



UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Informationsvisualisierung

Sommersemester 2025

Dirk Zeckzer

Institut für Informatik



Teil VII

Darstellung von Graphen

Übersicht

7. Darstellung von Graphen

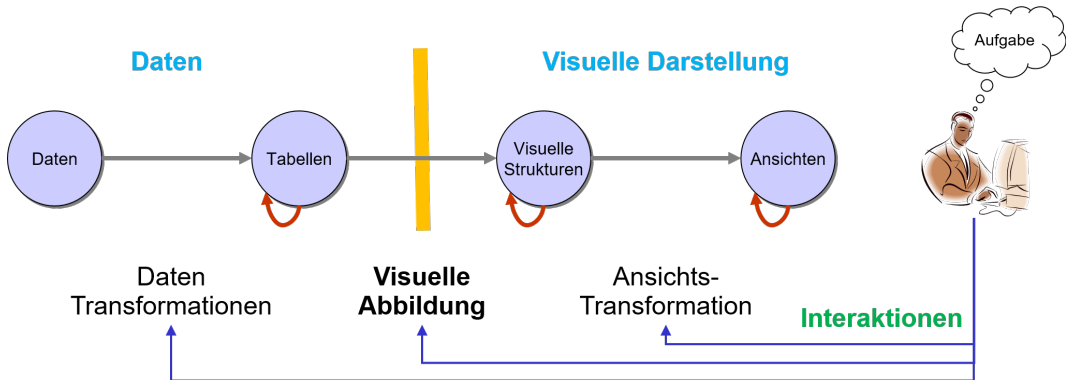
7.1 Einleitung

7.2 Definitionen

7.3 Literatur

7.4 InfoVis Techniken

Visuelle Abbildung



Einleitung

- ▶ Zu visualisierende Objekte besitzen häufig inhärente Relationen
 - ▶ Beziehungen
 - ▶ Abhängigkeiten
- ▶ Graphen eignen sich als Repräsentation
 - ▶ Knoten stellen Objekte dar
 - ▶ Kanten stellen Relationen dar

Einleitung

Anwendungen

- ▶ Szenengraphen in der virtuellen Realität
- ▶ Strukturen objektorientierter Systeme
 - ▶ Klassenhierarchie
 - ▶ Datenfluss
- ▶ Echtzeitsystem (Zustandsdiagramme)
- ▶ Schaltkreisentwurf (Very Large System Integration VLSI)
- ▶ Taxonomie biologischer Arten
 - ▶ Bei Abstammung: phylogenetische Bäume
- ▶ Biochemische Reaktionen
 - ▶ Stoffwechselsysteme
 - ▶ Signalwege
- ▶ Organigramm einer Firma
- ▶ Soziale Netzwerke
- ▶ Semantische Netzwerke und Wissensrepräsentationsdiagramme
- ▶ Webseiten und ihre Links

Definitionen

- ▶ Ein **Graph** $G = (V, E)$ besteht aus
 - ▶ V : endliche Menge von **Knoten**
 - ▶ E : endliche Menge von **Kanten** $E \subseteq V \times V$
- ▶ Ungerichtete Graphen
 - ▶ $\{u, v\} = \{v, u\}$
 - ▶ 2 Knoten $u, v \in V$ heißen **adjazent** gdw. $\exists e \in E : e = \{u, v\}$
 - ▶ Adjazent: benachbart
 - ▶ **Nachbarn** von $u \in V$
 $N(u) = \{v \mid \{u, v\} \in E\}$
- ▶ Gerichtete Graphen
 - ▶ $(u, v) \neq (v, u)$
 - ▶ Die gerichtete Kante $(u, v) \in E$ ist
 - ▶ **ausgehende Kante** für u
 - ▶ **eingehende Kante** für v

Definitionen

Ungerichtete Graphen

- ▶ Nachbarn von $u \in V$
 $N(u) = \{v | \{u, v\} \in E\}$

- ▶ **Grad** von v : $|N(u)|$

Gerichtete Graphen

- ▶ Die gerichtete Kante $(u, v) \in E$ ist
 - ▶ ausgehende Kante für u
 - ▶ eingehende Kante für v

- ▶ **Grad**
 - ▶ **Eingangsgrad** von v :
 $|\{(u, v) | (u, v) \in E\}|$
 - ▶ **Ausgangsgrad** von v :
 $|\{(v, u) | (v, u) \in E\}|$
- ▶ Ein Knoten v heißt
 - ▶ **Quelle** gdw. Eingangsgrad ist 0
 - ▶ **Senke** gdw. Ausgangsgrad ist 0

Definitionen

Ungerichtete Graphen

- ▶ Ein **Weg** im Graph G ist die Folge $(v_1, v_2, \dots, v_{h-1}, v_h)$ paarweise verschiedener Knoten $v_i \in G, 1 \leq i \leq h$ mit $\forall 1 \leq i \leq h-1 : \{v_i, v_{i+1}\} \in E$.
- ▶ Ein Weg heißt **Zyklus**, falls $v_h = v_1$.
- ▶ Ein Graph ohne Zyklus heißt **azyklischer Graph**.

Gerichtete Graphen

- ▶ Ein **gerichteter Weg** im Graph G ist die Folge $(v_1, v_2, \dots, v_{h-1}, v_h)$ paarweise verschiedener Knoten $v_i \in G, 1 \leq i \leq h$ mit $\forall 1 \leq i \leq h-1 : (v_i, v_{i+1}) \in E$.
- ▶ Ein gerichteter Weg heißt **Zyklus**, falls $v_h = v_1$.
- ▶ Ein gerichteter Graph ohne Zyklus heißt **gerichteter azyklischer Graph** (**directed acyclic graph, DAG**).

Definitionen

- ▶ Ein Graph (V', E') mit $V' \subseteq V, E' \subseteq E \cap (V' \times V')$ heißt **Teilgraph von G**.
- ▶ Im Falle $E' = E \cap (V' \times V')$ heißt G' der durch V' **induzierte Teilgraph von G**.
- ▶ Zu einem gerichteten Graphen G gibt es immer einen Graphen G' , der durch “Vergessen der Orientierung der Kanten” entsteht.

Datenstrukturen für Graphen

Adjazenzmatrix A

► Graph:

$$A_{uv} = \begin{cases} 1 & \{u, v\} \in E \\ 0 & \{u, v\} \notin E \end{cases}$$

	1	2	3
1	0	1	0
2	1	0	1
3	0	1	0

► Gerichteter Graph:

$$A_{uv} = \begin{cases} x & (u, v) \in E \\ & (u, v) \notin E \end{cases}$$

	1	2	3	4	5	6
1		x			x	
2			x			
3				x		
4					x	x
5		x				
6			x			

Datenstrukturen für Graphen

Adjazenzliste L

► Graph:

$$\forall v \in V : L = \{u | \{v, u\} \in E\}$$

L_1	2
L_2	1, 3
L_3	2

► Gerichteter Graph:

$$\forall v \in V : L = \{(v, u) | (v, u) \in E\}$$

L_1	(1, 2), (1, 5)
L_2	(2, 3)
L_3	(3, 4)
L_4	(4, 5), (4, 6)
L_5	(5, 2)
L_6	(6, 3)

Datenstrukturen für Graphen

- ▶ Sei $G = (V, E)$, $|V| = n, |E| = e$.
- ▶ Anzahl Einträge
 - ▶ Adjazenzmatrix A : $n \cdot n$
 - ▶ Adjazenzlisten L : $e \leq n \cdot n$

Definitionen

- ▶ Eine **Knoten-Kanten-Zeichnung** (**Node-Link-Diagramm**) eines Graphen oder Digraphen G ist eine Abbildung

$$\begin{aligned}\Gamma : \quad G &\rightarrow E \\ v \in V &\mapsto P_v \\ e \in E &\mapsto J_e\end{aligned}$$

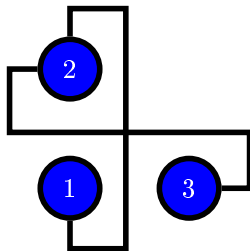
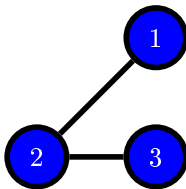
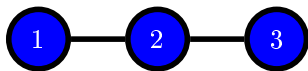
- ▶ E : Ebene
- ▶ P_v : Punkt in der Ebene
- ▶ J_e : offene Jordankurve mit den Endpunkten P_u und P_v , $e = \{u, v\}$

- ▶ Gerichtete Kanten eines Digraphen werden in der Regel als Pfeile gezeichnet.

Definitionen

	1	2	3
1	0	1	0
2	1	0	1
3	0	1	0

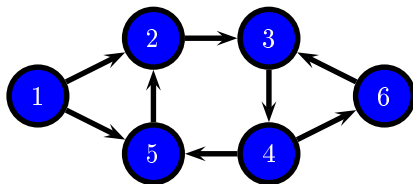
L_1	2
L_2	1, 3
L_3	2



Definitionen

	1	2	3	4	5	6
1		×			×	
2			×			
3				×		
4					×	×
5		×				
6			×			

L_1	(1, 2), (1, 5)
L_2	(2, 3)
L_3	(3, 4)
L_4	(4, 5), (4, 6)
L_5	(5, 2)
L_6	(6, 3)



Definitionen

Graph

- ▶ Seien $u, v \in V : u \neq v$ zwei Knoten.
Ein Graph heißt **zusammenhängend**, wenn es einen Weg zwischen u und v gibt.
- ▶ Ein maximaler zusammenhängender Teilgraph eines Graphen heißt **Zusammenhangskomponente** (connected component).

Gerichteter Graph

- ▶ Seien $u, v \in V : u \neq v$ zwei Knoten.
Ein gerichteter Graph heißt **stark zusammenhängend**, wenn es einen Weg zwischen u und v gibt.
- ▶ Ein maximaler stark zusammenhängender Teilgraph eines gerichteten Graphen heißt **starke Zusammenhangskomponente** (strongly connected component).

Definitionen

Graph

- ▶ Seien $u, v \in V : u \neq v$ zwei Knoten.
Ein Graph heißt **zusammenhängend**, wenn es einen Weg zwischen u und v gibt.
- ▶ Ein maximaler zusammenhängender Teilgraph eines Graphen heißt **Zusammenhangskomponente** (connected component).

Gerichteter Graph

- ▶ Ein gerichteter Graph heißt **schwach zusammenhängend**, wenn der zugehörige ungerichtete Graph zusammenhängend ist.
- ▶ Ein maximaler schwach zusammenhängender Teilgraph eines gerichteten Graphen heißt **schwache Zusammenhangskomponente** (weakly connected component).

Definitionen

Typen von Graphen

▶ Multigraphen

- ▶ Schleifen: Kanten der Form $\{v, v\}, v \in G$
- ▶ Mehrfachkanten: mehrere Kanten zwischen zwei Knoten

▶ Hypergraphen

- ▶ Hyperkanten $E \subseteq \text{Pot}(V)$
- ▶ Eine Hyperkante verbindet mehr als zwei Knoten.
- ▶ Jede Hyperkante verbindet eine Eingangs Menge von Knoten mit einer Ausgangsmenge von Knoten.
- ▶ Hypergraphen können gerichtet und ungerichtet sein.

Definitionen

Planarität

- ▶ Eine Zeichnung eines Graphen heißt planar, wenn die Kurven zweier verschiedener Kanten außer den Endpunkten keine gemeinsamen Punkte haben.
- ▶ Ein Graph heißt planar, wenn es mindestens eine planare Zeichnung gibt.
- ▶ Nach der Eulerformel kann ein planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten höchstens $3 \cdot n - 6$ Kanten haben.

- ▶ Maximale Anzahl von Kanten für n Knoten:

$$\sum_{i=1}^{n-1} = \frac{(n-1) \cdot n}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$$

n	e_{max}	$3 \cdot n - 6$
1	0	
2	1	
3	3	3
4	6	6
5	10	9

Definitionen

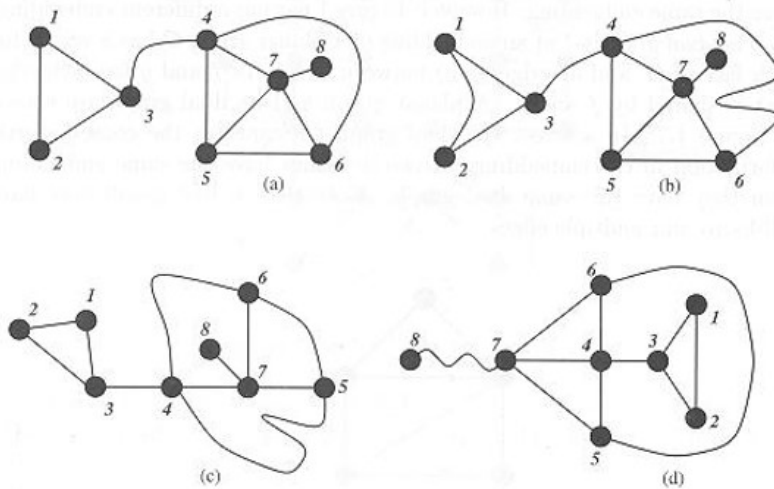


Abbildung: Vier verschiedene Darstellungen desselben planaren Graphen.

Definitionen

Eigenschaften

- ▶ Graph
 - ▶ Gerichtet, ungerichtet
 - ▶ Zyklisch, azyklisch
 - ▶ Multigraph
 - ▶ Hypergraph
 - ▶ Planar
 - ▶ Baum (nächstes Kapitel)
- ▶ Knoten
 - ▶ Typ
 - ▶ Zusätzliche Informationen
- ▶ Kanten
 - ▶ Typ
 - ▶ Gerichtet (Richtung), ungerichtet
 - ▶ Gewichte
 - ▶ Zusätzliche Informationen

Literatur

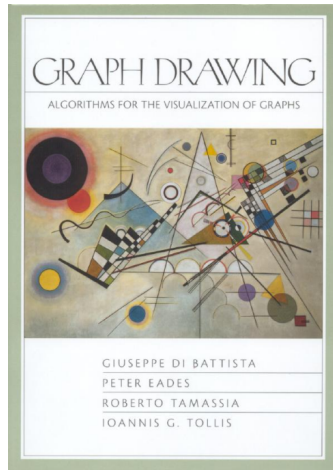
Graphenzeichnen (Graph Drawing)

- ▶ Eigene Forschungsgemeinschaft
- ▶ Sehr großes Gebiet
- ▶ Literatur
- ▶ Graph drawing conference
- ▶ Visualization conferences and journals
- ▶ Web:
<http://graphdrawing.org>
- ▶ Graph Visualization Software:
<http://www.graphviz.org>

Literatur

Graphenzeichnen (Graph Drawing)

- ▶ Giuseppe Di Battista, Peter Eades, Roberto Tamassia, Ioannis G. Tollis.
Graph Drawing - Algorithms for the Visualization of Graphs.
Prentice Hall Engineering, Science & Math. 1999.
ISBN 0-13-301615-3
- ▶ Herman, Melancon, Marshall.
Graph Visualization and Navigation in
Information Visualization: A Survey.
IEEE TVCG 6(1): 24-43, 2000



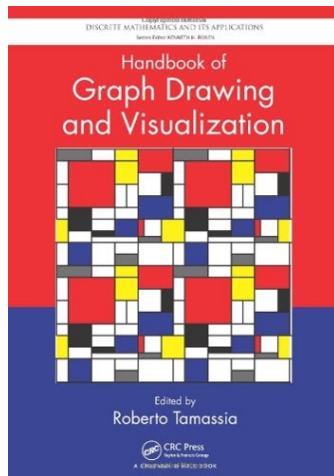
Literatur

Graphenzeichnen (Graph Drawing)

- ▶ Handbook of Graph Drawing and Visualization.

Roberto Tamassia, ed.

CRC Press 2011.



Graphenzeichnen (Graph Drawing): Forschungsgebiete

- ▶ Graph Layout und Position der Knoten
- ▶ Skalierbarkeit
- ▶ Navigation (besonders in großen Graphen)
- ▶ Fokus & Kontext Methoden
- ▶ Dynamische Graphen
- ▶ Heterogene Knoten- und Kanten-Typen
- ▶ Knoten mit großem Grad
- ▶ Einbettung zusätzlicher Information
- ▶ Visualisierung von isomorphen Teilgraphen
- ▶ Vergleich von Graphen
- ▶ ...

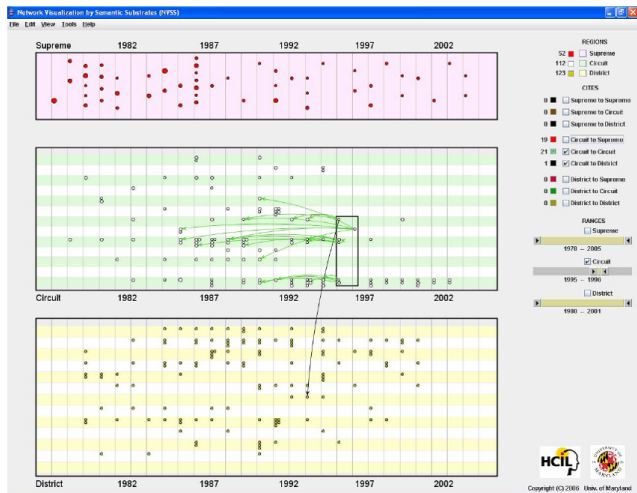


Abbildung: Netzwerkvisualisierung mit Semantic Substrates [SA2006]

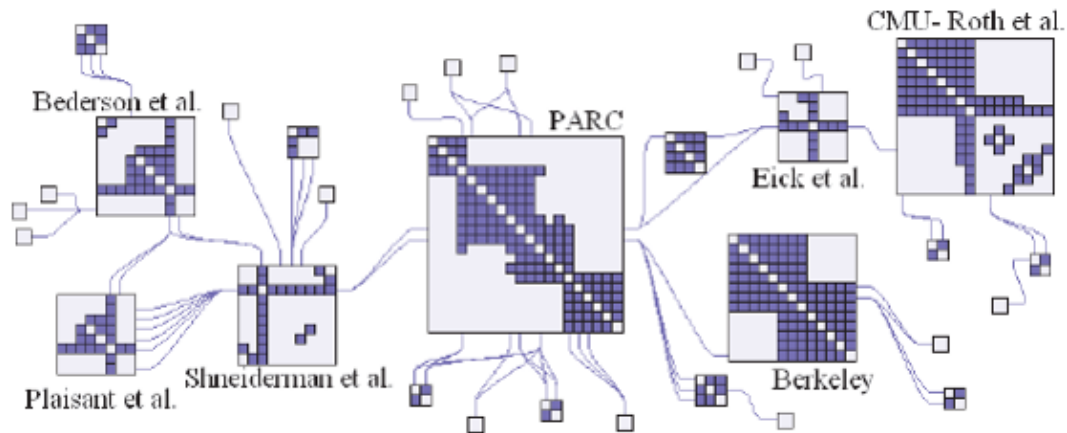


Abbildung: Hybride Darstellung [HFM2007]

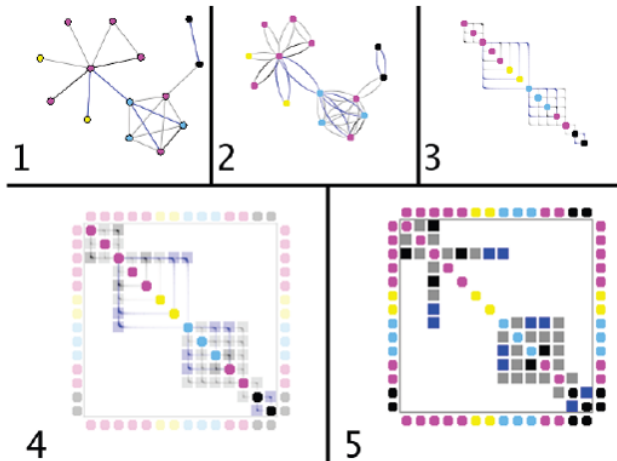
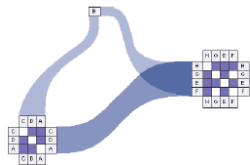
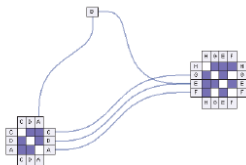


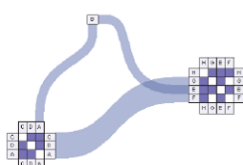
Abbildung: Hybride Darstellung [HFM2007]



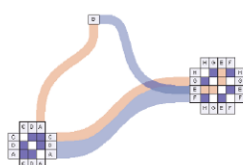
(a) Aggregated links



(b) Underlying links



(c) Underlying links with full size



(d) Underlying links with attributes

Abbildung: Hybride Darstellung [HFM2007]

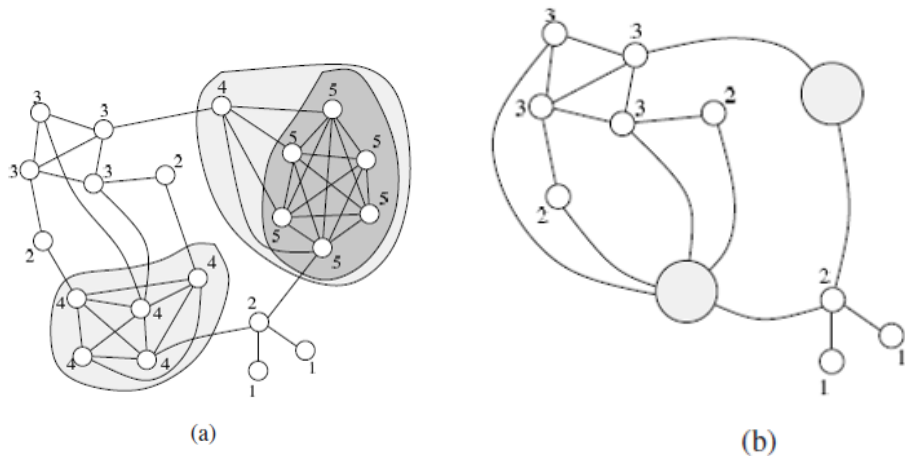


Abbildung: Hybride Visualisierung und Clustering [BDL*2010]

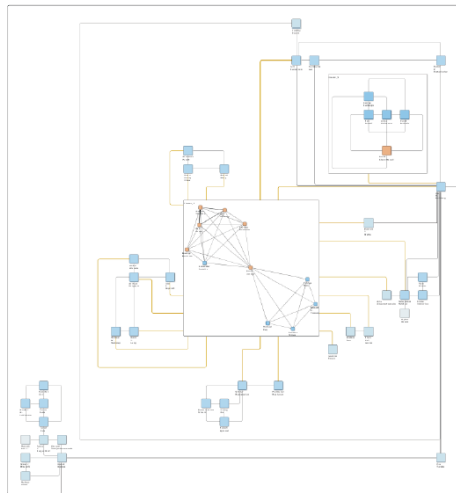
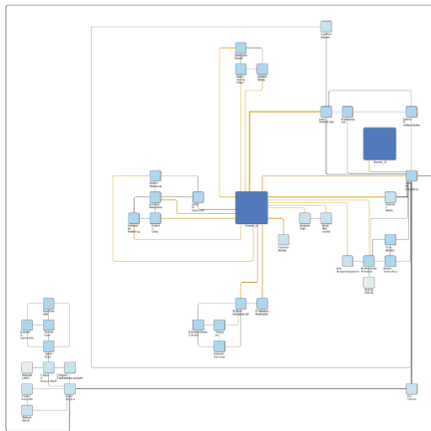


Abbildung: Hybride Visualisierung und Clustering [BDL*2010]

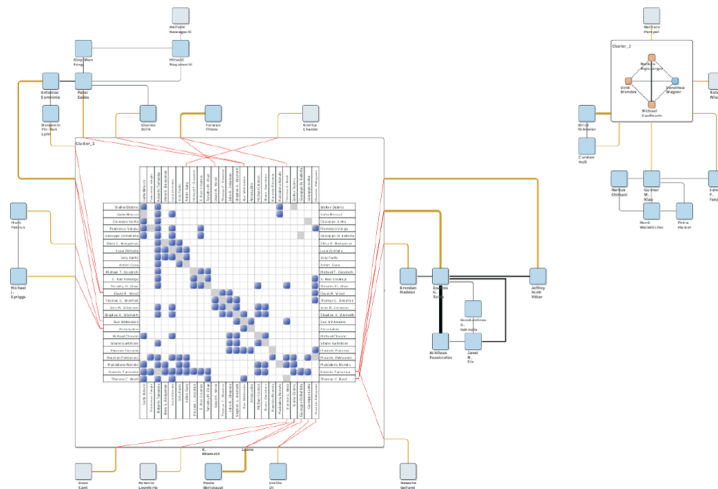


Abbildung: Hybride Visualisierung und Clustering [BDL*2010]

Literatur

- [SA2006] Ben Shneiderman and A. Aris.
Network Visualization by Semantic Substrates.
(Proceedings of IEEE Information Visualization),
IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics 12(5),
733–740, 2006.

Literatur

- [HFM2007] N. Henry, J. D. Fekete and M. J. McGuffin.
NodeTrix: A Hybrid Visualization of Social Networks.
(Proceedings of IEEE Information Visualization),
IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics 13(6),
1302–9, 2007.
- [BDL*2010] V. Batagelj, Walter Didimo, Giuseppe Liotta,
Pietro Palladino, Maurizio Patrignani.
Visual Analysis of Large Graphs Using (X,Y)-clustering
and Hybrid Visualizations.
PacificVis 2010.