Mächtigkeit Turingmaschine

§4.1 Theorem

Für jede Grammatik G existiert normierte TM M mit $L(M) = L(G)$

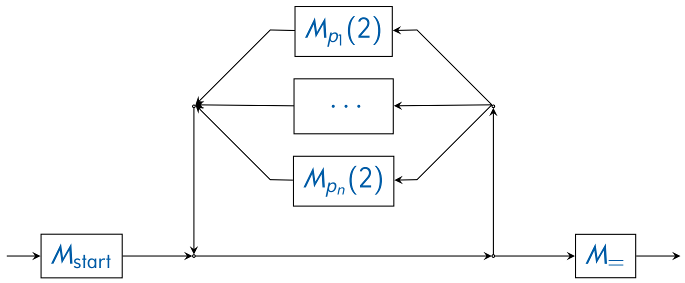
Beweisansatz mit 2-Band-TM

Sei $G = (N, \Sigma, S, P)$

1. Falls $S \to \varepsilon \in P$ und Eingabe ε, dann akzeptiere (d.h. Kopf steht auf $\square$)
2. Sonst schreibe Startnichtterminal S auf Band 2
3. Wende Produktionen P auf Band 2 an
4. Vergleiche Bänder und akzeptiere bei Gleichheit $\square$

Mächtigkeit Turingmaschine

$P = \{p_1, \dots, p_n\}$

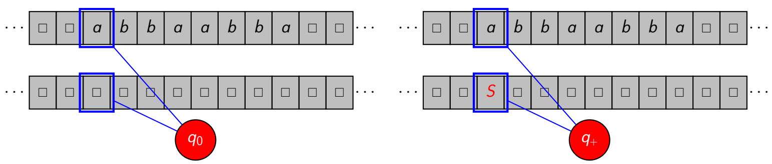


Mächtigkeit Turingmaschine

2-Band-TM $M_{\text{start}} = (\{q_0, q_+, q_-\}, \Sigma, \Gamma, \Delta, \square, q_0, q_+, q_-)$

- $\Gamma = \{\square\} \cup \Sigma \cup N$
- Übergänge

$$\Delta = \{(q_0, \langle \square, \square \rangle) \to (q_+, \langle (\square, \diamond), (\square, \diamond) \rangle) \mid S \to \varepsilon \in P\} \cup$$
$$\{(q_0, \langle \sigma, \square \rangle) \to (q_+, \langle (\sigma, \diamond), (S, \diamond) \rangle) \mid \sigma \in \Sigma\}$$

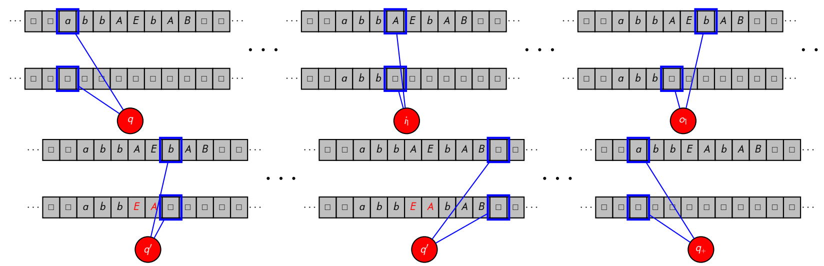


Mächtigkeit Turingmaschine

2-Band-TM M'_p für Übergang $p = \ell \to r \in P$

- Kopiere Symbole Band 1 $\to$ 2 mit Halt auf bel. Symbol (außer $\square$)
- Lese ℓ auf Band 1 (ohne Aktionen auf Band 2)
- Bei Erfolg schreibe r auf Band 2 (ohne Aktionen auf Band 1)
- Kopiere verbleibende Symbole Band 1 $\to$ 2

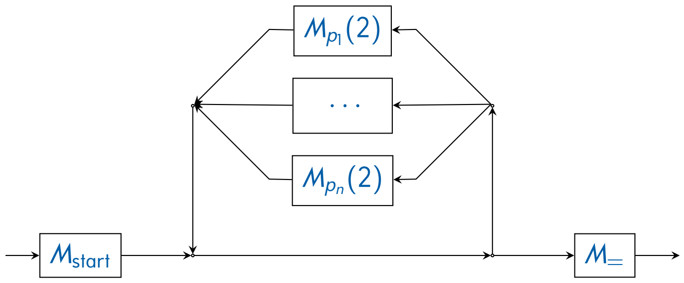
Illustration für Produktion $AE \to EA$



Mächtigkeit Turingmaschine

Ableitungsschritt-TM M_p

- Umwandlung 2-Band-TM M'_p in TM M_p
- Realisiert Anwendung Übergang p auf Arbeitsband
- Angewandt auf Band 2 der Gesamt-TM

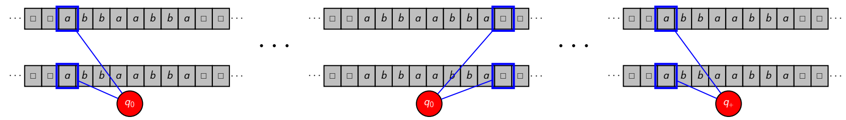


Mächtigkeit Turingmaschine

2-Band-TM $M_= = (\{q_0, q, q_+, q_-\}, \Gamma \setminus \{\square\}, \Gamma, \Delta, \square, q_0, q_+, q_-)$

- $\Gamma = \Sigma \cup N \cup \{\square\}$
- Übergänge

$$\begin{aligned}\Delta = \; & \{(q_0, \langle \sigma, \sigma \rangle) \to (q_0, \langle (\sigma, \triangleright), (\sigma, \triangleright) \rangle) \mid \sigma \in \Sigma\} \cup \\ & \{(q_0, \langle \square, \square \rangle) \to (q, \langle (\square, \triangleleft), (\square, \triangleleft) \rangle)\} \cup \\ & \{(q, \langle \sigma, \sigma \rangle) \to (q, \langle (\sigma, \triangleleft), (\sigma, \triangleleft) \rangle) \mid \sigma \in \Sigma\} \cup \\ & \{(q, \langle \square, \square \rangle) \to (q_+, \langle (\square, \triangleright), (\square, \triangleright) \rangle)\}\end{aligned}$$



Mächtigkeit Turingmaschine

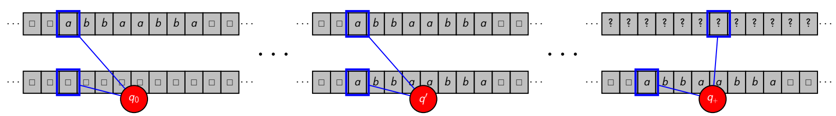
§4.2 Lemma

Sei M TM. Dann existiert TM M' mit $T(M') = \mathrm{id}_{L(M)}$

Beweisansatz

Nutze 2-Band-TM

- Kopiere Eingabe auf Band 2 (und Rücklauf auf 1. Zeichen)
- Lasse M auf Band 1 laufen □



Mächtigkeit Turingmaschine

§4.3 Theorem

Für jede TM M existiert Grammatik G mit $L(G) = L(M)$

Beweisansatz

Es existiert TM M' mit $T(M') = \{(w, w) \mid w \in L(M)\}$ via Lemma §4.2

1. Erzeuge Ausgangssituation mit markierten Rändern (linker Rand überstrichen; rechter Rand unterstrichen)
2. Simuliere Schritte der TM M'
3. Lösche überzählige $\square$

Notizen

- Grammatik-Satzform entspricht TM-Satzform (Systemsituation)
- Symbol unter Lesekopf und TM-Zustand in Nichtterminal kodiert

Mächtigkeit Turingmaschine

Beweisskizze (1/3)

1. Erzeuge Ausgangssituation mit markierten Rändern
   - Eingabealphabet Σ und Arbeitsbandalphabet Γ
   - Nichtterminale $\Gamma' \cup (Q \times (\Gamma' \cup \Sigma))$ mit $\Gamma' = (\Gamma \setminus \Sigma) \cup \overline{\Gamma} \cup \underline{\Gamma} \cup \underline{\overline{\Gamma}}$
   - Produktionen

$$P_1 = \{S \to S'\square,\ S \to (q_0, \underline{\overline{\square}})\} \cup \{S' \to S'a \mid a \in \Sigma\} \cup \{S' \to (q_0, \overline{a}) \mid a \in \Sigma\}$$

   - Ableitungen der Form: $S \Rightarrow_G^* (q_0, \overline{a})w\square$ (Ausgangssituation TM M')

Notizen

- Erzeugt geratene Eingabe aw mit markierten Rändern
- Beispielableitung (Startzustand q_0 und Eingabe $abaa$)

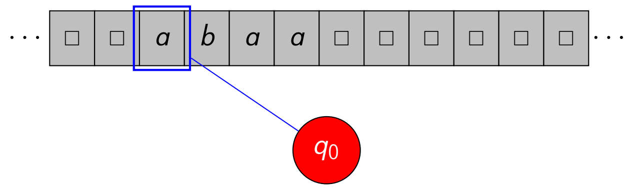
$$S \Rightarrow_G S'\square \Rightarrow_G S'a\square \Rightarrow_G S'aa\square \Rightarrow_G S'baa\square \Rightarrow_G (q_0, \overline{a})baa\square$$

Mächtigkeit Turingmaschine

Grammatiksatzform

$$(q_0, \overline{a})baa\square$$

TM-Systemsituation



Mächtigkeit Turingmaschine

Beweisskizze (2/3)

2. Simuliere Schritte TM M'
   - Produktionen

$$\begin{aligned} P_2 = &\{a(q,b) \to (q',a)b' \mid (q,b) \to (q',b',\triangleleft) \in \Delta,\ a \in \Gamma\} \cup \\ &\{(q,b) \to (q',b') \mid (q,b) \to (q',b',\diamond) \in \Delta\} \cup \\ &\{(q,b)c \to b'(q',c) \mid (q,b) \to (q',b',\triangleright) \in \Delta,\ c \in \Gamma\} \cup \\ &\{(q,\overline{b}) \to (q',\overline{\square})b' \mid (q,b) \to (q',b',\triangleleft) \in \Delta\} \cup \\ &\{(q,\overline{b}) \to (q',\overline{b'}) \mid (q,b) \to (q',b',\diamond) \in \Delta\} \cup \\ &\{(q,\overline{b})c \to \overline{b'}(q',c) \mid (q,b) \to (q',b',\triangleright) \in \Delta,\ c \in \Gamma\} \cup \\ &\cdots \quad \text{(viele weitere Varianten)} \end{aligned}$$

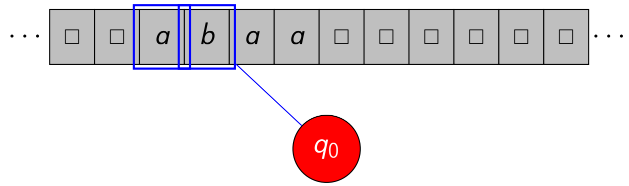
   - Beispielableitung
     $(q_0, \overline{a})bbaabba\square \Rightarrow_G \overline{\square}(q_a, b)baabba\square \Rightarrow_G \overline{\square}b(q_a, b)aabba\square$ $\square$

Mächtigkeit Turingmaschine

Notizen

- Produktionen P_2 bilden Semantik Übergänge ab
- Varianten durch verschiedene Randsituationen
- $(q_0, a) \to (q_0, a, \triangleright)$ wird am linken Rand zu $(q_0, \overline{a})b \to \overline{a}(q_0, b)$

$$(q_0, \overline{a})baa\square \Rightarrow_G \overline{a}(q_0, b)aa\square$$



Mächtigkeit Turingmaschine

Beweisskizze (3/3)

3. Lösche überzählige $\Box$
   - Produktionen

$$
\begin{aligned}
P_3 = {} & \{\Box(q_+, b) \to (q_+, b) \mid b \in \Gamma \cup \underline{\Gamma}\} \cup \\
& \{\overline{\Box}(q_+, b) \to (\bot, b) \mid b \in \Gamma \cup \underline{\Gamma}\} \cup \\
& \{(q_+, \overline{b}) \to (\bot, b) \mid b \in \Gamma \cup \underline{\Gamma}\} \cup \\
& \{(\bot, \underline{b}) \to b \mid b \in \Gamma\} \cup \\
& \{(\bot, b)c \to b(\bot, c) \mid b \in \Gamma,\ c \in \Gamma \cup \underline{\Gamma}\} \cup \\
& \{(\bot, \Box)c \to (\top, c) \mid c \in \{\Box, \underline{\Box}\}\} \cup \\
& \{(\top, \Box)c \to (\top, c) \mid c \in \{\Box, \underline{\Box}\}\} \cup \{(\top, \underline{\Box}) \to \varepsilon\}
\end{aligned}
$$

   - Beispielableitung
     $\overline{\Box}\Box(q_+, a)bbaab\Box\underline{\Box} \Rightarrow_G^2 (\bot, a)bbaab\Box\underline{\Box} \Rightarrow_G^* abbaab(\bot, \Box)\underline{\Box}$
     $\Rightarrow_G abbaab(\top, \underline{\Box}) \Rightarrow_G abbaab$ □

Deterministische Turingmaschinen

§4.5 Definition (deterministische TM; *deterministic TM*)

TM $(Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, \Box, q_0, q_+, q_-)$ **deterministisch** *(deterministic)*
falls für alle $(q, \gamma) \in (Q \setminus \{q_+, q_-\}) \times \Gamma$ genau ein (q', γ', d) existiert
mit $(q, \gamma) \to (q', \gamma', d) \in \Delta$
d.h. $\Delta \colon \big((Q \setminus \{q_+, q_-\}) \times \Gamma\big) \to \big(Q \times \Gamma \times \{\triangleleft, \triangleright, \diamond\}\big)$

Notizen

- Jede Eingabe erzeugt 1 Lauf deterministischer TM
- Det. TM kann nur in q_+ und q_- halten (akzeptiert bzw. lehnt ab)
- Endlosschleifen weiterhin möglich
- Simulator `https://turingmachinesimulator.com/`

Deterministische Turingmaschinen

§4.6 Theorem

TM und deterministische TM gleichmächtig (für Sprachen)

Beweisskizze

1. Schreibe Initialzustand vor Eingabe w — $q_0\, w\Box$
2. Erzeuge nächste Berechnung
3. Prüfe Gültigkeit Berechnung
4. Akzeptiere Eingabe bei Gültigkeit
5. Zurück zu 2. □

Deterministische Turingmaschinen

Geg. TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, \Box, q_0, q_+, q_-)$ und Eingabe $w \in \Sigma^*$

Berechnung für w ist Zeichenkette

$$q_0\, w\Box \# \xi_1 \# \xi_2 \# \cdots \# \xi_n$$

mit $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \Gamma^* Q \Gamma^*$ $\qquad \# \notin \Gamma \cup Q$

Notizen

- Zeichenketten <u>deterministisch</u> erzeugbar
  z.B. in längenlexikographischer Ordnung
  - ε, Worte der Länge 1, Worte der Länge 2, etc.
  - Worte der Länge k lexikographisch aufgelistet (wie im Duden)

Deterministische Turingmaschinen

Geg. TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, \Box, q_0, q_+, q_-)$ und Eingabe $w \in \Sigma^*$

Gültige Berechnung $q_0 w\Box\#\xi_1\#\cdots\#\xi_n$ für w falls

- $\xi_1, \dots, \xi_n \in \Gamma^* Q \Gamma^*$
- $q_0 w\Box \vdash_M \xi_1 \vdash_M \cdots \vdash_M \xi_n$
- $\xi_n \in \Gamma^*\{q_+\}\Gamma^*$

Überprüfung Gültigkeit Berechnung mit det. TM möglich

Turing-Berechenbarkeit

§4.7 Beobachtung

Für jede deterministische TM M ist $T(M)$ partielle Funktion

§4.8 Definition (Turing-berechenbar; *Turing-computable*)

Partielle Funktion $f \colon \Sigma^* \dashrightarrow \Gamma^*$ **Turing-berechenbar**
falls deterministische TM M mit $f = T(M)$ existiert

Notiz

- Turing-berechenbare Funktionen $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ per Kodierung

Loop-Programme

Konventionen

- Alle Variablen $x_1, x_2, \dots$ vom Typ $\mathbb{N}$ (beliebige Größe)
- Addition auf $\mathbb{N}$ begrenzt

$$n \oplus z = \max(0, n + z) \qquad n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{Z}$$

- Wir schreiben einfach $+$ statt $\oplus$

§4.9 Definition (Zuweisung; *assignment*)

Zuweisung ist Anweisung der Form $x_i = x_\ell + z$ mit $i, \ell \geq 1$ und $z \in \mathbb{Z}$

Loop-Programme

§4.10 Definition (Loop-Programm; *Loop program*)

Loop-Programm P entweder

- **Zuweisung** $P = x_i = x_\ell + z$ für $i, \ell \geq 1$ und $z \in \mathbb{Z}$
- **Sequenz** $P = P_1 \,;\, P_2$ für Loop-Programme P_1 und P_2
- **Iteration** $P = \mathrm{LOOP}(x_i)\,\{P'\}$ für Loop-Programm P' und $i \in \mathbb{N}$

Beispiele

- $x_2 = x_1 + 2 \,;\, \mathrm{LOOP}(x_2)\,\{x_3 = x_3 + 1\} \,;\, x_1 = x_3 + 0$
- $x_2 = x_1 + 2$ gleiches Programm, leichter lesbar
  $\mathrm{LOOP}(x_2)\,\{$
  $\quad x_3 = x_3 + 1$
  $\}$
  $x_1 = x_3 + 0$

Loop-Programme

(Verzicht auf vollständige Quantifikation; $i, \ell \geq 1$, $z \in \mathbb{N}$, etc.)

§4.11 Definition (Variablen und maximaler Variablenindex)

Für Loop-Programm P seien $\mathrm{var}(P) \subseteq \mathbb{N}$ und $\max \mathrm{var}(P) \in \mathbb{N}$ verwendeten Variablenindices und größter verwendeter Variablenindex

$$\mathrm{var}(x_i = x_\ell + z) = \{i, \ell\}$$
$$\mathrm{var}(P_1\,;\,P_2) = \mathrm{var}(P_1) \cup \mathrm{var}(P_2)$$
$$\mathrm{var}(\mathrm{LOOP}(x_i)\,\{P'\}) = \{i\} \cup \mathrm{var}(P')$$

$\mathrm{var}(P) = \{1, 2, 3\}$ und $\max \mathrm{var}(P) = 3$ für folgendes Programm P

$x_2 = x_1 + 2$
$\mathrm{LOOP}(x_2)\,\{\quad x_3 = x_3 + 1 \quad\}$
$x_1 = x_3 + 0$

Loop-Programme

Überblick

- k Eingaben in Variablen $x_1, \dots, x_k$
- Erwartete Semantik für Zuweisung
- $P_1\,;\,P_2$ führt P_1 und danach P_2 aus
- $\mathrm{LOOP}(x_i)\,\{P'\}$ führt Programm P' so oft aus, wie Wert von x_i vor Beginn Schleife anzeigt (Änderungen an x_i in Schleife ändern Anzahl Durchläufe nicht)
- Funktionswert ist Wert von x_1 nach Ablauf Programm

Loop-Programme

§4.12 Definition (Programmsemantik; *program semantics*)

Für Loop-Programm P mit $\max \mathrm{var}(P) \leq n$ ist **Semantik** von P partielle Funktion $\|P\|_n \colon \mathbb{N}^n \dashrightarrow \mathbb{N}^n$

- $\|x_i = x_\ell + z\|_n(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_\ell + z, a_{i+1}, \dots, a_n)$
- $\|P_1\,;\,P_2\|_n(a_1, \dots, a_n) = \|P_2\|_n(\|P_1\|_n(a_1, \dots, a_n))$
- $\|\mathrm{LOOP}(x_i)\,\{P'\}\|_n(a_1, \dots, a_n) = \|P'\|_n^{a_i}(a_1, \dots, a_n)$

für alle $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$

Notizen

- $\|x_2 = x_1 + 2\|_2(5, 2) = (5, 7)$
- $\|x_2 = x_1 + 2\,;\,x_1 = x_1 - 5\|_2(5, 2) = \|x_1 = x_1 - 5\|_2(5, 7) = (0, 7)$
- $\|\mathrm{LOOP}(x_1)\,\{x_1 = x_1 + 1\}\|_2(5, 2) = (10, 2)$

Loop-Programme

§4.13 Definition (Projektion; *projection*)

Für $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq i \leq n$ ist $\pi_i^{(n)} \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ **n-stellige Projektion auf i-te Stelle**

$$\pi_i^{(n)}(a_1, \dots, a_n) = a_i \qquad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$$

Notizen

- $\pi_1^{(2)}(10, 2) = 10$
- $\pi_2^{(2)}(10, 2) = 2$

Loop-Programme

§4.14 Definition (berechnete Funktion; *computed function*)

Loop-Programm P mit $\max \mathrm{var}(P) = n$ **berechnet** k-stellige partielle Funktion $|P|_k \colon \mathbb{N}^k \dashrightarrow \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gegeben für alle $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$

$$|P|_k(a_1, \dots, a_k) = \pi_1^{(n)}\big(\|P\|_n(a_1, \dots, a_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-k)\text{ mal}})\big)$$

Notizen

- Eingaben $a_1, \dots, a_k$ in ersten k Variablen $x_1, \dots, x_k$
- Weitere Variablen $x_{k+1}, \dots, x_n$ initial 0
- Auswertung Programm mit dieser initialen Variablenbelegung
- Ergebnis ist Inhalt erster Variable x_1 nach Ablauf

Loop-Berechenbarkeit

§4.15 Definition (Loop-Berechenbarkeit; *Loop-computable*)

Partielle Funktion $f \colon \mathbb{N}^k \dashrightarrow \mathbb{N}$ **Loop-berechenbar** falls Loop-Programm P mit $f = |P|_k$ existiert

Loop-Berechenbarkeit

Nullsetzen x_i

$\mathrm{LOOP}(x_i)\ \{x_i = x_i - 1\}$ Schreibweise: $x_i = 0$

Belegung x_i mit Konstante $n \in \mathbb{N}$

$x_i = 0\ ;\ x_i = x_i + n$ Schreibweise: $x_i = n$

Kopieren x_ℓ nach x_i

$x_i = x_\ell + 0$ Schreibweise: $x_i = x_\ell$

Loop-Berechenbarkeit

Addition von x_k und x_ℓ in x_i $(i \neq \ell)$

$x_i = x_k\ ;\ \mathrm{LOOP}(x_\ell)\ \{x_i = x_i + 1\}$ Schreibweise: $x_i = x_k + x_\ell$

Multiplikation von x_k und x_ℓ in x_i $(k \neq i \neq \ell)$

$x_i = 0\ ;\ \mathrm{LOOP}(x_k)\ \{x_i = x_i + x_\ell\}$ Schreibweise: $x_i = x_k \cdot x_\ell$

Potenzieren von x_ℓ mit x_k in x_i $(k \neq i \neq \ell)$

$x_i = 1\ ;\ \mathrm{LOOP}(x_k)\ \{x_i = x_i \cdot x_\ell\}$ Schreibweise: $x_i = x_\ell^{x_k}$

Loop-Berechenbarkeit

Multiplikation strenge Syntax

Zeile	Anweisung	Kommentar
1	$x_3 = x_1 + 0$	$x_3 = x_1$
2	$\text{LOOP}(x_1)$	$x_1 = 0$
3	$\quad \{x_1 = x_1 - 1\}$	
4	$\text{LOOP}(x_2)\,\{$	(x_2 mal)
5	$\quad \text{LOOP}(x_3)$	$x_1 = x_1 + x_3$
6	$\qquad \{x_1 = x_1 + 1\}\,\}$	

Berechnung Semantik

(Zeilennummern über Pfeil)

$$(2,3,0) \xrightarrow{1} (2,3,2) \underbrace{\xrightarrow{3} (1,3,2) \xrightarrow{3} (0,3,2)}_{\text{Schleife in 2}} \underbrace{\xrightarrow{6} (1,3,2) \xrightarrow{6} (2,3,2)}_{\text{Schleife in 5}}$$

$$\underbrace{\xrightarrow{6} (3,3,2) \xrightarrow{6} (4,3,2)}_{\text{Schleife in 5}} \underbrace{\xrightarrow{6} (5,3,2) \xrightarrow{6} (6,3,2)}_{\text{Schleife in 5}} \quad \text{Ergebnis } 6$$

Loop-Berechenbarkeit

Simulation "If-Then-Else"

(x_k, x_ℓ unbenutzt)

$x_k = 1\,;\, x_\ell = 0$
$\text{LOOP}(x_i)\,\{x_k = 0\,;\, x_\ell = 1\}$
$\text{LOOP}(x_k)\,\{P_1\}$
$\text{LOOP}(x_\ell)\,\{P_2\}$

Schreibweise: $\text{IF}(x_i = 0)\,\{P_1\}\ \text{ELSE}\ \{P_2\}$

Notizen

- Falls $x_i > 0$
  - Zeile 2: $x_k = 0$ und $x_\ell = 1$
  - Zeile 3: P_1 nicht ausgeführt; Zeile 4: P_2 einmal ausgeführt
- Falls $x_i = 0$
  - Zeile 2: $x_k = 1$ und $x_\ell = 0$
  - Zeile 3: P_1 einmal ausgeführt; Zeile 4: P_2 nicht ausgeführt

Termination von Loop-Programmen

§4.16 Beobachtung

Jedes Loop-Programm P terminiert nach endlich vielen Schritten
d.h. $|P|_k \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ (totale) Funktion für jedes $k \in \mathbb{N}$

Folgerung

Nicht jede Turing-berechenbare partielle Funktion Loop-berechenbar

Frage

Ist jede intuitiv berechenbare (totale) Funktion Loop-berechenbar?