Hausaufgabe 4.4 (Ackermann & Co)

Nikita E. J. Fehér
3793479
Tim Schlenstedt
3797524

Wir definieren eine Funktion $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ wie folgt:

$$h(n,a,b) = \begin{cases} b+1 & \text{falls } n = 0 \\ a & \text{falls } n = 1 \text{ und } b = 0 \\ 0 & \text{falls } n = 2 \text{ und } b = 0 \\ 1 & \text{falls } n \geq 3 \text{ und } b = 0 \\ h(n-1, a, h(n,a,b-1)) & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $n, a, b \in \mathbb{N}$. (Hinweis: h ist als *Hyper-Operator* bekannt.)

(a) Zeigen Sie, dass $h(1,a,b) = a + b$, für alle $a, b \in \mathbb{N}$. (4)

(b) Zeigen Sie, dass $h(2,a,b) = a \cdot b$, für alle $a, b \in \mathbb{N}$. (4)

a) IA_1: $a = 0$

$h(1,0,b)$ IA_2: $b = 0$

$h(1,0,0) = 0 = 0+0 = a+b$

IV_2: $h(1,0,b) = 0+b = b$

IS_2: $b = b+1$?

$h(1,0,b+1) = h(1-1, 0, h(1,0,b))$

$=_{IV_2} h(0,0,b)$

$= b+1$

$= 0+(b+1)$

IV_1 $h(1,a,b) = a+b$

IS_1 $a = a+1$?

IA_3: $b = 0$

$h(1,a+1,0) = a+1 = a+1+0$

IV_3 $h(1,a+1,b) = a+1+b$

IS_3 $b = b+1$?

$h(1,a+1,b+1) = h(1-1, a+1, h(1,a+1,b))$

$=_{IV_3} h(0, a+1, a+1+b)$

$= a+1+b+1$

$\square$

Erklärungen würden der Verständlichkeit helfen.
Notation bei den "?" falsch: Es wäre besser a => a+1 zu schreiben, da sonst eine formal falsche Aussage in a=a+1 da steht.

Hausaufgabe 4.4 (Ackermann & Co)
Wir definieren eine Funktion $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ wie folgt:

$$h(n,a,b) = \begin{cases} b+1 & \text{falls } n = 0 \\ a & \text{falls } n = 1 \text{ und } b = 0 \\ 0 & \text{falls } n = 2 \text{ und } b = 0 \\ 1 & \text{falls } n \geq 3 \text{ und } b = 0 \\ h(n-1,a,h(n,a,b-1)) & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $n,a,b \in \mathbb{N}$. (Hinweis: h ist als *Hyper-Operator* bekannt.)

(a) Zeigen Sie, dass $h(1,a,b) = a+b$, für alle $a,b \in \mathbb{N}$. (4)

(b) Zeigen Sie, dass $h(2,a,b) = a \cdot b$, für alle $a,b \in \mathbb{N}$. (4)

$\underline{IA_1 \quad a=0}$

$\underline{h(2,0,b) \quad IA_2 \quad b=0}$

$h(2,0,0) = \underline{0 = 0\cdot 0}$

$\underline{IV_2 \quad h(2,0,b) = 0\cdot b = 0}$

?

$\underline{IS_2 \quad b = b+1}$

$h(2,0,b+1) = h(2-1, 0, h(2,0,b))$

$=_{IV_2} h(1,0,0)$

$\underline{= 0 = 0\cdot b}$

✓

$\underline{IV_1 \quad h(2,a,b) = a\cdot b}$

?

$\underline{IS_1 \quad a = a+1}$

$\underline{h(2,a+1,b) \quad IA_3 \quad b=0}$

$h(2,a+1,0) = 0 = (a+1)\cdot 0$

$\underline{IV_3 \quad h(2,a+1,b) = (a+1)\cdot b}$

?

$\underline{IS_3 \quad b = b+1}$

$h(2,a+1,b+1) = h(2-1, a+1, h(2,a+1,b))$

$=_{IV_3} h(1, a+1, (a+1)\cdot b)$

$=_{a)} a+1 + (a+1)\cdot b$

$= a+1+ab+b$

$= ab+a+b+1$

$= \underline{\underline{(a+1)\cdot(b+1)}}$

✓

Entsprechender Notationsfehler siehe oben.

6/8

Hausaufgabe 4.5 (WHILE-Programme)

(a) Geben Sie ein WHILE Programm P in *strikter Syntax* an, welches die Funktion $f : \mathbb{N}^2 \dashrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(m,n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } m > n \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

berechnet. (4)

(b) Sei $T = \{3^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion $\chi_T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ von T WHILE-berechenbar ist. (4)

a)

```
x1 = m + 0;
x2 = n + 1;
WHILE(x1 ≠ 0){
   x2 = x2 - 1;
   x1 = x1 - 1
};
WHILE(x2 ≠ 0){
   x1 = x1 + 1
};
x1 = x3 + 1
```

(✓)

Eingabe auf erste Variablen erfolgt automatisch

-1

b) $\chi_T(m) = \begin{cases} 1 & \exists n \in \mathbb{N} : 3^n = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ✓

```
x1 = m
if(x1=1){x4=1}
x2 = 1
x3 = x1
WHILE(x3≠0){
   x2 = x2·3
   if(x2=x1){x4=1}
   x3 = x3-1
}
x1 = 0
if(x4=1){x1=1}
```

✓ ✓

-1

6/8

Hausaufgabe 4.6 (Berechenbarkeit) (8)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Funktion f aus Hausaufgabe 4.5 (a) ist LOOP-berechenbar.

(b) Die Funktion f aus Hausaufgabe 4.5 (a) ist WHILE-berechenbar.

(c) Die Funktion χ_T aus Hausaufgabe 4.5 (b) ist LOOP-berechenbar.

(d) Die Funktion h aus Hausaufgabe 4.4 ist LOOP-berechenbar.

a) Nein die Funktion ist nicht LOOP-berechenbar, da nicht Total. ✓

b) Ja, siehe angegebenes Programm. ✓

c) Ja, ($x_1 = n$)

```
if(x1=1){x4=1}
x2=1
x3=x1
LOOP(x3){
    x2=x2·3
    if(x2=x1){x4=1}
}
x1=0
if(x4=1){x1=1}
```

✓

d) Ja, jede Primitiv-Rekursive Funktion ist LOOP-Berechenbar.

$$h(n,a,b) = \begin{cases} b+1 \text{ Nachfolger-Funktion} & \text{falls } n = 0 \\ a \text{ Projektion} & \text{falls } n = 1 \text{ und } b = 0 \\ 0 \text{ Konstante-Null-Funktion} & \text{falls } n = 2 \text{ und } b = 0 \\ 1 \text{ Konstante-Eins-Funktion} & \text{falls } n \geq 3 \text{ und } b = 0 \\ h(n-1, a, h(n,a,b-1)) & \text{sonst} \end{cases}$$

Beachte dafür nochmal genauer die Definition primitiver Rekursion.

Primitiv-Rekursiver-Aufruf (Vorgänger-Funktion ≥ 0, Projektion, P-R-A(Projekt, Projekt, Vor-Funktion ≥ 0))
P-R-A

$h(n,a,b)$ ist Primitiv Rekursiv

6/8