

Logik

Serie 4

Nikita Emanuel John Fehér, 3793479
Erik Thun, 3794446

30. Mai 2025
Mittwoch 09:15-10:45 Keitsch, Jamie; Gruppe e

H 4-1. Syntax und Semantik

(3 Pkt.)

Sei $I \in \mathcal{B}$ eine Interpretation und $A \in \mathcal{A}$ ein Atom. Zeigen Sie per struktureller Induktion, daß für alle $\varphi \in \mathcal{F}$:

$$I_{[A \mapsto 1]}(\varphi) = I(\varphi[\top/A])$$

H 4-2. Alternative Resolventendefinition

(2 Pkt.)

Seien C_1, C_2 Klauseln. Eine Klausel R^* heißt *Resolvente** von C_1 und C_2 , falls es zwei Literale L_1, L_2 gibt mit:

$$L_1, L_2 \in C_1, \quad \overline{L_1}, \overline{L_2} \in C_2 \quad \text{und} \quad R^* = (C_1 \setminus \{L_1, L_2\}) \cup (C_2 \setminus \{\overline{L_1}, \overline{L_2}\})$$

Zeigen Sie, daß unter *Resolvente** das Resolutionslemma nicht gilt, d.h. es existieren Klauseln C_1 und C_2 , sodaß:

$$\{C_1, C_2\} \not\equiv \{C_1, C_2, R^*\}$$

H 4-3. Kompaktheitssatz

(3 Pkt.)

Gegeben folgende drei Formeltypen:

- $\varphi_i = (A_{3i-2} \wedge A_{3i-1}) \vee (A_{3i-2} \wedge A_{3i}) \vee (A_{3i-1} \wedge A_{3i})$
- $\psi_i = \neg(A_{3i-2} \wedge A_{3i-1} \wedge A_{3i})$
- $\xi_i = A_i \leftrightarrow A_{i^2+1}$

Des Weiteren sei $\phi = \bigcup_{n \geq 1} \phi_n$ wobei $\phi_n = \{\varphi_i, \psi_i, \xi_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, daß ϕ erfüllbar ist.

Hinweise: Überlegen Sie zunächst, was die Wahrheit von $\varphi_i \wedge \psi_i$ für den i -ten Dreierblock an atomaren Aussagen kodiert. Zeigen Sie anschließend per vollständiger Induktion, daß ϕ_n für jedes $n \geq 1$ erfüllbar ist.

- a) Seien $\varphi = (\neg A_1 \vee A_2) \wedge (A_3 \vee \neg A_2)$ und $\psi = A_1 \rightarrow (A_4 \vee A_3)$. Geben Sie eine Interpolante zu φ und ψ an.
- b) Beweisen Sie mit Hilfe des Interpolationstheorems, daß für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$:

Falls $\varphi \models \psi$ und $s(\varphi) \cap s(\psi) = \emptyset$, dann φ unerfüllbar oder ψ tautologisch.

Hinweis: Wir setzen $s(\perp) = \emptyset$.

a) Gegeben sei die prädikatenlogische Formel

$$\varphi = \forall x(P(x, f(y), c) \rightarrow \exists z(Q(f(z), c) \wedge \neg R(x, z, w, c))) \vee S(y, z, c)$$

- i) Markieren (unterstreichen) Sie den Wirkungsbereich von $\exists z$.
- ii) Markieren (Punkt oberhalb) Sie alle freien Vorkommen von Variablen.
- iii) Gilt für die Menge der Teilformeln $t(\varphi)$, daß $|t(\varphi)| = 10$? Ohne Begründung.
- iv) Was ist $ar(Q)$?

b) Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_{PL}$. Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

Falls $\psi \in t(\varphi)$, dann gilt $frei(\psi) \subseteq frei(\varphi)$.

Falls $\psi \in t(\varphi)$, dann gilt $geb(\psi) \subseteq geb(\varphi)$.

- a) Gegeben (\mathfrak{A}, β) mit $U^{\mathfrak{A}} = \mathbb{Z}$, $g^{\mathfrak{A}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $(n, m) \mapsto g^{\mathfrak{A}}(n, m) = n \cdot m$,
 $f^{\mathfrak{A}} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $n \mapsto f^{\mathfrak{A}}(n) = n - 1$, $c^{\mathfrak{A}} = 3$, $\beta(x) = 2$.

i) Bestimmen Sie $\beta(g(g(x, x), f(c)))$.

ii) Geben Sie einen Term t an, sodaß $\beta(t) = \beta(y) \cdot \beta(y) - 4 \cdot (\beta(y) - 1)$.

b)

$$\varphi = \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow \exists z (R(x, z) \wedge R(z, y)))$$

i) Sei (\mathfrak{A}, β) mit $U^{\mathfrak{A}} = \mathbb{Z}$, $<_{\mathbb{Z}} = R^{\mathfrak{A}} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Ist (\mathfrak{A}, β) Modell von φ ?

ii) Sei (\mathfrak{B}, γ) mit $U^{\mathfrak{B}} = \mathbb{R}$, $<_{\mathbb{R}} = R^{\mathfrak{B}} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ist (\mathfrak{B}, γ) Modell von φ ?

Kurze Begründung im Wahrheitsfalle bzw. Angabe einer falsifizierenden Instanz.

- c) Sei $U = \{\square, \triangle, \circ\}$ und $\varphi = \exists x \exists y R(x, y) \wedge \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$

i) Gegeben Sie $R^{\mathfrak{A}} \neq U \times U$ an, sodaß (\mathfrak{A}, β) mit $U^{\mathfrak{A}} = U$ ein Modell von φ ist.

ii) Gegeben Sie $R^{\mathfrak{B}} \neq \emptyset$ an, sodaß (\mathfrak{B}, γ) mit $U^{\mathfrak{B}} = U$ kein Modell von φ ist.