Logik
Serie 1

Nikita Emanuel John Fehér, 3793479
Erik Thun, 3794446

15. April 2025
Mittwoch 09:15-10:45 Keitsch, Jamie; Gruppe e

H 1-1. Mengenlehre

a) Sei $M = \{a, b, c\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche nicht? Ohne Begründung.

i) $a \in M$ **Wahr**
ii) $\emptyset \subseteq M$ **Wahr**
iii) $\{a, c\} \notin 2^M$ **Falsch**
iv) $\{\emptyset\} \notin 2^M$ **Falsch**
v) $\{\{a\}, \{b, c\}\} \in 2^{2^M}$ **Wahr**
vi) $|2^{2^M}| = 256$ **Wahr**

2.5/3

b) Beweisen Sie nachfolgende Aussage. Für beliebige Mengen S und T gilt:

$$S \cup T = S \qquad \text{gdw.} \qquad T \subseteq S$$

$$\begin{aligned} S \cup T = S &\implies S \cup T \subseteq S \land S \cup T \supseteq S \\ &\implies S \cup T \subseteq S \\ &\implies T \subseteq S \end{aligned}$$

1.5/2

$$\begin{aligned} T \subseteq S &\implies \{\forall x \in T | x \in S\} \\ &\implies x \in T \implies x \in S \\ &\implies S \cup T = \{\forall x | x \in S\} = S \end{aligned}$$

H 1-2. Vollständige Induktion
Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle Zahlen $n \in N$ gilt:

$$n^3 - n \text{ ist durch 3 teilbar}$$

Induktionsanfang: n=0

$$\begin{aligned} &3|(n^3 - n) \\ &3|(0^3 - 0) \\ &3|(0 - 0) \\ &3|0 \implies 0^3 - 0 \text{ ist mit 3 teilbar} \end{aligned}$$

5/5

Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an folgendes gilt

$$3|(n^3 - n)$$

Induktionsschritt: n = n+1

$$\begin{aligned} &3|((n+1)^3 - (n+1)) \\ &3|(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1) \\ &3|(n^3 - n + 3n^2 + 3n + 1 - 1) && |\text{nach IV ist } n^3 - n \text{ durch 3 teilbar} \\ &3|(3n^2 + 3n) \\ &3|3(n^2 + n) \implies 3(n^2 + n) \text{ ist durch 3 teilbar} \end{aligned}$$

Da $3|(n^3 - n)$ und $3|3(n^2 + n)$ gilt
$\implies (n+1)^3 - (n+1)$ ist mit 3 teilbar

H 1-3. Syntaktische Eigenschaften

a) Definieren Sie rekursiv die Funktion $j : F \to N$, die die Anzahl der Junktoren einer Formel zählt. Beispielsweise sollte $j((\neg A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3))) = 3$ ergeben. 0/2

b) Sei $\varphi = \neg(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))$. Bestimmen Sie:

i) den Rang $r(\varphi)$

$$\begin{aligned}
r(\varphi) &= r(\neg(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))) \\
&= r((A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))) + 1 \\
&= \max\{r(A_1), r(\neg(\neg A_2 \wedge A_3))\} + 1 \quad +1 \\
&= \max\{0, r((\neg A_2 \wedge A_3)) + 1\} + 1 \\
&= \max\{0, \max\{r(\neg A_2), r(A_3)\} + 1 + 1\} + 1 \\
&= \max\{0, \max\{r(A_2) + 1, 0\} + 1 + 1\} + 1 \\
&= \max\{0, \max\{0 + 1, 0\} + 1 + 1\} + 1 \\
&= \max\{0, \max\{1, 0\} + 1 + 1\} + 1 \\
&= \max\{0, 1 + 1 + 1\} + 1 \\
&= \max\{0, 3\} + 1 \\
&= 3 + 1 \\
&= 4 \quad f = 5
\end{aligned}$$

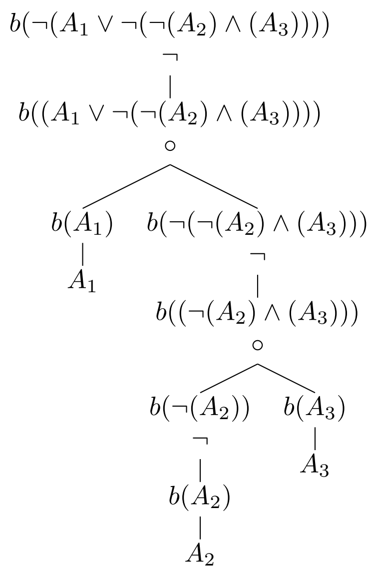
0.5/1

ii) die Menge der Teilformeln $t(\varphi)$

$$\begin{aligned}
t(\varphi) &= t((\neg(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3)))) \\
&= t((A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))) \cup \{\neg(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))\} \\
&= t(A_1) \cup t(\neg(\neg A_2 \wedge A_3)) \cup \{(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))\} \cup \{\neg(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))\} \\
&= \{A_1\} \cup t((\neg A_2 \wedge A_3)) \cup \{\neg(\neg A_2 \wedge A_3)\} \cup \{(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3)), \neg(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))\} \\
&= \{A_1\} \cup t(\neg A_2) \cup t(A_3) \cup \{(\neg A_2 \wedge A_3)\} \cup \{\neg(\neg A_2 \wedge A_3), (A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3)), \neg(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))\} \\
&= \{A_1\} \cup t(A_2) \cup \{\neg A_2\} \cup \{A_3\} \cup \{(\neg A_2 \wedge A_3), \neg(\neg A_2 \wedge A_3), (A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3)), \neg(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))\} \\
&= \{A_1\} \cup \{A_2\} \cup \{\neg A_2, A_3, (\neg A_2 \wedge A_3), \neg(\neg A_2 \wedge A_3), (A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3)), \neg(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))\} \\
&= \{A_1, A_2, \neg A_2, A_3, (\neg A_2 \wedge A_3), \neg(\neg A_2 \wedge A_3), (A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3)), \neg(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))\}
\end{aligned}$$

✓

iii) den Syntaxbaum $b(\varphi)$



f

⇒ 1,5/5

H 1-4. Induktion über den Formelaufbau
Zeigen Sie per Induktion über den Formelaufbau, dass für alle Formeln $\varphi \in F$ gilt:

$$|t(\varphi)| \leq 2^{r(\varphi)+1} - 1$$

$\forall e \in F$ soll gelten: $|t(e)| \leq 2^{r(e)+1} - 1$
Hierfür orientieren wir und an den rekursiven Funktionen aus der Vorlesung für $t(e)$ und $r(e)$
Die Aussage gilt für atomare Aussagen: $A \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} |t(A)| &\leq 2^{r(A)+1} - 1 \\ |\{A\}| &\leq 2^{0+1} - 1 \\ 1 &\leq 2^1 - 1 \\ 1 &\leq 1 \end{aligned}$$

Wenn $E(\phi)$, dann auch $E(\neg\phi)$:

$$\begin{aligned} |t(\neg e)| &\leq 2^{r(\neg e)+1} - 1 \\ |t(e) \cup \{\neg e\}| &\leq 2^{r(e)+1+1} - 1 \\ |\underline{\{e, \neg e\}}| &\leq 2^{\max\{r(e),0\}+1+1} - 1 \\ 2 &\leq 3 \end{aligned}$$

f

Zu letzt sollte man zeigen wenn e und ψ, dann auch $e \circ \psi$ gilt, wobei $\circ \in \{\wedge, \vee\}$.

$$\begin{aligned} |t(e \circ \psi)| &\leq 2^{r(e \circ \psi)+1} - 1 \\ |t(e) \cup t(\psi) \cup \{e \circ \psi\}| &\leq 2^{\max\{r(e),r(\psi)\}+1+1} - 1 \\ \underline{|\{e \circ \psi, e, \psi\}} &\leq 2^{0+1+1} - 1 \\ 3 &\leq 3 \end{aligned}$$

f

3.1

1/5

Index der Kommentare

1.1 formal nicht richtig aufgeschrieben. Die Grundidee ist richtig und deswegen gebe ich einen halben Punkt, aber ein sauberer Beweis ist das nicht. Die Mengenschreibweisen stimmen nicht und auch die Implikationen sollte man anders schreiben.

1.2 ich würde euch empfehlen eine andere Schreibweise zu nutzen, um zu schreiben, dass etwas durch 3 teilbar ist, zb. es existiert ein k Element der natürlichen Zahlen, sodass gilt: n^3-n = 3k

3.1 ich glaub hier ist leider was schief gelaufen. Schaut euch am besten nochmal Induktion über den Formelaufbau an