Lösungen Übung 4

Aufgabe 1 (2 Punkte pro Teilaufgabe)**.** Untersuchen Sie die folgenden Vektoren auf lineare Unabhängigkeit im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$. Falls die Vektoren linear abhängig sind, bestimmen Sie die Dimension ihrer linearen Hülle.

$$(a) \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \; u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:
(a) Sind $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$, so folgt:

$$\begin{aligned} &1) \;\; \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ &2) \;\; 2\alpha + 2\gamma = 0 \\ &3) \;\; 3\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{aligned}$$

Aus 1) und 3) folgt durch Differenzbildung $2\alpha = 0$ und somit $\alpha = 0$.
Aus 2) folgt damit $\gamma = 0$ und aus 1) dann wiederum $\beta = 0$. Also sind die Vektoren linear unabhängig.
(b) Es gilt $u_1 - 2u_2 = u_3$, also sind die Vektoren linear abhängig.
Ferner folgt daraus $u_3 \in \operatorname{span}\{u_1, u_2\}$ und somit gilt $U := \operatorname{span}\{u_1, u_2, u_3\} = \operatorname{span}\{u_1, u_2\}$.
Sind $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda u_1 + \mu u_2 = 0$, so folgt durch Betrachtung der zweiten Koordinate sofort $\lambda = 0$ und somit auch $\mu = 0$, also sind u_1 und u_2 linear unabhängig.
Somit ist $\{u_1, u_2\}$ eine Basis von U und daher gilt $\dim(U) = 2$.
(c) Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3 + \delta w_4 = 0$, so folgt:

$$\begin{aligned} &1) \;\; \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ &2) \;\; \alpha + \beta + \delta = 0 \\ &3) \;\; \alpha + \gamma + \delta = 0 \\ &4) \;\; \beta + \gamma + \delta = 0 \end{aligned}$$

Differenzbildung von 1) und 2) liefert $\gamma - \delta = 0$, also $\gamma = \delta$. Ebenso folgt aus 2) und 3) auch $\gamma = \beta$.
Setzt man dies in 4) ein, so folgt $3\beta = 0$, also $\delta = \gamma = \beta = 0$.
Aus 1) folgt dann auch $\alpha = 0$. Also sind die Vektoren linear unabhängig.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden. Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind.

Lösung: Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} &1) \quad \alpha + \beta a + \gamma a^2 = 0 \\ &2) \quad \alpha + \beta b + \gamma b^2 = 0 \\ &3) \quad \alpha + \beta c + \gamma c^2 = 0 \end{aligned}$$

Differenzbildung von 1) und 2) und 2) und 3) ergibt:

$$\begin{aligned} \beta(a - b) + \gamma(a^2 - b^2) = 0 \\ \beta(b - c) + \gamma(b^2 - c^2) = 0 \end{aligned}$$

Wegen $a \neq b$ und $b \neq c$ folgt daraus mit der dritten binomischen Formel:

$$\begin{aligned} \beta + \gamma(a + b) = 0 \\ \beta + \gamma(b + c) = 0 \end{aligned}$$

Die Differenz dieser beiden Gleichungen ist $\gamma(a - c) = 0$.
Wegen $a \neq c$ folgt daraus $\gamma = 0$.
Dann folgt aus den obigen Gleichungen auch $\beta = 0$ und $\alpha = 0$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Sei $V_{\mathbb{R}}$ der Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, falls $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. f heißt *ungerade*, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist.
Wir setzen

$$G = \{f \in V_{\mathbb{R}} : f \text{ ist gerade}\} \quad \text{und} \quad U = \{f \in V_{\mathbb{R}} : f \text{ ist ungerade}\}.$$

Zeigen Sie, dass G und U Unterräume von $V_{\mathbb{R}}$ sind und dass $V_{\mathbb{R}} = G \oplus U$ gilt.

Lösung:
1) Offensichtlich gilt $0 \in G$ und $0 \in U$.
Sind $f_1, f_2 \in U$, $g_1, g_2 \in G$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so folgt:

$$\begin{aligned}
&(f_1 + f_2)(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = -f_1(x) - f_2(x) = -(f_1 + f_2)(x),\\
&(g_1 + g_2)(-x) = g_1(-x) + g_2(-x) = g_1(x) + g_2(x) = (g_1 + g_2)(x),\\
&(\lambda f_1)(-x) = \lambda f_1(-x) = -\lambda f_1(x) = -(\lambda f_1)(x),\\
&(\lambda g_1)(-x) = \lambda g_1(-x) = \lambda g_1(x) = (\lambda g_1)(x)
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Das zeigt $f_1 + f_2 \in U$, $g_1 + g_2 \in G$, $\lambda f_1 \in U$ und $\lambda g_1 \in G$. Also sind U und G Unterräume von $V_{\mathbb{R}}$.
2) Sei $f \in V_{\mathbb{R}}$ beliebig. Setze

$$g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \quad \text{und} \quad h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt $f = g + h$, $g \in G$ und $h \in U$. Also ist $V_{\mathbb{R}} = G + U$.
Ist ferner $f \in G \cap U$, so ist f sowohl gerade als auch ungerade und daher gilt $f(x) = f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist $f = 0$. Das zeigt $V_{\mathbb{R}} = G \oplus U$.