# Diskrete Strukturen
# Pflichtserie 8

Nikita Emanuel John Fehér, 3793479

16. Dezember 2024
09:15-10:45 Dietzschold, Johannes

### 8.1

Geben Sie für die folgenden Abbildungen $f_1, f_2, f_3$ alle Fixpunkte an.

(a) $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, z \mapsto z^2 + z - 1$

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= z \\
z^2 + z - 1 &= z && | - z \\
z^2 - 1 &= 0 && | + 1 \\
z^2 &= 1 && |\sqrt{()} \\
z &= \pm 1 \\
z_1 &= 1 \\
z_2 &= -1
\end{aligned}$$

(b) $f_2 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto (2x - y, y + x \cdot y)$

$$\begin{aligned}
f_2((x, y) &= (x, y) \\
(2x - y, y + xy) &= (x, y) \\
x = 2x - y, y = y + xy \\
x &= 2x - y && | + y | - x \\
y &= x \\
y = y + xy \\
y &= y + (y)y && | - y \\
0 &= yy \\
0 = y = x \\
(x, y) = (0, 0)
\end{aligned}$$

(c) $f_3 : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}), X \mapsto \{n \in \mathbb{N} | \exists x \in X(n \geq x)\}$

$$\begin{aligned} f_3(X) &= X \\ \{n \in \mathbb{N} | \exists x \in X(n \geq x)\} &= X \end{aligned}$$

Fall 1: $X = \emptyset$: $\implies \nexists x \in X(n \geq x)$
$X = \emptyset$ ist ein Fixpunkt

Fall 2: $X \neq \emptyset$ Dann existiert ein $x \in X$. Für jedes $n \geq x \implies n \in f_3(X)$

$$f_3(X) = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists x \in X(n \geq x)\} = [\min(X), \infty) \cap \mathbb{N}.$$

**Annahme:** $X = f_3(X)$ ist ein Fixpunkt. Daraus folgt:

$$X = [\min(X), \infty) \cap \mathbb{N}.$$

Da $X$ keine obere Schranke hat, müsste $X = [\min(X), \infty)$. Dies ist jedoch nur möglich, wenn $X$ genau die Form $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\}$ für ein $k \in \mathbb{N}$ hat. Andererseits enthält $f_3(X)$ stets alle natürlichen Zahlen $n \geq \min(X)$, unabhängig von der ursprünglichen Struktur von $X$. Also:

$$f_3(X) \neq X.$$

**Schlussfolgerung:** Für $X \neq \emptyset$ ist $X$ kein Fixpunkt von $f_3$.

**8.2**

Sei $M$ eine Menge. Für zwei Teilmengen $X, Y \subseteq M$ definieren wir die *symmetrische Differenz* von $X$ und $Y$ durch

$$X \triangle Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$$

Weiter definieren wir für jede Teilmenge $Y \subseteq M$ eine Funktion $f_Y$ durch

$$\begin{aligned} f_y : \mathcal{P}(M) &\to \mathcal{P}(M), \\ X &\mapsto X \triangle Y. \end{aligned}$$

Sei $Y \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass $f_Y$ hat keine Fixpunkte.

$$\begin{aligned} f_y(X) &= X \\ X \triangle Y &= X \\ z \in X \triangle Y &\iff z \in X \\ z \in \big((X \cup Y) \setminus (X \cap Y)\big) &\iff z \in X \\ z \in (X \cup Y) \wedge z \notin (X \cap Y) &\iff z \in X \\ z \in X \vee z \in Y \wedge (z \notin X \vee z \notin Y) &\iff z \in X \end{aligned}$$

Da $Y \neq \emptyset \implies$ Es existiert $y \in Y$

Fall 1 $y \in X$:

$$\begin{aligned} y \in X &\iff y \in X \vee y \in Y \wedge (y \notin X \vee y \notin Y) \\ \text{Wahr} &\iff \text{Wahr} \vee \text{Wahr} \wedge (\text{Falsch} \vee \text{Falsch}) \\ \text{Wahr} &\iff \text{Wahr} \wedge \text{Falsch} \\ \text{Wahr} &\iff \text{Falsch} \\ &\implies \text{"} \iff \text{" ist Falsch} \end{aligned}$$

Fall 2 $y \notin X$:

$$\begin{aligned} y \in X \vee y \in Y \wedge (y \notin X \vee y \notin Y) &\iff y \in X \\ \text{Falsch} \vee \text{Wahr} \wedge (\text{Wahr} \vee \text{Falsch}) &\iff \text{Falsch} \\ \text{Wahr} \wedge \text{Wahr} &\iff \text{Falsch} \\ \text{Wahr} &\iff \text{Falsch} \\ \implies \text{"} &\iff \text{" ist Falsch} \end{aligned}$$

### 8.3

Sei $X$ die Menge von allen funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Mit anderen Worten: $X$ ist die Menge aller Sequenzen $a_0, a_1, ...$, so dass $a_i \in \mathbb{N}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie dass $|X| = \mathfrak{c}$. (Hinweis: es kann hilfreich sein, die Zerlegung $\mathbb{N} = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$ zu verwenden, wobei $S_i$ unendliche disjunkte Mengen sind).