Lösungen Übung 6

Aufgabe 1 (1 Punkt pro Teilaufgabe)**.** Berechnen Sie die folgenden Matrixprodukte.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösung:
(a) Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 14 & 39 \\ 11 & 17 & -9 \\ -2 & 3 & 32 \end{pmatrix}.$$

(b) Es ist

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 25 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 16 \\ 40 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (dabei bezeichnet A^n das n-fache Produkt von A mit sich selbst).

Lösung: Beweis durch vollständige Induktion:
Der Induktionsanfang $n = 1$ ist klar.
Angenommen nun die Formel gilt für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1+n & n + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & 1+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & n(1+n/2-1/2) \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{(n+1)n}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (1 Punkt pro Teilaufgabe)**.** Wir betrachten die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die definiert ist durch

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y-z \\ 3x+y+2z \\ 2x+y+z \end{pmatrix}.$$

Ferner sei $\mathcal{A} = (e_1, e_2, e_3)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$. Zusätzlich betrachten wir noch die geordnete Basis

$$\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

1) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(F)$.
2) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$.
3) Bestimmen Sie gleichfalls $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$.
4) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(F)$.

Lösung:
1) Die Spalten von $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(F)$ sind gegeben durch $F(e_1), F(e_2), F(e_3)$. Es gilt

$$F(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ F(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ F(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Die Spalten von $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ sind $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}(e_1), \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(e_2), \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(e_3)$. Es gilt

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{2}(b_1 - b_2 + b_3), \\ e_2 &= \frac{1}{2}(b_1 + b_2 - b_3), \\ e_3 &= \frac{1}{2}(-b_1 + b_2 + b_3). \end{aligned}$$

Folglich ist

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Die Spalten von $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ sind einfach b_1, b_2, b_3 (denn $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$), also

$$T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Es gilt $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(F) = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(F) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, also

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(F) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 8 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$