25.11.24

Vorlesung

Wissen / hoffen, dass wir wissen:

1) $(\Omega, \mathbb{P})$ W-Raum

2) $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariable

3) $$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\,\mathbb{P}(\omega)$$
$$= \sum_{z \in X(\Omega)} z\,\mathbb{P}(X = z)$$

4) $$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(\left(X - m\right)^2\right)$$
$$= \mathbb{E}(X^2) - [m]^2,$$

wobei $m = \mathbb{E}(X)$.

5) Tschebyschev-Ungleichung

$$\mathbb{P}(|X-m|>\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{V}(X).$$

6) X und Y heißen unabhängig $\Leftrightarrow \forall A, B \subset \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X \in A; Y \in B) \overset{!}{=} \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B).$$

6') Falls X und Y unabhängig, so gilt

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

6'') Seien $X_1, X_2, \dots, X_N$ stochastisch unabhängig, so gilt

$$\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_N) = \mathbb{V}(X_1) + \dots + \mathbb{V}(X_N).$$

Satz: (Gesetz der großen Zahlen:)

Es seien $X_1, X_2, X_3, \ldots = \{X_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine unendliche Folge von unabhängigen Wiederholungen von Zufallsvariablen mit $m = \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \cdots$ und $v = \mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(X_2) = \cdots$.

Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left|\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m}\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0$$

für $n \to \infty$.

Beispiel: Sei p = "Taylor-Swift-Wiederholbarkeit".

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{falls Nutzer } k \text{ den Taylor-Swift-Song auf sein Handy lädt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

100 Nutzer

k	1	2	.	.	.	...	100
x_k	0	1	1	0			0

$\rightsquigarrow n = 100$

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{100} x_k = \frac{1}{n} \Big[\underbrace{0 + 1 + 0 + \dots + 0}_{x_i,\; i = 1, \dots 100} \Big]$$

$$= \frac{\#\text{Erfolge}}{\#\text{Runden/Handys}} = \hat{p}.$$

$$\mathbb{E}(X_1) = \sum_{z \in X_1(\Omega)} z \, \mathbb{P}(X_1 = z)$$

$$= 0 \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = 0)}_{(1-p)} + 1 \cdot p = p$$

$$= m$$

ggt: wähle Toleranzwert $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{\#\text{Handys mit Topchance}}{\#\text{Handys}} - p \right| > \varepsilon \right)$$

$\longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$

bei $n = 100$.

$$\hat{p} := \frac{1}{100} \cdot \left(\# \text{ Klangs aus den } 100 \text{ mit Taylor Swift Song} \right)$$

__Beispiel:__ Berechnung von Integralen durch Verwendung eines Zufallsgenerators (Monte-Carlo-Integration.)

__Konkret:__ $\Omega = [0,1]$.

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X(\omega) = \omega^2.$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in [0,1]} X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) \; ?$$

$$= \int_0^1 X(\omega)\,d\omega.$$

$$= \int_0^1 \omega^2\,d\omega = \underline{\frac{1}{3}}.$$

$$\boxed{\text{VL vom 26.11.24}}$$

Gesetz der großen Zahlen:

Sei $X_1, X_2, \ldots\ldots$ eine Folge von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen mit

$$m = \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \ldots$$

und

$$v = \mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(X_2) = \ldots$$

Dann gilt:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0, \text{ wenn } n \to \infty. \quad /\!/$$

Bew.: $\varepsilon > 0$:

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left|\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}_{\xi} - \underbrace{m}_{\mathbb{E}(\xi)}\right| > \varepsilon\right)}$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon^2}\, \mathbb{V}(\xi). \quad \text{(Tschebyschev)},$$

denn $\boxed{\xi := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}$

$$\boxed{\boxed{\mathbb{P}\left(\left|\xi - \mathbb{E}(\xi)\right| > \varepsilon\right)} \le \frac{1}{\varepsilon^2}\, \mathbb{V}(\xi)}$$

und $\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$$= \frac{1}{n}\, \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}(X_i)}_{\mu}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} \cdot \mu = \mu$$

Rechte Seite:

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\, \mathbb{V}(\xi) = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \mathbb{V}\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbb{V}(\alpha X) = \alpha^2 \cdot \mathbb{V}(X) \\ &\text{bei: } X = \sum_{i=1}^{n} X_i \end{aligned}}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n^2}\, \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

(X_i) unabh.

$$= \frac{1}{\varepsilon n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2 \cdot n^2} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} V}_{nV}$$

$$= \frac{V}{\varepsilon^2 \cdot n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Kurzform

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m\right| > \varepsilon\right)$$

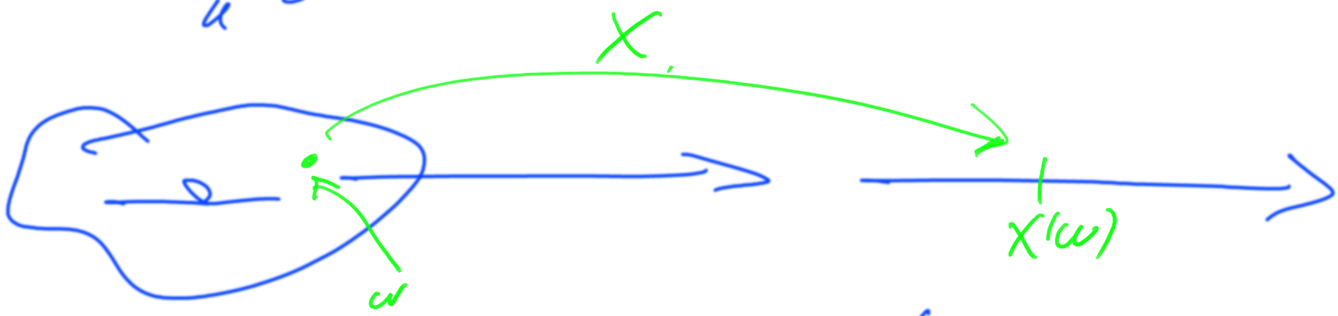
$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n^2} \mathbb{V}\left(\sum X_i\right)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot V$$

$$= \boxed{\frac{V}{\varepsilon^2 \cdot n}}.$$

Bemerkung: Für die konkrete Anwendung von Tschebyschev o.ä. müssen wir also Erwartungswerte und Varianz von „Zufallsgröße"/„Zufallsvariable" X bestimmen.



$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\,\mathbb{P}(\omega)$$

$$= \underbrace{\sum_{z\in X(\Omega)} z\cdot \boxed{\mathbb{P}(X=z)}}_{} = m$$

$$= m_X$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left([X-m_X]^2\right)$$

$$= \sum_{\omega\in\Omega} [X(\omega)-m_X]^2\,\mathbb{P}(\omega)$$

$$= \mathbb{E}(X^2) - [m_X]^2$$

$$= \underbrace{\sum_{z\in X(\Omega)} z^2\, \boxed{\mathbb{P}(X=z)}}_{} - m_X^2$$

Beobachtung:

Zur Bildung von Erwartungswert und Varianz einer Zufallsgröße werden nur die Menge der vorkommenden Ausfallswerte $(X(\Omega))$ und die zugehörigen jeweiligen Wahrscheinlichkeiten benötigt!

<u>Def.:</u> Gegeben sei eine Zufallsgröße X, dann heißt die Menge der Ausfallswerte von X gemeinsam mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten

"<u>Verteilung von X</u>" //

<u>Bem.:</u> (Naive Definition, genauere Variante etwas später).

<u>Bsp.:</u> $(\Omega, P) \triangleq$ Zufallsexperiment vom Werfen zweier fairer Würfel.

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \mid \omega_i \in \{1, \ldots 6\}\}$$

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{36}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\# A}{36}, \quad A \subset \Omega.$$

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega = (\omega_1, \omega_2) \longrightarrow \omega_1 + \omega_2$$

$$X(\Omega) = \{2, 3, \ldots \ 12\}.$$

$z \in X(\Omega)$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X=z)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{z \in X(\Omega)} z \cdot \mathbb{P}(X=z)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + \ldots \ldots$$

$$= m_X$$

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{z \in X(\omega)} z^2 \, \mathbb{P}(X=z) - [m_X]^2.$$

Def.: Eine (diskrete) Verteilung ist 2n-Tupel der Form

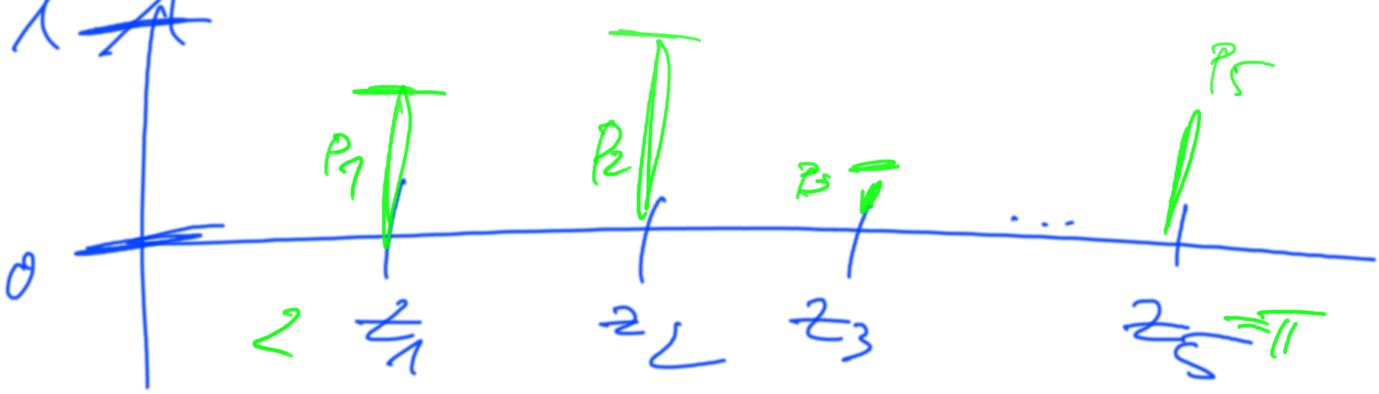
$\boxed{\{(z_i, p_i) \mid i = 1, \ldots n\}}$ mit

$z_i \in \mathbb{R}, \quad p_i \in [0,1],$

und $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, wobei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige geeignete natürliche Zahl ist. //

(Sprechweise auch: Wahrscheinlichkeitsverteilung.)

graphische Darstellung im $\mathbb{R}^2$



Beispiel: Binomialverteilung:

geg: Münze mit Erfolgsparameter $p = \frac{1}{4}$, 3 maliger Wurf.

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mid \omega_i \in \{0,1\}\}$$

$$\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}((\omega_1, \omega_2, \omega_3))$$

$\omega = (1,0,1)$

$\mathbb{P}((1,0,1)) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}$

$$= p^{\#\{\omega_i \mid \omega_i = 1\}} \cdot (1-p)^{\#\{\omega_i \mid \omega_i = 0\}}$$

$$\mathbb{P}(\{(w_1, w_2, w_3)\}) = p^{\#\{i \mid w_i = 1\}} \cdot (1-p)^{\#\{i \mid w_i = 0\}}$$

$$X(w) = w_1 + w_2 + w_3$$

z	0	1	2	3
P_z	$\left(\frac{3}{4}\right)^3$	$3\left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{4}$	$3\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{3}{4}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^3$

Allgemein: n Würfe, Erfolgsparameter p

z	0	$\dots$	k	$\dots$	n
P_z					

$$P_k = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$