Prof. Carsten Lutz
Maurice Funk, Gustav Grabolle

Universität Leipzig SoSe 24

Logik
Übungsblatt 5

Übungsaufgaben werden in den Übungen besprochen. Übungszeitraum: 10.06. – 21.06.
Hausaufgaben werden bewertet. Abgabe über Moodle bis: 9:00 Uhr am 24.06.2024

Übungsaufgabe 1 Sei R ein binäres Relationssymbol. Gegeben sind die $\{R\}$-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, sowie die FO-Sätze φ_1, φ_2:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{A} = (\{1,2\}, \quad R^{\mathfrak{A}} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,1)\}) & \varphi_1 = \exists x\,(\forall y\, R(x,y) \wedge \forall z\,(\neg R(z,x))) \\ \mathfrak{B} = (\{2,3,4\}, \; R^{\mathfrak{B}} = \{(2,3),(3,4),(4,2)\}) & \varphi_2 = \neg\exists x\, R(x,x) \vee \forall x\,\forall y\, R(x,y) \end{array}$$

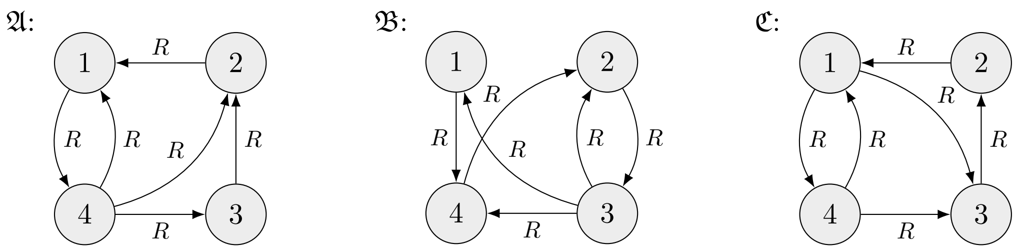
(a) Geben Sie jeweils an, ob die Modellbeziehung $\mathfrak{A} \models \varphi_1$, $\mathfrak{A} \models \varphi_2$, $\mathfrak{B} \models \varphi_1$, $\mathfrak{B} \models \varphi_2$ gilt. Verwenden Sie dazu den Auswertungsalgorithmus aus der Vorlesung. Geben Sie jeweils den konstruierten Auswertungsbaum an.

(b) Geben Sie für folgende FO-Sätze jeweils die Anzahl an Knoten des Auswertungsbaums bei Auswertung in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ an.

$$\begin{array}{ll} \varphi_1 = \forall x\,\forall y\,\exists z\, R(x,y) & \varphi_3 = \neg\exists z\, R(z,z) \\ \varphi_2 = \forall z\,(\neg R(z,z)) & \varphi_4 = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \end{array}$$

Übungsaufgabe 2

(a) Sei R ein binäres Relationssymbol. Die $\{R\}$-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ sind durch folgende Diagramme gegeben:



Beweisen oder widerlegen Sie Isomorphie für je zwei Strukturen. Geben Sie zum Beweisen einen Isomorphismus an. Geben Sie zum Widerlegen einen FO-Satz an, der genau eine der beiden Strukturen als Modell hat.

(b) Betrachten Sie die $\{0,1,+,\cdot\}$-Strukturen $\mathbb{N} = (\mathbb{N},+,\cdot,0,1)$, $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z},+,\cdot,0,1)$, $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q},+,\cdot,0,1)$, $\mathbb{R} = (\mathbb{R},+,\cdot,0,1)$, mit den üblichen Interpretationen. Widerlegen Sie Isomorphie für je zwei Strukturen. Geben Sie zum Widerlegen einen FO-Satz an, der genau eine der beiden Strukturen als Modell hat.

(c) Betrachten Sie die $\{0,+\}$-Strukturen $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q},+,0)$, $\mathbb{R} = (\mathbb{R},+,0)$, mit den üblichen Interpretationen. Diskutieren Sie: Gibt es einen FO-Satz, der genau eine der Strukturen als Modell hat? Sind die Strukturen isomorph?

Übungsaufgabe 3 Gegeben ist der FO-Satz

$$\varphi = \forall x \, \exists y \, \big(R(x,y) \wedge x \neq y \wedge \forall z \, (R(x,z) \wedge R(z,y) \rightarrow x = z \vee z = y)\big) \wedge \exists x \, \forall y \, R(x,y).$$

(a) Geben Sie einen zu φ äquivalenten und bereinigten FO-Satz φ_B an.

(b) Geben Sie einen zu φ äquivalenten FO-Satz φ_P in Pränex-Normalform an. Verwenden Sie dazu das Verfahren aus der Vorlesung.

(c) Geben Sie einen zu φ erfüllbarkeitsäquivalenten FO-Satz φ_S in Skolemform an. Verwenden Sie dazu das Verfahren aus der Vorlesung.

Übungsaufgabe 4 Sei R ein binäres Relationssymbol, f ein zweistelliges Funktionssymbol und c ein Konstantensymbol. Gegeben ist der FO-Satz in Skolemform

$$\varphi = \forall x \, (R(c,c) \wedge R(x, f(c,x)))$$

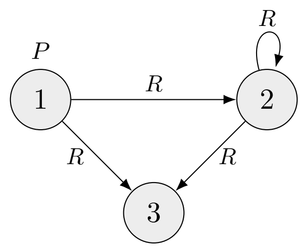
über der Signatur $\{R, f, c\}$.

(a) Geben Sie die Menge aller Grundterme über der Signatur $\{R, f, c\}$ an.

(b) Geben Sie eine Herbrandstruktur $\mathfrak{A}$ über der Signatur $\{R, f, c\}$ an, sodass $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Hausaufgabe 5 (7 + 7)

Sei P ein unäres Relationssymbol und R ein binäres Relationssymbol. Gegeben ist die $\{P, R\}$-Struktur $\mathfrak{A} = (\{1,2,3\}, P^{\mathfrak{A}}, R^{\mathfrak{A}})$ mit $P^{\mathfrak{A}}$ und $R^{\mathfrak{A}}$ wie in folgendem Diagramm:



Geben Sie an, ob die folgende Modellbeziehungen gelten:

(a) $\mathfrak{A}, \beta_1 \models P(x) \wedge \exists y \, R(x,y)$ mit $\beta_1(x) = 1$,

(b) $\mathfrak{A}, \beta_2 \models \forall y \, (P(y) \vee R(y,x))$ mit $\beta_2(x) = 2$.

Verwenden Sie dazu den Auswertungsalgorithmus aus der Vorlesung. Geben Sie jeweils den konstruierten Auswertungsbaum an.

Hausaufgabe 6 $(4+4+4+4)$

Seien φ und ψ beliebige FO-Formeln. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) $\exists x\,(\varphi \land \psi) \;\equiv\; \exists x\,\varphi \land \exists x\,\psi$,

(b) $(\forall x\,\varphi) \land (\exists x\,\varphi) \;\equiv\; \forall x\,\varphi$,

(c) $\neg\exists x\,\varphi \;\models\; \exists x\,\neg\varphi$,

(d) $\neg\forall x\,\varphi \;\models\; \forall x\,\neg\varphi$.

Beweisen Sie die wahren Aussagen durch semantische Argumente und widerlegen Sie die falschen Aussagen durch Gegenbeispiele.

Hausaufgabe 7 $(4+4)$

Gegeben ist der FO-Satz

$$\varphi = \exists x_1 \Big((\neg\forall x_4\, S(x_1, x_4)) \lor \forall x_3\, (\neg\exists x_2\, R(x_2, x_3) \lor S(x_4, x_3)) \Big).$$

(a) Geben Sie einen FO-Satz φ_P in Pränex-Normalform an, der äquivalent zu φ ist. Verwenden Sie dazu das Verfahren aus der Vorlesung.

(b) Geben Sie einen FO-Satz φ_S in Skolemform an, der erfüllbarkeitsäquivalent zu φ_P ist. Verwenden Sie dazu das Verfahren aus der Vorlesung.

Hausaufgabe 8 $(4+4+4)$

Seien c, d Konstantensymbole, f ein einstelliges Funktionssymbol und R ein binäres Relationssymbol. Gegeben sind die FO-Sätze in Skolemform

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x\, \forall y\, (R(c,d) \land \neg R(x,y)) && \text{mit Signatur } \{c,d\},\\
\varphi_2 &= \forall x\, \forall y\, (R(c,d) \land R(x,y)) && \text{mit Signatur } \{c,d\},\\
\varphi_3 &= \forall x\, (R(c,f(d)) \land R(f(x),x)) && \text{mit Signatur } \{f,c,d\}.
\end{aligned}$$

Geben Sie jeweils an, ob φ_i erfüllbar ist. Wenn φ_i unerfüllbar ist, begründen Sie Ihre Antwort kurz. Wenn φ_i erfüllbar ist, geben Sie eine Herbrandstruktur $\mathfrak{A}_i$ über der entsprechenden Signatur an, sodass $\mathfrak{A}_i \models \varphi_i$.