Lösungen Übung 11

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Wir betrachten folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte von A sowie die zugehörigen Eigenräume.
Ist A diagonalisierbar?

Lösung: Für das charakteristische Polynom von A gilt:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 3 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -2 & -\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -(1+\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 2) + 2\lambda - 4 - 6 - 3\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda - \lambda^2 + 3\lambda + 2 - \lambda - 10$$
$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 8$$

Man sieht leicht $\chi_A(2) = 0$ und mittels Polynomdivision erhält man die Faktorisierung $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4) = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 2)$.
Die Eigenwerte von A sind also 2 (mit algebraischer Vielfachheit 2) und -2 (mit algebraischer Vielfachheit 1).
Es gilt

$$A - 2E_3 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch elementare Zeilenumformungen gelangt man zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit ist der Eigenraum von A zum Eigenwert 2

$$E_A(2) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Außerdem gilt

$$A + 2E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Durch elementare Zeilenumformungen gelangt man hier zu

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und daher ist der Eigenraum von A zum Eigenwert -2

$$E_A(-2) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Es haben also beide Eigenwerte die geometrische Vielfachheit 1, aber der Eigenwert 2 hat die algebraische Vielfachheit 2. Daher ist A nicht diagonalisierbar.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** Wir betrachten folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonalisieren Sie A, d. h. bestimmen Sie explizit eine Diagonalmatrix D, eine invertierbare Matrix T und ihre Inverse T^{-1}, so dass $TAT^{-1} = D$ gilt.

Lösung: Für das charakteristische Polynom von A gilt:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 3 & 1-\lambda & -3 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1-\lambda \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6) + 3\lambda - 6 + 8 - 2\lambda = 3\lambda^2 - 3\lambda - 18 - \lambda^3 + \lambda^2 + 6\lambda + \lambda + 2$$
$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda - 16$$

Man sieht leicht $\chi_A(2) = 0$ und mittels Polynomdivision erhält man die Faktorisierung $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda - 8)$
Es gilt $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$. Die Eigenwerte von A sind also 2, -2 und 4, jeweils mit algebraischer Vielfachheit 1.
Mit Hilfe des Gauß-Algorithmus bestimmt man die zugehörigen Eigenräume:

$$E_A(2) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad E_A(-2) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad E_A(4) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Somit bilden die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine geordnete Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A. Diese nennen wir $\mathcal{B}$.
Zudem sei $\mathcal{A}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$.
Sei $T = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ die zugehörige Basiswechselmatrix.
Dann gilt

$$T^{-1} = T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = D.$$

Die Matrix $T = (T^{-1})^{-1}$ kann man mit Hilfe des Gauß-Algorithmus bestimmen:

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$