# Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

5. Kompaktheit und Interpolation

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

15. Mai 2025
Leipzig

# In der letzten Vorlesung

Wiederholung: Erfüllbarkeit DNF

Hornformeln

Resolution (bis einschließlich Resolvente)

# Fahrplan für diese Vorlesung

Resolution

Kompaktheitssatz

Interpolationstheorem

Abschluß AL

# Resolvente

## Definition

Seien $C_1, C_2$ Klauseln. Eine Klausel $R$ heißt Resolvente von $C_1$ und $C_2$, falls es ein Literal $L$ gibt, sodass:

$$L \in C_1, \quad \overline{L} \in C_2 \quad \text{und} \quad R = (C_1 \setminus \{L\}) \cup \left(C_2 \setminus \{\overline{L}\}\right)$$

(Resolution nach $L$)

Beispiele:

| | | |
|---|---|---|
| $\{A_1, \neg A_2\}$ $\{A_2, A_3\}$ | $\{A_1, \neg A_2\}$ $\{A_2, \neg A_2, \neg A_3\}$ | $\{A_1\}$ $\{\neg A_1\}$ |
| $\{A_1, A_3\}$ | $\{A_1, \neg A_2, \neg A_3\}$ | $\square$ |

Resolution nach $A_1$

# Resolutionslemma

## Lemma

*Sei $M$ Klauselmenge, Klauseln $C_1, C_2 \in M$ und $R$ Resolvente von $C_1$ und $C_2$. Es gilt: $M \equiv M \cup \{R\}$.*

Beweis: Wir wissen,

$$\underbrace{(\phi \vee A)}_{C_1} \wedge \underbrace{(\psi \vee \neg A)}_{C_2} \vDash \underbrace{\phi \vee \psi}_{R}$$

Somit folgt rein mengentheoretisch,

$$\underbrace{(\phi \vee A)}_{C_1} \wedge \underbrace{(\psi \vee \neg A)}_{C_2} \equiv \underbrace{(\phi \vee A)}_{C_1} \wedge \underbrace{(\psi \vee \neg A)}_{C_2} \wedge \underbrace{(\phi \vee \psi)}_{R}$$

Nach Ersetzungstheorem,

$$M \equiv M \cup \{R\}$$

$\square$

# Resolutionshülle

## Definition

Sei $M$ eine Klauselmenge. Wir definieren:

$$\text{Res}(M) = M \cup \{R \mid R \text{ ist Resolvente zweier Klauseln aus } M\}$$

Außerdem setzen wir:

$$\begin{aligned} \text{Res}^0(M) &= M \\ \text{Res}^{i+1}(M) &= \text{Res}(\text{Res}^i(M)) \\ \text{Res}^*(M) &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{Res}^i(M) \end{aligned}$$

wobei $\text{Res}^*(M)$ die Resolutionshülle von $M$ genannt wird.

Beispiel: Sei $M = \{\{A_1, A_2\}, \ \{\neg A_1, A_3\}, \ \{\neg A_2, \neg A_3\}\} = \text{Res}^0(M)$

# Resolutionshülle

## Definition

Sei $M$ eine Klauselmenge. Wir definieren:

$$\mathrm{Res}(M) = M \cup \{R \mid R \text{ ist Resolvente zweier Klauseln aus } M\}$$

Außerdem setzen wir:

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}^0(M) &= M \\ \mathrm{Res}^{i+1}(M) &= \mathrm{Res}(\mathrm{Res}^i(M)) \\ \mathrm{Res}^*(M) &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Res}^i(M) \end{aligned}$$

Beispiel: Sei $M = \{\{A_1, A_2\}, \{\neg A_1, A_3\}, \{\neg A_2, \neg A_3\}\} = \mathrm{Res}^0(M)$

$$\mathrm{Res}^1(M) = \mathrm{Res}^0(M) \cup \{\{A_2, A_3\}, \{A_1, \neg A_3\}, \{\neg A_1, \neg A_2\}\}$$

$$\mathrm{Res}^2(M) = \mathrm{Res}^1(M) \cup \{\{A_1, \neg A_1\}, \{A_2, \neg A_2\}, \{A_3, \neg A_3\}\}$$

$$\mathrm{Res}^3(M) = \mathrm{Res}^2(M) = \mathrm{Res}^*(M)$$

# Resolutionshülle

## Definition

Sei $M$ eine Klauselmenge. Wir definieren:

$$\mathrm{Res}(M) = M \cup \{R \mid R \text{ ist Resolvente zweier Klauseln aus } M\}$$

Außerdem setzen wir:

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}^0(M) &= M \\ \mathrm{Res}^{i+1}(M) &= \mathrm{Res}(\mathrm{Res}^i(M)) \\ \mathrm{Res}^*(M) &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Res}^i(M) \end{aligned}$$

Einfache Eigenschaften:

- $\mathrm{Res}^i(M) \subseteq \mathrm{Res}^{i+1}(M)$ für $i \geq 0$
- Wenn $M' \subseteq M$, dann $\mathrm{Res}^*(M') \subseteq \mathrm{Res}^*(M)$
- $M \equiv \mathrm{Res}^1(M) \equiv \mathrm{Res}^2(M) \equiv \ldots \equiv \mathrm{Res}^*(M)$
- $|\mathrm{Res}^*(M)| \leq 2^{2n} = 4^n$ falls $|s(M)| = n$

# Resolutionssatz

## Theorem (Robinson, 1965)

*Sei $M$ eine endliche Klauselmenge. Es gilt:*

$$M \textit{ unerfüllbar} \quad \textit{gdw.} \quad \square \in \mathrm{Res}^*(M)$$

Beweis:
($\Leftarrow$) Wenn $\square \in \mathrm{Res}^*(M)$, dann $\mathrm{Res}^*(M)$ unerfüllbar. Wegen Resolutionslemma folgt $M$ unerfüllbar. (Korrektheit)
($\Rightarrow$) Sei $M$ unerfüllbar, dann $M \neq \emptyset$. Wir beweisen $\square \in \mathrm{Res}^*(M)$ über Anzahl Atome in $M$, d.h. $|s(M)|$.

- Sei $|s(M)| = 0$. Dann $M = \{\square\}$ und somit unerfüllbar. (IA)
- Sei $|s(M)| = n + 1$. Wähle ein $A \in s(M)$ und setze

  $$M^0 = \{C \setminus A \mid \neg A \notin C, C \in M\}, \; M^1 = \{C \setminus \neg A \mid A \notin C, C \in M\}$$

  Da $M$ unerfüllbar, sind auch $M^0$ und $M^1$ unerfüllbar, denn sei z.B. $I(M^0) = 1$, dann $I'(M) = 1$ mit $I'(A_i) = 0$, falls $A_i = A$; und $I'(A_i) = I(A_i)$ sonst. Fall $I(M^1) = 1$ analog. Nach (IV) $\square \in \mathrm{Res}^*(M^0)$ und $\square \in \mathrm{Res}^*(M^1)$.

# Resolutionssatz

**Theorem (Robinson, 1965)**

*Sei $M$ eine endliche Klauselmenge. Es gilt:*

$$M \text{ unerfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad \Box \in \mathrm{Res}^*(M)$$

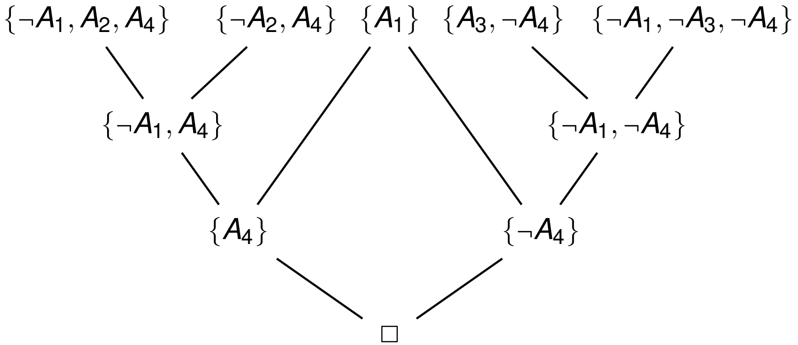
Beweis:
($\Rightarrow$) $M^0 = \{C \setminus A \mid \neg A \notin C, C \in M\}, \Box \in \mathrm{Res}^*(M^0)$. Somit existiert Folge $C_1, \ldots, C_m$ mit 1. $C_m = \Box$, und 2. $C_i \in M^0$, oder $C_i$ Resolvente von $C_k$ und $C_l$ mit $k, l < i$. Definiere Folge $C'_1, \ldots, C'_m$ mit

- Falls $C_i \in M^0$ und $C_i \in M$, dann setze $C'_i = C_i$ ($C'_i \in M$)
- Falls $C_i \in M^0$ und $C_i \notin M$, dann setze $C'_i = C_i \cup \{A\}$ ($C'_i \in M$)
- Falls $C_i \notin M^0$, dann $C_i$ Resolvente von $C_k$ und $C_l$ nach $L$. Setze $C'_i$ Resolvente von $C'_k$ und $C'_l$ nach $L$ ($C'_i \in \mathrm{Res}^*(M)$)

Somit: $C'_m = \Box$ od. $C'_m = \{A\}$ ($\Box \in \mathrm{Res}^*(M)$ od. $\{A\} \in \mathrm{Res}^*(M)$)
Analog für Folge aus $M^1$. ($\Box \in \mathrm{Res}^*(M)$ od. $\{\neg A\} \in \mathrm{Res}^*(M)$)
Für alle Kombinationen $\Box \in \mathrm{Res}^*(M)$. (Korrektheit)

# Graphische $\Box$-Deduktion

$$M = \{\{A_1\}, \{\neg A_2, A_4\}, \{\neg A_1, A_2, A_4\}, \{A_3, \neg A_4\}, \{\neg A_1, \neg A_3, \neg A_4\}\}$$




- $\Box$-Deduktion enthält nicht alle möglichen Resolventen. Hier zum Beispiel $\{\neg A_2, A_3\} \in \mathrm{Res}^*(M)$ nicht verwendet
- Aber! Es gibt unerfüllbare Mengen $M$, für die jede $\Box$-Deduktion exponentiell lang ist. (Satz von Haken, 1985)

# Kompaktheitssatz

- zentraler Satz der AL
- Werkzeug um semantische Eigenschaften unendlicher Mengen mithilfe von endlichen Teilmengen zu beweisen

## Proposition

*Gegeben eine Formelmenge $T \subseteq \mathcal{F}$. Es gilt:*

$$T \text{ erfüllbar gdw. jede endliche TM } T' \subseteq T \text{ ist erfüllbar}$$

Beweis:
($\Rightarrow$) Sei $T$ erfüllbar, d.h. $Mod(T) \neq \emptyset$. Aufgrund der Antimonotonie folgt mit $T' \subseteq T$, sofort $Mod(T) \subseteq Mod(T')$.

($\Leftarrow$) Definiere $T_n = \{\phi \in T \mid s(\phi) \subseteq \{A_1, \ldots, A_n\}\}$. Es existieren endliche TM $T'_n \subseteq T_n$ mit:

- für jedes $\phi \in T_n$, existiert $\phi' \in T'_n$ mit $\phi \equiv \phi'$
- $|T'_n| \leq 2^{2^n}$ (Warum?)

# Kompaktheitssatz

## Proposition

*Gegeben eine Formelmenge $T \subseteq \mathcal{F}$. Es gilt:*

$$T \text{ erfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad \text{jede endliche TM } T' \subseteq T \text{ ist erfüllbar}$$

($\Leftarrow$) Definiere $T'_n \subseteq T_n = \{\phi \in T \mid s(\phi) \subseteq \{A_1, \ldots, A_n\}\}$ mit:

- für jedes $\phi \in T_n$, existiert $\phi' \in T'_n$ mit $\phi \equiv \phi'$
- $|T'_n| \leq 2^{2^n}$

Per Definition $Mod(T_n) = Mod(T'_n)$ und nach Annahme (da $T'_n$ endlich) existiert $I_n \in Mod(T_n)$. Konstruiere nun ein $I \in Mod(T)$: Setze $J_0 = \mathbb{N}$ und definiere schrittweise $I(A_1)$, $I(A_2)$, ... wie folgt

- $I(A_n) = 1$, falls unendlich viele $j \in J_{n-1}$ mit $I_j(A_n) = 1$ existieren; setze $J_n = \{j \in J_{n-1} \mid I_j(A_n) = 1\}$
- Andernfalls, $I(A_n) = 0$; und setze $J_n = \{j \in J_{n-1} \mid I_j(A_n) = 0\}$

# Kompaktheitssatz

## Proposition

*Gegeben eine Formelmenge $T \subseteq \mathcal{F}$. Es gilt:*

$$T \text{ erfüllbar gdw. jede endliche TM } T' \subseteq T \text{ ist erfüllbar}$$

Es gilt:

1. $J_0 \supseteq J_1 \supseteq J_2 \supseteq \ldots$ (absteigende Kette)
2. $|J_n| = |\mathbb{N}|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (unendl. viele Indizes)
3. für alle $n \in \mathbb{N}$ und $j \in J_n$ gilt: (evaluieren gleich)
   $$I_j(A_1) = I(A_1), \quad I_j(A_2) = I(A_2), \quad \ldots \quad , I_j(A_n) = I(A_n)$$
4. $I(T) = 1$. (Konstruktion ist Modell)
   Beweis: Sei $\phi \in T$, dann ex. $n \in \mathbb{N}$: $\phi \in T_i$ für alle $i \geq n$. Also, ist $I_i(\phi) = 1$ für alle $i \geq n$. Da $J_n$ unendlich, ex. ein Index $j \geq n$ mit $j \in J_n$. Für dieses $j$ gilt: $I_j(A_1) = I(A_1), \ldots, I_j(A_n) = I(A_n)$. Da $j \geq n$ ist $I_j(\phi) = 1$ somit $I(\phi) = 1$ und schließlich, $I(T) = 1$.
   $\square$

# Anwendungen des Kompaktheitssatz

## Theorem (Resolutionssatz für unendliche Mengen)

*Sei $M$ eine Klauselmenge. Es gilt:*

$$M \textit{ unerfüllbar} \quad \textit{gdw.} \quad \Box \in \mathrm{Res}^*(M)$$

Beweis:
($\Leftarrow$) analog zum endlichen Fall
($\Rightarrow$) Sei $M$ unerfüllbar, dann ex. endl. TM $M' \subseteq M$ unerfüllbar.
Somit nach Resolutionssatz endlicher Fall $\Box \in \mathrm{Res}^*(M')$.
Schließlich wegen $\subseteq$-Monotonie von $\mathrm{Res}^*$ folgt $\Box \in \mathrm{Res}^*(M)$.

## Theorem (Färbbarkeit für unendliche Graphen)

*Sei $G$ ein ungerichteter Graph. Es gilt:*

*$G$ ist $k-$färbbar gdw. jeder endl. Untergraph von $G$ ist $k-$färbbar*

Beweis/Erklärungen: Tafel

## Interpolationstheorem

### Theorem (Craig, 1957)

*Gegeben zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathcal{F}$ mit der Eigenschaft $\phi \vDash \psi$.*
*Dann existiert eine Interpolante $\xi \in \mathcal{F}$ mit:*

1. $s(\xi) \subseteq s(\phi) \cap s(\psi)$ *(Schnittsprache)*
2. $\phi \vDash \xi$ *und* $\xi \vDash \psi$ *(Vermittlerin)*

Bsp.: Für $\phi = A_1 \wedge A_2$, $\psi = A_1 \vee A_3$ wäre $\xi = A_1$ eine Interpolante.

- Substitution $[\xi/A_i] : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ mit $\phi \mapsto \phi[\xi/A_i]$ $\quad (A_i \in \mathcal{A}, \xi \in \mathcal{F})$

$$A_j[\xi/A_i] = \begin{cases} \xi & , i = j \\ A_j & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$(\neg\phi)[\xi/A_i] = \neg\,(\phi[\xi/A_i])$$

$$(\phi \circ \psi)[\xi/A_i] = \phi[\xi/A_i] \circ \psi[\xi/A_i] \quad \text{mit } \circ \in \{\wedge, \vee\}$$

(ersetze in $\phi$ jedes Vorkommen von $A_i$ durch $\xi$)

# Interpolationstheorem

## Theorem (Craig, 1957)

*Gegeben zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathcal{F}$ mit der Eigenschaft $\phi \models \psi$. Dann existiert eine Interpolante $\xi \in \mathcal{F}$ mit:*

1. $s(\xi) \subseteq s(\phi) \cap s(\psi)$ *(Schnittsprache)*
2. $\phi \models \xi$ *und* $\xi \models \psi$ *(Vermittlerin)*

Bsp.: Für $\phi = A_1 \wedge A_2$, $\psi = A_1 \vee A_3$ wäre $\xi = A_1$ eine Interpolante.

- Gegeben Interpretation $I \in \mathcal{B}$. Definiere

$$I_{[A_i \mapsto 1]}(A_j) = \begin{cases} 1 & , i = j \\ I(A_j) & , \text{sonst} \end{cases}$$

(punktuelle Änderung von $I$)

- Für jedes $\phi \in \mathcal{F}$ gilt: (Übung 4)

$$I_{[A \mapsto 1]}(\phi) = I(\phi[\top/A]) \qquad I_{[A \mapsto 0]}(\phi) = I(\phi[\bot/A])$$

# Interpolationstheorem

## Theorem (Craig, 1957)

*Gegeben zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathcal{F}$ mit der Eigenschaft $\phi \vDash \psi$.*
*Dann existiert eine Interpolante $\xi \in \mathcal{F}$ mit:*

1. $s(\xi) \subseteq s(\phi) \cap s(\psi)$ *(Schnittsprache)*
2. $\phi \vDash \xi$ *und* $\xi \vDash \psi$ *(Vermittlerin)*

Beweis: vollständige Induktion über $|s(\phi) \setminus s(\psi)|$

- $n = 0$, d.h. $s(\phi) \subseteq s(\psi)$. Somit $s(\phi) \cap s(\psi) = s(\phi)$. Setze $\xi = \phi$. Offensichtlich, $\phi \vDash \xi$ und $\xi \vDash \psi$. (IA)
- Existenz einer Interpolante für $|s(\phi) \setminus s(\psi)| = n$. (IV)
- Sei $|s(\phi) \setminus s(\psi)| = n + 1$ und $A \in s(\phi) \setminus s(\psi)$. Betrachte $\phi_1 = \phi[\top/A]$ und $\phi_2 = \phi[\bot/A]$. Für jedes $I \in \mathcal{B}$ gilt: $I = I_{[A \mapsto 1]}$ oder $I = I_{[A \mapsto 0]}$. Somit $\phi \vDash \phi_1 \vee \phi_2$. Des Weiteren ist mit $I(\phi_1) = 1$ auch $I_{[A \mapsto 1]}(\phi) = 1$ und somit $I_{[A \mapsto 1]}(\psi) = 1$. Da $A \notin s(\psi)$ folgt mit Koinzidenzsatz $I(\psi) = 1$. Folglich $\phi_1 \vDash \psi$ und analog $\phi_2 \vDash \psi$.

# Interpolationstheorem

**Theorem (Craig, 1957)**

*Gegeben zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathcal{F}$ mit der Eigenschaft $\phi \vDash \psi$. Dann existiert eine Interpolante $\xi \in \mathcal{F}$ mit:*

1. $s(\xi) \subseteq s(\phi) \cap s(\psi)$ *(Schnittsprache)*
2. $\phi \vDash \xi$ *und* $\xi \vDash \psi$ *(Vermittlerin)*

Beweis: vollständige Induktion über $|s(\phi) \setminus s(\psi)|$

- $n = 0$, d.h. $s(\phi) \subseteq s(\psi)$. Somit $s(\phi) \cap s(\psi) = s(\phi)$. Setze $\xi = \phi$. Offensichtlich, $\phi \vDash \xi$ und $\xi \vDash \psi$. (IA)
- Existenz einer Interpolante für $|s(\phi) \setminus s(\psi)| = n$. (IV)
- Folglich $\phi_1 \vDash \psi$ und $\phi_2 \vDash \psi$. Da $|s(\phi_1) \setminus s(\psi)| = n$ und $|s(\phi_2) \setminus s(\psi)| = n$ existieren nach IV Interpolanten $\xi_1, \xi_2$ mit:

$$\phi_1 \vDash \xi_1,\ \xi_1 \vDash \psi \quad \text{und} \quad \phi_2 \vDash \xi_2,\ \xi_2 \vDash \psi$$

Daraus folgt $\phi_1 \vee \phi_2 \vDash \xi_1 \vee \xi_2$ und $\xi_1 \vee \xi_2 \vDash \psi$. Schließlich gilt mit $\phi \vDash \phi_1 \vee \phi_2$ auch $\phi \vDash \xi_1 \vee \xi_2$. $\square$

# Interpolationstheorem

## Theorem (Craig, 1957)

*Gegeben zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathcal{F}$ mit der Eigenschaft $\phi \vDash \psi$.*
*Dann existiert eine Interpolante $\xi \in \mathcal{F}$ mit:*

1. $s(\xi) \subseteq s(\phi) \cap s(\psi)$ *(Schnittsprache)*
2. $\phi \vDash \xi$ *und* $\xi \vDash \psi$ *(Vermittlerin)*

Beweis: vollständige Induktion über $|s(\phi) \setminus s(\psi)|$

- $n = 0$, d.h. $s(\phi) \subseteq s(\psi)$. Somit $s(\phi) \cap s(\psi) = s(\phi)$. Setze $\xi = \phi$. Offensichtlich, $\phi \vDash \xi$ und $\xi \vDash \psi$. (IA)
- Existenz einer Interpolante für $|s(\phi) \setminus s(\psi)| = n$. (IV)
- Folglich $\phi_1 \vDash \psi$ und $\phi_2 \vDash \psi$. Da $|s(\phi_1) \setminus s(\psi)| = n$ und $|s(\phi_2) \setminus s(\psi)| = n$ existieren nach IV Interpolanten $\xi_1, \xi_2$ mit:

$$\phi_1 \vDash \xi_1,\ \xi_1 \vDash \psi \quad \text{und} \quad \phi_2 \vDash \xi_2,\ \xi_2 \vDash \psi$$

Daraus folgt $\phi_1 \vee \phi_2 \vDash \xi_1 \vee \xi_2$ und $\xi_1 \vee \xi_2 \vDash \psi$. Schließlich gilt mit $\phi \vDash \phi_1 \vee \phi_2$ auch $\phi \vDash \xi_1 \vee \xi_2$. $\square$

# Abschlußbemerkungen zur AL

Eindeutige Rekonstruierbarkeit

Funktionale Vollständigkeit

Lineare, Input, Unit Resolution . . .

Kalküle

Intuitionistische Logik

Mehrwertige Logiken

Infinitäre Logik

# Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

5. Kompaktheit und Interpolation

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

15. Mai 2025
Leipzig