

Hausaufgabenblatt 3

Abgabe bis 03.12.2024 (Di) um 09.00 auf moodle

Aufgabe 1. Sei (Ω, p) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und seien X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen. Die Kovarianz von X und Y ist definiert als:

$$\text{cov}(X, Y) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$$

Zeigen Sie für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

a) $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

b) $\text{cov}(X, X) = \text{Var}(X)$

c) $\text{cov}(aX + b, cY + d) = ac \cdot \text{cov}(X, Y)$

d) Sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen, so gilt

$$\text{cov}(X, Y) = 0$$

Aufgabe 2. Die Zufallsgröße X bezeichne die größte Augenzahl und die Zufallsgröße Y die kleinste Augenzahl beim zweifachen Würfelwurf (Laplace-Modell).

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X = k)$ für alle $k = 1, \dots, 6$

und den Erwartungswert von X .

(b) Berechnen Sie mithilfe von (a) den Erwartungswert $\mathbb{E}Y$, ohne explizit $\mathbb{P}(Y = k)$ für $k = 1, \dots, 6$ zu bestimmen. (Hinweis: Sei Z_j die Augenzahl des j -ten Wurfs, für $j = 1, 2$, zeigen Sie $X + Y = Z_1 + Z_2$)

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgrößen $X + Y$, $3 \cdot X^2 - Y$ und $X \cdot Y$.

Aufgabe 3. Für $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sind die folgenden Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$$p_1 = p_2 = p_4 = p_5 = \frac{1}{8}, \quad p_3 = p_6 = \frac{1}{4}.$$

Weiter sind X, Y und Z Zufallsgrößen auf Ω mit Werten entsprechend der folgenden Tabelle:

ω	1	2	3	4	5	6
$X(\omega)$	1	2	1	2	1	2
$Y(\omega)$	1	1	2	3	3	2
$Z(\omega)$	-1	1	3	2	-2	-3

(a) Welche der Zufallsgrößen sind unabhängig?

(b) Bestimmen Sie $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$, $\mathbb{E}Z$, $\mathbb{E}(X \cdot Y)$, $\mathbb{E}(X \cdot Z)$ und $\mathbb{E}(Y \cdot Z)$.

Aufgabe 4. Sei (Ω, p) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zwei unabhängige Zufallsvariablen. Seien ferner $\phi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Zeigen Sie, dass $\phi(X)$ und $\psi(Y)$ auch unabhängig sind.

Abgabe: Die Abgabe erfolgt erstmal als Gruppe (2–4 Teilnehmer) über moodle. Bitte schreiben Sie auf die erste Seite der Abgabe die vollständigen Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder. Die Übungen müssen selbstständig bearbeitet werden. Ein Gruppenmitglied lädt die Abgabe als eine pdf-Datei für alle hoch. Bitte benennen Sie die Datei wie folgt (Name bezieht sich auf das hochladende Gruppenmitglied):

Vorname-Nachname-MatrNr-HA2.pdf

Zu späte oder nicht lesbare Abgaben oder Entwürfe oder Einzelabgaben werden nicht korrigiert und mit 0 Punkten bewertet. Vergessene Namen von Gruppenmitgliedern können nicht berücksichtigt werden. Alle Gruppenmitglieder sind für das erfolgreiche Hochladen der Abgabe verantwortlich.