# Vorlesungsskript für Wahrscheinlichkeitstheorie

## — Gehalten von Professor Klotz —

Diese Mitschriften basieren auf dem Skript vom WS2008/2009 von:
*Natanael Arndt* und *Jörg Werner*, mit freundlicher Unterstützung von *Norman Radtke*, *Jan Engelhardt* und *Franz Mann* und einer unbekannten Connection von *Franz*

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Zufällige Ereignisse und deren Wahrscheinlichkeiten

## 1.1 Ereignisalgebra

● **Definition 1.1.1** (Zufallsexperiment)**:**
Vorgang, dessen Ergebnis vom Zufall abhängt.

● **Definition 1.1.2** ((Zufälliges) Ereignis)**:**
Ereignis, das bei einem Zufallsexperiment eintreten kann.

? **Beispiel 1.1.1** (Zufallsexperiment)**:**
Einmaliges Würfeln (mit einem Würfel). Sechs mögliche Ergebnisse: $1, 2, 3, 4, 5, 6$
Zufällige Ereignisse sind zum Beispiel „Würfeln einer 1“ oder „Würfeln einer geraden Zahl“.

Mathematisches Modell für dieses Zufallsexperiment:
$\Omega$ – Menge aller Ergebnisse, $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Jedes Ereignis ist dann als Teilmenge von $\Omega$ interpretierbar. Insbesondere entsprechen den einelementigen Teilmengen den so genannten Elementarereignissen.
Die für das Zufallsexperiment des Beispiels ausgeführte Konstruktion eines mathematischen Modells ist im gewissen Sinne allgemeingültig.

! **Satz 1.1.1** (Satz von M. H. Stone)**:**
Zufallsexperiment $\rightarrow$ Menge $\Omega$ aller Ergebnisse. Jedes Ereignis kann dann mit einer Teilmenge von $\Omega$ identifiziert werden.

**Dabei ist zu beachten:**

- $\Omega$ ist nicht immer exakt beschreibbar.
- Ist $\Omega$ überabzählbar, so kann nicht immer jede Teilmenge von $\Omega$ als Ereignis, dem man eine Wahrscheinlichkeit zuordnen kann, angesehen werden.

**Spezialfälle:** $\emptyset$ – ungültiges Ereignis
$\Omega$ – sicheres Ereignis

Mit Ereignissen $A, B, \ldots$ kann gerechnet werden wie mit Teilmengen:

$\mathbf{A = B}$
: $A$ tritt genau dann ein, wenn $B$ eintritt

$\mathbf{A \subseteq B}$ **oder** $\mathbf{B \supseteq A}$
: Eintreten von $A$ zieht Eintreten von $B$ nach sich

$\mathbf{A \cup B}$
: Summe („Vereinigung“) von $A$ und $B$,
tritt genau dann ein, wenn $A$ **oder** $B$ eintritt.
D.h., wenn (mindestens) eines der Ereignisse $A$ oder $B$ eintritt.

$\mathbf{A \cap B}$
: Produkt („Durchschnitt“) von $A$ und $B$
tritt genau dann ein, wenn $A$ und $B$ eintreten.
D.h., wenn **sowohl** $A$ **als auch** $B$ eintreten.

$\mathbf{A \setminus B}$
: Differenz von $A$ und $B$,
tritt genau dann ein, wenn $A$ eintritt und $B$ aber nicht.

**Insbesondere:** $\mathbf{\Omega \setminus B := \overline{B}}$ (sprich: „$B$-quer“)
: Komplementärereignis („Gegenereignis“ oder „Komplement“) von $B$,
tritt genau dann ein, wenn $B$ **nicht** eintritt.

Die Begriffe Summe und Produkt können für beliebig viele Ereignisse definiert werden:

**Definition 1.1.3:**
Sei $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ein Familie von Ereignissen, dann bezeichnet

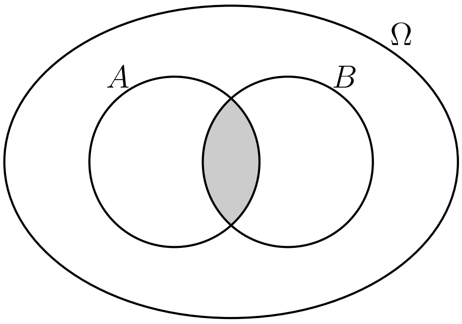
$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \left( \text{bzw. } \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)$$

dasjenige Ereignis, das genau dann eintritt, wenn mindestens eines der Ereignisse $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$ eintritt (beziehungsweise alle Ereignisse $A_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ eintreten.)

Es gelten die üblichen Rechengesetze (analog zum Rechnen mit Teilmengen), insbesondere die *de Morgan'schen* Gesetze

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

**Definition 1.1.4** (Unvereinbare Ereignisse)**:**
Zwei Ereignisse heißen unvereinbar oder „disjunkt“, wenn $A \cap B = \emptyset$ ist.




## 1.2 Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses

### 1.2.1 Relative Häufigkeit und statistische „Wahrscheinlichkeitsdefinition“

**Definition 1.2.1** (absolute und relative Häufigkeit)**:**
Ein Zufallsexperiment werde $n$-mal unter gleichen Bedingungen und unabhängig voneinander wiederholt.
Tritt ein Ereignis $A$ dabei $k_n$ mal ein, so heißen $H_n(A) := k_n$ die **absolute Häufigkeit** und $h_n(A) := \frac{k_n(A)}{n}$ die **relative Häufigkeit** von $A$ in diesen $n$ Versuchen.
Die Zahlen $k_n = H_n(A)$ und damit auch $h_n(A)$ sind zufallsabhängig.

Bei großen $n$ schwankt aber $h_n(A)$ meist nur wenig um einen gewissen (im Allgemeinen unbekannten) Wert, den man als Wahrscheinlichkeit $P(A)$ des Ereignisses $A$ bezeichnen könnte.
Trotzdem wird man für große $n$ versuchen die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ des Ereignisses $A$ durch $h_n(A)$ zu schätzen:

$$P(A) \approx h_n(A).$$

Diese Schätzung sollte umso besser sein, je größer $n$ ist.
Deshalb wäre $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(A) := P(A)$ eine mögliche „Definition“ von $P(A)$ ($\curvearrowright$ statistische „Wahrscheinlichkeitsdefinition“). Das ist mathematisch *nicht* korrekt, da unklar ist, in welchem Sinne der Grenzwert verstanden werden soll.

**Nebenbemerkung 1:**
Einelementige Teilmengen von $\Omega$ nennt man **Elementarereignisse**

### 1.2.2 Klassische „Wahrscheinlichkeitsdefinition“ und Kombinatorik

►

**Nebenbemerkung 2:**
Wahrscheinlichkeitstheorie ab 16. Jahrhundert, Ausgangspunkt: Glücksspiele

Voraussetzung:
Endliche Anzahl von Ergebnissen, deren Eintreten **gleichmöglich** ist.
$\Rightarrow$ „Definition“ der Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses $A$ durch

$$P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der zu } A \text{ gehörenden Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller Ergebnisse}}$$

$$= \frac{\text{„Anzahl der günstigen Fälle“}}{\text{„Anzahl der möglichen Fälle“}}$$

$\rightsquigarrow$ Elementarereignisse müssen alle *gleichwahrscheinlich* (gleichmöglich) sein, aber wir wissen nicht was das bedeutet.
Bestimmung solcher Anzahlen häufig mit Methoden der Kombinatorik.

!

**Lemma 1.2.1:**
Die Anzahl der Elemente eines kartesischen Produkts einer endlichen Anzahl endlicher Mengen ist gleich dem Produkt der Anzahlen der Elemente der einzelnen Mengen

$A, B$ mit $A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$, $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ (kartesisches Produkt)

#### Die 4 Grundaufgaben der Kombinatorik

Die 4 Grundaufgaben der Kombinatorik können am Beispiel der Auswahl von $k$ Elementen aus einer Menge von $n$ Elementen erklärt werden, $k, n \in \mathbb{N}$.

#### 1. Wiederholungen zugelassen, Reihenfolge wird berücksichtigt

$\Rightarrow$ *Variationen* mit *Wiederholung* von $n$ Elementen zur $k$-ten Klasse.

Ihre Anzahl $\tilde{V}_n^k$ ist gleich $\tilde{V}_n^k = n^k$.

$$\begin{array}{c} \overbrace{x \quad x \quad \cdots \quad x}^{k \text{ Plätze}} \\ n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n_k \end{array}$$

**Beweis 1.2.1:**
Es sind der Reihe nach $k$ Plätze mit je einem Element aus der Menge zu belegen. Da Wiederholungen zugelassen sind, gibt es für jeden Platz $n$ Möglichkeiten. Nach Lemma gibt es dann insgesamt

$$\tilde{V}_n^k = \underbrace{n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ Faktoren}} = n^k$$

Möglichkeiten.

**Beispiel 1.2.1:**
Wie viele verschiedene fünfstellige Zahlen kann man aus den Ziffern $1, 2, 3, 4$ bilden?

$$\begin{aligned} n = 4,\ k = 5 \Rightarrow \tilde{V}_4^5 &= 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \\ &= 4^5 \\ &= 1024 \end{aligned}$$

**Achtung!** 00001 ist keine fünfstellige Zahl.

**2. Wiederholung nicht zugelassen, Reihenfolge wird berücksichtigt ($\mathbf{k \leq n}$)**

$\Rightarrow$ Variationen *ohne* Wiederholung von $n$ Elementen zur $k$-ten Klasse. Ihre Auswahl $V_n^k$ ist gleich

$$\begin{aligned} V_n^k &= n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) \\ &= n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \end{aligned}$$

**Beweis 1.2.2:**
Belegung von $k$ Plätzen der Reihe nach mit Elementen der Menge. Da Wiederholungen nicht möglich sind, gibt es für den ersten Platz $n$ Möglichkeiten, für den zweiten nur noch $n-1$, $\ldots$, für den $k$-ten Platz noch $(n-(k+1))$ Möglichkeiten. Benutze das Lemma.
$\square$

▶ **Nebenbemerkung 3:**
Wichtiger Spezialfall $k = n$:

$$\begin{aligned} V_n^k = V_n^n &= n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-n+1) \\ &= n(n-1) \cdot \ldots \cdot 1 \\ &= n! \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Heißt Permutation von $n$ Elementen. ($\widehat{=}$ Anordnung von $n$ Elementen in einer beliebigen Reihenfolge)

? **Beispiel 1.2.2:**
Am 100m-Endlauf der Olympischen Spiele nehmen 8 Sportler teil. Wie viele verschiedene Medaillenverteilungen sind möglich? (Mehrfache Vergabe einer Medaille sei ausgeschlossen)

$$n = 8,\ k = 3$$
$$8_{\text{(Gold)}} \cdot 7_{\text{(Silber)}} \cdot 6_{\text{(Bronze)}} = V_8^3 = 336 \text{ verschiedene Medaillenverteilungen}$$

**3. Wiederholungen nicht zugelassen, Reihenfolge wird nicht berücksichtigt ($\mathbf{k \leq n}$)**

$\Rightarrow$ **Kombinationen** ohne Wiederholung von $n$ Elementen zur $k$-ten Klasse.
Ihre Anzahl $C_n^k$ ist gleich

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

**Beweis 1.2.3:**
2. $V_k^n = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$
Zerlege die Menge der Variationen ohne Wiederholung in paarweise disjunkte Teilmengen, wobei jede Teilmenge aus genau denjenigen Variationen ohne Wiederholung besteht, die aus den gleichen Elementen der Ausgangsmenge gebildet werden. Jede dieser Teilmengen besteht aus $k!$ Variationen ohne Wiederholung, also ist die Anzahl dieser Teilmengen gleich.

$$\frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1}{k!}$$

Es kann eine eineindeutige Zuordnung zwischen der Menge dieser Teilmengen und der Menge der Kombinationen ohne Wiederholung hergestellt werden.
□

?

**Beispiel 1.2.3:**
Wie viele verschiedene Ziehungsergebnisse gibt es bei „6 aus 49“ (ohne Berücksichtigung der Zusatzzahl)?

$$n = 49,\ k = 6,\ C_{49}^{6} = \binom{49}{6} = 13\,983\,816$$

### 4. Wiederholungen zugelassen, Reihenfolge wird nicht berücksichtigt

►

**Nebenbemerkung 4:**

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$\Rightarrow$ Kombinationen mit Wiederholung
Ihre Anzahl $\tilde{C}_n^k$ ist gleich

$$\tilde{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

(Beweisidee: aus 3)

**Beweis 1.2.4:**
Die Elemente der Ausgangsmenge seien $a_1, \ldots, a_n$ einer Kombination mit Wiederholung, bei der $l_1$-mal $a_1$, $l_2$-mal $a_2$, …, $l_n$-mal $a_n$ ausgewählt wurde ($l_1 \geq 0, l_2 \geq 0, \ldots, l_n \geq 0, l_1 + l_2 + \ldots + l_n = k$) ordnen wir eine Folge aus $k$ Symbolen „$*$“ und $n-1$ Symbolen „|“ wie folgt zu:

$$\underbrace{*\ldots*}_{l_1-\text{mal}}|\underbrace{*\ldots*}_{l_2-\text{mal}}|\ldots|\underbrace{*\ldots*}_{l_n-\text{mal}}$$

Diese Zuordnung vermittelt eine eineindeutige Abbildung zwischen der Menge der Kombinationen mit Wiederholung und der Menge von Folgen aus $k$ Symbolen „$*$“ und $n-1$ Symbolen „|“. Die Anzahl solcher Folgen ist gleich der Anzahl aus $n+k-1$ freien Plätzen für die Symbole „|“ genau $n-1$ auswählen. Die Reihenfolge wird dabei nicht berücksichtig und Wiederholungen sind nicht zugelassen. Somit ist ihre Anzahl wegen Grundaufgabe 3 gleich

$$C_{n+k-1}^{n-1} = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

□

?

**Beispiel 1.2.4:**
Jemand möchte 10 Briefmarken kaufen, wobei 3 verschiedene Sorten (in genügendem Umfang) vorhanden sind. Wie viele verschiedene Kaufzusammenstellungen gibt es? Aus $n = 3$ Sorten müssen $k = 10$ Briefmarken ausgewählt werden:

$$\tilde{C}_n^k = \tilde{C}_3^{10} = \binom{12}{10} = \frac{12!}{10! \cdot 2!} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$$

## Eigenschaften von Binominalkoeffizienten

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \\ &= \binom{n+1}{k+1} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k)}{(k+1)!} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (k+1) + n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k)}{(k+1)!} \\ &= \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(k+1+n-k)}{(k+1)!} \\ &= \frac{(n+1) \cdot n \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{(k+1)!} \\ &= \binom{n+1}{k+1}\end{aligned}$$
3. Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\binom{n}{0} &:= 1 \\ \binom{n}{n} &:= 1\end{aligned}}$$

**Beweis 1.2.5** (Zu 3.)**:**
Es ist $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n \text{ Faktoren}}$
Beim Ausmultiplizieren nimmt man von jeder dieser Klammern entweder $a$ oder $b$. Damit $b^k$ (und damit $a^{n-k}$, also insgesamt $a^{n-k}b^k$) entsteht, muss man bei genau $k$ Klammern das $b$ wählen.
Es sind also aus $n$ Klammern genau $k$ auszuwählen, bei denen $b$ genommen wird, und zwar ohne Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge. Wegen Grundaufgabe 3 entsteht damit $\binom{n}{k}$ mal der Summand $a^{a-k}b^k$
□

4. Wählen wir in 3. $a = b = 1$, so erhält man:

   $$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

   Wählen wir in $a = 1$ und $b = -1$, so erhält man

   $$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

5. Wählen wir in 3. $a = x \in \mathbb{R}$ als Variable und $b = 1$ so entsteht

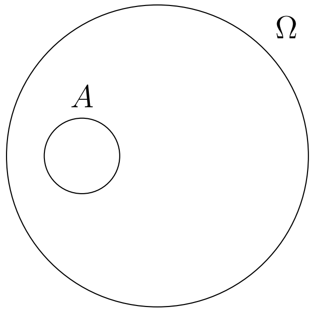
   $$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}$$

   Durch Differenzieren nach $x$ (und danach eventuell wieder konkrete Wahl von $x$) kann man weitere Identitäten erhalten.

```
# # #     #   # # #   # # #     #
#     #   #   #       #     #   #
# # #     #   # #     # # #     #
#     #   #   #       #     #
# # #     #   # # #   #     #   #
```

### 1.2.3 Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff: Wahrscheinlichkeitsraum

Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird nicht definiert, sondern auf axiomatischem Wege eingeführt. Da im Allgemeinen nicht jeder Teilmenge von $\Omega$ eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden kann (vergleiche Abschnitt 1.1) muss zunächst eine geeignete Familie von Teilmengen ausgewählt werden.
$\Rightarrow$ $\sigma$-Algebra




**Definition 1.2.2:**
Eine Familie $\mathfrak{A}$ (sprich: „Aah") von Teilmengen einer Menge $\Omega$ heißt eine $\sigma$-Algebra, falls gilt:

1. $\emptyset \in \mathfrak{A}$
2. aus $A \in \mathfrak{A}$ folgt $\overline{A} \in \mathfrak{A}$
3. aus $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}$ folgt $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}$.

#### Eigenschaften einer $\sigma$-Algebra

1. Es ist $\Omega \in \mathfrak{A}$

**Beweis 1.2.6:**
Nach „1." ist $\emptyset \in \mathfrak{A}$, nach „2.", dass $\overline{\emptyset} = \mathfrak{A}$.
Wegen $\Omega = \overline{\emptyset}$ folgt $\Omega \in \mathfrak{A}$. $\square$

2. Für $n \in \mathbb{N}$ und $\{A_j\}_{j=1}^{n} \subseteq \mathfrak{A}$ gilt $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathfrak{A}$.

**Beweis 1.2.7:**
Setze $A_j := \emptyset$ für $j = n+1, n+2, \ldots$
Dann ist $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}$, $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ und dies gehört wegen „3." zu $\mathfrak{A}$.
$\square$

3. Für jede endliche oder unendliche Folge $\{A_j\} \subseteq \mathfrak{A}$ gilt $\bigcap\limits_j A_j \in \mathfrak{A}$

**Beweis 1.2.8:**

$$\bigcap_j A_j = \overline{\left(\bigcup_j \overline{A_j}\right)}$$

Wegen „2." ist $\overline{A_j} \in \mathfrak{A}$

Wegen Eigenschaft 2 bzw. „3." ist dann $\bigcup\limits_j \overline{A_j} \in \mathfrak{A}$, wegen „2." ist dann auch $\overline{\left(\bigcup_j \overline{A_j}\right)} \in \mathfrak{A}$. □

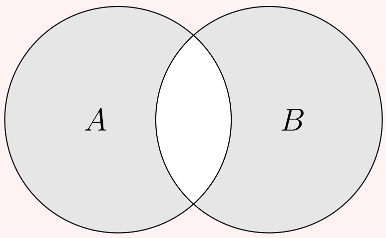
4. Ist $A, B \in \mathfrak{A}$, so ist $A \setminus B \in \mathfrak{A}$.

**Beweis 1.2.9:**
$A \setminus B = A \cap \overline{B}$. Wegen „2." ist $\overline{B} \in \mathfrak{A}$, wegen Eigenschaft 3 ist dann $A \cap \overline{B} \in \mathfrak{A}$.
□

**Nebenbemerkung 5:**

Symmetrische Differenz:

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= (A \cup B) \setminus (B \cap A) \end{aligned}$$

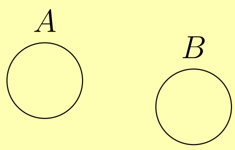


**Definition 1.2.3:**
Eine Funktion $P : \mathfrak{A} \to [0,1]$ auf einer $\sigma$-Algebra $\mathfrak{A}$ heißt Wahrscheinlichkeitsmaß, falls

1. $P(\Omega) = 1$,
2. $P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$

   für jede Folge $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}$ paarweise disjunkter Mengen (das heißt $A_j \cap A_k = \emptyset$ für alle $j,k \in \mathbb{N}$ mit $j \neq k$) gilt.

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \text{ falls } A \cap B = \emptyset$$

   **Bemerkung:** Diese Eigenschaft heißt $\sigma$-Additivität des Wahrscheinlichkeitsmaßes $P$.

### Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten

1. $P(\emptyset) = 0$

**Beweis 1.2.10:**
Mit $A_j := \emptyset$, $j \in \mathbb{N}$, folgt aus „2." der Definition 1.2.3:

$$P(\emptyset) = \sum_{j=1}^{\infty} P(\emptyset)$$

wäre $\sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset) = \infty$, was nicht sein kann, denn links steht mit $P(\emptyset)$ eine endliche Zahl.

Somit ist $P(\emptyset) = 0$.

2. (Additivität von $P$) Für $n \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte $A_j \in \mathfrak{A}, j = 1, \ldots, n$ ist

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$$

**Beweis 1.2.11:**
Setze $A_j := \emptyset, j = n+1, n+2, \ldots$

Dann ist $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen. Es folgt

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) &= P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \\ &\overset{\text{Def.2 „2.“}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) \\ &\overset{\text{Eig.1}}{=} \sum_{j=1}^{n} P(A_j) + 0 \\ &= \sum_{j=1}^{n} P(A_j) \end{aligned}$$

□

3. Ist $A \subseteq B$, $A, B \in \mathfrak{A}$, so ist $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
   Insbesondere ist $P(A) \leq P(B)$.

**Beweis 1.2.12:**
Es ist $B = A \cup (B \setminus A)$ und $A$ und $B \setminus A$ sind disjunkt.

Damit ist

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cup /(B \setminus A) \\ &= P(A) + P(B \setminus A) \end{aligned}$$

wegen Eigenschaft 2, also

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

Wegen $P(B \setminus A) \geq 0$ ist, folgt aus dieser Bezeichnung auch die Ungleichung:

$$\begin{aligned} P(B) - P(A) &\geq 0 \\ P(A) &\leq P(B) \end{aligned}$$

□

4. Für $A \in \mathfrak{A}$ ist $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

**Beweis 1.2.13:**
Benutze Eigenschaft 3 mit $B := \Omega$, sowie $P(\Omega) = 1$

**Bemerkung:**
$P(\Omega \setminus A) = P(\Omega) - P(A)$, also $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

5. Für $A, B \in \mathfrak{A}$ beliebig gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

**Beweis 1.2.14:**
Es ist $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$, und $A \setminus B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ sind paarweise unvereinbar. Wegen Eigenschaft 2 ist dann:

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) = & P\big((A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)\big) \\
= & P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A) \\
= & \big(P(A \setminus B) + P(A \cap B)\big) + \\
& \big(P(B \setminus A) + P(A \cap B)\big) - P(A \cap B) \\
= & P(A) + P(B) - P(A \cap B)
\end{aligned}
$$

$\square$

6. Ist $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}$ eine monoton wachsende Folge (d.h. $A_n \subseteq A_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$), so ist

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

**Beweis 1.2.15:**
Setze $B_1 = A_1$, $B_j := A_j \setminus A_{j-1}$, $j = 2, 3, \ldots$

Dann ist $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen. Außerdem ist $A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Somit ist

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) \overset{\text{Def.2 „2.“}}{=} \sum_{j=1}^{n} \text{irgendwas} = \lim_{n \to \infty} P\left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

$\square$

7. Ist $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}$ eine monoton fallende Folge (d.h. $A_n \supseteq A_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$), so ist

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

**Beweis 1.2.16:**
Ist $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, so ist $\{\overline{A_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Außerdem ist $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \overline{\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}\right)}$ somit ist

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= P\left(\overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}\right)}\right) \\
&= 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}\right) \\
&\overset{\text{Eig } 6}{=} 1 - \lim P(\overline{A_n}) \\
&= 1 - \lim(1 - P(A_n)) \\
&= \lim P(A_n)
\end{aligned}$$

□

8. Ist $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}$ eine unendliche Folge von Ereignissen, so gilt:
$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$$

**Beweis 1.2.17:**
Setze $B_1 := A_1,\ B_j := A_j \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{j-1} A_k,\ j = 2, 3, \ldots$

Dann ist $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}$, die Ereignisse $B_j, j \in \mathbb{N}$ sind paarweise unvereinbar, und es ist
$$\bigcup_{k=1}^{j} B_k = \bigcup_{k=1}^{j} A_k,\ j = 1, 2, \ldots$$
als auch
$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$
Damit ist
$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$$

□

## 1.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

### 1.3.1 Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit und Multiplikationssatz

Zusätzliche Informationen über ein Zufallsexperiment, zum Beispiel die Information, dass ein gewisses Ereignis $A$ eingetreten ist, können die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse verändern. Dies kann mit dem folgenden Begriff beschrieben werden.

●

**Definition 1.3.1:**
Seien $A, B \in \mathfrak{A}$ und $P(A) > 0$. Dann heißt

$$P(B \,|\, A) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit von $B$ unter der Bedingung, dass $A$ eingetreten ist (*kurz:* …unter der Bedingung $A$).

?

**Beispiel 1.3.1:**
$A$ – Würfeln einer Primzahl
$B$ – Würfeln einer geraden Zahl

$$P(B \,|\, A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

Unmittelbar aus dieser Definition folgt der Multiplikationssatz:

!

**Satz 1.3.1** (Multiplikationssatz)**:**
Sind $A, B \in \mathfrak{A}$ mit $P(A) > 0$, so ist

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \,|\, A)$$

?

**Beispiel 1.3.2:**
Eine Warenlieferung aus 1000 Teilen enthalte 100 defekte. Der Lieferung werden zwei Teile (ohne Zurücklegen) entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide defekt sind?

$A$ – erstes Teil ist defekt,
$B$ – zweites Teil ist defekt

gesucht ist $P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = \frac{100}{1000} \cdot \frac{99}{999} \approx 0{,}0099$$

**Verallgemeinerung des Multiplikationssatzes auf $n$ Ereignisse,** $n \in \mathbb{N}; n \geq 2$

Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ mit $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$.
Dann ist

$$\begin{aligned} &P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \\ &\quad = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}). \end{aligned}$$

**Beweis 1.3.1** (vollständige Induktion über $n$)**:**
**Induktionsanfang $\mathbf{n = 2}$:** bereits bekannt (Multiplikationssatz)
**Induktionsvoraussetzung:** Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, für das gilt:

$$\begin{aligned} &P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \\ &\qquad P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \end{aligned}$$

**Induktionsbehauptung: $\mathbf{n = n + 1}$:**

$$\begin{aligned} &P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}) = \\ &\qquad P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \end{aligned}$$

**Induktionsbeweis:**

$$\begin{aligned} &P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}) \\ =&P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n) \cdot P(A_{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n) \\ =&P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \\ &\cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \cdot P(A_{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n) \end{aligned}$$

?

**Beispiel 1.3.3** (Fortsetzung vom Beispiel 1.3.2)**:**
Es werden der Lieferung nun 4 Teile (ohne Zurücklegen) entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten beiden defekt und das dritte und vierte

nicht defekt sind?

$A_1$ – erstes Teil defekt
$A_2$ – zweites Teil defekt
$A_3$ – drittes Teil nicht defekt
$A_4$ – viertes Teil nicht defekt
gesucht: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
&= \frac{100}{1000} \cdot \frac{99}{999} \cdot \frac{900}{998} \cdot \frac{899}{997} \\
&= \frac{148335}{18407611}
\end{aligned}$$

▶ **Bemerkung 1.3.1:**
Die bedingte Wahrscheinlichkeit ist bezüglich der ersten Komponente ein Wahrscheinlichkeitsmaß, das heißt, für $A \in \mathfrak{A}$ und $P(A) > 0$ hat die Funktion $\mathfrak{A} \to B \to P(B|A)$ alle Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes, zum Beispiel die $\sigma$-Additivität, die endliche Additivität und so weiter. Es gilt deshalb zum Beispiel $P(B|A) = 1 - P(\overline{B}|A)$
Bezüglich der zweiten Komponente (das heißt bezüglich $A$) ist aber die bedingte Wahrscheinlichkeit im allgemeinen kein Wahrscheinlichkeitsmaß.

### 1.3.2 Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

**Definition 1.3.2:**
Zwei Ereignisse $A, B \in \mathfrak{A}$ heißen stochastisch unabhängig, falls

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

ist.
Seien $A, B \in \mathfrak{A}$ stochastisch unabhängig mit $P(A) > 0$. Dann ist

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$$

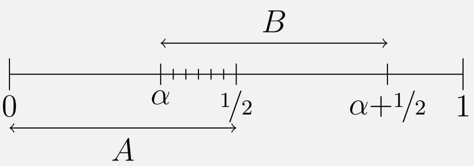
►

**Nebenbemerkung 6:**

$$
\begin{aligned}
\text{unabhängig} &\Rightarrow P(B|A) = P(B) \\
&\Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \\
&\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)
\end{aligned}
$$

?

**Beispiel 1.3.4** (Zufallsexperiment)**:**
Zufällige Auswahl eines Punktes aus $[0, 1]$
$A$ – Punkt gehört zu $[0, 1/2]$.
Für $\alpha \in [0, 1/2]$ sei
$B_\alpha$ – Punkt gehört zu $[\alpha, \alpha + 1/2]$.
Für welche Werte von $\alpha$ sind $A$ und $B_\alpha$ stochastisch unabhängig?
Äquivalent: Für welche Werte von $\alpha$ ist $P(A \cap B_\alpha) = P(A) \cdot P(B_\alpha)$?




Es ist

$$
\begin{aligned}
P(A) = P(B_\alpha) &= 1/2 \quad \text{und} \\
P(A \cap B_\alpha) &= 1/2 - \alpha: \\
\frac{1}{2} - \alpha = 1/2 \cdot 1/2 \qquad &\Leftrightarrow \qquad \alpha = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

da das dem Ereignis $A \cap B_\alpha$ entsprechende Intervall das Intervall $[a, 1/2]$ ist.
Damit

$$P(A \cap B_\alpha) = P(A) \cdot P(B_\alpha)$$

gilt, ist also notwendig und hinreichend, dass

$$1/2 - \alpha = 1/2 \cdot 1/2$$

ist. Das ist äquivalent zu $\alpha = 1/4$
$\Rightarrow$ Die Ereignisse $A$ und $B_\alpha$ sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn $\alpha = 1/4$ ist.

!

**Satz 1.3.2:**
Sind die Ereignisse $A$ und $B$ stochastisch unabhängig, so sind auch $\overline{A}$ und $B$ beziehungsweise $A$ und $\overline{B}$ bzw. $\overline{A}$ und $\overline{B}$ stochastisch unabhängig.

**Beweis 1.3.2:**
Es genügt zu zeigen, dass $\overline{A}$ und $B$ stochastisch unabhängig sind, wenn $A$ und $B$ stochastisch unabhängig sind.
Es ist aber

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap B) &= P(B \setminus A) \\ &= P(B \setminus (A \cap B)) && \mid \text{Eig. 3 v. Wahrscheinlichkeiten:} \\ &= P(B) - P(A \cap B) && \mid \text{stochast. Unabh. von } A \text{ und } B\text{:} \\ &= P(B) - P(A) \cdot P(B) \\ &= P(B)[1 - P(A)] && \mid \text{Eigenschaft 4:} \\ &= P(B) \cdot P(\overline{A}) \end{aligned}$$

□

**Definition 1.3.3** (stochastische Unabhängigkeit)**:**
Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
Die $n$ Ereignisse $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ heißen **stochastisch unabhängig** (oder vollständig stochastisch unabhängig), falls für jede mindestens zweielementige Teilmenge $J$ von $\{1, \ldots, n\}$ die Gleichung

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

gilt. Sie heißen **paarweise stochastisch unabhängig**, falls für jede genau zweielementige Teilmenge $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ diese Gleichung gilt.
Eine Familie $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ von Ereignissen heißt **stochastisch unabhängig** (oder vollständig stochastisch unabhängig), falls jede endliche Teilfamilie stochastisch unabhängig ist.

?

**Beispiel 1.3.5:**
Seien $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{A}$. Indexmenge $\{1,2,3\}$

| | | |
|---|---|---|
| Zweielementige Teilmenge | $\{1,2\}:$ | $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$ |
| –"– | $\{1,3\}:$ | $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3)$ |
| –"– | $\{2,3\}:$ | $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3)$ |
| Dreielementige Teilmenge | $\{1,2,3\}:$ | $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$ |

Alle zweielementigen Teilmengen: $\Rightarrow$ paarweise stochastische Unabhängigkeit
Alle diese Teilmengen: $\Rightarrow$ stochastische Unabhängigkeit

?

**Beispiel 1.3.6:**
Eine ideale Münze werde zwei mal geworfen.
Wir betrachten folgende zufällige Ereignisse:
- $A$ – beim ersten Wurf Wappen
- $B$ – beim zweiten Wurf Wappen
- $C$ – bei beiden Würfen das gleiche Wurfergebnis

4 Ergebnisse, die den 4 Wurfserien $WW$, $WZ$, $ZW$, $ZZ$ entsprechen.

$$A = \{WW, WZ\},$$
$$B = \{WW, ZW\},$$
$$C = \{WW, ZZ\}$$
$$\Rightarrow P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$
$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{WW\}$$
$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$$
$$A \cap B \cap C = \{WW\}$$
$$\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$$

Daraus folgt, dass die Gleichungen

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$
$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C),$$
$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

gelten.
Die Ereignisse $A$, $B$, $C$ sind also paarweise stochastisch unabhängig.
Die Gleichung

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

gilt allerdings nicht.
Die Ereignisse $A$, $B$, $C$ sind also *nicht* vollständig stochastisch unabhängig.

$$\underbrace{\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}}_{=2^n} - \binom{n}{1} - \binom{n}{0} = 2^n - n - 1$$

►

**Nebenbemerkung 7:**
Zufällige Ereignisse in der Praxis, die sich gegenseitig nicht beeinflussen werden häufig als stochastisch unabhängige Ereignisse modelliert.
Insbesondere: Bei mehrmaliger Versuchsdurchführung, die sich auf unterschiedliche Versuche beziehen, üblicherweise als stochastisch unabhängig angesehen.
Die Entscheidung, ob sich praktische Ereignisse gegenseitig beeinflussen oder nicht ist oft eine Ermessensfrage.

### 1.3.3 Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

**Definition 1.3.4** (vollständiges Ereignissystem)**:**
Eine endliche oder unendliche Folge

$$\{A_j\}_{j\in J} \subseteq \mathfrak{A}$$

von Ereignissen heißt ein **vollständiges Ereignissystem**, falls

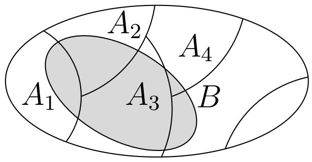
$$\bigcup_{j\in J} A_j = \Omega \text{ und } A_j \cap A_k = \emptyset$$

für $j, k \in J, j \neq k$.

!

**Satz 1.3.3** (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)**:**
Sei $\{A_j\}_{j\in J}$ ein vollständiges Ereignissystem mit $P(A_j) > 0, j \in J$.
Dann gilt für $B \in \mathfrak{A}$:

$$P(B) = \sum_{j\in J} P(A_j) \cdot P(B \mid A_j)$$




$P(B) = \sum_{j\in J} P(B \cap A_j) = \sum_{j\in J} P(A_j)P(B|A_j)$

**Beweis 1.3.3:**
Sei $B \in \mathfrak{A}$. Dann ist

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) = \bigcup_{j\in J}(B \cap A_j)$$

und außerdem ist

$$((B \cap A_j) \cap (B \cap A_k)) \subseteq (A_j \cap A_k) = \emptyset$$

falls $j \neq k$. Somit ist nach Axiom (ii) für Wahrscheinlichkeitsmaße

$$P(B) = \sum_{j\in J} P(B \cap A_j)$$

Wegen des Multiplikationssatzes ist

$$P(B \cap A_j) = P(B) \cdot P(B|A_j) j \in J$$

also

$$P(B) = \sum_{j\in J} \cdot P(B|A_j)$$

$\square$

**Wichtiger Spezialfall:**
Falls $P(A) > 0$ und $P(\overline{A}) > 0$, so ist

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A})$$

für jedes $B \in \mathfrak{A}$

?

**Beispiel 1.3.7:**
Auf zwei verschiedenen Anlagen werde ein gewisses Produkt gefertigt. Die erste Anlage liefert 20% der Gesamtproduktion bei einem Ausschussanteil von 10%, die Zweite liefert 80% der Gesamtproduktion bei einem Ausschussanteil von 5%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig aus der Gesamtproduktion ausgewähltes Produkt Ausschuss ist?
Aus der Gesamtproduktion wird zufällig ein Produkt ausgewählt.

$A_1$ – Produkt stammt von der ersten Anlage
$A_2$ – Produkt stammt von der zweiten Anlage
$B$ – Produkt ist Ausschuss

gesucht: $P(B)$

$\{A_1, A_2\}$ ist ein vollständiges Ereignissystem, denn $A_1 \cup A_2 = \Omega$ und $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
Somit ist

$$\left.\begin{array}{l} P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) \\ \text{Es ist aber } P(A_1) = 0{,}2.\ P(A_2) = 0{,}8 \\ P(B|A_1) = 0{,}1.\ P(B|A_2) = 0{,}05 \end{array}\right\} \Rightarrow P(B) = 0{,}06.$$

?

**Beispiel 1.3.8:**

1. In einer Urne befinden sich 6 rote und 4 schwarze Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln zufällig herausgenommen (ohne Zurücklegen). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

   a) die erste Kugel,
   b) die zweite Kugel

   rot ist?

   a) $p = \frac{6}{10} = 0{,}6$ ist nach klassischer Wahrscheinlichkeitsdefinition offensichtlich

   b) $A_1$ erste gezogene Kugel ist rot

      $A_2$ erste gezogene Kugel ist schwarz

      $\{A_1, A_2\}$ bilden ein vollständiges Ereignissystem.

      $$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2)$$

      nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit.

Es ist

$$P(A_1) = \frac{6}{10} \qquad P(A_2) = \frac{4}{10}$$
$$P(B|A_1) = \frac{5}{9} \qquad P(B|A_2) = \frac{6}{9}\text{ , damit}$$
$$P(B) = \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9} + \frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9} = \frac{3}{5}.$$

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste gezogene Kugel rot war, wenn die zweite gezogene Kugel rot ist. $\rightsquigarrow$ gesucht $P(A_1|B)$. Nach dem Satz von Bayes:

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)\cdot P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{9}$$

?

**Beispiel 1.3.9:**
Ein Vertreter kauft jedes Jahr einen PKW des Typs 1 oder des Typs 2. Die Wahrscheinlichkeit, dass er im nächsten Jahr den Typ wählt, den er zur Zeit hat, sei gleich $p$.
Zur Zeit fahre er den Typ 1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er im übernächsten Jahr wieder den Typ 1 fährt?

$B$ – Vertreter fährt im übernächsten Jahr den Typ 1

ges.: $P(B)$

$A_1$ – Vertreter fährt im nächsten Jahr den Typ 1

$A_2$ – Vertreter fährt im nächsten Jahr den Typ 2

$\{A_1, A_2\}$ ist ein vollständiges Ereignissystem.
Es ist

$$P(A_1) = p \qquad P(A_2) = 1-p$$
$$P(B|A_1) = p \qquad P(B|A_2) = 1-p\text{, somit}$$
$$P(B) = p\cdot p + (1-p)\cdot(1-p) = 2p^2 + 1 - 2p$$

!

**Satz 1.3.4** (Satz von Bayes)**:**
Sei $\{A_j\}_{j\in J}$ ein vollständiges Ereignissystem mit $P(A_j) > 0$, $j \in J$.
Sei $B \in \mathfrak{A}$ mit $P(B) > 0$, dann ist

$$\begin{aligned} P(A_j|B) &= \frac{P(A_j)\cdot P(B|A_j)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_j)\cdot P(B|A_j)}{\sum\limits_{k\in J} P(A_k)\cdot P(B|A_k)},\ j\in J \end{aligned}$$

**Beweis 1.3.4:**
Nach dem Multiplikationssatz ist einerseits

$$P(A_j \cap B) = P(B)\cdot P(A_j|B)$$

und andererseits

$$P(B \cap A_j) = P(A_j)\cdot P(B|A_j)$$

Da die beiden linken Seiten gleich sind, müssen auch die rechten Seiten gleich sein, das heißt

$$\begin{aligned} P(B)\cdot P(A_j|B) &= P(A_j)\cdot P(B|A_j) \text{ oder} \\ P(A_j|B) &= \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{P(B)}, j\in J \end{aligned}$$

Setze nun für $P(B)$ den Ausdruck

$$P(B) = \sum_{k\in J} P(A_k)P(B|A_k)$$

aus dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit ein.

$\square$

?

**Beispiel 1.3.10** (Fortsetzung von Beispiel 1.3.7)**:**
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Produkt auf der ersten Anlage gefertigt wurde, wenn es Ausschuss ist?
gesucht: $P(A_1 \mid B)$
Nach Satz von Bayes ist

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B)} \\ &= \frac{0{,}1 \cdot 0{,}2}{0{,}06} \\ &\approx 0{,}333 \end{aligned}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das zufällig ausgewählte Produkt auf der ersten Anlage gefertigt werde, wenn es kein Auschuss ist?
gesucht: $P(A_1 \mid \overline{B})$

$$\begin{aligned} P(A_1|\overline{B}) &= \frac{P(\overline{B}|A_1) \cdot P(A_1)}{P(\overline{B})} \\ &= \frac{(1 - P(B \mid A_1)) \cdot P(A_1)}{1 - P(B)} \\ &= \frac{0{,}9 \cdot 0{,}1}{0{,}94} \\ &\approx 0{,}19 \end{aligned}$$

?

**Beispiel 1.3.11** (Fortsetzung von Beispiel 1.3.8)**:**
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel rot war, wenn die zweite Kugel rot ist?
gesucht: $P(A_1|B)$

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B)} \\ &= \frac{{}^5\!/_9 \cdot {}^6\!/_{10}}{{}^6\!/_{10}} \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

# 2 Zufallsgrößen

## 2.1 Zufallsgröße und ihre Verteilungsfunktion

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

**Definition 2.1.1:**
Eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ von der Menge $\Omega$ der Ergebnisse in die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen heißt (reelle) Zufallsgröße, falls die folgende Bedingung erfüllt ist:

$(*)$ Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gehört das Urbild $X^{-1}((-\infty; x])$ des Intervalls $(-\infty; x]$, das heißt die Menge

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty; x]\}$$

zur $\sigma$-Algebra $\mathfrak{A}$.

**Bemerkung 2.1.1:**
Die Eigenschaft $(*)$ heißt Messbarkeit der Funktion $X$.

**Definition 2.1.2:**
Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsgröße, die durch

$$F_X(x) := P\Big(X^{-1}\big((-\infty, x]\big)\Big) = P(X \leq x), \; x \in \mathbb{R}$$

definierte Funktion $F_X =: F$ heißt Verteilungsfunktion von $X$.
Ist $F_X$ die Verteilungsfunktion von $X$, so schreibt man manchmal $X \sim F_X$.

**Satz 2.1.1:**
Sei $F$ die Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße $X$. Dann gilt:

(i) $0 \leq F(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(ii) $F$ ist monoton wachsend, das heißt $F(x_1) \leq F(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$

(iii) $F$ ist rechtsseitig stetig

(iv) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \ \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1.$

**Beweis 2.1.1:**

(i) folgt aus $F(x) := P(X \leq x)$ und $0 \leq P(A) \leq 1$ für jedes $A \in \mathfrak{A}$.

(ii) Ist $x_1 \leq x_2$, so ist $(X \leq x_1) \subseteq (X \leq x_2)$ und damit

$$F(x_1) = P(X \leq x_1) \underset{\uparrow}{\leq} P(X \leq x_2) = F(x_2)$$

(Eigenschaft 3 von Wahrscheinlichkeiten)

**Bemerkung 2.1.2:**
Die Eigenschaften (i) bis (iv) aus Satz 2.1.1 charakterisieren Verteilungsfunktionen, das heißt, zu jeder Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (i) bis (iv) existiert eine Zufallsgröße $X$, deren Verteilungsfunktion $F_X$ mit $F$ übereinstimmt ($F_x = F$).

Mit Hilfe von $F_X$ lassen sich verschiedene Wahrscheinlichkeiten, die $X$ betreffen, ausrechnen.

**Nebenbemerkung 8:**

$$(a < X \leq b) := X^{-1}\left(]a;b]\right)$$

**Satz 2.1.2:**
Sei $F$ Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße $X$, und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann gilt:

(i) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

(ii) $P(X = a) = F(a) - F(a - 0)$, wobei $F(a - 0)$ den linksseitigen Grenzwert von $F$ an der Stelle $a$ bezeichnet.

(iii) $P(a < X < b) = F(b - 0) - F(a)$

(iv) $P(a \leq X < b) = F(b - 0) - F(a - 0)$

(v) $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a - 0)$

**Beweis 2.1.2:**

(i)
$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= P\left((X \leq b) \setminus (X \leq a)\right) \\ &= P(X \leq b) - P(X \leq a) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

(ii) Wir schreiben das Ereignis $(X = a)$ als Durchschnitt

$$(X = a) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(a - \frac{1}{n} < X \leq a\right)$$

Die Ereignisse $(a - \frac{1}{n} < X \leq a)$, $n \in \mathbb{N}$, bilden darüber hinaus eine monoton fallende Folge. Damit ist dann

$$\begin{aligned} F(a) - F(a-0) &= F(a) - \lim_{n\to\infty} F\left(a - \frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(F(a) - F\left(a - \frac{1}{n}\right)\right) \\ &\overset{\text{(i)}}{=} \lim_{n\to\infty} P\left(a - \frac{1}{n} < X \leq a\right) \\ \text{Eigenschaft } \alpha \text{ von Wahrscheinlichkeiten} &= P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(a - \frac{1}{n} < X \leq a\right)\right) \\ &= P(X = a) \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P\left((a < X \leq b) \setminus (X = b)\right) \\ &= P(a < X \leq b) - P(X = b) \\ &\overset{\text{(i),(ii)}}{=} F(b) - F(a) - (F(b) - F(b-0)) \\ &= F(b-0) - F(a) \end{aligned}$$

(iv)
$$\begin{aligned} P(a \leq X < b) &= P((a < X < b) \cup (X = a)) \\ &= P(a < X < b) + P(X = a) \\ &\overset{\text{(iii),(ii)}}{=} F(b-0) - F(a) + F(a) - F(a-0) \\ &= F(b-0) - F(a-0) \end{aligned}$$

(v)
$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P((a \leq X < b) \cup (X = b)) \\ &= P(a \leq X < b) + P(X = b) \\ &\overset{\text{(iv),(ii)}}{=} F(b-0) - F(a-0) + F(b) - F(b-0) \\ &= F(b) - F(a-0) \end{aligned}$$

□

Falls $F$ in $a$ stetig ist, und das ist bis auf höchstens abzählbar unendlich viele Punkte überall der Fall, so ist $F(a+0) = F(a) = F(a-0)$.

$X \to 2X$, $X \to g(X)$
: Ist $X$ eine Zufallsgröße und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so kann man die Nacheinanderausführung $g(X)$ bilden. Im Allgemeinen kann dabei die Messbarkeit zerstört werden, das heißt auch wenn $X$ eine Zufallsgröße ist, so braucht $g(X)$ im Allgemeinen keine Zufallsgröße mehr zu sein.

Es gilt aber die folgende Aussage:

!

**Satz 2.1.3:**
Seien $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsgröße und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist auch $g(X)$ eine Zufallsgröße.

Manchmal ist es von Interesse, die Verteilungsfunktion der Zufallsgröße $g(X)$ mit Hilfe der als bekannt vorausgesetzten Verteilungsfunktion von $X$ auszudrücken.

?

**Beispiel 2.1.1:**
Die Zufallsgröße $X$ besitze eine gewisse Verteilungsfunktion $F_X$. Die Verteilungsfunktion $F_Y$ der Zufallsgröße $Y := 3X + 4$ soll durch $F_X$ ausgedrückt werden.

$g(x) = 3x + 4$, $x \in \mathbb{R}$
Sei $x \in \mathbb{R}$ Dann ist

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P(3X + 4 \leq x) \\ &= P\left(X \leq \frac{x-4}{3}\right) \\ &= F_X\left(\frac{x-4}{3}\right) \end{aligned}$$

►

**Bemerkung 2.1.3:**
In manchen Lehrbüchern, zum Beispiel bei Maibaum, wird die Verteilungsfunktion nicht durch $x \mapsto P(X \leq x)$ sondern durch $x \mapsto P(X < x)$, $x \in \mathbb{R}$ eingeführt. Sie ist dann linksseitig stetig anstelle von rechtsseitig stetig und die Formeln aus Satz 2.1.2 ändern sich entsprechend.

## 2.2 Diskrete und stetige Zufallsgrößen

●

**Definition 2.2.1:**
Eine Zufallsgröße heißt diskret, wenn sie endlich viele oder abzählbar unendlich viele verschiedene Werte annehmen kann.
Beschreibung einer diskreten Zufallsgröße $X$ möglich durch Angabe der Werte $x_j$, die $X$ annehmen kann, sowie durch die Angabe der Einzelwahrscheinlichkeiten

$$p_j := P(X = x_j),\ j \in J$$

wobei $J$ eine endliche oder abzählbar unendliche Menge ist.

Diese Angaben sind äquivalent zur Angabe der Verteilungsfunktion $F_X$ der diskreten Zufallsgröße $X$.

!

**Satz 2.2.1:**
Eine diskrete Zufallsgröße nehme paarweise verschiedene Werte $x_j$ mit den Wahrscheinlichkeiten

$$p_j = P(X = x_j),\ j \in J$$

und sonst keine weiteren Werte an. Dann gelten folgende Aussagen:

(i) $p_j \geq 0,\ j \in J,\ \sum\limits_{j \in J} p_j = 1$

(ii) $F_X(x) = \sum\limits_{j \in J : x_j \leq x} p_j$, wobei die Summation über alle $j \in J$ mit $x_j \leq x$ zu erstrecken ist

(iii) $F_X$ ist eine Treppenfunktion, die Sprünge genau in den Punkten $x_j$ mit Sprunghöhen $p_j$ hat, $j \in J$.

**Beweis 2.2.1:**

1. ist offensichtlich.
2. $$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \le x) \\ &= P\left(\bigcup_{j\in J: x_j \le x} (X = x_j)\right) \\ &= \sum_{j\in J: x_j \le x} P(X = x_j) \\ &= \sum_{j\in J: x_j \le x} p_j \end{aligned}$$

   $X : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar; $F_X(x) := P(X \le x), x \in \mathbb{R}$.
3. Ist $x = x_j$ für ein $j \in J$, so gilt

   $$p_j = P(X = x_j) \underset{\uparrow}{=} F_X(x_j) - F(x_j - 0)$$

   Eig. (ii) in Satz 2 aus 2.1

   also hat $F_X$ in $x_j$ einen Sprung der Höhe $p_j$. Ist $x \neq x_j$ für alle $j \in J$, so ist

   $$0 = P(X = x) = F_X(x) - F_X(x - 0)$$

   also ist $F_X$ stetig in $x$. □

?

**Beispiel 2.2.1:**
Ein idealer Würfel werde zweimal geworfen. Die Zufallsgröße $X$ gebe das Maximum der beiden Augenzahlen an.
Die Zufallsgröße $X$ kann die Werte 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 annehmen. Es können die Wurfergebnisse $(1,1),(1,2),\dots,(1,6),(2,1),(2,2),\dots,(2,6),\dots,(6,1),\dots,(6,6)$ auftreten.
Es existieren also 36 mögliche Fälle.
Günstige Fälle:

$$\begin{array}{lll}
X=1: & (1,1) \text{ als einziger günstiger Fall} & \Rightarrow P(X=1)={}^1/_{36}, \\
X=2: & (1,2),\ (2,1),\ (2,2) & \Rightarrow P(X=2)={}^3/_{36}, \\
X=3: & (1,3),\ (2,3),\ (3,3),\ (3,2),\ (3,1) & \Rightarrow P(X=3)={}^5/_{36}, \\
X=4: & (1,4),\ \dots,\ (4,4),\ \dots,\ (4,1) & \Rightarrow P(X=4)={}^7/_{36}, \\
X=5: & (1,5),\ \dots,\ (5,5),\ \dots,\ (5,1) & \Rightarrow P(X=5)={}^9/_{36}, \\
X=6: & (1,6),\ \dots,\ (6,6),\ \dots,\ (6,1) & \Rightarrow P(X=6)={}^{11}/_{36}
\end{array}$$

Die Verteilungsfunktion $F_X$ nimmt für $x<1$ den Wert 0 an, da für keinen der von $X$ angenommenen Werte $x_j$ die Ungleichung $x_j \le x$ gilt. Für $x=1$ ist

$$F_X(1) = P(X \le 1) = P(X=1) = \frac{1}{36}$$

Ist $1 < x < 2$, so ist

$$F_X(x) = P(X=1) = \frac{1}{36}$$

Bei $x=2$ kommt dann die Wahrscheinlichkeit

$$P(X=2) = \frac{3}{36}$$

hinzu, also ist

$$F_X(2) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} = \frac{4}{36}$$

und so weiter ...

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<1 \\ {}^1/_{36}, & 1 \le x < 2 \\ {}^4/_{36}, & 2 \le x < 3 \\ {}^9/_{36}, & 3 \le x < 4 \\ {}^{16}/_{36}, & 4 \le x < 5 \\ {}^{25}/_{36}, & 5 \le x < 6 \\ 1, & 6 \le x \end{cases}$$

**Definition 2.2.2:**
Eine Zufallsgröße heißt stetig, falls ihre Verteilungsfunktion $F$ überall stetig, bis auf eventuell endlich viele Ausnahmepunkte überall differenzierbar und ihre Abteilung $F'$ integrierbar ist. (In den eventuell vorhandenen Ausnahmepunkten wird $F'$ gleich 0 gesetzt.)
Die Ableitung $F'$ wird mit $F' =: f$ bezeichnet und heißt Verteilungsdichte der Zufallsgröße.

Da die Verteilungsfunktion $F$ einer stetigen Zufallsgröße stetig ist, folgen aus Satz 2.1.2 in Abschnitt 2.1 die folgenden Beziehungen:

1. $P(X = a) = 0$ für jedes $a \in \mathbb{R}$, das heißt, eine stetige Zufallsgröße nimmt jeden konkreten Wert $a$ mit Wahrscheinlichkeit 0 an.

2. $$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= P(a < X < b) \\ &= P(a \leq X < b) \\ &= P(a \leq X \leq b) \\ &= F(b) - F(a) \text{ für } a, b \in \mathbb{R},\ a < b \end{aligned}$$

   Aus den Bedingungen von Definition 2.2.2 folgt die Beziehung

   $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$
   $$\left( = F(y)\big|_{-\infty}^{x} = F(x) - F(-\infty) = F(x)\right)$$

   Das heißt bei einer stetigen Zufallsgröße ist die Angabe der Verteilungsfunktion $F$ äquivalent zur Angabe der Verteilungsdichte $f$ Üblicherweise wird $f$ angegeben. Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten erfordert dann häufig eine Integration, zum Beispiel:

   $$P(a < X \leq b) = \int_{a}^{b} f(y)dy \text{ mit } a, b \in \mathbb{R},\ a < b$$
   $$\left( = F(y)\big|_{a}^{b} = F(b) - F(a)\right)$$

!

**Satz 2.2.2:**
Sei $f$ die Verteilungsdichte einer stetigen Zufallsgröße.
Dann ist $f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$, $f$ ist (uneigentlich) integrierbar auf $\mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy &= F(\infty) - F(-\infty) \\ &= 1 - 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

**Beweis 2.2.2:**
Die Integrierbarkeit von $f$ ist eine Folgerung von Definition 2.2.2. Die anderen beiden Aussagen folgen unmittelbar aus dem Zusammenhang

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy, x \in \mathbb{R}$$

zwischen $F$ und $f$ und den entsprechenden Eigenschaften für $F$. $\square$

Die Eigenschaften aus Satz 2.2.2 charakterisieren Verteilungsdichten, das heißt, zu einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften aus Satz 2.2.2 existiert eine Zufallsgröße deren Verteilungsdichte $f$ ist.

## 2.3 Erwartungswert und Varianz

**Definition 2.3.1:**
Sei $X$ eine diskrete Zufallsgröße, die genau die Werte $x_j$ mit $p_j = P(X = x_j)$, $j \in J$, annimmt. Falls die Reihe $\sum_{j\in J} x_j P_j$ absolut konvergiert, so heißt

$$EX = \sum_{j \in J} x_j p_j$$

Erwartungswert von $X$.
Weiter heißen

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2(X) = D^2X := \sum_{j\in J}(x_j - EX)^2 p_j$$

die Varianz oder Streuung und

$$\sigma(X) := \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

die Standardabweichung von $X$.

**Definition 2.3.2:**
Sei $X$ eine stetige Zufallsgröße mit Verteilungsdichte $f$. Falls $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$ ist, so heißt

$$EX := \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Erwartungswert von $X$.
Weiter heißen

$$\operatorname{Var}(X) = \sigma^2(X) = D^2 X := \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x) dx$$

Varianz oder Streuung und

$$\sigma(X) := \sqrt{\operatorname{Var}(X)}$$

Standardabweichung von $X$.

**Satz 2.3.1:**
Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Ist $X$ diskret wie in Definition 2.3.1 und konvergiert die Reihe $\sum_{j \in J} g(x_j) p_j$ absolut, so ist

$$Eg(X) = \sum_{j \in J} g(x_j) p_j$$

Ist $X$ stetig wie in Definition 2.3.2 und ist $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x) dx < \infty$, so ist

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

**Satz 2.3.2:**
Sei $X$ eine diskrete oder stetige Zufallsgröße, für die $EX$ definiert ist. Dann gilt:

1. $E(aX + b) = aEX + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$
2. ist $X \geq 0$, so ist $EX \geq 0$
3. $\operatorname{Var}(X) = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$
4. $\operatorname{Var}(aX + b) = a^2 \operatorname{Var}(X) + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$

**Beweis 2.3.1:**

(i) Wählt man in Satz 2.3.1 $g(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$, so ergibt sich für eine diskrete Zufallsgröße $X$:

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= \sum_{j\in J}(ax_j+b)p_j \\ &= a\sum_{j\in J}x_jp_j + b\sum_{j\in J}p_j \\ &= aEX + b \end{aligned}$$

und für eine stetige Zufallsgröße analog:

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= \int_{-\infty}^{\infty}(ax+b)f(x)dx \\ &= a\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition 1 und (i) aus Satz 1 in 2.1}}}{=} aEX + b \end{aligned}$$

Ist $X$ stetig, mit Verteilungsfunktion, so ist:

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= \int_{-\infty}^{\infty}(ax+b)f(x)dx \\ &= a\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition 1 und Satz 2 in 2.2}}}{=} aEX + b \end{aligned}$$

(ii) Ist $X$ diskret und $X \geq 0$, so ist $x_j \geq 0$, $j \in J$. Damit ist

$$EX = \sum_{j\in J}x_jp_j \geq 0$$

Ist $X$ stetig mit Verteilungsdichte $f$ und $X \geq 0$, so ist $f(x) = 0$ für $x < 0$, also ist

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{0}xf(x)dx + \int_{0}^{\infty}xf(x)dx \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ f(x)=0 \text{ für } x<0}}{=} \int_{-\infty}^{0}0dx + \int_{0}^{\infty}xf(x)dx \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

da der Integrand im zweiten Integral nichtnegativ und das erste Integral gleich 0 ist.

(iii) Wähle $g(x) := (x - EX)^2$, $x \in \mathbb{R}$ und benutze Satz 1.

(iv)

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(aX+b) &\overset{\text{(iii)}}{=} E(aX+b-E(aX+b))^2 \\
&\overset{\text{(i)}}{=} E(aX+b-aEX-b)^2 \\
&= E(aX-aEX)^2 \\
&= E(a^2(X-EX)^2) \\
&\overset{\text{(i)}}{=} a^2 E(X-EX)^2 \\
&\overset{\text{(iii)}}{=} a^2 \operatorname{Var}(X)
\end{aligned}$$

► **Bemerkung 2.3.1:**
Der Erwartungswert hat auch die folgenden wichtigen Eigenschaften. Seien $X$ eine diskrete oder stetige Zufallsgröße auf $\Omega$ und $Y$ eine diskrete oder stetige Zufallsgröße auf $\Omega$, wobei $EX$ und $EY$ existieren sollen. Dann gilt:

(i) $E(X+Y) = EX + EY$

(ii) ist $X \leq Y$, so ist $EX \leq EY$

Der Beweis von (i) kann leicht mit Hilfe allgemeiner Integrationstheorie geführt werden.
Die Beziehung (ii) folgt aus

$$\begin{aligned}
EY - EX &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{(i) aus Satz 2}}}{=} EY + E(-X) \\
&\overset{\text{(i)}}{=} E(Y + (-X)) \\
&= E(Y - X) \geq 0 \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{(ii) aus Satz 2}}}{\geq} 0
\end{aligned}$$

### 2.3.1 Anwendung des Erwartungswerts: Gerechtes Spiel

Ein Spiel ist gerecht, wenn der zu erwartende Gewinn jedes Spielers gleich 0 ist.

?

**Beispiel 2.3.1:**
Eine ideale Münze werde dreimal geworfen. Tritt dabei mindestens einmal Zahl auf, so erhält Spieler 2 von Spieler 1 genau 10€. Andernfalls erhält Spieler 1 von 2 eine gewisse Geldsumme. Wie ist diese zu wählen, damit das Spiel gerecht ist?

$X$ – Gewinn von Spieler 1

Das Spiel ist genau dann gerecht, wenn $EX = 0$ ist, $X$ kann die Werte $-10$ und $x$ annehmen, wobei $x$ der Betrag ist, den Spieler 2 an Spieler 1 zu zählen hätte.

Es ist $X = -10$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{7}{8}$ ($\widehat{=}$ Wurfserien ZZZ, ZZW, ZWZ, ZWW, WZZ, WWZ, WZW)
Es ist $X = x$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$ ($\widehat{=}$ WWW)

$$\Rightarrow EX = -10 \cdot \frac{7}{8} + x \cdot \frac{1}{8} = 0$$
$$\Rightarrow x = 70$$

Der Betrag den Spieler 1 von Spieler 2 im Gewinnfalle erhält, ist gleich 70€ zu wählen, damit das Spiel gerecht ist.

#### Praktische Bedeutung der Varianz

Die Varianz ist ein Maß dafür, wie stark die Werte der Zufallsgröße gestreut sind. Grob gesagt gilt: Je größer die Varianz, desto unpräziser sind die Aussagen, die über die Zufallsgröße gemacht werden können.

## 2.4 Wichtige diskrete Verteilungen

### 2.4.1 Diskrete gleichmäßige Verteilung

Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Zufallsgröße $X$, die genau die $n$ paarweise verschiedenen Werte $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, annimmt, heißt (diskret) gleichmäßig verteilt (auf den Werten $x_1, \ldots, x_n$), falls $P(X = x_j) = \frac{1}{n}, j = 1, \ldots, n$ gilt.

### 2.4.2 Binomialverteilung

Ein gewisses Ereignis $A$ trete bei einem Zufallsexperiment mit Wahrscheinlichkeit $P(A) =: p$ ein. Sei

$$\begin{aligned} q &:= 1 - p \\ &= 1 - P(A) \\ &= P(\overline{A}) \end{aligned}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$.
Das Zufallsexperiment werde $n$ mal ausgeführt, wobei angenommen, dass die einzelnen Versuchsdurchführungen unabhängig voneinander und unter gleichen Bedingungen ablaufen. Die Zufallsgröße $X$ gebe die Anzahl des Eintretens von $A$ bei diesen $n$ Versuchen an.

$$\begin{matrix} p \cdot p \cdot \ldots \cdot p \cdot q \cdot \ldots \cdot q \\ \underbrace{E \;\; E \;\; \ldots \;\; E}_{k \text{ mal}} \;\; \underbrace{N \;\; \ldots \;\; N}_{n-k} \end{matrix}$$

**Definition 2.4.1:**
Eine Zufallsgröße $X$, die genau die $n+1$ Werte $0, 1, \ldots, n$ mit den Wahrscheinlichkeiten

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, k = 0, 1, \ldots, n$$

annimmt, heißt binomialverteilt mit den Parametern $n$ und $p$ oder $B(n; p)$-verteilt. Dabei ist $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$.

**Beweis 2.4.1:**
Die erste Aussage ist trivial. Da die Ereignisse, die sich auf die einzelnen Ausführungen des Zufallsexperimentes beziehen, als stochastisch unabhängig angesehen werden können, ist die Wahrscheinlichkeit für eine konkrete Serie mit genau $k$-maligem Eintreten von $A$ gleich $p^k q^{n-k}$. Die Anzahl solcher Serien ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten, aus $n$ Versuchen $k$ Stück ohne Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen.
Sie ist gleich $\binom{n}{k}$. (vgl. 4. Grundaufgabe der Kombinatorik)

Damit ist

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \; k = 0, 1, \ldots, n$$

□

?

**Beispiel 2.4.1:**
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Samenkorn einer gewissen Radieschensorte keimt, beträgt 95%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 20 Körnern
a) genau 17
b) mindestens 17
keimen?
$X$ – Anzahl der unter 20 Samenkörnern keimenden Körner, ist $B(20; 0{,}95)$, denn $P(A) = 0,95$ für das Ereignis
$A$ – Samenkern keimt

a) $P(X = 17) = \binom{20}{17} 0{,}95^{17} \cdot 0{,}05^3 \approx 0{,}0596$

b)

$$\begin{aligned} P(X \geq 17) &= P(X = 17) + P(X = 18) + P(X = 19) + P(X = 20) \\ &= \binom{20}{17} \cdot 0{,}95^{17} \cdot 0{,}05^3 \\ &+ \binom{20}{18} \cdot 0{,}95^{18} \cdot 0{,}05^2 \\ &+ \binom{20}{19} \cdot 0{,}95^{19} \cdot 0{,}05^1 \\ &+ \binom{20}{20} \cdot 0{,}95^{20} \cdot 0{,}05^0 \\ &\approx 0{,}9841 \end{aligned}$$

?

**Beispiel 2.4.2:**
**Frage von Samuel Pepys an Newton**
Es sind die Wahrscheinlichkeiten der folgenden drei Ereignisse $B, C, D$ zu ermitteln.
$B$ - mindestens eine Sechs beim Wurf mit 6 idealen Würfeln,
$C$ - mindestens zwei Sechs beim Wurf mit 12 idealen Würfeln,
$D$ - mindestens drei Sechs beim Wurf mit 18 idealen Würfeln.
$X_n$ - Anzahl der Sechsen bei $n$ idealen Würfeln

a) $X_6$ ist $B(6; \frac{1}{6})$-verteilt, da die 6 Würfel aus 6 Ausführungen des Zufallsexperiments „Werfen eines Würfels“ gedeutet werden können und das Ereignis $A$ –

Werfen einer Sechs bei einem Würfel die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ hat.

$$P(X_6 \geq 1) = 1 - P(X_6 < 1) = 1 - P(X_6 = 0) = 1 - \binom{6}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0{,}665 \text{ ?}$$

b) $X_{12}$ ist $B(12, \frac{1}{6})$-verteilt

$$\begin{aligned} P(X_{12} \geq 2) &= 1 - P(X_{12} < 2) \\ &= 1 - P(X_{12} = 0) - P(X_{12} = 1) = 0{,}619 \end{aligned}$$

c) $X_{18}$ ist $B(18, \frac{1}{6})$-verteilt

$$\begin{aligned} P(X_{18} \geq 3) &= 1 - P(X_{18} < 3) \\ &= 1 - P(X_{18} = 0) - P(X_{18} = 1) - P(X_{18} = 2) = 0{,}597 \end{aligned}$$

?

**Beispiel 2.4.3:**
Eine Fluggesellschaft hat die Erfahrung gemacht, dass im Mittel 5% der Personen, die einen Flug reserviert haben, nicht mit fliegen. Angenommen, das Flugzeug habe 95 Plätze und die Fluggesellschaft verkauft dafür 100 Tickets. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Personen einen Platz erhalten?

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$X$ - Anzahl der mit fliegenden Personen (jede Person stellt eine „Versuchsdurchführung“ mit 95% Wahrscheinlichkeit dar), ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0{,}95$.

$$\begin{aligned} P(X \leq 95) &= 1 - P(X > 95) = 1 - P(X = 96) - \cdots - P(X = 100) \\ &\approx 0,564 = 56,4\% \end{aligned}$$

$$P(X = 96) = \binom{100}{96} \cdot 0,95^{96} \cdot 0,05^{100-96} = \frac{100!}{96! - 4!} \cdots \approx 0,178$$

$$P(X = 97) \approx 0,14 \qquad P(X = 98) \approx 0,081$$

$$P(X = 99) \approx 0,031 \qquad P(X = 100) \approx 0,006$$

!

**Satz 2.4.1:**
Für eine $B(n;p)$-verteilte Zufallsgröße $X$ gilt

$$EX = np \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(X) = npq$$

**Beweis 2.4.2:**
$X$ mit Werten $x_j$ und Wahrscheinlichkeit $p_j \Rightarrow EX = \sum x_j p_j$

$$\begin{aligned}
EX &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&\overset{j:=k-1}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{j!(n-(j+1))!} p^{j+1} q^{n-(j+1)} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n(n-1)!}{j!(n-1-j)!} p^{j+1} q^{n-1-j} \\
&= np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j q^{n-j-1} \\
&\overset{\substack{\text{verallgemeinerte}\\ \text{Binomische Formel}}}{=} np(p+q)^{n-1} \\
&\overset{p+q=1}{=} np1^{n-1} \\
&= np \\
\mathrm{Var}(X) &= EX^2 - (EX)^2
\end{aligned}$$

Berechnung von $EX^2$:

**Nebenbemerkung:**

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= \binom{m}{0} a^0 \cdot b^{m-0} + \binom{m}{1} a^1 \cdot b^{m-1} + \dots + \binom{m}{m} a^m b^{m-m} \\
&= \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} a^l b^{m-l}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
EX^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (k-1) \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k}}_{\sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \text{usw.} \ldots = np(n-1)p} + \overbrace{\sum_{k=1}^{n} 1 \frac{n!}{(k-!)!(n-k)!} p^k q^{n-k}}^{np}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \operatorname{Var}(X) = \overbrace{n(n-1)p^2 + np}^{EX^2} - \overbrace{n^2 p^2}^{(EX)^2} = -np^2 + np = np(1-p) = npq
$$

?

**Beispiel 2.4.4:**
Gewisse Werkstücke sind mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,02 defekt. Wir groß ist die zu erwartende defekte Anzahl von Werkstücken in einer Sendung von Umfang 1000?
$X$ – Anzahl der defekten Wersktücke in der Sendung
$X$ ist $B(1000; 0{,}02)$ verteilt
$\Rightarrow EX = np = 1000 \cdot 0{,}02 = 20$

?

**Beispiel 2.4.5:**
Ein Geschoß trifft ein Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit 0,6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit in einer Serie von 10 Schüssen?

a) genau viermal

a) mindestens zweimal

zu treffen?

$X$ – Anzahl der Treffer bei 10 Schüssen ist $B(10; 0{,}6)$ verteilt

a) $P(X = 4) = \binom{10}{4} \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^6 = \dots$

b)

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \\ &= 1 - \binom{10}{0} \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^10 - \binom{10}{1} \cdot 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^9 \\ &= \dots \end{aligned}$$

c) Wie oft hätte man das Geschoss (mindestens) abfeuern müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von (mindestens) 0,9 (mindestens) ein Treffer vorliegt?

$n$ – Anzahl der Schüsse
$X_n$ – Anzahl der Treffer bei $n$ Schüssen ist $B(n; 0{,}6)$ verteilt

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &\geq 0{,}9 \\ 1 - P(X_n < 1) &\geq 0{,}9 \\ 1 - p(X_n = 0) &\geq 0{,}9 \\ 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^n &\geq 0{,}9 \\ 1 - 0{,}4^n &\geq 0{,}9 \\ 0{,}1 &\geq 0{,}4^n \\ \ln 0{,}1 &\geq n \cdot \ln 0{,}4 \\ \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}4} &\geq n \\ 2{,}5 \dots &\leq n \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Es sind mindestens 3 Schüsse abzugeben

### 2.4.3 Hypergeometrische Verteilung

Seien $N, M, n \in \mathbb{N}$, $n \leq N$, $M \leq N$. Aus $N$ Elementen, von denen genau $M$ ein gewisses Merkmal aufweisen, werden $n$ Elemente ohne Zurücklegen ausgewählt. Die Zufallsgröße $X$ gebe an, wie viel der ausgewählten Elemente das Merkmal aufweisen.

!

**Satz 2.4.2:**
Die Zufallsgröße $X$ kann genau die ganzen Zahlen $k$ mit

$$\max(0, n+M-N) \leq k \leq \min(n, M)$$

annehmen. Für diese $k$ gilt

$$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

**Beweis 2.4.3:**
Die Anzahl $k$ der ausgewählten Elemente, die das Merkmal aufweisen, kann einerseits weder $n$ noch $M$ überschreiten, andererseits weder 0 noch $n-(N-M) = n+M-N$ unterschreiten. Für $k$ mit

$$\max(0, n+M-N) \leq k \leq \min(n, M)$$

kann $P(X=k)$ mit Hilfe der klassischen Wahrscheinlichkeitsdefinition berechnet werden. Die Anzahl aller Auswahlmöglichkeiten von $n$ Elementen aus $N$ ohne Wiederholung (da kein Zurücklegen) und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge (da Reihenfolge der Auswahl unwesentlich) ist gleich $\binom{N}{n}$. Günstig sind diejenigen, die genau $k$ Elemente mit dem Merkmal enthalten.
Es sind also aus den $M$ Elementen, die das Merkmal aufweisen, $k$ Elemente auszuwählen, und aus den $N-M$ Elementen, die das Merkmal nicht aufweisen, die restlichen $n-k$ Elemente. Diese Möglichkeiten können beliebig kombiniert werden, was insgesamt $\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}$ günstige Fälle ergibt.
Somit ist

$$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

□

**Definition 2.4.2:**
Seien $N, M, n \in \mathbb{N}$, $n \leq N$, $M \leq N$. Eine Zufallsgröße $X$ besitzt eine hypergeometrische Verteilung mit den Parametern $N$, $M$ und $n$ oder eine $H(N; M; n)$-Verteilung, falls

$$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

für $\max(0, n+M-N) \leq k \leq \min(n, M)$ und

$$P(X=k)=0$$

für $0 \leq k < n+M-N$ oder $M < k \leq n$ gilt, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

!

**Satz 2.4.3:**
Für eine $H(N;M;n)$-verteilte Zufallsgröße $X$ gilt

$$EX = \frac{Mn}{N} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Var}(X) = \frac{Mn(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

?

**Beispiel 2.4.6:**
Unter 100 Werkstücken sind 5 Ausschuss. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den 10 ausgewählten Werkstücken genau ein Ausschussteil befindet, wenn
a) mit Zurücklegen
b) ohne Zurücklegen
erfolgt?

Zu a): $X$ – Anzahl der ausgewählten Ausschussteile ist $B(10; \frac{5}{100})$-verteilt

$$\Rightarrow P(X=1) = \binom{10}{1} \cdot 0{,}05^1 \cdot 0{,}95^9 \approx 0{,}32$$

Zu b): $Y$ – Anzahl der ausgewählten Ausschussteile ist $H(100;5;10)$-verteilt

$$\Rightarrow P(Y=1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{100-5}{10-1}}{\binom{100}{10}} \approx 0{,}34$$

►

**Bemerkung 2.4.1:**
Man erkennt an diesem Beispiel:

Mit Zurücklegen $\longrightarrow$ Binominalverteilung
Ohne Zurücklegen $\longrightarrow$ hypergeometrische Verteilung

Sind $N$ und $M$ sehr groß im Vergleich zu $n$, so dürfte der Unterschied zwischen der Auswahl mit Zurücklegen und der Auswahl ohne Zurücklegen gering sein.

**Satz 2.4.4:**
Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $k = 0, 1, \dots, n$ gilt

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to\infty \\ M/N\to p}} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

**Beweis 2.4.4** (Beweisskizze)**:**

$$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{\frac{M(M-1)\cdot\ldots\cdot(M-k+1)}{k!} \quad \frac{(N-M)(N-M-1)\cdot\ldots\cdot(N-M-n+k+1)}{(n-k)!}}{\frac{N(N-1)\cdot\ldots\cdot(N-n+1)}{n!}}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{M^k\left(1-\frac{1}{M}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{M}\right)\cdot \cancel{N^{n-K}}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{M+1}{N}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{M+n-k-1}{N}\right)}{N^k \cancel{N^n}\left(1-\frac{1}{N}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{N}\right)}$$

$$= \lim \binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k \frac{\left(1-\frac{1}{M}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{M}\right)\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{M+1}{N}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{M+n-k-1}{N}\right)}{\left(1-\frac{1}{N}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{N}\right)}$$

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \text{ da}$$

$$\lim_{\frac{M}{N}\to p}\left(\frac{M}{N}\right)^k = p^k,$$

$$\lim_{M\to\infty}\left(1-\frac{1}{M}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{M}\right) = 1$$

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to\infty \\ \frac{M}{N}\to\infty}}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{M+1}{N}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{M+n-k-1}{N}\right) = (1-p)^{n-k}$$

$$\text{und } \lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{1}{N}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{N}\right) = 1 \text{ ist}$$

### 2.4.4 Poisson-Verteilung

**Definition 2.4.3:**
Sei $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$. Eine Zufallsgröße $X$, die genau die Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ mit den Wahrscheinlichkeiten

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

annimmt heißt Poisson-verteilt mit dem Parameter $\lambda$.
Gibt eine Zufallsgröße $X$ die Anzahl des Eintretens gewisser Ereignisse an, die zahlreich sind, aber jedes für sich nur eine geringe Eintrittswahrscheinlichkeit hat, so wird häufig angenommen, dass $X$ näherungsweise eine Poisson-Verteilung besitzt.

**Beispiel 2.4.7:**

1. Anzahl der Anrufe in einer Telefonzentrale während eines geeigneten Zeitintervalls.

2. Anzahl der pro geeignetem Zeitintervall zerfallenden Atome eines spaltbaren Materials

**Satz 2.4.5:**
Ist $X$ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda$, so ist

$$EX = \mathrm{Var}(X) = \lambda$$

**Beweis 2.4.5:**

$$
\begin{aligned}
EX &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}}_{\lambda \cdot e^{\lambda} ?} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= e^{-\lambda} \lambda \sum_{(k-1)!}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= e^{-\lambda} \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \\
&= e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

□

In der Vorlesung ist das umfangreicher gewesen.

**Beispiel 2.4.8:**
Die Anzahl der pro Stunde in der Rezeption eines Hotel eintreffenden Anrufe sei als Poisson-verteilt angenommen. Im Mittel gehen pro Stunde 15 Anrufe ein.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 10, aber maximal 30 Anrufe pro Stunde eingehen?

$X$ – Anzahl der Anrufe pro Stunde ist (näherungsweise) Poisson-verteilt mit $\lambda = 15$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow P(10 < X \leq 30) &= P(X = 11) + P(X = 12) + \ldots + P(X = 30) \\
&= \frac{15^{11}}{11!} e^{-15} + \frac{15^{12}}{12!} e^{-15} + \ldots + \frac{15^{30}}{30!} e^{-15} \\
&\approx 0{,}8813
\end{aligned}
$$

b) Die Empfangsdame entfernt sich für 2 Minuten von ihrem Arbeitsplatz. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser Zeit mindestens ein Anruf eingeht?

$Y$ – Anzahl der Anrufe innerhalb von 2 Minuten ist Poison-verteilt mit $\lambda = \frac{15}{30}$, da 2 Minuten gleich $\frac{1}{30}$ Stunde sind

$$\begin{aligned} P(Y \geq 1) &= 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) \\ &= 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^0}{0!} e^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 - e^{-\frac{1}{2}} \\ &\approx 0{,}3935 \end{aligned}$$

?

**Beispiel 2.4.9:**
Die Anzahl der Webfehler auf einen Meter Länge einer Stoffbahn werde als Poisson-verteilt angenommen. Auf einer Länge von zehn Metern treten durchschnittlich acht Webfehler auf. Die Webfehler sind bei oberflächlicher Betrachtung nicht sofort alle erkennbar. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass ein Stück Stoff von einem Meter Länge mindestens zwei Webfehler enthält, wenn bei oberflächlicher Betrachtung ein Webfehler sofort sichtbar wurde?
$X$-Anzahl der Webfehler auf einer Stoffbahn der Länge 1 m, $X$ ist Poisson-verteilt mit $\lambda = \frac{8}{10}$

$$\begin{aligned} P(X \geq 2 | X \geq 1) &= \frac{P((X \geq 1) \cap (X \geq 2))}{P(X \geq 1)} \\ &= \frac{P(X \geq 2)}{P(X \geq 1)} \\ &= \frac{1 - P(X = 0) - P(X = 1)}{1 - P(X = 0)} \\ &= \frac{1 - \frac{0{,}8^0}{0!} e^{-0{,}8} - \frac{0{,}8^1}{1!} e^{-0{,}8}}{1 - \frac{0{,}8^0}{0!} e^{-0{,}8}} \\ &\approx 0{,}347 \end{aligned}$$

$A$ mit $P(A) = p$ klein; $n$ groß

**Satz 2.4.6** (Grenzwertsatz von Poisson)**:**
Für $k = 0, 1, \ldots$ gilt

$$\lim_{\substack{n\to\infty;\\ p\to 0\\ np=\lambda=\text{konst.}}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

**Beweis 2.4.6:**
Es ist

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} &\overset{p=\frac{\lambda}{n}}{=} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\
&= \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1$$

damit

$$\lim_{\substack{n\to\infty;\\ p\to 0\\ np=\lambda=\text{konst.}}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$\square$

$\Rightarrow$ Annäherung der Binomialverteilung durch die Poisson-Verteilung: Seien $n$ groß, $p$ klein und $np$ nicht allzu groß. Mit $\lambda = np$ gilt dann

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ k = 0, 1, \ldots, n$$

Empfehlung für die Praxis: $n \geq 50; p \leq 0{,}1; np \leq 10$)

?

**Beispiel 2.4.10:**
Ein Saatgut einer gewissen Sorte werde in Päckchen zu 1000 Samenkörnern verkauft. Es sei bekannt, dass im Mittel 0,5% der Körner zu einer anderen Sorte gehören.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einem Päckchen mehr als 5 sortenfremde Samenkörner befinden.

a) exakt

b) näherungsweise mit Hilfe der Poisson-Verteilung

zu a) $X$ – Anzahl der sortenfremden Samenkörner eines Päckchens ist $B(1000; 0{,}005)$-verteilt.

$$
\begin{aligned}
P(X > 5) &= 1 - P(X \leq 5) \\
&= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\
&\qquad + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)] \\
&= 1 - \left[\binom{1000}{0} \cdot 0{,}005^0 \cdot 0{,}995^{1000}\right. \\
&\qquad + \binom{1000}{1} \cdot 0{,}005^1 \cdot 0{,}995^{999} \\
&\qquad + \ldots + \\
&\qquad \left. + \binom{1000}{5} \cdot 0{,}005^5 \cdot 0{,}995^{995}\right] \\
&\approx 0{,}3844
\end{aligned}
$$

?

**Beispiel 2.4.11:**
In einer Bank betrage der Anteil der Fehlbuchungen 0,001. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 2000 Buchungen genau drei Fehlbuchungen sind?

- Exakte Berechnung:

  $X$ – Anzahl der Fehlbuchungen bei 2000 Buchungen; $X$ ist binomialverteilt: $B(2000; 0{,}001)$-verteilt.

  $$P(X = 3) = \binom{2000}{3} 0{,}001^3 \cdot 0{,}999^1 997 \approx 0{,}1805$$

- Näherungsweise Berechnung mit Hilfe der Poisson-Verteilung:

$X$ ist näherungsweise Poisson-verteilt und $\lambda = 2000 \cdot 0{,}001 = 2$.

$$P(X = 3) \approx \frac{2^3}{3!} e^{-2} \approx 0{,}1804$$

## 2.5 Wichtige stetige Verteilungen

### 2.5.1 Stetige gleichmäßige Verteilung

**Definition 2.5.1:**
Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Eine stetige Zufallsgröße $X$ heißt gleichmäßig verteilt (über dem Intervall $[a; b]$), falls ihre Verteilungsdichte $f_X$ die Form

$$f_X = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a; b] \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [a; b] \end{cases}$$

hat. (Alle Werte haben die selbe Wahrscheinlichkeit, Integral $= 1$).

**Satz 2.5.1:**
Ist $X$ gleichmäßig über $[a, b]$ verteilt, so ist

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & b \leq x \end{cases}$$

$EX = \dfrac{a+b}{2}$. $\operatorname{Var}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

**Beweis 2.5.1:**
Für $x < a$ ist

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{x} 0dy = 0
\end{aligned}$$

für $a \leq x < b$ ist

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{a} f_X(y)dy + \int_{a}^{x} f_X(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{a} 0dy + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dy \\
&= 0 + \left[\frac{1}{b-a}y\right]_{a}^{x} \\
&= \frac{1}{b-a}x - \frac{1}{b-a}a \\
&= \frac{x-a}{b-a}
\end{aligned}$$

für $b \leq x$ ist

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{a} 0dy + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dy + \int_{b}^{x} 0dy \\
&= 0 + \left[\frac{1}{b-a}y\right]_{a}^{b} + 0 \\
&= \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Es ist

$$
\begin{aligned}
EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_X(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{a} y \cdot 0 dy + \int_{a}^{b} y \cdot \frac{1}{b-a} dy + \int_{b}^{+\infty} y \cdot 0 dy \\
&= \frac{1}{b-a} ( \frac{y^2}{2} \Big|_a^b ) = \frac{1}{b-a} ( \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} ) \\
&= \frac{1}{2(b-a)} (b^2 - a^2) \\
&= \frac{1}{2(b-a)} (b-a)(b+a) \\
&= \frac{a+b}{2}
\end{aligned}
$$

Es ist

$$
\mathrm{Var}(X) = EX^2 - (EX)^2
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
EX^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_X(y) dy \\
&= \int_{a}^{b} y^2 \cdot \frac{1}{b-a} dy \\
&= \frac{1}{b-a} ( \frac{y^3}{3} \Big|_a^b ) \\
&= \frac{1}{b-a} ( \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} ) \\
&= \left[ \text{Formel: } b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ab + a^2) \right] \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{b^3 - a^3}{b-a} \\
&= \frac{1}{3} \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{b-a} \\
&= \frac{1}{3} (b^2 + ab + a^2)
\end{aligned}
$$

ist. Deshalb ist

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \frac{1}{3}(b^2+ab+a^2) - \frac{a+b)^2}{4} \\
&= \frac{1}{3}(b^2+ab+a^2) - \frac{1}{4}(a^2+2ab+b^2) \\
&= \frac{1}{12}(a^2+b^2) - \frac{1}{6}ab \\
&= \frac{1}{12}(a^2+b^2-2ab) \\
&= \frac{1}{12}(b-a)^2
\end{aligned}
$$

### 2.5.2 Exponentialverteilung

**Definition 2.5.2:**
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Eine stetige Zufallsgröße $X$ besitzt eine Exponentialverteilung mit Parameter $\alpha$, falls ihre Verteilungsdichte $f_X$ die Form

$$
f_X(X) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}
$$

hat.

Als (näherungsweise) exponentialverteilte Zufallsgrößen werden häufig modelliert:

- Service- oder Wartezeiten,
- Lebensdauer von Geräten, bei denen der Verschleiß vernachlässigbar ist (z.B. Glühlampen)
- *nicht* geeignet zur Modellierung von biologischen Objekten, wird aber trotzdem benutzt (z.B. Versicherungen $\mapsto$ Lebensdauer Mensch)
- Zerfallszeit eines Atoms eines radioaktives Elements ($\rightsquigarrow$ vergleiche Poisson Beispiel 2)

**Satz 2.5.2:**
Ist $X$ exponentialverteilt mit Parameter $\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ so ist

$$
F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}, \quad EX = \frac{1}{\alpha}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\alpha^2}
$$

**Beweis 2.5.2:**
Für $x < 0$ ist

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy = \int_{-\infty}^{x} 0dy = 0$$

Für $x \geq 0$ ist

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy = \int_{-\infty}^{0} 0dy + \int_{0}^{x} \alpha e^{-\alpha y}dy$$

**Nebenrechnung:** Berechnung von $\int \alpha e^{-\alpha y}dy$.
Substitution $-\alpha y = t \Rightarrow -\alpha dy = dt$

$$\begin{aligned}\int \alpha e^{-\alpha y}dy &= \alpha \int e^t \left(-\frac{1}{\alpha}\right) dt \\ &= -\int e^t dt \\ &= -\left(e^t + C\right) \\ &= -\left(e^{-\alpha y} + C\right), \; C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}\int_0^x \alpha e^{-\alpha y}dy &= \left[-e^{-\alpha y}\right]_0^x \\ &= -e^{-\alpha x} - (-1) \\ &= 1 - e^{-\alpha x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow EX &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_X(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{0} y0dy + \int_{0}^{\infty} y\alpha e^{-\alpha y}dy\end{aligned}$$

**Nebenrechnung:** Berechnung von $\int y\alpha e^{-\alpha y} dy$.

$$\begin{aligned}\int \alpha y e^{-\alpha y} dy &= \int y(\alpha e^{-\alpha y}) dy \\ &= -ye^{-\alpha y} + \int e^{-\alpha y} dy \\ &= -ye^{-\alpha y} - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha y} + C,\ C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow EX &= \int_{-\infty}^{0} 0 dy + \int_{0}^{\infty} y\alpha e^{-\alpha y} dy \\ &= 0 + \left[ -ye^{-\alpha y} - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha y} \right]_0^\infty \\ &= -\left( -\frac{1}{\alpha} e^0 \right) \\ &= \frac{1}{\alpha}\end{aligned}$$

$\mathrm{Var}(X) = EX^2 - (EX)^2$,

$$\begin{aligned}EX^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_X(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{0} y^2 \cdot 0 dy + \int_{0}^{\infty} y^2 \alpha e^{-\alpha y} dy\end{aligned}$$

**Nebenrechnung:** Berechnung von $\int y^2 \alpha e^{-\alpha y} dy$ durch partielle Integration.

$$\begin{aligned}\int y^2 \alpha e^{-\alpha y} dy &= -y^2 e^{-\alpha y} dy + \int 2y\alpha e^{-\alpha y} dy \\ &= -y^2 e^{-\alpha y} - y \cdot 2 \cdot \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha y} - \frac{1}{\alpha^2} 2 e^{-\alpha y} + C,\ C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} EX^2 &= \int_0^\infty y^2 \alpha e^{-\alpha y} dy \\ &= \left[ -y^2 e^{-\alpha y} - 2y \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha y} \right]_0^\infty \\ &= -\left( -\frac{2}{\alpha^2} e^{-0} \right) \\ &= \frac{2}{\alpha^2} \end{aligned}$$

und damit ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= EX^2 - (EX)^2 \\ &= \frac{2}{\alpha^2} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \end{aligned}$$

□

?

**Beispiel 2.5.1:**
Die Lebensdauer (in Stunden) einen Rußfilters werde als exponential verteilte Zufallsgröße angenommen. Die durchschnittliche Lebensdauers einen Rußfilters betrage 2000h.

a) Welcher Schätzwert ergibt sich daraus für $\alpha$?

$$\alpha = \frac{1}{2000h}$$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Filter innerhalb der ersten 1000 Betriebsstunden unbrauchbar wird?

$X$ – Lebensdauer eines Rußfilters ist exponentialverteilt mit Parameter $\frac{1}{2000h}$

$$\begin{aligned}
P(X < 1000) &= P(X \leq 1000) \\
&= \int_{-\infty}^{1000} f_X(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{1000} \frac{1}{2000} e^{-\frac{1}{2000}y} dy \\
&= \left[-e^{-\frac{1}{2000}y}\right]_0^{1000} \\
&= -e^{-\frac{1}{2}} - (-1) \\
&= 1 - e^{-\frac{1}{2}} \\
&\approx 0{,}3935
\end{aligned}$$

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert der Filter mindestens 3000 Betriebsstunden?

$$P(X > 3000) = \int_{3000}^{\infty} \frac{1}{2000} e^{-\frac{1}{2000}y} dy = e^{-\frac{3}{2}} \approx 0{,}2231$$

d) Wie groß ist die Zeitspanne, innerhalb der ein Rußfilter mit 60%-iger Wahrscheinlichkeit nicht ersetzt zu werden braucht?

$$\begin{aligned}
P(X \geq T) = 0{,}6 &\Leftrightarrow \int_{T}^{\infty} \frac{1}{2000} e^{-\frac{1}{2000}x} dx = 0{,}6 \\
&\Leftrightarrow \left[-e^{-\frac{1}{2000}x}\right]_T^{\infty} = 0{,}6 \\
&\Leftrightarrow -\left(-e^{-\frac{1}{2000}T}\right) = 0{,}6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T > 0 : P(X \leq T) &= -\int_{0}^{T} \frac{1}{2000} e^{-\frac{1}{2000}x} dx \\
P(X \geq T) &= \int_{T}^{\infty} \frac{1}{2000} e^{-\frac{1}{2000}x} dx
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2000} T = \ln 0{,}6 \Leftrightarrow T = -2000 \cdot \ln 0{,}6 \approx 1021{,}65$$

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rußfilter noch mindestens weitere 1000 Stunden funktioniert, wenn er bereits 2000 Stunden funktioniert hat?

$$\begin{aligned}
\text{ges.: } P(X \geq 3000 \mid X \geq 2000) &= \frac{P\left((X \geq 3000) \cap (X \geq 2000)\right)}{P(X \geq 2000)} \\
&= \frac{P(X \geq 3000)}{P(X \geq 2000)} \\
&= \frac{\displaystyle\int_{3000}^{\infty} \frac{1}{2000} e^{-\frac{1}{2000}x} dx}{\displaystyle\int_{2000}^{\infty} \frac{1}{2000} e^{-\frac{1}{2000}x} dx} \\
&= \frac{\left[-e^{-\frac{1}{2000}x}\right]_{3000}^{\infty}}{\left[-e^{-\frac{1}{2000}x}\right]_{2000}^{\infty}} \\
&= \frac{e^{-\frac{3000}{2000}}}{e^{-\frac{2000}{2000}}} \\
&= \frac{e^{-\frac{3}{2}}}{e^{-1}} \\
&= e^{-\frac{1}{2}} \\
&= P(X \geq 1000)
\end{aligned}$$

### 2.5.3 Normalverteilung

**Definition 2.5.3:**
Seien $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Eine stetige Zufallsgröße $X$ besitzt eine Normalverteilung mit den Parametern $\mu$ und $\sigma^2$ oder eine $N(\mu, \sigma^2)$-Verteilung, falls ihre Verteilungsdichte die Form

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$$

hat.

**Kurvendiskussion für $\mathbf{f_X}$:**
Sei zunächst $\mu = 0$. Dann ist $f_X$ eine gerade Funktion, d.h. $f_X(x) = f_X(-x)$, $x \in \mathbb{R}$ (ihr Bild ist symmetrisch zur Ordinatenachse).

Es ist

$$\lim_{x\to\infty} f_X(x) = \lim_{x\to\infty} f_X(x) = 0$$

Da der Exponent bei $e$ nur für $x = 0$ gleich 0 und sonst negativ ist, folgt, dass $f_X$ an der Stelle $x = 0$ ein Maximum hat. Wietere Extremstellen liegen nicht vor.
Es ist $f_X(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$. Mit Hilfe der Differentialrechnung kann man die Wendepunkte bestimmen.
Es gibt also genau zwei, an den Stellen $x_{w_1} = -\sigma$ und $x_{w_2} = \sigma$.

Falls $\mu \neq 0$ ist, so erhält man die Funktionskurve aus der obigen Funktionskurve durch Verschiebung um $\mu$ Längeneinheiten parallel zur $x$-Achse.

Einfluss von $\sigma^2$:
Je größer $\sigma^2$, desto flacher wird die Kurve. Je kleiner $\sigma^2$, desto steiler wird die Kurve.
Außerdem gilt

$$\int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} f_X(x)dx \approx 0{,}997$$

das heißt, die Wahrscheinlichkeit, dass eine $N(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsgröße einen Wert außerhalb des Intervalls $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$, ist gering.
$\Rightarrow$ $3\sigma$-Regel für die Praxis: $P(|X - \mu| \geq 3\sigma) \approx 0$

Zur Berechnung von Erwartungswert und Varianz einer $N(\mu; \sigma^2)$-verteilten Zufallsgröße benötigen wir folgendes Hilfsresultat.

! **Lemma 2.5.1:**
Es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

! **Satz 2.5.3:**
Ist $X$ eine $N(\mu; \sigma^2)$-verteilte Zufallsgröße, so ist

$$EX = \mu \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

**Beweis 2.5.3:**
Es ist

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Substitution: $u := \frac{x-\mu}{\sigma}$, $du = \frac{1}{\sigma} dx$
$x = \sigma u + \mu$

$$\begin{aligned} \Rightarrow EX &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma u + \mu) e^{-\frac{u^2}{2}} \sigma du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mu\sigma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \end{aligned}$$

Der Integrand $ue^{-\frac{u^2}{2}}$ im ersten Integral ist eine ungerade Funktion, das heißt ihr Bild ist symmetrisch zum Koordinatenursprung. Damit ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} ue^{-\frac{u^2}{2}} du = 0$
Nach Lemma ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$. Deshalb ist

$$EX = 0 + \frac{1^{-\infty}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mu\sigma \cdot \sqrt{2\pi} = \mu$$

Weiter ist $\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f_X(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$
Substitution : $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$, $du = \frac{1}{\sigma} dx$
Somit ist $\mathrm{Var}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma u)^2 e^{-\frac{u^2}{2}} \sigma du = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\infty}^{\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du$.
Durch partielle Integration (dabei $ue^{-\frac{u^2}{2}}$ integrieren und $u$ differenzieren) erhält man

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\frac{u^2}{2}} du &= \left[ -ue^{-\frac{u^2}{2}} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

Somit ist

$$Var(x) = \text{stuff} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = \sigma^2$$

### Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sei $X$ eine $N(\mu; \sigma^2)$-verteilte Zufallsgröße. Dann ist

$$P(a \le X \le b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Dieses Integral lässt sich nicht exakt berechnen. Deshalb erfolgt näherungsweise Berechnung mit Methoden der numerischen Mathematik. Ergebnisermittlung mit dem Computer oder mit Hilfe von Tabellen

### Überführung auf Standardisierte Normalverteilung

Von besonderer Bedeutung ist die $N(0; 1)$- Verteilung oder standardisierte Normalverteilung (Für die $N(0; 1)$-Verteilung existieren Tabellen).
Verteilungsdichte bzw. Verteilungsfunktion der $N(0; 1)$-Verteilung werden häufig mit $\varphi$ bzw. $\Phi$ bezeichnet:
Sei $X$ eine $N(\mu; \varphi^2)$-verteilte Zufallsgröße. Dann ist die Zufallsgröße $Z := \frac{X-\mu}{\varphi}$ eine $N(0; 1)$-verteilte Zufallsgröße.

▶ **Bemerkung 2.5.1:**
$Y$ habe Erwartungswert $a$ und Varianz $v^2$. Dann ist $\frac{Y-a}{v}$, $v > 0$ eine standardisierte Zufallsgröße, das heißt: $E\frac{Y-a}{v} = 0$, $\operatorname{Var}\left(\frac{Y-a}{v}\right) = 1$

$$\begin{aligned} E\frac{Y-a}{v} &= \frac{1}{v}E(Y-a) \\ &= \frac{1}{v}(EY - Ea) \\ &= \frac{1}{v}(a-a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}\left(\frac{Y-a}{v}\right) &= \frac{1}{v^2}\operatorname{Var}(Y-a) \\ &= \frac{1}{v^2}\operatorname{Var}(Y) \\ &= \frac{1}{v^2}v^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Dies folgt aus dem folgenden Satz:

! **Satz 2.5.4:**
Sei $X$ eine $N(\mu; \sigma^2)$-verteilte Zufallsgröße und seien $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$. Dann ist $Y := a(X + b)$ eine $N(a\mu + ab; a^2\sigma^2)$-verteilte Zufallsgröße.

$$a := \frac{1}{\sigma},\ b := -\mu$$

**Beweis 2.5.4:**
Sei $a > 0$. Dann

$$\begin{aligned}
P(Y \leq x) &= P\left(a(X+b) \leq x\right) \\
&= P\left(X \leq \frac{x}{a} - b\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{x}{a}-b} f_X(t)dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\frac{x}{a}-b} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt
\end{aligned}$$

Substition: $u := ta + ba$, $t = \frac{u-ba}{a}$, $dt = \frac{1}{a}du$
Für $t \to -\infty$ ist $u \to -\infty$. Für $t = \frac{x}{a} - b$ ist $u = \left(\frac{x}{a} - b\right) a + ba = x$
Deshalb ist

$$\begin{aligned}
P(Y \leq x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\frac{x}{a}-b} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma a} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\left(\frac{u-ba}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma a} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-ba-a\mu)^2}{2\sigma^2 a^2}} du, \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $Y$ die Verteilungsdichte

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma a} e^{-\frac{(x-ba-a\mu)^2}{2\sigma^2 a^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

besitzt. Dies ist aber die Verteilungsdichte einer $N(a\mu + ab; a^2\sigma^2)$-verteilten Zufallsgröße.
Sei $a < 0$. Damit ist

$$\begin{aligned}
P(Y \leq x) &= P\left(a(X+b) \leq x\right) \\
&= P\left(X \geq \frac{x}{a} - b\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\frac{x}{a}-b}^{\infty} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt
\end{aligned}$$

Substitution $u := ta + ba$ gibt

$$\begin{aligned}
P(Y \leq x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\frac{x}{a}-b}^{\infty} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma a} \int_{x}^{-\infty} e^{-\frac{\left(\frac{u-ba}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma a} \int_{x}^{-\infty} e^{-\frac{(u-ba-a\mu)^2}{2\sigma^2 a^2}} du \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma a} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-ba-a\mu)^2}{2\sigma^2 a^2}} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(-a)} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-ba-a\mu)^2}{2\sigma^2 a^2}} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2 a^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-ba-a\mu)^2}{2\sigma^2 a^2}} du
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass die Verteilungsdichte von $Y$ die Verteilungsdichte der $N(a\mu + ab; a^2\sigma^2)$-Verteilung ist. Es ist also $Y$ eine $N(a\mu + ab; a^2\sigma^2)$-verteilte Zufallsgröße.

□

### Bedeutung der Normalverteilung

Viele Zufallsgrößen, die als Modelle für praktische Probleme dienen, können (näherungsweise) als normalverteilt angesehen werden. Die theoretische Begründung dafür liefert der Zentrale Grenzwertsatz, aus dem (grob gesagt) folgt, dass eine Zufallsgröße, die sich als Summe einer großen Anzahl unabhängiger Zufallsgrößen darstellen lässt, von denen jede auf die Summe nur einen unbedeutenden, zufälligen Einfluss hat, näherungsweise normalverteilt ist.

?

**Beispiel 2.5.2** (Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace)**:**
Seien $p \in (0,1)$ und $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge $B(n;p)$-verteilter Zufallsgrößen. Für die Folge $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$Z_n := \frac{Y_n - EY_n}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y_n)}} = \frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

gilt dann:

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

# Hier endet die Vorlesung aus dem Wintersemester 2011

## 2.6 Grenzwertsätze

### 2.6.1 Ungleichung von Chebyshëv

!

**Satz 2.6.1:**

Sei $Y$ eine diskrete oder stetige nichtnegative Zufallsgröße mit $EY < \infty$. Für beliebiges $\delta > 0$ gilt

$$P(Y \geq \delta) \leq \frac{EY}{\delta} \tag{2.1}$$

oder äquivalent,

$$P(Y < \delta) \geq 1 - \frac{EY}{\delta} \tag{2.2}$$

**Beweis 2.6.1:**
2.2 folgt aus 2.1 durch Übergang zum Komplementärereignis.
Beweis von 2.1: Sei $Y$ eine diskrete Zufallsgröße und nehme die Werte $y_k$ mit Wahrscheinlichkeiten $p_k$ an. Dann ist

$$EY = \sum_k y_k p_k \geq \sum_{k:y_k \geq \delta} y_k p_k \geq \sum_{k:y_k \geq \delta} \delta p_k = \delta \sum_{k:y_k \geq \delta} p_k = \delta P(Y \geq \delta)$$

also $P(Y \geq \delta) \leq \frac{EY}{\delta}$.
Sei $Y$ stetig mit Verteilungsdichte $f_Y$. Dann ist

$$\begin{aligned} EY &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \overset{\text{n.neg.}}{=} \int_0^{\infty} y f_Y(y) dy \geq \\ &\geq \int_\delta^{\infty} y f_Y(y) dy \geq \int_\delta^{\infty} \delta f_y(y) dy = \\ &= \delta \int_\delta^{\infty} f_Y(y) dy = \delta P(Y \geq \delta), \text{ also } P(Y \geq \delta) \leq \frac{EY}{\delta} \end{aligned}$$

**Folgerung 2.6.1** (Folgerung aus Satz 1, Ungleichung von Chebyshëv)**:**
Sei $X$ eine diskrete oder stetige Zufallsgröße, so dass $EX$ existiert und $\mathrm{Var}(X) <$

$\infty$. Für beliebige $\varepsilon > 0$ gilt.

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2} \tag{2.3}$$

oder äquivalent dazu,

$$P(|X - EX| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2} \tag{2.4}$$

**Beweis 2.6.2:**
2.4 folgt aus 2.3 durch Übergang zum Komplementärereignis.
Beweis von 2.3: Zunächst ist $|X - EX| \geq \varepsilon$ genau dann wenn $|X - EX|^2 \geq \varepsilon^2$ oder $(X - EX)^2 \geq \varepsilon^2$. Deshalb kann 2.3 in der Form $P\left((X - EX)^2 \geq \varepsilon^2\right) = \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$ geschrieben werden. Diese Ungleichung folgt aber unmittelbar aus 2.1. Wenn man $Y := (X - EX)^2$ und $\delta := \varepsilon^2$ setzt, denn $EY = E(X - EX)^2 = \mathrm{Var}(X)$.

### 2.6.2 Gesetz der großen Zahlen

Das Ereignis $A$ trete bei einem Zufallsexperiment mit Wahrscheinlichkeit $p$ ein. Es sei $H_n(A)$ die relative Häufigkeit des Eintretens von $A$ in einer Serie von $n$ unabhängigen und unter gleichen Bedingungen ablaufenden Durchführung des Zufallsexperimentes. Da $H_n(A)$ von den Versuchsergebnissen abhängt, ist $H_n(A)$ als Zufallsgröße anzusehen.

!

**Satz 2.6.2** (Bernoullisches Gesetz der großen Zahlen, nach Jakob Bernoulli, 1713)**:**
Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} P(|H_n(A) - p| > \varepsilon) = 0$.

**Beweis 2.6.3:**
Es sei $Y_n$ die absolute Häufigkeit des Eintretens von $A$ in einer Serie von $n$ Versuchen. Es ist $Y_n$ eine $B(n;p)$-verteilte Zufallsgröße und deshalb ist $EY_n = np$ und $\mathrm{Var}(Y_n) = np(1-p)$. Daraus folgt wegen $H_n(A) = \frac{Y_n}{n}$:

$$EH_n(A) = E\frac{Y_n}{n} = \frac{1}{n}EY_n = p$$

$$\mathrm{Var}(H_n(A)) = \mathrm{Var}\left(\frac{Y_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(Y_n) = \frac{p(1-p)}{n} \tag{2.5}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wendet man die Ungleichung von Chebyshëv mit $X := H_n(A)$ an, so folgt wegen 2.5:

$$P(|H_n(A) - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} = 0$ folgt dann auch $\lim_{n\to\infty} P(|H_n(A) - p| \geq \varepsilon) = 0$.

### 2.6.3 Zentraler Grenzwertsatz

!

**Satz 2.6.3** (Grenzwertsatz von de Moire-Laplace)**:**
Sei $p \in (0,1)$ und sie $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge $B(n;p)$-verteilter Zufallsgrößen. Sei $Z_n := \frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{Y_n - EY_n}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y_n)}}$ und sei $F_{Z_n}$ die zugehörige Verteilungsfunktion. Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$ $\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$.

?

**Beispiel 2.6.1:**
Der Ausschussanteil bei der Produktion von Glühlampen sei 3%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Sendung von 1000 solcher Lampen die Zahl der defekten Lampen zwischen 20 und 40 liegt? $X$-Anzahl der defekten Lampen in der Sendung, ist $B(1000; 0{,}03)$-verteilt. $P(20 \leq X \leq 40) = \sum_{k=20}^{40} P(X = k) = \sum_{k=20}^{40} \binom{1000}{k} \cdot 0{,}03^k \cdot 0{,}97^{1000-k}$. Näherungsweise ergibt sich

$$\begin{aligned}
&P\left(\frac{20 - 1000 \cdot 0{,}03}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97}} \leq \frac{X - 1000 \cdot 0{,}02}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97}} \leq \frac{40 - 1000 \cdot 0{,}03}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97}}\right) \\
\approx &\Phi\left(\frac{40 - 1000 \cdot 0{,}03}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97}}\right) - \Phi\left(\frac{20 - 1000 \cdot 0{,}03}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97}}\right) \approx 0{,}94
\end{aligned}$$

Betrachtet $Y_n$ als Summe $Y_n := \sum_{j=1}^{n} X_j$ wobei

$$X_j = \begin{cases} 1 \text{ mit Wahrscheinlichkeit } p \\ 0 \text{ mit Wahrscheinlichkeit } 1-p \end{cases}$$

ist und die $X_j$ unabhängig sind, so kann man den Satz 1 in dieser Form wesentlich verallgemeinern. Diese Verallgemeinerung ist der Inhalt des Zentralen Grenzwertsatzes.

$$Z_n = \frac{\sum X_j - \sum EX_j}{\sqrt{\mathrm{Var}(\sum X_j)}}$$

# 3 Beschreibende Statistik

- Ungeordnete Datenmenge (Urliste) $= x_1, x_2, ...x_n$
- Ordnung der Werte der Größe nach und Angabe ihrer absoluten Häufigkeit $\Rightarrow$ Häufigkeitsverteilung (Häufigkeitstabelle); $\Rightarrow$ relative Häufigkeit $= \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{n}$, $n =$ Gesamtzahl der Daten
- Empirische Verteilungsfunktion $\tilde{F}$. Seien die Werte der Datenmenge der Größe nach geordnet (gleiche Werte werden nur einmal aufgeschrieben), $x_{v_1} < x_{v_2} < \cdots < x_{v_m}$. Die relative Häufigkeit des Wertes $dx_{v_j}$ sei $k_j, j = 1..m$. $\tilde{F}(x) := \sum_{j:x_{v_j} \leq x} h_j, x \in \mathbb{R}$; insbesondere ist $\tilde{F}(x) = 0$, falls $x < x_{v_1}$; falls $x_{v_1} \leq x < x_{v_2}$, so ist $\tilde{F}(x) = h_1$; falls $x_{v_2} \leq x < x_{v_3}$, so ist $\tilde{F}(x) = h_1 + h_2$ usw., falls $x_{v_m} < x$, so ist $\tilde{F}(x) = h_1 + \cdots + h_m = 1$
  Die empirische Verteilungsfunktion $\tilde{F}$ ist eine monoton wachsende, rechtsstetig Treppenfunktion mit Sprüngen in den Punkten $x_{v_j}$. Die Sprunghöhe in $x_{v_j}$ ist gleich der relativen Häufigkeit $h_j$ des Wertes $x_{v_j}, j = 1..m$. Links vom kleinsten Wert der Datenmenge ist $\tilde{F} = 0$ und rechts vom größten Wert ist $\tilde{F} = 1$.
- Veranschaulichung der Datenmenge durch verschiedene Formen von Diagrammen

### Lageparameter für Datenmengen

**Empirischer Modalwert** auch häufigster oder dichtester Wert. $x_{\text{Mod}}$ ist derjenige Wert, der in der Datenmenge am häufigsten vorkommt.
Eigenschaften:

+ empirischer Modalwert hängt nicht von extremen Einzelwerten ab
− ist der Umfang der Daten gering oder können die Messwerte Werte aus einem ganzen Intervall sein, so tritt der empirische Modalwert nicht deutlich genug hervor.

**Empirischer Median** Seien die Werte der Datenmenge der Größe nach geordnet, wobei jeder Wert so oft aufgeschrieben wird wie seine absolute Häufigkeit ist: $x_1 \leq \cdots \leq x_n$. Ist der Umfang der Datenmenge $n = 2k+1$ eine ungerade

Zahl, so ist der empirische Median $x_{\text{Med}} = x_{k+1}$. Ist $n = 2k$ eine gerade Zahl, so ist $x_{\text{Med}} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$.
Eigenschaften:

+ Empirischer Median hängt nicht von extremen Einzelwerten ab
· gut geeignet bei Datenmaterial von kleinem Umfang (dem arithmetischen Mittel überlegen)
- Minimaleigenschaft des empirischen Medians: Die Funktion $f(x) := \sum(x_j - x), x \in \mathbb{R}$ wird minimal für $x = x_{\text{Med}}$

### Arithmetisches Mittel

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$$

Eigenschaften:

- $$\sum_{i=1}^{n}(x_i + \overline{x}) = 0$$
- Die Funktion
  $$g(x) := \sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2, x \in \mathbb{R}$$
  hat ein einziges Minimum bei $x = \overline{x}$
- Arithmetisches Mittel hängt von allen Einzelwerten ab, deshalb nicht besonders geeignet zur Charakterisierung von Datenmengen, die extreme Werte („Ausreißer“) enthalten, insbesondere, wenn $n$ klein ist.
- arithmetisches Mittel nicht aussagekräftig bei mehrgipflichen Verteilungen sowie bei Zeitreihen.
- Um den Einfluss von Ausreißern zu mindern, verwendet man an Stelle des arithmetischen Mittels manchmal ein gestutztes arithmetisches Mittel, bei dem eine gewisse Anzahl der größten sowie kleinsten Daten unberücksichtigt bleibt. Üblich ist zum Beispiel, 5% der größten und 5% der kleinsten Werte zu streichen.

## Streuungsparameter

### Empirische Varianz und empirische Standardabweichung

Die empirische Varianz $s^2$ einer Datenmenge $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist definiert durch $s^2 := \frac{1}{n-1}\left[(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2\right]$.

Empirische Standardabweichung $s := \sqrt{s^2}$.

Im wesentlichen gilt: Je größer Messwerte gestreut sind, desto unsicherer sind die aus ihnen zu ziehenden Schlussfolgerungen. Damit: größere Varianz $\rightarrow$ größere Unsicherheit.

**Varianzkoeffizient** Der Varianzkoeffizient $V$ ist definiert durch $V = \frac{s}{\overline{x}}$. Er ist, im Unterschied zur empirischen Varianz, ein relatives Streuungsmaß.

# 4 Mathematische Statistik

Eine ideale Münze wird 100 mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei genau 48 mal Wappen auftritt.
$X$ - Anzahl von Wappen bei 100 Würfen, ist $B\left(100; \frac{1}{2}\right)$ : $P(X = 48) = \binom{100}{48}\left(\frac{1}{2}\right)^{48} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{52}$. Wahrscheinlichkeitstheorie.
Eine Münze wurde 100 mal geworfen. Dabei trat 48 mal Wappen auf. Kann man die Münze als ideal ansehen? Mathematische Statistik.

## 4.1 Grundbegriffe

**Grundgesamtheit** Gesamtheit der für eine stochastische Untersuchung relevanten Merkmalsträger.

**Stichprobe vom Umfang $n$** - aus $n$ Elementen bestehende Teilmenge der Grundgesamtheit, deren Elemente hinsichtlich der interessierenden Merkmale untersucht werden.

**Aufgabe der mathematischen Statistik** Schlussfolgerungen über die Merkmale der Elemente der Grundgesamtheit auf Grund der Stichprobenergebnisse ziehen.

Konkretere Aufgabe: Untersuchung eines quantitativen Merkmals an den Objekten der Grundgesamtheit $\Rightarrow$ „Messwerte“ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus der Stichprobe vom Umfang $n$. Dem quantitativen Merkmal wird eine Zufallsgröße $X$ mit einer gewissen unbekannten Verteilungsfunktion $F$ zugeordnet. Auf Grund der Messwerte sollen Aussagen über $F$ gewonnen werden. LaTeX(Hier fehlen die Vorlesungen ab 23. Januar...)

# 5 Klausurvorbereitung

Anmerkung: Nicht in der Klausur: 1. Serie, Verteilungsfunktion für $\frac{1}{X}$, Aufgabe 3 der 7. Serie.

## 5.1 9. Serie

- 45 rote und 15 schwarze Kugeln, 4 unter Zurücklegen entnehmen; $X$ - Anzahl der entnommenen roten
- wie 1, aber ohne Zurücklegen; $Y$ - Anzahl der entnommenen roten
- Zahl der Sternschnuppen in gewissem Zeitintervall sei Poisson-verteilt. Im Durchschnitt alle zehn Minuten eine Sternschnuppe. Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb einer Viertelstunde genau zwei Sternschnuppen beobachtet werden?

| | $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ ist $B\left(4;\frac{45}{60}\right)$ -verteilt $\rightarrow$ | $P(X=k)$ | $0,0039$ | $0,0469$ | $0,2109$ | $0,4219$ | $0,3164$ | $EX = np = 4\cdot\frac{3}{4} = 3$ |
| $Y$ ist $H(60;45;4)$ -verteilt $\rightarrow$ | $P(Y=k)$ | $0,0028$ | $0,0420$ | $0,2132$ | $0,4365$ | $0,3055$ | $EY = \frac{M}{N}n = \frac{3}{4}\cdot 4 = 3$ |

Zahl der Sternschnuppen in einer V Stunde $P(X=2) = \frac{x^2}{2!}e^{-\lambda} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2!}e^{-\frac{3}{2}} =$ $P(X\geq 2) = 1-P(X<2) = 1-[P(X=0)+P(X=1)] = 1-\left[e^{-\frac{3}{2}}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^1}{1!}e^{-\frac{3}{2}}\right] \approx$ $0,442$

## 5.2 10. Serie

1. Sechs ideale Würfel werden einmal geworfen. Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einmal, genau einmal bzw. genau zweimal die „1“ auftaucht.
   a) exakt
   b) näherungsweise mit Hilfe der Poisson-Verteilung?

   $X$-Anzahl von „1“ ist $B\left(6;\frac{1}{6}\right)$-verteilt

$$P(X = k) = \binom{6}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{6-k}, k = 0, 1, \dots, 6$$

a)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0,6651$$
$$P(X = 1) = 6 \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0,4019$$
$$P(X = 2) = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx= 0,2009$$

b) Grenzwertsatz von Poisson $\Rightarrow$ für großes $n$ und kleines $p$ ist eine $B(n; p)$-verteilte näherungsweise Poisson-verteilt mit $x = np; \Rightarrow \lambda = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 1 - e^{-1} \approx 0,6321$$
$$P(X = 1) \approx \frac{1^1}{1!} e^{-1} \approx 0,3679$$
$$P(X = 2) \approx \frac{1^2}{2!} e^{-1} \approx 0,1839$$

2. Zeitdauer (in min) eines Beratungsgesprächs sei exponentialverteilt mit $\alpha = \frac{1}{45}\,\text{min}^{-1}$.
   a) Wahrscheinlichkeit, dass das Gespräch höchstens eine Stunde dauert?
   b) Mittlere Zeitdauer eines Gesprächs?

   $X$-Zeitdauer in min

   a)

$$P(X \leq 60) = \int_0^{60} \frac{1}{45} e^{-\frac{1}{45}x} dx = \frac{1}{45} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{45}} \left[e^{-\frac{1}{45}x}\right]_0^{60} = 1 - e^{-\frac{4}{3}} \approx 0,7364$$

   b) Wegen $EX = \frac{1}{2}$ kann die mittlere Zeitdauer mit $\frac{1}{2} = 45\,\text{min}$ geschätzt werden.

3. $x$ Grad Celsius $\rightarrow$ $y$ Grad Fahrenheit: $y = \frac{9}{5}x + 32$

   $Y$ - Messung in Grad Fahrenheit ist $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt

   $\Rightarrow X$ ist ebenfalls normalverteilt $X = \frac{5}{9}(Y - 32) = \frac{5}{9}Y - \frac{160}{9}$

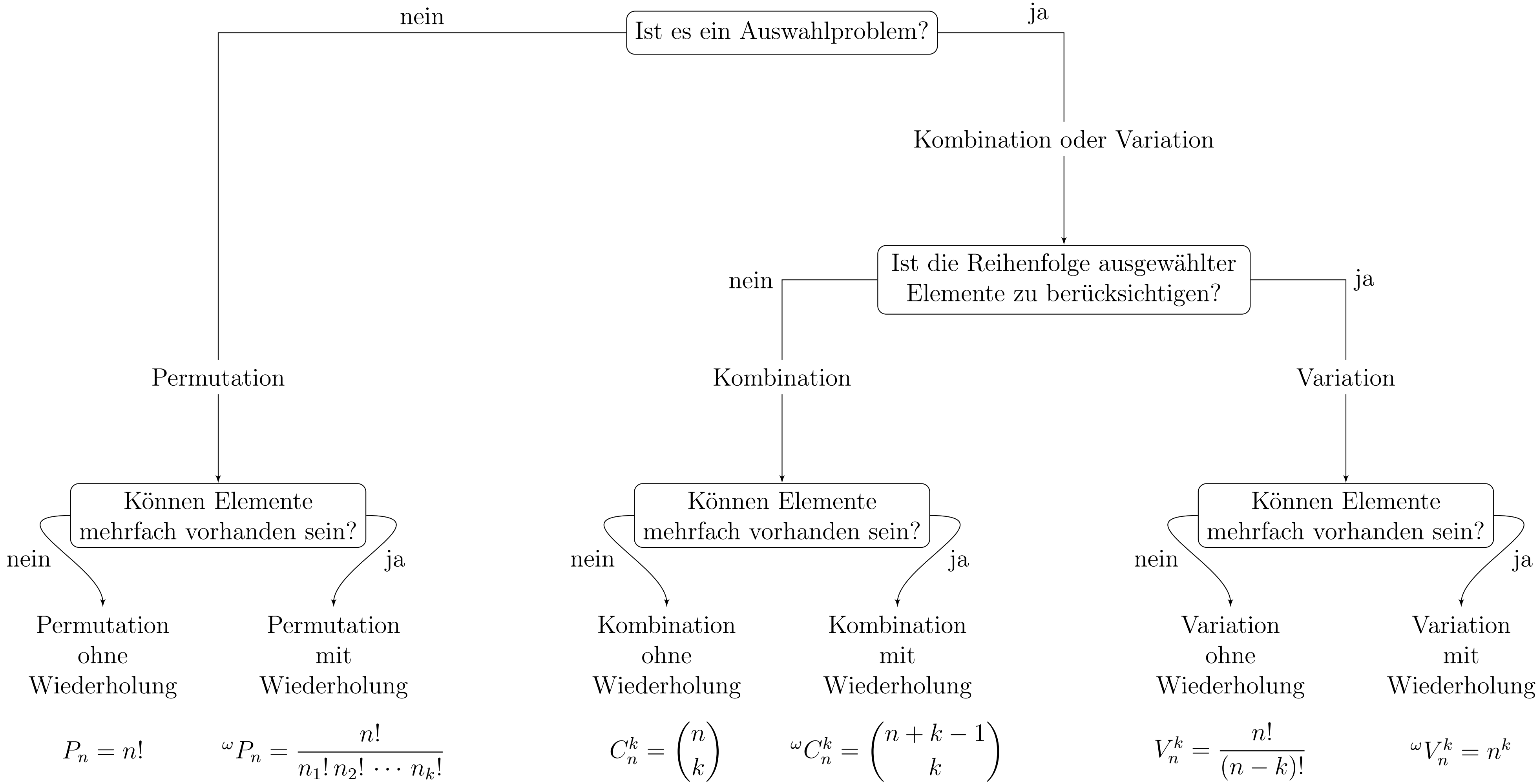
$$\Rightarrow \mu_x = EX = \frac{5}{9}EY - \frac{160}{9} = \frac{5}{9}\mu - \frac{160}{9}$$
$$\sigma_x^2 = \operatorname{Var} X = \left(\frac{5}{9}\right)^2 \operatorname{Var} Y = \frac{25}{81}\sigma^2$$

## 5.3 11. Serie

1. Anzahl der nichtnegativen ganzzahligen Lösungen von $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$.

   1. Lösung: Wähle $k$ mal ein Element aus der Menge der Symbole $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n\}$ aus. Die Anzahl, wie oft das Symbol $x_j$ ausgewählt wurde, entspricht dem Wert von $x_j$ in der Gleichung $j = 1, \ldots, n$.

# 6 Anhang


Ist es ein Auswahlproblem?
nein
ja
Kombination oder Variation
Ist die Reihenfolge ausgewählter Elemente zu berücksichtigen?
nein
ja
Permutation
Kombination
Variation
Können Elemente mehrfach vorhanden sein?
nein
ja
Permutation ohne Wiederholung
Permutation mit Wiederholung
$P_n = n!$
${}^{\omega}P_n = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$
Können Elemente mehrfach vorhanden sein?
nein
ja
Kombination ohne Wiederholung
Kombination mit Wiederholung
$C_n^k = \binom{n}{k}$
${}^{\omega}C_n^k = \binom{n+k-1}{k}$
Können Elemente mehrfach vorhanden sein?
nein
ja
Variation ohne Wiederholung
Variation mit Wiederholung
$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
${}^{\omega}V_n^k = n^k$