UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Vorlesung 4 - Naive Mengenlehre und vollständige Induktion

Diskrete Strukturen (WS 2024-25)

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

1. Wiederholung

2. Verallgemeinerung von Vereinigung und Schnitt

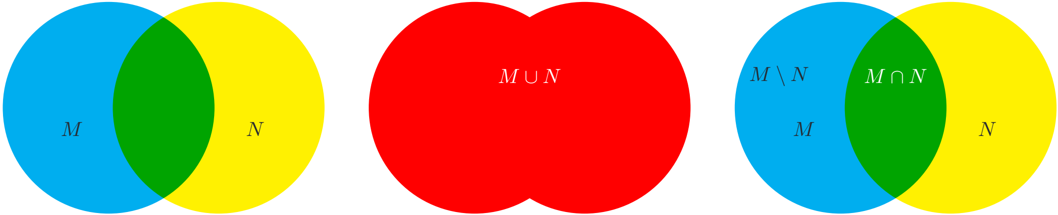
3. Kardinalität von endlichen Mengen, Potenzmenge

4. Vollständige Induktion und Induktionsbeweise

Beispiele von Mengen.

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bezeichnen jeweils die Mengen aller natürlichen Zahlen, aller ganzen Zahlen, aller rationalen Zahlen und aller reellen Zahlen.
- Vollständige oder unvollständige Aufzählung: $\{1, 2, 3\}$ bzw. $\{0, 1, 2, \ldots\}$ Das Muster muss klar erkennbar sein.
- $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 2\} = \{2, 3, 1\}$,
- Leere Menge: $\emptyset$ enthält keine Elemente.
- $\{\emptyset\}$ ist die Menge mit genau einem Element. Dieses Element is die leere Menge.
- Definition mit einem Prädikat, z.B. $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Gerade}(n)\}$
- M ist eine Teilmenge von N, geschrieben $M \subset N$, genau dann wenn $\forall x\ x \in M \to x \in N$.
- Für alle Mengen M und N gilt: $M = N \iff M \subseteq N$ und $N \subseteq M$.

- Hauptoperationen auf Mengen.



Die Vereinigung $M \cup N$, der Schnitt $M \cap N$, die Differenz $M \setminus N$, das Komplement M^c (nur wenn wir eirgenwelches Universum U fixieren)

- Wenn $M \cap N = \emptyset$ dann sagen wir dass M und N disjunkt sind.

Beweisen wir zum Beispiel, dass $(A \cap B)^\mathsf{c} = A^\mathsf{c} \cup B^\mathsf{c}$ (De-Morgan-Gesetz).

- Zuerst nehmen wir an, dass $x \in (A \cap B)^\mathsf{c}$, d.h. $x \notin A \cap B$. D.h. entweder $x \notin A$ oder $x \notin B$. Also $x \in A^c$ oder $x \in B^c$. Das bedeutet aber genau $x \in A^c \cup B^c$. Wir haben also bewiesen, dass $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$.
- Nehmen wir nun an, dass $x \in (A^c \cup B^c)$. Also $x \in A^c$ oder $x \in B^c$. D.h. $x \notin A$ oder $x \notin B$. Das heißt aber $x \notin A \cap B$, also $x \in (A \cap B)^c$. Wir haben jetzt bewiesen, dass $(A \cap B)^c \subset A^c \cap B^c$.
- Also $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. $\square$

Satz. *Für alle Mengen M und N sind folgende Aussagen äquivalent:*

- *(1)* $M \subset N$
- *(2)* $M \cap N = M$
- *(3)* $M \cup N = N$

Beweis.

- Wir zeigen (1) $\to$ (2), (2) $\to$ (3), und (3) $\to$ (1).
- (1) $\to$ (2): Da $M \subset N$, folgt

$$M = M \cap M \subset M \cap N.$$

Mit Abschwächung gilt $M \cap N \subset M$. Das bedeutet, dass $M \cap N = M$.

- (2) $\to$ (3): $N \subset M \cup N$ ist klar ("Abschwächung"). Sei $x \in M \cup N$. Dann $x \in N$ oder $x \in M$, also $x \in N$ oder $x \in M \cap N$. Durch Abschwächung, das impliziert, dass $x \in N$. Also $M \cup N \subset N$.

Satz. *Für alle Mengen M und N sind folgende Aussagen äquivalent:*

- *(1)* $M \subset N$
- *(2)* $M \cap N = M$
- *(3)* $M \cup N = N$

Beweis (Fortsetzung).

- (3) $\to$ (1): Sei $x \in M$. Dann $x \in M \cup N$ und, da (3) angenommen ist, auch $x \in N$.

Das zeigt, dass $M \subset N$. $\square$

- Wir haben Vereinigung und Schnitt bisher zweistellig definiert.
    - Analog zum Summenzeichen $\sum$ verallgemeinern wir die Definition auf beliebig viele Argumente.
- Sei I eine Menge und M_i eine Menge für jedes $i \in I$. Wir definieren

$$\bigcup_{i \in I} M_i := \{x \mid \text{es existiert } i \in I, \text{ so dass } x \in M_i\} = \Big\{x \mid \exists i \big((i \in I) \wedge (x \in M_i)\big)\Big\}$$

und

$$\bigcap_{i \in I} M_i := \{x \mid \text{für alle } i \in I \text{ gilt } x \in M_i\} = \Big\{x \mid \forall i \in I \; x \in M_i\Big\}$$

- Sonderfälle für $I = \emptyset$:
  - $\bigcup_{i \in \emptyset} M_i = \emptyset$
  - $\bigcap_{i \in \emptyset} M_i = U$ für Grundmenge U, sonst undefiniert.
- Erinnerung/Definition: die leere Summe wird als null definiert, z.B. $\sum_{i=5}^{3} i = 0$.

Beispiele.

- Für jede Menge M gilt $M = \bigcup_{m \in M} \{m\}$.
- Das geschlossene Interval $[u, o]$ für $u, o \in \mathbb{R}$ mit $u \leq o$ ist definiert durch

$$[u, o] := \{r \in \mathbb{R} \colon \ u \leq r \leq o\}.$$

- Es gilt $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n] = \bigcup_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}} [-r, r]$.
  - ▶ Wir zeigen $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n] \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}} [-r, r] \subseteq \mathbb{R}$. Es folgt dass alle diese Mengen gleich sind - “Ringinklusion”.
  - ▶ Zu $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$: Sei $r \in \mathbb{R}$ und $n := \lceil |r| \rceil$ (aufrunden). Dann gilt $-n \leq r \leq n$ und damit $r \in [-n, n]$. Also auch $r \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$.
  - ▶ Zu $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n] \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}} [-r, r]$: Klar aus dem Abschwächungsprinzip, da $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$.
  - ▶ Zu $\bigcup_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}} [-r, r] \subseteq \mathbb{R}$: Es ist $[-r, r] \subseteq \mathbb{R}$ für alle $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, also folgt aus der Monotonie. $\square$

- Wichtige Notationsvarianten. Für $I = \{u, u+1, \dots, o\} \subseteq \mathbb{N}$ schreiben wir auch
  - $\bigcup_{i=u}^{o} M_i := \bigcup_{i \in I} M_i$
  - $\bigcap_{i=u}^{o} M_i := \bigcap_{i \in I} M_i$
- Liegt eine Menge von Mengen vor, so lassen wir die Laufvariable auch ganz weg:
  - $\bigcup \{M_i \mid i \in I\} := \bigcup_{i \in I} M_i$
  - $\bigcap \{M_i \mid i \in I\} := \bigcap_{i \in I} M_i$
- Beispiele
  - $\bigcup \{\{1, 3, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 5\}\} = \{1, 2, 3, 5\}$
  - $\bigcap \{\{1, 3, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 5\}\} = \{3\}$

- Beispiel "Distributivität von $\cap$": $M \cap \left(\bigcup_{i\in I} M_i\right) = \bigcup_{i\in I}(M \cap M_i)$
- Beweis:
  - ▶ Sei $x \in M \cap \left(\bigcup_{i\in I} M_i\right)$. Also $x \in M$ und $x \in \left(\bigcup_{i\in I} M_i\right)$. D.h. $x \in M$ und $\exists i \in I$ mit $x \in M_i$. Deswegen $\exists i \in I$ mit $x \in M \cap M_i$, also $x \in \bigcup_{i\in I}(M \cap M_i)$.
  - ▶ Sei $x \in \bigcup_{i\in I}(M \cap M_i)$. Also $\exists i \in I$ mit $x \in M \cap M_i$. Deswegen $x \in M$ und $\exists i \in I$ mit $x \in M_i$. D.h. $x \in M$ und $x \in \left(\bigcup_{i\in I} M_i\right)$, und es folgt $x \in M \cap \left(\bigcup_{i\in I} M_i\right)$. $\square$

- Jede Menge kann entweder endlich oder unendlich sein.
- Für endliche Mengen M bezeichnen wir mit $|M|$ die Anzahl ihrer Elemente, auch Kardinalität genannt.
- Ist M unendlich, so schreiben wir auch $|M| \geq \infty$.
- Für alle endlichen Mengen M und N gilt

$$|M \cup N| \leq |M| + |N|.$$

- Wenn M und N disjunkt sind, also $M \cap N = \emptyset$, so haben wir die Gleichheit

$$|M \cup N| = |M| + |N|.$$

- Beispiele.
  - Die Mengen $\{1, 2, 3\}$ und $\{2, 4, 6\}$ sind nicht disjunkt und es gilt

$$|\{1, 2, 3\} \cup \{2, 4, 6\}| = 5 < 6 = 3 + 3 = |\{1, 2, 3\}| + |\{2, 4, 6\}|.$$

  - Die Mengen $\{1, 2, 3\}$ und $\{4, 5, 6\}$ sind disjunkt und es gilt

$$|\{1, 2, 3\} \cup \{4, 5, 6\}| = 6 = 3 + 3 = |\{1, 2, 3\}| + |\{4, 5, 6\}|.$$

Für eine Menge M ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ die Menge aller Teilmengen von M:

$$\mathcal{P}(M) = \{N \mid N \subseteq M\}$$

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$,
- $$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\big\}.$$
- $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

- Wie viele Elemente enthält die Potenzmenge einer endlichen Menge M? (d.h. was ist die Kardinalität von $\mathcal{P}(M)$?)
- Durch systematisches Probieren gelangt man zu der Hypothese

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}.$$

- Der Grund dafür ist, dass die Definition einer Teilmenge S von M gleichbedeutend damit ist, für jedes $x \in M$ zu entscheiden, ob es in S enthalten ist oder nicht.

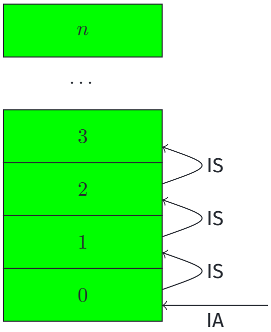
  Da es $2^{|M|}$ solche Auswahlmöglichkeiten gibt, ist dies auch die Anzahl der Teilmengen von M.
- Um solche Argumente präzis schreiben zu können, benötigen wir eine neue Beweistechnik "Induktion".

- Wir betrachten die folgende Aussage. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
- Obwohl der Beweis dieser Aussage für eine konkrete Zahl n unproblematisch ist, stellt der Beweis für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Hürde dar, da wir nicht unendlich viele Beweise angeben können.
- Das folgende Prinzip ist ein Beweisprinzip das wir hier nützen können.

Prinzip der vollständigen Induktion *Sei $F(x)$ eine Prädikat mit einer Variable x. Gelten die Aussagen*

- *$F(0)$ und*
- *$F(n) \to F(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,*

dann gilt $F(x)$ für alle $x \in \mathbb{N}$.


n
$\dots$
3
2
1
0
IS
IS
IS
IA

- Ein Induktionsbeweis funktioniert wie folgt.
  - Zunächst zeigen wir die Behauptung für den Fall $n = 0$ (Induktionsanfang).
  - Anschließend folgt Induktionsschritt: wir wählen eine beliebige natürliche Zahl n und setzen voraus, dass die Behauptung für n bereits gezeigt ist (Induktionshypothese).

    Dann beweisen wir die Induktionsbehauptung: die Behauptung für den Nachfolger $n + 1$. Im Beweis können wir die Induktionshypothese nutzen.

Als Beispiel zeigen wir dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis.

- **Induktionsanfang:** Es gilt $\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$.
- **Induktionshypothese:** Sei $n \in \mathbb{N}$, nehmen wir an dass $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ wahr ist.
- **Induktionsbehauptung**: Zu zeigen ist, dass $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
- Beweis der IB: Es gilt

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + (n+1) \overset{\text{IH}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung. $\square$

Beispiel. Wenn M ist eine endliche Menge, dann gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

Beweis. Vollständige Induktion über $n = |M|$.

$$\forall n \Big(\forall M \; (|M| = n \to |\mathcal{P}(M)| = 2^n). \Big)$$

- Induktionsanfang. Sei Menge M beliebig, mit $|M| = 0$. Die einzige solche Menge ist $M = \emptyset$. Zusätzlich $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, also gilt $|\mathcal{P}(\emptyset)| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0 = 2^{|\emptyset|}$.
- Induktionshypothese. Sei $n \in \mathbb{N}$ und wir nehmen an dass $|\mathcal{P}(N)| = 2^n$ für alle Mengen N mit $|N| = n$.

- Induktionsbehauptung. Sei M eine Menge mit $|M| = n+1$. Zu zeigen ist dass $|\mathcal{P}(M)| = 2^{n+1}$.
  - Wähle $x \in M$ beliebig und sei $N = M \setminus \{x\}$.
  - Wir unterteilen alle Teilmengen von M in

    (a) diejenigen, die x nicht enthalten, und somit Teilmengen von N sind, und

    (b) diejenigen, die x enthalten und somit von der Form $S \cup \{x\}$ sind, wobei S eine Teilmenge von N ist.
  - Wenn beispielsweise $M = \{1,2,3\}$ und $x = 3$, dann ist $N = \{1,2\}$, und

    (a) die Teilmengen, die x nicht enthalten, sind $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$

    (b) die Teilemengen, die x enthalten, sind $\{3\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$.

- Im Allgemeinen könnten wir schreiben

$$\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}(N) \cup \{S \cup \{x\} \mid S \in \mathcal{P}(N)\}.$$

- Unter Beachtung der Disjunktheit gilt

$$|\mathcal{P}(M)| = |\mathcal{P}(N)| + |\mathcal{P}(N)| = 2 \cdot |\mathcal{P}(N)| \stackrel{\text{IH}}{=} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} = 2^{|M|},$$

wobei $|\mathcal{P}(N)| = 2^n$. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung. $\square$

Der Beginn der Induktion muss nicht bei $n = 0$ liegen. Beispiel: für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2$ gilt $n^2 > n + 5$.

Beweis.

- Induktionsanfang. Für $n = 3$ haben wir $n^2 = 9 > 8 = n + 5$.
- Induktionshypothese. Sei $n > 2$ beliebig. Dann $n^2 > n + 5$.
- Induktionsbehauptung. Zu zeigen ist $(n + 1)^2 > (n + 1) + 5$
  - ▶ Wir haben $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 \overset{\text{IH}}{>} n + 5 + 2n + 1 > (n + 1) + 5$. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung. □

- Beispiel: Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ gilt: $n! > 2^n$.
- Lösung:
  - Induktionsanfang: Sei $n = 4$, dann gilt $4! = 24 > 16 = 2^4$
  - Induktionshypotose: Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ mit $n! > 2^n$.
  - Induktionsbehauptung: Zu zeigen ist, dass $(n+1)! > 2^{n+1}$.

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1) \overset{IH}{>} 2^n \cdot (n+1)$$

Da $n \geq 4$, gilt $n+1 \geq 2$, und damit

$$2^n \cdot (n+1) > 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}.$$

Es gilt also $(n+1)! > 2^{n+1}$ und damit die obige Behauptung gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

UNIVERSITÄT
LEIPZIG

VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT!

Łukasz Grabowski
Mathematisches Institut

grabowski@math.uni-leipzig.de