Universität Leipzig
Institut für Informatik
Sommersemester 2025

Prof. Dr. Andreas Maletti,
Dr. habil. Karin Quaas,
Fabian Sauer

Aufgaben zur Lehrveranstaltung

Berechenbarkeit

Serie 6

- Die Übungsaufgaben werden in den Übungen ab dem 23.6.2025 besprochen.
- Abgabeschluss für Hausaufgaben: **6.7.2025 um 22:00 Uhr** im Moodle-Kurs.
- Sie können gern in 2er-Gruppen abgeben. Bitte schreiben Sie dazu die Namen und Matrikelnummern beider Personen auf das Blatt und reichen Sie Ihre Lösungen über einen Account ein. Einen Bonuspunkt erhalten Sie in dieser Serie bei Erreichen von **15** Punkten.

Übungsaufgabe 6.1 (Entscheidbarkeit und Berechenbarkeit)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die charakteristische Funktion χ_L jeder Menge $L \subseteq \Sigma^*$ ist Turing-berechenbar.

(b) Das Komplement $\overline{H}$ des allgemeines Halteproblems ist nicht semientscheidbar.

(c) Jede Teilmenge einer rekursiv aufzählbaren Sprache ist abzählbar.

(d) Jede Teilmenge einer abzählbaren Sprache ist rekursiv aufzählbar.

Übungsaufgabe 6.2 (Entscheidbarkeit und Berechenbarkeit)

Sei $L \subseteq \{a, b\}^*$ rekusiv aufzählbar. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Sprachen rekursiv aufzählbar sind.

(a) $L_1 = \{w \cdot a \mid w \in L\}$

(b) $L_2 = \{u \cdot v \mid u, v \in L\}$

Übungsaufgabe 6.3 (Reduktion)

Definiere die Sprache $H_{\text{pal}} \subseteq \mathfrak{B}^*$ durch

$$H_{\text{pal}} = \{w \in \mathfrak{B}^* \mid \text{decode}(w) \text{ hält auf } w' \text{ falls } w' \text{ Palindrom ist}\}$$

Zeigen Sie durch Reduktion von H_ε (Halteproblem auf leerem Band) dass H_{pal} unentscheidbar ist.

Übungsaufgabe 6.4 (Satz von Rice)

Für die folgenden Sprachen L_i prüfen Sie bitte, ob der Satz von Rice anwendbar ist, um die Unentscheidbarkeit von L_i zu zeigen.

(a) $L_1 = \{w \in \mathfrak{B}^* \mid \text{decode}(w) \text{ hält nicht bei Eingabe } 0\}$

(b) $L_2 = \{w \in \mathfrak{B}^* \mid \text{decode}(w) \text{ hat genau drei Zustände}\}$

Hausaufgabe 6.5 (Entscheidbarkeit und Berechenbarkeit) (6)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Menge $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ aller Sprachen über Σ ist nicht rekursiv aufzählbar.

(b) Alle totalen Funktionen sind berechenbar.

(c) Jede Teilmenge einer nicht entscheidbaren Sprache L ist auch nicht entscheidbar.

Hausaufgabe 6.6 (Entscheidbarkeit und Berechenbarkeit) (7)

Seien $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ zwei rekursiv aufzählbare Sprachen über einem endlichen Alphabet Σ sodass $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Weiterhin sei $L = L_1 \cup L_2$. Zeigen Sie, dass L_1 entscheidbar ist, falls L entscheidbar ist.

Hausaufgabe 6.7 (Reduktion) (7)

Definiere die Sprache $H_\exists \subseteq \mathfrak{B}^*$ durch

$$H_\exists = \{w \in \mathfrak{B}^* \mid \text{decode}(w) \text{ hält auf mindestens einem Wort}\}.$$

Zeigen Sie durch Reduktion dass $H_\exists$ unentscheidbar ist.

Hausaufgabe 6.8 (Satz von Rice) (10)

Für die folgenden Sprachen L_i prüfen Sie bitte, ob der Satz von Rice anwendbar ist, um die Unentscheidbarkeit von L_i zu zeigen.

(a) $L_1 = \{w \in \mathfrak{B}^* \mid \text{decode}(w) \text{ berechnet den Nachfolger der Zahl, die durch das Eingabewort } w' \text{ binär dargestellt ist}\}$

(b) $L_2 = \{w \in \mathfrak{B}^* \mid \text{decode}(w) \text{ hält nach eine geraden Anzahl von Schritten bei Eingabe } 001\}$