Aufgabe:

Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1} für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$$

Lsg.:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

② → ② + (−2)·①
③ → ③ + (−1)·①

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

② → (−1)·②
③ → (−1)·③

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

③ → ③ + (−1)·②

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

① → ① + (−3)·③
② → ② + (−2)·③

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

① → ① + (−2)·②

$$\left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{E} \middle| \underbrace{\begin{array}{ccc} -4 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}}_{A^{-1}}\right)$$

Probe: $$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Aufgabe:

Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1} für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}^{4\times 4}$$

Lsg.:

$$(A|E_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \quad \cdot(-3) \quad \cdot(-4) \\ + \\ \quad + \\ \quad\quad + \end{array}$$

$$\leadsto \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -6 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -7 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \quad \cdot(-3) \\ + \\ \quad + \end{array}$$

$$\leadsto \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-2) \\ + \end{array}$$

$$\leadsto \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \quad\quad + \\ \quad + \\ + \\ \cdot(-2) \quad \cdot 4 \quad \cdot(-2) \end{array}$$

$$\leadsto \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{=E_4} \qquad \underbrace{}_{=A^{-1}}$$

Probe: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4 \ ✓$$

Gegeben seien $t \in \mathbb{R}$ und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ t & 0 & 1 & 1 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

(a) Man berechne die Determinante von A und bestimme die reellen Zahlen t, für die A invertierbar ist.

(b) Man berechne für $t = 0$ die inverse Matrix von A.

Lösung:

Ad (a):

Mit elementaren Zeilen-/Spaltenumformungen, die den Wert der Determinante unverändert lassen, berechnet man

$$\begin{aligned}
\det A \quad &= \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ t & 0 & 1 & 1 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{II_s - III_s}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ t & -1 & 1 & 1 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\underset{\text{nach 4.Zeile}}{\overset{\text{Entwickl.}}{=}} \quad (-1)^{4+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t & -1 & 1 \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\overset{I_s - t \cdot II_s}{=} \quad -\det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 2t & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\underset{\text{nach 3.Zeile}}{\overset{\text{Entwickl.}}{=}} \quad -(-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 2t & 1 \end{pmatrix} \\
&= \quad 1 - t - 2t \\
&= \quad \underline{\underline{1 - 3t}}
\end{aligned}$$

Nach Vorlesung (5.6) (c) ist A invertierbar genau dann, wenn $\det A \neq 0$. Hier also

$$A \text{ invertierbar} \iff \det A \neq 0 \iff 1 - 3t \neq 0 \iff t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

Ad (b):

Wir berechnen für $t = 0$ die wegen Teil (a) existente Inverse der Matrix A nach dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren über die erweiterte Matrix.

$$(A\,|\,E_4) \quad = \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[IV-III]{I-III} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{II-IV} \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{Zeilen vertauschen}]{I-II} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left(E_4\,|\,A^{-1}\right)$$

Also ist die inverse Matrix zu A gegeben durch

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Verifikation(!):

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} E_4$$

Gegeben seien $t \in \mathbb{R}$ und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & t & 1 \\ 1 & t & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

(a) Man berechne die Determinante von A und bestimme die reellen Zahlen t, für die A invertierbar ist.

(b) Man berechne für $t = 1$ die inverse Matrix von A.

Lösung:

Ad (a):

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & t & 1 \\ 1 & t & 0 & 3 \end{pmatrix} &\underset{\text{3.Spalte}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} (-1)^{3+3} \cdot t \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & t & 3 \end{vmatrix} \\
&\underset{II-I}{=} t \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & t & 3 \end{pmatrix} \\
&\underset{\text{2.Zeile}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} t \cdot (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & t \end{pmatrix} \\
&= -t \cdot (1 \cdot t - 2 \cdot 1) \\
&= -t \cdot (t - 2)
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$A \text{ invertierbar} \iff \det(A) \neq 0 \iff -t \cdot (t-2) \neq 0 \iff t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$$

Ad (b):

Gemäß Vorlesung führen wir die Matrix $(A \,|\, E_4)$ durch elementare Zeilenumformungen in $(E_4 \,|\, A^{-1})$ über:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[I-IV]{II-I} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[IV-I]{III-II} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[IV-5\cdot II]{I+2\cdot II} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -5 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{vertauschen}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{=E_4} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{=A^{-1}}$$

Es empfiehlt sich eine Verifikation: $A \cdot A^{-1} = E_4$!

Gegeben seien $t \in \mathbb{R}$ und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 1 & t \\ 1 & 0 & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(a) Man berechne die Determinante von A und bestimme die reellen Zahlen t, für die A invertierbar ist.

(b) Man berechne für $t = 0$ die inverse Matrix von A.

Lösungen:

Ad (a):

Wir benutzen den Determinanten-Entwicklungssatz. Dazu suchen wir eine Zeile oder Spalte mit möglichst vielen Nulleinträgen - hier ist das die 2. Spalte. Damit:

$$\begin{aligned}
\det(A) &\underset{\text{2.Spalte}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} (-1)^{(2+4)} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix} \\
&\underset{\text{der 2.Spalte}}{\overset{\text{wieder nach}}{=}} (-1)^{(2+2)} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{(3+2)} \cdot t \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & t \end{pmatrix} \\
&= \Big(1 \cdot 1 - t \cdot 1\Big) - t \cdot \Big(1 \cdot t - t \cdot 1\Big) \\
&= 1 - t
\end{aligned}$$

$$A \text{ invertierbar} \iff \det(A) = 1 - t \neq 0 \iff t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Ad (b):

Wegen Teil (a) ist die Matrix A für $t = 0$ invertierbar und wir erhalten für die erweiterte Matrix:

$$\Big(A \,\Big|\, E_4\Big) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[IV-I]{\substack{II-I \\ III-I}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[IV-III]{IV-II} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{vertauschen}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Damit ist die gesuchte Inverse zu A gegeben durch

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Verfikation:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gegeben seien $s, t \in \mathbb{R}$ und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & s \\ 0 & t & 0 \\ s & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Man bestimme die reellen Zahlen s und t, für die A invertierbar ist, und berechne für diese die inverse Matrix von A.

Lösung:

Um doppelte Rechnung zu vermeiden führen wir die folgenden elementaren Umformungen an A gleich an der erweiterten Matrix $(A|E_3)$ aus, unabhängig davon, ob A invertierbar ist oder nicht (dabei bezeichne z.B. $II + a \cdot III$, daß zur 2. Zeile das a-fache der 3. addiert wird, und $II_s + a \cdot III_s$ das Analoge für Spalten).

$$(A|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{III-s\cdot I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-s^2 & -s & 0 & 1 \end{array}\right) =: C \qquad (\star)$$

Nun ist eine obere Dreiecksmatrix genau dann invertierbar, wenn alle Einträge auf der Hauptdiagonalen ungleich 0 sind Für unsere Matrix bedeutet dies:

$$A \text{ invertierbar} \iff t \neq 0 \ \wedge \ 1 - s^2 \neq 0 \iff \underline{\underline{t \neq 0 \ \wedge \ s \notin \{-1, 1\}}}$$

Seien also im Folgenden $t \neq 0 \ \wedge \ s \notin \{-1, 1\}$. Dann fahren wir in $(\star)$ fort:

$$C \xrightarrow[\frac{1}{1-s^2}\cdot III]{\frac{1}{t}\cdot II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{s}{1-s^2} & 0 & \frac{1}{1-s^2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{I-s\cdot III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \overbrace{1 + \frac{s^2}{1-s^2}}^{=\frac{1}{1-s^2}} & 0 & -\frac{s}{1-s^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{s}{1-s^2} & 0 & \frac{1}{1-s^2} \end{array}\right)$$

$$\implies A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-s^2} & 0 & -\frac{s}{1-s^2} \\ 0 & \frac{1}{t} & 0 \\ -\frac{s}{1-s^2} & 0 & \frac{1}{1-s^2} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{t\cdot(1-s^2)} \cdot \begin{pmatrix} t & 0 & -ts \\ 0 & 1-s^2 & 0 \\ -ts & 0 & t \end{pmatrix}}}$$

Verifikation:

$$A^{-1}\cdot A = \frac{1}{t\cdot(1-s^2)} \cdot \begin{pmatrix} t & 0 & -ts \\ 0 & 1-s^2 & 0 \\ -ts & 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & s \\ 0 & t & 0 \\ s & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{t\cdot(1-s^2)} \cdot \begin{pmatrix} (t(1-s^2) & 0 & ts - ts \\ o & t(1-s^2) & 0 \\ -ts + ts & 0 & -st + t \end{pmatrix} = E_3$$

Gegeben sei $s \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & s & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(a) Bestimmen Sie, für welche $s \in \mathbb{R}$ A invertierbar ist.

(b) Berechnen Sie für $s = 1$ die inverse Matrix von A.

Lösung:

Ad (a)

Da elementare Zeilenumformungen den Rang einer Matrix nicht ändern und die Invertierbarkeit einer $n \times n$-Matrix A mit $\operatorname{rang}(A) = n$ äquivalent ist, bringen wir die Matrix A durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform (römische Ziffern bezeichnen Zeilen):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & s & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[III-I]{II-I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & s-1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III+(s-1)\cdot II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -s \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$\operatorname{rang}(A) = 3 \iff \text{in der Hauptdiagonalen stehen nur Werte ungleich } 0 \iff s \neq 0$$

Damit folgt:

$$A \text{ invertierbar} \iff s \neq 0$$

Alternativ können wir auch so argumentieren:

$$A \text{ invertierbar} \iff \det(A) \neq 0$$

Dazu benutzen wir die obige Zeilenstufenform, da wir dort keine Zeilenvertauschungen oder Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar verwendet haben, und erhalten:

$$\det(A) = 1 \cdot (-1) \cdot (-s) = s \neq 0 \iff s \neq 0$$

Oder wir berechnen die Determinante über den Laplaceschen Entwicklungssatz, zum Beispiel Entwicklung nach der zweiten Zeile:

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^3 \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ s & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot (-1)^5 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & s \end{pmatrix} = -(1-2s) - (s-1) = s$$

und argumentieren wie oben.

Ad (b)

Für $s = 1$ ergibt sich für die erweiterte Matrix:

$$(A \,|\, E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[III-II]{I-III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II-I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{tauschungen}]{\text{Zeilenver-}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Damit ist die inverse Matrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Verifikation:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe:

Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1} für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$$

Lsg.:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{①} \leftrightarrow \text{②}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{③} \rightarrow \text{③} + (-1)\cdot\text{②}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{①} \rightarrow \text{①} + (-1)\cdot\text{③}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 1}_{E} & & & \underbrace{-1 \quad 0 \quad 1}_{A^{-1}} & & \end{array}\right)$$

Probe: $A\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

Aufgabe:

Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1} für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$$

Lsg.:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad ① \leftrightarrow ③$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} ① \rightarrow (-1)\cdot ① \\ ② \rightarrow (\frac{1}{2})\cdot ② \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad ① \rightarrow ① + 1\cdot ③$$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A^{-1}} \right)$$

Probe: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

Aufgabe:

Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1} für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$$

Lsg.:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \textcircled{2} \rightarrow \textcircled{2} + (-1)\cdot \textcircled{1} \\ \textcircled{3} \rightarrow \textcircled{3} + (-1)\cdot \textcircled{1} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \textcircled{3} \rightarrow \textcircled{3} + (-2)\cdot \textcircled{2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \textcircled{2} \rightarrow (\tfrac{1}{2})\cdot \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \rightarrow (-1)\cdot \textcircled{3} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \qquad \textcircled{2} \rightarrow \textcircled{2} + (-\tfrac{1}{2})\cdot \textcircled{3}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -1 \end{matrix}}_{A^{-1}} \end{array}\right)$$

Probe:

$$A\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Aufgabe:

Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1} für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$$

Lsg.:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} \text{②} \to \text{②} + (-1)\cdot \text{①} \\ \text{③} \to \text{③} + (-1)\cdot \text{①} \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} \text{②} \to (-1)\cdot \text{②} \\ \text{③} \to (-1)\cdot \text{③} \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{③} \to \text{③} + (-1)\cdot \text{②}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \text{③} \to (-1)\cdot \text{③}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} \text{①} \to \text{①} + (-1)\cdot \text{③} \\ \text{②} \to \text{②} + (-1)\cdot \text{③} \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \text{①} \to \text{①} + (-1)\cdot \text{②}$$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}} \right)$$

Probe: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

Aufgabe:

Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1} für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Lsg.:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{matrix} ② \to ② + (-1)\cdot ① \\ ③ \to ③ + (-1)\cdot ① \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{matrix} ② \to (-1)\cdot ② \\ ③ \to (-1)\cdot ③ \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \qquad ③ \to ③ + (-1)\cdot ②$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad ③ \to (-1)\cdot ③$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{matrix} ① \to ① + (-1)\cdot ③ \\ ② \to ② + (-1)\cdot ③ \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad ① \to ① + (-1)\cdot ②$$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}}\right)$$

Probe: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓