Analysis [für Informatiker]

Nikita Emanuel John Fehér, 3793479
Erik Thun, 3794446

19. Oktober 2024
Mittwoch 11:15-12:45 Randig, Marvin Gruppe d
Montag 15:15-16:45 Drigalla, Stefan Gruppe b

1) Seien beliebige Mengen A, B, C und D gegeben. Zeigen Sie die folgenden Gleichheiten ($\times$ geht vor $\cap$ und $\cup$).

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C),$$

Beweis:
$\subseteq$

Sei $x \in (A \cap B)$. Dann ist $x \in A, x \in B$
Da $x \in A \implies x \in (A \cup C)$
Da $x \in B \implies x \in (B \cup C)$
Da $x \in (A \cup C)$ und $x \in (B \cup C) \implies x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ ✓

Fall $x \notin A \cap B$, d.h. $x \in C$?

$\supseteq$

$$x \in ((A \cup C) \cap (B \cup C)) \implies x \in (A \cup C) \text{ und } x \in (B \cup C)$$

Fall 1:

$$x \in C \implies x \in ((A \cap B) \cup C)$$ ✓

Fall 2:

$$\begin{aligned} x \notin C &\implies x \in A \text{ und } x \in B \\ &\implies x \in (A \cap B) \\ &\implies x \in ((A \cap B) \cup C) \end{aligned}$$ ✓

$\square$ 1,5/2

$(A \cup C) \times (B \cup D) \setminus (A \times B \cup C \times D) = (A \setminus C) \times (D \setminus B) \cup (C \setminus A) \times (B \setminus D).$

Beweis:
$\subseteq$

$$
\begin{aligned}
& (x,y) \in (((A \cup C) \times (B \cup D)) \setminus (A \times B \cup C \times D)) \\
\implies & (x,y) \in ((A \cup C) \times (B \cup D)) \text{ und } (x,y) \notin (A \times B \cup C \times D) \\
\implies & x \in (A \cup C) \text{ und } y \in (B \cup D) \text{ und } (x,y) \notin (A \times B) \text{ und } (x,y) \notin (C \times D) \\
\implies & ((x,y) \in (A \times D) \text{ und } x \notin C \text{ und } y \notin B) \text{ oder } ((x,y) \in (C \times B) \text{ und } x \notin A \text{ und } y \notin D)
\end{aligned}
$$

Fall 1:

$$
\begin{aligned}
& (x,y) \in (A \times D) \text{ und } x \notin C \text{ und } y \notin B \\
\implies & x \in (A \setminus C) \text{ und } y \in (D \setminus B) \\
\implies & (x,y) \in ((A \setminus C) \times (D \setminus B)) \\
\implies & (x,y) \in ((A \setminus C) \times (D \setminus B) \cup (C \setminus A) \times (B \setminus D))
\end{aligned}
$$

Fall 2:

$$
\begin{aligned}
& (x,y) \in (C \times B) \text{ und } x \notin A \text{ und } y \notin D \\
\implies & x \in (C \setminus A) \text{ und } y \in (B \setminus D) \\
\implies & (x,y) \in ((C \setminus A) \times (B \setminus D)) \\
\implies & (x,y) \in ((A \setminus C) \times (D \setminus B) \cup (C \setminus A) \times (B \setminus D))
\end{aligned}
$$

in Fall 1 und 2 bereits enthalten

Fall 3:

$$
\begin{aligned}
\implies & ((x,y) \in (A \times D) \text{ und } x \notin C \text{ und } y \notin B) \text{ und } ((x,y) \in (C \times B) \text{ und } x \notin A \text{ und } y \notin D) \\
\implies & (x,y) \in (A \times D) \text{ und } x \notin A \text{ und } y \notin D \text{ und } (x,y) \in (C \times B) \text{ und } x \notin C \text{ und } y \notin B \\
\implies & (x,y) \in \{\} \\
\implies & (x,y) \in ((A \setminus C) \times (D \setminus B) \cup (C \setminus A) \times (B \setminus D))
\end{aligned}
$$

$\supseteq$

$$
\begin{aligned}
& (x,y) \in ((A \setminus C) \times (D \setminus B) \cup (C \setminus A) \times (B \setminus D)) \\
\implies & (x,y) \in ((A \setminus C) \times (D \setminus B)) \text{ oder } (x,y) \in ((C \setminus A) \times (B \setminus D))
\end{aligned}
$$

Fall 1:

$$
\begin{aligned}
& (x,y) \in ((A \setminus C) \times (D \setminus B)) \\
\implies & x \in (A \setminus C) \text{ und } y \in (D \setminus B) \\
\implies & (x,y) \in (A \times D) \text{ und } x \notin C \text{ und } y \notin B \\
\implies & (x,y) \notin (A \times B) \text{ } \cancel{\text{oder}} \text{ und } (x,y) \notin (C \times D) \\
\implies & (x,y) \in ((A \cup C) \times (B \cup D) \setminus (A \times B \cup C \times D))
\end{aligned}
$$

Fall 2:

$$
\begin{aligned}
& (x,y) \in ((C \setminus A) \times (B \setminus D)) \\
\implies & x \in (C \setminus A) \text{ und } y \in (B \setminus D) \\
\implies & (x,y) \in (C \times B) \text{ und } x \notin A \text{ und } y \notin D \\
\implies & (x,y) \notin (A \times B) \ \cancel{\text{oder}}\ \text{und}\ (x,y) \notin (C \times D) \\
\implies & (x,y) \in ((A \cup C) \times (B \cup D) \setminus (A \times B \cup C \times D))
\end{aligned}
$$

in Fall 1 und 2 bereits enthalten

Fall 3:

$$
\begin{aligned}
& (x,y) \in ((A \setminus C) \times (D \setminus B)) \text{ und } (x,y) \in ((C \setminus A) \times (B \setminus D)) \\
\implies & (x,y) \in \{\} \\
\implies & (x,y) \in ((A \cup C) \times (B \cup D) \setminus (A \times B \cup C \times D))
\end{aligned}
$$

$\square$

5/6

2) Hier können Sie die Regeln für das Rechnen mit reellen Zahlen (Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz(e), Division durch Zahlen verschieden von Null) nutzen

i) Leiten Sie aus den Grundregeln her, dass für alle reellen Zahlen $a^2 - b2 = (a+b)(a-b)$ gilt.

$$
\begin{aligned}
& (a+b)(a-b) && |\text{Distributivgesetz} \\
\iff & a \cdot (a-b) + b \cdot (a-b) && |\text{Distributivgesetz} \\
\iff & a \cdot a + a \cdot (-b) + b \cdot a + b \cdot (-b) && \\
\iff & a^2 + (-ab) + ba - b^2 && |\text{Kommutativgesetz} \\
\iff & a^2 + (-ab) + ab - b^2 && (-ab \text{ ist additives Inverse zu } ab) \\
\iff & a^2 + 0 - b^2 && \\
\iff & a^2 - b^2 && ✓
\end{aligned}
$$

1/1

□

ii) Zeigen Sie (rigoros), wenn $x, y \in \mathbb{R}$ und $x^2 = y^2$, dann ist $x = y$ oder $x = -y$.

$$
\begin{aligned}
& x^2 = y^2 && |\text{inverse } y^2 \\
\iff & x^2 - y^2 = y^2 - y^2 && \\
\iff & x^2 - y^2 = 0 && |\text{siehe Beweis i)} \\
\iff & x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = 0 && \\
\iff & (x+y)(x-y) = 0 && \\
\iff & x + y = 0 \text{ oder } x - y = 0 &&
\end{aligned}
$$

wurde erst nach der Abgabe in der VL gezeigt

Fall 1

$$
\begin{aligned}
& x + y = 0 && |\text{inverse } y \\
\iff & x + y - y = 0 - y && \\
\iff & x = -y && ✓
\end{aligned}
$$

Fall 2

$$
\begin{aligned}
& x - y = 0 && |\text{inverse } -y \\
\iff & x - y + y = 0 + y && ✓ \\
\iff & x = y &&
\end{aligned}
$$

1/2

□