4.Übung zur Vorlesung Lineare Algebra
für Informatik

Mathematisches Institut, Universität Leipzig

Dozent: Dr. habil. Jan-David Hardtke

Ausgabe: Donnerstag, 2.5.2024
Abgabe: Freitag, 10.5.2024 bis 11:00 Uhr im Moodle-Kurs (ausnahmsweise, weil am 9.5. ein Feiertag ist)

Wichtig: Die Abgabe muss in Form **einer** pdf-Datei erfolgen und ist mit Namen, Matrikelnummer, Übungstermin und Namen des Übungsleiters zu versehen. Die Aufgaben müssen **selbstständig** bearbeitet werden (d. h. keine Partnerabgabe).

Aufgabe 1 (2 Punkte pro Teilaufgabe)**.** Untersuchen Sie die folgenden Vektoren auf lineare Unabhängigkeit im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$. Falls die Vektoren linear abhängig sind, bestimmen Sie die Dimension ihrer linearen Hülle.

$$(a) \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \; u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden. Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Sei $V_\mathbb{R}$ der Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, falls $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. f heißt *ungerade*, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist.
Wir setzen

$$G = \{f \in V_\mathbb{R} : f \text{ ist gerade}\} \quad \text{und} \quad U = \{f \in V_\mathbb{R} : f \text{ ist ungerade}\}.$$

Zeigen Sie, dass G und U Unterräume von $V_\mathbb{R}$ sind und dass $V_\mathbb{R} = G \oplus U$ gilt.