



UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

11. PL1 – Prädikatenlogische Resolution

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

03. Juli 2025
Leipzig

In der letzten Vorlesung

Grundresolution

Allgemeine Substitution

Unifikation

Einführung Prädikatenlogische Resolvente

Fahrplan für diese Vorlesung

Prädikatenlogische Resolvente

Lifting-Lemma

Resolutionssatz

Prädikatenlogische Resolution

Definition

Substitution $\sigma : V \rightarrow \mathcal{T}$ heißt **Variablenumbenennung** falls:
 $\sigma(x) \in \mathcal{V} \setminus V$ für alle $v \in V$, und σ ist injektiv.

Definition

Sei $\phi = \forall x_1 \dots \forall x_n \xi$ gleichheitsfreier Satz in SNF mit Matrix ξ in KNF und $M(\xi) = \{D_1, \dots, D_m\}$. Eine Klausel R heißt **(prädikatenlogische) Resolvente** von D_i und D_j (bzw. von ϕ), falls:

- 1 es existieren Variablenumbenennungen σ_1, σ_2 , so daß:

$$\text{frei}(D_i\sigma_1) \cap \text{frei}(D_j\sigma_2) = \emptyset$$

- 2 es existieren nichtleere $D'_i \subseteq D_i$ und $D'_j \subseteq D_j$ mit σ ist mgu von $\overline{D'_i}\sigma_1 \cup D'_j\sigma_2$, wobei $\overline{D'_i} = \{\overline{L} \mid L \in D'_i\}$ und
- 3 $R = \left((D_i\sigma_1 \setminus D'_i\sigma_1) \cup (D_j\sigma_2 \setminus D'_j\sigma_2) \right) \sigma$

Prädikatenlogische Resolution

Beispiele:

① Sei $\phi = \forall x \underbrace{(P(x) \wedge \neg P(f(f(x))))}_{\xi}$

- $M(\xi) = \{\underbrace{\{P(x)\}}_{D_1}, \underbrace{\{\neg P(f(f(x)))\}}_{D_2}\}$

- Variablenumbenennung $\sigma_1 = [x/y]$ und $\sigma_2 = []$ liefert

$$D_1\sigma_1 = \{P(y)\} \text{ und } D_2\sigma_2 = \{\neg P(f(f(x)))\}$$

- für $D'_1 = D_1$ und $D'_2 = D_2$ ist $\sigma = [y/f(f(x))]$ mgu von

$$\overline{D'_1}\sigma_1 \cup D'_2\sigma_2 = \{\neg P(y), \neg P(f(f(x)))\}$$

- $R = ((D_i\sigma_1 \setminus D'_i\sigma_1) \cup (D_j\sigma_2 \setminus D'_j\sigma_2))\sigma = (\emptyset \cup \emptyset)\sigma = \emptyset = \square$

Prädikatenlogische Resolution

Beispiele:

$$② \quad \phi = \forall x \forall z \underbrace{((P(f(x)) \vee P(z) \vee \neg Q(z)) \wedge (\neg P(x) \vee R(g(x), a)))}_{\xi}$$

- $M(\xi) = \underbrace{\{P(f(x)), P(z), \neg Q(z)\}}_{D_1}, \underbrace{\{\neg P(x), R(g(x), a)\}}_{D_2}$
- Variablenumbenennung: $\sigma_1 = []$, $\sigma_2 = [x/y]$ ergibt

$$D_1\sigma_1 = \underbrace{\{P(f(x)), P(z)\}}_{D'_1} \cup \{\neg Q(z)\},$$

$$D_2\sigma_2 = \underbrace{\{\neg P(y)\}}_{D'_2} \cup \{R(g(y), a)\}$$

- $\sigma = [z/f(x)][y/f(x)]$ ist mgu von

$$\overline{D'_1}\sigma_1 \cup D'_2\sigma_2 = \{\neg P(f(x)), \neg P(z), \neg P(y)\}$$

- Resolvente $R = ((D_1\sigma_1 \setminus D'_1\sigma_1) \cup (D_2\sigma_2 \setminus D'_2\sigma_2))\sigma$
 $= (\{\neg Q(z)\} \cup \{R(g(y), a)\})\sigma$
 $= \{\neg Q(f(x)), R(g(f(x)), a)\}$

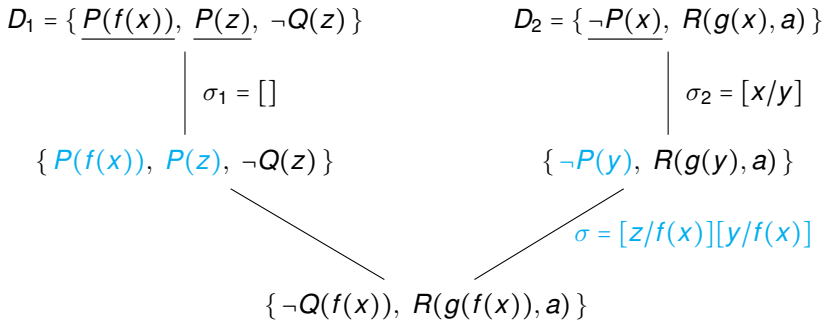
Prädikatenlogische Resolution

- wir übernehmen die Notation aus der AL und schreiben **Res** für den Resolutionoperator und **Res*** für die Resolutionshülle, d.h. für prädikatenlogische Klauselmengen M

$$\begin{aligned}\text{Res}(M) &= M \cup \{R \mid R \text{ ist Resolvente zweier Klauseln aus } M\} \\ \text{Res}^0(M) &= M, \text{Res}^{i+1}(M) = \text{Res}(\text{Res}^i(M)), \text{Res}^*(M) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{Res}^i(M)\end{aligned}$$

- für eine bessere Übersicht eignet sich wieder die graphische Darstellung – diesmal mit Angabe der Variablenumbenennung und des Unifikators
- Ziel ist es, den Resolutionssatz für die Prädikatenlogik zu beweisen, das heißt: Klauselmengen M sind unerfüllbar genau dann, wenn $\square \in \text{Res}^*(M)$

Resolvente – Graphische Darstellung



Anmerkung:

- ohne Variablenumbenennung wäre $\overline{P(f(x))}$ und $\neg P(x)$ nicht unifizierbar, und somit z.B. für

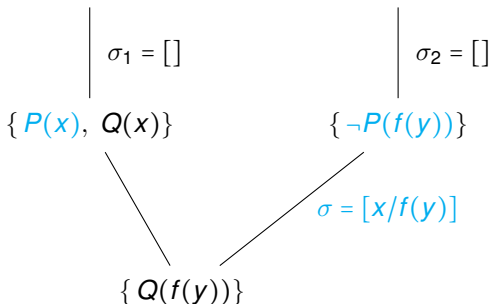
$\forall x (P(f(x)) \wedge \neg P(x))$ keine \square resolvierbar

Resolvente – Graphische Darstellung

$$D_1 = \{ \underline{P(x)}, Q(x) \}$$

$$D_2 = \{ \underline{\neg P(f(y))} \}$$

$$D_3 = \{ \neg Q(a) \}$$



Anmerkung:

- ohne Anwendung des Unifikators wäre $R = \{ Q(x) \}$, und somit im nächsten Schritt mit Hilfe von Klausel D_3 die \square ableitbar, aber

$$\forall x \forall y ((P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg P(f(y)) \wedge \neg Q(a)) \text{ erfüllbar}$$

Grundinstanzen

Definition

Ein Literal L' ist **Grundinstanz eines Literals** L , falls eine Substitution σ existiert mit: $L' = L\sigma$ und L' variablenfrei.

Beispiel: Gegeben Literal $L = P(x, f(x), g(a, y))$, dann

$$L' = P(a, f(a), g(a, b)) \quad \text{und} \quad L'' = P(f(c), f(f(c)), g(a, d))$$

Grundinstanzen via $\sigma' = [x/a, y/b]$ und $\sigma'' = [x/f(c), y/d]$.

Definition

Eine Klausel M' ist **Grundinstanz einer Klausel** M , falls eine Substitution σ existiert mit: $M' = M\sigma$ und M' variablenfrei.

Beispiel: Gegeben $M = \{P(x, f(x), g(a, y)), \neg Q(y, z)\}$, dann

Klausel $M' = \{P(a, f(a), g(a, b)), \neg Q(b, c)\}$, und

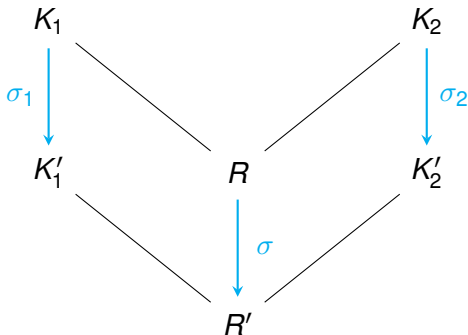
Klausel $M'' = \{P(f(c), f(f(c)), g(a, d)), \neg Q(d, e)\}$

Grundinstanzen via $\sigma' = [x/a, y/b, z/c]$, $\sigma'' = [x/f(c), y/d, z/e]$.

Lifting-Lemma

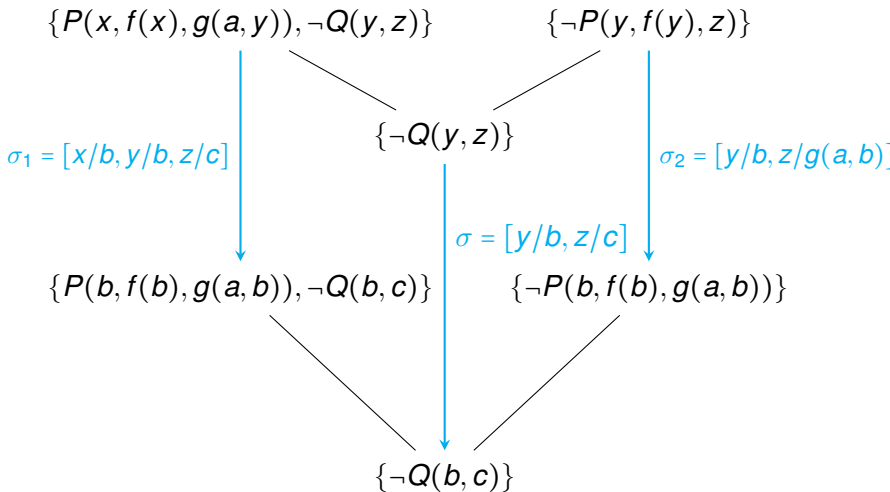
Proposition (Lifting-Lemma)

Seien K_1 und K_2 prädikatenlogische Klauseln und K'_1 sowie K'_2 entsprechende Grundinstanzen. Falls R' aussagenlogische Resolvente von $\{K'_1, K'_2\}$, dann existiert prädikatenlogische Resolvente R von $\{K_1, K_2\}$ mit R' ist Grundinstanz von R .



– Resolution
→ Grundinstanziierung

Lifting-Lemma – Beispiel



Lifting-Lemma

Beweis: Seien K_1 und K_2 prädikatenlogische Klauseln und $K'_1 = K_1\sigma_1$ sowie $K'_2 = K_2\sigma_2$ entsprechende Grundinstanzen. Offensichtlich existieren Variablenumbennungen u_1 und u_2 , so daß $\text{frei}(K_1 u_1) \cap \text{frei}(K_2 u_2) = \emptyset$. Es gilt, daß auch K'_1 und K'_2 Grundinstanzen von $K_1 u_1$ bzw. $K_2 u_2$ sind. Setze dazu $\sigma'_1 = u_1^{-1}\sigma_1$ und $\sigma'_2 = u_2^{-1}\sigma_2$, d.h.

$$K'_1 = (K_1 u_1)\sigma'_1 \quad \text{und} \quad K'_2 = (K_2 u_2)\sigma'_2.$$

Da $K_1 u_1$ und $K_2 u_2$ variablendisjunkt gilt mit $\sigma' = \sigma'_1\sigma'_2$ auch:

$$K'_1 = (K_1 u_1)\sigma' \quad \text{und} \quad K'_2 = (K_2 u_2)\sigma'.$$

Nach Voraussetzung ist R' aussagenlogische Resolvente von K'_1 und K'_2 . Somit existiert Literal L mit $L \in K'_1$ und $\bar{L} \in K'_2$, so daß:

$$R' = (K'_1 \setminus \{L\}) \cup (K'_2 \setminus \{\bar{L}\}).$$

Nach Definition existiert mindestens ein $Lit \in K_1 u_1$ mit $Lit\sigma' = L$. Sammle alle auf via $\{L_1, \dots, L_m\} = \{Lit \in K_1 u_1 \mid Lit\sigma' = L\}$ und analog für \bar{L} mittels $\{L'_1, \dots, L'_n\} = \{Lit' \in K_2 u_2 \mid Lit'\sigma' = \bar{L}\}$.

Lifting-Lemma

Folglich ist σ' Unifikator für $M = \{L_1, \dots, L_m, \overline{L'_1}, \dots, \overline{L'_n}\}$. Sei σ mgu von M . Dann ist

$$R = ((K_1 u_1 \setminus \{L_1, \dots, L_m\}) \cup (K_2 u_2 \setminus \{L'_1, \dots, L'_n\})) \sigma$$

prädikatenlogische Resolvente von K_1 und K_2 . Da σ mgu existiert Substitution τ mit $\sigma\tau = \sigma'$. Wir rechnen:

$$\begin{aligned} R' &= (K'_1 \setminus \{L\}) \cup (K'_2 \setminus \{\overline{L}\}) \\ &= ((K_1 u_1) \sigma' \setminus \{L\}) \cup ((K_2 u_2) \sigma' \setminus \{\overline{L}\}) \\ &= ((K_1 u_1) \sigma' \setminus \{L_1 \sigma', \dots, L_m \sigma'\}) \cup ((K_2 u_2) \sigma' \setminus \{L'_1 \sigma', \dots, L'_n \sigma'\}) \\ &= ((K_1 u_1 \setminus \{L_1, \dots, L_m\}) \cup (K_2 u_2 \setminus \{L'_1, \dots, L'_n\})) \sigma' \quad (\text{alle Lit!}) \\ &= ((K_1 u_1 \setminus \{L_1, \dots, L_m\}) \cup (K_2 u_2 \setminus \{L'_1, \dots, L'_n\})) \sigma \tau \\ &= (((K_1 u_1 \setminus \{L_1, \dots, L_m\}) \cup (K_2 u_2 \setminus \{L'_1, \dots, L'_n\})) \sigma) \tau \\ &= R\tau \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß R' Grundinstanz (via τ) von R ist. □

Resolutionssatz

Theorem (Robinson, 1965)

Sei $\phi = \forall x_1 \dots \forall x_n \xi$ gleichheitsfreier Satz in SNF mit Matrix ξ in KNF und $M(\xi) = \{D_1, \dots, D_l\}$. Es gilt:

$$\phi \text{ unerfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad \square \in \text{Res}^*(M(\xi))$$

Beweis: (\Leftarrow) Korrektheit. Für ψ sei $\forall \psi$ der universelle Abschluß von ψ . Aufgrund der Distributivität gilt $\phi \equiv \bigwedge_{k=1}^l \forall D_k$. Wir zeigen zuerst: Falls R Resolvente zweier Klauseln D_i und D_j , dann $\forall D_i \wedge \forall D_j \models \forall R$ ([prädikatenlogisches Resolutionslemma](#)).

Sei (\mathfrak{A}, β) Interpretation mit $(\mathfrak{A}, \beta)(\forall D_i) = (\mathfrak{A}, \beta)(\forall D_j) = 1$. Sei

$$\begin{aligned} R &= ((D_i\sigma_1 \setminus \{L_1, \dots, L_m\}) \cup (D_j\sigma_2 \setminus \{L'_1, \dots, L'_n\}))\sigma \\ &\supseteq ((D_i\sigma_1)\sigma \setminus \{L_1\sigma, \dots, L_m\sigma\}) \cup ((D_j\sigma_2)\sigma \setminus \{L'_1\sigma, \dots, L'_n\sigma\}) \\ &\quad \text{(nicht zwangsweise ausschöpfend)} \end{aligned}$$

$$= (D_i\sigma_1\sigma \setminus \{L\}) \cup (D_j\sigma_2\sigma \setminus \{\bar{L}\})$$

mit σ_1, σ_2 Variablenu. und σ mgu für $\{L_1, \dots, L_m, \bar{L}'_1, \dots, \bar{L}'_n\}$
und $L = L_1\sigma = \dots = L_m\sigma = \bar{L}'_1\sigma = \dots = \bar{L}'_n\sigma$.

Resolutionssatz

Theorem (Robinson, 1965)

Sei $\phi = \forall x_1 \dots \forall x_n \xi$ gleichheitsfreier Satz in SNF mit Matrix ξ in KNF und $M(\xi) = \{D_1, \dots, D_l\}$. Es gilt:

$$\phi \text{ unerfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad \square \in \text{Res}^*(M(\xi))$$

Beweis: (\Leftarrow) Korrektheit. Zz. Falls R Resolvente von D_i und D_j , dann $\forall D_i \wedge \forall D_j \models \forall R$. Angenommen $(\mathfrak{A}, \beta)(\forall R) = 0$, d.h. es existieren $u_1, \dots, u_n \in U^{\mathfrak{A}}$ mit $(\mathfrak{A}, \underbrace{\beta_{[x_1 \mapsto u_1, \dots, x_n \mapsto u_n]}}_{\beta'})(R) = 0$ wobei

$\{x_1, \dots, x_n\} = \text{frei}(R)$ (Semantik). Somit $(\mathfrak{A}, \beta')(D_i \sigma_1 \sigma \setminus \{L\}) = 0$ und auch $(\mathfrak{A}, \beta')(D_j \sigma_2 \sigma \setminus \{\bar{L}\}) = 0$ (Disjunktion). Aus Annahme $(\mathfrak{A}, \beta)(\forall D_i) = (\mathfrak{A}, \beta)(\forall D_j) = 1$ folgt $(\mathfrak{A}, \beta')(D_i \sigma_1 \sigma) = 1$ und $(\mathfrak{A}, \beta')(D_j \sigma_2 \sigma) = 1$. Folglich müßte $(\mathfrak{A}, \beta')(L) = (\mathfrak{A}, \beta')(\bar{L}) = 1$. Widerspruch.

Resolutionssatz

Theorem (Robinson, 1965)

Sei $\phi = \forall x_1 \dots \forall x_n \xi$ gleichheitsfreier Satz in SNF mit Matrix ξ in KNF und $M(\xi) = \{D_1, \dots, D_l\}$. Es gilt:

$$\phi \text{ unerfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad \square \in \text{Res}^*(M(\xi))$$

Beweis: (\Leftarrow) Korrektheit. Es gilt: Falls R Resolvente zweier Klauseln D_i und D_j , dann $\forall D_i \wedge \forall D_j \models \forall R$.

Sei $\square \in \text{Res}^*(M(\xi))$. Somit existiert eine endliche \square -Deduktion basierend auf den Anfangsklauseln D_1, \dots, D_l . Folglich ergibt das obige prädikatenlogische Resolutionslemma

$$\bigwedge_{k=1}^l \forall D_k \models \forall \square$$

Da $\phi \equiv \bigwedge_{k=1}^l \forall D_k$ und $\forall \square = \square$ da $\text{frei}(\square) = \emptyset$ folgt

$$\phi \models \square$$

und somit ϕ unerfüllbar.

Resolutionssatz

Theorem (Robinson, 1965)

Sei $\phi = \forall x_1 \dots \forall x_n \xi$ gleichheitsfreier Satz in SNF mit Matrix ξ in KNF und $M(\xi) = \{D_1, \dots, D_l\}$. Es gilt:

$$\phi \text{ unerfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad \square \in \text{Res}^*(M(\xi))$$

Beweis: (\Rightarrow) Vollständigkeit. Sei ϕ unerfüllbar. Aufgrund der Vollständigkeit des Grundresolutionsalgorithmus existiert eine Folge von Klauseln K'_1, \dots, K'_k mit $K'_k = \square$ und für $1 \leq i \leq k$ gilt:

- K'_i ist Grundinstanz einer Klausel $D \in M(\xi)$, d.h.

$$K'_i = D[x_1/t_1] \dots [x_n/t_n] \text{ mit } t_1, \dots, t_n \in D(\phi), \text{ oder}$$

- K'_i ist aussagenlogische Resolvente zweier Klauseln K'_a und K'_b mit $a, b < i$

Wir konstruieren prädikatenlogische Klauseln K_i , so daß K'_i Grundinstanz von K_i und die korrespondierende Folge K_1, \dots, K_k prädikatenlogische \square -Deduktion ist.

Resolutionssatz

Theorem (Robinson, 1965)

Sei $\phi = \forall x_1 \dots \forall x_n \xi$ gleichheitsfreier Satz in SNF mit Matrix ξ in KNF und $M(\xi) = \{D_1, \dots, D_l\}$. Es gilt:

$$\phi \text{ unerfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad \square \in \text{Res}^*(M(\xi))$$

Beweis: (\Rightarrow) Vollständigkeit.

Seien K_1, \dots, K_{i-1} schon konstruiert. Zwei Fälle:

- Falls K'_i Grundinstanz von Klausel $D \in M(\xi)$, dann $K_i := D$
- Falls nicht, dann ist K'_i aussagenlogische Resolvente zweier Klauseln K'_a und K'_b mit $a, b < i$. Da K_1, \dots, K_{i-1} schon konstruiert, existieren prädikatenlogische Klauseln K_a und K_b mit $a, b < i$, so daß K'_a und K'_b Grundinstanzen von K_a bzw. K_b . Nach Lifting-Lemma existiert prädikatenlogische Resolvente K_i von K_a und K_b mit K'_i ist Grundinstanz von K_i . □

Resolution – Schlußbemerkungen

Praktische Probleme bei der Resolventenbildung:

- zu viele Wahlmöglichkeiten (Disjunktionsglieder, Literale)
- zu viele nutzlose Klauseln (Redundanz, Sackgassen)
- kombinatorische Explosion des Suchraums
(unendlich viele Resolventen bildbar)

Strategien und Heuristiken zur Effizienzsteigerung:

- Verbot bestimmter Schritte (P/N-restriktion)
- Priorisierung bestimmter Schritte (Einheitsklauseln)
- Achtung! Vollständigkeit darf nicht verloren gehen



UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

11. PL1 – Prädikatenlogische Resolution

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

03. Juli 2025
Leipzig