11.3

Seien $(M, +)$ and $(N, +)$ zwei kommutative Gruppen. Sei $\phi : M \to N$ eine Abbildung mit der Eigenschaft dass $\forall x, y \in M$ haben wir $\phi(x+y) = \phi(x)+\phi(y)$. Zeigen Sie dass $\phi(0_M) = 0_N$ und $\forall x \in M \phi(-x) = -\phi(x)$.

- Zeige $\phi(0_M) = 0_N$
  Setze $x = 0_M, y = 0_M$:

$$\begin{aligned} \phi(x+y) &= \phi(x) + \phi(y) \\ \implies \phi(0_M + 0_M) &= \phi(0_M) + \phi(0_M) \\ \implies \phi(0_M) &= \phi(0_M) + \phi(0_M) && | - \phi(0_M) \\ 0_N &= \phi(0_M) \end{aligned}$$

- Zeige $\forall x \in M : \phi(-x) = -\phi(x)$

$$\begin{aligned} x + (-x) &= 0_M && |\phi() \\ \implies \phi(x + (-x)) &= \phi(0_M) \\ \implies \phi(x) + \phi(-x) &= \phi(0_M) && |\phi(0_M) = 0_N \\ \implies \phi(x) + \phi(-x) &= 0_N && | - \phi(x) \\ \implies \phi(-x) &= -\phi(x) \end{aligned}$$

$\square$