Beispiel-Klausur im Modul *Stochastik für Lehramt und Informatik*, 2025

Max Renesse, Mathematisches Institut, Univ. Leipzig

Hinweise

Dauer: 90 Minuten – Erlaubt sind alle nicht-elektronischen Hilfsmittel

Hinweis: Begründen Sie alle Ihre Antworten und zeigen Sie Ihre Rechenwege. Punkte werden für korrekte Ergebnisse und die Nachvollziehbarkeit der Schritte vergeben.

Teil 1: Kombinatorik

(1) (5 Punkte) In einer Schachtel befinden sich 10 Kugeln, von denen 4 rot, 3 blau und 3 grün sind. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, 3 Kugeln aus der Schachtel zu ziehen, wenn:

  (a) die Reihenfolge der Kugeln keine Rolle spielt?

  (b) die Reihenfolge der Kugeln eine Rolle spielt?

(2) (5 Punkte) Ein Passwort besteht aus genau 5 Zeichen, die aus den Buchstaben A bis Z (ohne Umlaute) und den Ziffern 0 bis 9 ausgewählt werden können. Wie viele verschiedene Passwörter sind möglich, wenn keine Wiederholungen erlaubt sind?

Teil 2: Unabhängigkeit

(3) (5 Punkte) Zwei Ereignisse A und B haben die Wahrscheinlichkeiten $P(A) = 0{,}4$ und $P(B) = 0{,}5$.

  (a) Prüfen Sie, ob die Ereignisse unabhängig sind, wenn $P(A \cap B) = 0{,}2$.

(b) Geben Sie ein Beispiel für $P(A \cap B)$, sodass A und B nicht unabhängig sind.

(4) (5 Punkte) In einer Umfrage haben 70 % der Teilnehmer ein Smartphone, 40 % haben ein Tablet, und 30 % besitzen beides. Sind der Besitz eines Smartphones und eines Tablets unabhängig?

Teil 3: Satz von Bayes

(5) (7 Punkte) In einer Fabrik werden 3 Maschinen eingesetzt, die jeweils 50 %, 30 % und 20 % der Produktion übernehmen. Die Ausschussquote beträgt bei Maschine 1 2 %, bei Maschine 2 3 % und bei Maschine 3 5 %. Eine zufällig ausgewählte Ware ist fehlerhaft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt sie von Maschine 2?

(6) (8 Punkte) In einer Stadt beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bewohner raucht, 20 %. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Raucher an einer bestimmten Krankheit leidet, ist 15 %, während nur 5 % der Nichtraucher an dieser Krankheit leiden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person, die an dieser Krankheit leidet, raucht.

Teil 4: Kreuztabellen

(7) (5 Punkte) Die folgende Kreuztabelle zeigt die Ergebnisse einer Umfrage:

	Männlich	Weiblich	Gesamt
Ja	30	50	80
Nein	20	40	60
Gesamt	50	90	140

(a) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person weiblich ist, wenn sie 'Ja' gesagt hat.

(b) Sind die Merkmale 'Geschlecht' und 'Antwort' unabhängig? Begründen Sie.

(8) (5 Punkte) In einer ähnlichen Umfrage wurde festgestellt, dass 60 % der Befragten einer Aussage zustimmen, unabhängig vom Geschlecht. Stellen Sie eine Kreuztabelle auf, die diese Information abbildet.

Teil 5: Erwartungswert und Varianz

(9) (7 Punkte) Ein Würfel wird zweimal geworfen. Sei X der Rest bei Divsion der Summe der Augenzahlen durch 4.

(a) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$.

(b) Berechnen Sie die Varianz $\mathrm{Var}(X)$.

(10) (8 Punkte) Eine Lotterie zahlt mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten aus:

- Gewinn von 0 € mit $P(0) = 0{,}8$
- Gewinn von 10 € mit $P(10) = 0{,}15$
- Gewinn von 50 € mit $P(50) = 0{,}05$

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert der Auszahlung.

(b) Berechnen Sie die Standardabweichung.

Teil 6: Tschbyschev-Ungleichung

(11) (7 Punkte) Es seien X und Y zwei unabhängige Zuvallsvariablen mit $E(X) = 1$, $E(Y) = 0$ und $V(X) = 2$ und $V(Y) = 3$. Geben Sie eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit $P(|X + Y - 1| > \frac{1}{2})$ durch Verwendung der Tschebyschev-Ungleichung.

Teil 7: Zufallsvariablen und deren Verteilung

(12) (10 Punkte) Eine diskrete Zufallsvariable X hat die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$P(X = x) = \begin{cases} 0{,}2 & \text{für } x = 1, \\ 0{,}5 & \text{für } x = 2, \\ 0{,}3 & \text{für } x = 3. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$.

(b) Berechnen Sie die Varianz $\mathrm{Var}(X)$.

(c) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion für diese Zufallsvariable.

(13) (10 Punkte) Es sei X eine auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable und $Y = \sqrt{X}$. Geben Sie die Verteilungsfunktion und die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für Y an.

Teil 8: Gesetz der großen Zahlen und zentraler Grenzwertsatz

(14) (10 Punkte) Ein Münzwurf wird 1000-mal wiederholt. Die Wahrscheinlichkeit für 'Kopf' beträgt $p = 0{,}4$.

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Anzahl der 'Kopf'-Ergebnisse.

(b) Geben Sie gemäß dem zentralen Grenzwertsatz die (asymptotische) Verteilung der Anzahl der 'Kopf'-Ergebnisse an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 420-mal 'Kopf' geworfen wird.

(15) (10 Punkte) Eine Bäckerei verkauft Brötchen mit einem Durchschnittsgewicht von 60 g und einer Standardabweichung von 5 g.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Durchschnittsgewicht einer Stichprobe von 25 Brötchen zwischen 59 g und 61 g liegt?

(b) Wie verändert sich diese Wahrscheinlichkeit bei einer Stichprobengröße von 100 Brötchen?

Teil 8: Parameterschätzung und Konfidenzintervalle

(15) (10 Punkte) In einer Fabrik werden Metallstifte produziert. Es wird angenommen, dass die Länge der produzierten Stifte X einer Normalverteilung folgt: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, wobei die Varianz $\sigma^2 = 0{,}25\,\text{cm}^2$ bekannt ist, der Erwartungswert μ jedoch unbekannt ist.

Ein Ingenieur entnimmt eine Stichprobe von $n = 16$ Stiften und misst deren Längen. Der Stichprobenmittelwert beträgt $\overline{X} = 10{,}2\,\text{cm}$.

1. Schätzen Sie den unbekannten Erwartungswert μ anhand der Stichprobe.
2. Berechnen Sie ein 95%-Konfidenzintervall für μ.

Hinweis: Verwenden Sie für das Konfidenzintervall die bekannte Varianz σ^2.

Teil 9: Hypothesentest

(17) (10 Punkte) Ein Unternehmen behauptet, dass die Lebensdauer seiner Glühbirnen im Mittel $\mu = 1000$ Stunden beträgt. Um die Behauptung zu überprüfen, wird eine Stichprobe von $n = 36$ Glühbirnen untersucht. Dabei ergibt sich eine durchschnittliche Lebensdauer von $\overline{X} = 980$ Stunden, und die Standardabweichung der Lebensdauer wird in der Stichprobe mit $s = 60$ Stunden geschätzt.

1. Formulieren Sie die Nullhypothese H_0 und die Alternativhypothese H_1, wenn getestet werden soll, ob die Lebensdauer tatsächlich kleiner als 1000 Stunden ist.
2. Testen Sie die Hypothese auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$.
3. Treffen Sie eine Entscheidung und begründen Sie Ihr Ergebnis.

Hinweis: Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz, um die Verteilung des Stichprobenmittelwerts zu approximieren.