UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Vorlesung 3 - Naive Mengenlehre

Diskrete Strukturen (WS 2023-24)

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

1. Wiederholung
2. Vorlesungsziele
3. Mengenlehre - Grundbegriffe
4. Mengen und einstellige Prädikaten
5. Operationen auf Mengen
6. Weitere Elementare Eigenschaften von Mengen

Beweisprinzipien, insbesondere

- Kontraposition.

Beweisprinzipien, insbesondere

- **Kontraposition.** Anstelle des Beweises einer Aussage

Beweisprinzipien, insbesondere

- Kontraposition. Anstelle des Beweises einer Aussage $A \to B$

Beweisprinzipien, insbesondere

- Kontraposition. Anstelle des Beweises einer Aussage $A \to B$ kann ein Beweis für die Aussage

Beweisprinzipien, insbesondere

- Kontraposition. Anstelle des Beweises einer Aussage $A \to B$ kann ein Beweis für die Aussage $\neg B \to \neg A$ geführt werden.

Beweisprinzipien, insbesondere

- Kontraposition. Anstelle des Beweises einer Aussage $A \to B$ kann ein Beweis für die Aussage $\neg B \to \neg A$ geführt werden.
  - Als Beispiel betrachten wir den Satz

Beweisprinzipien, insbesondere

- Kontraposition. Anstelle des Beweises einer Aussage $A \to B$ kann ein Beweis für die Aussage $\neg B \to \neg A$ geführt werden.
  - Als Beispiel betrachten wir den Satz “Sei n eine beliebige ganze Zahl.

Beweisprinzipien, insbesondere

- Kontraposition. Anstelle des Beweises einer Aussage $A \to B$ kann ein Beweis für die Aussage $\neg B \to \neg A$ geführt werden.
  - Als Beispiel betrachten wir den Satz "Sei n eine beliebige ganze Zahl. Falls n^2 gerade ist, so ist auch n gerade."

Beweisprinzipien, insbesondere

- Kontraposition. Anstelle des Beweises einer Aussage $A \to B$ kann ein Beweis für die Aussage $\neg B \to \neg A$ geführt werden.
  - Als Beispiel betrachten wir den Satz "Sei n eine beliebige ganze Zahl. Falls n^2 gerade ist, so ist auch n gerade."
  - : Beweis:

Beweisprinzipien, insbesondere

- Kontraposition. Anstelle des Beweises einer Aussage $A \rightarrow B$ kann ein Beweis für die Aussage $\neg B \rightarrow \neg A$ geführt werden.
  - Als Beispiel betrachten wir den Satz "Sei n eine beliebige ganze Zahl. Falls n^2 gerade ist, so ist auch n gerade."
  - : Beweis: Angenommen n ist nicht gerade.

Beweisprinzipien, insbesondere

- Kontraposition. Anstelle des Beweises einer Aussage $A \to B$ kann ein Beweis für die Aussage $\neg B \to \neg A$ geführt werden.
  - Als Beispiel betrachten wir den Satz "Sei n eine beliebige ganze Zahl. Falls n^2 gerade ist, so ist auch n gerade."
  - : Beweis: Angenommen n ist nicht gerade. Also $n = 2k + 1$ mit $k \in \mathbb{Z}$,

Beweisprinzipien, insbesondere

- Kontraposition. Anstelle des Beweises einer Aussage $A \to B$ kann ein Beweis für die Aussage $\neg B \to \neg A$ geführt werden.
  - Als Beispiel betrachten wir den Satz "Sei n eine beliebige ganze Zahl. Falls n^2 gerade ist, so ist auch n gerade."
  - : Beweis: Angenommen n ist nicht gerade. Also $n = 2k + 1$ mit $k \in \mathbb{Z}$, und $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$

Beweisprinzipien, insbesondere

- Kontraposition. Anstelle des Beweises einer Aussage $A \to B$ kann ein Beweis für die Aussage $\neg B \to \neg A$ geführt werden.
  - Als Beispiel betrachten wir den Satz "Sei n eine beliebige ganze Zahl. Falls n^2 gerade ist, so ist auch n gerade."
  - : Beweis: Angenommen n ist nicht gerade. Also $n = 2k + 1$ mit $k \in \mathbb{Z}$, und $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \ = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Deswegen ist n^2 nicht gerade,

Beweisprinzipien, insbesondere

- Kontraposition. Anstelle des Beweises einer Aussage $A \to B$ kann ein Beweis für die Aussage $\neg B \to \neg A$ geführt werden.
  - ▶ Als Beispiel betrachten wir den Satz "Sei n eine beliebige ganze Zahl. Falls n^2 gerade ist, so ist auch n gerade."
  - ▶ : Beweis: Angenommen n ist nicht gerade. Also $n = 2k + 1$ mit $k \in \mathbb{Z}$, und $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \ = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Deswegen ist n^2 nicht gerade, was im Widerspruch mit der Annahme steht,

Beweisprinzipien, insbesondere

- Kontraposition. Anstelle des Beweises einer Aussage $A \to B$ kann ein Beweis für die Aussage $\neg B \to \neg A$ geführt werden.
  - Als Beispiel betrachten wir den Satz "Sei n eine beliebige ganze Zahl. Falls n^2 gerade ist, so ist auch n gerade."
  - : Beweis: Angenommen n ist nicht gerade. Also $n = 2k + 1$ mit $k \in \mathbb{Z}$, und $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Deswegen ist n^2 nicht gerade, was im Widerspruch mit der Annahme steht, dass n^2 gerade ist.

- „Beweis durch Widerspruch“.

- „Beweis durch Widerspruch“. Eine Behauptung gilt als bewiesen,

- „Beweis durch Widerspruch“. Eine Behauptung gilt als bewiesen, wenn aus ihrer Negation ein Widerspruch hergeleitet werden kann.

- „Beweis durch Widerspruch". Eine Behauptung gilt als bewiesen, wenn aus ihrer Negation ein Widerspruch hergeleitet werden kann.
- $e = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots$ ist eine irrationelle Zahl.

- „Beweis durch Widerspruch“. Eine Behauptung gilt als bewiesen, wenn aus ihrer Negation ein Widerspruch hergeleitet werden kann.
- $e = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots$ ist eine irrationelle Zahl.
  - Beweis durch Widerspruch.

- „Beweis durch Widerspruch". Eine Behauptung gilt als bewiesen, wenn aus ihrer Negation ein Widerspruch hergeleitet werden kann.
- $e = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots$ ist eine irrationelle Zahl.
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass e rational ist,

- „Beweis durch Widerspruch“. Eine Behauptung gilt als bewiesen, wenn aus ihrer Negation ein Widerspruch hergeleitet werden kann.
- $e = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots$ ist eine irrationelle Zahl.
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass e rational ist, also $e = \frac{a}{b}$

- „Beweis durch Widerspruch". Eine Behauptung gilt als bewiesen, wenn aus ihrer Negation ein Widerspruch hergeleitet werden kann.
- $e = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots$ ist eine irrationelle Zahl.
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass e rational ist, also $e = \frac{a}{b}$ für einige teilerfremde Zahlen a, b.

- „Beweis durch Widerspruch“. Eine Behauptung gilt als bewiesen, wenn aus ihrer Negation ein Widerspruch hergeleitet werden kann.
- $e = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots$ ist eine irrationelle Zahl.
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass e rational ist, also $e = \frac{a}{b}$ für einige teilerfremde Zahlen a, b. Sei $N \geq b$.

- „Beweis durch Widerspruch“. Eine Behauptung gilt als bewiesen, wenn aus ihrer Negation ein Widerspruch hergeleitet werden kann.
- $e = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots$ ist eine irrationelle Zahl.
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass e rational ist, also $e = \frac{a}{b}$ für einige teilerfremde Zahlen a, b. Sei $N \geq b$.
  - Betrachten wir die Zahl

- „Beweis durch Widerspruch“. Eine Behauptung gilt als bewiesen, wenn aus ihrer Negation ein Widerspruch hergeleitet werden kann.

- $e = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots$ ist eine irrationelle Zahl.

  - ▶ Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass e rational ist, also $e = \frac{a}{b}$ für einige teilerfremde Zahlen a, b. Sei $N \geq b$.

  - ▶ Betrachten wir die Zahl $\alpha :=$

- „Beweis durch Widerspruch". Eine Behauptung gilt als bewiesen, wenn aus ihrer Negation ein Widerspruch hergeleitet werden kann.
- $e = 1 + \frac{1}{2!} + \dots$ ist eine irrationelle Zahl.
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass e rational ist, also $e = \frac{a}{b}$ für einige teilerfremde Zahlen a, b. Sei $N \geq b$.
  - Betrachten wir die Zahl $\alpha := N!(1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{N!})$.

- „Beweis durch Widerspruch“. Eine Behauptung gilt als bewiesen, wenn aus ihrer Negation ein Widerspruch hergeleitet werden kann.

- $e = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots$ ist eine irrationelle Zahl.
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass e rational ist, also $e = \frac{a}{b}$ für einige teilerfremde Zahlen a, b. Sei $N \geq b$.
  - Betrachten wir die Zahl $\alpha := N!(1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{N!})$. Dies ist eine natürliche Zahl.

- „Beweis durch Widerspruch“. Eine Behauptung gilt als bewiesen, wenn aus ihrer Negation ein Widerspruch hergeleitet werden kann.

- $e = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots$ ist eine irrationelle Zahl.
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass e rational ist, also $e = \frac{a}{b}$ für einige teilerfremde Zahlen a, b. Sei $N \geq b$.
  - Betrachten wir die Zahl $\alpha := N!(1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{N!})$. Dies ist eine natürliche Zahl.
  - Wir können es aber auch schreiben als

- „Beweis durch Widerspruch“. Eine Behauptung gilt als bewiesen, wenn aus ihrer Negation ein Widerspruch hergeleitet werden kann.
- $e = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots$ ist eine irrationelle Zahl.
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass e rational ist, also $e = \frac{a}{b}$ für einige teilerfremde Zahlen a, b. Sei $N \geq b$.
  - Betrachten wir die Zahl $\alpha := N!(1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{N!})$. Dies ist eine natürliche Zahl.
  - Wir können es aber auch schreiben als $\alpha = N!(e - \frac{1}{(N+1)!} - \frac{1}{(N+2)!} - \ldots)$

- „Beweis durch Widerspruch“. Eine Behauptung gilt als bewiesen, wenn aus ihrer Negation ein Widerspruch hergeleitet werden kann.

- $e = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots$ ist eine irrationelle Zahl.
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass e rational ist, also $e = \frac{a}{b}$ für einige teilerfremde Zahlen a, b. Sei $N \geq b$.
  - Betrachten wir die Zahl $\alpha := N!(1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{N!})$. Dies ist eine natürliche Zahl.
  - Wir können es aber auch schreiben als $\alpha = N!(e - \frac{1}{(N+1)!} - \frac{1}{(N+2)!} - \ldots) = N!(\frac{a}{b} - \frac{1}{(N+1)!} - \frac{1}{(N+2)!} - \ldots)$

- „Beweis durch Widerspruch". Eine Behauptung gilt als bewiesen, wenn aus ihrer Negation ein Widerspruch hergeleitet werden kann.
- $e = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots$ ist eine irrationelle Zahl.
  - ▶ Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass e rational ist, also $e = \frac{a}{b}$ für einige teilerfremde Zahlen a, b. Sei $N \geq b$.
  - ▶ Betrachten wir die Zahl $\alpha := N!(1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{N!})$. Dies ist eine natürliche Zahl.
  - ▶ Wir können es aber auch schreiben als $\alpha = N!(e - \frac{1}{(N+1)!} - \frac{1}{(N+2)!} - \ldots) = N!(\frac{a}{b} - \frac{1}{(N+1)!} - \frac{1}{(N+2)!} - \ldots)$
  - ▶ Nun ist $N! \cdot \frac{a}{b}$ eine ganze Zahl,

- „Beweis durch Widerspruch“. Eine Behauptung gilt als bewiesen, wenn aus ihrer Negation ein Widerspruch hergeleitet werden kann.

- $e = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots$ ist eine irrationelle Zahl.

  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass e rational ist, also $e = \frac{a}{b}$ für einige teilerfremde Zahlen a, b. Sei $N \geq b$.

  - Betrachten wir die Zahl $\alpha := N!(1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{N!})$. Dies ist eine natürliche Zahl.

  - Wir können es aber auch schreiben als $\alpha = N!(e - \frac{1}{(N+1)!} - \frac{1}{(N+2)!} - \ldots) = N!(\frac{a}{b} - \frac{1}{(N+1)!} - \frac{1}{(N+2)!} - \ldots)$

  - Nun ist $N! \cdot \frac{a}{b}$ eine ganze Zahl, und $N!(\frac{1}{(N+1)!} + \ldots) =$

- „Beweis durch Widerspruch". Eine Behauptung gilt als bewiesen, wenn aus ihrer Negation ein Widerspruch hergeleitet werden kann.
- $e = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots$ ist eine irrationelle Zahl.
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass e rational ist, also $e = \frac{a}{b}$ für einige teilerfremde Zahlen a, b. Sei $N \geq b$.
  - Betrachten wir die Zahl $\alpha := N!(1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{N!})$. Dies ist eine natürliche Zahl.
  - Wir können es aber auch schreiben als $\alpha = N!(e - \frac{1}{(N+1)!} - \frac{1}{(N+2)!} - \ldots) = N!(\frac{a}{b} - \frac{1}{(N+1)!} - \frac{1}{(N+2)!} - \ldots)$
  - Nun ist $N! \cdot \frac{a}{b}$ eine ganze Zahl, und $N!(\frac{1}{(N+1)!} + \ldots) = \frac{1}{(N+1)} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} + \ldots$

- „Beweis durch Widerspruch". Eine Behauptung gilt als bewiesen, wenn aus ihrer Negation ein Widerspruch hergeleitet werden kann.
- $e = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots$ ist eine irrationelle Zahl.
  - ▶ Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass e rational ist, also $e = \frac{a}{b}$ für einige teilerfremde Zahlen a, b. Sei $N \geq b$.
  - ▶ Betrachten wir die Zahl $\alpha := N!(1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{N!})$. Dies ist eine natürliche Zahl.
  - ▶ Wir können es aber auch schreiben als $\alpha = N!(e - \frac{1}{(N+1)!} - \frac{1}{(N+2)!} - \ldots) = N!(\frac{a}{b} - \frac{1}{(N+1)!} - \frac{1}{(N+2)!} - \ldots)$
  - ▶ Nun ist $N! \cdot \frac{a}{b}$ eine ganze Zahl, und $N!(\frac{1}{(N+1)!} + \ldots) = \frac{1}{(N+1)} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} + \ldots < \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)^2} + \ldots =$

- „Beweis durch Widerspruch“. Eine Behauptung gilt als bewiesen, wenn aus ihrer Negation ein Widerspruch hergeleitet werden kann.
- $e = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots$ ist eine irrationelle Zahl.
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass e rational ist, also $e = \frac{a}{b}$ für einige teilerfremde Zahlen a, b. Sei $N \geq b$.
  - Betrachten wir die Zahl $\alpha := N!(1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{N!})$. Dies ist eine natürliche Zahl.
  - Wir können es aber auch schreiben als $\alpha = N!(e - \frac{1}{(N+1)!} - \frac{1}{(N+2)!} - \ldots) = N!(\frac{a}{b} - \frac{1}{(N+1)!} - \frac{1}{(N+2)!} - \ldots)$
  - Nun ist $N! \cdot \frac{a}{b}$ eine ganze Zahl, und $N!(\frac{1}{(N+1)!} + \ldots) = \frac{1}{(N+1)} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} + \ldots < \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)^2} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{N+1}} - 1 =$

- „Beweis durch Widerspruch". Eine Behauptung gilt als bewiesen, wenn aus ihrer Negation ein Widerspruch hergeleitet werden kann.

- $e = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots$ ist eine irrationelle Zahl.
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass e rational ist, also $e = \frac{a}{b}$ für einige teilerfremde Zahlen a, b. Sei $N \geq b$.
  - Betrachten wir die Zahl $\alpha := N!(1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{N!})$. Dies ist eine natürliche Zahl.
  - Wir können es aber auch schreiben als $\alpha = N!(e - \frac{1}{(N+1)!} - \frac{1}{(N+2)!} - \ldots) = N!(\frac{a}{b} - \frac{1}{(N+1)!} - \frac{1}{(N+2)!} - \ldots)$
  - Nun ist $N! \cdot \frac{a}{b}$ eine ganze Zahl, und $N!(\frac{1}{(N+1)!} + \ldots) = \frac{1}{(N+1)} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} + \ldots < \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)^2} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{N+1}} - 1 = \frac{1}{N} < 1$.

- „Beweis durch Widerspruch". Eine Behauptung gilt als bewiesen, wenn aus ihrer Negation ein Widerspruch hergeleitet werden kann.
- $e = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots$ ist eine irrationelle Zahl.
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass e rational ist, also $e = \frac{a}{b}$ für einige teilerfremde Zahlen a, b. Sei $N \geq b$.
  - Betrachten wir die Zahl $\alpha := N!(1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{N!})$. Dies ist eine natürliche Zahl.
  - Wir können es aber auch schreiben als $\alpha = N!(e - \frac{1}{(N+1)!} - \frac{1}{(N+2)!} - \ldots) = N!(\frac{a}{b} - \frac{1}{(N+1)!} - \frac{1}{(N+2)!} - \ldots)$
  - Nun ist $N! \cdot \frac{a}{b}$ eine ganze Zahl, und $N!(\frac{1}{(N+1)!} + \ldots) = \frac{1}{(N+1)} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} + \ldots < \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)^2} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{N+1}} - 1 = \frac{1}{N} < 1$.
  - Dies zeigt, dass α keine natürliche Zahl ist.

- „Beweis durch Widerspruch“. Eine Behauptung gilt als bewiesen, wenn aus ihrer Negation ein Widerspruch hergeleitet werden kann.
- $e = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots$ ist eine irrationelle Zahl.
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass e rational ist, also $e = \frac{a}{b}$ für einige teilerfremde Zahlen a, b. Sei $N \geq b$.
  - Betrachten wir die Zahl $\alpha := N!(1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{N!})$. Dies ist eine natürliche Zahl.
  - Wir können es aber auch schreiben als $\alpha = N!(e - \frac{1}{(N+1)!} - \frac{1}{(N+2)!} - \ldots) = N!(\frac{a}{b} - \frac{1}{(N+1)!} - \frac{1}{(N+2)!} - \ldots)$
  - Nun ist $N! \cdot \frac{a}{b}$ eine ganze Zahl, und $N!(\frac{1}{(N+1)!} + \ldots) = \frac{1}{(N+1)} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} + \ldots < \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)^2} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{N+1}} - 1 = \frac{1}{N} < 1$.
  - Dies zeigt, dass α keine natürliche Zahl ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass e nicht rational ist.

- Es gibt keine größte Primzahl

- Es gibt keine größte Primzahl
  - Beweis durch Widerspruch.

- Es gibt keine größte Primzahl
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass es die größte Primzahl p gibt.

- Es gibt keine größte Primzahl
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass es die größte Primzahl p gibt. Dann lassen sich alle Primzahlen wie folgt auflisten

- Es gibt keine größte Primzahl
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass es die größte Primzahl p gibt. Dann lassen sich alle Primzahlen wie folgt auflisten $2 = p_1,$

- Es gibt keine größte Primzahl
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass es die größte Primzahl p gibt. Dann lassen sich alle Primzahlen wie folgt auflisten $2 = p_1,\ 3 = p_2,$

- Es gibt keine größte Primzahl
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass es die größte Primzahl p gibt. Dann lassen sich alle Primzahlen wie folgt auflisten $2 = p_1,\ 3 = p_2,\ \ldots,$

- Es gibt keine größte Primzahl
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass es die größte Primzahl p gibt. Dann lassen sich alle Primzahlen wie folgt auflisten $2 = p_1,\ 3 = p_2,\ \ldots,\ p = p_n$.

- Es gibt keine größte Primzahl
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass es die größte Primzahl p gibt. Dann lassen sich alle Primzahlen wie folgt auflisten $2 = p_1,\ 3 = p_2,\ \ldots,\ p = p_n$.
  - Betrachten wir die Zahl

- Es gibt keine größte Primzahl
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass es die größte Primzahl p gibt. Dann lassen sich alle Primzahlen wie folgt auflisten $2 = p_1,\ 3 = p_2,\ \ldots,\ p = p_n$.
  - Betrachten wir die Zahl $N := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots p_n + 1$.

- Es gibt keine größte Primzahl
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass es die größte Primzahl p gibt. Dann lassen sich alle Primzahlen wie folgt auflisten $2 = p_1,\ 3 = p_2,\ \ldots,\ p = p_n$.
  - Betrachten wir die Zahl $N := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots p_n + 1$.
  - Diese Zahl ist größer als p

- Es gibt keine größte Primzahl
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass es die größte Primzahl p gibt. Dann lassen sich alle Primzahlen wie folgt auflisten $2 = p_1,\ 3 = p_2,\ \ldots,\ p = p_n$.
  - Betrachten wir die Zahl $N := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots p_n + 1$.
  - Diese Zahl ist größer als p ist also nicht prim.

- Es gibt keine größte Primzahl
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass es die größte Primzahl p gibt. Dann lassen sich alle Primzahlen wie folgt auflisten $2 = p_1,\ 3 = p_2,\ \ldots,\ p = p_n$.
  - Betrachten wir die Zahl $N := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots p_n + 1$.
  - Diese Zahl ist größer als p ist also nicht prim.
  - Es gibt also eine Primzahl, die N teilt.

- Es gibt keine größte Primzahl
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass es die größte Primzahl p gibt. Dann lassen sich alle Primzahlen wie folgt auflisten $2 = p_1,\ 3 = p_2,\ \ldots,\ p = p_n$.
  - Betrachten wir die Zahl $N := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots p_n + 1$.
  - Diese Zahl ist größer als p ist also nicht prim.
  - Es gibt also eine Primzahl, die N teilt. Dies ist eine der oben aufgeführten Primzahlen,

- Es gibt keine größte Primzahl
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass es die größte Primzahl p gibt. Dann lassen sich alle Primzahlen wie folgt auflisten $2 = p_1,\ 3 = p_2,\ \ldots,\ p = p_n$.
  - Betrachten wir die Zahl $N := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots p_n + 1$.
  - Diese Zahl ist größer als p ist also nicht prim.
  - Es gibt also eine Primzahl, die N teilt. Dies ist eine der oben aufgeführten Primzahlen, nennen wir sie p_k.

- Es gibt keine größte Primzahl
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass es die größte Primzahl p gibt. Dann lassen sich alle Primzahlen wie folgt auflisten $2 = p_1, \; 3 = p_2, \; \ldots, \; p = p_n$.
  - Betrachten wir die Zahl $N := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots p_n + 1$.
  - Diese Zahl ist größer als p ist also nicht prim.
  - Es gibt also eine Primzahl, die N teilt. Dies ist eine der oben aufgeführten Primzahlen, nennen wir sie p_k.
  - Aber N kann als $ap + 1$ geschrieben werden,

- Es gibt keine größte Primzahl
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass es die größte Primzahl p gibt. Dann lassen sich alle Primzahlen wie folgt auflisten $2 = p_1,\ 3 = p_2,\ \ldots,\ p = p_n$.
  - Betrachten wir die Zahl $N := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots p_n + 1$.
  - Diese Zahl ist größer als p ist also nicht prim.
  - Es gibt also eine Primzahl, die N teilt. Dies ist eine der oben aufgeführten Primzahlen, nennen wir sie p_k.
  - Aber N kann als $ap + 1$ geschrieben werden, also p teilt N nicht.

- Es gibt keine größte Primzahl
  - Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass es die größte Primzahl p gibt. Dann lassen sich alle Primzahlen wie folgt auflisten $2 = p_1,\ 3 = p_2,\ \ldots,\ p = p_n$.
  - Betrachten wir die Zahl $N := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots p_n + 1$.
  - Diese Zahl ist größer als p ist also nicht prim.
  - Es gibt also eine Primzahl, die N teilt. Dies ist eine der oben aufgeführten Primzahlen, nennen wir sie p_k.
  - Aber N kann als $ap + 1$ geschrieben werden, also p teilt N nicht. Dieser Widerspruch zeigt unsere These.

- Wenn wir die Behautung direkt aus der Annahme beweisen,

- Wenn wir die Behautung direkt aus der Annahme beweisen, nennen wir so einen Beweis ein direkter Beweis.

- Wenn wir die Behautung direkt aus der Annahme beweisen, nennen wir so einen Beweis ein direkter Beweis.
  - Wenn n gerade ist, dann ist n^2 gerade.

- Wenn wir die Behautung direkt aus der Annahme beweisen, nennen wir so einen Beweis ein direkter Beweis.
  - Wenn n gerade ist, dann ist n^2 gerade.
  - Beweis: Wenn n gerade ist,

- Wenn wir die Behautung direkt aus der Annahme beweisen, nennen wir so einen Beweis ein direkter Beweis.
  - Wenn n gerade ist, dann ist n^2 gerade.
  - Beweis: Wenn n gerade ist, dann können wir $n = 2k$ für irgendein k schreiben,

- Wenn wir die Behautung direkt aus der Annahme beweisen, nennen wir so einen Beweis ein direkter Beweis.
  - Wenn n gerade ist, dann ist n^2 gerade.
  - Beweis: Wenn n gerade ist, dann können wir $n = 2k$ für irgendein k schreiben, und daher $n^2 = 4k^2 =$

- Wenn wir die Behautung direkt aus der Annahme beweisen, nennen wir so einen Beweis ein direkter Beweis.
  - Wenn n gerade ist, dann ist n^2 gerade.
  - Beweis: Wenn n gerade ist, dann können wir $n = 2k$ für irgendein k schreiben, und daher $n^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2$,

- Wenn wir die Behautung direkt aus der Annahme beweisen, nennen wir so einen Beweis ein direkter Beweis.
    - Wenn n gerade ist, dann ist n^2 gerade.
    - Beweis: Wenn n gerade ist, dann können wir $n = 2k$ für irgendein k schreiben, und daher $n^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2$, was zeigt,

- Wenn wir die Behautung direkt aus der Annahme beweisen, nennen wir so einen Beweis ein direkter Beweis.
    - ▶ Wenn n gerade ist, dann ist n^2 gerade.
    - ▶ Beweis: Wenn n gerade ist, dann können wir $n = 2k$ für irgendein k schreiben, und daher $n^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2$, was zeigt, dass n^2 gerade ist.

Prädikaten - “Aussagenschablonen”

Prädikaten - “Aussagenschablonen” Intuitiv sind Prädikaten abstrakte Aussagen, in denen Variablen zugelassen sind,

Prädikaten - “Aussagenschablonen” Intuitiv sind Prädikaten abstrakte Aussagen, in denen Variablen zugelassen sind, so dass für jede Belegung der Variablen eine konkrete Aussage entsteht.

- **Beispiel.** Für jede natürliche Zahl existiert eine echt größere gerade natürliche Zahl.

Prädikaten - “Aussagenschablonen” Intuitiv sind Prädikaten abstrakte Aussagen, in denen Variablen zugelassen sind, so dass für jede Belegung der Variablen eine konkrete Aussage entsteht.

- **Beispiel.** Für jede natürliche Zahl existiert eine echt größere gerade natürliche Zahl.
- Formalisierung für das Universum natürlicher Zahlen:

Prädikaten - “Aussagenschablonen” Intuitiv sind Prädikaten abstrakte Aussagen, in denen Variablen zugelassen sind, so dass für jede Belegung der Variablen eine konkrete Aussage entsteht.

- **Beispiel.** Für jede natürliche Zahl existiert eine echt größere gerade natürliche Zahl.
- Formalisierung für das Universum natürlicher Zahlen:

$$\forall n \, \exists m \left(\mathsf{Gerade}(m) \wedge (m > n) \right)$$

Prädikaten - “Aussagenschablonen” Intuitiv sind Prädikaten abstrakte Aussagen, in denen Variablen zugelassen sind, so dass für jede Belegung der Variablen eine konkrete Aussage entsteht.

- **Beispiel.** Für jede natürliche Zahl existiert eine echt größere gerade natürliche Zahl.
- Formalisierung für das Universum natürlicher Zahlen:

$$\forall n\, \exists m \left(\mathsf{Gerade}(m) \wedge (m > n)\right)$$

- **Beweis.**

Prädikaten - “Aussagenschablonen” Intuitiv sind Prädikaten abstrakte Aussagen, in denen Variablen zugelassen sind, so dass für jede Belegung der Variablen eine konkrete Aussage entsteht.

- **Beispiel.** Für jede natürliche Zahl existiert eine echt größere gerade natürliche Zahl.
- Formalisierung für das Universum natürlicher Zahlen:

$$\forall n\, \exists m \left(\mathsf{Gerade}(m) \wedge (m > n) \right)$$

- **Beweis.** Sei n eine beliebige natürliche Zahl.

Prädikaten - “Aussagenschablonen” Intuitiv sind Prädikaten abstrakte Aussagen, in denen Variablen zugelassen sind, so dass für jede Belegung der Variablen eine konkrete Aussage entsteht.

- **Beispiel.** Für jede natürliche Zahl existiert eine echt größere gerade natürliche Zahl.
- Formalisierung für das Universum natürlicher Zahlen:

$$\forall n \, \exists m \left(\text{Gerade}(m) \wedge (m > n) \right)$$

- **Beweis.** Sei n eine beliebige natürliche Zahl. Wir definieren $m := 2(n+1)$.

Prädikaten - “Aussagenschablonen” Intuitiv sind Prädikaten abstrakte Aussagen, in denen Variablen zugelassen sind, so dass für jede Belegung der Variablen eine konkrete Aussage entsteht.

- **Beispiel.** Für jede natürliche Zahl existiert eine echt größere gerade natürliche Zahl.
- Formalisierung für das Universum natürlicher Zahlen:

$$\forall n\, \exists m \left(\mathsf{Gerade}(m) \wedge (m > n)\right)$$

- **Beweis.** Sei n eine beliebige natürliche Zahl. Wir definieren $m := 2(n+1)$. Dann ist m offenbar durch 2 teilbar und damit gerade.

Prädikaten - “Aussagenschablonen” Intuitiv sind Prädikaten abstrakte Aussagen, in denen Variablen zugelassen sind, so dass für jede Belegung der Variablen eine konkrete Aussage entsteht.

- **Beispiel.** Für jede natürliche Zahl existiert eine echt größere gerade natürliche Zahl.
- Formalisierung für das Universum natürlicher Zahlen:

$$\forall n\, \exists m \,\Big(\text{Gerade}(m) \wedge (m > n)\Big)$$

- **Beweis.** Sei n eine beliebige natürliche Zahl. Wir definieren $m := 2(n+1)$. Dann ist m offenbar durch 2 teilbar und damit gerade. Weiterhin gilt $m - n = 2(n+1) - n = n + 2 > 0$

Prädikaten - “Aussagenschablonen” Intuitiv sind Prädikaten abstrakte Aussagen, in denen Variablen zugelassen sind, so dass für jede Belegung der Variablen eine konkrete Aussage entsteht.

- **Beispiel.** Für jede natürliche Zahl existiert eine echt größere gerade natürliche Zahl.
- Formalisierung für das Universum natürlicher Zahlen:

$$\forall n\, \exists m\, \Big(\mathsf{Gerade}(m) \wedge (m > n)\Big)$$

- **Beweis.** Sei n eine beliebige natürliche Zahl. Wir definieren $m := 2(n+1)$. Dann ist m offenbar durch 2 teilbar und damit gerade. Weiterhin gilt $m - n = 2(n+1) - n = n + 2 > 0$ und damit ist $m > n$.

Prädikaten - "Aussagenschablonen" Intuitiv sind Prädikaten abstrakte Aussagen, in denen Variablen zugelassen sind, so dass für jede Belegung der Variablen eine konkrete Aussage entsteht.

- **Beispiel.** Für jede natürliche Zahl existiert eine echt größere gerade natürliche Zahl.
- Formalisierung für das Universum natürlicher Zahlen:

$$\forall n\, \exists m\, \Big(\mathsf{Gerade}(m) \land (m > n)\Big)$$

- **Beweis.** Sei n eine beliebige natürliche Zahl. Wir definieren $m := 2(n+1)$. Dann ist m offenbar durch 2 teilbar und damit gerade. Weiterhin gilt $m - n = 2(n+1) - n = n + 2 > 0$ und damit ist $m > n$. $\square$

- Einführung in die Mengenlehre

- Einführung in die Mengenlehre
- Beziehungen zwischen Mengen (Gleichheit, Teilmengen)

- Einführung in die Mengenlehre
- Beziehungen zwischen Mengen (Gleichheit, Teilmengen)
- Standardoperationen auf Mengen

Wir beginnen mit einer "naiven" Definition des Begriffs ’Menge’.

Wir beginnen mit einer "naiven" Definition des Begriffs ’Menge’. Diese Definition erfasst sehr gut unsere Intuition was Mengen sein sollen.

Wir beginnen mit einer "naiven" Definition des Begriffs ’Menge’. Diese Definition erfasst sehr gut unsere Intuition was Mengen sein sollen. Es ist allerdings zu beachten, dass diese Definition präzisiert werden müsste, Wir beginnen mit einer "naiven" Definition des Begriffs ’Menge’. Diese Definition erfasst sehr gut unsere Intuition was Mengen sein sollen. Es ist allerdings zu beachten, dass diese Definition präzisiert werden müsste, um den Normen der modernen Mathematik zu genügen.

Wir beginnen mit einer "naiven" Definition des Begriffs 'Menge'. Diese Definition erfasst sehr gut unsere Intuition was Mengen sein sollen. Es ist allerdings zu beachten, dass diese Definition präzisiert werden müsste, um den Normen der modernen Mathematik zu genügen. Deswegen benutzt man Begriff "naive Mangelehre" manchmal.

Wir beginnen mit einer "naiven" Definition des Begriffs ’Menge’. Diese Definition erfasst sehr gut unsere Intuition was Mengen sein sollen. Es ist allerdings zu beachten, dass diese Definition präzisiert werden müsste, um den Normen der modernen Mathematik zu genügen. Deswegen benutzt man Begriff “naive Mangelehre” manchmal.

Definition. *(Georg Cantor 1895)*

Wir beginnen mit einer "naiven" Definition des Begriffs 'Menge'. Diese Definition erfasst sehr gut unsere Intuition was Mengen sein sollen. Es ist allerdings zu beachten, dass diese Definition präzisiert werden müsste, um den Normen der modernen Mathematik zu genügen. Deswegen benutzt man Begriff "naive Mangelehre" manchmal.

Definition. *(Georg Cantor 1895) Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von unterscheidbaren Objekten zu einem Ganzen.*

Wir beginnen mit einer "naiven" Definition des Begriffs 'Menge'. Diese Definition erfasst sehr gut unsere Intuition was Mengen sein sollen. Es ist allerdings zu beachten, dass diese Definition präzisiert werden müsste, um den Normen der modernen Mathematik zu genügen. Deswegen benutzt man Begriff “naive Mangelehre” manchmal.

Definition. *(Georg Cantor 1895) Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von unterscheidbaren Objekten zu einem Ganzen. Die zusammengefassten Objekte heißen Elemente von M.*

Beispiele und Notation.

Beispiele und Notation.

- Lkw sei die Menge aller Lastkraftwagen.

Beispiele und Notation.

- Lkw sei die Menge aller Lastkraftwagen.
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bezeichnen jeweils die Mengen

Beispiele und Notation.

- Lkw sei die Menge aller Lastkraftwagen.
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bezeichnen jeweils die Mengen aller natürlichen Zahlen,

Beispiele und Notation.

- Lkw sei die Menge aller Lastkraftwagen.
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bezeichnen jeweils die Mengen aller natürlichen Zahlen, aller ganzen Zahlen,

Beispiele und Notation.

- Lkw sei die Menge aller Lastkraftwagen.
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bezeichnen jeweils die Mengen aller natürlichen Zahlen, aller ganzen Zahlen, aller rationalen Zahlen

Beispiele und Notation.

- Lkw sei die Menge aller Lastkraftwagen.
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bezeichnen jeweils die Mengen aller natürlichen Zahlen, aller ganzen Zahlen, aller rationalen Zahlen und aller reellen Zahlen.

Beispiele und Notation.

- Lkw sei die Menge aller Lastkraftwagen.
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bezeichnen jeweils die Mengen aller natürlichen Zahlen, aller ganzen Zahlen, aller rationalen Zahlen und aller reellen Zahlen. In diesem Modul wird angenommen, dass $0 \in \mathbb{N}$.

Beispiele und Notation.

- Lkw sei die Menge aller Lastkraftwagen.
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bezeichnen jeweils die Mengen aller natürlichen Zahlen, aller ganzen Zahlen, aller rationalen Zahlen und aller reellen Zahlen. In diesem Modul wird angenommen, dass $0 \in \mathbb{N}$.
-

Beispiele und Notation.

- Lkw sei die Menge aller Lastkraftwagen.
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bezeichnen jeweils die Mengen aller natürlichen Zahlen, aller ganzen Zahlen, aller rationalen Zahlen und aller reellen Zahlen. In diesem Modul wird angenommen, dass $0 \in \mathbb{N}$.
- Vollständige oder unvollständige Aufzählung:

Beispiele und Notation.

- Lkw sei die Menge aller Lastkraftwagen.
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bezeichnen jeweils die Mengen aller natürlichen Zahlen, aller ganzen Zahlen, aller rationalen Zahlen und aller reellen Zahlen. In diesem Modul wird angenommen, dass $0 \in \mathbb{N}$.
- Vollständige oder unvollständige Aufzählung: $\{1, 2, 3\}$ bzw. $\{0, 1, 2, \ldots\}$

Beispiele und Notation.

- Lkw sei die Menge aller Lastkraftwagen.
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bezeichnen jeweils die Mengen aller natürlichen Zahlen, aller ganzen Zahlen, aller rationalen Zahlen und aller reellen Zahlen. In diesem Modul wird angenommen, dass $0 \in \mathbb{N}$.
- Vollständige oder unvollständige Aufzählung: $\{1, 2, 3\}$ bzw. $\{0, 1, 2, \ldots\}$ Das Muster muss klar erkennbar sein.

Beispiele und Notation.

- Lkw sei die Menge aller Lastkraftwagen.
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bezeichnen jeweils die Mengen aller natürlichen Zahlen, aller ganzen Zahlen, aller rationalen Zahlen und aller reellen Zahlen. In diesem Modul wird angenommen, dass $0 \in \mathbb{N}$.
- Vollständige oder unvollständige Aufzählung: $\{1, 2, 3\}$ bzw. $\{0, 1, 2, \ldots\}$ Das Muster muss klar erkennbar sein.
- $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 2\} = \{2, 3, 1\}$,

Beispiele und Notation.

- Lkw sei die Menge aller Lastkraftwagen.
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bezeichnen jeweils die Mengen aller natürlichen Zahlen, aller ganzen Zahlen, aller rationalen Zahlen und aller reellen Zahlen. In diesem Modul wird angenommen, dass $0 \in \mathbb{N}$.
- Vollständige oder unvollständige Aufzählung: $\{1,\, 2,\, 3\}$ bzw. $\{0,\, 1,\, 2,\, \ldots\}$ Das Muster muss klar erkennbar sein.
- $\{1,\, 2,\, 3\} = \{1,\, 2,\, 3,\, 2\} = \{2,\, 3,\, 1\}$,
- Leere Menge: $\emptyset$ enthält keine Elemente.

Beispiele und Notation.

- Lkw sei die Menge aller Lastkraftwagen.
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bezeichnen jeweils die Mengen aller natürlichen Zahlen, aller ganzen Zahlen, aller rationalen Zahlen und aller reellen Zahlen. In diesem Modul wird angenommen, dass $0 \in \mathbb{N}$.
- Vollständige oder unvollständige Aufzählung: $\{1, 2, 3\}$ bzw. $\{0, 1, 2, \ldots\}$ Das Muster muss klar erkennbar sein.
- $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 2\} = \{2, 3, 1\}$,
- Leere Menge: $\emptyset$ enthält keine Elemente.
- $\{\emptyset\}$ ist eine Menge mit genau einem Element.

Beispiele und Notation.

- Lkw sei die Menge aller Lastkraftwagen.
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bezeichnen jeweils die Mengen aller natürlichen Zahlen, aller ganzen Zahlen, aller rationalen Zahlen und aller reellen Zahlen. In diesem Modul wird angenommen, dass $0 \in \mathbb{N}$.
- Vollständige oder unvollständige Aufzählung: $\{1, 2, 3\}$ bzw. $\{0, 1, 2, \ldots\}$ Das Muster muss klar erkennbar sein.
- $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 2\} = \{2, 3, 1\}$,
- Leere Menge: $\emptyset$ enthält keine Elemente.
- $\{\emptyset\}$ ist eine Menge mit genau einem Element. Dieses Element is die leere Menge.

- Für eine Menge M

- Für eine Menge M ist jedes Objekt x entweder ein Element von M

- Für eine Menge M ist jedes Objekt x entweder ein Element von M (kurz $x \in M$)

- Für eine Menge M ist jedes Objekt x entweder ein Element von M (kurz $x \in M$) oder nicht

- Für eine Menge M ist jedes Objekt x entweder ein Element von M (kurz $x \in M$) oder nicht (kurz $x \notin M$).

- Für eine Menge M ist jedes Objekt x entweder ein Element von M (kurz $x \in M$) oder nicht (kurz $x \notin M$).
- Insbesondere kann ein Element nicht mehrfach in einer Menge enthalten sein.

- Für eine Menge M ist jedes Objekt x entweder ein Element von M (kurz $x \in M$) oder nicht (kurz $x \notin M$).
- Insbesondere kann ein Element nicht mehrfach in einer Menge enthalten sein. $\{1, 1, 2\} = \{1.2\}$

- Für eine Menge M ist jedes Objekt x entweder ein Element von M (kurz $x \in M$) oder nicht (kurz $x \notin M$).

- Insbesondere kann ein Element nicht mehrfach in einer Menge enthalten sein.
$\{1, 1, 2\} = \{1.2\}$

- Die Elemente einer Menge

- Für eine Menge M ist jedes Objekt x entweder ein Element von M (kurz $x \in M$) oder nicht (kurz $x \notin M$).
- Insbesondere kann ein Element nicht mehrfach in einer Menge enthalten sein. $\{1, 1, 2\} = \{1.2\}$
- Die Elemente einer Menge können unterschiedlichen Typs

- Für eine Menge M ist jedes Objekt x entweder ein Element von M (kurz $x \in M$) oder nicht (kurz $x \notin M$).
- Insbesondere kann ein Element nicht mehrfach in einer Menge enthalten sein.
$\{1, 1, 2\} = \{1.2\}$
- Die Elemente einer Menge können unterschiedlichen Typs und sogar selbst wieder Mengen sein.

- Für eine Menge M ist jedes Objekt x entweder ein Element von M (kurz $x \in M$) oder nicht (kurz $x \notin M$).
- Insbesondere kann ein Element nicht mehrfach in einer Menge enthalten sein. $\{1, 1, 2\} = \{1.2\}$
- Die Elemente einer Menge können unterschiedlichen Typs und sogar selbst wieder Mengen sein. $\{\mathbb{R}, 2, \emptyset\}$

- Für eine Menge M ist jedes Objekt x entweder ein Element von M (kurz $x \in M$) oder nicht (kurz $x \notin M$).
- Insbesondere kann ein Element nicht mehrfach in einer Menge enthalten sein. $\{1,1,2\} = \{1.2\}$
- Die Elemente einer Menge können unterschiedlichen Typs und sogar selbst wieder Mengen sein. $\{\mathbb{R}, 2, \emptyset\}$
- Die Elemente einer Menge haben keine Anordnung;

- Für eine Menge M ist jedes Objekt x entweder ein Element von M (kurz $x \in M$) oder nicht (kurz $x \notin M$).
- Insbesondere kann ein Element nicht mehrfach in einer Menge enthalten sein. $\{1, 1, 2\} = \{1.2\}$
- Die Elemente einer Menge können unterschiedlichen Typs und sogar selbst wieder Mengen sein. $\{\mathbb{R}, 2, \emptyset\}$
- Die Elemente einer Menge haben keine Anordnung; ihre Reihenfolge ist irrelevant.

- Für eine Menge M ist jedes Objekt x entweder ein Element von M (kurz $x \in M$) oder nicht (kurz $x \notin M$).

- Insbesondere kann ein Element nicht mehrfach in einer Menge enthalten sein. $\{1, 1, 2\} = \{1.2\}$

- Die Elemente einer Menge können unterschiedlichen Typs und sogar selbst wieder Mengen sein. $\{\mathbb{R}, 2, \emptyset\}$

- Die Elemente einer Menge haben keine Anordnung; ihre Reihenfolge ist irrelevant. $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$

- Für eine Menge M ist jedes Objekt x entweder ein Element von M (kurz $x \in M$) oder nicht (kurz $x \notin M$).
- Insbesondere kann ein Element nicht mehrfach in einer Menge enthalten sein. $\{1,1,2\} = \{1.2\}$
- Die Elemente einer Menge können unterschiedlichen Typs und sogar selbst wieder Mengen sein. $\{\mathbb{R}, 2, \emptyset\}$
- Die Elemente einer Menge haben keine Anordnung; ihre Reihenfolge ist irrelevant. $\{1,2,3\} = \{2,3,1\}$
- Außerdem gilt:

- Für eine Menge M ist jedes Objekt x entweder ein Element von M (kurz $x \in M$) oder nicht (kurz $x \notin M$).
- Insbesondere kann ein Element nicht mehrfach in einer Menge enthalten sein. $\{1, 1, 2\} = \{1.2\}$
- Die Elemente einer Menge können unterschiedlichen Typs und sogar selbst wieder Mengen sein. $\{\mathbb{R}, 2, \emptyset\}$
- Die Elemente einer Menge haben keine Anordnung; ihre Reihenfolge ist irrelevant. $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$
- Außerdem gilt: Jede Menge ist unterscheidbar von jedem ihrer Elemente,

- Für eine Menge M ist jedes Objekt x entweder ein Element von M (kurz $x \in M$) oder nicht (kurz $x \notin M$).
- Insbesondere kann ein Element nicht mehrfach in einer Menge enthalten sein. $\{1, 1, 2\} = \{1.2\}$
- Die Elemente einer Menge können unterschiedlichen Typs und sogar selbst wieder Mengen sein. $\{\mathbb{R}, 2, \emptyset\}$
- Die Elemente einer Menge haben keine Anordnung; ihre Reihenfolge ist irrelevant. $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$
- Außerdem gilt: Jede Menge ist unterscheidbar von jedem ihrer Elemente, auch wenn Sie genau ein Element enthält.

- Für eine Menge M ist jedes Objekt x entweder ein Element von M (kurz $x \in M$) oder nicht (kurz $x \notin M$).
- Insbesondere kann ein Element nicht mehrfach in einer Menge enthalten sein. $\{1, 1, 2\} = \{1.2\}$
- Die Elemente einer Menge können unterschiedlichen Typs und sogar selbst wieder Mengen sein. $\{\mathbb{R}, 2, \emptyset\}$
- Die Elemente einer Menge haben keine Anordnung; ihre Reihenfolge ist irrelevant. $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$
- Außerdem gilt: Jede Menge ist unterscheidbar von jedem ihrer Elemente, auch wenn Sie genau ein Element enthält. $\{3\} \neq 3$.

- Für eine Menge M ist jedes Objekt x entweder ein Element von M (kurz $x \in M$) oder nicht (kurz $x \notin M$).
- Insbesondere kann ein Element nicht mehrfach in einer Menge enthalten sein. $\{1, 1, 2\} = \{1.2\}$
- Die Elemente einer Menge können unterschiedlichen Typs und sogar selbst wieder Mengen sein. $\{\mathbb{R}, 2, \emptyset\}$
- Die Elemente einer Menge haben keine Anordnung; ihre Reihenfolge ist irrelevant. $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$
- Außerdem gilt: Jede Menge ist unterscheidbar von jedem ihrer Elemente, auch wenn Sie genau ein Element enthält. $\{3\} \neq 3$.
- Wir verkürzen

- Für eine Menge M ist jedes Objekt x entweder ein Element von M (kurz $x \in M$) oder nicht (kurz $x \notin M$).

- Insbesondere kann ein Element nicht mehrfach in einer Menge enthalten sein. $\{1, 1, 2\} = \{1.2\}$

- Die Elemente einer Menge können unterschiedlichen Typs und sogar selbst wieder Mengen sein. $\{\mathbb{R}, 2, \emptyset\}$

- Die Elemente einer Menge haben keine Anordnung; ihre Reihenfolge ist irrelevant. $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$

- Außerdem gilt: Jede Menge ist unterscheidbar von jedem ihrer Elemente, auch wenn Sie genau ein Element enthält. $\{3\} \neq 3$.

- Wir verkürzen "$x \in M$ und $y \in M$"

- Für eine Menge M ist jedes Objekt x entweder ein Element von M (kurz $x \in M$) oder nicht (kurz $x \notin M$).
- Insbesondere kann ein Element nicht mehrfach in einer Menge enthalten sein. $\{1, 1, 2\} = \{1.2\}$
- Die Elemente einer Menge können unterschiedlichen Typs und sogar selbst wieder Mengen sein. $\{\mathbb{R}, 2, \emptyset\}$
- Die Elemente einer Menge haben keine Anordnung; ihre Reihenfolge ist irrelevant. $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$
- Außerdem gilt: Jede Menge ist unterscheidbar von jedem ihrer Elemente, auch wenn Sie genau ein Element enthält. $\{3\} \neq 3$.
- Wir verkürzen "$x \in M$ und $y \in M$" einfach zu "$x, y \in M$".

- Für eine Menge M ist jedes Objekt x entweder ein Element von M (kurz $x \in M$) oder nicht (kurz $x \notin M$).
- Insbesondere kann ein Element nicht mehrfach in einer Menge enthalten sein. $\{1, 1, 2\} = \{1.2\}$
- Die Elemente einer Menge können unterschiedlichen Typs und sogar selbst wieder Mengen sein. $\{\mathbb{R}, 2, \emptyset\}$
- Die Elemente einer Menge haben keine Anordnung; ihre Reihenfolge ist irrelevant. $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$
- Außerdem gilt: Jede Menge ist unterscheidbar von jedem ihrer Elemente, auch wenn Sie genau ein Element enthält. $\{3\} \neq 3$.
- Wir verkürzen "$x \in M$ und $y \in M$" einfach zu "$x, y \in M$". Wenn wir $x, y, z \in \{1,\ 2,\ 3\}$ schreiben,

- Für eine Menge M ist jedes Objekt x entweder ein Element von M (kurz $x \in M$) oder nicht (kurz $x \notin M$).
- Insbesondere kann ein Element nicht mehrfach in einer Menge enthalten sein. $\{1, 1, 2\} = \{1.2\}$
- Die Elemente einer Menge können unterschiedlichen Typs und sogar selbst wieder Mengen sein. $\{\mathbb{R}, 2, \emptyset\}$
- Die Elemente einer Menge haben keine Anordnung; ihre Reihenfolge ist irrelevant. $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$
- Außerdem gilt: Jede Menge ist unterscheidbar von jedem ihrer Elemente, auch wenn Sie genau ein Element enthält. $\{3\} \neq 3$.
- Wir verkürzen "$x \in M$ und $y \in M$" einfach zu "$x, y \in M$". Wenn wir $x, y, z \in \{1,\ 2,\ 3\}$ schreiben, durchaus $x = y = z$ gelten kann.

Beispiel.

Beispiel. Welche Aussagen gelten für

Beispiel. Welche Aussagen gelten für

$$M = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

?

Beispiel. Welche Aussagen gelten für

$$M = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

?

- $\emptyset \in M$

Beispiel. Welche Aussagen gelten für

$$M = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

?

- $\emptyset \in M$
- $\{\emptyset\} \in M$

Beispiel. Welche Aussagen gelten für

$$M = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

?

- $\emptyset \in M$
- $\{\emptyset\} \in M$
- $\{\{\emptyset\}\} \in M$

Beispiel. Welche Aussagen gelten für

$$M = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

?

- $\emptyset \in M$
- $\{\emptyset\} \in M$
- $\{\{\emptyset\}\} \in M$ falsch

- Zwei Mengen M und N sind gleich,

- Zwei Mengen M und N sind gleich, kurz $M = N$,

- Zwei Mengen M und N sind gleich, kurz $M = N$, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten.

- Zwei Mengen M und N sind gleich, kurz $M = N$, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten.
- Insbesondere gibt es genau eine Menge

- Zwei Mengen M und N sind gleich, kurz $M = N$, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten.
- Insbesondere gibt es genau eine Menge die enthält keine Elemente,

- Zwei Mengen M und N sind gleich, kurz $M = N$, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten.
- Insbesondere gibt es genau eine Menge die enthält keine Elemente, nämlich $\emptyset$.

- Zwei Mengen M und N sind gleich, kurz $M = N$, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten.
- Insbesondere gibt es genau eine Menge die enthält keine Elemente, nämlich $\emptyset$.
- Eine Menge M ist eine Teilmenge

- Zwei Mengen M und N sind gleich, kurz $M = N$, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten.
- Insbesondere gibt es genau eine Menge die enthält keine Elemente, nämlich $\emptyset$.
- Eine Menge M ist eine Teilmenge von der Menge N,

- Zwei Mengen M und N sind gleich, kurz $M = N$, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten.
- Insbesondere gibt es genau eine Menge die enthält keine Elemente, nämlich $\emptyset$.
- Eine Menge M ist eine Teilmenge von der Menge N, kurz $M \subseteq N$,

- Zwei Mengen M und N sind **gleich**, kurz $M = N$, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten.
- Insbesondere gibt es genau eine Menge die enthält keine Elemente, nämlich $\emptyset$.
- Eine Menge M ist eine **Teilmenge** von der Menge N, kurz $M \subseteq N$, falls jedes Element von M

- Zwei Mengen M und N sind gleich, kurz $M = N$, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten.
- Insbesondere gibt es genau eine Menge die enthält keine Elemente, nämlich $\emptyset$.
- Eine Menge M ist eine Teilmenge von der Menge N, kurz $M \subseteq N$, falls jedes Element von M auch Element von N ist.

- Zwei Mengen M und N sind gleich, kurz $M = N$, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten.
- Insbesondere gibt es genau eine Menge die enthält keine Elemente, nämlich $\emptyset$.
- Eine Menge M ist eine Teilmenge von der Menge N, kurz $M \subseteq N$, falls jedes Element von M auch Element von N ist. Formal:

- Zwei Mengen M und N sind gleich, kurz $M = N$, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten.
- Insbesondere gibt es genau eine Menge die enthält keine Elemente, nämlich $\emptyset$.
- Eine Menge M ist eine Teilmenge von der Menge N, kurz $M \subseteq N$, falls jedes Element von M auch Element von N ist. Formal:

$M \subseteq N$

- Zwei Mengen M und N sind gleich, kurz $M = N$, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten.
- Insbesondere gibt es genau eine Menge die enthält keine Elemente, nämlich $\emptyset$.
- Eine Menge M ist eine Teilmenge von der Menge N, kurz $M \subseteq N$, falls jedes Element von M auch Element von N ist. Formal:

$$M \subseteq N \iff$$

- Zwei Mengen M und N sind gleich, kurz $M = N$, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten.
- Insbesondere gibt es genau eine Menge die enthält keine Elemente, nämlich $\emptyset$.
- Eine Menge M ist eine Teilmenge von der Menge N, kurz $M \subseteq N$, falls jedes Element von M auch Element von N ist. Formal:

$$M \subseteq N \iff \forall m$$

- Zwei Mengen M und N sind **gleich**, kurz $M = N$, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten.
- Insbesondere gibt es genau eine Menge die enthält keine Elemente, nämlich $\emptyset$.
- Eine Menge M ist eine **Teilmenge** von der Menge N, kurz $M \subseteq N$, falls jedes Element von M auch Element von N ist. Formal:

$$M \subseteq N \iff \forall m \; \big((m \in M)$$

- Zwei Mengen M und N sind gleich, kurz $M = N$, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten.
- Insbesondere gibt es genau eine Menge die enthält keine Elemente, nämlich $\emptyset$.
- Eine Menge M ist eine Teilmenge von der Menge N, kurz $M \subseteq N$, falls jedes Element von M auch Element von N ist. Formal:

$$M \subseteq N \iff \forall m \, ((m \in M) \to$$

- Zwei Mengen M und N sind gleich, kurz $M = N$, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten.
- Insbesondere gibt es genau eine Menge die enthält keine Elemente, nämlich $\emptyset$.
- Eine Menge M ist eine Teilmenge von der Menge N, kurz $M \subseteq N$, falls jedes Element von M auch Element von N ist. Formal:

$$M \subseteq N \iff \forall m \, \big((m \in M) \to (m \in N)\big).$$

$$M = N$$

- Zwei Mengen M und N sind gleich, kurz $M = N$, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten.
- Insbesondere gibt es genau eine Menge die enthält keine Elemente, nämlich $\emptyset$.
- Eine Menge M ist eine Teilmenge von der Menge N, kurz $M \subseteq N$, falls jedes Element von M auch Element von N ist. Formal:

$$M \subseteq N \iff \forall m \left((m \in M) \to (m \in N)\right).$$

$$M = N \iff$$

- Zwei Mengen M und N sind gleich, kurz $M = N$, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten.
- Insbesondere gibt es genau eine Menge die enthält keine Elemente, nämlich $\emptyset$.
- Eine Menge M ist eine Teilmenge von der Menge N, kurz $M \subseteq N$, falls jedes Element von M auch Element von N ist. Formal:

$$M \subseteq N \iff \forall m \left((m \in M) \to (m \in N)\right).$$

$$M = N \iff \forall m\left((m \in M) \to (m \in N)\right)$$

- Zwei Mengen M und N sind gleich, kurz $M = N$, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten.
- Insbesondere gibt es genau eine Menge die enthält keine Elemente, nämlich $\emptyset$.
- Eine Menge M ist eine Teilmenge von der Menge N, kurz $M \subseteq N$, falls jedes Element von M auch Element von N ist. Formal:

$$M \subseteq N \iff \forall m \, \big((m \in M) \to (m \in N)\big).$$

$$M = N \iff \forall m\big((m \in M) \to (m \in N)\big) \wedge$$

- Zwei Mengen M und N sind gleich, kurz $M = N$, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten.
- Insbesondere gibt es genau eine Menge die enthält keine Elemente, nämlich $\emptyset$.
- Eine Menge M ist eine Teilmenge von der Menge N, kurz $M \subseteq N$, falls jedes Element von M auch Element von N ist. Formal:

$$M \subseteq N \iff \forall m \left((m \in M) \to (m \in N)\right).$$

$$M = N \iff \forall m\left((m \in M) \to (m \in N)\right) \land \forall n$$

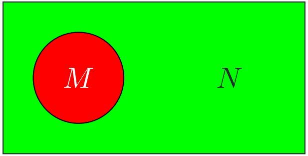
- Zwei Mengen M und N sind gleich, kurz $M = N$, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten.

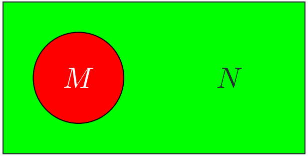
- Insbesondere gibt es genau eine Menge die enthält keine Elemente, nämlich $\emptyset$.

- Eine Menge M ist eine Teilmenge von der Menge N, kurz $M \subseteq N$, falls jedes Element von M auch Element von N ist. Formal:

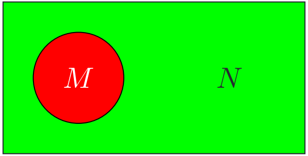
$$M \subseteq N \iff \forall m \left((m \in M) \to (m \in N)\right).$$

$$M = N \iff \forall m\left((m \in M) \to (m \in N)\right) \land \forall n \left((n \in N) \to (n \in M)\right),$$

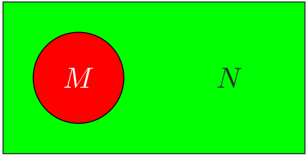

M
N



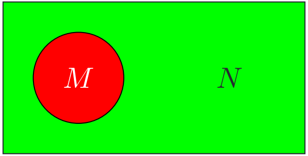
- Man schreibt gelegentlich auch $N \supseteq M$



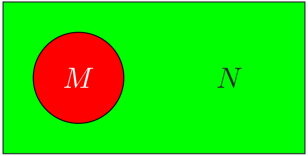
- Man schreibt gelegentlich auch $N \supseteq M$ (anstelle $M \subseteq N$)



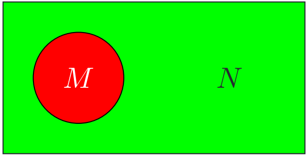
- Man schreibt gelegentlich auch $N \supseteq M$ (anstelle $M \subseteq N$) und nennt N Obermenge von M.



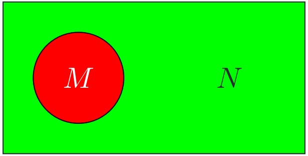
- Man schreibt gelegentlich auch $N \supseteq M$ (anstelle $M \subseteq N$) und nennt N Obermenge von M.
- Wir sprechen von einer echten Teilmenge



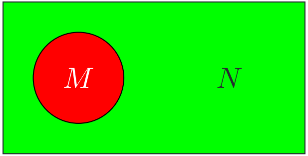
- Man schreibt gelegentlich auch $N \supseteq M$ (anstelle $M \subseteq N$) und nennt N Obermenge von M.
- Wir sprechen von einer echten Teilmenge und schreiben $M \subsetneq N$,



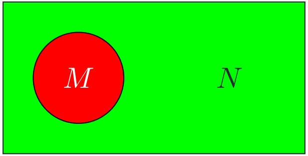
- Man schreibt gelegentlich auch $N \supseteq M$ (anstelle $M \subseteq N$) und nennt N Obermenge von M.
- Wir sprechen von einer echten Teilmenge und schreiben $M \subsetneq N$, falls $M \subseteq N$



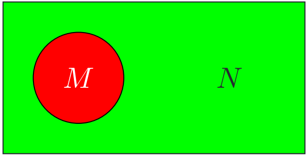
- Man schreibt gelegentlich auch $N \supseteq M$ (anstelle $M \subseteq N$) und nennt N Obermenge von M.
- Wir sprechen von einer echten Teilmenge und schreiben $M \subsetneq N$, falls $M \subseteq N$ und $M \neq N$.



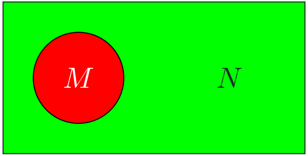
- Man schreibt gelegentlich auch $N \supseteq M$ (anstelle $M \subseteq N$) und nennt N Obermenge von M.
- Wir sprechen von einer echten Teilmenge und schreiben $M \subsetneq N$, falls $M \subseteq N$ und $M \neq N$.
- $\emptyset \subseteq M$



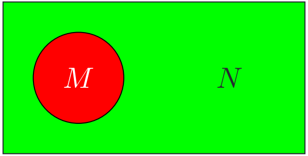
- Man schreibt gelegentlich auch $N \supseteq M$ (anstelle $M \subseteq N$) und nennt N Obermenge von M.
- Wir sprechen von einer echten Teilmenge und schreiben $M \subsetneq N$, falls $M \subseteq N$ und $M \neq N$.
- $\emptyset \subseteq M$ und $M \subseteq M$



- Man schreibt gelegentlich auch $N \supseteq M$ (anstelle $M \subseteq N$) und nennt N Obermenge von M.
- Wir sprechen von einer echten Teilmenge und schreiben $M \subsetneq N$, falls $M \subseteq N$ und $M \neq N$.
- $\emptyset \subseteq M$ und $M \subseteq M$ für jede Menge M,



- Man schreibt gelegentlich auch $N \supseteq M$ (anstelle $M \subseteq N$) und nennt N Obermenge von M.
- Wir sprechen von einer echten Teilmenge und schreiben $M \subsetneq N$, falls $M \subseteq N$ und $M \neq N$.
- $\emptyset \subseteq M$ und $M \subseteq M$ für jede Menge M,
- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.



- Man schreibt gelegentlich auch $N \supseteq M$ (anstelle $M \subseteq N$) und nennt N Obermenge von M.
- Wir sprechen von einer echten Teilmenge und schreiben $M \subsetneq N$, falls $M \subseteq N$ und $M \neq N$.
- $\emptyset \subseteq M$ und $M \subseteq M$ für jede Menge M,
- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Alle Inklusionen sind hier echt.

Satz.

Satz. *Für alle Mengen M und N gilt:*

Satz. *Für alle Mengen M und N gilt:* $M = N$

Satz. *Für alle Mengen M und N gilt:* $M = N \iff$

Satz. *Für alle Mengen M und N gilt:* $M = N \iff M \subseteq N$ *und* $N \subseteq M$*.*

Satz. *Für alle Mengen M und N gilt:* $M = N \iff M \subseteq N$ *und* $N \subseteq M$.

Beweis.

Satz. *Für alle Mengen M und N gilt:* $M = N \iff M \subseteq N$ *und* $N \subseteq M$.

Beweis. Durch Einsetzen der Definitionen:

$$M = N$$

Satz. *Für alle Mengen M und N gilt:* $M = N \iff M \subseteq N$ *und* $N \subseteq M$.

Beweis. Durch Einsetzen der Definitionen:

$$M = N$$

ist äq. zu

Satz. *Für alle Mengen M und N gilt:* $M = N \iff M \subseteq N$ *und* $N \subseteq M$.

Beweis. Durch Einsetzen der Definitionen:

$$M = N$$

ist äq. zu

$\forall m$

Satz. *Für alle Mengen M und N gilt:* $M = N \iff M \subseteq N$ *und* $N \subseteq M$.

Beweis. Durch Einsetzen der Definitionen:

$$M = N$$

ist äq. zu

$\forall m \ \big((m \in M) \to (m \in N)\big)$

Satz. *Für alle Mengen M und N gilt:* $M = N \iff M \subseteq N$ *und* $N \subseteq M$.

Beweis. Durch Einsetzen der Definitionen:

$$M = N$$

ist äq. zu

$$\forall m \; \big((m \in M) \to (m \in N)\big) \;\; \wedge$$

Satz. *Für alle Mengen M und N gilt:* $M = N \iff M \subseteq N$ *und* $N \subseteq M$.

Beweis. Durch Einsetzen der Definitionen:

$$M = N$$

ist äq. zu

$$\forall m \ \big((m \in M) \to (m \in N)\big) \ \wedge \ \forall n\big((n \in N) \to (n \in M)\big)$$

Satz. *Für alle Mengen M und N gilt:* $M = N \iff M \subseteq N$ *und* $N \subseteq M$.

Beweis. Durch Einsetzen der Definitionen:

$$M = N$$

ist äq. zu

$$\forall m \; \big((m \in M) \to (m \in N)\big) \; \wedge \; \forall n\big((n \in N) \to (n \in M)\big)$$

ist äq. zu

$$(M \subseteq N)$$

Satz. *Für alle Mengen M und N gilt:* $M = N \iff M \subseteq N$ *und* $N \subseteq M$.

Beweis. Durch Einsetzen der Definitionen:

$$M = N$$

ist äq. zu

$$\forall m\ \big((m \in M) \to (m \in N)\big)\ \wedge\ \forall n\big((n \in N) \to (n \in M)\big)$$

ist äq. zu

$$(M \subseteq N)\ \wedge$$

Satz. *Für alle Mengen M und N gilt:* $M = N \iff M \subseteq N$ *und* $N \subseteq M$.

Beweis. Durch Einsetzen der Definitionen:

$$M = N$$

ist äq. zu

$$\forall m \ \big((m \in M) \to (m \in N)\big) \ \land \ \forall n\big((n \in N) \to (n \in M)\big)$$

ist äq. zu

$$(M \subseteq N) \ \land \ (N \subseteq M)$$

Satz. *Für alle Mengen M und N gilt:* $M = N \iff M \subseteq N$ *und* $N \subseteq M$.

Beweis. Durch Einsetzen der Definitionen:

$$M = N$$

ist äq. zu

$$\forall m\ \big((m \in M) \to (m \in N)\big)\ \land\ \forall n\big((n \in N) \to (n \in M)\big)$$

ist äq. zu

$$(M \subseteq N)\ \land\ (N \subseteq M) \qquad \square$$

Die einstelligen Prädikate

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x),

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x), Gerade(x),

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x), Gerade(x), Rat(x))

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x), Gerade(x), Rat(x))
- Wir können die Objekte,

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x), Gerade(x), Rat(x))
- Wir können die Objekte, für die $P(x)$ wahr ist,

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x), Gerade(x), Rat(x))
- Wir können die Objekte, für die $P(x)$ wahr ist, in eine Menge zusammenfassen.

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x), Gerade(x), Rat(x))
- Wir können die Objekte, für die $P(x)$ wahr ist, in eine Menge zusammenfassen.
- Beispiele

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x), Gerade(x), Rat(x))
- Wir können die Objekte, für die $P(x)$ wahr ist, in eine Menge zusammenfassen.
- Beispiele
  - $\{L \in \text{Lkw} \mid \text{hatFisch}(L)\}$

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x), Gerade(x), Rat(x))
- Wir können die Objekte, für die $P(x)$ wahr ist, in eine Menge zusammenfassen.
- Beispiele
  - $\{L \in \text{Lkw} \mid \text{hatFisch}(L)\}$ oder

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x), Gerade(x), Rat(x))
- Wir können die Objekte, für die $P(x)$ wahr ist, in eine Menge zusammenfassen.
- Beispiele
  - $\{L \in \text{Lkw} \mid \text{hatFisch}(L)\}$ oder $\{L \in \text{Lkw} : \text{hatFisch}(L)\}$

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x), Gerade(x), Rat(x))
- Wir können die Objekte, für die $P(x)$ wahr ist, in eine Menge zusammenfassen.
- Beispiele
  - $\{L \in \text{Lkw} \mid \text{hatFisch}(L)\}$ oder $\{L \in \text{Lkw} : \text{hatFisch}(L)\}$

    Die Menge enthält genau die Elemente L

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x), Gerade(x), Rat(x))
- Wir können die Objekte, für die $P(x)$ wahr ist, in eine Menge zusammenfassen.
- Beispiele
  - $\{L \in \text{Lkw} \mid \text{hatFisch}(L)\}$ oder $\{L \in \text{Lkw} : \text{hatFisch}(L)\}$

    Die Menge enthält genau die Elemente L von Lkw,

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x), Gerade(x), Rat(x))
- Wir können die Objekte, für die $P(x)$ wahr ist, in eine Menge zusammenfassen.
- Beispiele
  - $\{L \in \text{Lkw} \mid \text{hatFisch}(L)\}$ oder $\{L \in \text{Lkw} : \text{hatFisch}(L)\}$

    Die Menge enthält genau die Elemente L von Lkw, für die hatFisch(L)

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x), Gerade(x), Rat(x))
- Wir können die Objekte, für die $P(x)$ wahr ist, in eine Menge zusammenfassen.
- Beispiele
  - $\{L \in \text{Lkw} \mid \text{hatFisch}(L)\}$ oder $\{L \in \text{Lkw} : \text{hatFisch}(L)\}$

    Die Menge enthält genau die Elemente L von Lkw, für die hatFisch(L) wahr ist.

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x), Gerade(x), Rat(x))
- Wir können die Objekte, für die $P(x)$ wahr ist, in eine Menge zusammenfassen.
- Beispiele
  - $\{L \in \text{Lkw} \mid \text{hatFisch}(L)\}$ oder $\{L \in \text{Lkw} : \text{hatFisch}(L)\}$

    Die Menge enthält genau die Elemente L von Lkw, für die hatFisch(L) wahr ist.
  - $\{n \in \mathbb{N} \mid$

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x), Gerade(x), Rat(x))
- Wir können die Objekte, für die $P(x)$ wahr ist, in eine Menge zusammenfassen.
- Beispiele
  - $\{L \in \text{Lkw} \mid \text{hatFisch}(L)\}$ oder $\{L \in \text{Lkw} : \text{hatFisch}(L)\}$

    Die Menge enthält genau die Elemente L von Lkw, für die hatFisch(L) wahr ist.
  - $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Gerade}(n)\} =$

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x), Gerade(x), Rat(x))
- Wir können die Objekte, für die $P(x)$ wahr ist, in eine Menge zusammenfassen.
- Beispiele
  - $\{L \in \text{Lkw} \mid \text{hatFisch}(L)\}$ oder $\{L \in \text{Lkw} : \text{hatFisch}(L)\}$

    Die Menge enthält genau die Elemente L von Lkw, für die hatFisch(L) wahr ist.
  - $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Gerade}(n)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid$

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x), Gerade(x), Rat(x))
- Wir können die Objekte, für die $P(x)$ wahr ist, in eine Menge zusammenfassen.
- Beispiele
  - $\{L \in \text{Lkw} \mid \text{hatFisch}(L)\}$ oder $\{L \in \text{Lkw} : \text{hatFisch}(L)\}$

    Die Menge enthält genau die Elemente L von Lkw, für die hatFisch(L) wahr ist.
  - $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Gerade}(n)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ durch 2 teilbar}\} =$

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x), Gerade(x), Rat(x))
- Wir können die Objekte, für die $P(x)$ wahr ist, in eine Menge zusammenfassen.
- Beispiele
  - $\{L \in \text{Lkw} \mid \text{hatFisch}(L)\}$ oder $\{L \in \text{Lkw} : \text{hatFisch}(L)\}$

    Die Menge enthält genau die Elemente L von Lkw, für die hatFisch(L) wahr ist.
  - $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Gerade}(n)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ durch 2 teilbar}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid$

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x), Gerade(x), Rat(x))
- Wir können die Objekte, für die $P(x)$ wahr ist, in eine Menge zusammenfassen.
- Beispiele
  - $\{L \in \text{Lkw} \mid \text{hatFisch}(L)\}$ oder $\{L \in \text{Lkw} : \text{hatFisch}(L)\}$

    Die Menge enthält genau die Elemente L von Lkw, für die hatFisch(L) wahr ist.
  - $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{ Gerade}(n)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ durch 2 teilbar}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists h(h \in \mathbb{N}$

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x), Gerade(x), Rat(x))
- Wir können die Objekte, für die $P(x)$ wahr ist, in eine Menge zusammenfassen.
- Beispiele
  - $\{L \in \text{Lkw} \mid \text{hatFisch}(L)\}$ oder $\{L \in \text{Lkw} : \text{hatFisch}(L)\}$

    Die Menge enthält genau die Elemente L von Lkw, für die hatFisch(L) wahr ist.
  - $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Gerade}(n)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ durch 2 teilbar}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists h(h \in \mathbb{N} \wedge$

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x), Gerade(x), Rat(x))
- Wir können die Objekte, für die $P(x)$ wahr ist, in eine Menge zusammenfassen.
- Beispiele
  - $\{L \in \text{Lkw} \mid \text{hatFisch}(L)\}$ oder $\{L \in \text{Lkw} : \text{hatFisch}(L)\}$

    Die Menge enthält genau die Elemente L von Lkw, für die hatFisch(L) wahr ist.
  - $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Gerade}(n)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ durch 2 teilbar}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists h(h \in \mathbb{N} \wedge n = 2h)\}$.

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x), Gerade(x), Rat(x))
- Wir können die Objekte, für die $P(x)$ wahr ist, in eine Menge zusammenfassen.
- Beispiele
  - $\{L \in \text{Lkw} \mid \text{hatFisch}(L)\}$ oder $\{L \in \text{Lkw} : \text{hatFisch}(L)\}$

    Die Menge enthält genau die Elemente L von Lkw, für die hatFisch(L) wahr ist.
  - $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Gerade}(n)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ durch 2 teilbar}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists h(h \in \mathbb{N} \wedge n = 2h)\}$.
  - Wir haben auch

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x), Gerade(x), Rat(x))
- Wir können die Objekte, für die $P(x)$ wahr ist, in eine Menge zusammenfassen.
- Beispiele
  - $\{L \in \text{Lkw} \mid \text{hatFisch}(L)\}$ oder $\{L \in \text{Lkw} : \text{hatFisch}(L)\}$

    Die Menge enthält genau die Elemente L von Lkw, für die hatFisch(L) wahr ist.
  - $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Gerade}(n)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ durch 2 teilbar}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists h(h \in \mathbb{N} \wedge n = 2h)\}$.
  - Wir haben auch $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Gerade}(n)\}$

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x), Gerade(x), Rat(x))
- Wir können die Objekte, für die $P(x)$ wahr ist, in eine Menge zusammenfassen.
- Beispiele
  - ▶ $\{L \in \text{Lkw} \mid \text{hatFisch}(L)\}$ oder $\{L \in \text{Lkw} : \text{hatFisch}(L)\}$

    Die Menge enthält genau die Elemente L von Lkw, für die hatFisch(L) wahr ist.
  - ▶ $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Gerade}(n)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ durch 2 teilbar}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists h(h \in \mathbb{N} \land n = 2h)\}$.
  - ▶ Wir haben auch $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Gerade}(n)\} \subseteq$

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x), Gerade(x), Rat(x))
- Wir können die Objekte, für die $P(x)$ wahr ist, in eine Menge zusammenfassen.
- Beispiele
  - $\{L \in \text{Lkw} \mid \text{hatFisch}(L)\}$ oder $\{L \in \text{Lkw} : \text{hatFisch}(L)\}$

    Die Menge enthält genau die Elemente L von Lkw, für die hatFisch(L) wahr ist.
  - $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Gerade}(n)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ durch 2 teilbar}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists h(h \in \mathbb{N} \wedge n = 2h)\}$.
  - Wir haben auch $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Gerade}(n)\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 2 teilbar}\}$,

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x), Gerade(x), Rat(x))
- Wir können die Objekte, für die $P(x)$ wahr ist, in eine Menge zusammenfassen.
- Beispiele
  - $\{L \in \text{Lkw} \mid \text{hatFisch}(L)\}$ oder $\{L \in \text{Lkw} : \text{hatFisch}(L)\}$

    Die Menge enthält genau die Elemente L von Lkw, für die hatFisch(L) wahr ist.
  - $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Gerade}(n)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ durch 2 teilbar}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists h(h \in \mathbb{N} \wedge n = 2h)\}$.
  - Wir haben auch $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Gerade}(n)\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 2 teilbar}\}$,
  - $\{n \in \mathbb{N} \mid$

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x), Gerade(x), Rat(x))
- Wir können die Objekte, für die $P(x)$ wahr ist, in eine Menge zusammenfassen.
- Beispiele
  - $\{L \in$ Lkw | hatFisch$(L)\}$ oder $\{L \in$ Lkw : hatFisch$(L)\}$

    Die Menge enthält genau die Elemente L von Lkw, für die hatFisch(L) wahr ist.
  - $\{n \in \mathbb{N} \mid$ Gerade$(n)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ durch 2 teilbar$\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists h(h \in \mathbb{N} \wedge n = 2h)\}$.
  - Wir haben auch $\{n \in \mathbb{N} \mid$ Gerade$(n)\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n$ ist durch 2 teilbar$\}$,
  - $\{n \in \mathbb{N} \mid n$ ist durch 4 teilbar$\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid$

Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten der Form $P(x)$, die sagen ob eine spezielle Eigenschaft P für ein geg. Objekt x vorliegt.

- z.B. GanzeZahl(x), Gerade(x), Rat(x))
- Wir können die Objekte, für die $P(x)$ wahr ist, in eine Menge zusammenfassen.
- Beispiele
  - $\{L \in \text{Lkw} \mid \text{hatFisch}(L)\}$ oder $\{L \in \text{Lkw} : \text{hatFisch}(L)\}$

    Die Menge enthält genau die Elemente L von Lkw, für die hatFisch(L) wahr ist.
  - $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Gerade}(n)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ durch 2 teilbar}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists h(h \in \mathbb{N} \land n = 2h)\}$.
  - Wir haben auch $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Gerade}(n)\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 2 teilbar}\}$,
  - $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 4 teilbar}\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Gerade}(n)\}$.

Manchmal verwenden wir informell andere Methoden zur Definition von Mengen, Manchmal verwenden wir informell andere Methoden zur Definition von Mengen, die der obigen Methode mit Prädikaten ähneln, Manchmal verwenden wir informell andere Methoden zur Definition von Mengen, die der obigen Methode mit Prädikaten ähneln, aber bei näherer Betrachtung anders sind,

Manchmal verwenden wir informell andere Methoden zur Definition von Mengen, die der obigen Methode mit Prädikaten ähneln, aber bei näherer Betrachtung anders sind, z.B.

- $\{a + b \in \mathbb{R} \colon a \in \mathbb{Q}, b \in \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}\}$.

Manchmal verwenden wir informell andere Methoden zur Definition von Mengen, die der obigen Methode mit Prädikaten ähneln, aber bei näherer Betrachtung anders sind, z.B.

- $\{a + b \in \mathbb{R} \colon a \in \mathbb{Q}, b \in \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}\}$. Wenn wir es ganz formal schreiben wollen,

Manchmal verwenden wir informell andere Methoden zur Definition von Mengen, die der obigen Methode mit Prädikaten ähneln, aber bei näherer Betrachtung anders sind, z.B.

- $\{a + b \in \mathbb{R} \colon a \in \mathbb{Q}, b \in \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}\}$. Wenn wir es ganz formal schreiben wollen, würden wir schreiben

Manchmal verwenden wir informell andere Methoden zur Definition von Mengen, die der obigen Methode mit Prädikaten ähneln, aber bei näherer Betrachtung anders sind, z.B.

- $\{a+b \in \mathbb{R} \colon a \in \mathbb{Q}, b \in \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}\}$. Wenn wir es ganz formal schreiben wollen, würden wir schreiben

$$\{x \in \mathbb{R} \colon \exists a \in \mathbb{Q}, b \in \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\} \text{ so dass } x = a+b\}.$$

Manchmal verwenden wir informell andere Methoden zur Definition von Mengen, die der obigen Methode mit Prädikaten ähneln, aber bei näherer Betrachtung anders sind, z.B.

- $\{a+b \in \mathbb{R} \colon a \in \mathbb{Q}, b \in \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}\}$. Wenn wir es ganz formal schreiben wollen, würden wir schreiben

$$\{x \in \mathbb{R} \colon \exists a \in \mathbb{Q}, b \in \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\} \text{ so dass } x = a + b\}.$$

- Bei der Mengennotation bedeutet das Zeichen , immer "und".

Manchmal verwenden wir informell andere Methoden zur Definition von Mengen, die der obigen Methode mit Prädikaten ähneln, aber bei näherer Betrachtung anders sind, z.B.

- $\{a + b \in \mathbb{R} \colon a \in \mathbb{Q}, b \in \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}\}$. Wenn wir es ganz formal schreiben wollen, würden wir schreiben

$$\{x \in \mathbb{R} \colon \exists a \in \mathbb{Q}, b \in \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\} \text{ so dass } x = a + b\}.$$

- Bei der Mengennotation bedeutet das Zeichen , immer “und”. Z.B. $\{a \in \mathbb{Z} \colon 3 \mid a, 7 \nmid a\}$

Seien M und N Mengen.

Seien M und N Mengen.

- Die Vereinigung von M und N besteht aus den Elementen,

Seien M und N Mengen.

- Die Vereinigung von M und N besteht aus den Elementen, die Element von M **oder** Element von N sind:

Seien M und N Mengen.

- Die Vereinigung von M und N besteht aus den Elementen, die Element von M **oder** Element von N sind:

$$M \cup N = \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}.$$

Seien M und N Mengen.

- Die Vereinigung von M und N besteht aus den Elementen, die Element von M **oder** Element von N sind:
$$M \cup N = \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}.$$

- Der Schnitt von M und N

Seien M und N Mengen.

- Die Vereinigung von M und N besteht aus den Elementen, die Element von M **oder** Element von N sind:
$$M \cup N = \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}.$$

- Der Schnitt von M und N besteht aus den Elementen,

Seien M und N Mengen.

- Die Vereinigung von M und N besteht aus den Elementen, die Element von M **oder** Element von N sind:
$$M \cup N = \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}.$$

- Der Schnitt von M und N besteht aus den Elementen, die Element von M **und** von N sind:

Seien M und N Mengen.

- Die Vereinigung von M und N besteht aus den Elementen, die Element von M **oder** Element von N sind:

$$M \cup N = \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}.$$

- Der Schnitt von M und N besteht aus den Elementen, die Element von M **und** von N sind:

$$M \cap N =$$

Seien M und N Mengen.

- Die Vereinigung von M und N besteht aus den Elementen, die Element von M **oder** Element von N sind:
$$M \cup N = \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}.$$

- Der Schnitt von M und N besteht aus den Elementen, die Element von M **und** von N sind:

$$M \cap N = \{x \mid x \in M, x \in N\} =$$

Seien M und N Mengen.

- Die Vereinigung von M und N besteht aus den Elementen, die Element von M **oder** Element von N sind:

$$M \cup N = \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}.$$

- Der Schnitt von M und N besteht aus den Elementen, die Element von M **und** von N sind:

$$M \cap N = \{x \mid x \in M, x \in N\} = \{x \in M \mid x \in N\}.$$

- Die Differenz von M ohne N

- Die Differenz von M ohne N besteht aus den Elementen,

- Die Differenz von M ohne N besteht aus den Elementen, die Element von M, aber **nicht** Element von N sind:

- Die Differenz von M ohne N besteht aus den Elementen, die Element von M, aber **nicht** Element von N sind:

$$M \setminus N =$$

- Die Differenz von M ohne N besteht aus den Elementen, die Element von M, aber **nicht** Element von N sind:

$$M \setminus N = \{x \mid x \in M,$$

- Die Differenz von M ohne N besteht aus den Elementen, die Element von M, aber **nicht** Element von N sind:

$$M \setminus N = \{x \mid x \in M,\ x \notin N\} = \{x \in M$$

- Die Differenz von M ohne N besteht aus den Elementen, die Element von M, aber **nicht** Element von N sind:

$$M \setminus N = \{x \mid x \in M, \; x \notin N\} = \{x \in M \mid x \notin N\}.$$

- Die Differenz von M ohne N besteht aus den Elementen, die Element von M, aber **nicht** Element von N sind:

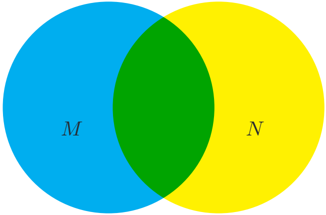
$$M \setminus N = \{x \mid x \in M, \ x \notin N\} = \{x \in M \mid x \notin N\}.$$

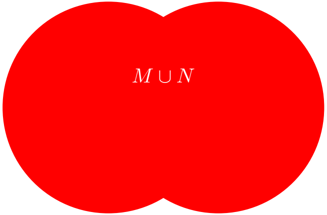
Venn-Diagramme illustrieren diese Definitionen.

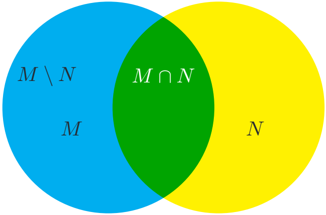
- Die Differenz von M ohne N besteht aus den Elementen, die Element von M, aber **nicht** Element von N sind:

$$M \setminus N = \{x \mid x \in M,\ x \notin N\} = \{x \in M \mid x \notin N\}.$$

Venn-Diagramme illustrieren diese Definitionen.







Im Kontext von Mengenoperationen gehen wir oft von einer Grundmenge U aus,

Im Kontext von Mengenoperationen gehen wir oft von einer Grundmenge U aus, in der alle betrachteten Mengen enthalten sind.

- Jede Menge M teilt U implizit in zwei Teile.

Im Kontext von Mengenoperationen gehen wir oft von einer Grundmenge U aus, in der alle betrachteten Mengen enthalten sind.

- Jede Menge M teilt U implizit in zwei Teile. Das Komplement von $M \subseteq U$

Im Kontext von Mengenoperationen gehen wir oft von einer Grundmenge U aus, in der alle betrachteten Mengen enthalten sind.

- Jede Menge M teilt U implizit in zwei Teile. Das Komplement von $M \subseteq U$ beinhaltet genau die Elemente von U,

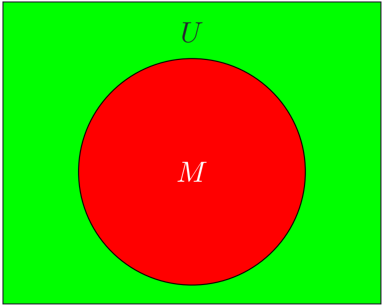
Im Kontext von Mengenoperationen gehen wir oft von einer Grundmenge U aus, in der alle betrachteten Mengen enthalten sind.

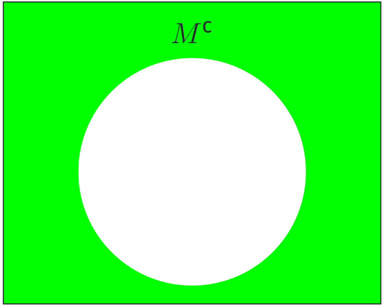
- Jede Menge M teilt U implizit in zwei Teile. Das Komplement von $M \subseteq U$ beinhaltet genau die Elemente von U, die nicht Elemente von M sind:

Im Kontext von Mengenoperationen gehen wir oft von einer Grundmenge U aus, in der alle betrachteten Mengen enthalten sind.

- Jede Menge M teilt U implizit in zwei Teile. Das Komplement von $M \subseteq U$ beinhaltet genau die Elemente von U, die nicht Elemente von M sind:

$$M^{\mathsf{c}} = \{u \in U \mid u \notin M\} = U \setminus M.$$


U
M


M^{c}

Gleiche Mengen	Bezeichnung

Gleiche Mengen		Bezeichnung
$A \cap B$	$B \cap A$	Kommutativität von $\cap$

Gleiche Mengen		Bezeichnung
$A \cap B$	$B \cap A$	Kommutativität von $\cap$
$A \cup B$	$B \cup A$	Kommutativität von $\cup$

Gleiche Mengen		Bezeichnung
$A \cap B$	$B \cap A$	Kommutativität von $\cap$
$A \cup B$	$B \cup A$	Kommutativität von $\cup$
$(A \cap B) \cap C$	$A \cap (B \cap C)$	Assoziativität von $\cap$

Gleiche Mengen		Bezeichnung
$A \cap B$	$B \cap A$	Kommutativität von $\cap$
$A \cup B$	$B \cup A$	Kommutativität von $\cup$
$(A \cap B) \cap C$	$A \cap (B \cap C)$	Assoziativität von $\cap$
$(A \cup B) \cup C$	$A \cup (B \cup C)$	Assoziativität von $\cup$

Gleiche Mengen		Bezeichnung
$A \cap B$	$B \cap A$	Kommutativität von $\cap$
$A \cup B$	$B \cup A$	Kommutativität von $\cup$
$(A \cap B) \cap C$	$A \cap (B \cap C)$	Assoziativität von $\cap$
$(A \cup B) \cup C$	$A \cup (B \cup C)$	Assoziativität von $\cup$
$A \cap (B \cup C)$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivität von $\cap$

Gleiche Mengen		Bezeichnung
$A \cap B$	$B \cap A$	Kommutativität von $\cap$
$A \cup B$	$B \cup A$	Kommutativität von $\cup$
$(A \cap B) \cap C$	$A \cap (B \cap C)$	Assoziativität von $\cap$
$(A \cup B) \cup C$	$A \cup (B \cup C)$	Assoziativität von $\cup$
$A \cap (B \cup C)$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivität von $\cap$
$A \cup (B \cap C)$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributivität von $\cup$

Gleiche Mengen		Bezeichnung
$A \cap B$	$B \cap A$	Kommutativität von $\cap$
$A \cup B$	$B \cup A$	Kommutativität von $\cup$
$(A \cap B) \cap C$	$A \cap (B \cap C)$	Assoziativität von $\cap$
$(A \cup B) \cup C$	$A \cup (B \cup C)$	Assoziativität von $\cup$
$A \cap (B \cup C)$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivität von $\cap$
$A \cup (B \cap C)$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributivität von $\cup$
$A \cap A$	A	Idempotenz von $\cap$

Gleiche Mengen		Bezeichnung
$A \cap B$	$B \cap A$	Kommutativität von $\cap$
$A \cup B$	$B \cup A$	Kommutativität von $\cup$
$(A \cap B) \cap C$	$A \cap (B \cap C)$	Assoziativität von $\cap$
$(A \cup B) \cup C$	$A \cup (B \cup C)$	Assoziativität von $\cup$
$A \cap (B \cup C)$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivität von $\cap$
$A \cup (B \cap C)$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributivität von $\cup$
$A \cap A$	A	Idempotenz von $\cap$
$A \cup A$	A	Idempotenz von $\cup$

Gleiche Mengen		Bezeichnung
$A \cap B$	$B \cap A$	Kommutativität von $\cap$
$A \cup B$	$B \cup A$	Kommutativität von $\cup$
$(A \cap B) \cap C$	$A \cap (B \cap C)$	Assoziativität von $\cap$
$(A \cup B) \cup C$	$A \cup (B \cup C)$	Assoziativität von $\cup$
$A \cap (B \cup C)$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivität von $\cap$
$A \cup (B \cap C)$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributivität von $\cup$
$A \cap A$	A	Idempotenz von $\cap$
$A \cup A$	A	Idempotenz von $\cup$
$(A^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}}$	A	Involution $\cdot^{\mathsf{c}}$

Gleiche Mengen		Bezeichnung
$A \cap B$	$B \cap A$	Kommutativität von $\cap$
$A \cup B$	$B \cup A$	Kommutativität von $\cup$
$(A \cap B) \cap C$	$A \cap (B \cap C)$	Assoziativität von $\cap$
$(A \cup B) \cup C$	$A \cup (B \cup C)$	Assoziativität von $\cup$
$A \cap (B \cup C)$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivität von $\cap$
$A \cup (B \cap C)$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributivität von $\cup$
$A \cap A$	A	Idempotenz von $\cap$
$A \cup A$	A	Idempotenz von $\cup$
$(A^\mathsf{c})^\mathsf{c}$	A	Involution $\cdot^\mathsf{c}$
$(A \cap B)^\mathsf{c}$	$A^\mathsf{c} \cup B^\mathsf{c}$	De-Morgan-Gesetz für $\cap$

Gleiche Mengen		Bezeichnung
$A \cap B$	$B \cap A$	Kommutativität von $\cap$
$A \cup B$	$B \cup A$	Kommutativität von $\cup$
$(A \cap B) \cap C$	$A \cap (B \cap C)$	Assoziativität von $\cap$
$(A \cup B) \cup C$	$A \cup (B \cup C)$	Assoziativität von $\cup$
$A \cap (B \cup C)$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivität von $\cap$
$A \cup (B \cap C)$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributivität von $\cup$
$A \cap A$	A	Idempotenz von $\cap$
$A \cup A$	A	Idempotenz von $\cup$
$(A^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}}$	A	Involution $\cdot^{\mathsf{c}}$
$(A \cap B)^{\mathsf{c}}$	$A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}}$	De-Morgan-Gesetz für $\cap$
$(A \cup B)^{\mathsf{c}}$	$A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}}$	De-Morgan-Gesetz für $\cup$

Wegen z.B.

Wegen z.B. So rechtfertigt das Assoziativgesetz

Wegen z.B. So rechtfertigt das Assoziativgesetz schreiben wir oft

Wegen z.B. So rechtfertigt das Assoziativgesetz schreiben wir oft $A \cup B \cup C$ statt

Wegen z.B. So rechtfertigt das Assoziativgesetz schreiben wir oft $A \cup B \cup C$ statt $A \cup (B \cup C)$.

Beispiel - Beweis (Distributivität)

Beispiel - Beweis (Distributivität) Durch Anwendung der Definitionen

Beispiel - Beweis (Distributivität) Durch Anwendung der Definitionen erhalten wir:

$$M \cup (N \cap P) =$$

Beispiel - Beweis (Distributivität) Durch Anwendung der Definitionen erhalten wir:

$$M \cup (N \cap P) = \{x \mid (x \in M)$$

Beispiel - Beweis (Distributivität) Durch Anwendung der Definitionen erhalten wir:

$$M \cup (N \cap P) = \{x \mid (x \in M) \vee$$

Beispiel - Beweis (Distributivität) Durch Anwendung der Definitionen erhalten wir:

$$M \cup (N \cap P) = \{x \mid (x \in M) \lor (x \in N \cap P)\}$$

Beispiel - Beweis (Distributivität) Durch Anwendung der Definitionen erhalten wir:

$$M \cup (N \cap P) = \{x \mid (x \in M) \lor (x \in N \cap P)\}$$

$$= \{x \mid (x \in M)$$

Beispiel - Beweis (Distributivität) Durch Anwendung der Definitionen erhalten wir:

$$M \cup (N \cap P) = \{x \mid (x \in M) \lor (x \in N \cap P)\}$$

$$= \{x \mid (x \in M) \lor$$

Beispiel - Beweis (Distributivität) Durch Anwendung der Definitionen erhalten wir:

$$M \cup (N \cap P) = \{x \mid (x \in M) \lor (x \in N \cap P)\}$$

$$= \{x \mid (x \in M) \lor (x \in$$

Beispiel - Beweis (Distributivität) Durch Anwendung der Definitionen erhalten wir:

$$M \cup (N \cap P) = \{x \mid (x \in M) \lor (x \in N \cap P)\}$$

$$= \{x \mid (x \in M) \lor (x \in \{y \mid (y \in N)$$

Beispiel - Beweis (Distributivität) Durch Anwendung der Definitionen erhalten wir:

$$M \cup (N \cap P) = \{x \mid (x \in M) \lor (x \in N \cap P)\}$$

$$= \{x \mid (x \in M) \lor (x \in \{y \mid (y \in N) \land (y \in P)\})\}$$

Beispiel - Beweis (Distributivität) Durch Anwendung der Definitionen erhalten wir:

$$M \cup (N \cap P) = \{x \mid (x \in M) \lor (x \in N \cap P)\}$$

$$= \{x \mid (x \in M) \lor (x \in \{y \mid (y \in N) \land (y \in P)\})\}$$

$$= \{x \mid \underbrace{(x \in M)}_{A}$$

Beispiel - Beweis (Distributivität) Durch Anwendung der Definitionen erhalten wir:

$$M \cup (N \cap P) = \{x \mid (x \in M) \lor (x \in N \cap P)\}$$

$$= \{x \mid (x \in M) \lor (x \in \{y \mid (y \in N) \land (y \in P)\})\}$$

$$= \{x \mid \underbrace{(x \in M)}_{A} \lor (\underbrace{(x \in N)}_{B}$$

Beispiel - Beweis (Distributivität) Durch Anwendung der Definitionen erhalten wir:

$$M \cup (N \cap P) = \{x \mid (x \in M) \vee (x \in N \cap P)\}$$

$$= \{x \mid (x \in M) \vee (x \in \{y \mid (y \in N) \wedge (y \in P)\})\}$$

$$= \{x \mid \underbrace{(x \in M)}_{A} \vee (\underbrace{(x \in N)}_{B} \wedge \underbrace{(x \in P)}_{C})\}$$

Beispiel - Beweis (Distributivität) Durch Anwendung der Definitionen erhalten wir:

$$M \cup (N \cap P) = \{x \mid (x \in M) \lor (x \in N \cap P)\}$$

$$= \{x \mid (x \in M) \lor (x \in \{y \mid (y \in N) \land (y \in P)\})\}$$

$$= \{x \mid \underbrace{(x \in M)}_{A} \lor (\underbrace{(x \in N)}_{B} \land \underbrace{(x \in P)}_{C})\}$$

$$= \{x \mid (\underbrace{(x \in M)}_{A} \lor \underbrace{(x \in N)}_{B})$$

Beispiel - Beweis (Distributivität) Durch Anwendung der Definitionen erhalten wir:

$$M \cup (N \cap P) = \{x \mid (x \in M) \ \vee \ (x \in N \cap P)\}$$

$$= \{x \mid (x \in M) \ \vee \ (x \in \ \{y \mid (y \in N) \ \wedge (y \in P)\})\}$$

$$= \{x \mid \underbrace{(x \in M)}_{A} \ \vee ((\underbrace{x \in N)}_{B} \ \wedge \underbrace{(x \in P)}_{C})\}$$

$$= \{x \mid (\underbrace{(x \in M)}_{A} \vee \underbrace{(x \in N)}_{B}) \ \wedge$$

Beispiel - Beweis (Distributivität) Durch Anwendung der Definitionen erhalten wir:

$$M \cup (N \cap P) = \{x \mid (x \in M) \lor (x \in N \cap P)\}$$

$$= \{x \mid (x \in M) \lor (x \in \{y \mid (y \in N) \land (y \in P)\})\}$$

$$= \{x \mid \underbrace{(x \in M)}_{A} \lor (\underbrace{(x \in N)}_{B} \land \underbrace{(x \in P)}_{C})\}$$

$$= \{x \mid (\underbrace{(x \in M)}_{A} \lor \underbrace{(x \in N)}_{B}) \land (\underbrace{(x \in M)}_{A} \lor \underbrace{(x \in P)}_{C})\}$$

Beispiel - Beweis (Distributivität) Durch Anwendung der Definitionen erhalten wir:

$$M \cup (N \cap P) = \{x \mid (x \in M) \lor (x \in N \cap P)\}$$

$$= \{x \mid (x \in M) \lor (x \in \{y \mid (y \in N) \land (y \in P)\})\}$$

$$= \{x \mid \underbrace{(x \in M)}_{A} \lor (\underbrace{(x \in N)}_{B} \land \underbrace{(x \in P)}_{C})\}$$

$$= \{x \mid (\underbrace{(x \in M)}_{A} \lor \underbrace{(x \in N)}_{B}) \land (\underbrace{(x \in M)}_{A} \lor \underbrace{(x \in P)}_{C})\}$$

$$= \{x \mid (x \in M \cup N)$$

Beispiel - Beweis (Distributivität) Durch Anwendung der Definitionen erhalten wir:

$$M \cup (N \cap P) = \{x \mid (x \in M) \ \vee \ (x \in N \cap P)\}$$

$$= \{x \mid (x \in M) \ \vee \ (x \in \ \{y \mid (y \in N) \ \wedge (y \in P)\})\}$$

$$= \{x \mid \underbrace{(x \in M)}_{A} \ \vee ((\underbrace{x \in N)}_{B} \ \wedge \underbrace{(x \in P)}_{C})\}$$

$$= \{x \mid ((\underbrace{x \in M)}_{A} \vee \underbrace{(x \in N)}_{B}) \ \wedge \ ((\underbrace{x \in M)}_{A} \vee \underbrace{(x \in P)}_{C})\}$$

$$= \{x \mid (x \in M \cup N) \ \wedge$$

Beispiel - Beweis (Distributivität) Durch Anwendung der Definitionen erhalten wir:

$$M \cup (N \cap P) = \{x \mid (x \in M) \lor (x \in N \cap P)\}$$

$$= \{x \mid (x \in M) \lor (x \in \{y \mid (y \in N) \land (y \in P)\})\}$$

$$= \{x \mid \underbrace{(x \in M)}_{A} \lor (\underbrace{(x \in N)}_{B} \land \underbrace{(x \in P)}_{C})\}$$

$$= \{x \mid (\underbrace{(x \in M)}_{A} \lor \underbrace{(x \in N)}_{B}) \land (\underbrace{(x \in M)}_{A} \lor \underbrace{(x \in P)}_{C})\}$$

$$= \{x \mid (x \in M \cup N) \land (x \in M \cup P)\}$$

Beispiel - Beweis (Distributivität) Durch Anwendung der Definitionen erhalten wir:

$$M \cup (N \cap P) = \{x \mid (x \in M) \lor (x \in N \cap P)\}$$

$$= \{x \mid (x \in M) \lor (x \in \{y \mid (y \in N) \land (y \in P)\})\}$$

$$= \{x \mid \underbrace{(x \in M)}_{A} \lor (\underbrace{(x \in N)}_{B} \land \underbrace{(x \in P)}_{C})\}$$

$$= \{x \mid (\underbrace{(x \in M)}_{A} \lor \underbrace{(x \in N)}_{B}) \land (\underbrace{(x \in M)}_{A} \lor \underbrace{(x \in P)}_{C})\}$$

$$= \{x \mid (x \in M \cup N) \land (x \in M \cup P)\} =$$

Beispiel - Beweis (Distributivität) Durch Anwendung der Definitionen erhalten wir:

$$M \cup (N \cap P) = \{x \mid (x \in M) \vee (x \in N \cap P)\}$$

$$= \{x \mid (x \in M) \vee (x \in \{y \mid (y \in N) \wedge (y \in P)\})\}$$

$$= \{x \mid \underbrace{(x \in M)}_{A} \vee (\underbrace{(x \in N)}_{B} \wedge \underbrace{(x \in P)}_{C})\}$$

$$= \{x \mid (\underbrace{(x \in M)}_{A} \vee \underbrace{(x \in N)}_{B}) \wedge (\underbrace{(x \in M)}_{A} \vee \underbrace{(x \in P)}_{C})\}$$

$$= \{x \mid (x \in M \cup N) \wedge (x \in M \cup P)\} = (M \cup N) \cap (M \cup P)$$

Beispiel - Beweis (Distributivität) Durch Anwendung der Definitionen erhalten wir:

$$M \cup (N \cap P) = \{x \mid (x \in M) \lor (x \in N \cap P)\}$$

$$= \{x \mid (x \in M) \lor (x \in \{y \mid (y \in N) \land (y \in P)\})\}$$

$$= \{x \mid \underbrace{(x \in M)}_{A} \lor (\underbrace{(x \in N)}_{B} \land \underbrace{(x \in P)}_{C})\}$$

$$= \{x \mid (\underbrace{(x \in M)}_{A} \lor \underbrace{(x \in N)}_{B}) \land (\underbrace{(x \in M)}_{A} \lor \underbrace{(x \in P)}_{C})\}$$

$$= \{x \mid (x \in M \cup N) \land (x \in M \cup P)\} = (M \cup N) \cap (M \cup P) \quad \square$$

Beispiel.

Beispiel. Seien M, N und U Mengen,

Beispiel. Seien M, N und U Mengen, so dass $M \subseteq U$ und $N \subseteq U$.

Beispiel. Seien M, N und U Mengen, so dass $M \subseteq U$ und $N \subseteq U$. Dann gilt

Beispiel. Seien M, N und U Mengen, so dass $M \subseteq U$ und $N \subseteq U$. Dann gilt

$$M \setminus N =$$

Beispiel. Seien M, N und U Mengen, so dass $M \subseteq U$ und $N \subseteq U$. Dann gilt

$$M \setminus N = (M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}}.$$

Beispiel. Seien M, N und U Mengen, so dass $M \subseteq U$ und $N \subseteq U$. Dann gilt

$$M \setminus N = (M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}}.$$

Beweis.

Beispiel. Seien M, N und U Mengen, so dass $M \subseteq U$ und $N \subseteq U$. Dann gilt

$$M \setminus N = (M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}}.$$

Beweis.

$$(M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}}$$

Beispiel. Seien M, N und U Mengen, so dass $M \subseteq U$ und $N \subseteq U$. Dann gilt

$$M \setminus N = (M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}}.$$

Beweis.

$$(M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}} =$$

Beispiel. Seien M, N und U Mengen, so dass $M \subseteq U$ und $N \subseteq U$. Dann gilt

$$M \setminus N = (M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}}.$$

Beweis.

$$(M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}} = (M^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} \cap N^{\mathsf{c}}$$

Beispiel. Seien M, N und U Mengen, so dass $M \subseteq U$ und $N \subseteq U$. Dann gilt

$$M \setminus N = (M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}}.$$

Beweis.

$$(M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}} = (M^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} \cap N^{\mathsf{c}} \quad \text{De Morgan}$$

Beispiel. Seien M, N und U Mengen, so dass $M \subseteq U$ und $N \subseteq U$. Dann gilt

$$M \setminus N = (M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}}.$$

Beweis.

$$(M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}} = (M^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} \cap N^{\mathsf{c}} \quad \text{De Morgan}$$

$$= M \cap N^{\mathsf{c}}$$

Beispiel. Seien M, N und U Mengen, so dass $M \subseteq U$ und $N \subseteq U$. Dann gilt

$$M \setminus N = (M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}}.$$

Beweis.

$$(M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}} = (M^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} \cap N^{\mathsf{c}} \quad \text{De Morgan}$$

$$= M \cap N^{\mathsf{c}} \quad \text{Involution}$$

Beispiel. Seien M, N und U Mengen, so dass $M \subseteq U$ und $N \subseteq U$. Dann gilt

$$M \setminus N = (M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}}.$$

Beweis.

$$(M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}} = (M^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} \cap N^{\mathsf{c}} \quad \text{De Morgan}$$

$$= M \cap N^{\mathsf{c}} \quad \text{Involution}$$

$$= \{x \mid (x \in M)$$

Beispiel. Seien M, N und U Mengen, so dass $M \subseteq U$ und $N \subseteq U$. Dann gilt

$$M \setminus N = (M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}}.$$

Beweis.

$$(M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}} = (M^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} \cap N^{\mathsf{c}} \quad \text{De Morgan}$$

$$= M \cap N^{\mathsf{c}} \quad \text{Involution}$$

$$= \{x \mid (x \in M) \ \wedge$$

Beispiel. Seien M, N und U Mengen, so dass $M \subseteq U$ und $N \subseteq U$. Dann gilt

$$M \setminus N = (M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}}.$$

Beweis.

$$(M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}} = (M^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} \cap N^{\mathsf{c}} \quad \text{De Morgan}$$

$$= M \cap N^{\mathsf{c}} \quad \text{Involution}$$

$$= \{x \mid (x \in M) \ \wedge \ (x \in N^{\mathsf{c}})\}$$

Beispiel. Seien M, N und U Mengen, so dass $M \subseteq U$ und $N \subseteq U$. Dann gilt

$$M \setminus N = (M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}}.$$

Beweis.

$$(M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}} = (M^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} \cap N^{\mathsf{c}} \quad \text{De Morgan}$$

$$= M \cap N^{\mathsf{c}} \quad \text{Involution}$$

$$= \{x \mid (x \in M) \wedge (x \in N^{\mathsf{c}})\} = \{x \mid (x \in M)$$

Beispiel. Seien M, N und U Mengen, so dass $M \subseteq U$ und $N \subseteq U$. Dann gilt

$$M \setminus N = (M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}}.$$

Beweis.

$$(M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}} = (M^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} \cap N^{\mathsf{c}} \quad \text{De Morgan}$$

$$= M \cap N^{\mathsf{c}} \quad \text{Involution}$$

$$= \{x \mid (x \in M) \wedge (x \in N^{\mathsf{c}})\} = \{x \mid (x \in M) \wedge$$

Beispiel. Seien M, N und U Mengen, so dass $M \subseteq U$ und $N \subseteq U$. Dann gilt

$$M \setminus N = (M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}}.$$

Beweis.

$$(M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}} = (M^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} \cap N^{\mathsf{c}} \quad \text{De Morgan}$$

$$= M \cap N^{\mathsf{c}} \quad \text{Involution}$$

$$= \{x \mid (x \in M) \ \wedge \ (x \in N^{\mathsf{c}})\} = \{x \mid (x \in M) \ \wedge \ (x \notin N)\}$$

Beispiel. Seien M, N und U Mengen, so dass $M \subseteq U$ und $N \subseteq U$. Dann gilt

$$M \setminus N = (M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}}.$$

Beweis.

$$(M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}} = (M^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} \cap N^{\mathsf{c}} \quad \text{De Morgan}$$

$$= M \cap N^{\mathsf{c}} \quad \text{Involution}$$

$$= \{x \mid (x \in M) \wedge (x \in N^{\mathsf{c}})\} = \{x \mid (x \in M) \wedge (x \notin N)\} = M \setminus N.$$

Beispiel. Seien M, N und U Mengen, so dass $M \subseteq U$ und $N \subseteq U$. Dann gilt

$$M \setminus N = (M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}}.$$

Beweis.

$$(M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}} = (M^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} \cap N^{\mathsf{c}} \quad \text{De Morgan}$$

$$= M \cap N^{\mathsf{c}} \quad \text{Involution}$$

$$= \{x \mid (x \in M) \land (x \in N^{\mathsf{c}})\} = \{x \mid (x \in M) \land (x \notin N)\} = M \setminus N.$$

$\square$

Hier sind einige weitere Beispiele für die Übersetzung von logischen Eigenschaften in Mengeneigenschaften.

Hier sind einige weitere Beispiele für die Übersetzung von logischen Eigenschaften in Mengeneigenschaften.

Eigenschaft	Bezeichnung
$A \cup A^{\mathsf{c}} = U$	Ausgeschlossenes Drittes

Hier sind einige weitere Beispiele für die Übersetzung von logischen Eigenschaften in Mengeneigenschaften.

Eigenschaft	Bezeichnung
$A \cup A^{\mathsf{c}} = U$	Ausgeschlossenes Drittes
$((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \to (A \subseteq C)$	Transitivität von $\subseteq$

Hier sind einige weitere Beispiele für die Übersetzung von logischen Eigenschaften in Mengeneigenschaften.

Eigenschaft	Bezeichnung
$A \cup A^{\mathsf{c}} = U$	Ausgeschlossenes Drittes
$((A \subseteq B) \land (B \subseteq C)) \to (A \subseteq C)$	Transitivität von $\subseteq$
$(A \subseteq B) \iff (B^{\mathsf{c}} \subseteq A^{\mathsf{c}})$	Kontraposition

Hier sind einige weitere Beispiele für die Übersetzung von logischen Eigenschaften in Mengeneigenschaften.

Eigenschaft	Bezeichnung
$A \cup A^{\mathsf{c}} = U$	Ausgeschlossenes Drittes
$((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \rightarrow (A \subseteq C)$	Transitivität von $\subseteq$
$(A \subseteq B) \iff (B^{\mathsf{c}} \subseteq A^{\mathsf{c}})$	Kontraposition
$(A \cap B) \subseteq A$	Abschwächung für $\cap$

Hier sind einige weitere Beispiele für die Übersetzung von logischen Eigenschaften in Mengeneigenschaften.

Eigenschaft	Bezeichnung
$A \cup A^{\mathsf{c}} = U$	Ausgeschlossenes Drittes
$((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \rightarrow (A \subseteq C)$	Transitivität von $\subseteq$
$(A \subseteq B) \iff (B^{\mathsf{c}} \subseteq A^{\mathsf{c}})$	Kontraposition
$(A \cap B) \subseteq A$	Abschwächung für $\cap$
$A \subseteq (A \cup B)$	Abschwächung für $\cup$

Hier sind einige weitere Beispiele für die Übersetzung von logischen Eigenschaften in Mengeneigenschaften.

Eigenschaft	Bezeichnung
$A \cup A^{\mathsf{c}} = U$	Ausgeschlossenes Drittes
$((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \rightarrow (A \subseteq C)$	Transitivität von $\subseteq$
$(A \subseteq B) \iff (B^{\mathsf{c}} \subseteq A^{\mathsf{c}})$	Kontraposition
$(A \cap B) \subseteq A$	Abschwächung für $\cap$
$A \subseteq (A \cup B)$	Abschwächung für $\cup$

- Beweisen wir z.B. dass

- Beweisen wir z.B. dass $((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \rightarrow (A \subseteq C)$.

- Beweisen wir z.B. dass $((A \subseteq B) \land (B \subseteq C)) \rightarrow (A \subseteq C)$.
- Wir definieren 3 Prädikate

- Beweisen wir z.B. dass $((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \to (A \subseteq C)$.
- Wir definieren 3 Prädikate $P(X) : x \in A$,

- Beweisen wir z.B. dass $((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \rightarrow (A \subseteq C)$.
- Wir definieren 3 Prädikate $P(X) : x \in A$, $Q(x) : x \in B$,

- Beweisen wir z.B. dass $((A \subseteq B) \land (B \subseteq C)) \rightarrow (A \subseteq C)$.
- Wir definieren 3 Prädikate $P(X) : x \in A$, $Q(x) : x \in B$, $R(x) : x \in C$. Dann ist die Aussage $A \subseteq B$ äquivalent der Aussage $\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$,

- Beweisen wir z.B. dass $((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \rightarrow (A \subseteq C)$.
- Wir definieren 3 Prädikate $P(X) : x \in A$, $Q(x) : x \in B$, $R(x) : x \in C$. Dann ist die Aussage $A \subseteq B$ äquivalent der Aussage $\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$, usw.

- Beweisen wir z.B. dass $((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \to (A \subseteq C)$.

- Wir definieren 3 Prädikate $P(X) : x \in A$, $Q(x) : x \in B$, $R(x) : x \in C$. Dann ist die Aussage $A \subseteq B$ äquivalent der Aussage $\forall x P(x) \to Q(x)$, usw. Also wir sollen beweisen

- Beweisen wir z.B. dass $((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \to (A \subseteq C)$.
- Wir definieren 3 Prädikate $P(X) : x \in A$, $Q(x) : x \in B$, $R(x) : x \in C$. Dann ist die Aussage $A \subseteq B$ äquivalent der Aussage $\forall x P(x) \to Q(x)$, usw. Also wir sollen beweisen

$$\forall x \Big((P(x) \to Q(x)) \wedge Q(x) \to R(x))) \to (P(x) \to R(x) \Big).$$

- Beweisen wir z.B. dass $((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \rightarrow (A \subseteq C)$.
- Wir definieren 3 Prädikate $P(X) : x \in A$, $Q(x) : x \in B$, $R(x) : x \in C$. Dann ist die Aussage $A \subseteq B$ äquivalent der Aussage $\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$, usw. Also wir sollen beweisen

$$\forall x \Big((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge Q(x) \rightarrow R(x))) \rightarrow (P(x) \rightarrow R(x) \Big).$$

Diese Eigenschaft stimmt,

- Beweisen wir z.B. dass $((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \to (A \subseteq C)$.
- Wir definieren 3 Prädikate $P(X) : x \in A$, $Q(x) : x \in B$, $R(x) : x \in C$. Dann ist die Aussage $A \subseteq B$ äquivalent der Aussage $\forall x P(x) \to Q(x)$, usw. Also wir sollen beweisen

$$\forall x\Big((P(x) \to Q(x)) \wedge Q(x) \to R(x))) \to (P(x) \to R(x)\Big).$$

Diese Eigenschaft stimmt, da es ist die prädikatlogische Variante

- Beweisen wir z.B. dass $((A \subseteq B) \land (B \subseteq C)) \to (A \subseteq C)$.
- Wir definieren 3 Prädikate $P(X) : x \in A$, $Q(x) : x \in B$, $R(x) : x \in C$. Dann ist die Aussage $A \subseteq B$ äquivalent der Aussage $\forall x P(x) \to Q(x)$, usw. Also wir sollen beweisen

$$\forall x \Big((P(x) \to Q(x)) \land Q(x) \to R(x))) \to (P(x) \to R(x) \Big).$$

Diese Eigenschaft stimmt, da es ist die prädikatlogische Variante der Tautologie

- Beweisen wir z.B. dass $((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \to (A \subseteq C)$.
- Wir definieren 3 Prädikate $P(X) : x \in A$, $Q(x) : x \in B$, $R(x) : x \in C$. Dann ist die Aussage $A \subseteq B$ äquivalent der Aussage $\forall x P(x) \to Q(x)$, usw. Also wir sollen beweisen

$$\forall x \Big((P(x) \to Q(x)) \wedge Q(x) \to R(x))) \to (P(x) \to R(x) \Big).$$

Diese Eigenschaft stimmt, da es ist die prädikatlogische Variante der Tautologie $((X \to Y) \wedge (Y \to Z)) \to (X \to Z)$.

- Beweisen wir z.B. dass $((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \rightarrow (A \subseteq C)$.
- Wir definieren 3 Prädikate $P(X) : x \in A$, $Q(x) : x \in B$, $R(x) : x \in C$. Dann ist die Aussage $A \subseteq B$ äquivalent der Aussage $\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$, usw. Also wir sollen beweisen

$$\forall x \Big((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge Q(x) \rightarrow R(x))) \rightarrow (P(x) \rightarrow R(x) \Big).$$

Diese Eigenschaft stimmt, da es ist die prädikatlogische Variante der Tautologie $((X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow Z)) \rightarrow (X \rightarrow Z)$. $\square$

- Der folgende Beweis zeigt die üblichste Art,

- Der folgende Beweis zeigt die üblichste Art, wie man Eigenschaften von Mengen beweist.

Satz (Monotonie von $\subseteq$).

- Der folgende Beweis zeigt die üblichste Art, wie man Eigenschaften von Mengen beweist.

Satz (Monotonie von $\subseteq$). *Seien $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$.*

- Der folgende Beweis zeigt die üblichste Art, wie man Eigenschaften von Mengen beweist.

Satz (Monotonie von $\subseteq$). *Seien $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$. Dann gelten*

$$(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$$

- Der folgende Beweis zeigt die üblichste Art, wie man Eigenschaften von Mengen beweist.

Satz (Monotonie von $\subseteq$). *Seien $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$. Dann gelten*

$$(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$$

und

$$(M \cup N) \subseteq (M' \cup N')$$

- Der folgende Beweis zeigt die üblichste Art, wie man Eigenschaften von Mengen beweist.

Satz (Monotonie von $\subseteq$). *Seien $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$. Dann gelten*

$$(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$$

und

$$(M \cup N) \subseteq (M' \cup N')$$

Beweis.

- Der folgende Beweis zeigt die üblichste Art, wie man Eigenschaften von Mengen beweist.

Satz (Monotonie von $\subseteq$). *Seien $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$. Dann gelten*

$$(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$$

und

$$(M \cup N) \subseteq (M' \cup N')$$

Beweis. Wir beweisen beide Inklusionen.

- Der folgende Beweis zeigt die üblichste Art, wie man Eigenschaften von Mengen beweist.

Satz (Monotonie von $\subseteq$). *Seien $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$. Dann gelten*

$$(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$$

und

$$(M \cup N) \subseteq (M' \cup N')$$

Beweis. Wir beweisen beide Inklusionen.

Zu $(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$:

- Der folgende Beweis zeigt die üblichste Art, wie man Eigenschaften von Mengen beweist.

Satz (Monotonie von $\subseteq$). *Seien $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$. Dann gelten*

$$(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$$

und

$$(M \cup N) \subseteq (M' \cup N')$$

Beweis. Wir beweisen beide Inklusionen.

Zu $(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$: Sei $x \in (M \cap N)$.

- Der folgende Beweis zeigt die üblichste Art, wie man Eigenschaften von Mengen beweist.

Satz (Monotonie von $\subseteq$). *Seien $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$. Dann gelten*

$$(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$$

und

$$(M \cup N) \subseteq (M' \cup N')$$

Beweis. Wir beweisen beide Inklusionen.

Zu $(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$: Sei $x \in (M \cap N)$. Dann $x \in M$ und $x \in N$.

- Der folgende Beweis zeigt die üblichste Art, wie man Eigenschaften von Mengen beweist.

Satz (Monotonie von $\subseteq$). *Seien $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$. Dann gelten*

$$(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$$

und

$$(M \cup N) \subseteq (M' \cup N')$$

Beweis. Wir beweisen beide Inklusionen.

Zu $(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$: Sei $x \in (M \cap N)$. Dann $x \in M$ und $x \in N$. Da $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$

- Der folgende Beweis zeigt die üblichste Art, wie man Eigenschaften von Mengen beweist.

Satz (Monotonie von $\subseteq$). *Seien $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$. Dann gelten*

$$(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$$

und

$$(M \cup N) \subseteq (M' \cup N')$$

Beweis. Wir beweisen beide Inklusionen.

Zu $(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$: Sei $x \in (M \cap N)$. Dann $x \in M$ und $x \in N$. Da $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$ folgen $x \in M'$ und $x \in N'$.

- Der folgende Beweis zeigt die üblichste Art, wie man Eigenschaften von Mengen beweist.

Satz (Monotonie von $\subseteq$). *Seien $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$. Dann gelten*

$$(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$$

und

$$(M \cup N) \subseteq (M' \cup N')$$

Beweis. Wir beweisen beide Inklusionen.

Zu $(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$: Sei $x \in (M \cap N)$. Dann $x \in M$ und $x \in N$. Da $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$ folgen $x \in M'$ und $x \in N'$. Folglich $x \in (M' \cap N')$.

- Der folgende Beweis zeigt die üblichste Art, wie man Eigenschaften von Mengen beweist.

Satz (Monotonie von $\subseteq$). *Seien $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$. Dann gelten*

$$(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$$

und

$$(M \cup N) \subseteq (M' \cup N')$$

Beweis. Wir beweisen beide Inklusionen.

Zu $(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$: Sei $x \in (M \cap N)$. Dann $x \in M$ und $x \in N$. Da $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$ folgen $x \in M'$ und $x \in N'$. Folglich $x \in (M' \cap N')$.

Zu $(M \cup N) \subseteq (M' \cup N')$:

- Der folgende Beweis zeigt die üblichste Art, wie man Eigenschaften von Mengen beweist.

Satz (Monotonie von $\subseteq$). *Seien $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$. Dann gelten*

$$(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$$

und

$$(M \cup N) \subseteq (M' \cup N')$$

Beweis. Wir beweisen beide Inklusionen.

Zu $(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$: Sei $x \in (M \cap N)$. Dann $x \in M$ und $x \in N$. Da $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$ folgen $x \in M'$ und $x \in N'$. Folglich $x \in (M' \cap N')$.

Zu $(M \cup N) \subseteq (M' \cup N')$: Sei $x \in (M \cup N)$.

- Der folgende Beweis zeigt die üblichste Art, wie man Eigenschaften von Mengen beweist.

Satz (Monotonie von $\subseteq$). *Seien $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$. Dann gelten*

$$(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$$

und

$$(M \cup N) \subseteq (M' \cup N')$$

Beweis. Wir beweisen beide Inklusionen.

Zu $(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$: Sei $x \in (M \cap N)$. Dann $x \in M$ und $x \in N$. Da $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$ folgen $x \in M'$ und $x \in N'$. Folglich $x \in (M' \cap N')$.

Zu $(M \cup N) \subseteq (M' \cup N')$: Sei $x \in (M \cup N)$. Dann $x \in M$ oder $x \in N$.

- Der folgende Beweis zeigt die üblichste Art, wie man Eigenschaften von Mengen beweist.

Satz (Monotonie von $\subseteq$). *Seien $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$. Dann gelten*

$$(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$$

und

$$(M \cup N) \subseteq (M' \cup N')$$

Beweis. Wir beweisen beide Inklusionen.

Zu $(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$: Sei $x \in (M \cap N)$. Dann $x \in M$ und $x \in N$. Da $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$ folgen $x \in M'$ und $x \in N'$. Folglich $x \in (M' \cap N')$.

Zu $(M \cup N) \subseteq (M' \cup N')$: Sei $x \in (M \cup N)$. Dann $x \in M$ oder $x \in N$. Da $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$ folgt $x \in M'$ oder $x \in N'$.

- Der folgende Beweis zeigt die üblichste Art, wie man Eigenschaften von Mengen beweist.

Satz (Monotonie von $\subseteq$). *Seien $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$. Dann gelten*

$$(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$$

und

$$(M \cup N) \subseteq (M' \cup N')$$

Beweis. Wir beweisen beide Inklusionen.

Zu $(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$: Sei $x \in (M \cap N)$. Dann $x \in M$ und $x \in N$. Da $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$ folgen $x \in M'$ und $x \in N'$. Folglich $x \in (M' \cap N')$.

Zu $(M \cup N) \subseteq (M' \cup N')$: Sei $x \in (M \cup N)$. Dann $x \in M$ oder $x \in N$. Da $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$ folgt $x \in M'$ oder $x \in N'$. Folglich $x \in (M' \cup N')$.

- Der folgende Beweis zeigt die üblichste Art, wie man Eigenschaften von Mengen beweist.

Satz (Monotonie von $\subseteq$). *Seien $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$. Dann gelten*

$$(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$$

und

$$(M \cup N) \subseteq (M' \cup N')$$

Beweis. Wir beweisen beide Inklusionen.

Zu $(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$: Sei $x \in (M \cap N)$. Dann $x \in M$ und $x \in N$. Da $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$ folgen $x \in M'$ und $x \in N'$. Folglich $x \in (M' \cap N')$.

Zu $(M \cup N) \subseteq (M' \cup N')$: Sei $x \in (M \cup N)$. Dann $x \in M$ oder $x \in N$. Da $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$ folgt $x \in M'$ oder $x \in N'$. Folglich $x \in (M' \cup N')$. $\square$

UNIVERSITÄT
LEIPZIG

VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT!

Łukasz Grabowski
Mathematisches Institut

grabowski@math.uni-leipzig.de