Lösungen Probeklausur

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** Wir betrachten folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus sämtliche $x \in \mathbb{R}^4$ mit $Ax = 0$.

Lösung: Wir beginnen mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

und ziehen von der 2. und der 3. Zeile jeweils das 2-fache der 1. Zeile ab:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Dann vertauschen wir noch die 2. und die 3. Zeile und erhalten so die Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Das zugehörige homogene lineare Gleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Wählt man $x_4 = \alpha$ als freie Variable, so folgt $x_3 = -3\alpha$ und $x_2 = -2x_3 - 3x_4 = 3\alpha$ und schließlich $x_1 = 2x_2 - x_3 - x_4 = 8\alpha$.
Die Lösungsmenge ist also

$$\{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 8\alpha \\ 3\alpha \\ -3\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus.

Lösung: Wir betrachten die Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

und ziehen von der 2. Zeile das 2-fache der 1. Zeile sowie von der 3. Zeile das 1/2-fache der 1. Zeile ab:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Nun ziehen wir von der 3. Zeile das 2-fache der 2. Zeile ab und multiplizieren die 1. Zeile mit 1/2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Jetzt ziehen wir von der 1. und der 2. Zeile jeweils die 3. Zeile ab:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -11/2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Schließlich ziehen wir noch von der 1. Zeile die 2. Zeile ab:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -11/2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Die rechts stehende 3×3-Matrix ist A^{-1}.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Wir betrachten die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie: $A^n = 3^{n-1} A$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung: Vollständige Induktion:
Induktionsanfang $n = 1$: Es gilt $A^n = A = 3^0 A = 3^{n-1} A$.
Induktionsvoraussetzung (IV): Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = 3^{n-1} A$.
Induktionsschritt: Für $n + 1$ folgt

$$A^{n+1} = A^n A \overset{\text{(IV)}}{=} 3^{n-1} A^2 = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= 3^{n-1} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 3^n \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3^n A$$

und damit ist der Beweis abgeschlossen.

Aufgabe 4 (2 Punkte)**.** Berechnen Sie die folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Lösung: Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 2(4 + 2) + 2 + 8 + 3(1 - 8) = 12 + 10 - 21 = 1$$

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Bestimmen Sie sämtliche $x \in \mathbb{R}$, für die die Matrix

$$\begin{pmatrix} x^2 & -1 & 3x \\ 2x & 1 + x & x \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Lösung: Wir nennen die Matrix $A(x)$. Für ihre Determinante gilt:

$$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} x^2 & -1 & 3x \\ 2x & 1 + x & x \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= x^2 \begin{vmatrix} 1 + x & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2x & x \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3x \begin{vmatrix} 2x & 1 + x \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = x^2 - 6x = x(x - 6)$$

Es ist $\det(A(x)) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ oder $x = 6$ ist. Daher folgt:

$$A(x) \text{ ist invertierbar} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A(x)) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$$

Aufgabe 6 (3 Punkte)**.** Seien

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ferner seien $g = a + \operatorname{span}\{v\}$ und $h = b + \operatorname{span}\{w\}$.
Berechnen Sie den Abstand $d(g, h)$ der beiden Geraden g und h.

Lösung: Es ist

$$v \times w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und somit $\|v \times w\|_2 = \sqrt{9} = 3$. Außerdem gilt

$$a - b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$d(g, h) = \frac{|\langle a - b, v \times w \rangle|}{\|v \times w\|_2} = \frac{1}{3}.$$

Aufgabe 7 (3 Punkte)**.** Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{R}$ und sei $F : V \to W$ ein Isomorphismus. Seien U_1 und U_2 Unterräume von V mit $V = U_1 \oplus U_2$.
Zeigen Sie, dass dann auch $W = F[U_1] \oplus F[U_2]$ gilt.

Lösung:
1) Sei $w \in W$ beliebig. Da F surjektiv ist, existiert ein $v \in V$ mit $F(v) = w$. Wegen $V = U_1 \oplus U_2$ existieren $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ mit $v = u_1 + u_2$. Es folgt

$$w = F(v) = F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2)$$

und es gilt $F(u_1) \in F[U_1]$ und $F(u_2) \in F[U_2]$.Also ist $w \in F[U_1] + F[U_2]$.
Da $w \in W$ beliebig war, folgt $W = F[U_1] + F[U_2]$.

2) Sei $w \in F[U_1] \cap F[U_2]$. Dann existieren $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ mit $F(u_1) = w = F(u_2)$. Da F injektiv ist, folgt $u_1 = u_2$. Daher gilt $u_1 \in U_1 \cap U_2$. Laut Voraussetzung gilt aber $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, also ist $u_1 = 0$ und somit $w = F(u_1) = 0$.
Damit ist auch $F[U_1] \cap F[U_2] = \{0\}$ gezeigt und somit gilt $W = F[U_1] \oplus F[U_2]$.