Universität Leipzig
Institut für Informatik
Sommersemester 2025

Prof. Dr. Andreas Maletti,
Dr. Meenakshi Paramasivan,
Dr. habil. Karin Quaas,
Fabian Sauer

Aufgaben zur Lehrveranstaltung

Berechenbarkeit

Lösungen zu Serie 1

Übungsaufgabe 1.1 (Grammatiken)

Gegeben sie die folgende Grammatik $G = (\{S\}, \Sigma, S, P)$ mit $\Sigma = \{x, +, -\}$ und Produktionen P

$$S \to x \qquad S \to S + S \qquad S \to S - S.$$

(a) Ist die Grammatik G kontextsensitiv, kontextfrei und/oder regulär? Begründen Sie Ihre Antwort. G ist nicht regulär, denn dafür müsste die rechte Seite jeder Produktionsregel von der Form $(\Sigma \times \{S\}) \cup \Sigma$ sein (aber z.B. $S \to S + S$ ist dies nicht). G is kontextfrei, denn die linke Seite jeder Regel ist in $\{S\}$, und die rechte Seite jeder Regel ist ungleich dem leeren Wort ε. Damit ist G auch kontextsensitiv, denn jede kontextfreie Grammatik ist auch kontextsensitiv.

(b) Geben Sie eine Ableitung von $v = x + x - x + x$ in der Grammatik G an. $S \Rightarrow_G S + S \Rightarrow_G S + S - S \Rightarrow_G x + S - S \Rightarrow_G x + x - S \Rightarrow_G x + x - S + S \Rightarrow_G x + x - S + x \Rightarrow_G x + x - x + x$

(c) Geben Sie die von G erzeugte Sprache $L(G)$ an. $L(G)$ kann durch den regulären Ausdruck $x \cdot (\{+, -\}x)^*$ ausgedrückt werden (nach mindestens einem x folgt immer $+x$ oder $-x$).

(d) Geben Sie die Sprachklasse (Typ-3, Typ-2, Typ-1, oder Typ-0) an. Begründen Sie Ihre Antwort. Typ-3 (reguläre Sprache). Zwar ist die Grammatik G kontextfrei, aber $L(G)$ kann durch einen regulären Ausdruck ausgedrückt werden, und die Klasse der durch regulären Ausdrücke ausdrückbaren Sprachen entspricht den Typ-3-Sprachen.

(e) Geben Sie die Codierung $c(G)$ von G als endliches Wort über $\mathbb{N}$ an; kodieren Sie dabei Terminale durch ungerade Zahlen ($x = 1, + = 3, - = 5$), Nichtterminale durch positive gerade Zahlen ($S = 2$), und verwenden Sie die 0 als Trennzeichen. $2, 0, 1, 0, 2, 0, 2, 3, 2, 0, 2, 0, 2, 5, 2$ (das Komma dient hier nur der Lesbarkeit und ist nicht Teil des Wortes.)

Übungsaufgabe 1.2 (Abzählbarkeit)

Beweisen Sie folgenden Satz aus Vorlesung 1.

§1.12 Jede unendliche Menge M ist abzählbar gdw. eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to M$ existiert.

LÖSUNG: Eine Menge M ist abzählbar falls eine injektive Funktion $g : M \to N$ existiert.

"$\Leftarrow$" Angenommen es existiert eine bijektive Funktion $f : \mathbb{N} \to M$. Dann existiert auch die inverse Funktion $f^{-1} : M \to \mathbb{N}$, welche selber auch bijektiv ist. Also ist f^{-1} auch injektiv und somit ist M per Definition abzählbar. Wir zeigen dass M unendlich ist durch einen Widerspruchsbeweis: angenommen, M wäre endlich mit $k \geq 0$ Elementen. Nach dem Taubenschlagprinzip muss dann aber in der Menge $\{f(1), \dots, f(k), f(k+1)\}$ mindestens ein Element aus M zweimal vorkommen, Widerspruch zur Injektivität von f.

"$\Rightarrow$" Angenommen M ist unendlich und abzählbar. Es existiert also eine injektive Funktion $g : M \to \mathbb{N}$.

(Falls g auch bijektiv, so können wir $f = g^{-1}$ setzen und sind fertig. Leider ist g nicht unbedingt surjektiv, d.h. es kann Zahlen $n \in N$ geben, für die es kein $m \in M$ mit $g(m) = n$ gibt. Dieses Problem lösen wir wie folgt:)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiere die Menge $M_n = \{m \in M \mid g(m) = n\}$.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: M_n enthält maximal ein Element in M (also $|M_n| \leq 1$). Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$. Widerspruchsbeweis: angenommen, es gäbe $m \neq m'$ in M_n. Dann nach Definition $g(m) = g(m') = n$. Widerspruch zur Injektivität von g.

(b) Für jedes $m \in M$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $m \in M_n$. Beweis: dies gilt weil g eine Funktion ist, welche jedem Element m in M ein n zuweist.

Sei $0 \leq i_0 < i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \dots$ die Folge aller Indizes sodass $M_{i_j} \neq \emptyset$. Dann ist also $m_{i_1}, m_{i_2}, m_{i_3}, \dots$ mit $m_{i_j} \in M_{i_j}$ für alle $j \geq 0$ eine Folge *aller* Elemente in M (wegen (b)), in der *kein Element doppelt* (wegen (a)) vorkommt.

Definiere $f : \mathbb{N} \to M$ durch $g(j) = m_{i_j}$ für alle $j \geq 0$. Wir zeigen dass f bijektiv ist:

- f ist injektiv: seien $n, n' \in \mathbb{N}$ mit $n \neq n$. Dann $f(n) = m_{i_n}$ und $f(n') = m_{i_{n'}}$. Wegen (a) gilt in der Tat $f(n) \neq f(n')$.
- f ist surjektiv: sei $m \in M$. wegen (b) gibt es ein $j \geq 0$ mit $m = m_{i_j}$. Dann gilt $g(j) = m$.

Übungsaufgabe 1.3 (Abzählbarkeit)

Beweisen Sie folgenden Satz.

Die Menge $M = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ ist nicht abzählbar.

LÖSUNG: Hinweis: der Beweis ist dem Beweis von Satz §1.13 in Vorlesung 1 sehr ähnlich. Widerspruchsbeweis: nimm an, M sei abzählbar. Offensichtlich ist M unendlich. Nach Satz §1.12 existiert eine bijektive Funktion $g : \mathbb{N} \to M$. Definiere die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } g(n)(n) \neq 1 \\ 0 & \text{falls } g(n)(n) = 1 \end{cases}.$$

(Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 1$ oder $f(n) = 0$.) Da g bijektiv ist, muss es $n \in \mathbb{N}$ geben sodass $g(n) = f$. Angenommen $f(n) = 1$. Also auch $g(n)(n) = 1$. Nach Definition von f gilt aber auch $g(n)(n) \neq 1$, Widerspruch. Also muss $f(n) = 0$ gelten. Also auch $g(n)(n) = 0$. Nach Definition von f gilt aber $g(n)(n) = 1$, Widerspruch. Also ist M nicht abzählbar.

Testfrage: ist die Menge $M' = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$ abzählbar? Nein, denn wir haben im Beweis genau eine solche Funktion in M' definiert.

Siehe auch Diagonalisierung

Hausaufgabe 1.4 (Grammatiken) (11)

Gegeben sie die folgende Grammatik $G = (\{S\}, \Sigma, S, P)$ mit $\Sigma = \{x, +, -, (,)\}$ und Produktionen P

$$S \to x \qquad S \to S + S \qquad S \to S - S \qquad S \to (S).$$

(a) Ist die Grammatik G kontextsensitiv, kontextfrei und/oder regulär? Begründen Sie Ihre Antwort. G ist nicht regulär, denn dafür müsste die rechte Seite jeder Produktionsregel von der Form $(\Sigma \times \{S\}) \cup \Sigma$ sein (aber z.B. $S \to S + S$ ist dies nicht)●1. G is kontextfrei, denn die linke Seite jeder Regel ist in $\{S\}$, und die rechte Seite jeder Regel ist ungleich dem leeren Wort ε●2. Damit ist G auch kontextsensitiv, denn jede kontextfreie Grammatik ist auch kontextsensitiv●3. (Je einen Punkt pro richtiger Aussage zu jeder Klasse (mit Begründung)) (3)

(b) Geben Sie eine Ableitung von $v = ((x - x) + x) - x$ in der Grammatik G an. $S \Rightarrow_G S - S \Rightarrow_G (S) - S \Rightarrow_G (S + S) - S \Rightarrow_G ((S) + S) - S \Rightarrow_G ((S - S) + S) - S \Rightarrow_G ((x - S) + S) - S \Rightarrow_G ((x - x) + S) - S \Rightarrow_G ((x - x) + x) - S \Rightarrow_G ((x - x) + x) - x$ ●4 ●5 ●6 (3)

(c) Geben Sie eine Definition für die Sprache $L(G) \cap \{(,), x\}^*$ an. Das sind all die Wörter, die in $L(G)$ sind aber kein $+$ und kein $-$ enthalten; also lediglich durch die Regel $S \to (S)$ (beliebig oft) und $S \to x$ (einmal) abgeleitet werden können: $\{(^n x)^n \mid n \geq 0\}$ ●7 ●8 (gleiche Anzahl von öffnenden und schliessenden Klammern, dazwischen ein x) (2)

(d) Beweisen Sie, dass $L(G)$ keine Typ-3-Sprache ist. Widerspruchsbeweis. Angenommen, $L(G)$ wäre eine Typ-3-Sprache, also regulär. Dann wäre aber auch $L(G) \cap \{(,), x\}^*$ eine reguläre Sprache, denn $\{(,), x\}$ ist regulär und reguläre Sprachen sind unter Schnitt abgeschlossen. Jedoch ist $L(G) \cap \{(,), x\}^*$ nicht regulär (Pumping Lemma).●9 ●10 ●11 (3)

Hausaufgabe 1.5 (Abzählbarkeit)

punkte11

(a) Beweisen Sie folgenden Satz:

Sei M abzählbar und $M' \subseteq M$. Dann ist M' abzählbar. (3)

Da M abzählbar, existiert injektive Funktion $f : M \to \mathbb{N}$ ●[12]. Wir definieren eine injektive Funktion $g : M' \to \mathbb{N}$ um zu zeigen dass M' abzählbar ist: definiere $g(m) = f(m)$ für alle $m \in M'$ ●[13]. Da f injektiv ist, ist offensichtlich auch g injektiv●[14].

(b) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

Sei Σ ein endliches Alphabet. Dann ist Σ^* abzählbar. (4)

Die Aussage ist wahr●[15]. Laut §1.10 ist $\mathbb{N}^*$ abzählbar●[16]. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $\Sigma \subseteq \mathbb{N}$, also $\Sigma^* \subseteq \mathbb{N}^*$ ●[17]. Nach 1.5 (a) ist also Σ^* abzählbar.●[18]

(c) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

Die Menge $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ aller Teilmengen von Wörtern über $\mathbb{N}$ ist abzählbar. Die Aussage ist falsch●[19]. Laut §1.13 ist die Menge $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ aller Teilmengen von Σ^* nicht abzählbar ●[20]. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $\Sigma \subseteq \mathbb{N}$, also $\Sigma^* \subseteq \mathbb{N}^*$ also $\mathcal{P}(\Sigma^*) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$●[21]. Wäre $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ abzählbar, so wäre nach 1.5 (a) auch $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ abzählbar●[22]. (4)

Hausaufgabe 1.6 (Abzählbarkeit) (5)

Beweisen Sie folgenden Satz.

Sei M eine unendliche Menge und $f : \mathbb{N} \to M$ eine surjektive Funktion. Dann ist M abzählbar.

Lösung: Nach §1.12 genügt es zu zeigen, dass eine bijektive Funktion $g : \mathbb{N} \to M$ existiert●[23]. Betrachte die unendliche Folge

$$f(0), f(1), f(2), \ldots$$

Da f nicht injektiv sein muss, können in dieser Folge Duplikate vorkommen, d.h. es kann $0 \leq i < j$ geben mit $f(i) = f(j)$. Wir definieren g so, dass solche Duplikate eliminiert werden. Die Definition von g ist rekursiv. Definiere $g(0) = f(0)$ und $g(n+1) = f(j)$, wobei j die kleinste natürliche Zahl mit $f(j)$ kommt nicht in $g(0), g(1), \ldots g(n)$ vor ist●[24] ●[25]. Wir zeigen dass g bijektiv ist:

- g ist surjektiv: da f surjektiv ist, gibt es für jedes $m \in M$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = m$. Nach Definition von g existiert ein $n' \in \mathbb{N}$ (mit $n' \leq n$) mit $g(n') = m$. ●[26]
- g ist injektiv: sei $n, n' \in \mathbb{N}$. Dann $n < n'$ oder $n' < n$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n < n'$. Wir haben g so definiert, dass n' nicht in $g(0), \ldots, g(n), \ldots, g(n-1)$ vorkommt. Also $g(n) \neq g(n')$. ●[27]