Universität Leipzig
Institut für Informatik
Sommersemester 2024

Prof. Dr. Andreas Maletti,
Dr. Erik Paul, Fabian Sauer,
Dr. habil. Karin Quaas

Aufgaben zur Lehrveranstaltung

Berechenbarkeit

Serie 5

- Die Übungsaufgaben werden in den Übungen ab dem 10.6.2024 besprochen.
- Abgabeschluss für Hausaufgaben: **23.6.2024 um 22:00 Uhr** im Moodle-Kurs.
- Sie können gern in 2er-Gruppen abgeben. Bitte schreiben Sie dazu die Namen und Matrikelnummern beider Personen auf das Blatt und reichen Sie Ihre Lösungen über einen Account ein.

Liebe Studis,

habt Ihr Probleme mit den Übungsaufgaben? Die Tutoren des **Offenen Matheraums Informatik** beantworten gerne Fragen zu allen Modulen des ersten Semesters. Ihr findet uns Montags 11 - 13 + 15 - 17 Uhr im Paulinum P401 und Dienstag bis Freitag von 11 - 17 Uhr im Augusteum A412.

Übungsaufgabe 5.1

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die charakteristische Funktion χ_L jeder Menge $L \subseteq \Sigma^*$ ist Turing-berechenbar.

(b) Das Komplement $\overline{H}$ des allgemeines Halteproblems ist nicht semientscheidbar.

(c) Jede Teilmenge einer rekursiv aufzählbaren Sprache ist abzählbar.

(d) Jede Teilmenge einer abzählbaren Sprache ist rekursiv aufzählbar.

Übungsaufgabe 5.2

Sei das *universelle Halteproblem (kurz: $H_\forall$)* definiert durch

$$H_\forall = \{\text{code}(M) \mid M \text{ hält auf allen Wörtern } w \in \mathfrak{B}^*\} \subseteq \mathfrak{B}^*.$$

Zeigen Sie durch Reduktion von $\underline{H}$ (spezielles Halteproblem) dass $H_\forall$ unentscheidbar ist.

Übungsaufgabe 5.3

Für die folgenden Sprachen L_i prüfen Sie bitte, ob der Satz von Rice anwendbar ist, um die Unentscheidbarkeit von L_i zu zeigen.

(a) $L_1 = \{\text{code}(M) \in \mathfrak{B}^* \mid M \text{ hält nicht bei Eingabe } 0\}$

(b) $L_2 = \{\text{code}(M) \in \mathfrak{B}^* \mid M \text{ hat genau drei Zustände}\}$

(c) Sei $G = (N, \mathfrak{B}, S, P)$ eine reguläre Grammatik mit $L(G) \neq \emptyset$, und sei $L_3 = \{\text{code}(M) \in \mathfrak{B}^* \mid M \text{ hält bei Eingabe von } w \text{ falls } w \in L(G)\}$.

Hausaufgabe 5.4 (8)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die halbe charakteristische Funktion ρ_L jeder Menge $L \subseteq \Sigma^*$ ist Turing-berechenbar.

(b) Jede Teilmenge einer rekursiv aufzählbaren Sprache ist semientscheidbar.

(c) Sei M eine beliebige Turingmaschine. Die Sprache $L(M)$ ist abzählbar.

(d) Jede entscheidbare Menge enthält eine unentscheidbare Teilmenge.

Hausaufgabe 5.5 (3)

Sei $v \in \mathfrak{B}^*$. Sei das *Halteproblem auf v (kurz: H_v)* definiert durch

$$H_v = \{\text{code}(M) \mid M \text{ hält auf } v \text{ und auf keinem anderen Wort}\} \subseteq \mathfrak{B}^*.$$

Zeigen Sie durch Reduktion von H_ε (Leerband-Halteproblem) dass H_v unentscheidbar ist.

Hausaufgabe 5.6 (9)

Für die folgenden Sprachen L_i prüfen Sie bitte, ob der Satz von Rice anwendbar ist, um die Unentscheidbarkeit von L_i zu zeigen.

(a) $L_1 = \{\text{code}(M) \in \mathfrak{B}^* \mid M \text{ hält bei Eingabe von } w \text{ gdw. } w \text{ Palindrom ist}\}$

(b) $L_3 = \{\text{code}(M) \in \mathfrak{B}^* \mid \text{das Bandalphabet von } M \text{ enthält mindestens 5 Symbole}\}$