Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

8. PL1 – Normalformen

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

12. Juni 2025
Leipzig

In der letzten Vorlesung

Koinzidenzlemma

Erfüllbarkeit, Tautologien und Co.

Semantische Äquivalenz

Ersetzungstheorem

Folgerung

Fahrplan für diese Vorlesung

Substitution und Überführung
Gebundene Umbenennung
Negationsnormalform
Pränexnormalform
Skolemnormalform

Negationsnormalform

Definition

Eine Formel ϕ ist in Negationsnormalform (NNF), sofern Negationen nur vor atomaren Formeln stehen.

$$\forall x \, \neg \exists y \, (\neg R(f(x), c) \vee \neg (P(x) \wedge \neg Q(d))) \qquad \times$$
$$\forall x \, \exists y \, (\neg R(f(x), c) \vee (P(x) \wedge \neg Q(d))) \qquad \checkmark$$

Proposition

Zu jeder Formel ϕ existiert eine Formel ψ, sodass:

1. $\phi \equiv \psi$, *und*
2. ψ *ist in Negationsnormalform.*

Beweis: Benutze

$$\begin{aligned}
\neg\neg\phi &\equiv \phi \\
\neg(\phi \wedge \psi) &\equiv \neg\phi \vee \neg\psi \\
\neg(\phi \vee \psi) &\equiv \neg\phi \wedge \neg\psi \\
\neg\forall x \, \phi &\equiv \exists x \, \neg\phi \\
\neg\exists x \, \phi &\equiv \forall x \, \neg\phi
\end{aligned}$$

Substitution

- ersetzen einer <u>freien</u> Variable durch einen Term

Definition (für Terme)

Sei $x \in \mathcal{V}$ und $t \in \mathcal{T}$. Wie definieren die Substitution $[x/t]$, $[x/t] : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ mit $s \mapsto s[x/t]$ rekursiv durch:

1. für $y \in \mathcal{V}$:
$$y[x/t] = \begin{cases} t & \text{falls } y = x \\ y & \text{sonst} \end{cases}$$
2. für $c \in \mathcal{C} : c[x/t] = c$
3. für $f \in \mathcal{F}$, $ar(f) = n \geq 1$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$:
$$f(t_1, \ldots, t_n)[x/t] = f\left(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t]\right)$$

$$f(x, y, g(x))[x/h(z)] = f(h(z), y, g(h(z)))$$

(rein syntaktisches ersetzen)

Substitution

Definition (für Formeln)

Sei $x \in \mathcal{V}$ und $t \in \mathcal{T}$. Wir definieren die Substitution $[x/t]$, $[x/t] : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ mit $\phi \mapsto \phi[x/t]$ rekursiv durch:

1. Für atomare Formeln $P(t_1, \ldots, t_n)$:
$$P(t_1, \ldots, t_n)[x/t] = P(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$$
2. für klassische Junktoren:
$$(\varphi \circ \psi)[x/t] = \varphi[x/t] \circ \psi[x/t] \quad \text{wobei } \circ \in \{\wedge, \vee\}$$
$$(\neg\varphi)[x/t] = \neg(\varphi[x/t])$$
3. Für Quantoren $Q \in \{\forall, \exists\}$:
$$(Qy\,\varphi)[x/t] = \begin{cases} Qy\,\varphi & \text{falls } y = x \\ Qy\,\varphi[x/t] & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(\forall y\,(P(x, y) \vee R(h(x))) \wedge \forall x\,(P(h(x), c)))\,[x/h(z)]$$
$$= \forall y\,(P(h(z), y) \vee R(h(h(z)))) \wedge \forall x\,(P(h(x), c))$$

Überführungslemma

- syntaktische Ersetzung innerhalb der Formeln vs. punktuelle Änderung der Belegung

Lemma

Sei $\mathfrak{A}$ eine Struktur, β eine Belegung, x eine Variable, t ein Term und ϕ eine Formel. Sofern $var(t) \cap geb(\phi) = \varnothing$, dann:

$$(\mathfrak{A}, \beta)\,(\phi[x/t]) = \left(\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto \beta(t)]}\right)(\phi)$$

Warum darf t keine Variablen enthalten, die in ϕ gebunden sind?

- betrachte $U^{\mathfrak{A}} = \mathbb{N}$, $P^{\mathfrak{A}} = \{(n, m) \mid n < m\}$, $\beta(x) = 2$, $\beta(y) = 0$
- für $\phi = \exists y\, P(x, y)$ ist $\phi[x/y] = \exists y\, P(y, y)$
- offensichtlich gilt: $(\mathfrak{A}, \beta)\,(\phi[x/y]) = (\mathfrak{A}, \beta)\,(\exists y\, P(y, y)) = 0$, da keine natürliche Zahl echt kleiner als sich selbst
- aber: $\left(\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto \beta(y)]}\right)(\phi) = \left(\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto 0]}\right)(\exists y\, P(x, y)) = 1$, da beispielsweise 0 echt kleiner als 2

Gebundene Umbennung

Lemma (Gebundene Umbennung)

Sei ϕ ein Formel und $y \notin var(\phi)$. Dann gilt:

$$\forall x\, \phi \equiv \forall y\, \phi[x/y] \quad \textit{und} \quad \exists x\, \phi \equiv \exists y\, \phi[x/y]$$

- Variable darf weder gebunden, noch frei vorkommen
- Beispiele:

$$\forall x\, \underbrace{P(x,z)}_{\phi} \equiv \forall y\, P(y,z) = \forall y\, P(x,z)[x/y] \ \checkmark \qquad (y \notin var(\phi))$$

$$\forall x\, \underbrace{P(x,y)}_{\phi} \not\equiv \forall y\, P(y,y) = \forall y\, P(x,y)[x/y] \ \times \qquad (y \in frei(\phi))$$

$$\forall x\, \underbrace{\exists y\, P(x,y)}_{\phi} \not\equiv \underbrace{\forall y\, \exists y\, P(y,y)}_{\equiv \exists y\, P(y,y)} = \forall y\, (\exists y\, P(x,y))\,[x/y] \ \times$$

$$(y \in geb(\phi))$$

- mit Hilfe des Lemmas können wir erreichen, daß keine Variable gleichzeitig gebunden und frei vorkommt

Gebundene Umbennung

Lemma (Gebundene Umbennung)

Sei ϕ ein Formel und $y \notin var(\phi)$. Dann gilt:

$$\forall x\, \phi \equiv \forall y\, \phi[x/y] \quad \textit{und} \quad \exists x\, \phi \equiv \exists y\, \phi[x/y]$$

Beweis: Gegeben Interpretation $(\mathfrak{A}, \beta)$. Es gilt $(\mathfrak{A}, \beta)\,(\forall x\, \phi) = 1$

gdw. für alle $a \in U^{\mathfrak{A}}$ gilt $\left(\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto a]}\right)(\phi) = 1$ (Semantik)

gdw. für alle $a \in U^{\mathfrak{A}}$ gilt $\left(\mathfrak{A}, \left(\beta_{[y \mapsto a]}\right)_{[x \mapsto a]}\right)(\phi) = 1$ (Koinz.-lemma)

gdw. für alle $a \in U^{\mathfrak{A}}$ gilt $\left(\mathfrak{A}, \left(\beta_{[y \mapsto a]}\right)_{[x \mapsto \beta_{[y \mapsto a]}(y)]}\right)(\phi) = 1$

$(a = \beta_{[y \mapsto a]}(y))$

gdw. für alle $a \in U^{\mathfrak{A}}$ gilt $\left(\mathfrak{A}, \beta_{[y \mapsto a]}\right)(\phi[x/y]) = 1$ (Überf.-lemma)

gdw. $(\mathfrak{A}, \beta)\,(\forall y\, \phi[x/y]) = 1$ (Semantik)

$\square$

Bereinigte Form

Definition

Eine Formel ϕ heißt bereinigt, sofern $\mathit{frei}(\phi) \cap \mathit{geb}(\phi) = \emptyset$, und alle Quantoren binden verschiedene Variablen.

$$\forall x\, (R(x,c) \wedge P(y)) \vee \exists y\, \forall x\, (P(x) \wedge \neg Q(y)) \qquad \times$$
$$\forall x\, (\neg R(f(x),z) \vee \exists y\, (P(x) \wedge \neg Q(y))) \qquad \checkmark$$

Proposition

Zu jeder Formel ϕ existiert eine Formel ψ, sodass:

1. *$\phi \equiv \psi$, und*
2. *ψ ist bereinigt.*

Beweis: Systematisches Umbenennen <u>gebundener</u> Variablen.

$$\begin{aligned} & \forall x\, (R(x,c) \wedge P(y)) \vee \exists y\, \forall x\, (P(x) \wedge \neg Q(y)) \\ \equiv\ & \forall z\, (R(z,c) \wedge P(y)) \vee \exists y\, \forall x\, (P(x) \wedge \neg Q(y)) \\ \equiv\ & \forall z\, (R(z,c) \wedge P(y)) \vee \exists v\, \forall x\, (P(x) \wedge \neg Q(v)) \end{aligned}$$

Pränexnormalform

Definition

Eine Formel ϕ ist in Pränexnormalform (PNF), sofern sie bereinigt ist und von der Form:

$$Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \xi$$

mit Quantorenblock $(Q_1, \ldots, Q_n) \in \{\forall, \exists\}^n$ und quantorenfreier Formel ξ, die sogenannte Matrix von ϕ.

$$\forall x \neg \exists y \neg R(f(x), y) \vee \neg \forall x (P(x) \wedge \neg Q(y)) \qquad \times$$
$$\forall x \exists y (\neg R(f(x), c) \vee (P(x) \wedge \neg Q(z))) \qquad \checkmark$$

Proposition

Zu jeder Formel ϕ existiert eine Formel ψ, sodass:

1. $\phi \equiv \psi$, *und*
2. ψ *ist in Pränexnormalform.*

Pränexnormalform

Beweis: Induktion über den Formelaufbau

- Sei $\phi = P(t_1, \dots, t_n)$ atomar. Dann liegt ϕ bereits in PNF vor (bereinigt, da Quantorenblock leer und Matrix ist ϕ selbst)
- Sei $\phi = \neg\phi_1$ und existiere PNF $\psi_1 = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \, \xi_1$ mit $\phi_1 \equiv \psi_1$. Sei $\overline{\forall} = \exists$ und $\overline{\exists} = \forall$. Verwende wiederholt ($n$-mal) $\neg Qx \, \xi \equiv \overline{Q}x \, \neg\xi$ für

$$
\begin{aligned}
\phi &= \neg\phi_1 \\
&\equiv \neg\psi_1 \\
&= \neg Q_1 x_1 \, Q_2 x_2 \, \dots \, Q_n x_n \, \xi_1 \\
&\equiv \overline{Q_1} x_1 \, \neg Q_2 x_2 \, \dots \, Q_n x_n \, \xi_1 \\
&\vdots \\
&\equiv \overline{Q_1} x_1 \, \overline{Q_2} x_2 \, \dots \, \overline{Q_n} x_n \, \neg\xi_1
\end{aligned}
$$

Pränexnormalform

Beweis: Induktion über den Formelaufbau

- Sei $\phi = \phi_1 \circ \phi_2$ mit $\circ \in \{\wedge, \vee\}$ und existiere PNFs ψ_1, ψ_2 mit $\phi_1 \equiv \psi_1$ und $\phi_2 \equiv \psi_2$. Durch Umbenennung der gebundenen Variablen erreichen wir:

$$\psi_1 \equiv Q_1 x_1 \ \ldots \ Q_n x_n \, \xi_1 \qquad \psi_2 \equiv Q'_1 y_1 \ \ldots \ Q'_m y_m \, \xi_2$$

mit $\{x_1, \ldots, x_n\} \cap \{y_1, \ldots, y_m\} = \emptyset$. Verwende wiederholt (genauer $(n+m)$-mal) $Qx\xi \circ \xi' \equiv Qx\,(\xi \circ \xi')$ für $x \notin \mathit{frei}(\xi')$

$$\begin{aligned}
\phi = \phi_1 \circ \phi_2 &\equiv \psi_1 \circ \psi_2 \\
&\equiv Q_1 x_1 \ \ldots \ Q_n x_n \, \xi_1 \circ Q'_1 y_1 \ \ldots \ Q'_m y_m \, \xi_2 \\
&\equiv Q_1 x_1 \ \left(Q_2 x_2 \ \ldots \ Q_n x_n \, \xi_1 \circ Q'_1 y_1 \ \ldots \ Q'_m y_m \, \xi_2\right) \\
&\equiv Q_1 x_1 \ \ldots \ Q_n x_n \ \left(\xi_1 \circ Q'_1 y_1 \ \ldots \ Q'_m y_m \, \xi_2\right) \\
&\equiv Q_1 x_1 \ \ldots \ Q_n x_n \ \left(Q'_1 y_1 \ \left(\xi_1 \circ Q'_2 y_2 \ \ldots \ Q'_m y_m \, \xi_2\right)\right) \\
&\equiv Q_1 x_1 \ \ldots \ Q_n x_n \ \left(Q'_1 y_1 \ \ldots \ Q'_m y_m \ (\xi_1 \circ \xi_2)\right) \\
&\equiv Q_1 x_1 \ \ldots \ Q_n x_n \, Q'_1 y_1 \ \ldots \ Q'_m y_m \ (\xi_1 \circ \xi_2)
\end{aligned}$$

Pränexnormalform

Beweis: Induktion über den Formelaufbau

- Sei $\phi = Qx\,\phi_1$ und existiere PNF $\psi_1 = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n\,\xi_1$ mit $\phi_1 \equiv \psi_1$. Falls für ein Index i, $x = x_i$, dann benenne x_i zu y um. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\phi &= Qx\,\phi_1 \\
&\equiv Qx\,\psi_1 \\
&\equiv Qx\,Q_1 x_1 \ldots Q_{i-1} x_{i-1}\,Q_i x_i\,Q_{i+1} x_{i+1} \ldots Q_n x_n\,\xi_1 \\
&\equiv Qx\,Q_1 x_1 \ldots Q_{i-1} x_{i-1}\,Q_i y\,Q_{i+1} x_{i+1} \ldots Q_n x_n\,\xi_1
\end{aligned}$$

$\square$

Pränexnormalform

- für die Umwandlung in PNF benutze Umformungsschritte aus vorherigen Beweis
- Beispiel:

$$
\begin{aligned}
& \forall x \neg \exists y \neg R(f(x), y) \vee \neg \forall x (P(x) \wedge \neg Q(y)) \\
\equiv\ & \forall x \neg \exists y \neg R(f(x), y) \vee \exists x \neg (P(x) \wedge \neg Q(y)) \\
\equiv\ & \forall x \forall y \neg\neg R(f(x), y) \vee \exists x \neg (P(x) \wedge \neg Q(y)) \\
\equiv\ & \forall x\ (\forall y \neg\neg R(f(x), y) \vee \exists x \neg (P(x) \wedge \neg Q(y))) \\
\equiv\ & \forall x\ (\forall u \neg\neg R(f(x), u) \vee \exists x \neg (P(x) \wedge \neg Q(y))) \\
\equiv\ & \forall x \forall u\ (\neg\neg R(f(x), u) \vee \exists x \neg (P(x) \wedge \neg Q(y))) \\
\equiv\ & \forall x \forall u\ (\neg\neg R(f(x), u) \vee \exists v \neg (P(v) \wedge \neg Q(y))) \\
\equiv\ & \forall x \forall u \exists v\ (\neg\neg R(f(x), u) \vee \neg (P(v) \wedge \neg Q(y))) \quad \checkmark \\
\equiv\ & \forall x \forall u \exists v\ (R(f(x), u) \vee \neg P(v) \vee Q(y)) \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Hörsaalaufgabe

Stellen Sie eine semantisch äquivalente PNF zu nachfolgender Formel her. Bei Fragen konsultieren Sie die Person rechts oder links von Ihnen. (3 min)

$$\neg\,(\forall x\, P(x, y) \wedge \exists x\, Q(x))$$

Skolemnormalform

Definition

Eine Formel ϕ ist in Skolemnormalform (SNF), wenn sie in PNF vorliegt und ihr Quantorenblock nur Allquantoren enthält.

- Thoralf Albert Skolem (1887 - 1963)
- Elimination der Existenzquantoren (durch Skolemisierung)

Definition (Skolemtransformation)

Sei $\phi = Q_1 x_1 \ \ldots \ Q_n x_n \, \xi$ in PNF und $n = |\{i \mid Q_i = \exists\}|$. Die Skolemnormalform von ϕ ergibt sich durch n-maliges Anwenden von:

Sei i kleinster Index mit $Q_i = \exists$, d.h.

$$\phi = \forall x_1 \ \ldots \ \forall x_{i-1} \, \exists x_i \, \xi'$$

dann transformiere mit Hilfe einer Skolemfunktion $f \notin s(\phi)$ zu:

$$\phi' = \forall x_1 \ \ldots \ \forall x_{i-1} \xi'[x_i / f(x_1, \ldots, x_{i-1})]$$

Skolemnormalform

Definition (Skolemtransformation)

Sei $\phi = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \, \xi$ in PNF und $n = |\{i \mid Q_i = \exists\}|$. Eine Skolemnormalform von ϕ ergibt sich durch n-maliges Anwenden von:

Sei i kleinster Index mit $Q_i = \exists$, d.h.

$$\phi = \forall x_1 \ldots \forall x_{i-1} \, \exists x_i \, \xi'$$

dann transformiere mit Hilfe einer Skolemfunktion $f \notin s(\phi)$ zu:

$$\phi' = \forall x_1 \ldots \forall x_{i-1} \xi'[x_i / f(x_1, \ldots, x_{i-1})]$$

Beispiel:

$$\forall x \, \forall y \, \exists z \, \forall u \, \exists v \, (R(u, g(x), z) \lor \neg P(v) \lor Q(y, z, c))$$
$$\rightsquigarrow \forall x \, \forall y \, \forall u \, \exists v \, (R(u, g(x), f(x, y)) \lor \neg P(v) \lor Q(y, f(x, y), c))$$
$$\rightsquigarrow \forall x \, \forall y \, \forall u \, (R(u, g(x), f(x, y)) \lor \neg P(h(x, y, u)) \lor Q(y, f(x, y), c))$$

Welche Beziehung zwischen ϕ und ihrer skolemisierten Form?

Skolemnormalform

Proposition

Sei ϕ in PNF und ψ eine Skolemnormalform von ϕ. Es gilt:

1. $\psi \vDash \phi$, *und*
2. ψ *und* ϕ *sind erfüllbarkeitsäquivalent*

Beweis: Wir zeigen, daß beide Eigenschaften für einzelne Skolemisierungsschritte gelten. Sei also $\phi = \forall x_1 \ldots \forall x_{i-1} \exists x_i \, \xi'$ *und* $\psi = \forall x_1 \ldots \forall x_{i-1} \xi'[x_i/f(x_1, \ldots, x_{i-1})]$ *mit* $f \notin s(\phi)$.
1. Sei $(\mathfrak{A}, \beta)$ *Modell von* ψ *d.h. für alle* $a_1, \ldots, a_{i-1} \in U^{\mathfrak{A}}$ *gilt:*

$$\left(\mathfrak{A}, \beta_{[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_{i-1} \mapsto a_{i-1}]}\right)(\xi'[x_i/f(x_1, \ldots, x_{i-1})]) = 1$$

da $var(f(x_1, \ldots, x_{i-1})) \cap geb(\xi') = \varnothing$ *folgt mit Überführ.-lemma*

$$\left(\mathfrak{A}, \beta_{[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_{i-1} \mapsto a_{i-1}, x_i \mapsto b]}\right)(\xi') = 1 \qquad (*)$$

mit $\beta_{[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_{i-1} \mapsto a_{i-1}]}(f(x_1, \ldots, x_{i-1})) = f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_{i-1}) = b \in U^{\mathfrak{A}}$.
Demzufolge, für alle $a_1, \ldots, a_{i-1} \in U^{\mathfrak{A}}$ *existiert ein* $b \in U^{\mathfrak{A}}$ *mit* $(*)$, *d.h.* $(\mathfrak{A}, \beta)(\phi) = 1$. *Folglich,* $\psi \vDash \phi$.

Skolemnormalform

Proposition

Sei ϕ in PNF und ψ eine Skolemnormalform von ϕ. Es gilt:

1. $\psi \vDash \phi$, *und*
2. ψ *und* ϕ *sind erfüllbarkeitsäquivalent*

Beweis: Wir zeigen, daß beide Eigenschaften für einzelne Skolemisierungsschritte gelten. Sei also $\phi = \forall x_1 \ \ldots \ \forall x_{i-1} \ \exists x_i \ \xi'$ *und* $\psi = \forall x_1 \ \ldots \ \forall x_{i-1} \xi'[x_i/f(x_1, \ldots, x_{i-1})]$ *mit* $f \notin s(\phi)$.
2. Wegen 1. impliziert Erfüllbarkeit von ψ die Erfüllbarkeit von ϕ. Sei ϕ erfüllbar, dann ex. $(\mathfrak{A}, \beta)$, *sodaß für alle* $a_1, \ldots, a_{i-1} \in U^{\mathfrak{A}}$ *ein (möglicherweise auch mehrere)* $b \in U^{\mathfrak{A}}$ *existiert mit:*

$$\left(\mathfrak{A}, \beta_{[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_{i-1} \mapsto a_{i-1}, x_i \mapsto b]}\right)(\xi') = 1$$

Definiere entsprechend eine Auswahlfunktion $u : \left(U^{\mathfrak{A}}\right)^{i-1} \to U^{\mathfrak{A}}$ *und erweitere $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{A}'$ mit* $f^{\mathfrak{A}'} = u$. *Für alle* $a_1, \ldots, a_{i-1} \in U^{\mathfrak{A}'}$ *gilt*

$$\left(\mathfrak{A}', \beta_{[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_{i-1} \mapsto a_{i-1}, x_i \mapsto f^{\mathfrak{A}'}(a_1, \ldots, a_{i-1})]}\right)(\xi') = 1$$

Skolemnormalform

Proposition

Sei ϕ in PNF und ψ eine Skolemnormalform von ϕ. Es gilt:

1. $\psi \models \phi$, *und*
2. ψ *und* ϕ *sind erfüllbarkeitsäquivalent*

Beweis: Wir zeigen, daß beide Eigenschaften für einzelne Skolemisierungsschritte gelten. Sei also $\phi = \forall x_1 \ldots \forall x_{i-1} \exists x_i\, \xi'$ *und* $\psi = \forall x_1 \ldots \forall x_{i-1} \xi'[x_i/f(x_1, \ldots, x_{i-1})]$ *mit* $f \notin s(\phi)$.
2. Da $f^{\mathfrak{A}'}(a_1, \ldots, a_{i-1}) = \beta_{[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_{i-1} \mapsto a_{i-1}]}(f(x_1, \ldots, x_{i-1}))$ *folgt mit Überführungslemma*

$$\left(\mathfrak{A}', \beta_{[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_{i-1} \mapsto a_{i-1}]}\right)(\xi'[x_i/f(x_1, \ldots, x_{i-1})]) = 1$$

Somit $(\mathfrak{A}', \beta)(\psi) = 1$, *d.h.* ψ *ist erfüllbar.* $\square$

Skolemnormalform

Fazit: Zu jeder Formel ϕ existiert eine Formel ψ, sodass:

1. ϕ und ψ erfüllbarkeitsäquivalent, und
2. ψ ist in Skolemnormalform.

Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

8. PL1 – Normalformen

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

12. Juni 2025
Leipzig