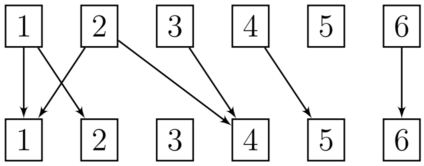
Diskrete Strukturen (WS 2024-25) - Halbserie 5

5.1 **[3]**

Bitte direkt auf Moodle als Quiz antworten.

5.2 **[3]**

Gegeben sei die Relation R_0 auf der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, die mit folgendem Diagramm dargestellt werden kann:



(a) Entfernen Sie zwei Tupel aus R_0, sodass die entstehende Relation R_1 **eindeutig** ist.

(b) Fügen Sie eine Tupel zu R_1 hinzu, sodass die entstehende Relation R_2 **total** ist.

(c) Finden Sie eine Relation Q mit $R_2 \subset Q$ die eine **surjektive Funktion** ist, oder erklären Sie warum das nicht möglich ist.

5.3 **[4]**

Sei $f\colon X \to X$ eine injektive Funktion und sei $g\colon X \to X$ eine Funktion so dass $g; f = f$.

(a) Zeigen Sie, dass $g = \mathrm{id}_X$

(b) Geben Sie ein Beispiel, das zeigt, dass g nicht gleich id_X sein muss, wenn $g; f = f$ aber f nicht injektiv ist.

5.4 Sei $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben durch die Formel $f((x, y) = x^2 + y^2$.

(a) Entscheiden Sie, ob f surjektiv ist

(b) Entscheiden Sie, ob f injektiv ist

(c) Finden Sie $f^{-1}(0)$

(d) Finden Sie $f^{-1}(25)$

5.5 Gegeben seien die folgenden **Funktionen**

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ mit } f(n) = 2^n \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$
$$g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \text{ mit } g(x) = \frac{1}{x^2} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Sind f und g jeweils

1. **injektiv**,
2. **surjektiv**?

Beweisen Sie die entsprechenden Bedingungen oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

5.6 Gegeben seien die folgenden Relationen

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2x = 5y\},$$
$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = x - y\},$$
$$R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 = y^2\}.$$

Sind R_1, R_2 und R_3 **Funktionen?** Beweisen Sie die entsprechenden Bedingungen oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

5.7 Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ mit $z \mapsto |z|$ für alle $z \in \mathbb{Z}$.
Ist f **bijektiv**?