Universität Leipzig Institut für Informatik Bioinformatik/IZBI	**Algorithmen und Datenstrukturen II** SoSe 2024 – Freiwillige Serie 3		
P.F. Stadler, T. Gatter	Ausgabe am 16.04.2024	Lösung am 23.04.2024	Seite 1/2

Algorithmen und Datenstrukturen II
SoSe 2024 – Serie 3

1 Starke Zusammenhangskomponenten

Der gerichtete Graph G sei durch die folgende Kantenliste definiert.

$$6,\ 8,\ 1,2,\ 2,3,\ 3,1,\ 3,4,\ 3,6,\ 4,5,\ 5,4,\ 1,6$$

a) Benutzen sie den Tarjan-Algorithmus (wie in der Vorlesung beschrieben) beginnend beim Knoten 1, um die starken Zusammenhangskomponenten von G zu berechnen. In der FOR EACH-Schleife innerhalb von `Tarjan-visit` werden die Kindknoten u des aktuellen Knotens v in aufsteigender Reihenfolge der Indizes bearbeitet. Geben sie in der Reihenfolge der Abarbeitung des Algorithmus an:

- jeweils nach Beendigung der FOR EACH Schleife: `v`, `in`[v] und `l`[v]
- die jeweiligen Ausgaben der starken Zusammenhangskomponenten.

b) Zeichnen sie G und dessen Komponentengraphen G^*. Benennen sie dabei die starken Zusammenhangskomponenten von G mit $a, b, \ldots$, in der Reihenfolge, in der sie vom Tarjan-Algorithmus im vorigen Aufgabenteil ausgegeben werden.

2 Mengensysteme

a) Gegeben sind die Menge $E = \{a, b, c, d\}$ und die folgenden Mengen von Mengen:

$\mathcal{M}_1 = \{\, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{c, d\}\,\}$
$\mathcal{M}_2 = \{\, \emptyset, \{a\}, \{b, e\}, \{c\}, \{d\}, \{a, d, e\}\,\}$
$\mathcal{M}_3 = \{\, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, d\}\,\}$
$\mathcal{M}_4 = \{\, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\,\}$
$\mathcal{M}_5 = \{\, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{a, d\}\}$

Geben Sie für jedes $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ an, ob $(E, \mathcal{M}_i)$ ein Mengensystem, ein Unabhängigkeitssystem, ein Matroid ist. Fassen Sie Ihr Ergebnis in Form einer Tabelle mit Einträgen ja/nein zusammen, wobei jedes i eine Spalte und jede der drei Eigenschaften eine Zeile bekommt. Begründen Sie kurz wenn die Eigenschaft nicht gilt (also ein nein eingetragen wird).

b) Geben Sie für die Fälle aus (a), in denen ein Unabhängigkeitssystem, aber kein Matroid vorliegt, eine Gewichtsfunktion an, bei der der kanonische Greedy-Algorithmus aus der Vorlesung keine optimale Lösung findet. Die Gewichtsfunktion soll nur Werte in $\{1, 2, 3, 4\}$ annehmen.

3 Auftragsplanungsmatroid

a Ermitteln Sie für das folgende Autragsproblem die optimale Lösung mittels des in den Vorlesungsfolien beschriebenen Kanonischen Greedy-Algorithmus.

Der Zeitbedarf für jeden Auftrag beträgt einen Tag. Die folgende Tabelle fasst die Aufträge, deren Gewinn und den Abgabetermin zusammen.

Auftrag x	Gewinn w(x)	Termin d(x)
a	12	1
b	6	2
c	4	2
d	3	3
e	9	2
f	2	1

b) Zeigen Sie, dass im Auftragsplanungsproblem – für beliebige Auftragsmengen E und Fristen d – das Mengensystem $(E, \mathcal{M})$ ein Matroid ist.

Hinweis: Verwenden sie dazu, dass (laut Vorlesung) im Auftragsproblem eine Auftragsmenge A zulässig ist (d.h. in $\mathcal{M}$ enthalten ist) genau dann wenn

$$\forall s \in \mathbb{N} : |\{y \in A : d(y) \leq s\}| \leq s. \tag{*}$$

(bzw. ausformuliert: "eine Auftragsmenge ist zulässig, genau dann wenn sie (für jede beliebige Anzahl von Tagen s) höchstens s Aufträge enthält, die alle nach spätestens s Tagen fertig sein müssen.")