Diskrete Strukturen

Nikita Emanuel John Fehér, 3793479

01. November 2024
09:15-10:45 Dietzschold, Johannes

2.1

Bitte direkt auf moodle als Quiz lösen.

2.2

Betrachten Sie folgende **Mengen**:

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \{0, 2, 4, 6, 8\} \\
M_2 &= \{0, 2, 4, 6\} \cup \{10, 8, 6\} \\
M_3 &= \{x \in \mathbb{N} : 2|x, x < 10\} \\
M_4 &= \{\{0, 2\}, \{4, 6, 8\}\}
\end{aligned}
$$

1. Beweisen Sie $M_1 = M_3$.

$$
\begin{aligned}
& M_1 = M_3 \\
\iff & M_1 \subseteq M_3 \text{ und } M_3 \subseteq M_1 \\
\iff & \forall x \in M_1 : x \in M_3 \text{ und } \forall x \in M_3 : x \in M_1 \\
& 0 \in M_1 \text{ und } 0 \in M_3 \\
& 2 \in M_1 \text{ und } 2 \in M_3 \\
& 4 \in M_1 \text{ und } 4 \in M_3 \\
& 6 \in M_1 \text{ und } 6 \in M_3 \\
& 8 \in M_1 \text{ und } 8 \in M_3
\end{aligned}
$$

$\square$

2. Widerlegen Sie $M_3 = M_4$.

$$
\begin{aligned}
& M_3 \neq M_4 \\
\iff & M_3 \not\subseteq M_4 \text{ oder } M_4 \not\subseteq M_3 \\
\iff & \exists x \in M_3 : x \notin M_4 \text{ oder } \exists x \in M_4 : x \notin M_3 \\
& \{0, 2\} \in M_4, \{0, 2\} \notin M_3
\end{aligned}
$$

$\square$

3. Widerlegen Sie $M_2 \subseteq M_3$.

$$
\begin{aligned}
& M_2 \not\subseteq M_3 \\
\iff & \exists x \in M_2 : x \in M_3 \\
& 10 \in M_2, 10 \notin M_3
\end{aligned}
$$

$\square$

2.3

Für zwei Mengen A, B definieren wir

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Seien A und B Mengen aus einem Universum U. Beweisen Sie folgende Aussagen:

1. Es gilt $A \triangle A = \emptyset$.

$$\begin{aligned}
\text{sei } A &= A_1 = A_2 \\
A_1 \triangle A_2 &= (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1) \\
&= (A \setminus A) \cup (A \setminus A) \\
&= \emptyset \cup \emptyset \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

$\square$

2. Es gilt $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

$$\begin{aligned}
& A \setminus B = A \cap B^c \\
\iff & A \setminus B \subseteq A \cap B^c \text{ und } A \setminus B \supseteq A \cap B^c \\
& \subseteq : x \in (A \setminus B) \\
& \quad \implies x \in A \text{ und } x \notin B \\
& \quad \implies x \in A \text{ und } x \in B^c \\
& \quad \implies x \in (A \cap B^c) \\
& \supseteq : x \in (A \cap B^c) \\
& \quad \implies x \in A \text{ und } x \in B^c \\
& \quad \implies x \in A \text{ und } x \notin B \\
& \quad \implies x \in (A \setminus B)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A \triangle B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\
&= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \\
&= ((A \cap B^c) \cup B) \cap ((A \cap B^c) \cup A^c) \\
&= ((A \cup B) \cap (B^c \cup B)) \cap ((A \cup A^c) \cap (B^c \cup A^c)) \\
&= ((A \cup B) \cap U) \cap (U \cap (B^c \cup A^c)) \\
&= (A \cup B) \cap (B^c \cup A^c)^{cc} \\
&= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\
&= (A \cup B) \setminus (A \cap B)
\end{aligned}$$

$\square$

3. Es gilt $(A\triangle B)\triangle C = (A \cup B \cup C) \cap (A^c \cup B^c \cup C^c)$.
   Fehlerhaft?