Diskrete Strukturen (WS 2023-24) - Halbserie 2

Bitte nur Probleme 2.1, 2.2 und 2.3 einreichen.

2.1 **[4]**

Bitte direkt auf moodle als Quiz lösen.

2.2 **[3]**

Betrachten Sie folgende **Mengen**:

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \{0, 2, 4, 6, 8\} \\
M_2 &= \{0, 2, 4, 6\} \cup \{10, 8, 6\} \\
M_3 &= \{x \in \mathbb{N} \colon 2|x, x < 10\} \\
M_4 &= \{\{0, 2\}, \{4, 6, 8\}\}
\end{aligned}
$$

1. Beweisen Sie $M_1 = M_3$.
2. Widerlegen Sie $M_3 = M_4$.
3. Widerlegen Sie $M_2 \subseteq M_3$.

2.3 **[3]**

Für zwei Mengen A, B definieren wir

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Seien A und B Mengen aus einem Universum U. Beweisen Sie folgende Aussagen:

1. Es gilt $A \triangle A = \emptyset$.
2. Es gilt $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
3. Es gilt $(A \triangle B) \triangle C = (A \cup B \cup C) \cap (A^c \cup B^c \cup C^c)$.

2.4 Wir betrachten das Universum $U = \{a, b, c\}$ und die Formel

$$F = \forall x(\neg A(x) \to B(x)) \wedge \exists x(A(x) \to \neg B(x)).$$

Geben Sie für die Prädikate A und B jeweils Teilmengen von U an, sodass

1. F erfüllt wird.

2. F nicht erfüllt wird.
3. $\neg F$ erfüllt ist.
4. Formen Sie $\neg F$ so um, dass Negationen nur vor den Atomen stehen.

2.5 Seien A, B, C Mengen aus einem Universum U. Beweisen Sie folgende Aussagen:

1. Es gilt $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
2. Es gilt $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
3. Es gilt $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C^c)$.
4. Es gilt $A \setminus B = B \setminus A$ genau dann wenn $A = B$.

2.6 Zeigen Sie durch **vollständige Induktion**, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 0$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1.$$

Markieren Sie, wo im Beweis die **Induktionshypothese** verwendet wird.