = & 0 & + \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + 5\lambda_4 & = & 0 & + \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & = & 0 \\ -2\lambda_2 & = & 0 \\ 4\lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \\ -4\lambda_2 - 4\lambda_3 + 2\lambda_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

$\Leftrightarrow \lambda_2 = 0, \ \lambda_3 = 0, \ \lambda_4 = 0, \ \lambda_1 = 0$ $\Rightarrow$ M ist linear unabhängig

(d) $M = \{ \underbrace{\sin(x)}_{=:f}, \underbrace{\cos(x)}_{=:g}, \underbrace{\sin(2x)}_{=:h} \} \subseteq Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Für alle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lambda_1 \cdot f + \lambda_2 \cdot g + \lambda_3 \cdot h = 0$$

$\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot f(x) + \lambda_2 \cdot g(x) + \lambda_3 \cdot h(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \sin(x) + \lambda_2 \cdot \cos(x) + \lambda_3 \cdot \sin(2x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Setze $x := 0 \Rightarrow \sin(x) = 0, \cos(x) = 1, \sin(2x) = 0$

$\Rightarrow \lambda_2 = 0$

Setze $x := \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(x) = 1, \cos(x) = 0, \sin(2x) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$

Setze $x := \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin(2x) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

$\Rightarrow \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow$ M ist linear unabhängig.

Linear unabhängig

Entscheiden Sie, welche der folgenden Familien im jeweiligen Vektorraum linear unabhängig sind.

(a) $((1,2,3),(5,4,3),(6,6,6))$ in $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum

(b) $((1,i),(i,-1))$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$

(c) $((1,i),(i,-1))$ im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$

(d) $(1,1+t,1+t+t^2)$ im $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Vektorraum $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[t]$

(e) $((1,2,3),(5,4,3),(6,6,7))$ in $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum

(a) $((\underbrace{1,2,3}_{v_1}),(\underbrace{5,4,3}_{v_2}),(\underbrace{6,6,6}_{v_3}))$ in $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum

Für alle $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 & \cdot(-2) \quad \cdot(-3) \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 & + \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 & + \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \\ -6\lambda_2 - 6\lambda_3 = 0 & \cdot(-2) \quad \cdot(-\tfrac{1}{6}) \\ -12\lambda_2 - 12\lambda_3 = 0 & + \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_2 = -\lambda_3 \,, \quad \lambda_1 = -5\lambda_2 - 6\lambda_3 = -\lambda_3$$

$\Rightarrow$ Das GLS hat unendlich viele Lösungen

$\Rightarrow$ v_1, v_2, v_3 sind l.a.

Alternativ: $1 \cdot \underbrace{(1,2,3)}_{v_1} + 1 \cdot \underbrace{(5,4,3)}_{v_2} = \underbrace{(6,6,6)}_{v_3}$

$\Rightarrow$ v_1, v_2, v_3 sind l.a.

(b) $((1,i),(i,-1))$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$

Für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lambda_1 \cdot (1+i) + \lambda_2 \cdot (i-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot i = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \ \wedge \ \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 \ \wedge \ 2\lambda_1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$\Rightarrow \ (1, i), (i, -1)$ sind l.u.

(c) $((1, i), (i, -1))$ im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$

$\lambda_1 := -i, \ \lambda_2 := 1 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \ \underbrace{\lambda_1}_{\neq 0} \cdot (1+i) + \lambda_2 \cdot (i-1) = -i \cdot (1+i) + (i-1) = -i + 1 + i - 1 = 0$

$\Rightarrow \ (1+i), (i-1)$ sind l.a.

(d) $(1, 1+t, 1+t+t^2)$ im $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Vektorraum $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[t]$

Für alle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot (1+t) + \lambda_3 \cdot (1+t+t^2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \lambda_3 \cdot t^2 + (\lambda_2 + \lambda_3) \cdot t + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \lambda_3 = 0, \ \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \lambda_3 = 0, \ \lambda_2 = -\lambda_3 = 0, \ \lambda_1 = -\lambda_2 - \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow \ (1, 1+t, 1+t+t^2)$ ist l.u.

(e) $((\underbrace{1,2,3}_{v_1}), (\underbrace{5,4,3}_{v_2}), (\underbrace{6,6,7}_{v_3}))$ in $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum

Für alle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Q}$ gilt

$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0$

$\Leftrightarrow \ \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \quad \cdot(-2) \quad \cdot(-3) \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \quad + \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \quad + \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \\ -6\lambda_2 - 6\lambda_3 = 0 \quad \cdot(-2) \quad \cdot\left(-\frac{1}{6}\right) \\ -12\lambda_2 - 11\lambda_3 = 0 \quad + \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = -\lambda_3 = 0$, $\lambda_1 = -5\lambda_2 - 6\lambda_3 = 0$

$\Rightarrow$ (v_1, v_2, v_3) ist l.u.