Beweissystem

Notizen

- **Beweissystem** = Formelmenge $\mathcal{F}$ + Inferenzregeln $\mathcal{R}$
- **Beweis** = Folge $(F_1, \ldots, F_n)$ von Formeln aus $\mathcal{F}$; für alle $1 \leq i \leq n$ Formel F_i vermittels Regel aus $\mathcal{R}$ aus $\{F_1, \ldots, F_{i-1}\}$ herleitbar

Beweissystem

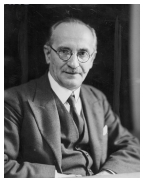
Łukasiewicz-Logik

- Formelmenge $\mathcal{F}$ = aussagenlogische Formeln über $\to$ und $\neg$
- Inferenzregeln $\mathcal{R}$

$$\vdash F \to (F' \to F)$$
$$\vdash (F \to (F' \to F'')) \to ((F \to F') \to (F' \to F''))$$
$$\vdash (\neg F \to \neg F') \to (F' \to F)$$
$$\{F, F \to F'\} \vdash F' \qquad \text{(modus ponens)}$$

Jan Łukasiewicz (* 1878; † 1956)

- Poln. Logiker & Philosoph
- Beiträge Aussagenlogik & mehrwertiger Logik
- Erfinder polnischer Notation



Beweissystem

§11.1 Definition (abstraktes Beweissystem; *abstract proof system*)

Abstraktes Beweissystem über Γ^* ist Paar $(\mathcal{B}, f)$ mit

- $\mathcal{B} \subseteq \Sigma^*$ entscheidbar (Menge gültiger Beweise)
- $f : \mathcal{B} \to \Gamma^*$ berechenbar und total (Zuordnung Beweis zu Aussage)

Łukasiewicz-Logik

- Beweise $\mathcal{B}$ offenbar entscheidbar
- Bewiesene Aussage = letztes Element des Beweises
  Damit f berechenbar

Beweissystem

§11.2 Definition (korrekt, vollständig; *sound, complete*)

Abstraktes Beweissystem $(\mathcal{B}, f)$ über Γ^* ist für Aussagen $\mathcal{T} \subseteq \Gamma^*$

- **korrekt** falls $f(B) \in \mathcal{T}$ für alle $B \in \mathcal{B}$
  (jeder Beweis "beweist" Aussage aus $\mathcal{T}$)
- **vollständig** falls $B \in \mathcal{B}$ mit $f(B) = F$ für alle $F \in \mathcal{T}$ existiert
  (jede Aussage aus $\mathcal{T}$ beweisbar)

Notiz

- Łukasiewicz-Logik für aussagenlog. Tautologien über $\to$ und $\neg$
  - Korrekt — nur Tautologien beweisbar
  - Vollständig — jede Tautologie beweisbar

Satz von Gödel

§11.3 Theorem (Unvollständigkeitssatz von Gödel)

Jedes abstrakte Beweissystem ist für WA inkorrekt oder unvollständig

Beweis

Sei $(\mathcal{B}, f)$ korrektes und vollständiges abstraktes Beweissystem für WA. Da $\mathcal{B} \neq \emptyset$ und $\mathcal{B}$ entscheidbar, ist $\mathcal{B}$ rekursiv aufzählbar. Also existiert $g\colon \mathbb{N} \to \mathcal{B}$ surjektiv und berechenbar. Dann $(g\,;f)\colon \mathbb{N} \to \Gamma^*$ berechenbar. Aus Korrektheit folgt $f\colon \mathcal{B} \to \text{WA}$ und aus Vollständigkeit folgt Surjektivität von $f\colon \mathcal{B} \to \text{WA}$. Also $(g\,;f)\colon \mathbb{N} \to \text{WA}$ surjektiv. Damit WA rekursiv aufzählbar im Widerspruch zu Theorem §10.15 ↯ □

Satz von Gödel

Konsequenzen

- Jedes vollständige Beweissystem für WA ist inkorrekt
- Jedes korrekte Beweissystem für WA ist unvollständig
  (nicht alle wahren Sätze von WA lassen sich beweisen)

Kurt Gödel (* 1906; † 1978)

- Öster.-amer. Logiker, Mathematiker & Philosoph
- Bedeutendster Logiker; Gödel-Nummern
- Widerlegte Hilbertsche Grundsatzprogramm
  (alle Sätze basierend auf Arithmetik ableitbar)

Komplexitätstheorie

Entscheidbarkeit

- Grundlegende Problem-Lösbarkeit
- Keine Beschränkung der Ressourcen (Zeit, Speicher)
- Entscheidbar $\neq$ praktisch lösbar

Komplexitätstheorie

- Obere & untere Schranken Ressourcen für jedwede Problemlösung
- Genauere Charakterisierung (Unterteilung) der Entscheidbarkeit
  (effizient, ineffizient lösbar, praktisch unlösbar, unentscheidbar)

Komplexitätstheorie

Problem des Handelsreisenden

- Geg. n Orte, Distanzmatrix $D \in \mathbb{N}^{n \times n}$ für Orte & Länge $\ell \in \mathbb{N}$
- Existiert Permutation $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ von $(1, \ldots, n)$ mit $D(\pi) \leq \ell$

$$D(\pi) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} D_{\pi_i, \pi_{i+1}}\right) + D_{\pi_n, \pi_1} \quad \text{(Summe Distanzen in Rundreise)}$$

- Entscheidbar per Berechnung $D(\pi)$ für alle $n!$ Permutationen π
- Sei $n = 40$ und berechne $D(\pi)$ für 10^{11} Permutationen π pro s
- Laufzeit ca. $2,6 \cdot 10^{29}$ Jahre (Alter Universum ca. $1,4 \cdot 10^{10}$ Jahre)

Komplexitätstheorie

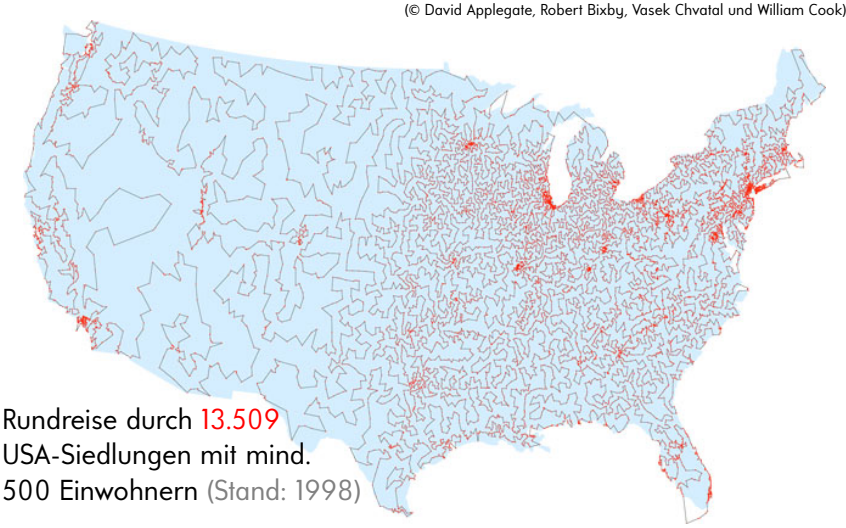
Optimale Rundreise durch 15 größte Städte Deutschlands

$15! \approx 1,3 \cdot 10^{12}$

(© Amirki)

Komplexitätstheorie

(© David Applegate, Robert Bixby, Vasek Chvatal und William Cook)



Rundreise durch 13.509 USA-Siedlungen mit mind. 500 Einwohnern (Stand: 1998)

Komplexitätstheorie

Notizen

- Obere Schranke: Analyse "guter" Lösungsalgorithmus
- Untere Schranke: Problemanalyse & Reduktionen

Beobachtung

- Effizientere Algorithmen für Handelsreisenden-Problem bekannt
- Problem bleibt "schwierig"

Komplexitätstheorie

Kürzester Weg

- Geg. Orte $s, z \in \{1, \ldots, n\}$, Distanzmatrix $D \in \mathbb{N}^{n \times n}$, Länge $\ell \in \mathbb{N}$
- Existiert Pfad π von s nach z mit Länge $D(\pi) \leq \ell$

- Entscheidbar per Berechnung kürzester Pfad von s nach z
- Effizient und selbst für sehr große n lösbar

Notizen

- Entscheidbarkeit unterscheidet beide Probleme nicht
- Unterscheidung effizient lösbar & schwierig (aber lösbar) gesucht

Polynomielle Berechenbarkeit

§11.4 Definition (Notation für obere Schranken; *big-O notation*)

Gegeben Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\mathcal{O}(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists x_0, a, b \in \mathbb{N}, \forall x \geq x_0 : g(x) \leq a \cdot f(x) + b\}$$

Notizen

- $4x^2 + 3x + 3 \in \mathcal{O}(x^2)$
- $x \cdot \log x \in \mathcal{O}(x^2)$
- $\sqrt{x} \in \mathcal{O}(x)$

Polynomielle Berechenbarkeit

§11.5 Definition (polyn. berechenbar; *polynomially computable*)

(Totale) Funktion $g : \Sigma^* \to \Gamma^*$ **polynomiell berechenbar**
falls det. TM M und Polynom P existieren mit

- $T(M) = g$ und
- M hält auf Eingabe $w \in \Sigma^*$ nach höchstens $P(|w|)$ Schritten

Notizen

- Polynom sichert (weitreichende) Modellunabhängigkeit
- Polynom separiert exponentielles (und schlimmeres) Verhalten
- Polynomiell berechenbar impliziert berechenbar & total

Polynomielle Berechenbarkeit

§11.6 Definition (polyn. entscheidbar; *polynomially decidable*)

Problem $L \subseteq \Sigma^*$ **polynomiell entscheidbar**
falls charakteristische Funktion χ_L polynomiell berechenbar

$$\chi_L : \Sigma^* \to \{0,1\} \quad \text{mit} \quad \chi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Notizen

- Gleiche Begriffe für While-Programme, μ-Rekursion, etc.
  (polynomielle Transformationen)
- Berühmte Komplexitätsklasse **P**

$$\mathbf{P} = \{L \mid L \text{ polynomiell entscheidbar}\}$$

Nichtdeterminismus

Ausnahme

- Transformation TM in det. TM exponentiell
- Anderer Begriff polynomieller Entscheidbarkeit für nichtdet. TM
- Definition über Zertifikatverifikation
  (Alternative im Schöning-Buch)

Nichtdeterminismus

§11.7 Definition *(nondeterministically polynomially decidable)*

Problem $L \subseteq \Sigma^*$ **nichtdeterministisch polynomiell entscheidbar** falls Alphabet Γ, Relation $R \subseteq \Sigma^* \times \Gamma^*$ und $k \in \mathbb{N}$ existieren mit

- $\{w\#z \mid (w,z) \in R\} \in \mathsf{P}$ polynomiell entscheidbar und
- $w \in L$ gdw. $z \in \Gamma^*$ existiert mit $(w,z) \in R$ und $|z| \leq |w|^k$ für jedes $w \in \Sigma^*$

Notizen

- Polynomiell entscheidbare Zertifikatrelation R
- Zertifikate polynomieller Länge
- 2 berühmte Klassen

$$\mathbf{P} = \{L \mid L \text{ polynomiell entscheidbar}\}$$
$$\mathbf{NP} = \{L \mid L \text{ nichtdeterministisch polynomiell entscheidbar}\}$$

Nichtdeterminismus

Rucksack-Problem

- Geg. $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ in Binärkodierung (Gegenstandsgrößen & Rucksackgröße)
- Existiert $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$ mit $\sum_{i \in I} n_i = n$? (Kann Rucksack vollständig gefüllt werden?)
- Polynomielle Entscheidbarkeit unklar
- Nichtdet. polynomielle Entscheidbarkeit ja, in **NP**
  - Zertifikatrelation mit $\Gamma = \{0,1\}$

$$R = \left\{ (\mathrm{bin}(n_1)\# \cdots \#\, \mathrm{bin}(n_k)\#\, \mathrm{bin}(n), i_1 \cdots i_k) \;\middle|\; \sum_{\substack{\ell=1 \\ i_\ell \neq 0}}^{k} n_\ell = n \right\}$$

  - R polynomiell entscheidbar (While-Programm überprüft Summe)
  - Instanz w lösbar gdw. $\exists z \in \Gamma^k$ mit $(w,z) \in R$

Determinismus vs. Nichtdeterminismus

§11.8 Theorem

$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$

Beweis

Sei $L \in \mathbf{P}$. Wähle $\Gamma = \Sigma$, $R = \{(w,w) \mid w \in L\}$ und $k = 1$

$$\begin{aligned} w \in L &\iff (w,w) \in R \\ &\iff \exists z\colon (w,z) \in R \text{ und } |z| \leq |w| \end{aligned}$$

$\{w\#w \mid w \in L\}$ polynomiell entscheidbar, da $L \in \mathbf{P}$ □

Determinismus vs. Nichtdeterminismus

Notizen

- Nichtdet. TM rät & überprüft "kurzen" Lösungsnachweis (Zertifikat)
- Nichtdet. TM benötigt keine Suche
  Det. TM benötigt aktuell Suche nach solchen Zertifikaten

- Polynomiell berechenbar ≈ effizient berechenbar
- Nichtdeterminismus vermutlich nicht effizient simulierbar