Lösungen Übung 8

Aufgabe 1 (2 Punkte pro Teilaufgabe)**.** Berechnen Sie die folgenden Determinanten. Komplexe Zahlen sollten dabei wieder in der Form $a+ib$ dargestellt werden.

$$a)\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} \qquad c)\ \begin{vmatrix} -2 & i & 3 \\ 1 & -1 & 1+i \\ 2i & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Lösung: Wir entwickeln die Determinanten jeweils nach der ersten Zeile.
a) Es gilt:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 42 + 3 + 8 = 53$$

b) Es gilt:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 54 + 138 - 17 = 175$$

c) Es gilt:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -2 & i & 3 \\ 1 & -1 & 1+i \\ 2i & 3 & 2 \end{vmatrix} &= -2\begin{vmatrix} -1 & 1+i \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - i\begin{vmatrix} 1 & 1+i \\ 2i & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2i & 3 \end{vmatrix} \\ &= 10 + 6i - 4i - 2 + 9 + 6i = 17 + 8i \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Berechnen Sie die folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Lösung: Entwicklung der Determinante nach der zweiten Zeile liefert:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -4 + 33 + 4 - 2 - 18 = 13 \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Bestimmen Sie sämtliche $x \in \mathbb{R}$ für die die folgenden drei Vektoren linear unabhängig sind:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ x \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ x^2 \\ x \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung: Wir setzen

$$D(x) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & x^2 & -1 \\ x & x & 2 \end{vmatrix}$$

und bemerken, dass die drei Vektoren genau dann linear unabhängig sind, wenn $D(x) \neq 0$ gilt.
Entwicklung der Determinante nach der ersten Zeile liefert:

$$D(x) = 2 \begin{vmatrix} x^2 & -1 \\ x & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ x & 2 \end{vmatrix} = 4x^2 + 2x - 4 + 2x = 4(x^2 + x - 1)$$

Somit gilt:

$$D(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 + 1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Folglich sind die drei obigen Vektoren linear unabhängig genau dann, wenn $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1/2 \pm \sqrt{5}/2\right\}$ gilt.