Lösungen Übung 2

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)**.**
Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus:
(a) $\text{ggT}(774, 279)$
(b) $\text{ggT}(3591, 1491)$

Lösung:
(a) Der Euklidische Algorithmus liefert

$$\begin{aligned}
774 &= 2 \cdot 279 + 216 \\
279 &= 1 \cdot 216 + 63 \\
216 &= 3 \cdot 63 + 27 \\
63 &= 2 \cdot 27 + 9 \\
27 &= 3 \cdot 9 + 0
\end{aligned}$$

Also ist $\text{ggT}(774, 279) = 9$.
(b) Der Euklidische Algorithmus liefert

$$\begin{aligned}
3591 &= 2 \cdot 1491 + 609 \\
1491 &= 2 \cdot 609 + 273 \\
609 &= 2 \cdot 273 + 63 \\
273 &= 4 \cdot 63 + 21 \\
63 &= 3 \cdot 21 + 0
\end{aligned}$$

Also ist $\text{ggT}(3591, 1491) = 21$.

Aufgabe 2 (1 Punkt pro Teilaufgabe)**.** Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen jeweils in der Form $a + ib$ mit reellem a und b dar.

$(a)\quad (5+2i)(3-3i)$ $\qquad$ $(b)\quad \dfrac{1}{4-3i}$

$(c)\quad (1+2i)^2$ $\qquad$ $(d)\quad \dfrac{2-3i}{2+2i}$

Lösung:
(a) Es ist $(5+2i)(3-3i) = 15 - 15i + 6i - 6i^2 = 21 - 9i$.
(b) Es gilt

$$\frac{1}{4-3i} = \frac{4+3i}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{4+3i}{16-9i^2} = \frac{4+3i}{25} = \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i.$$

(c) Es gilt $(1+2i)^2 = 1 + 4i + 4i^2 = -3 + 4i$.
(d) Es gilt

$$\frac{2-3i}{2+2i} = \frac{(2-3i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = \frac{4-4i-6i+6i^2}{4-4i^2} = -\frac{2}{8} - \frac{10}{8}i = -\frac{1}{4} - \frac{5}{4}i.$$

Aufgabe 3 (3+1 Punkte)**.** Auf der Menge

$$G := \{(a,b,c) : a,b,c \in \mathbb{R}, a \neq 0, c \neq 0\}$$

definieren wir eine Verknüpfung durch

$$(a_1,b_1,c_1) * (a_2,b_2,c_2) := (a_1a_2, a_1b_2 + b_1c_2, c_1c_2).$$

1) Zeigen Sie, dass $(G,*)$ eine Gruppe bildet.
2) Zeigen Sie, dass $(G,*)$ nicht kommutativ ist.

Lösung:
1) Assoziativgesetz:

$$\begin{aligned}
&(a_1,b_1,c_1) * ((a_2,b_2,c_2) * (a_3,b_3,c_3)) \\
&= (a_1,b_1,c_1) * (a_2a_3, a_2b_3 + b_2c_3, c_2c_3) \\
&= (a_1a_2a_3, a_1(a_2b_3 + b_2c_3) + b_1c_2c_3, c_1c_2c_3) \\
&= (a_1a_2a_3, a_1a_2b_3 + (a_1b_2 + b_1c_2)c_3, c_1c_2c_3) \\
&= (a_1a_2, a_1b_2 + b_1c_2, c_1c_2) * (a_3,b_3,c_3) \\
&= ((a_1,b_1,c_1) * (a_2,b_2,c_2)) * (a_3,b_3,c_3)
\end{aligned}$$

Neutrales Element ist $(1,0,1)$, denn für alle $(a,b,c) \in G$ gilt

$$(a,b,c) * (1,0,1) = (a,b,c) = (1,0,1) * (a,b,c).$$

Inverses Element zu $(a,b,c) \in G$ ist $(1/a, -b/(ac), 1/c)$, denn

$$\begin{aligned}
&(a,b,c) * (1/a, -b/(ac), 1/c) = (1, -ab/(ac) + b/c, 1) = (1,0,1) \\
&= (1, b/a - (bc)/(ac), 1) = (1/a, -b/(ac), 1/c) * (a,b,c).
\end{aligned}$$

2) Zum Beispiel ist

$$(1,1,2) * (1,-1,1) = (1,0,2) \neq (1,-1,2) = (1,-1,1) * (1,1,2).$$