Matrikelnummer: ______________________________

Universität Leipzig
Fakultät für Mathematik und Informatik
Institut für Informatik

Prof. Dr. Andreas Maletti,
Dr. Erik Paul, Fabian Sauer,
Dr. habil. Karin Quaas

Prüfungsklausur Berechenbarkeit

Sommersemester 2024, 10.7.2024

Bearbeitungszeit: **60 Minuten** Gesamtpunktzahl: **60 + 3 Punkte**

Allgemeine Hinweise

- Die Klausur besteht aus sechs Aufgaben und einer Zusatzaufgabe.
- Versehen Sie jedes Lösungsblatt mit Ihrer **Matrikelnummer**.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen dokumentenecht in blau oder schwarz auf; **keinesfalls mit Bleistift** und bitte nicht in rot oder grün.
- Als Hilfsmittel ist **ein Blatt DIN A4** (beidseitig) mit Notizen zugelassen. Alle anderen Hilfsmittel (inklusive elektronischer Geräte) sind nicht zugelassen.
- Sie können für Ihre Lösungen jeweils die Aufgabenblätter nutzen oder eigenes Papier verwenden.
- Beweisschritte sind grundsätzlich zu begründen. Alle Resultate aus der Vorlesung und den Übungsaufgaben dürfen zitiert werden.

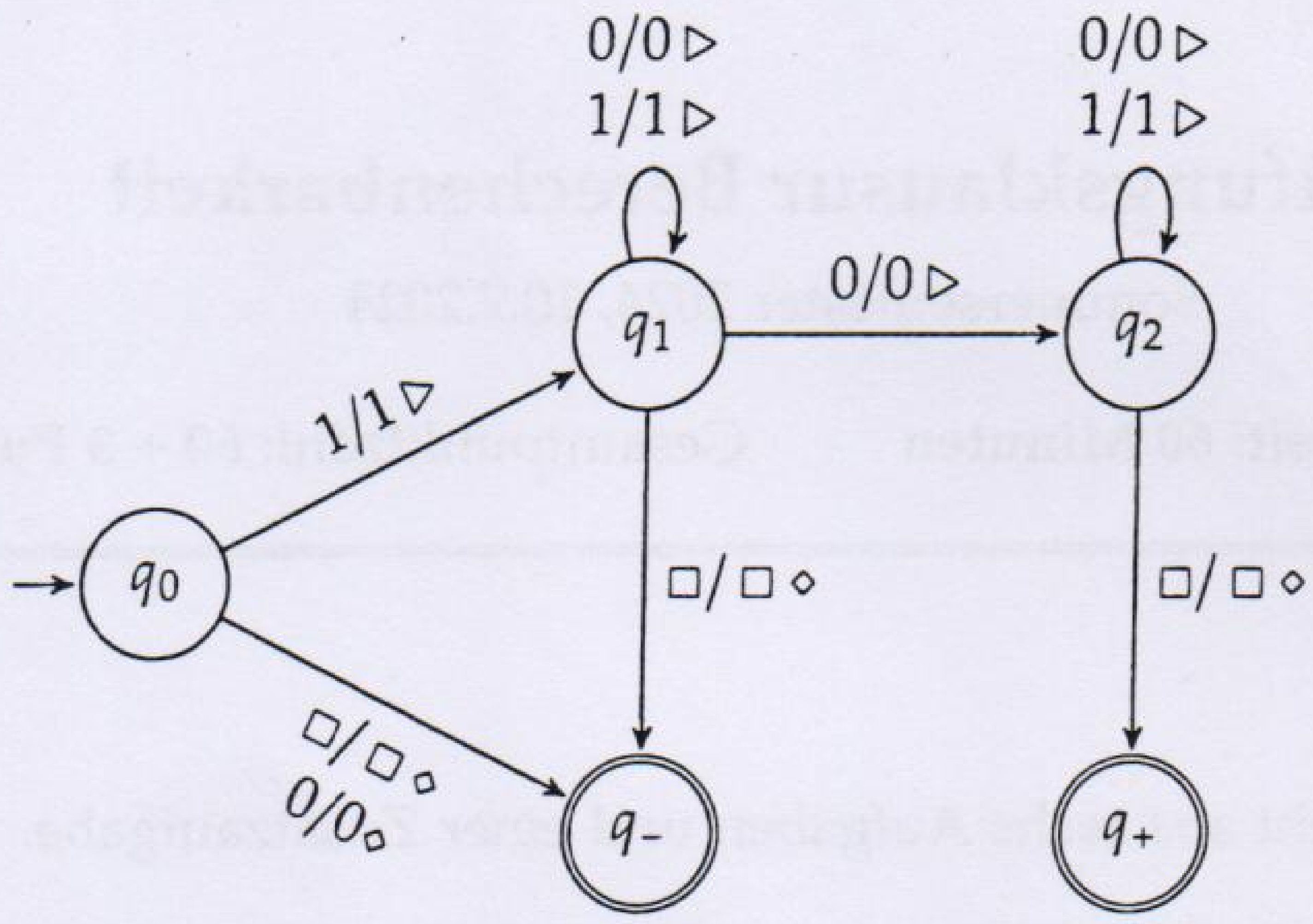
A1	A2	A3	A4	A5	A6	Z	Bonus	Σ	Note

Matrikelnummer:

Aufgabe 1 (Turing-Maschinen)
Gegeben sei die Turing-Maschine

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_+, q_-\}, \{0,1\}, \{0,1,\square\}, \Delta, \square, q_0, q_+, q_-)\ ,$$

wobei Δ durch folgendes Diagramm gegeben ist:



(a) Geben Sie für die beiden Wörter 100 und 11 je eine Folge von Ableitungsschritten von M bis zu einem Finalzustand an. (3)

(b) Geben Sie die von M akzeptierte Sprache $L(M)$ an. (2)

(c) Sei die totale Funktion $f\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ gegeben durch (5)

$$f(w) = \begin{cases} 1w' & \text{falls } w = w'1 \text{ für ein } w' \in \{0,1\}^* \\ w & \text{sonst} \end{cases}$$

für jedes $w \in \{0,1\}^*$. Geben Sie eine deterministische Turing-Maschine M' an, die f berechnet. Stellen Sie dabei die Übergangsfunktion als Diagramm dar, wie in der Aufgabenstellung oben für die Turing-Maschine M zu sehen.

Lösung Aufgabe 1:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (LOOP- und WHILE-Programme)

(a) Sei $c \in \mathbb{N}$. Geben Sie ein Loop-Programm in strikter Syntax an, welches die folgende Funktion $f_c\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechnet. (4)

$$f_c(n) = \max\{0, c - n\}$$

(b) Sei P das folgende Loop-Programm.

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = x_1 + x_1 \\ x_1 = x_1 - x_2 \\ \mathrm{LOOP}(x_1)\ \{ \\ \quad x_3 = x_1 + x_2 \\ \} \\ x_1 = x_3 \end{array}}$$

(i) Geben Sie $|P|_2(3,4)$ sowie $|P|_2(3,8)$ an. (2)

(ii) Wie oft wird die LOOP-Schleife bei einem Aufruf $|P|_2(a,b)$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ ausgeführt? (1)

(iii) Geben Sie die von P berechnete Funktion $|P|_2\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ an. (3)

Lösung Aufgabe 2:

Aufgabe 3 (Rekursion)

(a) Gegeben sei die folgende primitiv rekursive Definition der Funktion h_1: (4)

$$h_1 = \mathrm{pr}[2^{(0)}, \mathrm{nf}\langle \pi_1^{(2)} \rangle]$$

Geben Sie für alle Teilfunktionen von h_1 (inklusive h_1) die Stelligkeit an und welche Funktion diese berechnen.

(b) Geben Sie für die wie folgt definierte Funktion h_2 eine primitiv rekursive Darstellung an. (4)

$$h_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : a \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } a \text{ gerade} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

also $h_2(0) = 0, h_2(1) = 1, h_2(2) = 0$ usw. Sie dürfen in der Vorlesung definierte Funktionen wie add, mult, sub, ... verwenden.

(c) Sei $h_3 = \mu h_2$, wobei h_2 die in Aufgabe (b) definierte Funktion ist. (2)

(i) Zeigen Sie, dass $h_3 = 0^{(0)}$.

(ii) Ist h_3 eine totale Funktion?

Lösung Aufgabe 3:

Aufgabe 4 (Grundbegriffe)

(a) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Alle totalen Funktionen sind berechenbar. (3)

(b) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Das Komplement jeder semientscheidbaren Menge ist unentscheidbar. (3)

(c) Sei $L \subseteq \{0,1\}^*$ eine unendliche, rekursiv aufzählbare Sprache, und sei $u \in \{0,1\}^*$ ein beliebiges Wort. Zeigen Sie, dass die Sprache (4)

$$\{w \cdot u \mid w \in L\}$$

auch rekursiv aufzählbar ist.

Lösung Aufgabe 4:

Aufgabe 5 (Entscheidbarkeit)
Gegeben seien die folgenden Probleme:

$G = \{\text{code}(M) \mid \text{TM } M \text{ hält in } q_+ \text{ auf mindestens einem Wort } w \in \Sigma^* \text{ mit gerader Länge}\}$
$S = \{\text{code}(M) \mid \text{TM } M \text{ hält in } q_+ \text{ auf mindestens einem Wort } w \in \Sigma^*\}$

(a) Zeigen Sie, dass G die Voraussetzungen des Satzes von Rice erfüllt, indem Sie (4)

- eine Funktionsmenge $\mathcal{F} \subseteq \{f\colon \Sigma^* \to \Sigma^* \mid f \text{ berechenbar}\}$ mit $\mathcal{C}(\mathcal{F}) = G$ sowie
- berechenbare Funktionen $g, h\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ mit $g \in \mathcal{F}, h \notin \mathcal{F}$ angeben.

(b) Zeigen Sie $G \leq S$, indem Sie eine Reduktion $f\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ von G auf S beschreiben und argumentieren, dass f tatsächlich eine Reduktion ist, d.h. berechenbar und total mit $w \in G \Leftrightarrow f(w) \in S$. (6)

Lösung Aufgabe 5:

Matrikelnummer:

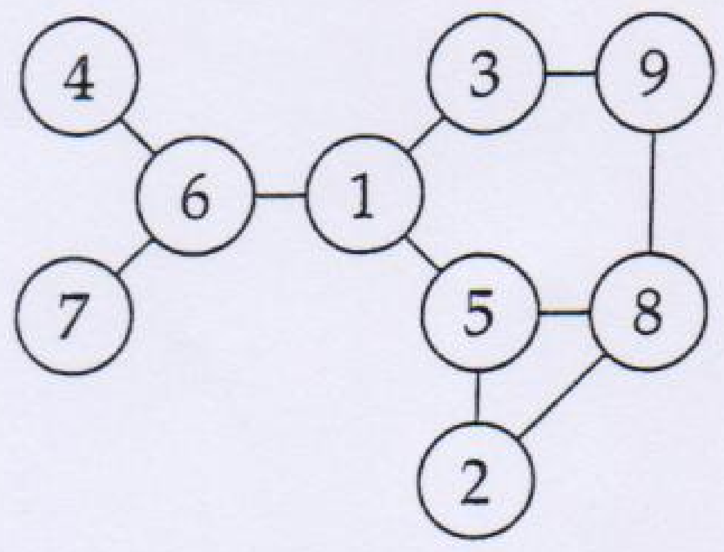
Aufgabe 6 (Komplexität)
Gegeben sei das folgende Entscheidungsproblem:

Problem des einfachen Kreises	
Gegeben:	• Ein ungerichteter Graph $G = (E, K)$ mit Ecken $E = \{1, \ldots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und Kanten $K \subseteq E \times E$, • eine Zahl $\ell \in \mathbb{N}$.
Frage:	Gibt es einen einfachen Kreis der Länge ℓ in G?

Bemerkung: Ein einfacher Kreis in einem Graphen ist ein Weg, der jede Ecke höchstens einmal besucht und dessen Anfangs- und Endecke übereinstimmen. Die Länge eines Weges ist die Anzahl der Kanten, die er enthält.

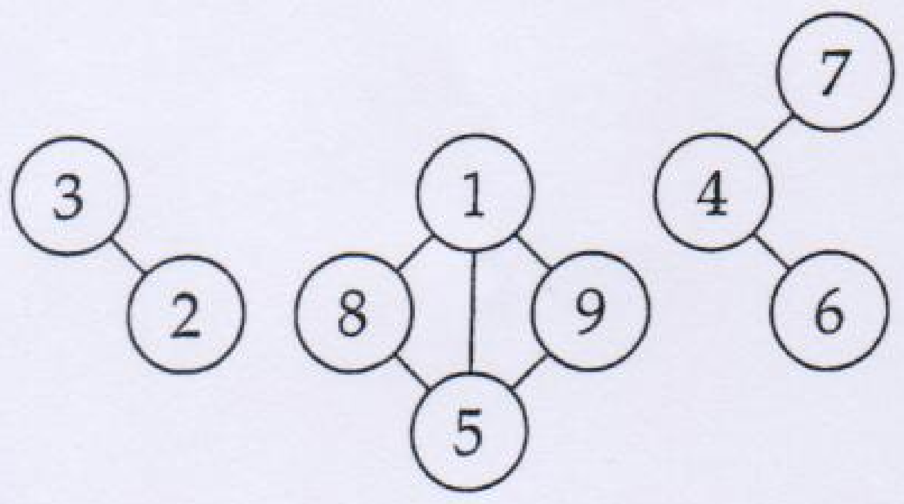
(a) Sind die folgenden Instanzen *positive* oder *negative* Instanzen des Problems des einfachen Kreises? Begründen Sie Ihre Antwort. (3)

(i) Der Graph G ist durch folgendes Diagramm gegeben:



Die geforderte Länge des Kreises ist $\ell = 5$.

(ii) Der Graph G ist durch folgendes Diagramm gegeben:



Die geforderte Länge des Kreises ist $\ell = 5$.

(b) Zeigen Sie, dass das Problem P des einfachen Kreises nichtdeterministisch polynomiell entscheidbar ist, indem Sie eine Zertifikatsrelation $R \subseteq \{0,1,\#\}^* \times \{0,1\}^*$ und ein $k \in \mathbb{N}$ angeben und nachweisen, dass R die folgenden Bedingungen erfüllt: (7)

- $\{w\#z \mid (w,z) \in R\}$ ist deterministisch polynomiell entscheidbar,
- $w \in P$ gdw. ein $z \in \{0,1\}^*$ existiert mit $(w,z) \in R$ und $|z| \leq |w|^k$ für jedes $w \in \{0,1,\#\}^*$.

Wie üblich ist das Problem über $\{0,1,\#\}^*$ codiert. Dazu sei $m = |K|$ die Anzahl der Kanten und $\kappa_1, \dots, \kappa_m$ eine (beliebige) Nummerierung der Kanten. Eine Instanz von P ist dann gegeben durch das Wort

$$\mathrm{bin}(n)\#\mathrm{bin}(\kappa_1)\#\cdots\#\mathrm{bin}(\kappa_m)\#\mathrm{bin}(\ell)$$

wobei $\mathrm{bin}((d,e)) = \mathrm{bin}(d)\#\mathrm{bin}(e)$ für eine Kante $(d,e) \in K$.

Lösung Aufgabe 6:

Zusatzaufgabe

Besitzt die folgende Instanz des Postschen Korrespondenzproblems (PCP) eine Lösung? Falls ja, geben Sie eine Lösung an. Falls nicht, begründen Sie, warum keine Lösung existiert. (+3)

$$\langle (ab, abaa), (aaa, ab), (ab, b) \rangle$$