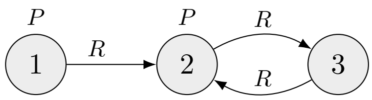
Prof. Carsten Lutz
Maurice Funk, Gustav Grabolle Universität Leipzig SoSe 24

Logik
Übungsblatt 6

Übungsaufgaben werden in den Übungen besprochen. Übungszeitraum: 24.06. – 05.07.
Hausaufgaben werden bewertet. Abgabe über Moodle bis: 9:00 Uhr am 08.07.2024

Übungsaufgabe 1 Seien P ein unäres Relationssymbol und R ein binäres Relationssymbol. Gegeben ist die $\{P, R\}$-Struktur $\mathfrak{A} = (\{1,2,3\}, P^{\mathfrak{A}}, R^{\mathfrak{A}})$ durch folgendes Diagramm:



(a) Geben Sie drei FO-Sätze φ aus $\mathsf{Th}(\mathfrak{A})$ an.

(b) Geben Sie eine endliche Axiomatisierung von $\mathsf{Th}(\mathfrak{A})$ an.

(c) Seien $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ zwei beliebige $\{P, R\}$-Strukturen mit Universen B und C. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

  (i) Wenn $\mathsf{Th}(\mathfrak{B}) \subseteq \mathsf{Th}(\mathfrak{C})$, dann $\mathsf{Th}(\mathfrak{B}) = \mathsf{Th}(\mathfrak{C})$.

  (ii) Sei $\mathfrak{D} = (B \cup C, P^{\mathfrak{B}} \cup P^{\mathfrak{C}}, R^{\mathfrak{B}} \cup R^{\mathfrak{C}})$. Dann $\mathsf{Th}(\mathfrak{D}) = \mathsf{Th}(\mathfrak{B}) \cap \mathsf{Th}(\mathfrak{C})$.

Übungsaufgabe 2

(a) Gegeben sind die Sequenzen

$(S1)$ $\exists x\, R(x,x),\ P(c) \ \Rightarrow\ \exists x\, (P(x) \land R(x,c)),\ \neg\forall x\, R(x,x),$

$(S2)$ $R(d,c) \lor \forall x\, \exists y\, R(x,y) \ \Rightarrow\ R(c,d), \neg\forall x\, R(x,d) \lor \forall x\, P(x).$

Geben Sie für jede der Sequenzen einen SK-Beweis an. Nutzen Sie die Notation aus der Vorlesung. Geben Sie in jedem Schritt die verwendete Regel an und markieren Sie Axiome.

(b) Beweisen Sie, dass die folgende FO-Sätze Tautologien sind. Nutzen Sie dazu den Sequenzenkalkül aus der Vorlesung.

$$\varphi_1 = \forall x\, P(x) \lor \forall y\, Q(y) \to \forall z\, (P(z) \lor Q(z))$$

$$\varphi_2 = \forall x\, R(x,x) \lor \exists x\, \neg R(f(x), x) \lor \exists x\, \exists y\, (R(x,y) \land \neg R(y,y))$$

(c) Eine Schlussregel ist korrekt, wenn aus der Gültigkeit der oberen Sequenzen die Gültigkeit der unteren Sequenz folgt. Beweisen Sie, dass folgende Schlussregeln korrekt sind.

$$\frac{\Gamma \ \Rightarrow\ \Delta, \varphi \qquad \Gamma \ \Rightarrow\ \Delta, \neg\varphi}{\Gamma \ \Rightarrow\ \Delta}\ (R1) \qquad\qquad \frac{\Gamma, \neg\varphi \land \neg\psi \ \Rightarrow\ \psi}{\Gamma, \neg\varphi \land \neg\psi \ \Rightarrow\ \varphi \land \neg\varphi}\ (R2)$$

Übungsaufgabe 3

(a) Geben Sie eine Übersetzung von Aussagenlogik in Prädikatenlogik an. Geben Sie dazu folgendes an:

- Eine $\emptyset$-Struktur $\mathfrak{A}$,
- eine Übersetzung die jeder aussagenlogischen Formel φ eine FO-Formel φ^{fo} zuordnet und
- eine Übersetzung die jeder aussagenlogischen Belegung V eine Zuweisung β^V zuordnet, sodass

$$V \models \varphi \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{A}, \beta^V \models \varphi^{\text{fo}}.$$

(b) Diskutieren Sie: Welche anderen Möglichkeiten gibt es Aussagenlogik in Prädikatenlogik zu übersetzen?

Hausaufgabe 4 $(5 + 5)$

Sei R ein binäres Relationssymbol. Eine Ketten-Struktur hat die Form $\mathfrak{A} = (\{a_0, \dots, a_n\}, R^{\mathfrak{A}})$ mit $R^{\mathfrak{A}} = \{(a_i, a_j) \mid 0 \leq i < j \leq n\}$ und $n \geq 0$. Sei M die Klasse aller Ketten-Strukturen.

(a) Geben Sie eine endliche Axiomatisierung von $\mathsf{Th}(M)$ an. Begründen Sie die Korrektheit ihrer Axiome.

(b) Geben Sie an, ob $\mathsf{Th}(M)$ eine vollständige Theorie ist. Begründen Sie ihre Antwort.

Hausaufgabe 5 $(8 + 8)$

Geben Sie für jede der folgenden Sequenzen einen SK-Beweis an. Nutzen Sie die Notation aus der Vorlesung. Geben Sie in jedem Schritt die verwendete Regel an und markieren Sie Axiome.

(a) $P(c_1),\ (P(c_2) \lor P(c_3)) \ \Rightarrow\ (P(c_1) \land P(c_2)),\ (P(c_1) \land P(c_3))$

(b) $\forall x\, \forall y\, (R(x, y) \lor R(y, x)),\ \neg \exists x\, R(x, x) \ \Rightarrow\ \forall x\, \forall y\, (R(x, y) \land R(y, x))$

Hausaufgabe 6 (6)

Gegeben ist folgende Schlussregel:

$$\frac{\Gamma, \varphi \ \Rightarrow\ \Delta, \psi}{\Gamma, \psi \ \Rightarrow\ \Delta, \varphi}\,(R)$$

Widerlegen Sie, dass (R) korrekt ist. Geben Sie dazu einen SK-Beweis einer *nicht gültigen* Sequenz an, der die Schlussregel (R) verwendet.

Hausaufgabe 7 $(3+3+3+3+3+3)$

Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie in einem Satz.

(a) Jede FO-Formel kann in eine äquivalente FO-Formel umgewandelt werden, die keine Negation benutzt.

(b) Jede FO-Theorie is endlich axiomatisierbar.

(c) Wenn die Sequenz $\{\neg\varphi\} \Rightarrow \emptyset$ gültig ist, dann ist φ eine Tautologie.

(d) Es gibt nur endlich viele verschiedene ableitbare Sequenzen.

(e) Es gibt eine unendliche Menge Γ an FO-Sätzen, sodass Γ erfüllbar ist und jede endliche Teilmenge von Γ aber unerfüllbar ist.

(f) Es gibt einen erfüllbaren FO-Satz, der nur endliche Modelle hat.

Benötigt ihr Hilfe? Kommt vorbei!

Offener Matheraum Informatik:	Mo	11–13 und 15–17 Uhr	P401
	Di–Do	11–17 Uhr	P412
	Fr	11–15 Uhr	P412