Aufgabe:

Seien V und W endlich dimensionale K-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$.

Sei $f: V \to W$ linear mit $\dim(\text{Bild}(f)) = r$

Zeigen Sie, dass es Basen $\mathcal{A}$ von V und $\mathcal{B}$ von W gibt so dass

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei E_r die $r \times r$-Einheitsmatrix ist.

Lösung:

Sei $\{b_1, \dots, b_r\}$ eine Basis von $\text{Bild}(f)$ und sei $a_i \in f^{-1}(b_i)$ $(i = 1, \dots, r)$.

Sei $\{a_{r+1}, \dots, a_{r+k}\}$ eine Basis von $\text{Kern}(f)$.

Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen gilt:

$n = \dim(V) = \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f)) = k + r \Rightarrow r + k = n.$

Wir zeigen, dass $\mathcal{A} := \{a_1, \dots, a_n\}$ eine Basis von V ist.

Wegen $\dim(V) = n$, genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{A}$ linear unabhängig ist.

Seien also $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ und gelte $\lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_n \cdot a_n = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 \cdot \underbrace{f(a_1)}_{= b_1} + \dots + \lambda_r \cdot \underbrace{f(a_r)}_{= b_r} + \lambda_{r+1} \cdot \underbrace{f(a_{r+1})}_{= 0} + \dots + \lambda_n \cdot \underbrace{f(a_n)}_{= 0} = f(\lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_n \cdot a_n) = f(0) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 \cdot b_1 + \dots + \lambda_r \cdot b_r = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_r = 0$, da $\{b_1, \dots, b_r\}$ linear unabhängig ist.

$\Rightarrow \lambda_{r+1} \cdot a_{r+1} + \dots + \lambda_n \cdot a_n = 0$

$\Rightarrow \lambda_{r+1} = 0, \dots, \lambda_n = 0$, da $\{a_{r+1}, \dots, a_{r+k}\}$ linear unabhängig ist.

$\Rightarrow \mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ ist linear unabhängig $\Rightarrow \mathcal{A}$ ist eine Basis von V.

Nach dem Basisergänzungssatz lässt sich die Basis $\{b_1, \dots, b_r\}$ von $\text{Bild}(f)$

zu einer Basis $\mathcal{B} := \{b_1, \dots, b_m\}$ von W ergänzen.

Es gilt nun

$$\left.\begin{aligned}
f(a_1) &= b_1 = 1\cdot b_1 + 0\cdot b_2 + \ldots + 0\cdot b_r + 0\cdot b_{r+1} + \ldots + 0\cdot b_m \\
f(a_2) &= b_2 = 0\cdot b_1 + 1\cdot b_2 + \ldots + 0\cdot b_r + 0\cdot b_{r+1} + \ldots + 0\cdot b_m \\
&\vdots \\
f(a_r) &= b_r = 0\cdot b_1 + 0\cdot b_2 + \ldots + 1\cdot b_r + 0\cdot b_{r+1} + \ldots + 0\cdot b_m
\end{aligned}\right\} \text{da } a_i \in f^{-1}(b_i)\ (i=1,\ldots,r)$$

$$\left.\begin{aligned}
f(a_{r+1}) &= 0 = 0\cdot b_1 + \ldots + 0\cdot b_m \\
&\vdots \\
f(a_n) &= 0 = 0\cdot b_1 + \ldots + 0\cdot b_m
\end{aligned}\right\} \text{da } a_{r+1},\ldots,a_n \in \operatorname{Kern}(f)$$

$$\Rightarrow \quad M_B^A(f) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \square$$