Logik
Serie 1

Nikita Emanuel John Fehér, 3793479
Erik Thun, 3794446

15. April 2025
Mittwoch 09:15-10:45 Keitsch, Jamie; Gruppe e

H 1-1. Mengenlehre

a) Sei $M = \{a, b, c\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche nicht? Ohne Begründung.

i) $a \in M$ **Wahr**
ii) $\emptyset \subseteq M$ **Wahr**
iii) $\{a, c\} \notin 2^M$ **Falsch**
iv) $\{\emptyset\} \notin 2^M$ **Falsch**
v) $\{\{a\}, \{b, c\}\} \in 2^{2^M}$ **Wahr**
vi) $|2^{2^M}| = 256$ **Wahr**

b) Beweisen Sie nachfolgende Aussage. Für beliebige Mengen S und T gilt:

$$S \cup T = S \qquad \text{gdw.} \qquad T \subseteq S$$

$$\begin{aligned} S \cup T = S &\implies S \cup T \subseteq S \land S \cup T \supseteq S \\ &\implies S \cup T \subseteq S \\ &\implies T \subseteq S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T \subseteq S &\implies \{\forall x \in T | x \in S\} \\ &\implies x \in T \implies x \in S \\ &\implies S \cup T = \{\forall x | x \in S\} = S \end{aligned}$$

H 1-2. Vollständige Induktion
Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle Zahlen $n \in N$ gilt:

$$n^3 - n \text{ ist durch 3 teilbar}$$

Induktionsanfang: n=0

$$\begin{aligned} &3|(n^3 - n) \\ &3|(0^3 - 0) \\ &3|(0 - 0) \\ &3|0 \implies 0^3 - 0 \text{ ist mit 3 teilbar} \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an folgendes gilt

$$3|(n^3 - n)$$

Induktionsschritt: n = n+1

$$\begin{aligned} &3|((n+1)^3 - (n+1)) \\ &3|(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1) \\ &3|(n^3 - n + 3n^2 + 3n + 1 - 1) && |\text{nach IV ist } n^3 - n \text{ durch 3 teilbar} \\ &3|(3n^2 + 3n) \\ &3|3(n^2 + n) \implies n^2 + n \text{ ist durch 3 teilbar} \\ &\text{Da } 3|(n^3 - n) \text{ und } 3|3(n^2 + n) \text{ gilt} \\ &\implies (n+1)^3 - (n+1) \text{ ist mit 3 teilbar} \end{aligned}$$

H 1-3. Syntaktische Eigenschaften

a) Definieren Sie rekursiv die Funktion $j : F \to N$, die die Anzahl der Junktoren einer Formel zählt. Beispielsweise sollte $j((\neg A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3))) = 3$ ergeben.

b) Sei $\varphi = \neg(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))$. Bestimmen Sie:

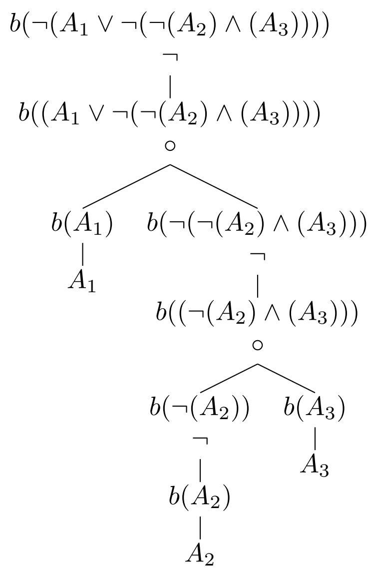
i) den Rang $r(\varphi)$

$$\begin{aligned}
r(\varphi) &= r(\neg(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))) \\
&= r((A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))) + 1 \\
&= \max\{r(A_1), r(\neg(\neg A_2 \wedge A_3))\} + 1 \\
&= \max\{0, r((\neg A_2 \wedge A_3)) + 1\} + 1 \\
&= \max\{0, \max\{r(\neg A_2), r(A_3)\} + 1 + 1\} + 1 \\
&= \max\{0, \max\{r(A_2) + 1, 0\} + 1 + 1\} + 1 \\
&= \max\{0, \max\{0 + 1, 0\} + 1 + 1\} + 1 \\
&= \max\{0, \max\{1, 0\} + 1 + 1\} + 1 \\
&= \max\{0, 1 + 1 + 1\} + 1 \\
&= \max\{0, 3\} + 1 \\
&= 3 + 1 \\
&= 4
\end{aligned}$$

ii) die Menge der Teilformeln $t(\varphi)$

$$\begin{aligned}
t(\varphi) &= t((\neg(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3)))) \\
&= t((A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))) \cup \{\neg(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))\} \\
&= t(A_1) \cup t(\neg(\neg A_2 \wedge A_3)) \cup \{(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))\} \cup \{\neg(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))\} \\
&= \{A_1\} \cup t((\neg A_2 \wedge A_3)) \cup \{\neg(\neg A_2 \wedge A_3)\} \cup \{(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3)), \neg(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))\} \\
&= \{A_1\} \cup t(\neg A_2) \cup t(A_3) \cup \{(\neg A_2 \wedge A_3)\} \cup \{\neg(\neg A_2 \wedge A_3), (A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3)), \neg(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))\} \\
&= \{A_1\} \cup t(A_2) \cup \{\neg A_2\} \cup \{A_3\} \cup \{(\neg A_2 \wedge A_3), \neg(\neg A_2 \wedge A_3), (A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3)), \neg(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))\} \\
&= \{A_1\} \cup \{A_2\} \cup \{\neg A_2, A_3, (\neg A_2 \wedge A_3), \neg(\neg A_2 \wedge A_3), (A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3)), \neg(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))\} \\
&= \{A_1, A_2, \neg A_2, A_3, (\neg A_2 \wedge A_3), \neg(\neg A_2 \wedge A_3), (A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3)), \neg(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))\}
\end{aligned}$$

iii) den Syntaxbaum $b(\varphi)$



H 1-4. Induktion über den Formelaufbau
Zeigen Sie per Induktion über den Formelaufbau, dass für alle Formeln $\varphi \in F$ gilt:

$$|t(\varphi)| \leq 2^{r(\varphi)+1} - 1$$

$\forall e \in F$ soll gelten: $|t(e)| \leq 2^{r(e)+1} - 1$
Hierfür orientieren wir und an den rekursiven Funktionen aus der Vorlesung für $t(e)$ und $r(e)$
Die Aussage gilt für atomare Aussagen: $A \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} |t(A)| &\leq 2^{r(A)+1} - 1 \\ |\{A\}| &\leq 2^{0+1} - 1 \\ 1 &\leq 2^1 - 1 \\ 1 &\leq 1 \end{aligned}$$

Wenn $E(\phi)$, dann auch $E(\neg\phi)$:

$$\begin{aligned} |t(\neg e)| &\leq 2^{r(\neg e)+1} - 1 \\ |t(e) \cup \{\neg e\}| &\leq 2^{r(e)+1+1} - 1 \\ |\{e, \neg e\}| &\leq 2^{\max\{r(e),0\}+1+1} - 1 \\ 2 &\leq 3 \end{aligned}$$

Zu letzt sollte man zeigen wenn e und ψ, dann auch $e \circ \psi$ gilt, wobei $\circ \in \{\wedge, \vee\}$.

$$\begin{aligned} |t(e \circ \psi)| &\leq 2^{r(e\circ\psi)+1} - 1 \\ |t(e) \cup t(\psi) \cup \{e \circ \psi\}| &\leq 2^{\max\{r(e),r(\psi)\}+1+1} - 1 \\ |\{e \circ \psi, e, \psi\} &\leq 2^{0+1+1} - 1 \\ 3 &\leq 3 \end{aligned}$$