Diskrete Strukturen (WS 2023-24) - Halbserie 1

Bitte nur Probleme 1.1, 1.2 und 1.3 einreichen.

1.1 (bitte direkt auf moodle als Quiz-Frage antworten.) **[4]**

1.2 **[3]**

Es seien die folgenden **Prädikate** gegeben:

- $Z(x)$: x ist eine ganze Zahl,
- $P(x)$: x ist eine Primzahl,
- $E(x)$: x ist eine gerade Zahl,
- $D(x, y)$: x ist durch y teilbar.

Formalisieren Sie folgende Aussagen:

1. Es gibt eine Primzahl, die gerade ist.
2. Jede ganze Zahl ist durch eine Primzahl teilbar.
3. Es gibt keine Primzahl, die durch eine gerade Zahl teilbar ist.

1.3 **[3]**

Gegeben sei die folgende Aussage:

Wenn eine ganze Zahl gerade ist, so besitzt sie mindestens zwei verschiedene Teiler.

Geben Sie die **Kontraposition** dieser Aussage

1. in natürlicher Sprache
2. als prädikatenlogische Formel an. Verwenden Sie die Prädikate aus Aufgabe 1.2.

1.4 Es seien P und Q Prädikate.
Sind die folgenden **Äquivalenzen** wahr? Wenn nicht dann geben Sie ein Gegenbeispiel an. Wenn ja, dann beweisen Sie es mit zwei Implikationen.

1. $\exists x(P(x) \land Q(x))$ ist äquivalent zu $\exists x(P(x)) \land \exists x(Q(x))$
2. $\exists x(P(x) \lor Q(x))$ ist äquivalent zu $\exists x(P(x)) \lor \exists x(Q(x))$

1.5 Es seien die folgenden Prädikate gegeben:

- *Student*(x) drückt aus, dass x ein Student ist,
- *Professor*(y) drückt aus, dass y ein Professor ist,
- *Dopsball*(z) drückt aus, dass z ein Dopsball ist,
- *Spielt*(x, z) drückt aus, dass x mit z spielt.

Formalisieren Sie folgende Aussagen:

1. Es gibt einen Professor, der mit einem Dopsball spielt.
2. Jeder Student spielt mit einem Dopsball.
3. Es gibt keinen Dopsball, mit dem alle Studenten spielen.
4. Es gibt einen Studenten und einen Professor sodass beide mit dem selben Dopsball spielen.

1.6 Wir betrachten das Universum $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Definieren Sie für die folgenden Formeln die Prädikate A und B jeweils so, dass die Formel erfüllt wird. Prädikate lassen sich als Teilmengen des Universums $\mathbb{N}_0$ definieren.

1. $\forall x A(x) \land \exists x(A(x) \to B(x))$
2. $\forall x \forall y(A(x) \land B(y) \to x = y)$
3. $\exists x \exists y(A(x) \land \neg A(y) \land \forall z(B(z) \to \neg(z = z)))$
4. $\neg(\exists x A(x) \to \exists x(\neg B(x) \to \neg A(x)))$

1.7 Betrachten Sie folgende **Mengen**:

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \{0, 2, 4\} \\
M_2 &= \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x \text{ ist gerade und } x < 5\} \\
M_3 &= \{0\} \\
M_4 &= \{x \in \mathbb{N}_0 \mid \forall k(k \in \mathbb{N} \to k \geq x)\}
\end{aligned}
$$

1. Beweisen Sie $M_1 = M_2$.

2. Widerlegen Sie $M_1 = M_3$.

3. Beweisen Sie $M_3 \subseteq M_4$.

1.8 Sei U eine Menge mit $A, B \subseteq U$.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen mithilfe einer **Äquivalenzkette**. Geben Sie für jeden Schritt an, welche Umformungsregel angewendet wurde.

1. $A \cup (A \cap B) = A$ (Absorptionsgesetz)
2. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (Symmetrische Differenz)