Probeklausur

In der Klausur (und Nachklausur) gelten die folgenden Bedingungen: Bearbeitungszeit: 90 Minuten Als Hilfsmittel ist nur ein selbst- und handgeschriebenes (doppelseitiges) A4-Blatt für zur Unterstützung des Gedächtnisses zugelassen.

Eine Aufgabe gilt nur dann als vollständig gelöst, wenn alle erforderlichen Rechenschritte und Begründungen mit angegeben sind. Zudem sollten die Ergebnisse noch soweit wie möglich vereinfacht werden. Falls eine konkrete Zahl auszurechnen ist, dann ist diese exakt (nicht gerundet) anzugeben. Es können maximal 20 Punkte erreicht werden. Die Klausur ist ab 10 Punkten sicherlich mit der Note 4,0 bestanden, ab 11 Punkten gibt es sicherlich eine 3,7, ab 12 Punkten sicherlich eine 3,3, ab 13 Punkten eine sicherlich eine 3,0 etc. Ab 19 Punkten gibt es eine zweifelsohne eine 1.

Aufgabe 1) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 2024n - 2025}{2n^3 + 42\sin(n!\pi)} \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty} \frac{(2n^2)^2 2^{2n}}{n^3 3^n + n^4 4^n}.$$

(1+1)

Aufgabe 2) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+21}{(-n)^3 \cdot 3^{-n}}.$$

(1)

Aufgabe 3) Bestimmen Sie den Definitionsbereich der folgenden Funktionen und wo diese differenzierbar sind. In diesen Punkten geben Sie die Ableitung an.

$$\text{(a) } f(x) = \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \qquad \text{(b) } g(x) = \frac{\sin(x^2+1)}{\sqrt{\exp(-2024x)}}.$$

Vereinfachen Sie alle Ergebnisse soweit wie ohne großen Aufwand möglich! (2+1)

Aufgabe 4) Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)(x+2) \text{ wenn } x \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte. Welche davon sind lokale Extremstellen und klassifizieren Sie diese gegebenfalls. (3)

Aufgabe 5) Beweisen Sie die Summationsformel

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \qquad (3)$$

Aufgabe 6) Berechnen Sie die folgenden Integrale

$$\text{(a)} \int_1^{\pi/2} x\sin(x)\,dx \qquad \text{(b)} \int_0^x \cos(t)e^{\sin(t)}\,dt.$$

(2+1)

Aufgabe 7) Sei $a_1 > 1$ und wir setzen $a_{n+1} = \log(a_n) + (e-1)$ wenn $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

i) die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ wohldefiniert ist,

ii) $a_n < a_{n+1}$ genau dann wenn $a_n < e$ ist.

iii) die Folge konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

[Sie können die Teilbehauptungen i) oder ii) bei den nächsten Punkten auch benutzen, wenn Sie diese nicht bewiesen haben.] (1+2+2)