6.Übung zur Vorlesung Lineare Algebra
für Informatik

Mathematisches Institut, Universität Leipzig

Dozent: Dr. habil. Jan-David Hardtke

Ausgabe: Donnerstag, 16.5.2024
Abgabe: Donnerstag, 23.5.2024 bis 11:00 Uhr im Moodle-Kurs

Wichtig: Die Abgabe muss in Form **einer** pdf-Datei erfolgen und ist mit Namen, Matrikelnummer, Übungstermin und Namen des Übungsleiters zu versehen. Die Aufgaben müssen **selbstständig** bearbeitet werden (d. h. keine Partnerabgabe).

Aufgabe 1 (1 Punkt pro Teilaufgabe)**.** Berechnen Sie die folgenden Matrixprodukte.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (dabei bezeichnet A^n das n-fache Produkt von A mit sich selbst).

Aufgabe 3 (1 Punkt pro Teilaufgabe)**.** Wir betrachten die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die definiert ist durch

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y - z \\ 3x + y + 2z \\ 2x + y + z \end{pmatrix}.$$

Ferner sei $\mathcal{A} = (e_1, e_2, e_3)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$. Zusätzlich betrachten wir noch die geordnete Basis

$$\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

1) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(F)$.
2) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$.
3) Bestimmen Sie gleichfalls $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$.
4) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(F)$.