Analysis [für Informatiker]
Übungsblatt 8

Nikita Emanuel John Fehér, 3793479
Erik Thun, 3794446

05. Dezember 2024
Mittwoch 11:15-12:45 Drigalla, Stefan Gruppe a;
Montag 15:15-16:45 Drigalla, Stefan Gruppe b

1) Untersuchen Sie durch Vergleich mit schon bekannten Reihen, oder unter Benutzung von Wurzel- oder Quotientenkriterium, die folgenden Reihen $\sum_n a_n$ auf Konvergenz.

$$(i)a_n = \frac{n^2+1}{2^n}, (ii)a_n = \frac{1}{3n-2}, (iii)a_n = \frac{n}{n^3+7n^2-5}, (iv)a_n = \frac{n!}{2^{n^2}}.$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert

(i)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 &\implies \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2+1}{2^{n+1}}}{\frac{n^2+1}{2^n}} \\
&\implies \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+2n+2)(2^n)}{(2\cdot 2^n)(n^2+1)} \\
&\implies \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+2}{2n^2+2} \\
&\implies \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{2}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{2}{n^2}} \\
&\implies \lim_{n\to\infty} \frac{1+2\frac{1}{n}+2\frac{2}{n^2}}{1+2\frac{1}{n^2}} \\
&\implies \lim_{n\to\infty} \frac{1+0+0}{2+0+0} \\
&\implies \frac{1}{2} < 1
\end{aligned}$$

□

(ii)

$$\text{Da } \frac{1}{3n-2} \geq \frac{1}{n}, \text{ wenn } \frac{1}{n} \text{ divergiert dann auch } \frac{1}{3n-2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ ist harmonische reihe, divergiert}$$

$\square$

(iii)

$$\text{Da } \frac{n}{n^3+7n^2-5} \leq \frac{n}{n^3}, \text{ wenn } \frac{n}{n^3} \text{ konv. dann auch } \frac{n}{n^3+7n^2-5}$$

$$\frac{n}{n^3} \Longrightarrow \frac{1}{n^2}$$

$$\text{verhalten von } \sum_{n}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ bereits bekannt, konvertiert}$$

es handelt sich um die Riemansche Funktion an der stelle 2 und konvergiert zu $\frac{\pi^2}{6}$

$\square$

(iv)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 &\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{n!}{2^{n^2}}} \\
&\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n!)(2^{n^2})}{(2^{(n+1)^2})(n!)} \\
&\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2^{n^2})}{2^{(n+1)^2}} \\
&\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2^{n^2})}{2^{n^2+2n+1}} \\
&\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2^{n^2})}{(2^{n^2})(2^{2n+1})} \\
&\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{2n+1}} \\
&\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^{2n+1}} + \frac{1}{2^{2n+1}} \\
&\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^{2n+1}} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} \\
&\Longrightarrow 0 + 0 = 0 < 1
\end{aligned}$$

$\square$

2)

a) Seien $u, w \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $||u| - |w|| \leq |u - w|$. *[Hinweis △-UGl und Lemma 2.30.a) könnten helfen.]*

$$
\begin{aligned}
& |u| = |u - w + w| \leq |u - w| + |w| \\
\implies & |u| \leq |u - w| + |w| && \Big| - |w| \\
\implies & |u| - |w| \leq |u - w| \\
& |w| = |w - u + u| \leq |w - u| + |u| = |-1| \cdot |u - w| + |u| \\
\implies & |w| \leq |u - w| + |u| && \Big| - |u| \\
\implies & |w| - |u| \leq |u - w| \\
\implies & \max(|u| - |w|, |w| - |u|) \leq |u - w| \\
\implies & \big||u| - |w|\big| \leq |u - w|
\end{aligned}
$$

□

b) Sei $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ eine konvergente Folge. Zeigen Sie, mit a) oder anders, dass

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \Big|\lim_{n\to\infty} z_n\Big|.$$

$$
\begin{aligned}
& \text{Sei } z_n \text{ eine folge in } \mathbb{C} \text{ die gegen } z \in \mathbb{C} \text{ konvergiert:} \\
\implies & \lim_{n\to\infty} z_n = z \\
\implies & \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |z_n - z| < \epsilon \forall n \geq N \\
& \text{zu zeigen } \lim_{n\to\infty} |z_n <= |z| = |\lim_{n\to\infty} z_n| \\
& u := z_n \\
& w := z \\
& \big||u| - |w|\big| \leq |u - w| \\
\implies & \big||z_n| - |z|\big| \leq |z_n - z| \\
& \text{da } \lim_{n\to\infty} z_n \text{ konvertiert} \\
\implies & |z_n - z| \to 0 \text{ für } n \to \infty \\
\implies & \Bigg||z_n| - |z|\Bigg| \to 0 \text{ für } n \to \infty \\
\implies & \lim_{n\to\infty} |z_n| = |z| \\
\implies & \lim_{n\to\infty} |z_n| = \Bigg|\lim_{n\to\infty} z_n\Bigg|
\end{aligned}
$$

□

c) Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Zeigen Sie, wenn $\epsilon > 0$ dann gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: wenn $n \geq N$ dann $\sqrt[n]{a_n} < q + \epsilon$. Schlußfolgern Sie (diese Beobachtung ausbauend oder anders), dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$

d) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$