Tafelanschriften zur Vorlesung „Logik“

Carsten Lutz
Institut für Informatik
Universität Leipzig

Stand: 24. Mai 2024

Inhaltsverzeichnis

Die Vorlesung „Logik“ gibt eine Einführung in die formale Logik und betont dabei insbesondere diejenigen Aspekte, die als Grundlage für die Informatik eine wesentliche Rolle spielen. Das Vorlesungsmaterial setzt sich aus zwei Teilen zusammen:

- die in der Vorlesung verwendeten Folien, die über Moodle als PDF zur Verfügung stehen;
- die vorliegenden Notizen, die die in der Vorlesung gemachten Tafelanschriebe dokumentieren, so dass die Teilnehmer während der Vorlesung nicht mitschreiben müssen und sich stattdessen auf die Inhalte konzentrieren können.

Es handelt sich bei diesen Notizen also nicht um ein durchgängiges Skript, sie sind als Ergänzung zu den Vorlesungsfolien zu betrachten.

Wer einen durchgängigen Text als Einführung in die Logik lesen möchte, wird auf die in der Vorlesung besprochene Literatur verwiesen. Ich führe sie hier der Vollständigkeit halber nocheinmal auf:

- Uwe Schöning. *Logik für Informatiker*. Spektrum Verlag, 2000 (5. Auflage).

  Ein bewährtes einführendes Lehrbuch, das in knapper und verständlicher Form viele grundlegende Inhalte der Vorlesung präsentiert.

- Heinz-Dieter Ebbinghaus, Jörg Flum, Wolfgang Thomas. *Einführung in die mathematische Logik*. Springer Verlag, 2018 (5. Auflage).

  Ebenfalls ein sehr bewährtes Lehrbuch, dass sich auf die Prädikatenlogik erster (und höherer) Stufe konzentriert und sowohl grundlegende als auch weiterführende Inhalte zu diesem Thema in verständlicher Form präsentiert.

Bitte beachten Sie, dass die in diesen Büchern verwendete Notation nicht unbedingt mit der Notation aus der Vorlesung übereinstimmt. Auch einige Inhalte sind eventuell in leicht anderer Form präsentiert. Eine gewisse Übertragungsleistung ist bei der Verwendung dieser zusätzlichen Materialien also zu erbringen, denn in der Prüfung gelten selbstverständlich die Inhalte und Notationen aus der Vorlesung, nicht die der Bücher.

Viel Spaß und Erfolg in der Logik wünscht Carsten Lutz.

Teil I.

Aussagenlogik

T1.1 Modellierung des Zeitplanungsproblems

φ besteht aus den folgenden Teilformeln:

- Jede Stunde wird von einem passenden Lehrer unterrichtet:
$$\varphi_1 = \bigwedge_{sk\,\in\,\{\mathsf{Ia,IIIa,IIIb}\}} (x^{\mathsf{M}}_{sk} \vee x^{\mathsf{K}}_{sk}) \quad \wedge \quad \bigwedge_{sk\,\in\,\{\mathsf{Ib,IIa,IIb}\}} (x^{\mathsf{S}}_{sk} \vee x^{\mathsf{K}}_{sk})$$
  Die Konjunktion in der 1. Hälfte erfasst alle Mathestunden und die in der 2. Hälfte alle Deutschstunden.
- Jeder Lehrer unterrichtet ≥ 2 Stunden:
$$\varphi_2 = \bigwedge_{L\,\in\,\{\mathsf{M,S,K}\}} \quad \bigvee_{\substack{sk,\,s'k'\,\in\,\{\mathsf{Ia,Ib,IIa,IIb,IIIa,IIIb}\} \\ sk\,\neq\, s'k'}} (x^{L}_{sk} \wedge x^{L}_{s'k'})$$
- Kein Lehrer unterrichtet zwei Klassen gleichzeitig:
$$\varphi_3 = \bigwedge_{L\,\in\,\{\mathsf{M,S,K}\}} \quad \bigwedge_{s\,\in\,\{\mathsf{I,II,III}\}} \neg(x^{L}_{s\mathsf{a}} \wedge x^{L}_{s\mathsf{b}})$$
- Pro Stunde höchstens eine Lehrer:
$$\varphi_4 = \bigwedge_{s\,\in\,\{\mathsf{I,II,III}\}} \quad \bigwedge_{k\,\in\,\{\mathsf{a,b}\}} \Big(\neg(x^{\mathsf{M}}_{sk} \wedge x^{\mathsf{S}}_{sk}) \quad \wedge \quad \neg(x^{\mathsf{M}}_{sk} \wedge x^{\mathsf{K}}_{sk}) \quad \wedge \quad \neg(x^{\mathsf{S}}_{sk} \wedge x^{\mathsf{K}}_{sk})\Big)$$

Man sieht leicht, dass die Belegungen V mit
$$V \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4$$
genau den Lösungen des Zeitplanungsproblems entsprechen.

T1.2 Beispielhafter Lauf des Algorithmus für das Auswertungsproblem

Sei $\varphi = \neg((x \wedge y) \vee z)$ und $V = \{x \mapsto 0, y \mapsto 0, z \mapsto 1\}$

Rekursionsbaum des Algorithmus und Rückgabewerte:

- $\mathsf{Ausw}(\varphi, V) = 0$
  - $\mathsf{Ausw}((x \wedge y) \vee z, V) = 1$
    - $\mathsf{Ausw}(x \wedge y, V) = 0$
      - $\mathsf{Ausw}(x, V) = 0$
      - $\mathsf{Ausw}(y, V) = 0$
    - $\mathsf{Ausw}(z, V) = 1$

T1.3 Beweis der Korrektheit des Algorithmus für das Auswertungsproblem

Lemma 1.7 Für alle Formeln φ und Belegungen V gilt: $\mathsf{Ausw}(\varphi, V) = 1$ gdw. $V \models \varphi$.

Beweis. Wir führen den Beweis per Induktion über den Aufbau der Formel φ:

Induktionsanfang.

Wenn φ atomar ist, dann ist φ eine Aussagenvariable x. Es gilt

$$\begin{array}{llll} \mathsf{Ausw}(\varphi, V) = 1 & \text{gdw} & V(x) = 1 & \text{(nach Def. des Algorithmus)} \\ & \text{gdw.} & V \models \varphi & \text{(nach Def. von „}\models\text{“).} \end{array}$$

Induktionsschritt.

Wir unterscheiden drei Fälle.

1. φ hat die Form $\varphi = \neg\psi$. Dann gilt:

$$\begin{array}{llll} \mathsf{Ausw}(\varphi, V) = 1 & \text{gdw} & \mathsf{Ausw}(\psi, V) = 0 & \text{(nach Def. des Algorithmus)} \\ & \text{gdw.} & V \not\models \psi & \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ & \text{gdw.} & V \models \varphi & \text{(nach Semantik)} \end{array}$$

2. φ hat die Form $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$. Dann gilt:

$$\begin{array}{llll} \mathsf{Ausw}(\varphi, V) = 1 & \text{gdw} & \mathsf{Ausw}(\psi_1, V) = 1 \text{ und } \mathsf{Ausw}(\psi_1, V) = 1 & \text{(nach Def. des Alg.)} \\ & \text{gdw.} & V \models \psi_1 \text{ und } V \models \psi_2 & \text{(nach IV)} \\ & \text{gdw.} & V \models \varphi & \text{(nach Sem.)} \end{array}$$

3. φ hat die Form $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$. Dann gilt:

$$\begin{array}{llll} \mathsf{Ausw}(\varphi, V) = 1 & \text{gdw} & \mathsf{Ausw}(\psi_1, V) = 1 \text{ oder } \mathsf{Ausw}(\psi_1, V) = 1 & \text{(nach Def. des Alg.)} \\ & \text{gdw.} & V \models \psi_1 \text{ oder } V \models \psi_2 & \text{(nach IV)} \\ & \text{gdw.} & V \models \varphi & \text{(nach Sem.)} \end{array}$$

T1.4 Beispiel für Wandlung Boolesche Funktion $\Rightarrow$ AL-Formel

Sei $f \in \mathcal{B}^2$ die folgende Boolsche Funktion:

w_1	w_2	$f(w_1, w_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Dann ist $\varphi_f = (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2)$.

T1.5 Beispiel Boolsche Funktionen als Junktoren

Betrachte $f \in \mathcal{B}^3$ wie folgt:

$$f(0, x, y) = x \vee y$$
$$f(1, x, y) = x \wedge y$$

Wahrheitstabelle liefert die Semantik für einen dreistelligen Junktor f:

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
	$\vdots$		
1	1	1	1

Eine Formel über der Junktormenge $\{\neg, \wedge, \vee, f\}$ wäre z. B.:

$$x \;\vee\; \neg f(x \vee y,\; f(y, y, z),\; \neg z)$$

T1.6 Erfüllbarkeit/Gültigkeit KNF/DNF: Einfache Fälle

Erfüllbare DNF-Formel z.B.

$$(x \wedge y \wedge \neg x) \vee \underline{(\neg y \wedge z)} \vee (y \wedge \neg y \wedge z)$$

Nicht gültige KNF-Formel z.B.

$$(\neg x \vee \neg y \vee x) \wedge \underline{(y \vee \neg z)} \wedge (\neg y \vee y \vee \neg z)$$

T1.7 Beweis Erfüllbarkeitsäquivalenz Tseitin-Transformation

Konjunkt x_φ: wegen $V \models \varphi$ und nach Definition von V'.

Konjunkte $x_{\neg\vartheta} \leftrightarrow \neg x_\vartheta$:

$V' \models x_{\neg\vartheta}$	gdw.	$V \models \neg\vartheta$	(Def. V')
	gdw.	$V \not\models \vartheta$	(Semantik „$\neg$“)
	gdw.	$V' \not\models x_\vartheta$	(Def. V')
	gdw.	$V' \models \neg x_\vartheta$	(Semantik „$\neg$“)

Konjunkte $x_{\vartheta\vee\gamma} \leftrightarrow x_\vartheta \vee x_\gamma$:

$V' \models x_{\vartheta\vee\gamma}$	gdw.	$V \models \vartheta \vee \gamma$	(Def. V')
	gdw.	$V \models \vartheta$ oder $V \models \gamma$	(Semantik „$\vee$“)
	gdw.	$V' \models x_\vartheta$ oder $V' \models x_\gamma$	(Def. V')
	gdw.	$V' \models x_\vartheta \vee x_\gamma$	(Semantik „$\neg$“)

Konjunkte $x_{\vartheta\wedge\gamma} \leftrightarrow x_\vartheta \wedge x_\gamma$: analog

T1.8 Beispiele für den Markierungsalgorithmus

Beispiel 1. Betrachte die Horn-Formel auf der vorhergehenden Folie (mit den Aussagenvariablen Regen, Schnee, $\mathsf{Niederschlag}$, $\mathsf{Temp{\geq}0}$, $\mathsf{Temp{<}0}$).

Dann berechnet der Algorithmus

- in Zeile 1: $V = \{\mathsf{Regen}, \mathsf{Schnee}\}$
- in Zeilen 2–4: $V = \{\mathsf{Regen}, \mathsf{Schnee}\} \cup \{\mathsf{Temp{\geq}0}, \mathsf{Temp{<}0}\}$

Wegen des Konjunkts $\mathsf{Temp{\geq}0} \wedge \mathsf{Temp{<}0} \to 0$ wird in Zeile 6 „unerfüllbar“ zurückgegeben.

Beispiel 2. Sei $\varphi = x \wedge y \wedge (x \to z) \wedge (y \wedge z \to u) \wedge (u \wedge w \to 0)$. Dann berechnet der Algorithmus

- in Zeile 1: $V = \{x, y\}$
- in Zeilen 2–4: $V = \{x, y\} \cup \{z, u\}$ (2 Iterationen!)

Da der einzige Constraint in φ das Konjunkt $u \wedge w \to 0$ ist und nicht gleichzeitig u und w in V sind, wird in Zeile 8 „erfüllbar“ zurückgegeben.

T1.9 Nicht-Ausdrückbarkeit der Disjunktion in Horn Logik

Lemma 1.27. Keine Horn-Formel ist äquivalent zu $x \vee y$.

Beweis. Angenommen, es gäbe eine zu $x \vee y$ äquivalente Horn-Formel φ. Dann hätte φ und damit auch $x \vee y$ ein minimales Modell V. Betrachte nun folgende Modelle von $x \vee y$:

$$V_x = \{x\} \qquad V_y = \{y\}$$

Offenbar sind beides Modelle von $x \vee y$. Für das minimale Modell V müsste dann gelten: $V \subseteq V_x \cap V_y$, wegen Bedingung 2 für minimale Modelle. Also $V = \emptyset$, was aber kein Modell von $x \vee y$ ist. Damit haben wir einen Widerspruch zur Annahme gefolgert; diese muss also falsch sein. ❑

T1.10 Beispiel Resolution

Sei $\varphi = x_1 \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge \neg x_3$.

Dann ist $M = M(\varphi) = \{\, \{x_1\}, \{\neg x_1, x_2\}, \{\neg x_2, x_3\}, \{\neg x_3\} \,\}$ und $\mathsf{Res}^0(M) = M$. Weiterhin:

$$\begin{aligned}
\mathsf{Res}^1(M) &= \mathsf{Res}^0(M) \cup \{\, \{x_2\}, \{\neg x_1, x_3\}, \{\neg x_2\} \,\} \\
\mathsf{Res}^2(M) &= \mathsf{Res}^1(M) \cup \{\, \{x_3\}, \{\neg x_1\}, \Box \,\} \\
\mathsf{Res}^3(M) &= \mathsf{Res}^2(M)
\end{aligned}$$

Also ist:

$$\begin{aligned}
\mathsf{Res}^*(M) &= \mathsf{Res}^3(M) \\
&= \{\{x_1\}, \{\neg x_1, x_2\}, \{\neg x_2, x_3\}, \{\neg x_3\}, \{x_2\}, \{\neg x_1, x_3\}, \{\neg x_2\}, \{x_3\}, \{\neg x_1\}, \Box\}
\end{aligned}$$

T1.11 Beweis Lemma 1.37

Lemma 1.37. (partiell) Wenn eine endliche Klauselmenge M unerfüllbar ist, dann sind M^+ und M^- unerfüllbar.

Beweis. Sei M ist unerfüllbar. Angenommen, M^+ ist erfüllbar. Dann gibt es Belegung V mit $V \models M^+$. Sei $V' = V \cup \{x \mapsto 1\}$. Man prüft leicht, dass V' alle Klauseln C in M erfüllt:

- wenn $x \in C$, dann $V' \models C$ wegen $V'(x) = 1$
- wenn $x \notin C$, dann $C \setminus \{\neg x\} \in M^+$
  also $V \models C \setminus \{\neg x\}$
  also $V' \models C \setminus \{\neg x\}$
  also $V' \models C$.

Wir haben also gezeigt, dass M erfüllbar ist und damit einen Widerspruch erzeugt. Also muss unsere Annahme falsch gewesen sein, d.h. M^+ ist unerfüllbar.

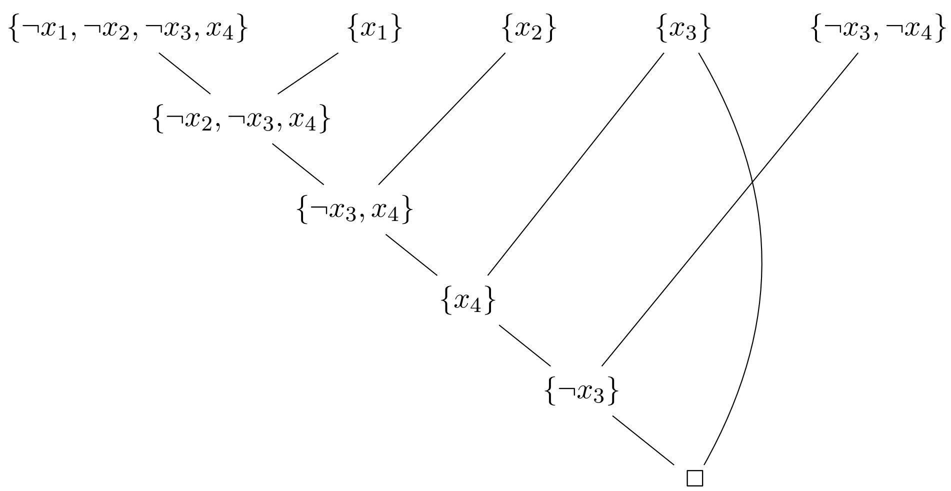
Der Fall M^- ist analog.

T1.12 Beispiel Einheitsresolution

Gegeben sei die Klauselmenge

$$M = \{\{\neg x_1, \neg x_2, \neg x_3, x_4\}, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{\neg x_3, \neg x_4\}\}.$$

Ein möglicher Resolutionsbeweis mittels Einheitsresolution ist folgender.



T1.13 Beweis Resolutionssatz für Einheitsresolution

Zu zeigen:

$$x \in V^i \quad \text{impliziert} \quad \{x\} \in \mathsf{ERes}^*(M) \tag{$**$}$$

Dazu gehen wir per Induktion über i vor.

Induktionsanfang: $i = 0$.

Wenn $x \in V^0$, dann $\{x\} \in M$ nach Definition von V^0. Da $M \subseteq \mathsf{ERes}^*(M)$, gilt auch $\{x\} \in \mathsf{ERes}^*(M)$.

Induktionsschritt: $i > 0$.

Sei $x \in V^{i+1}$. Wenn $x \in V^i$, dann folgt die Behauptung bereits nach Induktionsvoraussetzung. Wenn $x \notin V^i$, dann gibt es nach Definition von V^{i+1} Variablen $x_1, \ldots, x_k \in V^i$ mit $\{\neg x_1, \ldots, \neg x_k, x\} \in M$. Nach Induktionsvoraussetzung sind $\{x_1\}, \ldots, \{x_k\} \in \mathsf{ERes}^*(M)$. Nun bezeugt die folgende Ableitung von $\{x\}$ mittels Einheitsresolution, dass $\{x\} \in \mathsf{ERes}^*(M)$.

$$\begin{array}{ccccc} \{\neg x_1, \ldots, \neg x_k, x\} & & \{x_1\} & \cdots & \{x_k\} \\ & \{\neg x_2, \ldots, \neg x_k, x\} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \{x\} & \end{array}$$

Ende Beweis von (b).

T1.14 Einheitsresolution (ohne Variablenordnung) kein Polynomialzeitverfahren

Für $n \geq 1$ betrachte:

$$M_n = \{\underbrace{\{\neg x_1, \ldots, \neg x_n\}}_{=:C}, \{x_1\}, \ldots, \{x_n\}\}.$$

$\mathsf{ERes}^*(M_n)$ enthält alle Teilmengen von C, also 2^n viele:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{ERes}(M_n) & \supseteq & \{C \setminus \{\neg x_i\} \mid 1 \leq i \leq n\} \\ \mathsf{ERes}^2(M_n) & \supseteq & \{C \setminus \{\neg x_i, \neg x_j\} \mid 1 \leq i, j \leq n\} \\ & \vdots & \end{array}$$

T1.15 Beispiel Einheitsresolution mit Variablenordnung

Betrachte die Klauselmengen M_n auf T1.14 und die Variablenordnung

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n.$$

Die einzig möglichen Resolventenbildungen sind:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\{\neg x_1,\dots,\neg x_k\} \arrow[dr, dash] & & \{x_1\} \arrow[dl, dash] & \{x_2\} \arrow[ddl, dash] & \cdots \\
& \{\neg x_2,\dots,\neg x_k\} \arrow[dr, dash] & & & \\
& & \{\neg x_3,\dots,\neg x_k\} \arrow[dr, dash] & & \\
& & & \cdots &
\end{tikzcd}
$$

Insgesamt werden also nur linear viele Klauseln gebildet.

T1.16 Beispiel DPLL

Betrachte die Klauselmenge $M = C_1 \wedge \cdots \wedge C_6$ mit

$$
\begin{array}{lll}
C_1 = x_1 \vee x_2 & C_2 = \neg x_2 \vee x_3 & C_3 = \neg x_2 \vee \neg x_3 \\
C_4 = x_2 \vee x_3 \vee x_4 & C_5 = \neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4 & C_6 = x_2 \vee \neg x_3
\end{array}
$$

wobei wir die Klauseln der Übersichtlichkeit halber als Disjunktionen schreiben. Der DPLL-Algorithmus führt folgende Schritte aus:

1. Zu Anfang gibt es keine Einheitsklauseln. Allerdings ist x_1 ein pures Literal. Der DPLL-Algorithmus löscht alle Klauseln, die x_1 enthalten, also C_1.
2. Nun muss der Algorithmus eine Variable wählen, sagen wir x_3. Im „If"-Teil wird x_3 auf 1 gesetzt. C_2, C_4 und C_5 sind dann erfüllt und werden gelöscht. Es ergibt sich die folgende Klauselmenge:
$$
\begin{array}{l}
C_3 = \neg x_2 \\
C_6 = x_2
\end{array}
$$
3. Der Algorithmus wählt nun eine Einheitsklausel, sagen wir C_3. Er setzt also x_2 auf 0, löscht C_3 und entfernt x_2 aus C_6. Es ergibt sich die leere Klausel.
4. Der Algorithmus muss nun sein Entscheidung revidieren, x_3 auf 1 zu setzen und setzt x_3 stattdessen auf 0. Die Klauseln C_3 und C_6 sind erfüllt. Es ergibt sich die folgende Klauselmenge:
$$
\begin{array}{ll}
 & C_2 = \neg x_2 \\
C_4 = x_2 \vee x_4 & C_5 = \neg x_2 \vee \neg x_4
\end{array}
$$
5. Nun ist C_2 eine Einheitsklausel, der Algorithmus setzt also x_2 auf 0. Klauseln C_2 und C_5 sind damit erfüllt und es verbleibt die Klausel
$$C_4 = x_4.$$

6. Dies ist wiederrum eine Einheitsklausel, der Algorithmus setzt x_4 auf 1, löscht die letzte Klausel, so dass die Klauselmenge nun leer ist, und hat eine erfüllende Belegung gefunden.

Die Optimierungen haben hier dafür gesorgt, dass von den potentiell $2^4 = 16$ möglichen Belegungen nur sehr wenige exploriert werden mussten.

T1.17 Beispiel Hilbert-Kalkül

Die Formel $x \to x$ ist herleitbar:

(a)	$x \to ((y \to x) \to x)$	Instanz von Axiom 1 mit $\varphi = x$ und $\psi = (y \to x)$
(b)	$\big(x \to ((y \to x) \to x)\big) \to \big((x \to (y \to x)) \to (x \to x)\big)$	Instanz von Axiom 2 mit $\varphi = x,\ \psi = (y \to x),\ \vartheta = x$
(c)	$(x \to (y \to x)) \to (x \to x)$	Modus Ponens (MP) angewandt auf (a), (b)
(d)	$x \to (y \to x)$	Instanz von Axiom 1 mit $\varphi = x$ und $\psi = y$
(e)	$x \to x$	MP angewandt auf (c), (d)

T1.18 Jede endliche Teilmenge $\Delta \subseteq \Gamma$ ist erfüllbar

Sei $\Delta \subseteq \Gamma$ endlich. Setze

$$\begin{aligned} V' &= \{v \in V \mid \exists i : x_{v_i} \text{ kommt in } \Delta \text{ vor}\} \\ G' &= (V', E \cap (V' \times V')) \end{aligned}$$

G' ist endlich und planar, also 4-färbbar nach Theorem 1.49. Offensichtlich liefert jede 4-Färbung von G' eine erfüllende Belegung für Δ.

T1.19 Beweis Kompaktheitssatz

1. Wir nehmen im Gegenteil an, dass es ein i gibt, für das Γ_i nicht limit-erfüllbar ist. Sei i minimal mit dieser Eigenschaft. Da Γ_0 limit-erfüllbar ist muss $i > 0$ sein.

   Nach Konstruktion von Γ_i aus Γ_{i-1} sind dann sowohl $\Gamma_{i-1} \cup \{\varphi_i\}$ als auch $\Gamma_{i-1} \cup \{\neg\varphi_i\}$ nicht limit-erfüllbar. Also gibt es endliche Mengen $\Delta, \Delta' \subseteq \Gamma_{i-1}$ so dass sowohl $\Delta \cup \{\varphi_i\}$ als auch $\Delta' \cup \{\neg\varphi_i\}$ unerfüllbar sind. Dann ist auch die Menge $\Delta \cup \Delta'$ unerfüllbar, denn jedes Modell müsste entweder φ_i oder $\neg\varphi_i$ erfüllen, also auch $\Delta \cup \{\varphi_i\}$ oder $\Delta' \cup \{\neg\varphi_i\}$.

   Folglich ist bereits Γ_{i-1} nicht limit erfüllbar. Widerspruch zur Minimalität von i.

2. Angenommen, Γ_ω ist nicht limit-erfüllbar. Dann gibt es ein endliches $\Delta \subseteq \Gamma_\omega$, das unerfüllbar ist. Dann gibt es aber auch ein $i \geq 0$ so dass $\Delta \subseteq \Gamma_i$. Also ist Γ_i nicht limit-erfüllbar. Widerspruch zu Punkt 1.
3. Definiere
$$V(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in \Gamma_\omega \\ 0 & \text{sonst (d. h. } \neg x \in \Gamma_\omega) \end{cases}$$
Wir zeigen per Induktion über den Aufbau von φ:
$$V \models \varphi \quad \text{gdw.} \quad \varphi \in \Gamma_\omega \qquad \text{für alle aussagenlogischen Formeln } \varphi.$$
Daraus folgt $V \models \Gamma_\omega$, also ist Γ_ω erfüllbar.

Induktionsanfang. $\varphi = x$. Die Behauptung folgt direkt aus der Definition von V.

Induktionsschritt.

- $\varphi = \neg\psi$.
  Dann gilt:
$$\begin{aligned} V \models \varphi \ \ &\text{gdw.} \ \ V \not\models \psi && \text{(Semantik von } \neg) \\ &\text{gdw.} \ \ \psi \notin \Gamma_\omega && \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\ &\text{gdw.} \ \ \varphi \in \Gamma_\omega && \text{(Konstr. von } \Gamma_\omega\text{: } \varphi \in \Gamma_w \text{ oder } \psi \in \Gamma_w \\ & && \ \Gamma_w \text{ limit-erfüllbar: } \{\varphi, \psi\} \not\subseteq \Gamma_w) \end{aligned}$$
- $\varphi = \psi \wedge \vartheta$.
  Dann gilt:
$$\begin{aligned} V \models \varphi \ \ &\text{gdw.} \ \ V \models \psi \text{ und } V \models \vartheta && \text{(Semantik von } \wedge) \\ &\text{gdw.} \ \ \psi \in \Gamma_\omega \text{ und } \vartheta \in \Gamma_\omega && \text{(Induktionsvoraussetzung)} \end{aligned}$$
  Es bleibt, zu zeigen: $\psi \in \Gamma_\omega$ und $\vartheta \in \Gamma_\omega$ gilt gdw. $\psi \wedge \vartheta \in \Gamma_\omega$.

  „$\Rightarrow$“ gilt weil eine der beiden Formeln $\psi \wedge \vartheta$ und $\neg(\psi \wedge \vartheta)$ in Γ_ω enthalten sein muss, aber $\{\psi, \vartheta, \neg(\psi \wedge \vartheta)\}$ unerfüllbar ist und darum nicht Teilmenge von Γ_ω sein kann. Also $\psi \wedge \vartheta \in \Gamma_\omega$

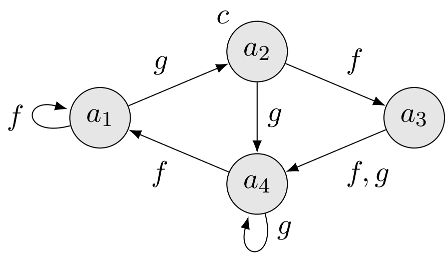
  „$\Leftarrow$“ gilt weil eine der beiden Formeln ψ und $\neg\psi$ in Γ_ω enthalten sein muss, aber $\{\neg\psi, \psi \wedge \vartheta\}$ unerfüllbar ist und darum nicht Teilmenge von Γ_ω sein kann. Also $\psi \in \Gamma_\omega$ und analog für ϑ.
- $\varphi = \psi \vee \vartheta$. Analog zu $\varphi = \psi \wedge \vartheta$.

Teil II.

Prädikatenlogik Grundlagen

T2.1 Beispiel: Zuweisung

Betrachte folgende Struktur $\mathfrak{A}$ mit unären Funktionssymbolen f, g und Konstante c.



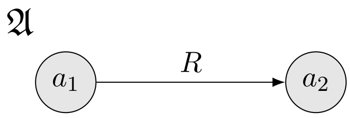
Dann muss für *jede* Zuweisung β gelten:

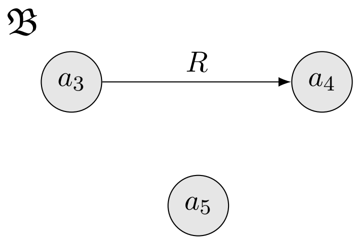
$$\beta(c) = a_2 \quad (\text{da } c^{\mathfrak{A}} = a_2)$$
$$\beta(g(f(c))) = a_4 \quad (\text{da } g^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(c)) = a_4)$$

Außerdem gilt:

- Wenn $\beta(x) = a_1$, dann $\beta(g(f(x))) = a_2$.
- Wenn $\beta(x) = a_3$, dann $\beta(g(f(x))) = a_4$.

T2.2 Beispiel Bedingung 1 Koinzidenzlemma



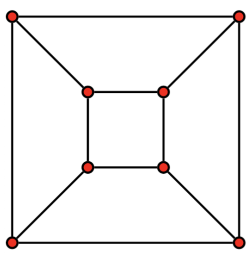


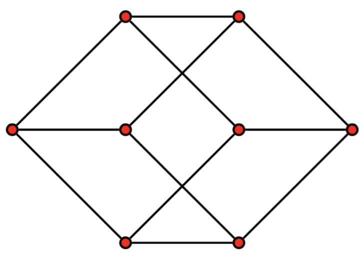
Dann zum Beispiel $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\mathfrak{B} \not\models \varphi$ für

$$\varphi = \forall x \exists y (R(x, y) \vee R(y, x)).$$

T2.3 Beispiel: Isomorphismus

Betrachte die Signatur von Graphen, also nur das binäre Relationssymbol E. Folgende Strukturen/Graphen sind isomorph. Finden Sie einen Isomorphismus! Gibt es mehrere?





(Zur Erinnerung: jede Kante repräsentiert zwei Kanten: eine in jeder Richtung).

T2.4 Beweis des Isomorphielemmas

Induktionsanfang.

- Fall $\varphi = (t_1 = t_2)$:

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{I}_A \models t_1 = t_2 & \text{gdw.} & \alpha(t_1) = \alpha(t_2) & \text{(Def. Semantik FO)} \\ & \text{gdw.} & \pi(\alpha(t_1)) = \pi(\alpha(t_2)) & \text{(weil } \pi \text{ Funktion und injektiv)} \\ & \text{gdw.} & \beta(t_1) = \beta(t_2) & (**) \\ & \text{gdw.} & \mathfrak{I}_B \models t_1 = t_2 & \text{(Def. Semantik FO)} \end{array}$$

- Fall $\varphi = P(t_1, \dots, t_n)$:

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{I}_A \models P(t_1, \dots, t_n) & \text{gdw.} & (\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}} & \text{(Def. Semantik FO)} \\ & \text{gdw.} & (\pi(\alpha(t_1)), \dots, \pi(\alpha(t_n))) \in P^{\mathfrak{B}} & \text{(weil } \pi \text{ Isomorphismus)} \\ & \text{gdw.} & (\beta(t_1), \dots, \beta(t_n)) \in P^{\mathfrak{B}} & (**) \\ & \text{gdw.} & \mathfrak{I}_B \models P(t_1, \dots, t_n) & \text{(Def. Semantik FO)} \end{array}$$

Induktionsschritt.

- Die Fälle $\varphi = \neg\psi$, $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ und $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$ sind eine gute Gelegenheit zum Üben.
- Fall $\varphi = \exists x\, \psi$:

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{I}_A \models \exists x\, \psi & \text{gdw.} & \mathfrak{A}, \alpha[x/a] \models \psi \text{ für ein } a \in A & \text{(Def. Semantik FO)} \\ & \text{gdw.} & \mathfrak{B}, \beta[x/\pi(a)] \models \psi \text{ für ein } a \in A & \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\ & \text{gdw.} & \mathfrak{B}, \beta[x/b] \models \psi \text{ für ein } b \in B & \text{(weil } \pi \text{ surjektiv)} \\ & \text{gdw.} & \mathfrak{I}_B \models \exists x\, \psi & \text{(Def. Semantik FO)} \end{array}$$

  Um im zweiten Schritt die Induktionsvoraussetzung anwenden zu können, müssen wir natürlich prüfen, ob die Voraussetzung im Lemma von $(\mathfrak{A}, \alpha[x/a])$ und $(\mathfrak{B}, \beta[x/\pi(a)])$ erfüllt sind. Dies ist der Fall, denn wir arbeiten unter der Voraussetzung

$$\beta(y) = \pi(\alpha(y)) \quad \text{für alle Variablen } y$$

  woraus folgt, dass

$$\beta[x/\pi(a)](y) = \pi(\alpha[x/a](y)) \quad \text{für alle Variablen } y.$$

- Fall $\varphi = \forall x\, \psi$ ist analog. ❑

T2.5 Beispiel für den Auswertungsalgorithmus

Betrachte die Eingabe bestehend aus

- der Struktur $\mathfrak{A}$: $\quad P \; a \xleftarrow{\;R\;} b$
- der leeren Zuweisung β und
- dem Satz $\varphi = \forall x \, \underbrace{\exists y \Big(\overbrace{P(x) \vee R(x, y)}^{\vartheta(x,y)} \Big)}_{\psi(x)}$.

Der Rekursionsbaum des Laufes des Algorithmus auf dieser Eingabe ist in Abbildung 1 dargestellt. Dabei steht „…“ für die Zuweisung, die bereits im Elternknoten verwendet wurde.

Der Aufruf `ausw`$(\mathfrak{A}, \beta, \varphi)$ liefert den Wert 1 zurück; also gilt $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi$.

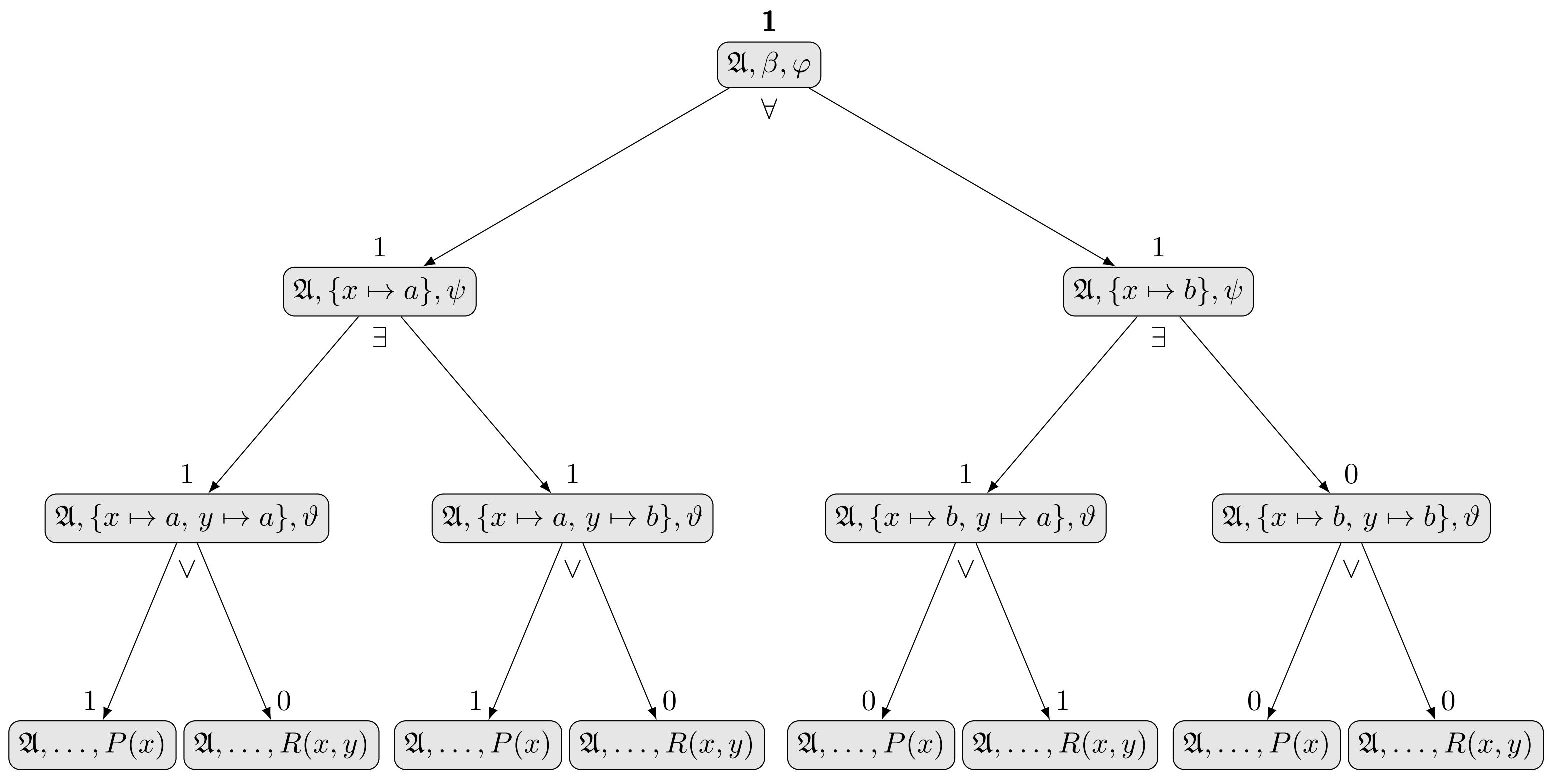
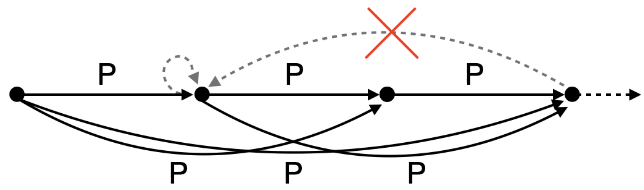


Abbildung 1.: Beispiellauf des Auswertungsalgorithmus

T2.6 Erfüllbarkeit nur in Unendlichen Modellen

Die angegebene Formel erzwingt einen unendlichen P-Pfad, der transitiv abgeschlossen ist. Jedes „Wiederverwenden” eines schon vorhandenen Knoten führt zu einem reflexiven Kreis, der aber verboten ist:



T2.7 Äquivalenzen für das PNF-Theorem

Lemma. Falls x nicht frei in φ vorkommt, gilt:

(1) $\varphi \vee \exists x\, \psi \;\equiv\; \exists x\, (\varphi \vee \psi)$
(2) $\varphi \wedge \exists x\, \psi \;\equiv\; \exists x\, (\varphi \wedge \psi)$
(3) $\varphi \vee \forall x\, \psi \;\equiv\; \forall x\, (\varphi \vee \psi)$
(4) $\varphi \wedge \forall x\, \psi \;\equiv\; \forall x\, (\varphi \wedge \psi)$

Beweis. Wir beweisen exemplarisch (1).
Sei $(\mathfrak{A}, \beta)$ eine beliebige Interpretation. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A}, \beta \models \varphi \vee \exists x\, \psi \\
&\quad \text{gdw.} \\
&\mathfrak{A}, \beta \models \varphi \text{ oder es gibt } a \in A \text{ mit } \mathfrak{A}, \beta[x/a] \models \psi \\
&\quad \text{gdw.} \\
&\text{es gibt } a \in A\text{, so dass } \mathfrak{A}, \beta[x/a] \models \varphi \text{ oder } \mathfrak{A}, \beta[x/a] \models \psi \\
&\quad \text{gdw.} \\
&\mathfrak{A}, \beta \models \exists x\, (\varphi \vee \psi)
\end{aligned}$$

Der erste und dritte Schritt gilt wegen der Semantik der Operatoren $\vee, \exists$. Der zweite Schritt gilt wegen $x \notin \mathsf{Frei}(\varphi)$, denn damit liefert das Koinzidenzlemma:

$$\mathfrak{A}, \beta \models \varphi \quad \text{gdw.} \quad \mathfrak{A}, \beta[x/a] \models \varphi$$

❏

T2.8 Beispiel für Umwandlung in PNF

Sei

$$\varphi \;=\; \neg \forall x \left(\underbrace{R(x, x)}_{\text{PNF}} \;\wedge\; \underbrace{\forall \underline{x}\, \exists y\, R(\underline{x}, y)}_{\text{PNF}} \right).$$

Um φ in PNF zu wandeln, gehen wir gemäß der Induktion im vorangehenden Beweis von innen nach außen vor. Die größten Teilformeln, die bereits in PNF sind, sind markiert. Als nächstes muss die Konjunktion gemäß Fall (2) umgeformt werden. Dazu ist es zunächst notwendig, das *gebundene* Vorkommen von x in der rechten Teilformel (durch Unterstreichen markiert) umzubenennen:

$$\varphi \;\equiv\; \neg\forall x \Big(R(x,x) \wedge \forall \underline{z}\, \exists y\, R(\underline{z}, y) \Big).$$

Die Konstruktion in Fall (2) liefert dann:

$$\varphi \;\equiv\; \neg\; \underbrace{\forall x\, \forall z\, \exists y \Big(R(x,x) \wedge R(z,y) \Big)}_{\text{PNF}}$$

Gemäß Fall (1) müssen wir jetzt nur noch Quantoren „umdrehen“ und die Negation nach innen ziehen:

$$\varphi \;\equiv\; \exists x\, \exists z\, \forall y\, \neg\Big(R(x,x) \wedge R(z,y) \Big)$$

T2.9 Erstes Beispiel für Wandlung in Skolemform

Betrachte den Satz

$$\varphi = \forall x \exists y\, P(x,y).$$

Wir transformieren φ in folgenden Satz

$$\varphi' = \forall x\, P(x, f(x)).$$

Es ist leicht zu sehen, dass jedes Modell von φ' auch ein Modell von φ ist. Umgekehrt kann jedes Modell $\mathfrak{A}$ von φ zu einem Modell von φ' erweitert werden: für jedes $a \in A$ gibt es ein $b \in A$ mit $(a,b) \in P^{\mathfrak{A}}$. Wähle ein solches b aus und setze $f(a) = b$.

Folglich ist φ erfüllbar gdw. φ' erfüllbar ist.

Warum ist es nicht sinnvoll, statt $f(x)$ eine Konstante c zu verwenden (auch wenn das in diesem sehr einfachen Beispiel funktionieren würde)?

T2.10 Beispiele für Herbrand-Strukturen

Beispiel 1. Sei $\tau = \{c, f_1, f_2, R\}$ mit

- c Konstantensymbol
- f_1, f_2 einstellige Funktionssymbole
- R zweistelliges Relationssymbol.

Für alle Herbrandstukturen $\mathfrak{H}$ für τ gilt:

$$H = \{c, f_1(c), f_2(c), f_1(f_1(c)), f_1(f_2(c)), f_2(f_1(c)), f_2(f_2(c)), f_1(f_1(f_1(c))), \ldots, \}.$$

Es haben also alle diese Strukturen dasselbe abzählbar unendliche Universum, dessen Elemente genau die τ-Terme sind. Syntax wird hier zur Semantik.

Die Interpretation der Relationssymbole ist frei, in unserem Fall von R.

Beispiel 2. Sei $\tau = \{c, R\}$ mit

- c Konstantensymbol
- R zweistelliges Relationssymbol.

Für alle Herbrandstukturen $\mathfrak{H}$ für τ gilt:

$$\begin{array}{rcl} H & = & \{c\} \\ c & = & c \\ R & \subseteq & \{c\}^2 \quad \text{also } R^{=}\emptyset \text{ oder } R^{=}\{(c,c)\}. \end{array}$$

Es gibt also genau zwei Herbrand-Strukturen für τ, die beide endlich sind.

T2.11 Beispiel für die Modellkonstruktion in Theorem 2.27

Die Signatur von φ sei $\tau = \{c, f, R\}$ mit

- c Konstantensymbol
- f einstelliges Funktionssymbol
- R zweistelliges Relationssymbol.

HIER FEHLT EIN BILD

T2.12 Beispiele für eine Herbrandexpansion

Sei $\varphi = \forall x \forall y \forall z\, R(x, f(y), g(z, x))$.

Dann enthält $\mathsf{HE}(\varphi)$ z.B. die folgenden Sätze:

- $R(c, f(c), g(c, c)$
  durch folgende Ersetzung: $x \mapsto c$, $y \mapsto c$, $z \mapsto c$
- $R(f(c), f(c), g(c, f(c))$
  durch folgende Ersetzung: $x \mapsto f(c)$, $y \mapsto c$, $z \mapsto c$
- $R(g(c, c), f(f(c)), g(c, g(c, c))$
  durch folgende Ersetzung: $x \mapsto g(c, c)$, $y \mapsto f(c)$, $z \mapsto c$

T2.14 Beispiele für Theorien

1. Die Menge $\mathsf{Taut}(\tau)$ aller Tautologien in einer fixen Signatur τ ist
   - eine FO-Theorie:

     Per Definition von Tautologien gilt: $\mathfrak{A} \models \mathsf{Taut}(\tau)$ für *jede* Struktur $\mathfrak{A}$ $\quad (*)$

     Also ist
     - $\mathsf{Taut}(\tau)$ erfüllbar;
     - $\mathsf{Taut}(\tau)$ abgeschlossen unter Konsequenz: wenn $\mathsf{Taut}(\tau) \models \varphi$, dann ist φ Tautologie (wegen $(*)$ und der Definition von $\models$) und damit $\varphi \in \mathsf{Taut}(\tau)$.
   - nicht vollständig:

     Es gibt Sätze φ, die weder Tautologie sind noch unerfüllbar – also gilt weder $\varphi \in \mathsf{Taut}(\tau)$, noch $\neg\varphi \in \mathsf{Taut}(\tau)$.
   - enthalten in allen anderen Theorien:

     Jede Theorie enthält alle Tautologien, denn diese sind Konsequenzen *aller* Formelmengen (siehe Def. Tautologie bzw. Konsequenz).
2. Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur. Dann ist

   $$\mathsf{Th}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \text{ ist } \tau\text{-Satz} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

   - eine FO-Theorie:
     - $\mathsf{Th}(\mathfrak{A})$ ist erfüllbar, denn $\mathfrak{A} \models \mathsf{Th}(\mathfrak{A})$.
     - $\mathsf{Th}(\mathfrak{A})$ ist abgeschlossen unter Konsequenz, denn wenn $\mathsf{Th}(\mathfrak{A}) \models \varphi$, dann $\mathfrak{A} \models \varphi$, also $\varphi \in \mathsf{Th}(\mathfrak{A})$.
   - vollständig:

     Für jede τ-Struktur $\mathfrak{A}$ und jeden τ-Satz φ gilt $\mathfrak{A} \models \varphi$ oder $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$ (was leicht per struktureller Induktion gezeigt werden kann).
3. Sei Ω eine erfüllbare Menge von FO-Sätzen. Dann ist

   $$\mathsf{Abschluss}(\Omega) = \{\varphi \text{ ist } \tau\text{-Satz} \mid \Omega \models \varphi\}$$

   - eine FO-Theorie:
     - $\mathsf{Abschluss}(\Omega)$ ist erfüllbar, da Ω erfüllbar ist und alle Konsequenzen aus Ω in den Modellen von Ω ebenfalls wahr sind.
     - $\mathsf{Abschluss}(\Omega)$ ist abgeschlossen unter Konsequenz: wenn $\mathsf{Abschluss}(\Omega) \models \varphi$, dann bereits $\Omega \models \varphi$, also $\varphi \in \mathsf{Abschluss}(\Omega)$.
   - im Allgemeinen nicht vollständig:

     Für $\Omega = \emptyset$ beispielsweise ist $\mathsf{Abschluss}(\Omega) = \mathsf{Taut}(\tau)$, was wegen Punkt 1 nicht vollständig ist. Ist andererseits Ω selbst bereits eine vollständige Theorie, dann ist $\mathsf{Abschluss}(\Omega) = \Omega$ und damit vollständig.

4. Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von τ-Strukturen. Dann ist

$$\mathsf{Th}(\mathcal{K}) = \bigcap_{\mathfrak{A} \in \mathcal{K}} \mathsf{Th}(\mathfrak{A})$$

   - eine FO-Theorie:
     - $\mathsf{Th}(\mathcal{K})$ ist erfüllbar denn $\mathfrak{A} \models \mathsf{Th}(\mathcal{K})$ für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$.
     - $\mathsf{Th}(\mathcal{K})$ abgeschlossen unter Konsequenz: wenn $\mathsf{Th}(\mathcal{K}) \models \varphi$, dann $\mathfrak{A} \models \varphi$ für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$. Also $\varphi \in \mathsf{Th}(\mathfrak{A})$ für all $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ und damit $\varphi \in \mathsf{Th}(\mathcal{K})$.
   - im Allgemeinen nicht vollständig:

     Wenn beispielweise $\mathcal{K}$ die Klasse *aller* τ-Strukturen ist, dann ist $\mathsf{Th}(\mathcal{K}) = \mathsf{Taut}(\tau)$, was wegen Punkt 1 nicht vollständig ist. Ist andererseits $\mathcal{K} = \{\mathfrak{A}\}$ eine einelementige Klasse, dann ist $\mathsf{Th}(\mathcal{K}) = \mathsf{Th}(\mathfrak{A})$ und wegen Punkt 2 vollständig.

T2.14 Beweis des Lemmas über Vollständigkeit von Theorien

Lemma 2.28. Sei Γ eine FO-Theorie. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) Γ ist vollständig

(2) $\Gamma = \mathsf{Th}(\mathfrak{A})$ für eine Struktur $\mathfrak{A}$.

Beweis.

„(1) $\Rightarrow$ (2)“.

Sei Γ vollständig. Da Γ als Theorie erfüllbar ist, gibt es ein Modell $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \Gamma$; also ist $\Gamma \subseteq \mathsf{Th}(\mathfrak{A})$. Es bleibt zu zeigen, dass die umgekehrte Inklusion $\mathsf{Th}(\mathfrak{A}) \subseteq \Gamma$ gilt. Sei also $\varphi \in \mathsf{Th}(\mathfrak{A})$. Da Γ vollständig ist, gilt $\varphi \in \Gamma$ oder $\neg\varphi \in \Gamma$. Letzteres ist aber unmöglich, weil $\mathfrak{A} \models \Gamma$. Also $\varphi \in \Gamma$.

„(2) $\Rightarrow$ (1)“.

Ist offensichtlich ❑

Teil III.

Mehr zu Prädikatenlogik 1. Stufe

T3.1 Erklärungen zu den Schlussregeln des Sequenzenkalküls

Um die Regeln zu verstehen, liest man sie „von oben nach unten“:

($\wedge \Rightarrow$) $\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Delta}$

Wenn die obere Sequenz $\Gamma, \varphi, \psi \Rightarrow \Delta$ gültig ist, dann auch die untere Sequenz $\Gamma, \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Delta$, denn ihre Antezedenzien $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ und $\Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi\}$ haben dieselben Modelle.

($\Rightarrow \wedge$) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}$

Wenn die oberen beiden Sequenzen gültig sind, dann gilt:

$$\bigwedge \Gamma \models \left(\bigvee (\Delta \cup \{\varphi\}) \wedge \bigvee (\Delta \cup \{\psi\})\right)$$

Nach dem Distributivgesetz gilt dann auch:

$$\bigwedge \Gamma \models \bigvee (\Delta \cup \{\varphi \wedge \psi\})$$

($\vee \Rightarrow$) $\dfrac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$

Diese Regel ist dual zu ($\Rightarrow \wedge$) in dem Sinne, dass hier die Antezedenzien so verändert werden wie dort die Sukzedenzien, wobei “$\wedge$” durch “$\vee$” ersetzt wird.

Man kann hier analog argumentieren, unter Verwendung des Distributivgesetzes.

($\Rightarrow \vee$) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$

Diese Regel ist dual zu ($\wedge \Rightarrow$) in dem Sinne, dass hier die Sukzedenzien so verändert werden wie dort die Antezedenzien, wobei “$\wedge$” durch “$\vee$” ersetzt wird.

($\neg \Rightarrow$) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \Delta}$

Wenn die obere Sequenz gültig ist, dann gilt:

$$\bigwedge \Gamma \models \bigvee (\Delta \cup \{\varphi\}) \tag{$*$}$$

Um zu zeigen, dass daraus

$$\bigwedge (\Gamma \cup \{\neg\varphi\}) \models \bigvee \Delta \tag{$**$}$$

folgt, betrachten wir ein beliebiges Modell $\mathfrak{A} \models \bigwedge (\Gamma \cup \{\neg\varphi\})$. Insbesondere haben wir also $\mathfrak{A} \models \bigwedge \Gamma$ und $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$ (Semantik der Konjunktion). Wegen $\mathfrak{A} \models \bigwedge \Gamma$ und $(*)$ gilt $\mathfrak{A} \models \bigvee (\Delta \cup \{\varphi\})$. Zusammen mit $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$ folgt $\mathfrak{A} \models \bigvee \Delta$. Also ist $(**)$ gültig.

$(\Rightarrow \neg)$ $\dfrac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}$

Wenn die obere Sequenz gültig ist, dann gilt:

$$\bigwedge (\Gamma \cup \{\varphi\}) \models \bigvee \Delta \tag{$*$}$$

Um zu zeigen, dass daraus

$$\bigwedge \Gamma \models \bigvee (\Delta \cup \{\neg\varphi\}) \tag{$**$}$$

folgt, betrachten wir ein beliebiges Modell $\mathfrak{A} \models \bigwedge \Gamma$. Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi$, dann folgt wegen $(*)$, dass $\mathfrak{A} \models \bigvee \Delta$, also auch $\mathfrak{A} \models \bigvee (\Delta \cup \{\neg\varphi\})$. Wenn $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$, dann gilt sowieso $\mathfrak{A} \models \bigvee (\Delta \cup \{\neg\varphi\})$. Also ist $(**)$ gültig.

$(\exists \Rightarrow)$ $\dfrac{\Gamma, \varphi[c] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x\, \varphi(x) \Rightarrow \Delta}$ wenn die Konstante c nirgends in $\Gamma, \Delta, \varphi(x)$ vorkommt.

Intuitiv besagt diese Regel, dass man eine Konstante, die sonst nirgends vorkommt, auch durch ein „anonymes Objekt“ ersetzen darf.

Genauer: Wenn die obere Sequenz gültig ist, dann gilt:

$$\bigwedge (\Gamma \cup \{\varphi[c]\}) \models \bigvee \Delta \tag{$*$}$$

Um zu zeigen, dass daraus

$$\bigwedge (\Gamma \cup \{\exists x\, \varphi(x)\}) \models \bigvee \Delta \tag{$**$}$$

folgt, betrachten wir ein beliebiges Modell $\mathfrak{A} \models \bigwedge (\Gamma \cup \{\exists x\, \varphi(x)\})$. Insbesondere gilt $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi(x)$, also gibt es ein $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi[a]$. Sei $\mathfrak{A}'$ die Struktur, die man aus $\mathfrak{A}$ erhält, indem man zusätzlich $c^{\mathfrak{A}'} = a$ setzt. Dann gilt:

- $\mathfrak{A}' \models \varphi[c]$ (weil c nicht in $\varphi(x)$ vorkommt, kann sich der Wahrheitswert von φ durch die Transformation auch nicht ändern) und
- und $\mathfrak{A}' \models \Gamma$ (weil c nicht in Γ vorkommt).

Also $\mathfrak{A}' \models \bigwedge (\Gamma \cup \{\varphi[c]\})$. Wegen $(*)$ erhalten wir $\mathfrak{A}' \models \bigvee \Delta$. Weil c nicht in Δ vorkommt, folgt $\mathfrak{A} \models \bigvee \Delta$. Also ist $(**)$ gültig.

Diese Argumentation benutzt die Seitenbedingung „wenn die Konstante c nirgends in $\Gamma, \Delta, \varphi(x)$ vorkommt“. Ohne diese Bedingung wäre die Regel nicht korrekt, zum Beispiel:

$$\begin{array}{rcll} P(c) & \Rightarrow & P(c) & \quad\text{ist gültig} \\ \hline \exists x\, P(x) & \Rightarrow & P(c) & \quad\text{ist nicht gültig} \end{array}$$

(⇒ ∃) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, \varphi(x)}$ wobei t ein beliebiger Term ist

Intuitiv besagt diese Regel: wenn $\varphi[t]$ für ein konkretes Element t *impliziert wird*, dann auch für ein beliebiges, existentiell quantifiziertes Objekt. Probieren Sie die formale Argumentation gern selbst aus!

Eine Seitenbedingung wird nicht gebraucht; zum Beispiel:

$$\begin{array}{ll} P(c) \;\Rightarrow\; P(c) & \text{ist gültig} \\ \hline P(c) \;\Rightarrow\; \exists x\, P(x) & \text{ist auch gültig} \end{array}$$

(∀ ⇒) $\dfrac{\Gamma, \varphi[t] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x\, \varphi(x) \Rightarrow \Delta}$ wobei t ein beliebiger Term ist

Dual zu (⇒ ∃).

(⇒ ∀) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[c]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \varphi(x)}$ wenn die Konstante c nirgends in $\Gamma, \Delta, \varphi(x)$ vorkommt.

Dual zu (∃ ⇒).

T3.2 Beispiele für SK-Beweise

Man beginnt mit der zu beweisenden Sequenz und wendet Regeln *von unten nach oben* an, bis man Axiome erhält. Man lese die folgenden Beweise also *von unten nach oben!*

1. Für beliebige Formeln φ, ψ ist folgendes ein SK-Beweis:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi, \psi}{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi}}{\neg(\varphi \vee \psi), \varphi \Rightarrow \emptyset}}{\neg(\varphi \vee \psi) \Rightarrow \neg\varphi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi \Rightarrow \varphi, \psi}{\psi \Rightarrow \varphi \vee \psi}\;(\Rightarrow \vee)}{\neg(\varphi \vee \psi), \psi \Rightarrow \emptyset}\;(\neg \Rightarrow)}{\neg(\varphi \vee \psi) \Rightarrow \neg\psi}\;(\Rightarrow \neg)}{\neg(\varphi \vee \psi) \Rightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi}\;(\Rightarrow \wedge)$$

2. Ein SK-Beweis, der nur Quantoren-Regeln verwendet:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{R(c,d) \Rightarrow R(c,d)}{R(c,d) \Rightarrow \exists x\, R(x,d)}\;(\Rightarrow \exists)}{\forall y\, R(c,y) \Rightarrow \exists x\, R(x,d)}\;(\forall \Rightarrow)}{\forall y\, R(c,y) \Rightarrow \forall y\, \exists x\, R(x,y)}\;(\Rightarrow \forall)}{\exists x\, \forall y\, R(x,y) \Rightarrow \forall y\, \exists x\, R(x,y)}\;(\exists \Rightarrow)$$

Bei den unteren beiden Schritten muss die Seitenbedingung eingehalten werden; bei den oberen beiden Schritten nicht – deshalb dürfen wir hier die bereits benutzten Terme (Konstanten) c und d „einführen“. Es kommt also in diesem Beispiel auf die Reihenfolge der Regelanwendung an. Wenn wir die zwei letzten (obersten) Regeln ($\forall \Rightarrow$) und ($\Rightarrow \exists$) zuerst (zuunterst) anwenden würden, hätten wir bereits c und d eingeführt und dürften mit den anderen beiden Regeln wegen ihrer Seitenbedingung kein weiteres c bzw. d einführen.

3. Ein SK-Beweis, der Formeln im Antezedens „behält“:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(c), P(d) \;\Rightarrow\; P(c) \qquad P(c), P(d) \;\Rightarrow\; P(d)}{P(c), P(d) \;\Rightarrow\; P(c) \wedge P(d)}\;(\Rightarrow \wedge)}{\forall x\, P(x), P(c) \;\Rightarrow\; P(c) \wedge P(d)}\;(\forall \Rightarrow)}{\forall x\, P(x) \;\Rightarrow\; P(c) \wedge P(d)}\;(\forall \Rightarrow)
$$

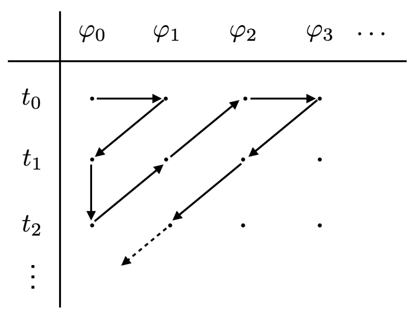
Im untersten Schritt wendet man also die Regel ($\forall \Rightarrow$) auf $\forall x\, P(x)$ an, ohne dieses zu löschen. Das ist zugelassen, denn „$\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi$“ schließt auch den Fall $\varphi \in \Gamma$ ein. In diesem Beispiel kann man zwar auf das Behalten von ($\forall \Rightarrow$) verzichten, wenn man die letzte (oberste) Regel ($\Rightarrow \wedge$) zuerst (zuunterst) anwendet; für das Ableiten anderer Sequenzen ist das Behalten aber essentiell. Dies ist übrigens auch der Grund, warum die Länge von SK-Beweisen *nicht* exponentiell in der Länge der zu beweisenden Sequenz beschränkt ist.

T3.3 Beweis der Korrektheit des SK

Nach den Bemerkungen auf Folie 12 genügt es zu zeigen, dass jede einzelne SK-Regel korrekt ist, d. h. wenn die obere(n) Sequenz(en) gültig ist/sind, dann auch die untere. Dies haben wir jedoch bereits in T3.1 für die einzelnen Regeln gezeigt.

T3.4 Dovetailing + Reset

Die folgende Darstellung von „Dovetailing” zeigt, in welcher Reihenfolge man die Paare (φ_i, t_i) aufzählen kann:



Dabei kommt aber noch nicht jedes Paar unendlich oft vor. Das lässt sich ändern, indem man jede mal, wenn man ein neues (bisher noch nicht aufgezähltes) Paar ausgibt, wieder von vorn beginnt. Die Aufzählreihenfolge ist also:

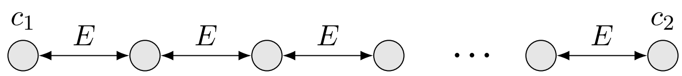
$$\begin{array}{l} (\varphi_0, t_0), \\ (\varphi_0, t_0), (\varphi_1, t_0), \\ (\varphi_0, t_0), (\varphi_1, t_0), (\varphi_0, t_1), \\ \qquad \vdots \end{array}$$

T3.5 Γ ist Erfüllbar

Wegen Kompaktheit genügt es, zu zeigen: jedes endliche $\Gamma_f \subseteq \Gamma$ ist erfüllbar.

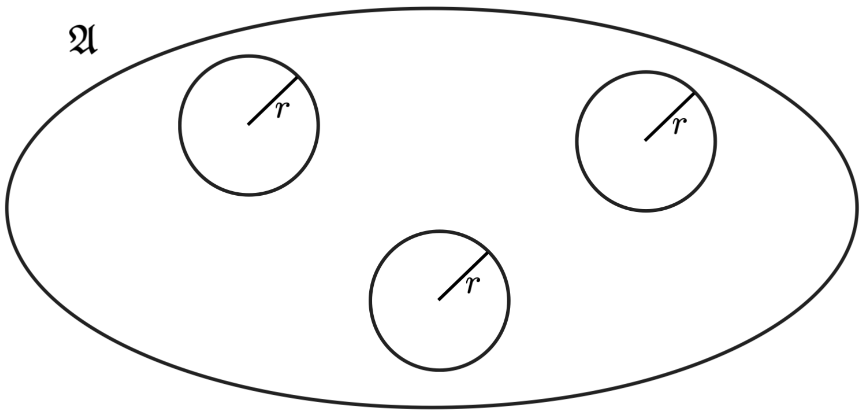
Sei m maximal mit $\psi_m \in \Gamma_f$.

Dann ist folgende Struktur Modell von Γ_f:

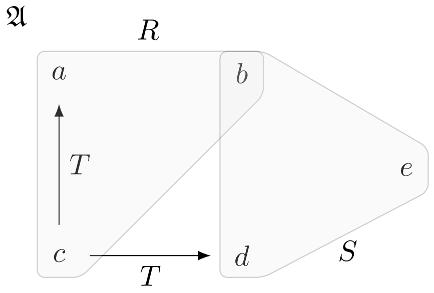


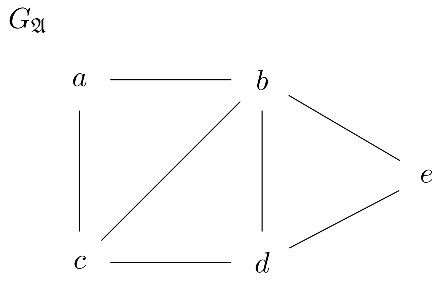
wobei der dargestellte Pfad aus $m + 1$ Kanten besteht. ❏

T3.6 Intuition Lokalität



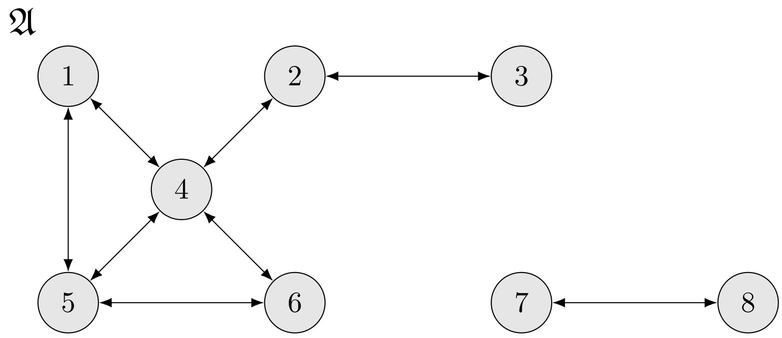
T3.7 Beispiel Gaifman-Graph





T3.8 Beispiele für Bälle und Nachbarschaften

Betrachte folgende Struktur $\mathfrak{A}$ auf der Signatur von Graphen, also mit nur einem binären Relationssymbol E.



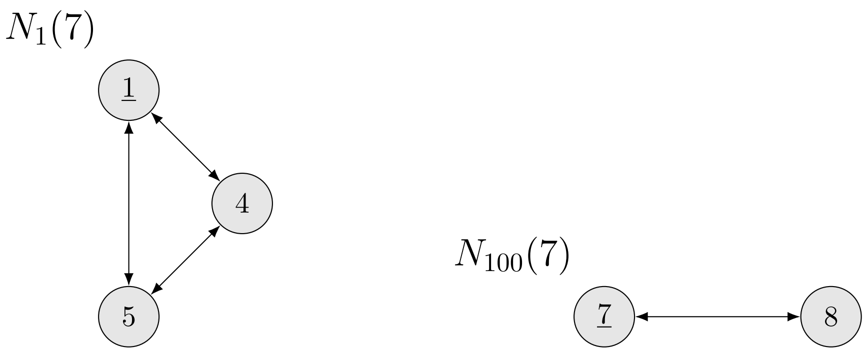
Es ergeben sich beispielsweise die folgenden Distanzen,

$$d(1,6) = 2$$
$$d(6,7) = \infty$$
$$d(5,3) = 3$$

Bälle,

$$B_1(1) = \{1,4,5\}$$
$$B_2(1) = \{1,2,4,5,6\}$$
$$B_{100}(7) = \{7,8\}$$

und Nachbarschaften:



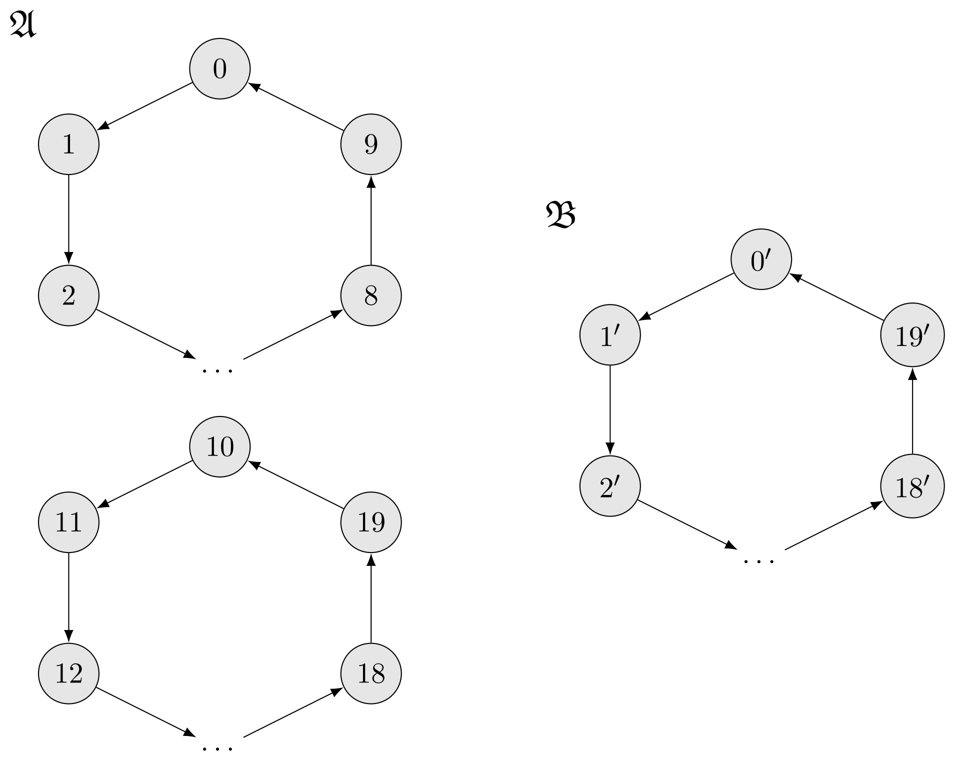
Seien $\rho_1 = (N_1(1), 1)$ und $\rho_2 = (N_1(3), 3)$ die 1-Nachbarschaftstypen von 1 und 3. Dann hat 6 den selben 1-Nachbarschaftstyp wie ρ_1 und $8, 7$ haben den selben wie ρ_2. Es gilt also

$$\#_{\rho_1}(\mathfrak{A}) = 2$$
$$\#_{\rho_2}(\mathfrak{A}) = 3$$

Die restlichen 1-Nachbarschaftstypen (also die von $2, 4, 5$) sind alle verschieden.

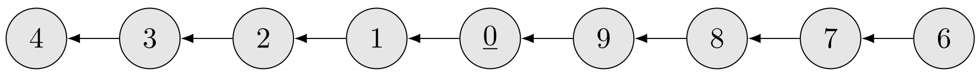
T3.9 Beispiel für Hanf-Lokalität

Betrachte die folgenden Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ auf der Signatur von Graphen, also mit nur einem binären Relationssymbol E.

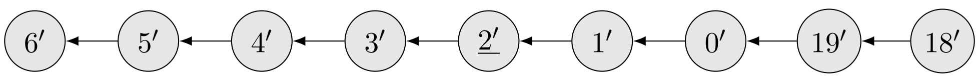


Die Struktur $\mathfrak{A}$ besteht aus zwei disjunkten Kreisen der Länge 10 und $\mathfrak{B}$ aus einem Kreis der Länge 20. Wir wollen zeigen, dass Hanf-Lokalität mit $k = 2$ gilt. Da $2^k = 4$ müssen wir Nachbarschaften der Größe 4 betrachten.

$N_4(0)$



$N_4(2')$



Tatsächlich sieht man leicht, dass alle realisierten 4-Nachbarschaften isomorph zueinander sind, also hat jedes der 40 Elemente denselben 4-Nachbarschaftstyp. Sei also $\rho = N_4(0)$, dann gilt durch die vorige Beobachtung $\#_\rho(\mathfrak{A}) = 20$ und $\#_\rho(\mathfrak{B}) = 20$. Durch Theorem 3.22 folgt dann, dass $\mathfrak{A} \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{B} \models \varphi$ für alle FO-Formeln φ mit $\mathsf{qr}(\varphi) \leq 2$, also z.B. für folgende Formeln:

$$\exists x(\exists y E(x, y) \wedge \exists y E(y, x))$$
$$\forall x \neg E(x, x)$$

T3.10 Beweis des Methodologie-Theorems 1.0

Theorem 3.24. Sei P eine Eigenschaft. Wenn es Strukturen $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1), (\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2), \ldots$ gibt, so dass für jedes $k \geq 1$ gilt

1. $\mathfrak{A}_k \in P$ und $\mathfrak{B}_k \notin P$ und
2. $\#_\rho(\mathfrak{A}_k) = \#_\rho(\mathfrak{B}_k)$ für alle k-Nachbarschaftstypen ρ,

dann ist P nicht FO-ausdrückbar.

Beweis. Wir beweisen das Kontrapositiv. Sei also P FO-ausdrückbar mittels eines Satzes φ. Wir müssen zeigen: es *gibt ein* $k \geq 1$, so dass für *alle* Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ (die wir als $\mathfrak{A}_k$ und $\mathfrak{B}_k$ wählen könnten) gilt: Punkt 1 und 2 aus dem Methodologietheorem sind nicht beide erfüllt.

Wähle dafür $k = 2^{\mathsf{qr}(\varphi)}$. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ beliebige Strukturen. Wenn Punkt 1 für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ *nicht* erfüllt ist, dann folgt die Behauptung. Wenn jedoch Punkt 1 erfüllt ist, dann gilt $\mathfrak{A} \in P$ und $\mathfrak{B} \notin P$. Also $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\mathfrak{B} \not\models \varphi$. Aus der Hanf-Lokalität von FO (Thm. 3.22) folgt nun, dass Punkt 2 nicht erfüllt ist. ❑

T3.11 Beweis des Methodologie-Theorems 2.0

Theorem 3.26. Sei P eine Eigenschaft. Wenn es Strukturen $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1), (\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2), \ldots$ gibt, so dass jedes $k \geq 1$ gilt

1. $\mathfrak{A}_k \in P$ und $\mathfrak{B}_k \notin P$ und
2. $\mathfrak{A} \leftrightarrows_k \mathfrak{B}$,

dann ist P nicht FO-ausdrückbar.

Beweis. Wir beweisen Methodologie-Theorem 2.0 gilt genau dann wenn Methodologie-Theorem 1.0 gilt. Dafür müssen wir folgende Aussage zeigen:

2. $\mathfrak{A} \leftrightarrows_k \mathfrak{B}$ gdw.
2′. $\#_\rho(\mathfrak{A}_k) = \#_\rho(\mathfrak{B}_k)$ für alle k-Nachbarschaftstypen ρ

„2 ⇒ 2′“.

$$\begin{aligned}
\#_\rho(\mathfrak{A}_k) &= |\{a \in A \colon N_k(a) \cong \rho\}| \\
&= |\{f(a) \in B \colon a \in A \text{ und } N_k(a) \cong \rho\}| && (f \text{ injektiv}) \\
&= |\{b \in B \colon N_k(b) \cong \rho\}| && (f \text{ surjektiv \& Bed. in Def. 3.25}) \\
&= \#_\rho(\mathfrak{B}_k)
\end{aligned}$$

„2′ ⇒ 2“.

Für jeden k-Nachbarschaftstyp ρ mit $\#_\rho(\mathfrak{A}_k) > 0$ gilt

$$\#_\rho(\mathfrak{A}_k) = \#_\rho(\mathfrak{B}_k)$$

Also gibt es eine Bijektion

$$f_\rho\colon \{a \in A\colon N_k(a) \cong \rho\} \to \{b \in B\colon N_r(b) \cong \rho\}.$$

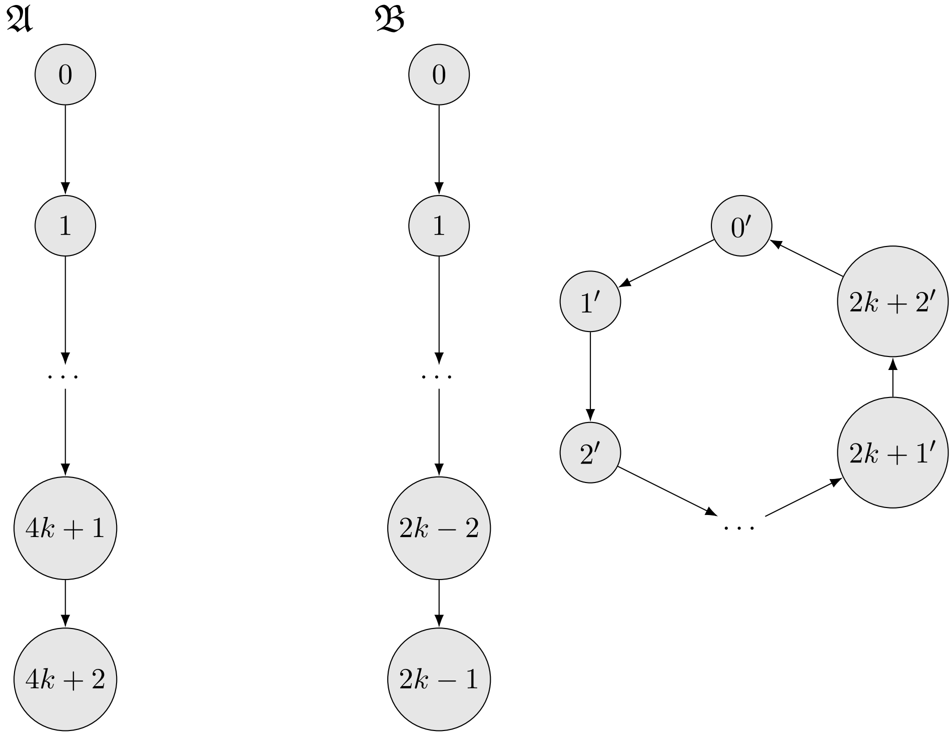
Wenn wir jetzt f als

$$f = \bigcup_\rho f_\rho$$

wählen, dann ist die Bedingung aus Definition 3.25 erfüllt.

T3.12 Azyklizität nicht ausdrückbar: Beweisdetails

Wir betrachten wieder zwei Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ auf der Signatur von Graphen, also mit nur einem binären Relationssymbol E.



Beide Strukturen haben also jeweils $4k + 3$ Elemente. Um die 2. Bedingung für das Methodologie-Theorem 2.0 zu erfüllen definieren wir die Funktion $f\colon A \to B$ wie folgt:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 & f(4k+2) &= 2k-1 \\ f(1) &= 1 & f(4k+1) &= 2k-2 \\ &\dots & &\dots \\ f(k-1) &= k-1 & f(3k+3) &= k \end{aligned}$$

Wir weisen also die ersten k und letzten k Punkte aus $\mathfrak{A}$ dem Pfad in $\mathfrak{B}$ so zu, dass sie immer auf das Element mit einem äquivalenten k-Nachbarschaftstyp zeigen. Diese $2k$ Punkte hatten alle einen unterschiedlichen k-Nachbarschaftstyp, es verbleiben noch die Elemente $k, \dots, 3k+2$, die alle den gleichen k-Nachbarschaftstyp haben. Wir setzen

$$\begin{aligned} f(k) &= 0' \\ f(k+1) &= 1' \\ &\dots \\ f(3k+2) &= 2k+2' \end{aligned}$$

Somit haben wir die restlichen Punkte aus $\mathfrak{A}$ auf den Kreis in $\mathfrak{B}$ abgebildet. Man kann prüfen, dass die Bedingung aus Definition 3.25 erfüllt ist.

T3.14 Erreichbarkeit

Angenommen, es gibt FO-Formel $\varphi(x, y)$ wie im Theorem beschrieben. Dann ist der Zusammenhang von ungerichteten Graphen FO-ausdrückbar mittels des Satzes $\forall x \forall y\, \varphi(x, y)$. Dies ist ein Widerspruch zu Theorem 3.23.

Teil IV.

Prädikatenlogik 2. Stufe

T4.1 Intuition Relationsvariablen

Betrachte die eine Struktur $\mathfrak{A}$ mit Universum $A = \{a, b, c, d\}$.

Eine Zuweisung β interpretiert eine FO-Variable x beispielsweise als $\beta(x) = a$ oder $\beta(x) = b$.

Relationsvariablen werden hingegen als *Relationen* interpretiert. Für eine 3-stellige Relationsvariable X beispielsweise

$$\beta(X) = \{(a, b, b), (a, b, c), (a, c, a)\}$$

und für eine 1-stellige Relationsvariable (auch genannt *Mengenvariable* z.B.

$$\beta(X) = \{a, b, d\}.$$

T4.2 Korrektheit der Formel für Erreichbarkeit

Sei $\varphi_{\text{reach}}(x, y) = \forall X \Big(X(x) \wedge \underbrace{\forall z \forall z' \left(X(z) \wedge E(z, z') \rightarrow X(z')\right)}_{\psi} \rightarrow X(y)\Big)$ und $\tau = \{E\}$, also die Signatur gerichteter Graphen. Intuitiv besagt

- $\psi(X)$, dass die Knotenmenge X unter E-Nachfolgern abgeschlossen ist;
- $\varphi_{\text{reach}}(x, y)$, dass jede Knotenmenge, die x enthält und unter E-Nachfolgern abgeschlossen ist, auch y enthält.

Behauptung: Für alle τ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und Elemente $a, b \in A$ gilt

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{\text{reach}}[a, b] \quad \text{gdw.} \quad \text{es einen Pfad in } \mathfrak{A} \text{ von } a \text{ zu } b \text{ gibt.}$$

Beweis.

„⇒" Angenommen $\mathfrak{A} \models \varphi_{\text{reach}}[a, b]$. Definiere Zuweisung β, in der $\beta(X)$ die folgende Menge $R \subseteq A$ ist:

$$R = \{b \mid \text{es gibt einen Pfad in } \mathfrak{A} \text{ von } a \text{ zu } b\}$$

Da R abgeschlossen unter E-Nachfolgern ist, gilt $(\mathfrak{A}, \beta) \models \psi$. Außerdem gilt $a \in R$. Wegen $\mathfrak{A} \models \varphi_{\text{reach}}[a, b]$ gilt dann $b \in R$. Nach Definition von R gibt es demnach einen Pfad in $\mathfrak{A}$ von a zu b.

„⇐" Angenommen, es gibt einen Pfad in $\mathfrak{A}$ von a zu b. Sei $R \subseteq A$ beliebig mit (i) $a \in R$ und (ii) $(\mathfrak{A}, \beta) \models \psi$ wenn $\beta(X) = R$. Wegen (ii) ist R abgeschlossen unter Nachfolgern. Da es einen Pfad von a zu b gibt, muss auch $b \in R$ sein. Also gilt $\mathfrak{A} \models \varphi_{\text{reach}}[a, b]$. ❏

T4.3 Korrektheit des Satzes für EVEN

Sei R eine 2-stellige Relationsvariable und $\varphi_{\text{even}} = \exists R\, \psi$ wobei

$$\begin{aligned}\psi = \exists R\,(\ &\forall x \exists y\, R(x,y) \vee R(y,x)\\ &\wedge \forall x\,(\ \exists y\, R(x,y) \to \neg\exists y\, R(y,x)\ )\\ &\wedge \mathrm{Func}(R) \wedge \mathrm{Func}^{-}(R)\ )\end{aligned}$$

und

$$\mathrm{Func}(R) = \forall x \forall y \forall y'\ (\ R(x,y) \wedge R(x,y') \to y = y'\ )$$

$$\mathrm{Func}^{-}(R) = \forall x \forall y \forall y'\ (\ R(y,x) \wedge R(y',x) \to y = y'\ ).$$

Behauptung: Für alle Strukturen $\mathfrak{A}$ und Elemente $a, b \in A$ gilt

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{\text{even}} \quad \text{gdw.} \quad |\mathrm{A}| \text{ ist geradzahlig oder unendlich.}$$

Beweis.

„⇒“ Angenommen $\mathfrak{A} \models \varphi_{\text{even}}$ und $|A|$ ist endlich. Dann gibt es eine Zuweisung β für R so dass $(\mathfrak{A}, \beta) \models \psi$. Sei $A_1 = \{a \in A \mid \exists b\,(a,b) \in \beta(R)\}$ und $A_2 = \{a \in A \mid \exists b\,(b,a) \in \beta(R)\}$. Unter Verwendung der Konstruktion von ψ prüft man leicht, dass A_1, A_2 eine Partition von A ist und $\beta(R)$ eine Bijektion zwischen A_1 und A_2. Also haben A_1 und A_2 dieselbe Kardinalität und $|A| = |A_1| + |A_2| = 2 * |A_1|$ ist geradzahlig.

„⇐“ Angenommen $|A|$ ist geradzahlig oder unendlich. Dann gibt es eine Partition A_1, A_2 von A so dass A_1 und A_2 dieselbe Kardinalität haben, also auch eine Bijektion f von A_1 zu A_2. Betrachte die Zuweisung β für R mit $\beta(R) = f$. Man prüft leicht, dass $(\mathfrak{A}, \beta) \models \psi$, also $\mathfrak{A} \models \varphi_{\text{even}}$. ❏

T4.4 Korrektheit des Satzes für Unendlichkeit

Sei R eine 2-stellige Relationsvariable und $\varphi_\infty = \exists R\, \psi$ wobei

$$\begin{aligned}\psi \quad = \quad \Big(\ &\exists x \exists y\, R(x,y) \wedge\\ &\forall x \forall y\,(\,R(x,y) \to \exists z\, R(y,z)\,) \wedge\\ &\forall x\, \neg R(x,x) \wedge\\ &\forall x \forall y \forall z\,(\,(R(x,y) \wedge R(y,z)) \to R(x,z)\,)\Big)\end{aligned}$$

Behauptung: Für alle Strukturen $\mathfrak{A}$ und Elemente $a, b \in A$ gilt

$$\mathfrak{A} \models \varphi_\infty \quad \text{gdw.} \quad |\mathrm{A}| \text{ ist unendlich.}$$

Beweis.

„⇒“ Angenommen $\mathfrak{A} \models \varphi_\infty$. Dann gibt es eine Zuweisung β für R so dass $(\mathfrak{A}, \beta) \models \psi$. Unter Verwendung der Konstruktion von ψ prüft man leicht, dass $\beta(R)$ eine irreflexive transitive Ordnung ohne grösstes Element ist. Eine solche Ordnung gibt es nur auf unendlichen Trägermengen, also ist $|A|$ unendlich.

„⇐“ Angenommen $|A|$ ist unendlich. Dann hat A eine unendliche abzählbare Teilmenge $\{a_1, a_2, \dots\} \subseteq A$. Wähle als $\beta(R)$ die Relation $\{(a_i, a_j) \mid i < j\}$. Man prüft leicht, dass $(\mathfrak{A}, \beta) \models \psi$, also $\mathfrak{A} \models \varphi$. ❑

T4.5 Zeitbedarf Auswertungsproblem

Der Zeitbedarf entspricht im Wesentlichen der Größe des Rekursionsbaums, im Detail:

	FO	MSO	SO
Tiefe	$\leq k$	$\leq k$	$\leq k$
Verzweigung	$\leq n$	$\leq 2^n$	$\leq 2^{n^\ell}$
Größe	$\leq n^k$	$\leq (2^n)^k = 2^{nk}$	$\leq (2^{n^k})^k = 2^{n^k \cdot k} \leq 2^{n^{2k}}$

T4.6 Korrektheit des Satzes für Hamiltonkreis

Seit $\tau = \{E\}$ die Signatur von ungerichteten Graphen und $\varphi_{\text{HK}} = \exists R\, \psi$ mit

$$\begin{aligned}\psi \quad = \quad & \forall x \forall y\, (R(x,y) \to E(x,y)) \wedge \\ & \varphi'_{\text{conn}} \wedge \\ & \forall x \exists y\, R(x,y) \wedge \\ & \forall x \exists y \exists z (R(x,y) \wedge R(x,z) \wedge y \neq z \wedge \\ & \qquad \forall u\, (R(x,u) \to (x = y \vee x = z)))\end{aligned}$$

wobei φ'_{conn} aus der Formel φ_{conn} aus der Vorlesung entsteht, indem das Relationssymbol E durch die Relationsvariable R ersetzt wird. φ'_{conn} drückt also aus, dass der durch R (statt durch E!) beschriebene Graph zusammenhängend ist.

Behauptung: Für alle τ-Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{\text{HK}} \quad \text{gdw.} \quad \text{der gerichtete Graph } \mathfrak{A} \text{ einen Hamiltonkreis enthält}$$

Beweis.

„⇒“ Angenommen $\mathfrak{A} \models \varphi_{\text{HK}}$. Dann gibt es eine Zuweisung β für R so dass $(\mathfrak{A}, \beta) \models \psi$. Wegen Zeilen 1 und 2 von ψ ist die Kantenmenge R eine Teilmenge der Kantenmenge E. Es genügt also, zu zeigen, dass R ein Hamiltonkreis ist. Starte mit einem beliebigen Knoten $a_1 \in A$. Wegen Zeilen 4 und 5 von ψ hat a_1 genau zwei R-Nachbarn. Wähle einen davon als a_2. Nun hat auch a_2 genau zwei R-Nachbarn, einer davon a_1. Wähle als a_3 den anderen Nachbarn. Fahre auf diese Weise fort und stoppe erst, wenn ein Knoten erreicht wird, dessen anderer Nachbar bereits gewählt wurde. Dieser Knoten kann nur a_1 sein, denn a_1 ist der einzige Knoten, von dem nur ein Nachbar gewählt wurde. Also schließt sich der Kreis. Da jeder Knoten genau zwei R-Nachbarn hat sind von den gewählten Knoten aus keine weiteren Knoten R-erreichbar. Da R einen zusammenhängenden Graphen beschreibt in dem alle Knoten aus $\mathfrak{A}$ vorkommen (Zeilen 2 und 3), enthält der konstruierte R-Kreis alle Knoten aus $\mathfrak{A}$. Per Konstruktion ist außerdem jeder Knoten nur einmal enthalten, also ist R ein Hamiltonkreis.

„$\Leftarrow$" Angenommen $\mathfrak{A}$ enthält einen Hamiltonkreis. Wähle Zuweisung β so dass $\beta(R)$ dieser Hamiltonkreis ist. Man prüft leicht, dass $(\mathfrak{A}, \beta) \models \psi$, also $\mathfrak{A} \models \varphi_{\mathrm{HK}}$. ❑

Anhang

Griechische Buchstaben

Kleinbuchstaben

α . . . . alpha
β . . . . beta
γ . . . . gamma
δ . . . . delta
ϵ . . . . epsilon
ζ . . . . zeta
η . . . . eta
ϑ, θ . . . . theta
ι . . . . iota
κ . . . . kappa
λ . . . . lambda
μ . . . . my
ν . . . . ny
ξ xi
o . . . . omikron
π . . . . pi
ρ . . . . rho
σ, ς . . . . sigma
τ . . . . tau
υ . . . . ypsilon
φ, ϕ . . . . phi
χ . . . . chi
ψ . . . . psi
ω . . . . omega

Großbuchstaben

Γ . . . . Gamma
Δ . . . . Delta
Θ . . . . Theta
Λ . . . . Lambda
Π . . . . Pi
Ξ Xi
Σ . . . . Sigma
Υ . . . . Ypsilon
Φ . . . . Phi
Ψ . . . . Psi
Ω . . . . Omega

Notationsverzeichnis

Zunächst zur Wiederholung einige grundlegende mathematische Notationen:

$\emptyset$ .... Leere Menge
$\in$ .... Element einer Menge (z.B. $x \in M$)
$\{x \mid \text{Bedingung für } x\}$. Menge aller Elemente x, die die angegebene Bedingung erfüllen
$\cup$ .... Vereinigung zweier Mengen
$\cap$ .... Schnitt zweier Mengen
$\setminus$ .... Different zweier Mengen
2^M .... Potenzmenge der Menge M
$|M|$ .... Kardinalität der Menge M (Anzahl ihrer Elemente)
$f : M_1 \to M_2$ .... Funktion von M_1 nach M_2

Die folgenden Notationen werden in dieser Reihenfolge in der Vorlesung eingeführt. Mit (♣) gekennzeichnete Symbole haben mehrere Bedeutungen (die dann alle aufgeführt sind).

Grob gesagt kann man die Symbole in drei Gruppen aufteilen:

- *Syntaktische Symbole*: dürfen als Bestandteile logischer Formeln verwendet werden, z.B. $x, y, z, \neg, \wedge, \oplus, \exists$.
- *der Semantik zuzurechnende Symbole* wie z.B. die Modellbeziehung $\models$ zwischen Belegungen und Formeln in der Aussagenlogik oder die mit $\equiv$ bezeichnete Äquivalenz logischer Formeln.
- mathematische Notation, die keinem dieser beiden Bereiche zuzuordnen ist, wie etwa die Landau-Symbole $O()$ und $o()$.

Es ist eine gute Übung, sich zu überlegen, welche der folgenden Symbole in welche Kategorie gehören.

Teil 1 (Aussagenlogik)

x, y, z .... Aussagenvariablen (♣)
VAR .... Menge aller Aussagenvariablen (♣)
φ, ψ, ϑ .... logische Formeln
$\neg$ .... Negation (logischer Junktor)
$\wedge$ .... Konjunktion (logischer Junktor)
$\vee$ .... Disjunktion (logischer Junktor)
V .... aussagenlogische Belegung
$V(\varphi)$ .... Wahrheitswert der Formel φ unter der Belegung V
$\models$ .... Modellbeziehung (z.B. $V \models \varphi$) (♣)
$\bigwedge_{i=1..n}$ .... Abkürzung für $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$
$\bigvee_{i=1..n}$ .... Abkürzung für $\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n$

$\rightarrow$ .... Implikation (logischer Junktor)
$\leftrightarrow$ .... Biimplikation (logischer Junktor)
$\oplus$ .... XOR (logischer Junktor)
φ vorkommen
$O(n)$ Höchstens linear in n, O-Notation, siehe VL „Algorithmen und Datenstrukturen"
$|\varphi|$ .... Länge der Formel φ repräsentiert als String
$\equiv$ .... logische Äquivalenz
$\mathrm{TF}(\varphi)$ .... Menge der Teilformeln der Formel φ
$\mathcal{B}^n$ .... Menge aller n-stelligen Boolschen Funktionen
$\mathcal{B}$ .... Menge aller Boolschen Funktionen
$o(n)$ ... mindestens linear in n, o-Notation, siehe z.B. „Landau-Symbole" in Wikipedia
$|$ .... Nand / Sheffer-Strich (logischer Junktor)
$\models$ .... logische Konsequenz, z.B. $\varphi \models \psi$ ($\clubsuit$)
C .... Klausel (Resolution)
M .... Klauselmenge (Resolution)
$\square$ .... leere Klausel (Resolution)
$\mathrm{Res}(M)$ Erweiterung der Klauselmenge M um alle Resolventen zweier Klauseln aus M
$\mathrm{Res}^*(M)$ .... Erschöpfende Anwendung von $\mathrm{Res}(M)$
$\mathrm{ERes}(M)$, $\mathrm{ERes}^*(M)$ .... Wie $\mathrm{Res}(M)$, $\mathrm{Res}^*(M)$, aber für *Einheits*resolution
$\mathrm{OERes}(M)$, $\mathrm{OERes}^*(M)$ .... Wie zuvor aber für *geordnete* Einheitsresolution

Teil 2 (Grundlagen der Prädikatenlogik 1. Stufe)

P, Q, R .... Relationssymbole
f, g, h .... Funktionssymbole
c, d, e .... Konstantensymbole
x, y, z .... Prädikatenlogische Variablen ($\clubsuit$)
VAR .... Menge aller prädikatenlogischen Variablen ($\clubsuit$)
τ, σ .... Signaturen
$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ .... Strukturen
A, B .... Universen der Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$
a, b .... Elemente des Universums
$P^{\mathfrak{A}}$ .... Interpretation des Relationssymbols P in Struktur $\mathfrak{A}$
$f^{\mathfrak{A}}$ .... Interpretation des Funktionssymbols f in Struktur $\mathfrak{A}$
$c^{\mathfrak{A}}$ .... Interpretation des Konstantensymbols c in Struktur $\mathfrak{A}$
t, s .... Terme
$\exists$ .... existentieller Quantor
$\forall$ .... universeller Quantor
$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ .... Formel φ hat freie Variablen $x_1, \ldots, x_n$
$\mathrm{Frei}(\varphi)$ .... Menge der freien Variablen in Formel φ
β .... Zuweisung
$(\mathfrak{A}, \beta)$ .... Interpretation
$\beta[x/a]$ .... Zuweisung β modifiziert so dass $\beta(x) = a$

sig(φ) .... Signatur der Formel φ
$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ .... Struktur $\mathfrak{A}$ erfüllt die Formel φ wenn die Elemente $a_1, \dots, a_n$
.... für die freien Variablen $x_1, \dots, x_n$ von φ eingesetzt werden.
st(φ) .... Schachtelungstiefe der Formel φ
Th($\mathfrak{A}$) .... Theorie der Struktur $\mathfrak{A}$
Abschluss(Γ) .... Abschluss der Menge von Sätzen Γ unter Konsequenz
$\mathbb{N}$ .... Menge der natürlichen Zahlen (inkl. 0)
$\mathbb{Q}$ .... Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$ .... Menge der reellen Zahlen

Teil 3 (Mehr zur Prädikatenlogik 1. Stufe)

Γ, Δ .... endliche Formelmengen[1]
$\Rightarrow$ .... Implikationszeichen in Sequenz, z.B. $\Gamma \Rightarrow \Delta$
$\models$ .... Gültigkeit einer Sequenz im Sequenzenkalkül, z.B. $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$ ($\clubsuit$)
$\vdash$ .... Ableitbarkeit einer Sequenz im Sequenzenkalkül, z.B. $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$
P .... Eigenschaft
$d(a_1, a_2)$ .... Distanz zwischen Elementen a_1, a_2
$N_r(a)$ .... Nachbarschaftsstruktur mit Radius r um Element a
$\#_\rho(\mathfrak{A})$ .... Anzahl der Elemente $a \in A$, deren Nachbarschaft isomorph zu ρ ist
qr(φ) .... Quantorenrang der Formel φ
$\mathfrak{A} \leftrightarrows_r \mathfrak{B}$ .... $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind lokal r-ähnlich

Teil 4 (Prädikatenlogik 2. Stufe)

X .... Relationsvariable
VAR^n .... Menge aller Relationsvariablen der Stelligkeit n

[1] In anderen Teilen der Vorlesung bezeichnen Γ und Δ Formelmengen, die nicht unbedingt endlich sein müssen.