Grundlagen Lineare Algebra für Informatiker

Nikita Emanuel John Fehér, 3793479

12. Mai 2024
Montag 09:15-11:15 Valerie Christiana Sabrina Freund

Aufgabe 1 Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Abbildungen linear sind und begründen Sie Ihre Antworten. Dabei bezeichnet $V_{\mathbb{R}}$ den Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Definition V.1.1. Seien V und W zwei Vektorräume über demselben Körper K und sei $F : V \to W$ eine Abbildung. F heißt linear, falls folgendes gilt:

(a) $F(v + w) = F(v) + F(w)$ für alle $v, w \in V$.

(b) $F(\lambda v) = \lambda F(v)$ für alle $v \in V$ und alle $\lambda \in K$.

1) $F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F_1(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ x \end{pmatrix}$$

- Sei $v = 1, w = 1$

$$\begin{aligned} F_1(v + w) &\neq F_1(v) + F_1(w) \\ F_1(1 + 1) &\neq F_1(1) + F_1(1) \\ F_1(2) &\neq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} &\neq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2) $F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - 2y \\ 3x \end{pmatrix}$$

- Sei $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, w = (x_2, y_2)$

$$\begin{aligned} F_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &= F_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + F_1\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \\ F_1\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} x_1 - 2y_1 \\ 3x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - 2y_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) \\ 3(x_1 + x_2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 2y_2 + 2y_2 \\ 3x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 2y_1 + 2y_2 \\ 3x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 2y_1 + 2y_2 \\ 3x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F_1\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \lambda F_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\ F_1\left(\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}\right) &= \lambda \begin{pmatrix} x - 2y \\ 3x \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda x - 2(\lambda y) \\ 3(\lambda x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda(x - 2y) \\ \lambda(3x) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda x - 2\lambda y \\ 3\lambda x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda x - 2\lambda y \\ 3\lambda x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3) $F_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$F_3 = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 5x - 2y + z$$

- Sei $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} F_3\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) &= F_3\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) + F_3\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) \\ F_3\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}\right) &= 5x_1 - 2y_1 + z_1 + 5x_2 - 2y_2 + z_2 \\ 5(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) + z_1 + z_2 &= 5(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) + z_1 + z_2 \end{aligned}$$

- Sei $\lambda \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
F_3\left(\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) &= \lambda F_3\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)\\
F_3\left(\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\\\lambda z\end{pmatrix}\right) &= \lambda(5x-2y+z)\\
5\lambda x-2\lambda y+\lambda z &= 5\lambda x-2\lambda y+\lambda z
\end{aligned}
$$

4) $F_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F_4\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\xy\end{pmatrix}$$

- Sei $\lambda = 2$

$$
\begin{aligned}
F_4\left(2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) &\neq 2F_4\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\\
F_4\left(\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}\right) &\neq 2(\begin{pmatrix}0\\xy\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}0\\2x2y\end{pmatrix} &\neq \begin{pmatrix}0\\2xy\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

5) $F_5 : V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$ mit

$$F_5(f)(t) = f(t^3)$$

- Sei $v = f, w = g$

$$
\begin{aligned}
F_5(f+g)(t) &= F_5(f)(t) + F_5(g)(t)\\
(f+g)(t^3) &= f(t^3) + g(t^3)
\end{aligned}
$$

- Sei $\lambda \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
F_5(\lambda f)(t) &= \lambda F_5(f)(t)\\
(\lambda f)(t^3) &= \lambda f(t^3)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 Sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K. Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung und sei U ein Unterraum von W. Zeigen Sie, dass das Urbild $F^{-1}[U]$ ein Unterraum von V ist.

Beweis :

Nach Lemma V.1.4. stimmt die Aufgabenstellung, jedoch wurde im Skript ausgelassen den Beweis aufzuschreiben, deshalb hier mein Versuch:
Da $F : V \to W$ ist linear $\implies$ F^{-1} ist auch linear

- Unterraum:
  - $0 = F^{-1}(0) \in F^{-1}[U] \implies F^{-1}[U] \neq \emptyset$
  - $v_1, v_2 \in F^{-1}[U] \implies_{\text{definition}} u_1, u_2 \in U : v_1 = F^{-1}(u_1), v_2 = F^{-1}(u_2)$ Wegen Linearität von $F^{-1} \implies v_1 + v_2 = F^{-1}(u_1) + F^{-1}(u_2) = F^{-1}(u_1 + u_2)$
  - $\lambda v_1 = \lambda F^{-1}(u_1) = F^{-1}(\lambda u_1)$ für $\lambda \in K$

  Da U ein Unterraum von W ist, gilt auch $u_1 + u_2 \in U$ und $\lambda u_1 \in U$. Daher folgt $v_1 + v_2 \in F^{-1}[U]$ und $\lambda v_1 \in F^{-1}[U]$. Also ist $F^{-1}[U]$ ein Unterraum.

Aufgabe 3 Sei K ein Körper und sei V ein Vektorraum über K. Ferner seien $F, G : V \to V$ zwei lineare Abbildungen. Zeigen Sie:

$$G \circ F = F \circ G \Rightarrow G[\ker(F)] \subseteq \ker(F) \text{ und } G[\mathrm{Im}(F)] \subseteq \mathrm{Im}(F)$$

Beweis:

- $G \circ F = F \circ G \implies G[\mathrm{Im}(F)] \subseteq \mathrm{Im}(F)$

$$\begin{aligned} & G[\mathrm{Im}(F)] = G[F[V]] \\ \implies & F[\mathrm{Im}(G)] = F[G[V]] \\ & G[V] = \mathrm{Im}(G) \subseteq V \\ & F[G[V]] = F[V] \subseteq \mathrm{Im}(F) \\ \implies & G[\mathrm{Im}(F)] \subseteq \mathrm{Im}(F) \end{aligned}$$