Hausaufgabe 3

Paula Ewald 3706225, Tim Schlenstedt 3797524, Erik Thun 3794446

Nr. 1 $\quad cov(X,Y) := E((X-E(X))(Y-E(Y)))$ $\quad a,b,c,d \in \mathbb{R}$

a) Z: $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$cov(X,Y) = E((X-E(X))(Y-E(Y))) = E(XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y))$

$= E(XY) - E(X \cdot E(Y)) - E(Y \cdot E(X)) + E(E(X)E(Y))$

4/4

E(X), E(Y) Konstanten

$= E(XY) - E(X) \cdot E(Y) - E(Y) \cdot E(X) + E(X)E(Y)$

$= E(XY) - E(X)E(Y)$ ✓ $\square$

b) Z: $cov(X,X) = Var(X)$ ✓

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X \cdot X) - E(X)E(X) \overset{a)}{=} cov(X,X)$ $\square$

c) Z: $cov(aX+b, cY+d) = ac \cdot cov(X,Y)$

$cov(aX+b, cY+d) = E((aX+b) - E(aX+b))((cY+d) - E(cY+d)))$

$= E((aX + b - aE(X) - b)(cY + d - cE(Y) - d))$

$= E((a(X-E(X)))(c \cdot (Y-E(Y)))) = E(a \cdot c \cdot (X-E(X))(Y-E(Y)))$

$= a \cdot c \cdot E((X-E(X))(Y-E(Y))) = a \cdot c \cdot cov(X,Y)$ $\square$ ✓

d) Z: Sind X, Y unabhängige Zufallsvariablen, so gilt: $cov(X,Y) = 0$

Idee: $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \overset{\text{unabhängig}}{=} E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$ ✓

1.1

$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$= \sum_{\substack{k \in X(\Omega), \\ \ell \in Y(\Omega)}} k \cdot \ell \; \mathbb{P}(X=k, Y=\ell) - \sum_{k \in X(\Omega)} k \; \mathbb{P}(X=k) \cdot \sum_{\ell \in Y(\Omega)} \ell \; \mathbb{P}(Y=\ell)$

$\overset{X,Y \text{ unabhängig}}{=} \sum_{\substack{k \in X(\Omega), \\ \ell \in Y(\Omega)}} k \, \ell \; \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=\ell) - \sum_{k \in X(\Omega)} k \; \mathbb{P}(X=k) \cdot \sum_{\ell \in Y(\Omega)} \ell \; \mathbb{P}(Y=\ell)$

$= \sum_{k \in X(\Omega)} k \; \mathbb{P}(X=k) \sum_{\ell \in Y(\Omega)} \ell \; \mathbb{P}(Y=\ell) - \sum_{k \in X(\Omega)} k \; \mathbb{P}(X=k) \cdot \sum_{\ell \in Y(\Omega)} \ell \; \mathbb{P}(Y=\ell)$

$= 0$ $\square$

Nr. 2

3/4

a) $\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(\{k\} \times \{i : i \in 1,..,6, i<k\} + \mathbb{P}(\{i : i \in 1,..,6, i<k\} \times \{k\})$
$+ \mathbb{P}(\{k\} \times \{k\})$

$\mathbb{P}(X=1) = \frac{|(1,1)|}{36} = \frac{1}{36}$

$\mathbb{P}(X=2) = \frac{|(2,2),(2,1),(1,2)|}{36} = \frac{3}{36}$

$P(X=3) = \frac{|\{3\} \times \{2,1\} \cup \{2,1\} \times \{3\} \cup \{(3,3)\}|}{36} = \frac{5}{36}$

$P(X=4) = \frac{|\{4\} \times \{1,2,3\} \cup \{1,2,3\} \times \{4\} \cup \{(4,4)\}|}{36} = \frac{7}{36}$

$P(X=5) = \frac{|\{5\} \times \{1,2,3,4\} \cup \{1,2,3,4\} \times \{5\} \cup \{(5,5)\}|}{36} = \frac{9}{36}$

$P(X=6) = \frac{|\{6\} \times \{1,2,3,4,5\} \cup \{1,2,3,4,5\} \times \{6\} \cup \{(6,6)\}|}{36} = \frac{11}{36}$

✓

$E(X) = \sum_{k=1}^{6} k \; \mathbb{P}(X=k)$
$= 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{161}{36} \approx 4{,}47$

2.1

b) $E(Y) = 1 \cdot \frac{11}{36} + 2 \cdot \frac{9}{36} + 3 \cdot \frac{7}{36} + 4 \cdot \frac{5}{36} + 5 \cdot \frac{3}{36} + 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{91}{36} \approx 2{,}53$ ✓

da gilt: ~~Ein~~ Gehen wir davon aus, das X und Y durch einen beliebigen Wurf Z_j bestimmt werden gibt es 3 Fälle:

(1) Fall 1 ($Z_1 > Z_2$): Dann $Z_1 = X$ und $Z_2 = Y \Rightarrow X + Y = Z_1 + Z_2$

(2) Fall 2 ($Z_1 < Z_2$): Dann $Z_1 = Y$ und $Z_2 = Y \Rightarrow X + Y = Z_2 + Z_1$

(3) Fall 3 ($Z_1 = Z_2$): Dann $Z_1 = X, Z_2 = Y \vee Z_1 = Y, Z_2 = X$
$\hookrightarrow X + Y = (Z_1 + Z_2) \vee X + Y = (Z_2 + Z_1)$

c) $E(XY) = \sum_{k \in X(\Omega), \ell \in Y(\Omega)} k \cdot \ell \; \mathbb{P}(X=k, Y=\ell) = \frac{1}{36} \cdot (1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 +$
$4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2$
$+ 6 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 +$
$2 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 6) = \frac{414}{36} = 11{,}5$ f

2.2

$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{252}{36} = 7$ ✓

$E(3X^2 - Y) = 3 \cdot E(X^2) - E(Y) = 3 \cdot \sum_{k \in X(\Omega)} k^2 \cdot \mathbb{P}(X=k) - \sum_{\ell \in Y(\Omega)} \ell \cdot \mathbb{P}(Y=\ell)$
$= 3 \cdot \frac{791}{36} - \frac{91}{36}$
$= \frac{2.282}{36}$
$\approx 63{,}69$ ✓

4/4

Nr. 3

a) $\mathbb{P}(X=1, Y=1) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X=1) \cdot \mathbb{P}(Y=1)$

$\mathbb{P}(X=2, Y=1) = \frac{1}{8} = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X=2) \cdot \mathbb{P}(Y=1)$

$\mathbb{P}(X=1, Y=2) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} = \mathbb{P}(X=1) \cdot \mathbb{P}(Y=2)$

$\mathbb{P}(X=2, Y=3) = \frac{1}{8} = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{8} = \mathbb{P}(X=2) \cdot \mathbb{P}(Y=3)$

$\mathbb{P}(X=1, Y=3) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{8} = \mathbb{P}(X=1) \cdot \mathbb{P}(Y=3)$

$\mathbb{P}(X=2, Y=2) = \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \mathbb{P}(X=2) \cdot \mathbb{P}(Y=2)$

$\Rightarrow \forall k \in X(\Omega), \ell \in Y(\Omega)$ gilt $\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=\ell) = \mathbb{P}(X=k, Y=\ell)$

$\Rightarrow$ X und Y sind unabhängig

$\mathbb{P}(X=1, Z=-1) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \mathbb{P}(X=1) \cdot \mathbb{P}(Z=-1)$

↳ X und Z nicht unabhängig

$\mathbb{P}(Y=1, Z=-1) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \mathbb{P}(Y=1) \cdot \mathbb{P}(Z=-1)$

↳ Y und Z nicht unabhängig

Nr. 3 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ $p_1 = p_2 = p_4 = p_5 = \frac{1}{8}$ $p_3 = p_6 = \frac{1}{4}$

b) $E(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\, p(\omega) = 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4}$

$= \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$E(Y) = \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)\, p(\omega) = 1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4}$

$= \frac{16}{8} = 2$

$E(Z) = \sum_{\omega\in\Omega} Z(\omega)\, p(\omega) = (-1) \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} + (-2) \cdot \frac{1}{8} + (-3) \cdot \frac{1}{4}$

$= 0$

$E(XY) = E(X)\, E(Y) = 1{,}5 \cdot 2 = 3$

$E(XZ) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\, Z(\omega)\, p(\omega)$

$= 1 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot (-2) \cdot \frac{1}{8}$

$+ 2 \cdot (-3) \cdot \frac{1}{4}$

$= -\frac{3}{8}$

$E(YZ) = \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)\, Z(\omega)\, p(\omega)$

$= 1 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot (-2) \cdot \frac{1}{8}$

$+ 2 \cdot (-3) \cdot \frac{1}{4}$

$= 0$

Nr. 4

Index der Kommentare

1.1 das reicht schon

2.1 sollte explizit auf andere Weise gezeigt werden

2.2 441/36