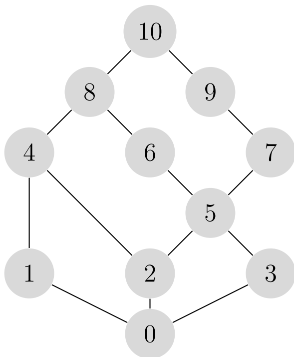
Diskrete Strukturen (WS 2024-25) - Halbserie 10

10.1 **[4]**

Gegeben sei der folgende **Verband** $(P_4, \preceq_4)$, dargestellt als Hasse-Diagramm:



1. Geben Sie die Menge aller **Komplemente**
   (a) von 1,
   (b) von 4,
   (c) von 7 an.
2. Ist $(P_4, \preceq_4)$ eine **Boolesche Algebra**? Begründen Sie Ihre Antwort.

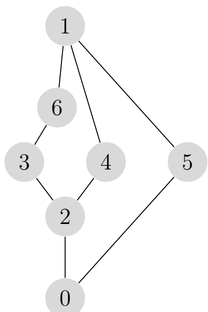
Solution.

1. (a) $\{7, 9\}$
   (b) $\emptyset$
   (c) $\{1\}$
2. $(P_4, \preceq_4)$ ist keine Boolesche Algebra, da bspw. 4 kein Komplement hat.

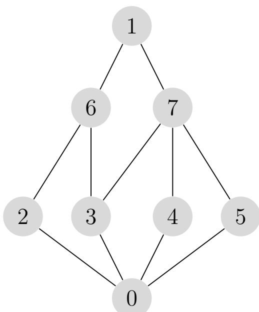
10.2 **[3]**

Gegeben seien die folgenden **Verbände**, dargestellt als Hasse-Diagramm:

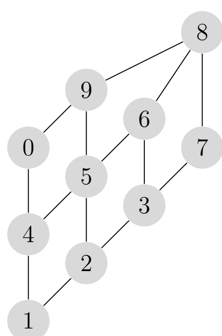
$(P_1, \preceq_1)$:



$(P_2, \preceq_2)$:



$(P_3, \preceq_3)$:



Zeigen Sie mit Hilfe von Theorem 9.3.3, dass sie nicht distributiv sind. Geben Sie dafür jeweils eine Unterstruktur an, die zu M_3 oder N_5 isomorph ist.

Solution.

- $(P_1, \preceq_1)$: Zum Beispiel $(\{0, 2, 1, 5, 6\}, \wedge, \vee)$ ist eine zu N_5 isomorphe Unterstruktur.
- $(P_2, \preceq_2)$: Zum Beispiel $(\{0, 3, 4, 5, 7\}, \wedge, \vee)$ ist eine zu M_3 isomorphe Unterstruktur.
- $(P_3, \preceq_3)$: Zum Beispiel $(\{2, 5, 9, 7, 8\}, \wedge, \vee)$ ist eine zu N_5 isomorphe Unterstruktur.

10.3 **[3]**

Wir definieren für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Teiler von n

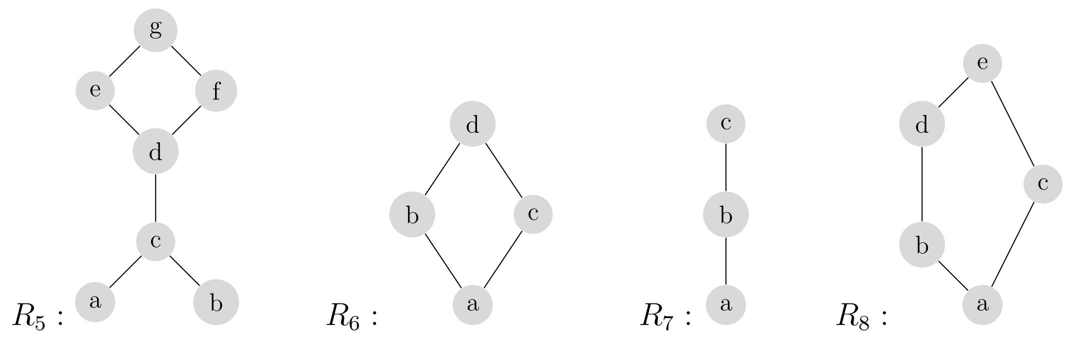
$$T_n = \{t \in \mathbb{N} \colon t \mid n\}.$$

Geben Sie für die Menge $M = \{1, 2, 3\}$ einen **Isomorphismus** φ von $(T_{2023}, |)$ nach $(\mathcal{P}(M) \setminus \{\{3\}, \{1, 3\}\}, \subseteq)$ an.

Solution. Wir definieren $\varphi : \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \setminus \{\{3\}, \{2, 3\}\} \to \{1, 7, 17, 119, 289, 2023\}$ durch

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= \emptyset, & \varphi(119) &= \{1, 2\}, \\ \varphi(7) &= \{1\}, & \varphi(289) &= \{1, 3\}, \\ \varphi(17) &= \{2\}, & \varphi(2023) &= \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

10.4 Gegeben seien die folgenden Ordnungsrelationen, dargestellt als Hasse-Diagramm:



Sind die entsprechenden teilweise geordneten Mengen $(M_5, R_5), (M_6, R_6), (M_7, R_7)$ und (M_8, R_8) **Boolesche Algebren**? Begründen Sie Ihre Antwort.

Solution.

- In (M_5, R_5) ist kein Verband (und damit natürlich auch keine Boolesche Algebra), da $\inf\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$ nicht existiert.
- (M_6, R_6) ist eine Boolesche Algebra: ist komplementierbar $(d : a, b : c, c : b, a : d)$, ist distributiv (denn weder M_3 noch N_5 können Unterstrukturen von M_6 sein, und es gibt kleinstes und größtes Element a und d. Andere Begründung: isomorph zu $(\mathcal{P}(\{1, 2\}), \subseteq)$, welcher laut Beispiel in Skript Boolesche Algebra ist.
- (M_7, R_7) ist keine Boolesche Algebra, da b kein Komplement hat. Wir zeigen z.B. das Gesetz $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$.
- (M_8, R_8) ist nicht distributiv, denn $d \wedge (c \vee b) = d \neq b = (d \wedge c) \vee (d \wedge b)$, und ist damit keine Boolesche Algebra.

10.5 Sei $(M, \preceq)$ eine **Boolesche Algebra** und $x, y \in M$.
Beweisen Sie:

$$\text{Wenn } x \preceq y, \text{ dann } y^c \preceq x^c.$$

Solution. Sei $x \preceq y$. Dann gilt $x \wedge y = x$. Es folgt $x^c = (x \wedge y)^c \overset{\text{De Morgan}}{=} x^c \vee y^c$.
Wir schließen also $y^c \preceq x^c$.

10.6 Sei $(M, \preceq)$ eine Boolesche Algebra und $x, y \in M$.
Zeigen Sie dass es gilt $(x \wedge y)^c = x^c \vee y^c$.