(b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, so dass das folgende lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat:

$$\begin{array}{rcrcl} x & - & ay & = & 1 \\ (a-1)x & - & 2y & = & 1. \end{array}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -a & 1 \\ a-1 & -2 & 1 \end{array}\right) \cdot(-(a-1)) \; +$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -a & 1 \\ 0 & a^2-a-2 & 2-a \end{array}\right)$$

$$a^2 - a - 2 = 0 \iff a = \frac{1}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{1}{4} + 2}}_{= \frac{3}{2}} \iff a = 2 \lor a = -1$$

$$2 - a = 0 \iff a = 2$$

$\Rightarrow$ Das GLS $A \cdot x = b$ besitzt genau dann unendlich viele Lösungen, wenn $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b) < 2$ ist, d.h. wenn $a = 2$ ist.

1. Fall: $a \in \mathbb{R} \setminus \{2; -1\}$

$\Rightarrow a^2 - a - 2 \neq 0$

$\Rightarrow \text{rang}(A) = 2$

$\Rightarrow A$ ist inv.bar

$\Rightarrow x = A^{-1} \cdot b \quad (A \cdot x = b)$

$\Rightarrow$ Das GLS hat eine eind. Lsg.

2. Fall: $a = -1$

$$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 3$ ↯

$\Rightarrow \text{Lös}(A, b) = \emptyset$

3. $a = 2$:

$$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x_1 - 2x_2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 1 + 2x_2$$

$$\Rightarrow \quad \text{Lös}(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad |\text{Lös}(A, b)| = \infty$$

$$= \{ w \cdot \underbrace{(1,0,0,0)}_{=: v_1} + y \cdot \underbrace{(0,2,1,0)}_{=: v_2} + z \cdot \underbrace{(0,-1,0,1)}_{=: v_3} \mid w, y, z \in \mathbb{R} \}$$

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \quad (1) \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \quad (2) \\ \lambda_2 &= 0 \quad (3) \\ \lambda_3 &= 0 \quad (4) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_3 \overset{(4)}{=} 0, \quad \lambda_2 \overset{(3)}{=} 0, \quad \lambda_1 \overset{(1)}{=} 0$$

V VR

$\Rightarrow (V, +)$ abelsche Gruppe

Seien V, W K-VR'e,

$f: V \to W$ Abb.

f linear $:\Leftrightarrow$

(1) $\underbrace{\forall v_1, v_2 \in V: f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)}_{\Leftrightarrow\ f: (V,+) \to (W,+) \text{ ist Gruppenhom}}$

(2) $\forall \lambda \in K\ \forall v \in V: f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$

$$U = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \right\}$$

$$U_1 = \{0\} \qquad \dim U_1 = 0$$

$$U_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$U_3 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$U_4 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$U_5 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$U_6 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$U_7 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$U_8 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = V.$$

$$\dim U_i = 1, \quad i = 2, 3, 4$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad x_3 = 0, \quad x_2 = -x_3 = 0,$
$x_1 = -x_2 - x_3 = 0$

$\Rightarrow \quad \text{Kern}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Basis von Kern(A) : $\emptyset$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad x_2 = -x_3$
$x_1 = -\underbrace{x_2}_{=-x_3} - x_3 = 0$

$\Rightarrow \quad \text{Kern}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

$$= \{ x_3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: v_1} \mid x_3 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \operatorname{span}\{v_1\}$$

$\Rightarrow$ $\{v_1\}$ ist Basis von $\operatorname{Kern}(A)$

Bsp.:

$V = \mathbb{R}^3$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\{v_1, v_2\}$ l.u.

$\{v_1, v_2\}$ lässt sich zu einer Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ ergänzen

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \cdot(-1) \; +$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$j_1 = 1$, $j_2 = 2$

e_j, $j \in \{1,2,3\} \setminus \{j_1, j_2\} = \{3\}$

$$v_3 := e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ Basis von $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ + \\ \ \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rang}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 3$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ l.u.

$$|\{v_1, v_2, v_3\}| = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ Basis von $\mathbb{R}^3$