Prof. Carsten Lutz
Maurice Funk, Gustav Grabolle

Universität Leipzig SoSe 24

Logik
Übungsblatt 2

Übungsaufgaben werden in den Übungen besprochen. Übungszeitraum: 22.04. – 03.05.
Hausaufgaben werden bewertet. Abgabe über Moodle bis: 9:00 Uhr am 06.05.2024

Übungsaufgabe 1

(a) Beweisen Sie: für alle aussagenlogischen Formeln ψ gilt $\psi \wedge 0 \equiv 0$. Nutzen Sie dazu die bekannten Äquivalenzen aus der Vorlesung. Geben Sie in jedem Schritt die verwendete Äquivalenz an.

(b) Gegeben sind die aussagenlogischen Formeln:

$\varphi_1 = x \qquad \varphi_2 = x \vee \neg(y \vee \neg x) \qquad \varphi_3 = (y \vee (z \vee \neg y)) \wedge x \qquad \varphi_4 = (y \to y) \wedge x$

Beweisen Sie, dass die Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ paarweise äquivalent sind. Ersetzen Sie zuerst verwendete Abkürzungen durch Basisjunktoren. Nutzen Sie dann die bekannten Äquivalenzen aus der Vorlesung. Geben Sie in jedem Schritt die verwendete Äquivalenz an.

Übungsaufgabe 2 Gegeben sind folgende Junktorenmengen:

$$M_1 = \{\vee, \oplus, 1\} \qquad\qquad M_2 = \{\leftrightarrow\}$$

(a) Beweisen Sie, dass M_1 funktional vollständig ist.

(b) Vervollständigen Sie folgende Behauptung und ihren Beweis:

> **Behauptung**
>
> Für $V_1 : \mathrm{VAR} \to \{0,1\}$: und jede aus M_2 gebildete Formel φ gilt $V_1(\varphi) =$.
>
> Wir beweisen diese Behauptung mittels Induktion über den
> .
>
> **Induktionsanfang:** Sei φ atomar, dann ist φ .
> Somit gilt $V_1(\varphi) = V_1(\quad) =$.
>
> **Induktionsvorraussetzung:** Angenommen die Behauptung gilt für die aussagenlogischen Formeln ψ_1 und ψ_2 die aus M_2 gebildet wurden.
>
> **Induktionsschritt:**
> Angenommen $\varphi =$. Dann gilt:
>
> $$V_1(\varphi) = V_1(\quad \leftrightarrow \quad) = V_1(\quad) \leftrightarrow \qquad = \quad \leftrightarrow \quad =$$
>
> Somit folgt die Behauptung nach dem Prinzip der Induktion. □

(c) Widerlegen Sie, dass M_2 funktional vollständig ist. Nutzen Sie dazu die bewiesene Behauptung aus (b).

Übungsaufgabe 3 Gegeben sind folgende aussagenlogische Formeln:

$\varphi_1 = x \vee y \to z$

$\varphi_2 = (\neg y \wedge \neg z) \vee \neg z$

$\varphi_3 = x$

$\varphi_4 = (\neg x \wedge y) \wedge (x \wedge \neg x)$

$\varphi_5 = (x \wedge y) \vee (y \wedge z)$

$\varphi_6 = \bigvee_{i=2}^{4} \varphi_i$

$\varphi_7 = (((x \wedge \neg z) \vee x) \wedge z)$

$\varphi_8 = \neg x \vee \neg y \vee z$

$\varphi_9 = \bigvee_{i=0}^{13} \bigwedge_{j=0}^{12} x$

(a) Geben Sie jeweils an, ob die aussagenlogischen Formeln $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ in konjunktiver Normalform sind.

(b) Geben Sie jeweils an, ob die aussagenlogischen Formeln $\varphi_6, \varphi_7, \varphi_8, \varphi_9$ in disjunktiver Normalform sind.

(c) Geben Sie die Wahrheitstafel der aussagenlogischen Formel φ_1 an.

(d) Geben Sie jeweils zu φ_1 äquivalente aussagenlogische Formeln in konjunktiver Normalform und in disjunktiver Normalform an. Nutzen Sie dazu das Wahrheitstafelverfahren aus der Vorlesung, sowie die Wahrheitstafel aus (c).

(e) Geben Sie eine zu φ_1 äquivalente aussagenlogische Formeln in disjunktiver Normalform an, welche kürzer ist, als die in (d) ermittelte.

Hausaufgabe 4 (2 + 2 + 4 + 4)

Gegeben sind folgende aussagenlogische Formeln:

$\varphi_1 = x \vee y \to z \qquad \varphi_2 = (x \to z) \wedge (y \to z) \qquad \varphi_3 = \neg x \leftrightarrow y \qquad \varphi_4 = x \leftrightarrow \neg y$

(a) Widerlegen Sie, dass $\varphi_1 \equiv \varphi_3$.

(b) Beweisen Sie, dass für alle aussagenlogischen Formeln ψ_1, ψ_2, ψ_3

$$(\psi_1 \wedge \psi_2) \vee \psi_3 \equiv (\psi_1 \vee \psi_3) \wedge (\psi_2 \vee \psi_3)$$

gilt.

(c) Beweisen Sie, dass $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ und $\varphi_3 \equiv \varphi_4$. Ersetzen Sie zuerst verwendete Abkürzungen durch Basisjunktoren.

Beweisen Sie Äquivalenzen durch Äquivalenzumformungen. Nutzen Sie die bekannten Äquivalenzen aus der Vorlesung und den Aufgaben. Geben Sie in jedem Schritt die verwendete Äquivalenz an.

Hausaufgabe 5 $(2 + 4 + 6)$

Gegeben sind die Junktoren $\uparrow$ und $\nleftrightarrow$ durch folgende Wahrheitstafel:

φ	$\uparrow\varphi$
0	1
1	1

φ	ψ	$\varphi \nleftrightarrow \psi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(a) Geben Sie eine unerfüllbare Formel an, welche ausschließlich die Junktoren $\uparrow$ und $\nleftrightarrow$ und maximal zwei Vorkommen von Aussagenvariablen enthält.

(b) Beweisen Sie, dass $\{\uparrow, \nleftrightarrow, \vee\}$ funktional vollständig ist.

(c) Widerlegen Sie, dass $\{\nleftrightarrow\}$ funktional vollständig ist.

Hausaufgabe 6 $(4 + 4 + 6)$

Seien $\uparrow$ und $\nleftrightarrow$ wie in Hausaufgabe 5. Gegeben sind folgende aussagenlogische Formeln:

$$\varphi_1 = (x \nleftrightarrow y) \nleftrightarrow y \qquad \varphi_2 = x \nleftrightarrow (\uparrow y \nleftrightarrow z)$$

(a) Geben Sie jeweils die Wahrheitstafeln dieser aussagenlogischen Formeln an.

(b) Geben Sie jeweils äquivalente aussagenlogische Formeln in konjunktiver Normalform und in disjunktiver Normalform an. Nutzen Sie dazu das Wahrheitstafelverfahren aus der Vorlesung, sowie die Wahrheitstafeln aus (a).

Hausaufgabe 7 $(3 + 3 + 3 + 3)$

Geben Sie an welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie ihre Antwort jeweils kurz.

(a) Für alle aussagenlogischen Formeln φ gilt: Die konjunktive Normalform von φ produziert mit dem Wahrheitstafelverfahren ist mindestens so groß wie φ.

(b) Für alle aussagenlogischen Formeln φ gilt: $\varphi \models 1$.

(c) Für alle aussagenlogischen Formeln φ gilt: $\{\varphi, \neg\varphi\} \models \varphi$.

(d) Für alle aussagenlogischen Formeln φ, ψ gilt: $\{\neg(\varphi \wedge \psi),\ \varphi\} \models \neg\psi$.

Benötigt ihr Hilfe? Kommt vorbei!

Offener Matheraum Informatik:	Mo	11–13 und 15–17 Uhr	P401
	Di–Do	11–17 Uhr	P412
	Fr	11–15 Uhr	P412