Analysis [für Informatiker]
Übungsblatt 4

Nikita Emanuel John Fehér, 3793479
Erik Thun, 3794446

08. November 2024
Mittwoch 11:15-12:45 Randig, Marvin Gruppe d

1. (a) Zeigen Sie, direkt aus der Def 2.28 (und FU), dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 = |x|^2$.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{wenn } x > 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \\ -x & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Fall 1 $x > 0$:

$$x^2 = xx = |x||x| = |x|^2$$

Fall 2 $x = 0$:

$$x^2 = 0^2 = 0 = 0|x| = |x||x| = |x|^2$$

Fall 3 $x < 0$:

$$a \in \mathbb{R} = -x$$
$$x^2 = (-a)^2 = (-a)(-a) = (-1)(-1)(a)(a)$$
$$= (a)(a) = |-a||-a| = |-a|^2 = |x|^2$$

$\square$

(b) Beweisen Sie nun (nur unter Nutzung der Behauptungen vor Bemerkung 2.32), dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Identität $|xy| = |x||y|$ gilt.

(FU eigentlich unnötig)

Fall 1 $x > 0, y > 0:$

$$|xy| = xy = |x||y|$$

Fall 2 $x > 0, y < 0:$

$$|xy| = x(-y) = |x||y|$$

Fall 3 $x < 0, y > 0:$

$$|xy| = (-x)y = |x||y|$$

Fall 4 $x < 0, y < 0:$

$$|xy| = (-x)(-y) = |x||y|$$

Fall 5 $x = 0, y \in \mathbb{R}:$

$$|xy| = |0y| = 0 = 0|y| = |x||y|$$

Fall 6 $x \in \mathbb{R}, y = 0:$

$$|xy| = |x0| = 0 = |x|0 = |x||y|$$

□

(c) Beweisen Sie auch, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ immer

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

gilt, nutzen Sie nur Lemma 2.30 und die Dreiecksungleichung. (FU ist unnötig, obige Ungleichung gilt auch für Abstände in Ebene & Raum(wenn $|z|$ Abstand z zum Ursprung 0), wo positiv/negativ FU klar unmöglich).

Dreiecks-Ungleichung $= |a + b| \leq |a| + |b|$

sei $a = x - y, b = y:$

$$\begin{aligned} &|x - y + y| \leq |x - y| + |y| \\ =&|x| \leq |x - y| + |y| \\ =&|x| - |y| \leq |x - y| \end{aligned}$$

sei $a = x - y, b = x:$

$$\begin{aligned} &|x - y + x| \leq |x - y| + |x| \\ =&|y| \leq |x - y| + |x| \\ =&|y| - |x| \leq |x - y| \end{aligned}$$

das bedeutet :

$$\begin{aligned} &\max(|x| - |y|, |y| - |x|) \leq |x - y| \\ &\max(|x| - |y|, |y| - |x|) = ||x| - |y|| \\ &||x| - |y|| \leq |x - y| \end{aligned}$$

□

2. (a) Sei $M \subset \mathbb{R}$, dann ist (siehe VL) $-M = \{m : -m \in M\}$ und $OS(M)$ bzw $US(M)$ die Menge der oben und unteren Schranken von M. Zeigen Sie, wenn M von unten beschränkt, dann

$$\mathrm{OS}(-M) = -\mathrm{US}(M) \text{ und } -\sup(-M) = \inf(M).$$

i. $\mathrm{OS}(-M) = -\mathrm{US}(M)$:

not solved

ii. $-\sup(-M) = \inf(M)$

$$\begin{aligned} & -\sup(-M) = \inf(M) && | \cdot (-1) \\ \iff & \sup(-M) = -\inf(M) && |\text{Lemma } 2.40 \\ \iff & \sup(-M) = -(-\sup(-M)) && \\ \iff & \sup(-M) = \sup(-M) && \end{aligned}$$

$\square$

(b) Seien $\emptyset \neq M \subset N \subset \mathbb{R}$ beschränkte Mengen. Zeigen Sie, dass $\sup(M) \leq \sup(N)$.

$\square$

(c) Beweisen Sie (direkt aus Def 2.42 und Satz 2.43, dh ohne Benutzung späterer Resultate): wenn $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ dann $n \geq 2 (= 1 + 1)$! Wenn Sie hierfür Mengen(Beispiele) aus der Vorlesung nutzen, zeigen Sie deren dort nur behaupteten entscheidenden Eigenschaften vollständig!

$\square$