3.Übung zur Vorlesung Lineare Algebra
für Informatik

Mathematisches Institut, Universität Leipzig

Dozent: Dr. habil. Jan-David Hardtke

Ausgabe: Donnerstag, 25.4.2024
Abgabe: Donnerstag, 2.5.2024 bis 11:00 Uhr im Moodle-Kurs

Wichtig: Die Abgabe muss in Form **einer** pdf-Datei erfolgen und ist mit Namen, Matrikelnummer, Übungstermin und Namen des Übungsleiters zu versehen. Die Aufgaben müssen **selbstständig** bearbeitet werden (d. h. keine Partnerabgabe).

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Für $x, y \in \mathbb{R}_+$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ setzen wir:

$$x \diamond y = xy \qquad \text{und} \qquad \lambda \odot x = x^\lambda$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}_+, \diamond, \odot)$ einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bildet.

Aufgabe 2 (1 Punkt pro Teilaufgabe)**.** Entscheiden Sie jeweils, ob es sich bei den folgenden Mengen um Unterräume des $\mathbb{R}^2$ bzw. des $\mathbb{R}^3$ handelt (und begründen Sie Ihre Antworten).

(i) $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2x \\ x^2 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$

(ii) $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 6x - y = z \right\}$

(iii) $U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : xy = 3z \right\}$

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K und es seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume von V.
Zeigen Sie: $U_1 \cup U_2$ ist ein Unterraum von V genau dann, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.