Turingmaschine

Transformationssemantik

- Für Berechnung Funktionen & Modularität
- Eingabe übersetzt in Bandinhalt bei Akzeptanz
  - Band vor Kopf leer
  - Ausgabe beginnend unter Kopf bis zum ersten $\square$
  - Band dahinter leer
- Beispiel §2.5 aus VL 2 berechnet

$$\{(ww^R, \varepsilon) \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

§3.1 Definition (Transformationssemantik; *input-output relation*)

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, \square, q_0, q_+, q_-)$ TM und $\Gamma_M = \Gamma \setminus \{\square\}$

$$T(M) = \{(w, u) \in \Sigma^* \times \Gamma_M^* \mid \exists x, y \in \{\square\}^* \colon \varepsilon\ q_0\ w\square \vdash_M^* x\ q_+\ uy\}$$

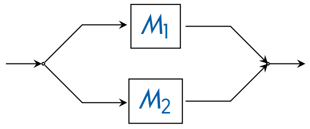
Operationen auf Turingmaschinen

§3.2 Theorem (Vereinigung)

Gegeben Turingmaschinen
$M_1 = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, \square, q_0, q_+, q_-)$ und $M_2 = (P, \Sigma, \Gamma, \nabla, \square, p_0, p_+, p_-)$
existiert TM M mit $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$ und $T(M) = T(M_1) \cup T(M_2)$

Beweisansatz

1. Nutze neuen Startzustand r_0
2. Neue Übergänge ohne Änderungen zu alten Startzuständen q_0 und p_0
3. M_1 und M_2 laufen normal, wobei alle Übergänge in p_+ oder p_- stattdessen in q_+ bzw. q_- gehen



Operationen auf Turingmaschinen

§3.2 Theorem (Vereinigung)

Gegeben Turingmaschinen
$M_1 = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, \square, q_0, q_+, q_-)$ und $M_2 = (P, \Sigma, \Gamma, \nabla, \square, p_0, p_+, p_-)$
existiert TM M mit $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$ und $T(M) = T(M_1) \cup T(M_2)$

Beweis

OBdA sei $Q \cap P = \emptyset$ und $r_0 \notin Q \cup P$. Konstruiere TM

$$\begin{aligned}
M &= \big(Q \cup P \cup \{r_0\}, \Sigma, \Gamma, \Delta \cup \nabla \cup R, \square, r_0, q_+, q_-\big) \\
R &= \big\{(r_0, \gamma) \to (q_0, \gamma, \diamond) \mid \gamma \in \Gamma\big\} \cup \\
&\quad \big\{(r_0, \gamma) \to (p_0, \gamma, \diamond) \mid \gamma \in \Gamma\big\} \cup \\
&\quad \big\{(p, \gamma) \to (q_+, \gamma', d) \mid (p, \gamma) \to (p_+, \gamma', d) \in \nabla\big\} \cup \\
&\quad \big\{(p, \gamma) \to (q_-, \gamma', d) \mid (p, \gamma) \to (p_-, \gamma', d) \in \nabla\big\}
\end{aligned}$$

Dann $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$ und $T(M) = T(M_1) \cup T(M_2)$ $\square$

Operationen auf Turingmaschinen

$\Gamma_M = \Gamma \setminus \{\square\}$

§3.3 Definition (normierte TM; *standardized TM*)

TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, \square, q_0, q_+, q_-)$ **normiert**, falls $u \in \{\square\}^*$ und $v \in \Gamma_M^*\{\square\}^*$ für alle $w \in \Sigma^*$, $u, v \in \Gamma^*$ mit $\varepsilon\ q_0\ w\square \vdash_M^*\ u\ q_+\ v$

Notizen

- Normierte TM kann nur akzeptieren, falls Band links des Kopfes aus $\{\square\}^*$ und Band unter und rechts des Kopfes aus $\Gamma_M^*\{\square\}^*$
- Konstruieren meist normierte TM
- Vereinigung normierter TM gemäß Theorem §3.2 ist normiert

Operationen auf Turingmaschinen

§3.4 Definition (Verkettung; *composition*)

Verkettung $R_1 \mathbin{;} R_2$ von Relationen $R_1 \subseteq A \times B$ und $R_2 \subseteq B \times C$

$$R_1 \mathbin{;} R_2 = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \colon (a, b) \in R_1,\ (b, c) \in R_2\}$$

Notizen

- Reihenschaltung (Hintereinanderschaltung)
- Erhalten für $\text{verdoppeln} = \{(n, 2n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$\text{verdoppeln} \mathbin{;} \text{verdoppeln} = \{(n, 4n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Operationen auf Turingmaschinen

$\Gamma_{M_1} = \Gamma \setminus \{\square\}$

§3.5 Theorem (Verkettung)

Gegeben TM
$M_1 = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, \square, q_0, q_+, q_-)$ und $M_2 = (P, \Gamma_{M_1}, \Psi, \nabla, \square, p_0, p_+, p_-)$
wobei M_1 normiert. Dann existiert TM M mit $T(M) = T(M_1) \mathbin{;} T(M_2)$.
Falls M_2 normiert ist, dann ist M normiert.

Beweisansatz

1. Starte M_1
2. Starte M_2 bei Akzeptanz von M_1
   (Normierung für Ausgangssituation)
3. M_2 läuft normal

$$\to \boxed{M_1} \to \boxed{M_2} \to$$

Operationen auf Turingmaschinen

§3.5 Theorem (Verkettung)

Gegeben TM
$M_1 = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, \square, q_0, q_+, q_-)$ und $M_2 = (P, \Gamma_{M_1}, \Psi, \nabla, \square, p_0, p_+, p_-)$
wobei M_1 normiert. Dann existiert TM M mit $T(M) = T(M_1) \mathbin{;} T(M_2)$.
Falls M_2 normiert ist, dann ist M normiert.

Beweis

OBdA sei $Q \cap P = \emptyset$. Wir konstruieren TM

$$M = (Q \cup P, \Sigma, \Psi, \Delta \cup \nabla \cup R, \square, q_0, p_+, p_-)$$
$$R = \{(q_+, \gamma) \to (p_0, \gamma, \diamond) \mid \gamma \in \Gamma\}$$

Dann $T(M) = T(M_1) \mathbin{;} T(M_2)$ $\square$

Operationen auf Turingmaschinen

§3.6 Definition (Iteration; *iteration*)

Iteration R^* (reflexive, transitive Hülle) der Relation $R \subseteq A \times A$

$$R^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n \qquad \text{mit} \qquad R^0 = \mathrm{id}_A \qquad \text{und} \qquad R^{n+1} = R^n \mathbin{;} R$$

Notizen

- Beliebig häufige Wiederholung der Relation
- Erhalten für $\text{verdoppeln} = \{(n, 2n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$\text{verdoppeln}^* = \{(n, 2^m \cdot n) \mid m, n \in \mathbb{N}\}$$

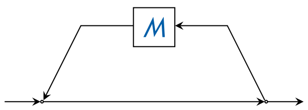
Operationen auf Turingmaschinen

§3.7 Theorem (Iteration)

Sei $M = (Q, \Gamma_M, \Gamma, \Delta, \Box, q_0, q_+, q_-)$ normierte TM.
Dann existiert normierte TM N mit $T(N) = T(M)^*$

Beweisansatz

1. Nutze neuen Startzustand p_0 und neuen Akzeptanzzustand p_+
2. Übergang von p_0 zu p_+ (Abbruch)
3. Übergang von p_0 zu q_0 (Iteration)
4. M läuft normal; bei Erreichen von q_+ zurück in Startzustand p_0



Operationen auf Turingmaschinen

§3.7 Theorem (Iteration)

Sei $M = (Q, \Gamma_M, \Gamma, \Delta, \Box, q_0, q_+, q_-)$ normierte TM.
Dann existiert normierte TM N mit $T(N) = T(M)^*$

Beweis

Seien $p_0 \notin Q$ und $p_+ \notin Q$ mit $p_0 \neq p_+$. Wir konstruieren TM

$$\begin{aligned} N &= (Q \cup \{p_0, p_+\}, \Gamma_M, \Gamma, \Delta \cup R, \Box, p_0, p_+, q_-) \\ R &= \{(p_0, \gamma) \to (p_+, \gamma, \diamond) \mid \gamma \in \Gamma\} \cup \\ &\quad\ \{(p_0, \gamma) \to (q_0, \gamma, \diamond) \mid \gamma \in \Gamma\} \cup \\ &\quad\ \{(q_+, \gamma) \to (p_0, \gamma, \diamond) \mid \gamma \in \Gamma\} \end{aligned}$$

Dann $T(N) = T(M)^*$ $\Box$

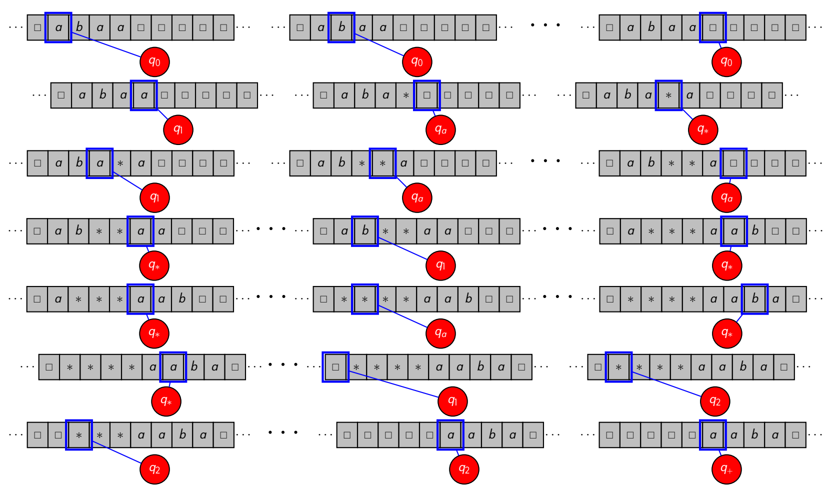
Mehrband-Turingmaschinen

§3.8 Beispiel (Reversal-Turingmaschine)

TM $(\{q_0, q_1, q_a, q_b, q_*, q_2, q_+, q_-\}, \{a, b\}, \{a, b, *, \Box\}, \Delta, \Box, q_0, q_+, q_-)$

$(q_0, a) \to (q_0, a, \triangleright)$	$(q_0, b) \to (q_0, b, \triangleright)$	$(q_0, \Box) \to (q_1, \Box, \triangleleft)$
$(q_1, a) \to (q_a, *, \triangleright)$	$(q_1, b) \to (q_b, *, \triangleright)$	$(q_1, *) \to (q_1, *, \triangleleft)$
$(q_1, \Box) \to (q_2, \Box, \triangleright)$	$(q_a, \Box) \to (q_*, a, \triangleleft)$	$(q_b, \Box) \to (q_*, b, \triangleleft)$
$(q_a, a) \to (q_a, a, \triangleright)$	$(q_a, b) \to (q_a, b, \triangleright)$	$(q_a, *) \to (q_a, *, \triangleright)$
$(q_b, a) \to (q_b, a, \triangleright)$	$(q_b, b) \to (q_b, b, \triangleright)$	$(q_b, *) \to (q_b, *, \triangleright)$
$(q_*, a) \to (q_*, a, \triangleleft)$	$(q_*, b) \to (q_*, b, \triangleleft)$	$(q_*, *) \to (q_1, *, \triangleleft)$
$(q_2, a) \to (q_+, a, \diamond)$	$(q_2, b) \to (q_+, b, \diamond)$	$(q_2, *) \to (q_2, \Box, \triangleright)$

Mehrband-Turingmaschinen



Mehrband-Turingmaschinen

Notizen

- Viele Operationen nötig für Navigation
- Oft viele Läufe zwischen Ein- & Ausgabe nötig
- Erhöhter Komfort durch mehrere Bänder (und intuitiver)

Mehrband-Turingmaschinen

§3.9 Definition (k-Band-Turingmaschine; *k-tape Turing machine*)

k-Band-Turingmaschine ist Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, \square, q_0, q_+, q_-)$

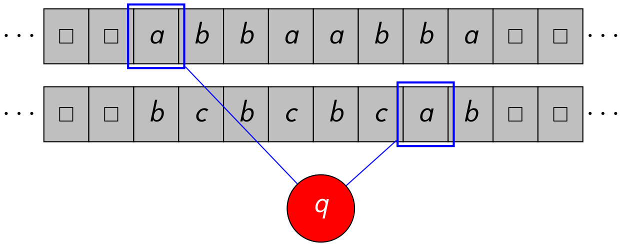
- endl. Menge Q von Zuständen mit $Q \cap \Gamma = \emptyset$
- endl. Menge Σ von Eingabesymbolen
- endl. Menge Γ von Arbeitssymbolen mit $\Sigma \subseteq \Gamma$
- Übergangsrelation $\Delta \subseteq$ $\Big(\big(Q \setminus \{q_+, q_-\}\big) \times \Gamma^k\Big) \times \Big(Q \times \big(\Gamma \times \{\triangleleft, \triangleright, \diamond\}\big)^k\Big)$
- Leersymbol $\square \in \Gamma \setminus \Sigma$ $\qquad (\Gamma_M = \Gamma \setminus \{\square\})$
- Startzustand $q_0 \in Q$
- Akzeptierender Zustand $q_+ \in Q$
- Ablehnender Zustand $q_- \in Q$

$\triangleleft$ = gehe nach links; $\triangleright$ = gehe nach rechts; $\diamond$ = keine Bewegung

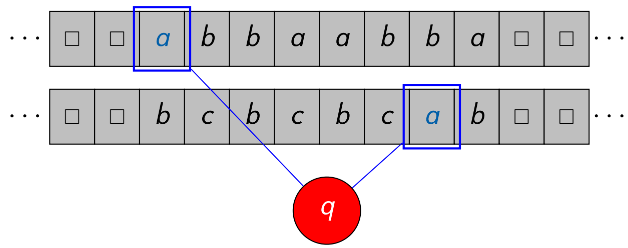
Mehrband-Turingmaschinen

Notizen

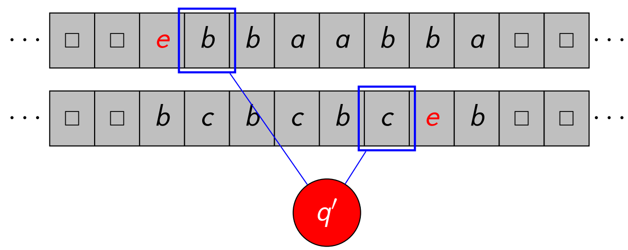
- k Arbeitsbänder (gleiches Arbeitsalphabet)
- k unabhängige Lese- & Schreibköpfe (unabhängig beweglich)
- Übergänge $\tau \in \Big(\big(Q \setminus \{q_+, q_-\}\big) \times \Gamma^k\Big) \times \Big(Q \times \big(\Gamma \times \{\triangleleft, \triangleright, \diamond\}\big)^k\Big)$
  - Aktueller globaler Zustand
  - Inhalt aktuellen Zellen auf allen k Bändern
  - Globaler Zielzustand
  - Neuer Inhalt aller k Zellen
  - k Bewegungsrichtungen für k Köpfe



Mehrband-Turingmaschinen



vom Übergang $(q, \langle a, a\rangle) \to (q', \langle (e, \triangleright), (e, \triangleleft)\rangle)$ überführt in



Mehrband-Turingmaschinen

- Ausgangssituation
  - Eingabe auf <u>erstem</u> Band; andere Zellen & Bänder enthalten □
  - TM in Startzustand q_0
  - Kopf <u>erstes Band</u> auf erstem Symbol der Eingabe
- Übergänge gemäß Δ
- Haltebedingung
  - Aktueller Zustand final; akzeptierend q_+ oder ablehnend q_-
  - Kein passender Übergang $\rightarrow$ TM hält <u>nicht</u> ordnungsgemäß

Akzeptanz Eingabe
Existenz Übergänge von Ausgangssituation in akzeptierenden Zustand

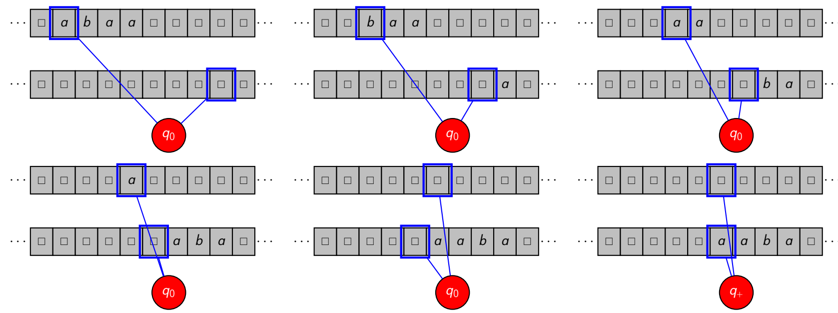
Ausgabe auf <u>letztem</u> Band (Band k) (normiert mind. auf letztem Band)

Mehrband-Turingmaschinen

§3.10 Beispiel (2-Band-Turingmaschine)

2-Band-TM $M = (\{q_0, q_+, q_-\}, \{a, b\}, \{a, b, \square\}, \Delta, \square, q_0, q_+, q_-)$

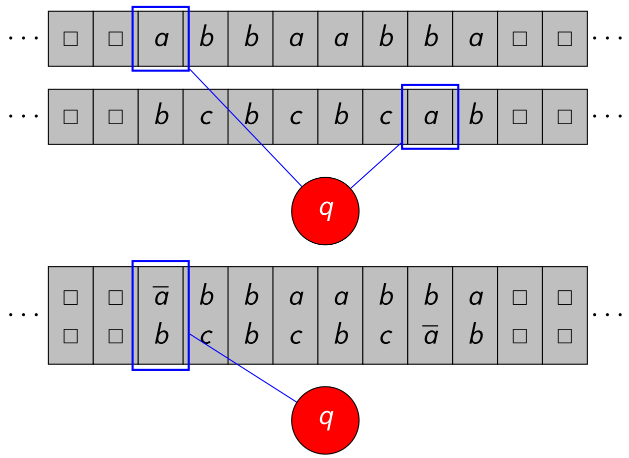
$(q_0, \langle a, \square\rangle) \rightarrow (q_0, \langle(\square, \triangleright), (a, \triangleleft)\rangle)$ $(q_0, \langle b, \square\rangle) \rightarrow (q_0, \langle(\square, \triangleright), (b, \triangleleft)\rangle)$
$(q_0, \langle \square, \square\rangle) \rightarrow (q_+, \langle(\square, \diamond), (\square, \triangleright)\rangle)$



Mehrband-Turingmaschinen

Simulation der k-Band-TM $(Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, \square, q_0, q_+, q_-)$ durch TM

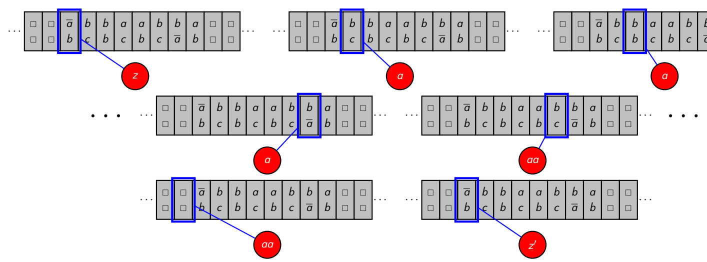
- Kodiere k Bänder durch 1 Band $\Gamma' = \Gamma \cup (\Gamma \cup \overline{\Gamma})^k$ (Tupelsymbole)
- Kodierung Position k Köpfe (Überstrich)



Mehrband-Turingmaschinen

Simulation Ableitungsschritt k-Band-TM durch TM

1. Merken aktueller Zustand in Zuständen $(q, p, \dots)$
   1.1 Zustand q k-Band-TM
   1.2 Phase p in Bearbeitung mit weiteren Informationen
2. Aufsammeln Symbole unter Köpfen durch Ablaufen Band



$z = (q, \text{lese}, \langle \star, \star\rangle)$ $a = (q, \text{lese}, \langle a, \star\rangle)$
$aa = (q, \text{zurück}, \langle a, a\rangle)$ $z' = (q, \text{wähle}, \langle a, a\rangle)$

Mehrband-Turingmaschinen

Simulation Ableitungsschritt k-Band-TM durch TM

1. …
2. …
3. Nichtdeterministische Auswahl passender Übergang

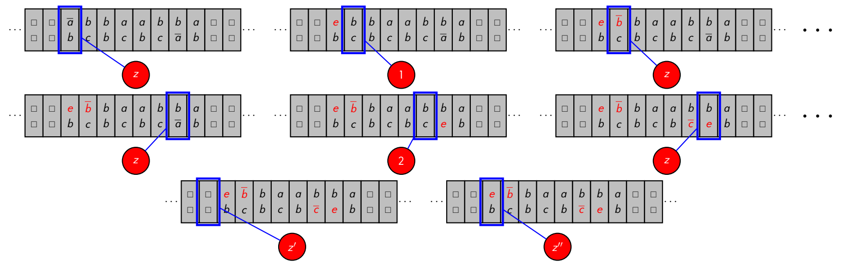
$$\boxed{((q, \text{wähle}, \langle s_1, \ldots, s_k \rangle), \vec{a}) \to ((q', \text{schreibe}, \vec{r}), \vec{a}, \diamond) \in \Delta}$$

für alle Übergänge $(q, \langle s_1, \ldots, s_k \rangle) \to (q', \vec{r})$ der k-Band-TM

Mehrband-Turingmaschinen

Simulation Ableitungsschritt k-Band-TM durch TM

1. …
2. …
3. …
4. Anpassen Arbeitsband (Schreibvorgänge & Bewegungen)



$z = (q', \text{schreibe}, \langle (e, \triangleright), (e, \triangleleft) \rangle)$ $\qquad$ $z'' = (q', \text{lese}, \langle \star, \star \rangle)$

Mehrband-Turingmaschinen

§3.11 Theorem

Für (normierte) k-Band-TM M existiert (norm.) TM N mit $T(N) = T(M)$

$$\longrightarrow \boxed{M_{\text{start}}} \longrightarrow \boxed{M_{\text{simul}}} \longrightarrow \boxed{M_{\text{ausgabe}}} \longrightarrow$$

Beweisskizze

1. M_{start}: Einrichten Ausgangssituation (Erweitern Eingabe auf Tupel)
2. M_{simul}: Simulation Ableitungsschritte (wie gerade illustriert)
3. M_{ausgabe}: Ausgabe letztes Band (Reduktion Tupel, Löschen) $\square$

Mehrband-Turingmaschinen

Standard-Operationen

- Band auf anderes Band kopieren
- TM M auf Band i laufen lassen ($M(i)$ ist diese k-Band-TM)

Konsequenzen

- Verwende Bänder wie Variablen
- Verwende k-Band-TM statt TM (äquivalente TM existiert)