Def.:

(i) Sei $A \in K^{n \times n}$.

A heißt invertierbar (regulär) $:\Leftrightarrow \exists B \in K^{n\times n} : A \cdot B = E_n = B \cdot A$ $\quad \left(E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in K^{n \times n} \right)$

In diesem Fall ist B eindeutig bestimmt und man def. $A^{-1} := B$.

A^{-1} heißt die inverse Matrix zu A.

(ii) $GL(n, K) := \{ A \in K^{n\times n} \mid A \text{ ist invertierbar} \}$.

Wie untersucht man A auf Invertierbarkeit?

Satz (Krit. für Invertierbarkeit)

Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann gilt:

A ist invertierbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Wie berechnet man A^{-1} falls A invertierbar ist?

Satz (Kochrezept zum Berechnen von A^{-1})

Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann gilt:

A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ A lässt sich mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen auf die Matrix E_n umformen.

In diesem Fall erhält man A^{-1} wie folgt:

Forme $(A \mid E_n)$ so um, dass links E_n steht: $(A \mid E_n) \rightsquigarrow (E_n \mid B)$ mit $B \in K^{n \times n}$.

Dann gilt: $A^{-1} = B$.

Spezialfälle:

(1) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$. Dann gilt:

A ist invertierbar $\Leftrightarrow \det(A) = a \cdot d - bc \neq 0$

In diesem Fall gilt: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Probe:

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & -bc+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2 \quad \checkmark$$

(2) $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$.

A ist invertierbar $\Leftrightarrow \det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \neq 0, \dots, \lambda_n \neq 0$.

In diesem Fall gilt: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & 0 \\ & \lambda_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$

Satz (Rechenregeln für invertierbare Matrizen)

Seien $A, B \in K^{n\times n}$ invertierbar. Dann gilt:

(1) $A^{-1} \cdot A = E_n = A \cdot A^{-1}$.

(2) $(A^{-1})^{-1} = A$

(3) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

(4) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(5) $(\lambda \cdot A)^{-1} = \lambda^{-1} \cdot A^{-1}$, $\lambda \in K \setminus \{0\}$.