Wichtige Eigenschaften für Determinanten:

- Ist A eine obere Dreiecksmatrix, also

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$$

so gilt: $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$

Insbesondere: $\det(E_n) = \det\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = 1$

Bsp.:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 6 = 24.$$

- Ist $\lambda \in K$ und entsteht B aus A durch Addition der λ-fachen j-ten Zeile (Spalte) von A zur i-ten Zeile (Spalte) von A, so ist $\det(A) = \det(B)$
- Ist $\lambda \in K \setminus \{0\}$ und entsteht B aus A durch Multiplikation der i-ten Zeile (Spalte) von A mit λ, so ist $\det(A) = \frac{1}{\lambda} \cdot \det(B)$
- Entsteht B aus A durch Vertauschung der i-ten und j-ten Zeile (Spalte) von A, so ist $\det(A) = -\det(B)$
- Sehr wichtig: A ist invertierbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ für alle $A, B \in K^{n \times n}$. (Determinantenmultiplikationssatz)

  Insbesondere:
  - $\det(A^n) = (\det(A))^n$
  - Ist A invertierbar, so ist $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

    (denn $1 = \det(E_n) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$)
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$, $\det(a) = a$ für $a, b, c, d \in K$.

  Bsp.:

  $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$

- Ist $A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ wobei A_1 und A_2 quadratisch sind, so gilt:

$$\det(A) = \det(A_1)\cdot\det(A_2)$$

Satz (von Sarrus)

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in K^{3\times 3}$

Schreibe die Spalten der Matrix A nebeneinander und die ersten beiden Spalten rechts daneben:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} & + & a_{12} & + & a_{13} & + & a_{11} & & a_{12} \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\ a_{31} & - & a_{32} & - & a_{33} & - & a_{31} & & a_{32} \end{array}$$

Dann gilt:

$$\det(A) = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}$$
$$- a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11} - a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12}$$

Bsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & -4 & + & 1 & & 2 \\ 3 & & -2 & & 0 & & 3 & & -2 \\ -1 & - & 0 & - & 5 & - & -1 & & 0 \end{array}$$

$$\det(A) = 1\cdot(-2)\cdot 5 + 2\cdot 0\cdot(-1) - 4\cdot 3\cdot 0$$
$$- (-1)\cdot(-2)\cdot(-4) - 0\cdot 0\cdot 1 - 5\cdot 3\cdot 2$$
$$= -10 + 0 - 0 + 8 - 0 - 30$$
$$= -32$$

Achtung:

Der Satz von Sarrus gilt nur für 3x3-Matrizen!

Satz von Laplace:

Sei $n \geq 2$ und $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in K^{n \times n}$. Dann gilt:

1) Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ ist

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}')$$

(Entwicklung nach der i-ten Zeile)

2) Für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ ist

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}')$$

(Entwicklung nach der j-ten Spalte)

A_{ij}' entsteht aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte von A.

Bem:

$(-1)^{i+j}$: $\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$ bei $A \in K^{n \times n}$

$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$ bei $A \in K^{3 \times 3}$

$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$ bei $A \in K^{4 \times 4}$

a_{ij} : Entwicklung nach der i-ten Zeile:

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach der j-ten Spalte:

$$\begin{pmatrix} \cdots & a_{1j} & \cdots \\ & a_{2j} & \\ & \vdots & \\ \cdots & a_{nj} & \cdots \end{pmatrix}$$

A_{ij}' : $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ & & a_{2j} & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Bsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad (-1)^{i+j} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\det(A) \overset{\text{Entw. nach}}{\underset{\text{1. Zeile}}{=}} +1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$+(-4) \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} - 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \cdot 5 - 2 \cdot (3 \cdot 5) - 4 \cdot (-2)$$

$$= -10 - 30 + 8 = -32$$

Alternativ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad (-1)^{i+j} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\det(A) \overset{\text{Entw. nach}}{\underset{\text{3. Spalte}}{=}} +(-4) \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} - 0 + 5 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= -4 \cdot (-2) + 5 \cdot (-2 - 6)$$

$$= 8 - 40 = -32$$

Alternativ:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} ② \to ② + (-3) \cdot ① \\ ③ \to ③ + 1 \cdot ① \end{array}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -8 & 12 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Entw. nach}}{\underset{\text{der 1. Spalte}}{=}} 1 \cdot \det\begin{pmatrix} -8 & 12 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -8 - 2 \cdot 12 = -32$$

Trick:

Entwickle nach einer Zeile (Spalte) wo viele Nullen stehen bzw. erzeuge vorher mit elementaren Zeilenumformungen (Spaltenumformungen) in einer Zeile (Spalte) Nullen.

Def.:

Sei K ein Körper und $n \geq 1$.

$$\det : K^{n \times n} \to K \quad , \quad \det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

heißt Determinante.

$\det(A)$ heißt Determinante von A.

Satz:

det ist die eindeutig bestimmte Abb. $K^{n \times n} \to K$ mit

(D1) det ist linear in jeder Zeile, d.h. Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

a) Ist $a_i = b_i + c_i$, so ist

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ b_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ c_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

b) Ist $a_i = \lambda \cdot b_i$, so ist

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} \vdots \\ b_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

(D2) det ist alternierend, d.h. hat A zwei gleiche Zeilen, so ist $\det(A) = 0$

(D3) det ist normiert, d.h. $\det(E_n) = 1$.