5.Übung zur Vorlesung Lineare Algebra
für Informatik

Mathematisches Institut, Universität Leipzig

Dozent: Dr. habil. Jan-David Hardtke

Ausgabe: Freitag, 10.5.2024
Abgabe: Donnerstag, 16.5.2024 bis 11:00 Uhr im Moodle-Kurs

Wichtig: Die Abgabe muss in Form **einer** pdf-Datei erfolgen und ist mit Namen, Matrikelnummer, Übungstermin und Namen des Übungsleiters zu versehen. Die Aufgaben müssen **selbstständig** bearbeitet werden (d. h. keine Partnerabgabe).

Aufgabe 1 (1 Punkt pro Teilaufgabe)**.** Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Abbildungen linear sind und begründen Sie Ihre Antworten. Dabei bezeichnet $V_{\mathbb{R}}$ den Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

1) $F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit
$$F_1(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ x \end{pmatrix}.$$

2) $F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit
$$F_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - 2y \\ 3y \end{pmatrix}.$$

3) $F_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit
$$F_3\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 5x - 2y + z.$$

4) $F_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit
$$F_4\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}.$$

5) $F_5 : V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$ mit
$$F_5(f)(t) = f(t^3).$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K. Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung und sei U ein Unterraum von W. Zeigen Sie, dass das Urbild $F^{-1}[U]$ ein Unterraum von V ist.

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.** Sei K ein Körper und sei V ein Vektorraum über K. Ferner seien $F, G : V \to V$ zwei lineare Abbildungen.
Zeigen Sie:

$$G \circ F = F \circ G \quad \Rightarrow \quad G[\ker(F)] \subseteq \ker(F) \text{ und } G[\operatorname{Im}(F)] \subseteq \operatorname{Im}(F)$$