Diskrete Strukturen (WS 2024-25) - Halbserie 9

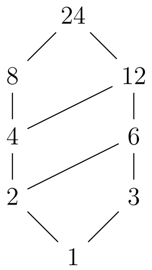
9.1 **[3]**

Wir definieren für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge T_n als die Menge der natürlichen Teiler von n, d.h.

$$T_n := \{t \in \mathbb{N} \colon t \mid n\}.$$

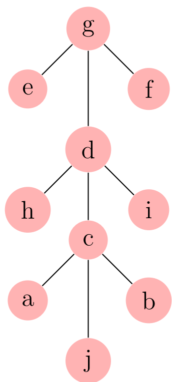
Wir betrachten T_n als eine teilweise geordente Menge mit der Ordnugsrelation $a \leq b$ gdw a teilt b. Geben Sie das Hasse-Diagramm von T_{24}.

Solution.



9.2 **[3]**

Gegeben sei die folgende Ordnungsrelation, dargestellt als Hasse-Diagramm:



Ist das ein Verband? Begründen Sie die Antwort.

Solution. Nein, z.B. $e \wedge f$ existiert nicht.

9.3 **[4]**

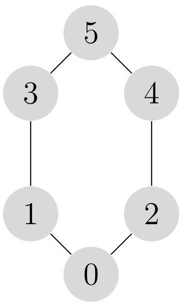
Sei $(M, \leq)$ eine total geordnete Menge, und seien $x, y \in M$. In der Volresung gaben wir gezeigt, dass $x \vee y$ existiert. Zeigen Sie dass $x \wedge y$ existiert.

Solution. Für alle $x, y \in M$ gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x \leq y$. Dann ist x eine untere Schranke für $\{x, y\}$.

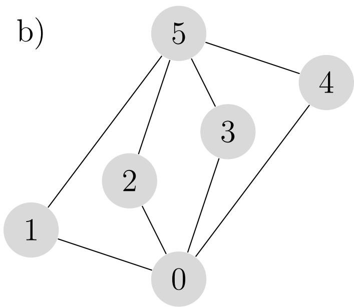
Sei z eine beliebige untere Schranke für $\{x, y\}$. Dann gilt $z \leq x$ und damit ist x die größte untere Schranke für $\{x, y\}$. D.h. $x = x \wedge y$.

9.4 Zeigen Sie dass die folgenden Verbände nicht distributiv sind (in je dem Fall geben Sie ein Gegenbeispiel)

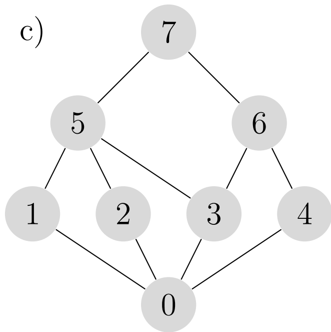
a)



b)



c)



Solution.

1. nicht distributiv: $4 \wedge (1 \vee 2)$, $4 \wedge (3 \vee 2)$, $3 \wedge (1 \vee 2)$, $3 \wedge (1 \vee 4)$, $2 \vee (4 \wedge 1)$, $2 \vee (4 \wedge 3)$, $1 \vee (3 \wedge 2)$, $1 \vee (3 \wedge 4)$.
2. nicht distributiv: jegliche Kombination aus 1,2,3,4.
3. nicht distributiv: jegliche Kombination aus 1,2,3 oder $5 \wedge (2 \vee 4)$, $2 \vee (5 \wedge 4)$, $6 \wedge (\{1/2\} \vee 4)$, $4 \vee (\{1/2\} \wedge 6)$.

9.5 Zeigen Sie, dass in beliebigen Verbänden $(M, \leq)$ für alle $x, y \in M$ gilt:

$$x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x$$

Solution. "$\Rightarrow$": $x \leq y$ impliziert $x \in \{y\} \downarrow$ impliziert $x \in \{x, y\} \downarrow$.
Für alle $z \in \{x, y\} \downarrow$ gilt $z \leq y$ und $z \leq x$. Also ist x das größte Element von $\{x, y\} \downarrow$: $x \wedge y = x$.
"$\Leftarrow$": $x = x \wedge y$ impliziert $x \in \{x, y\} \downarrow$ und somit $x \leq y$.