Def.:

Seien V und W K-Vektorräume und sei $f: V \to W$ eine Abbildung.

f heißt K-linear, falls gilt:

(1) $\forall v_1, v_2 \in V: \quad f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$

(2) $\forall \lambda \in K \; \forall v \in V: \quad f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$

Bem.:

Ist $f: V \to W$ K-linear, so gilt:

(i) $f(0) = 0$

(ii) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K \; \forall v_1, v_2 \in V: \quad f(\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2) = \lambda_1 \cdot f(v_1) + \lambda_2 \cdot f(v_2)$

(iii) $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \; \forall v_1, \dots, v_n \in V: \quad f(\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n) = \lambda_1 \cdot f(v_1) + \dots + \lambda_n \cdot f(v_n)$

(iv) $\forall M \subseteq V: \quad f(\operatorname{span}(M)) = \operatorname{span}(f(M))$

Def.:

Seien V und W K-Vektorräume und sei $f: V \to W$ K-linear

(i) f heißt Isomorphismus $:\Leftrightarrow$ f ist bijektiv

(ii) f heißt Endomorphismus $:\Leftrightarrow$ $V = W$

(iii) f heißt Automorphismus $:\Leftrightarrow$ $V = W$ und f ist ein Isom.

Bsp.:

Sei K ein Körper und sei $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in K^{m \times n}$.

Dann ist die Abb. $f: K^n \to K^m$, $f(x) = A \cdot x$ K-linear

Sind $a_1, \dots, a_n \in K^m$ die Spalten von A, d.h. $A = (a_1 \dots a_n)$, so gilt:

$f(e_j) = a_j \quad \forall j = 1, \dots, n \qquad$ wobei $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-te Zeile}$

Also: Die Spaltenvektoren von A sind die Bilder der Basisvektoren.

Def.:

Seien V und W K-Vektorräume und sei $f: V \to W$ K-linear

(i) $\mathrm{Kern}(f) := \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$

(ii) $\mathrm{Bild}(f) := f(V) = \{ f(v) \mid v \in V \} = \{ w \in W \mid \exists v \in V \mid w = f(v) \}$

Bem.:

$\mathrm{Kern}(f) \subseteq V$ ist ein Unterraum von V und $\mathrm{Bild}(f) \subseteq W$ ist ein Unterraum von W.

Satz

Seien V und W K-Vektorräume und sei $f: V \to W$ K-linear. Dann gilt:

f ist injektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$.

Satz (Dimensionsformel für lineare Abbildungen) (Sehr wichtig!)

Seien V und W endlich dimensionale K-Vektorräume und sei $f: V \to W$ linear. Dann gilt:

$\dim(V) = \dim \mathrm{Kern}(f) + \dim \mathrm{Bild}(f)$

Kor.:

Seien V und W endlich dimensionale K-Vektorräume und sei $f: V \to W$ linear. Dann gilt:

(i) f ist injektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$ $\Leftrightarrow$ $\dim \mathrm{Kern}(f) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\dim \mathrm{Bild}(f) = \dim V$

(ii) f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Bild}(f) = W$ $\Leftrightarrow$ $\dim \mathrm{Bild}(f) = \dim W$

(iii) Ist $\dim V = \dim W$, so gilt:

f ist injektiv $\Leftrightarrow$ f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ f ist bijektiv.

Def.:

Seien V und W K-Vektorräume und sei $f: V \to W$ K-linear.

$\mathrm{rang}(f) := \dim \mathrm{Bild}(f)$ heißt Rang von f.

Def.:

Sei $A \in K^{m \times n}$ und sei $f: K^n \to K^m$ def. durch $f(x) = A \cdot x$

(i) $\operatorname{Kern}(A) := \operatorname{Kern}(f) = \{x \in K^n \mid A \cdot x = 0\} = \text{Lös}(A, 0)$

(ii) $\operatorname{Bild}(A) := \operatorname{Bild}(f)$

(iii) $\operatorname{rang}(A) := \operatorname{rang}(f) = \dim \operatorname{Bild}(f) = \dim \operatorname{Bild}(A)$

Kor.:

Sei $A \in K^{m \times n}$. Dann gilt:

$n = \dim \operatorname{Kern}(A) + \operatorname{rang}(A)$.

Satz:

Sei $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in K^{m \times n}$ mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform gebracht, d.h.:

$$A \to \left(\begin{array}{cccccccccccccccc}
0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{1j_1} & \cdots & * & * & \cdots & * & \cdots & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{2j_2} & \cdots & * & \cdots & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\
 & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & & \cdots & \\
0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{rj_r} & \cdots & * \\
0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & & \cdots & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right) \quad \Big\} \; r \text{ Zeilen} \neq 0$$

wobei $0 \le r \le m$ und $\tilde{a}_{1j_1}, \dots, \tilde{a}_{rj_r} \neq 0$.

Dann gilt: $\operatorname{rang}(A) = r$.

Satz (Sehr wichtig!)

Seien V und W endlich dimensionale K-Vektorräume.

Sei $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ eine Basis von V und sei $\{w_1, \dots, w_n\} \subseteq W$.

Dann gilt:

Es gibt genau eine lineare Abb. $f: V \to W$ mit $f(v_i) = w_i \quad (i = 1, \dots, n)$

Diese lineare Abb. f hat folgende Eigenschaften:

(i) $\text{Bild}(f) = \text{span}(w_1, \dots, w_n)$

(ii) f ist injektiv $\Leftrightarrow \{w_1, \dots, w_n\}$ ist linear unabhängig.

(iii) Ist $\{w_1, \dots, w_n\}$ eine Basis von W, so ist f ein Isom.

Also: Eine lineare Abb. $f: V \to W$ ist eindeutig durch die Bilder der Basisvektoren def.

Kor.:

Sei $f: K^n \to K^m$ linear.

Dann ex. eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ mit $f(x) = A \cdot x \quad \forall x \in K^n$.

Bew.:

Sei $A := (f(e_1) \dots f(e_n))$ und sei $g: K^n \to K^m$ def. durch $g(x) = A \cdot x$.

Dann sind $f, g: K^n \to K^m$ linear und es gilt:

$g(e_j) = A \cdot e_j = f(e_j) \quad \forall j = 1, \dots, n$

$\Rightarrow$ f und g stimmen auf der Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ überein

$\Rightarrow$ $f = g$. $\square$

Problem:

Sei $A \in K^{m \times n}$ und sei $f: K^n \to K^m$ def. durch $f(x) = A \cdot x$.

Bestimmen Sie eine Basis von Kern(f) und Bild(f).

Kochrezept:

Kern(f):

Kern(f) = Lös$(A,0)$ ist die Lösungsmenge eines homogen linearen Gleichungssystems.

Bestimme also eine Basis des Lösungsraumes $\to$ Basis von Kern(f).

Bild(f):

$$\text{Bild}(f) = f(K^n) = f(\text{span}(e_1, \dots, e_n)) = \text{span}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \text{span}(a_1, \dots, a_n),$$

wobei $a_1, \dots, a_n \in K^m$ die Spaltenvektoren von A sind.

Bestimme also eine Basis von $\text{span}(a_1, \dots, a_n)$ $\to$ Basis von Bild(f).

Zusatz:

Ist A auf Zeilenstufenform gebracht (was man sowieso machen muss um Kern(A) zu bestimmen)

$$A \to \begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{1j_1} & \cdots & * & * & \cdots & * & \cdots & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{2j_2} & \cdots & * & \cdots & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\
 & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & & \cdots & \\
0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{rj_r} & \cdots & * \\
0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & & \cdots & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

mit Pivotindizes $j_1, \dots, j_r$.

Dann gilt: $\{a_{j_1}, \dots, a_{j_r}\}$ ist eine Basis von Bild(f)

wobei $a_1, \dots, a_n \in K^m$ die Spaltenvektoren von A sind.

Problem:

Seien V und W endlich dimensionale K-Vektorräume.

Sei $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V und sei $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_m\}$ eine Basis von W.

Sei $f: V \to W$ linear und sei $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$.

Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ und von $\mathrm{Im}(f)$.

Kochrezept:

Bestimme eine Basis $\{x_1, \dots, x_K\}$ von $\mathrm{Kern}(A)$.

Dann ist $\{K_{\mathcal{A}}^{-1}(x_1), \dots, K_{\mathcal{A}}^{-1}(x_K)\}$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$.

Bestimme eine Basis $\{y_{K+1}, \dots, y_n\}$ von $\mathrm{Im}(A)$.

Dann ist $\{K_{\mathcal{B}}^{-1}(y_{K+1}), \dots, K_{\mathcal{B}}^{-1}(y_n)\}$ eine Basis von $\mathrm{Im}(f)$.

Def.:

Sei W endlich dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_m\}$.

Dann gibt es zu jedem $w \in W$ eind. bestimmte $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ mit $w = \lambda_1 \cdot w_1 + \dots + \lambda_m \cdot w_m$

und wir def. $K_{\mathcal{B}}(w) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$.

Die Abb.: $K_{\mathcal{B}}: W \to K^m$ ist ein Isom.

Bem.:

Es gilt: $K_{\mathcal{B}}(w_j) = e_j \quad (j = 1, \dots, m)$