UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Vorlesung 5 - Relationen

Diskrete Strukturen (WS 2024-25)

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

Mengenlehre

- Für eine Menge M ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ die Menge aller Teilmengen von M
- Jede Menge kann entweder endlich oder unendlich sein. Für endliche Mengen M bezeichnen wir mit $|M|$ die Anzahl ihrer Elemente, auch Kardinalität genannt.
- $$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}.$$

Vollständige Induktion und Induktionsbeweise

- Zunächst zeigen wir die Behauptung für den Fall $n = 0$ (Induktionsanfang).
- Anschließend wählen wir eine beliebige natürliche Zahl n und setzen voraus, dass die Behauptung für n bereits gezeigt ist (Induktionshypothese).
- Dann zeigen wir die Induktionsbehauptung - die Bahauptung fúr den Fall $n + 1$ unter Rückgriff auf die Induktionshypothese.

- Beispiel: Jede natürliche Zahl $n > 1$ hat eine Primzahlzerlegung

  Beweis. Wir verwenden die Induktion über die natürlichen Zahlen n, beginnend mit 2

- Induktionsanfang: Die Behauptung ist wahr, wenn $n = 2$, da 2 eine Primzahl ist.

- Induktionshypothese: jede natürliche Zahl m mit $2 \leq m \leq n$ hat eine Primzahlzerlegung.

- Induktionsbehauptung: Wir müssen zeigen, dass $n + 1$ eine Primzahlzerlegung hat.

- Beweis der Induktionsbehauptung:
  - Wenn $n + 1$ eine Primzahl ist, dann hat insbesondere $n + 1$ eine Primzahlzerlegung.
  - Wenn nicht, dann können wir $n + 1 = ab$ schreiben, mit $a, b \leq n$.
  - Nach der Induktionshypothese, haben a und b eine Primzahlzerlegung, d.h. $a = p_1, \dots p_l$, $b = q_1, \dots, q_k$ für einige Primzahlen $p_1, \dots, p_l, q_1, \dots, q_k$.
  - Dann ist $n + 1 = p_1 \dots p_l q_1 \dots q_k$, was bedeutet, dass $n + 1$ eine Primzahlzerlegung hat.

- Wir haben unsere grundlegende Einführung in die Mengenlehre abgeschlossen.
- Alle mathematischen Strukturen können mit Hilfe von Mengen definiert werden. Doch wenn wir über Strukturen wie Zahlen, Graphen usw. nachdenken, gehen wir fast nie bis zu den Mengen zurück.
- Dies ist sehr analog zu der Situation mit modernen Computern: Einerseits stimmt es, dass jeder Computer in seinem Kern $0/1$-Variablen mit den Grundoperationen $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ manipuliert. Wir brauchen uns damit aber nicht zu befassen wenn wir ein Dokument bearbeiten, im Internet surfen oder Musik auf dem Computer hören.
- Neue Struktur: geordnetes Paar. Gegeben sind zwei Objekte A und B, Wir können das geordnete Paar (A, B).

Unterschiede von (A, B) im Vergleich zur Menge $\{A, B\}$.

- Wenn $A \neq B$, dann spielt die Reihenfolge eine Rolle, d.h. $(A, B) \neq (B, A)$,
- Wenn $A = B$, dann $\{A, B\} = \{A\}$, Nichts ähnliches gescheht für das geordnete Paar. Z.B. Wir können die geordnete Paare $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, usw. betrachten.

- Mit Mengen als Bausteinen:. “Kuratowskis geordnetes Paar”: Bei gegebenen Objekten A und B definieren wir $(A, B) := \{\{A\}, \{A, B\}\}$.
- Schlüsseleigenschaft: $(A, B) = (C, D)$, genau dann, wenn $A = C$ und $B = D$.
- Es gibt auch andere mögliche mengentheoretische Definitionen. Manchmal betrachtet man das geordnete Paar als ein Grundbegriff, ähnlich wie die Mengen.
- Aber das ist uns nicht wichtig. Die Analogie zur Informatik ist: Wenn wir im Internet surfen, ist es uns ziemlich egal, welchen Webbrowser wir benutzen und wie genau sein Quellcode aussieht, solange er uns den Zugriff auf die für uns wichtigen Webdienste ermöglicht.

- Kartesisches Produkt Seien M und N zwei Mengen. Dann

$$M \times N := \{(m, n) \mid m \in M, n \in N\} .$$

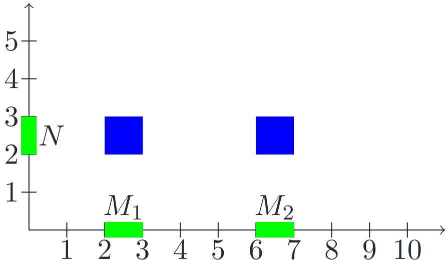
- $M \times N$ ist die Menge aller geordneten Paare von einem Element m aus M gefolgt von einem Element n aus N.
- Wir betonen dass wenn $M \neq N$ dann auch $M \times N \neq N \times M$.

- **Beispiel:** $M = \{1, 2, 3\}$, $N = \{1, 3\}$

$$M \times N = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,3)\}.$$

- **Beispiel:** $M_1 = [2,3]$, $M_2 = [6,7]$, $N = [2,3]$.

$$(M_1 \cup M_2) \times N =$$



- Seien M und N zwei Mengen (möglicherweise mit $M = N$). Eine **Relation** R von M nach N ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$.
- Ist $M = N$, so heißt R auch Relation auf M.
- Statt $(m, n) \in R$ schreiben wir auch $m \; R \; n$ oder $R(m, n)$ oder $m \sim_R n$. Analog $m \not R \; n$ oder $m \not\sim_R n$ wenn $(m, m) \notin R$.
- Relationszeichen bindet stärker als die logischen Junktoren:

$$(x \sim y \;\wedge\; y \sim x) \;\rightarrow\; x = y \quad \text{heißt} \quad \big((x \sim y) \wedge (y \sim x)\big) \rightarrow (x = y).$$

- Relationen sind sehr nützlich, um andere mathematische Strukturen zu definieren, und um die Strukturen der realen Welt zu modellieren.

- Die leere Relation $\emptyset \subseteq M \times N$ und $M \times N$ selbst sind Relationen von M nach N.
- Sei B die Menge der Bundesbürger. Die Menge

$$\{(p,n) \in B \times \mathbb{N} \mid p \text{ hat Identifikationsnummer } n\}$$

  ist eine Relation von B nach $\mathbb{N}$.
- Die Menge $\{(n,n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$.
- Die Teilmengerelation $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$.

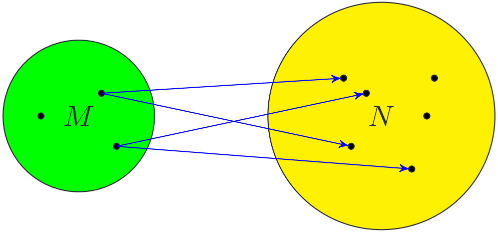
- Die Freund-Relation auf der Menge F der Facebook-Nutzer

$$\{(x, y) \in F \times F \mid x \text{ ist Facebook-Freund von } y\}$$

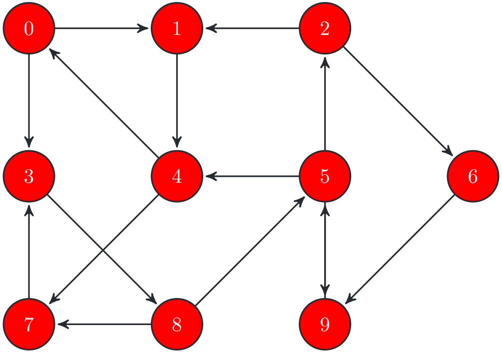
  ist eine Relation.

- Für jede Menge M ist die Identität $\mathrm{id}_M = \{(m, m) \mid m \in M\}$ eine Relation auf M.
  Gewöhnlich schreibt man $x = y$ statt $x \sim_{\mathrm{id}_M} y$.

Relation von M nach N

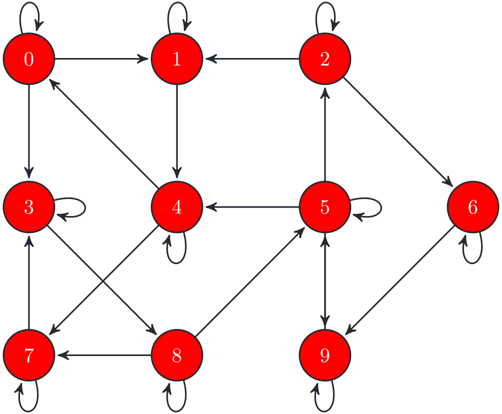


Relation auf $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$



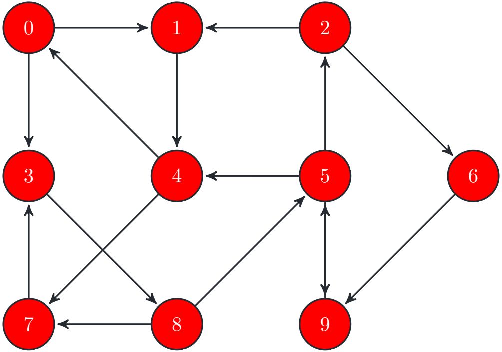
Sei $R \subseteq M \times M$ ein Relation auf M. R heißt

- reflexiv, falls jedes Element x von M steht in Relation zu sich selbst.
  $\forall x(x \in M \to (x, x) \in R)$,



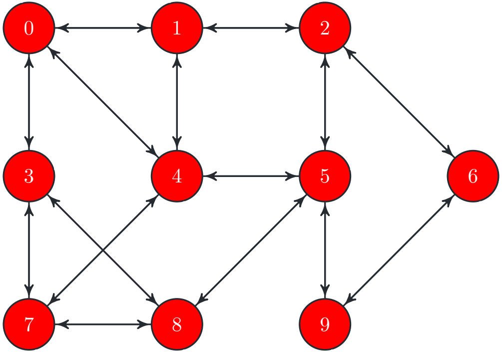
- Reflexivität: Alle Elemente haben Schleifen. z. B. $=$ ist reflexiv, $<$ ist nicht reflexiv, $\subseteq$ ist reflexiv,

- irreflexiv, falls kein Element x von M steht in Relation zu sich selbst. $\forall x(x \in M \rightarrow (x,x) \notin R)$,



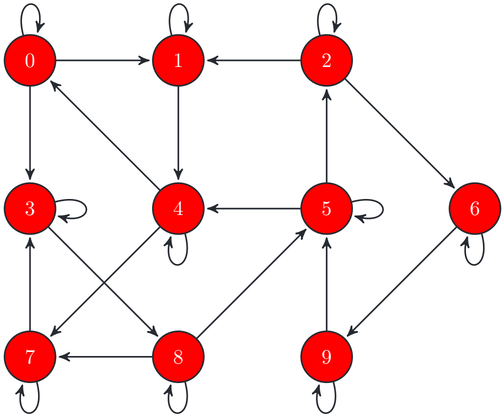
- Irreflexivität: Kein Element hat Schleifen.
- z.B. $<$ is irreflexiv

- symmetrisch, falls wenn x in Relation zu y steht, dann steht auch y in Relation zu x. $\forall x, y\big((x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R\big)$,



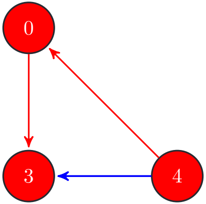
- Symmetrie: Jeder Pfeil ist beidseitig. Z.B. $=$ is symmetrisch, Facebook-frenschaft ist symmetrisch.

- antisymmetrisch, falls wenn $x \sim y$ und $y \sim x$ dann $x = y$.
  $\forall x, y\Big(\big((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R\big) \to x = y\Big)$,



- Antisymmetrie: Kein Pfeil ist beidseitig, mit Ausnahme von Schleifen. Z.B. $<$, $\leq$ und $\subseteq$ sind antisymmetrisch.

- transitiv, falls $x \sim y$ und $y \sim z$ impliziert $x \sim z$.
  $\forall x, y, z\Big(\big((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R\big) \to (x,z) \in R\Big)$.



- Transitivität: "Für jeden Weg existiert auch der direkte Weg." Z.B .$<$ und $\leq$ sind transitiv.

- vollständig, falls für alle verschiedene Elemente $x, y \in M$ steht x in Relation zu y oder y in Relation zu x $\forall x, y \in M (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$
- Z.B. $\leq$ ist vollständig, $<$ is nicht vollständig.

- Sei $R \subseteq M \times N$ eine Relation. Die inverse Relation R^{-1} von R:

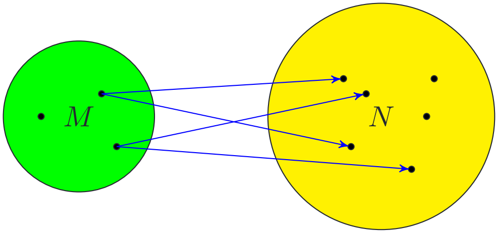
$$R^{-1} := \{(n, m) \in N \times M \mid (m, n) \in R\}.$$

- Die Inversion bewirkt also einen Tausch der Komponenten bzw. eine Umkehr der Pfeile.
- Beispiel: Sei $R := \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 2)\}$. Dann ist

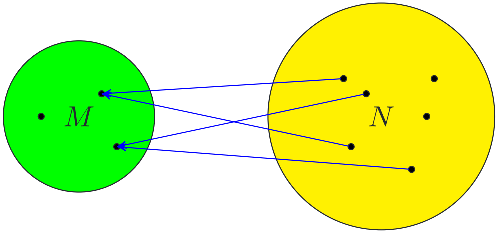
$$R^{-1} = \{(1, 1), (3, 1), (2, 2), (4, 2), (2, 3)\}.$$

- Beispiel: Die inverse Relation von $<$ ist $>$.

R - Relation von M nach N



R^{-1} - Relation von N nach M



- Seien $R \subseteq M \times N$ und $R' \subseteq N \times P$ Relationen.
- Die Komposition von R gefolgt von R', geschrieben als $R\,;R'$:

$$R\,;R' := \big\{(m,p) \in M \times P \colon \exists n \in N\; R(m,n) \wedge R'(n,p)\big)\big\}.$$

- Beispiel. Seien

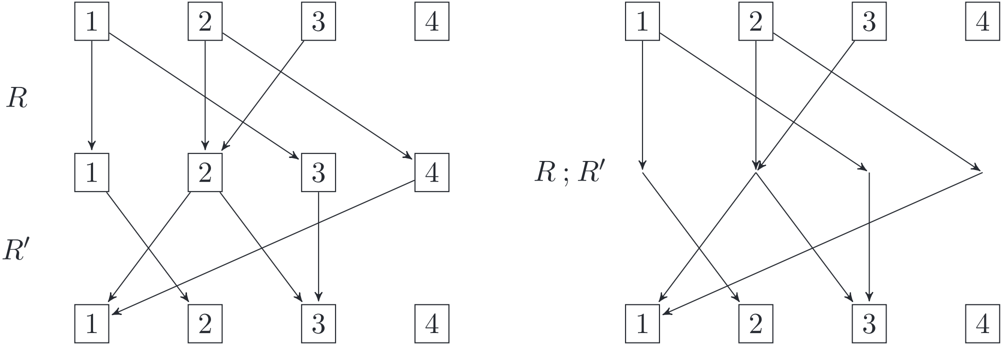
$$R := \{(1,1),\ (1,3),\ (2,2),\ (2,4),\ (3,2)\}$$

und

$$R' := \{(1,2),\ (2,1),\ (2,3),\ (3,3),\ (4,1)\}.$$

Dann ist

$$R\,;R' = \{(1,2),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,3),\ (3,1),\ (3,3)\}.$$


1
2
3
4
R
1
2
3
4
R'
1
2
3
4
1
2
3
4
R ; R'
1
2
3
4

- Motivation: Häufig haben wir eine Menge von Objekten, zum Beispiel verschiedene Farbprodukte. Wir interessieren uns aber nur für eine bestimmte Eigenschaft, z. B. die Farbe.
    - ▶ In diesem Fall könnten wir sagen, dass zwei Farbprodukte “gleich” sind, wenn sie die gleiche Farbe haben.
    - ▶ In einem Geschäft könnte es 50 verschiedene Farbprodukte geben, aber wenn es nur zwei Farben gibt, rot und blau, dann könnten wir sagen, dass das Geschäft nur rote und blaue Farbprodukte verkauft.
- Wir könnten uns nur für die Parität einer gegebenen natürlichen Zahl interessieren. In diesem Fall gibt es natürliche Zahlen nur in zwei Arten: gerade und ungerade.
- Wir könnten uns nur für die Anzahl der verschiedenen Primteiler einer natürlichen Zahl interessieren. Dann wären 30 und 105 voneinander ununterscheidbar.

- Es gibt zwei gleichwertige mathematische Möglichkeiten zu sagen, dass wir bestimmte Objekte als “gleich” betrachten. Wir beginnen mit den Äquivalenzrelationen.
- Sei M eine Menge und sei $\sim$ eine Relation auf M. Wir sagen, dass M eine Äquivalenzrelation ist, wenn M hat die folgenden Eigenschaften:
    - reflexiv (Jedes Objekt a ist ununterscheidbar von a selbst),
    - symmetrisch (Wenn a ununterscheidbar von b ist, dann ist auch b ununterscheidbar von a), und
    - transitiv (Wenn a ununterscheidbar von b und b ununterscheidbar von c ist, dann ist auch a ununterscheidbar von c.

- Oft benutzen wir das Zeichen $\equiv$ für Equivalenzrelationen.
- Für $m \in M$ beliebig ist
$$[m]_{\equiv} := \{x \in M : m \equiv x\}$$
- $[m]_{\equiv}$ heißt die Äquivalenzklasse von m, (oder die $\equiv$-Äquivalenzklasse von m).
- Wir sagen auch dass m ein Vertreter oder Repräsentant von der Klasse $[m]_{\equiv}$ ist. Sofern $\equiv$ sich aus dem Kontext ergibt, schreiben wir einfach $[m]$ statt $[m]_{\equiv}$.
- Beispiel: Identität ist eine Äquivalenzrelation.
- Keine Äquivalenzrelationen: $<$ auf $\mathbb{N}$, $\subseteq$ auf $\mathcal{P}(M)$ mit $M \neq \emptyset$.

- Beispiel: die Relation $R_2 := \{(n,n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \colon 2 \mid n - n'\}$ ist eine Äquivalenzrelation.

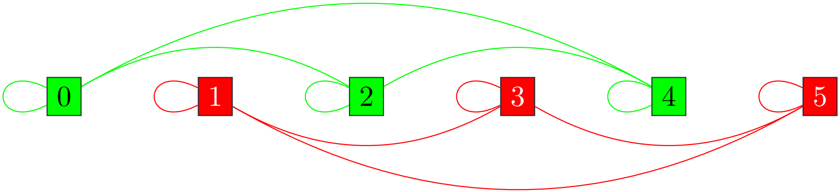
Beweis.

- Reflexivität: Für alle $x \in \mathbb{N} \quad 2 \mid x - x = 0$, also $(x,x) \in R_2$.
- Symmetrie: Seien $x, y \in \mathbb{N}$ mit $(x,y) \in R_2$. Also $2 \mid x - y$. Dann auch $2 \mid y - x$, womit auch $(y,x) \in R_2$.
- Transitivität: Seien $x, y, z \in \mathbb{N}$, so dass $(x,y) \in R_2$ und $(y,z) \in R_2$. Daher $2 \mid x - y$, und $2 \mid y - z$. Dann $2 \mid (x-y) + (y-z) = x - z$. D.h. $2 \mid x - z$, womit auch $(x,z) \in R_2$. $\square$
- Äquivalenzklassen von R_2:

$$[0]_{R_2} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

$$[1]_{R_2} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$$

$$[2]_{R_2} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$$



- Die Relation R_2 teilt die Zahlen in gerade und ungerade.

Theorem

Für jede Äquivalenzrelation $\equiv$ auf einer Menge M und Elemente $x, y \in M$ gilt

$$x \equiv y \iff [x] = [y].$$

Beweis.

- $(\rightarrow)$ Sei $x \equiv y$. Zu zeigen ist $[x] = [y]$. Wir zeigen zwei Teilmengenbeziehungen.
  - $(\subseteq)$ Sei $z \in [x]$. Dann gilt $x \equiv z$. Mit Symmetrie folgt aus $x \equiv y$ auch $y \equiv x$ und mit Transitivität gilt damit $y \equiv z$. Folglich $z \in [y]$.
  - $(\supseteq)$ Sei $z \in [y]$. Dann gilt $y \equiv z$. Mit Transitivität gilt $x \equiv z$. Folglich $z \in [x]$.
- $(\leftarrow)$ Sei $[x] = [y]$. Gemäß Reflexivität gilt $y \in [y] = [x]$, also $x \equiv y$. $\square$

- Sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M. Wir definieren

$$(M/{\equiv}) := \{[m]_{\equiv} : m \in M\}.$$

- Also $M/{\equiv}$ is die Menge aller Äquivalenzklassen von $\equiv$.
- $M/{\equiv}$ wird auch Quotient von M durch $\equiv$ genannt.
- Beispiel: $(\mathbb{N}/{=}) = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \ldots\}$
- Beispiel: $(\mathbb{N}/R_2) = \{\{0, 2, 4, 6, \ldots\}, \{1, 3, 5, 7, \ldots\}\}$

UNIVERSITÄT
LEIPZIG

VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT!

Łukasz Grabowski
Mathematisches Institut

grabowski@math.uni-leipzig.de