```
Def. (Gruppe)
Eine Gruppe (G, ·) ist eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung
· : 5 × 5 -> 5
 so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:
(i) Ha, b, c & G: (a . b). c = a . (b . c)
    (Assoziativität)
(ii) Beeg baeg: a.e = a = e.a
     (Existenz des neutralen Elements)
(iii) ba e & 3 b e g: a · b = e = b · a
    (Existenz des inversen Elements)
Gilt zusätzlich
(iv) Va, & & & : a · & = & · a
     (Kommutativität)
so heißt die Gruppe Kommutativ oder abelsch.
Bem.:
(1) Das Element e & g in (ii) ist eindenting Bestimmt und heißt neutrales
    Element von g.
(2) Das Element GES in (iii) ist eindentig Bestimmt und heißt inverses
     Element von a. Schreibweis 6 = a-7
Bsp.:
(Z, +), (Q,+), (IR,+) sind kommutative gruppen mit e = 0 und a = - a
(a+0=a=0+a, a+(-a)=0=(-a)+a.)
(IR\{0},.) ist eine Gruppe mit e= 1 und a-1 = 1 a
(\alpha \cdot 1 = c = 1 \cdot \alpha, \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1 = \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha
```

Satz (Wichtige Rechenregeln für Grappen) Sei (5, -) eine Gruppe. Dann gilt: (i) \( \forall a, \( \chi, \chi \) \( \chi \ (ii) Va & g: a. a-1 = e = a-1 a (iii) Va, & & G: (a. &) -1 = & -7. a-7 Def. (Potenzen in Gruppen) Sei (5, -) eine grappe. Für alle a & G und n & IN def. man: 60 : = 6 (ii) a = a a ... a (iii) a" := (a") -1 Satz (Potenzgesetze in Gruppen) Sei (g, .) eine gruppe. Für alle a & & und alle u, m & Z zilt: (i)  $a \cdot a = a$ (ii)  $(\alpha)^{m} = \alpha^{m} = (\alpha^{m})^{n}$ (iii)  $a^{-\alpha} = (a^{-\alpha})^{\alpha}$ Bem: Die Regel and " = (a.b) für alle a, b & g und u & Z gilt nur, falls & abelsch ist.

Satz:			
Sei (5,-) eine gr	ruppe und sei a E g. Dan	n gilt:	
(i) 4: 4 -> 4, 4	(x) = x·a ist lijektio		
(ii) 4: 5 -> 5, 4	(x) = a·x ist bijention	<u>,                                      </u>	
Bew (nur für (ii)):			
l ist surjextiu:			
Sei GEG. Setze x:	:= & a 1 & g. Dann gilt:		
$\Psi(x) = x \cdot a = (b^{-1} \cdot a)$	$a^{-1}$ )· $a = e \cdot (a^{-1} \cdot a) = e$	e = & /	
e ist injektiv:			
Scien x, x 2 & 5 and	gelle ((x1) = ((x2)		
$\Rightarrow  x_1 \cdot a = x_2 \cdot a$	$ \cdot a^{-1} $ $\Rightarrow \times_1 = \times_2$		
Bem.			
		so kann man alle Produr	
quadratischen Schema	aufschreiben. Dabei ste	ht a; a; in der i-ten Zeile	und j-ten Spalte
der Verknüpfungstafe	el :		
• · · · · aj ·			
ું કા <u>ં</u> કાં-કો			
Der olice Sct + losco	t dass in inder Feile a	ad jeder spalte jodos Flo	ment von a sensia
	t, dass in jeder Zeile u	nd jeder spalte jedes Ele	ment von g genan
Der obige Satz besas einmal vorkommt.	t, dass in jeder Zeile u	nd jeder Spalte jedes Ele	ment von & genan

	D	e f	:																														
	C	0.	10		) .	٠, ,	. (	•			_	D	- o î	- 1	, ,	ſ																	
	٠	961	7	) (	, (	<i>(</i> W e	<u>,</u> (	) r	^f [	C	uhi	α .	561		ري	J																	
	(,	. (	20	: ß.	<b>l</b> (,	unt	e v	c V	400	0	Lo	ام	ς,	ı	al	l,	gil	04 :															
			-( )	P		( ) (	.,	<b>D</b> '	7/	•	00	-1	81	1			5. (																_
	(i	)	وو	. 0	l																												
	ίi	)	H	a, (	s E	U	:	G·	૯	e L	ı																						
															(=)	f	la,l	, <b>e</b> (	<b>1</b> :	4	. હિ	¹E	U										
(	jji	i)	V	96	s U	:	a		e l	ノ.				J																			
	_	,																															
+	>	4	ን :																														
+	c		( (	1	4:		(				0			, ,		r																	
٠	٥(	ور	12	' '	(1	иe	ξ	ru	ppe	. u	ьø	2	lı	u	۲	უ.																	
1	Λ.			εL			leu	1.																									_
	υı	λVII	/ (2	τ	uqu	1106	( (0	١ .																									_
(	<u>i)</u>		IJ		1 4	114	. 0	ادرا	ori	C V LA	004	, ,,,	214	ር ሬ																			
	٠,			1-		JULE			CI	ð' "	TT S	_ (	, ,,	0																			
(i	ii)		(U		1.		) is	st e	iue	2 G	\ru	000	,																				
				<b>'</b>	Iu	хu					)	11	•																				
	D	ef	٠.																														
		_																															
	S			1 /		١ ١		Λ	( []	٠.	. /	5	V L	206	ZU.																		
		ei	en	15	, • (	5/	u	nK	711	<i>!</i> -	( `	0	•																				
	_		en											•													١ ٨			01			
	E													•		G	14	ppe	nh	ow	ים פ	108	ہ لم	isu	N4 S	·, {	200	l's	gil	et :			
		in	е.	Αl	lli	ld	nn	Ò	( :	G	<b>-</b> >	Щ	0	\	βŧ			ppe	nh	ow	1 <i>0 V</i>	108	۹۹	isu	<b>14</b> S	·, {	266	l's	Si	lt :			
		in	е.	Αl	lli	ld		Ò	( :	G	<b>-</b> >	Щ	0	\	βŧ			ρρε	nh	ov	10 P	108	<b>ا</b> م	isu	<b>14</b> S	·	200	ls	Sil	lt:			
	V	in a	e .	Al) e (	eli D'	l d	un (	. გ (	(e :	<b>S</b> =	-> \(\alpha\)	, Н ? ( a	9	· vei	βł (e (	e)		•											Sil	et:			
	V	in a	e .	Al) e (	eli D'	l d	un (	. გ (	(e :	<b>S</b> =	-> \(\alpha\)	, Н ? ( a	9	· vei	βł (e (	e)		•											Sil	et:			
	V	in a	e .	Al) e (	eli D'	l d	un (	. გ (	(e :	<b>S</b>	-> \(\alpha\)	Н ?(а	9	· vei	βł (e (	e)		•											Sil	et :			
	₩ ls	in 'a, st	e .	Al) e (	eli D'	l d	un (	. გ (	(e :	<b>S</b>	-> \(\alpha\)	Н ?(а	9	· vei	βł (e (	e)		•											gill	et :			
	₩ ls	in a	e .	Al) e (	eli D'	l d	un (	. გ (	(e :	<b>S</b>	-> \(\alpha\)	Н ?(а	9	· vei	βł (e (	e)		•											gi <sup>(</sup>	et :			
	<i>ا</i>	in a st	e . . b ·	Αl ε (	ili	(d)	un (	છે . કુ <sup>(</sup> ૯	&: } } &i	ч = јек	-> (4	, <b>Д</b>	) · so	Nei H	βł Ψ(	e) \$ t	٠ بو	2 (	) vu	rpp	en	í 20	ung	s r f	, Li	sm	45.						
	<i>ا</i>	in a st	e . . b ·	Αl ε (	ili	(d)	un (	છે . કુ <sup>(</sup> ૯	&: } } &i	ч = јек	-> (4	, <b>Д</b>	) · so	Nei H	βł Ψ(	e) \$ t		2 (	) vu	rpp	en	í 20	ung	s r f	, Li	sm	45.						
3	₩  s	in a, st at	e .  & .  & .	Al. e (	ili G	(d) (e) (t) (t) (t) (t) (t) (t) (t) (t) (t) (t	un (	છે . કુ <sup>(</sup> ૯	&: } } &i	ч = јек	-> (4	, <b>Д</b>	) · so	Nei H	βł Ψ(	e) \$ t	٠ بو	2 (	) vu	rpp	en	í 20	ung	s r f	, Li	sm	45.						
3	V Is	in a, st	e	All e ( , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	ili di usa	(d) (e) (+ 2	l(a lic	કે . કુ <sup>6</sup> ૯	ψ: β; ) β: į	ч = јек	-> (4	, <b>Д</b>	) · so	Nei H	βł Ψ(	e) \$ t	٠ بو	2 (	) vu	rpp	en	í 20	ung	s r f	, Li	sm	45.						
3	V Is	in a, st	e	All e ( , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	ili di usa	(d) (e) (+ 2	un (	કે . કુ <sup>6</sup> ૯	ψ: β; ) β: į	ч = јек	-> (4	, <b>Д</b>	) · so	Nei H	βł Ψ(	e) \$ t	٠ بو	2 (	) vu	rpp	en	í 20	ung	s r f	, Li	sm	45.						
	V Is S O (i	in a state	e	All 6 (6, 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6;	· S e t t s }	( d ) ( e )	und	8 	(e : (c) (t)	- јек •н	-> W {i·	Эv	20 50	H L	βł Ψ(	e) \$ t	٠ بو	2 (	) vu	rpp	en	í 20	ung	s r f	, Li	sm	45.						
	V Is	in a state	e	All 6 (6, 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6;	· S e t t s }	( d ) ( e )	l(a lic	8 	(e : (c) (t)	- јек •н	-> W {i·	Эv	20 50	H L	βł Ψ(	e) \$ t	٠ بو	2 (	) vu	rpp	en	í 20	ung	s r f	, Li	sm	45.						
	\   <u> </u>   S   S   C   (i	in a, st	e	All 6 (6) 8: (e	· S & & & & & & & & & & & & & & & & & &	( d ) ( e )	und e <sub>H</sub>	8 	(e: (s) (b) (l) (1)	S = jek •H	-> (4) (4)	(a)	2 >0 ~	nei H L	Bt Ve (	e) \$ t	٠ بو	2 (	) vu	rpp	en	í 20	ung	s r f	, Li	sm	45.						
	\   <u> </u>   S   S   C   (i	in a, st	e	All 6 (6) 8: (e	· S & & & & & & & & & & & & & & & & & &	( d ) ( e )	und	8 	(e: (s) (b) (l) (1)	S = jek •H	-> (4) (4)	(a)	2 >0 ~	nei H L	Bt Ve (	e) \$ t	٠ بو	2 (	) vu	rpp	en	í 20	ung	s r f	, Li	sm	45.						

Def.: Seien (G, -g) und (H, ·H) Gruppen und sei le: G -> H ein Gruppenhom. Danu heißt: Kern(4):= {a & S | 4(a) = eH) der Kern von 4 Satz Seien (G, -g) und (H, -H) Gruppen und sei le: G -> H ein Gruppenhom. Dann gilt: Kern(4) ist eine Untergruppe von g.

```
Def.:
Ein Ring (R,+, ) ist eine Menge R zusammen mit 2 Verknüpfungen
 +: R×R->R
 · : R × R -> R
so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:
(1) (R,+) ist eine kommutative Gruppe, d.h.:
    (i) ∀ a, b, c ∈ R: (a+b)+c = a+(b+c)
       (Assoziativität)
   (ii) 30 E R Wa E R: a+0 = a = 0+ a
        (Existenz des neutralen Elements bzgl+)
   (iii) Va & R3-a & R: a+ (-a) = 0 = (-a) + a
        (Existenz des inversen Elements bzgl+)
  (iv) ba, b & R: a+b = b+a
       (Kommutativität)
(2) Va, b, c ∈ R: (a.b) c = a.(b.c)
    (Assoziativität)
(3) 31 & R Va & R: a.1 = a = 1.a
    (Existent des neutralen Elements Bzg.)
(4) Vail, c ∈ R: a. (b+c) = a.b+a.c, (a+b).c = a.c+b.c
    (Distributingesetze)
Gilt zusatzlich:
(5) Ya, & e R: a. & = &. a
 so heißt R Kommutativ
```

Gilt zusätzlich: (6) 1 + 0 und (7) Vae a1803 3BEA: a.b = 1= b.a (Existenz des inversen Elements bzgl.) so heißt R Körper. Satz: Sei Keine Menge mit 2 Verknüpfungen t: KxK -> K und · : KxK -> K. Dann ist ägnivalent: (i) (K,+,) ist ein Körper (ii) (K,+) ist eine abelsche Gruppe, (K\203,-) ist eine abelsche Gruppe und es gelten die Distributingesetze aus obiger Def. Bsp.: (Z,+,-) ist ein kommutativer Ring, aber Kein Körper. (Q,+,-), (11,+,-) sind Körper (Zn, +, ) ist ein Kommutativer Ring (Zu, +, ) ist ein Körper (=> n ist eine Primzall (Knxn, +, .) ist ein Ring, aber Kein Körper (für n ≥ 2) Satz (Recheuregeln für Körper) Sei Kein Körper. Dann gilt für alle a, b & K:  $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ (i)  $(-1) \cdot a = -a$ (i i) (iii) (-a)·b = a·(-b) = -ab and (-a)·(-b) = a·b (iv) a & = 0 (=> a = 0 oder & = 0.