UNIVERSITÄT LEIPZIG

Diskrete Strukturen (WS 2024-25)

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

Unsere Beschränkungen und Ziele

- Verschiedene Studiengänge (Informatik, Lehramtsstudenten, Mathematik)
- Einführung in die Mathematik und genaues mathematisches Denken
  - Was wir genau tun, ist weniger wichtig

- Inhalte:
  - Logik (später: Strukturen, die in einem Computer programmiert werden können, die Logik darstellen)
  - Elementarste Mengenlehre, mit einem Blick ins Unendliche (weil wir versuchen, diese Vorlesung so zu organisieren dass sie auch interessant ist und zum Nachdenken anregt)
  - Mathematische Strukturen, die in einem Computer programmiert und in Algorithmen verwendet werden können (Gruppen, Ringe, Körper, Graphen)

Ziele für Heute

- Standardnotation lesen & schreiben
- Einführung in mathematisches Denken
- Einführung in die Formalisierung von Begriffen wie "Wahrheit" in der Mathematik
- Einführung in die Art und Weise, wie Computer in der Lage sind, Wissen zu speichern und zu verarbeiten

StGB § 211 — Mord

- Der Mörder wird mit lebenslanger Freiheitsstrafe bestraft.
- Mörder ist, wer
  - aus Mordlust, zur Befriedigung des Geschlechtstriebs, aus Habgier oder sonst aus niedrigen Beweggründen,
  - heimtückisch oder grausam oder mit gemeingefährlichen Mitteln oder
  - um eine andere Straftat zu ermöglichen oder zu verdecken,

  einen Menschen tötet.

- Aussagen

Anton-ist-Mörder   Anton-tötet-aus-Habgier
Anton-bekommt-lebenslang   Anton-tötet-heimtückisch

- Aussagenkombinationen

Anton-tötet-heimtückisch **oder** Anton-tötet-aus-Habgier
wenn Anton-ist-Mörder **dann** Anton-bekommt-lebenslang

- Der letzte Satz erfasst einen Teil des Gesetzes. Er erlaubt uns, eine Folgerung zu ziehen. Wenn wir wissen dass die Aussage Anton-ist-Mörder ist wahr und wir wissen das der letzte Satz ist wahr, dann wissen wir auch dass die Aussage Anton-bekommt-lebenslang ist wahr.

StVO I, § 30(3) — Sonn- & Feiertagsfahrverbot (editiert)

An Sonn- und Feiertagen dürfen (...) Lastkraftwagen nicht verkehren. Dies gilt nicht für

- die Beförderung von frischer Milch und frischen Milcherzeugnissen,
- die Beförderung von frischem Fleisch und frischen Fleischerzeugnissen,
- ...

- Aussagen: "Es ist Sonntag" "L ist ein Lastkraft", "L darf nicht verkehren", "L befördet frische Milch", ...
- Aussagenkombination:
  - "L befördet frische Milch" oder "L befördet frisches Fleich"
  - Wenn "Es ist Sonntag" und ("L befördet frische Milch" oder "L befördet frisches Fleich") dann nicht wahr das "L darf nicht verkehren"

Definition (informel). *Aussage = Äußerung die entweder wahr oder falsch ist*

- genau ein Wahrheitswert; obwohl darf unbekannt sein
- 1 = wahr und 0 = falsch
- Beispiele von Aussagen: “LKW L-DS 2022 befördert frische Milch”, “16.11.2022 war ein Feiertag in Sachsen”, “2 ist prim”, "2 + 2 = 5”, “Jede gerade natürliche Zahl $n > 2$ ist Summe zweier Primzahlen”
- nicht Aussage: "Dieser Satz ist falsch".

Am meistens verwenden wir die große Buchstaben A, B, C,... für Aussagen. Junktoren:

- Negation $\neg F$ nicht F
- Konjunktion $F \wedge G$ F und G
- Disjunktion $F \vee G$ F oder G
- Implikation $F \to G$ wenn F, dann G
- beidseitige Implikation $F \leftrightarrow G$ F genau dann, wenn G (auch Äquivalenz genannt)

Gedankenstütze: Konjunktion $A \wedge B$ (und = unten offen), Disjunktion $A \vee B$ (oder = oben offen)

Wenn wir den Wahrheitswert von Grundaussagen kennen, dann können wir auch sagen, was der Wahrheitswert ihrer beliebigen Kombination ist. Wir verwenden die folgenden Regeln.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Die meisten Verständnisschwierigkeiten gehen von der Implikation aus. Eine implikative Aussage $A \to B$ besteht aus Vorbedingung A und Folgerung B.

Beispiel. *Nehmen wir an, wir haben eine Regel "Wenn es um 8Uhr regnet, dann nehmen Leute einen Regenschirm mit.".*

- *Wenn es regnet und die obige Regel wahr ist, dann wissen wir auch, dass jede Person einen Regenschirm mitnehmen muss.*
- *Wenn es nicht regnet und die obige Regel wahr ist, dann erlaubt sie uns keine Aussage darüber, ob wir einen Regenschirm mitnehmen oder nicht.*
- *Es regnet nicht, manche Leute nehmen Rengenschirm mit, manche nicht. Aber die Aussage ist wahr.*

Definition (informel) - Atome & Formeln: *Atome = primitive Aussagen wie A, B, Formeln = Aussagen inkl. Kombinationen*

- Wahrheitswert von Atom = Gültigkeit fachlicher "Aussage", Formel = ergibt sich aus Wahrheitswert der vorkommenden Atome, unter Anwendung der oben genannten Regeln.

- Heute sind wir insbesondere an Formeln interessiert, die immer wahr sind, unabhängig von den Werten der Atome. Mit den obigen Regeln sehen wir zum Beispiel, dass der Wert von $A \vee \neg A$ immer 1 ist, egal was der Wert von A ist.

Definition. Eine Formel ist

- eine Tautologie (oder tautologisch), falls sie unabhängig von der Belegung der Atome wahr ist. “Tautologien sind immer wahr”.
- unerfüllbar (oder Kontradiktion), falls sie unabhängig von der Belegung der Atome falsch ist. “Unerfüllbare Formeln sind immer falsch)’
- erfüllbar, falls sie nicht unerfüllbar ist, d. h. es gibt eine Belegung der Atome, so dass die Formel wahr ist,
- widerlegbar, falls sie keine Tautologie ist., d. h. es gibt eine Belegung der Atome, so dass die Formel falsch ist).

Die einfachste Methode, um zu überprüfen, ob eine gegebene Formel eine Tautologie ist, ist die Verwendung der so genannten Wahrheitstabelle - tabellarische Auflistung aller Möglichkeiten. Schritte:

- Identifikation aller vorkommenden Atome $A_1, \ldots, A_n$
- Auflistung aller 2^n Wahrheitswertbelegungen für $A_1, \ldots, A_n$

A_1	A_2	$\cdots$	A_{n-1}	A_n	$\cdots$
0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$
0	0	$\cdots$	0	1	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
1	1	$\cdots$	1	1	$\cdots$

- Berechnung der Wahrheitswerte der Teilformeln

Beispiel: ist die Formel: $(A \wedge B) \rightarrow A$ eine Tautologie? (d.H. wir zeigen dass diese Formel gilt immer, unabhänging davon was A and B sind)

A	B	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \rightarrow A$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Definition. *Zwei Formeln sind äquivalent genau dann, wenn (gdw) deren Wahrheitswerte für alle Belegungen der Atome übereinstimmen.*

- Die Formeln $(A \to B) \to C$ und $A \to (B \to C)$ sind nicht äquivalent.

A	B	C	$(A \to B) \to C$	$A \to (B \to C)$
0	0	0	0	1

Die Aussagen $A \to B$ and $\neg A \vee B$ sind äquivalent. Man nennt diese Äquivalenz “Elimination von $\to$”. Die Wahrheitstabelle für die Aussage $A \to B$ haben wir schon gesehen.

Hier ist die Wahrheitstabelle für die Aussage $\neg A \vee B$:

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

Wir sehen also dass die zwei Wahrheitstabellen sind gleich, was bedeutet dass die zwei Aussagen äquivalent sind.

- Ähnlich zeigen wir dass die Formeln $(A \wedge B) \wedge C$ und $A \wedge (B \wedge C)$ äquivalent sind. Diese Äquivalenz heißt "Assoziativität von $\wedge$".
- Wenn wir zwei Formeln haben, F und G, dann sind F und G äquivalent genau dann wenn die Formel $F \leftrightarrow G$ eine Tautologie ist.
  - Z.B. die Formel $(\neg A \vee B) \leftrightarrow (A \to B)$ ist eine Tautologie.

- Äquivalente Formeln können füreinander substituiert werden. Dieses Substitutionsprinzip eröffnet uns die Möglichkeit, Formeln durch Äquivalenzketten zu vereinfachen. Damit kann man z.B. überprúfen ob eine Formel eine Tautologie ist.
- Jetzt werden wir zwei Folien sehen mit wichtigsten Äquivalenzen, die man in solchen Äquivalenzketten benutzen kann.

Äquivalente Formeln		Bezeichnung
$A \wedge B$	$B \wedge A$	Kommutativität von $\wedge$
$A \vee B$	$B \vee A$	Kommutativität von $\vee$
$(A \wedge B) \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$	Assoziativität von $\wedge$
$(A \vee B) \vee C$	$A \vee (B \vee C)$	Assoziativität von $\vee$
$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Distributivität von $\wedge$
$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Distributivität von $\vee$
$A \wedge A$	A	Idempotenz von $\wedge$
$A \vee A$	A	Idempotenz von $\vee$

Vorsicht - keine Assoziativität für "$\rightarrow$": $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ and $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ sind nicht äquivalent, wie wir früher gesehen haben

Äquivalente Formeln		Bezeichnung
$\neg\neg A$	A	Involution $\neg$
$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	De-Morgan-Gesetz für $\wedge$
$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	De-Morgan-Gesetz für $\vee$
$A \wedge (A \vee B)$	A	Absorptionsgesetz für $\wedge$
$A \vee (A \wedge B)$	A	Absorptionsgesetz für $\vee$
$A \rightarrow B$	$\neg A \vee B$	Elimination von $\rightarrow$
$A \leftrightarrow B$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	Elimination von $\leftrightarrow$

Diese Regeln und das Substitutionsprinzip reichen immer aus, um zu zeigen, dass zwei Formeln äquivalent sind. Das ist nicht offensichtlich! Jedoch es ist so.

Beispiel: Äquivalenzkette und Substitutionsprinzip

Wir zeigen dass die Aussagen $((A \land B) \lor (A \land C)) \land A$ und $A \land (B \lor C)$ äquivalent sind.

Wir fangen mit $((A \land B) \lor (A \land C)) \land A$ an.

- Äquivalent zu $(A \land (B \lor C)) \land A$ (Distributivität $\land$)
- Äquivalent zu $A \land (A \land (B \lor C))$ (Kommutativität $\land$)
- Äquivalent zu $(A \land A) \land (B \lor C)$ (Assoziativität $\land$)
- Äquivalent zu $A \land (B \lor C)$ (Idempotenz $\land$)

Also wir sehen dass die Aussagen $((A \land B) \lor (A \land C)) \land A$ und $A \land (B \lor C)$ äquivalent sind.

UNIVERSITÄT
LEIPZIG

VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT!

Łukasz Grabowski
Mathematisches Institut

grabowski@math.uni-leipzig.de