Logik

Nikita Emanuel John Fehér 3793479, Lennox Heimann 3776050
Übungsleiter: Maurice Funk

10. Juni 2024

4. Wir definieren; $F_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls Dame auf Feld (i,j)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
   $H = \{\neg(F_{i,j} \wedge F_{k,l}) | i, j, k, l \in \{1...n\}, i = k, j \neq l\}$
   $V = \{\neg(F_{i,j} \wedge F_{k,l}) | i, j, k, l \in \{1...n\}, i \neg = k, j = l\}$
   $D_1 = \{\neg(F_{i,j} \wedge F_{k,l}) | i, j, k, l \in \{1...n\}, i + j = k + l, i \neq k\}$
   $D_2 = \{\neg(F_{i,j} \wedge F_{k,l}) | i, j, k, l \in \{1...n\}, i - j = k - l, i \neq k\}$
   $M_n = H \cup V \cup D_1 \cup D_2$
   Es darf jeweils nur maximal eine Dame auf jeder Horizontale, Vertikale und Diagonale sein, so können sich paar weise keine zwei Damen gegenseitig schlagen.

5. (a) $\{E_{0,0}, A_{1,0}, B_{0,1}, D_{1,1}, F_{0,2}, C_{1,2}\}$
   (b) Aus B1 folgt $\forall m, n \in \mathbb{N}$: ein $m \times n$ Mosaik existiert g.d.w. $M_{\{0,...,m-1\} \times \{0,...,n-1\}}$
   Für $M_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ gilt, dass jede endliche Teilmenge erfüllbar ist, aus dem Kompaktheitssatz folgt dass $M_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ erfüllbar ist.
   B1 $\implies$ B2
   (c) Dass für beliebig große n ein $n \times n$ Mosaik existiert, bedeutet, dass für alle endlichen Teilmengen von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ein Mosaik existiert, nach dem Kompaktheitssatz gilt dies also auch für die unendliche Formelmenge.

6. (a) $\text{ans}(\mathfrak{A}, \varphi_1) = \{1, 2, 3\}$
   Es gibt keine $R(4, y)$, $R(5, y)$ und keine $S(y, 4)$, $S(y, 5)$.
   $\text{ans}(\mathfrak{A}, \varphi_2) = \emptyset$
   $\forall y \forall x (S(x, y) \rightarrow P(x))$ ist eine Kontradiktion.
   (b) $\varphi_1(x) = \exists y \Big(\big(R(x, y) \wedge S(x, y)\big) \vee \big(R(y, x) \wedge S(y, x)\big) \Big)$
   Nur 1 und 2 stehen sowohl in S- als auch in R-Beziehung zueinander.
   $\varphi_2(x) = (\neg \varphi_1)(x)$
   φ_1 ist die Negation von φ_2, da M_2 das Komplement von M_1 ist.
   (c) Falsch, 4 und 5 sind ununterscheidbar, es gibt also kein $\varphi(x)$, so dass $\text{ans}(\mathfrak{A}, \varphi) = \{4\}$.

7. (a) $\mathfrak{A} = \big\{A = \{1, 2\}, R^{\mathfrak{A}} = \{(1, 2), (2, 2)\}\big\}$
   Für sowohl $x = 1$, als auch $x = 2$ gilt: $R(x, 2)$.

(b) $\mathfrak{B} = \big\{A = \{1,2\}, R^{\mathfrak{B}} = \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2)\}\big\}$
$R(a,b)$ gilt immer, egal wie a und b gewählt sind.

(c) $\mathfrak{C} = \big\{A = \mathbb{N}, R^{\mathfrak{C}} = \{(a,a) | a \in \mathbb{N}\}\big\}$
Für jedes x gibt es ein $y = x$, so dass $R(y,x)$ gilt und $R(z,y) \to z = y$ gilt immer.

(d) $\mathfrak{D} = \big\{A = \mathbb{N}, +^{\mathfrak{D}}(x,y) = x\big\}$
Damit vereinfachen wir zu: $\forall x \forall y \big((x \neq y) \to (x \neq y)\big)$, das ist trivial wahr.