Hausaufgabenblatt 5

Abgabe am 13.01.2025 um 09.00 in Moodle

Aufgabe 1. In der Vorlesung haben wir gelernt, dass zwei unabhängige Zufallsvariablen stets auch unkorreliert sind, die Umkehrung dieser Aussage jedoch im Allgemeinen nicht gilt.

Beweisen Sie folgende Behauptung. Zwei unkorrelierte Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen X und Y sind unabhängig. Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor:

(a) Zeigen Sie zunächst mit Hilfe der Definition der Kovarianz und der Voraussetzung, dass
$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1).$$

(b) Begründen Sie, warum $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 1, X = 0) + \mathbb{P}(Y = 1, X = 1)$ gilt.

(c) Folgern Sie aus (a) und der Unkorreliertheit von X und Y, dass $\mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 1)$.

(d) Zeigen Sie aufbauend darauf die Unabhängigkeit von X und Y.

Aufgabe 2. Eine stetige Zufallsvariable X mit nichtnegativen reellen Werten heißt exponentialverteilt mit dem Parameter $\lambda > 0$, wenn sie die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt. Sei X exponentialverteilt mit dem Parameter λ.

(a) Zeigen Sie, dass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 3)$.

(d) Zeigen Sie, dass eine exponentialverteilte Zufallsvariable X „gedächtnislos“ ist, d. h. dass für alle positiven Zahlen s und t gilt

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t).$$

Aufgabe 3. Ein Student habe auf seinen Weg zur Universität fünf voneinander unabhängig geregelte Ampelkreuzungen zu passieren. Es bezeichne X die Anzahl der überquerten Kreuzungen bis zum erstmaligen Halt wegen Rot oder dem Erreichen der Universität.

(a) Bestimmen Sie den Wertebereich, die Verteilung, den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von X, falls alle Ampeln gleich lange Rot-Grün-Phasen besitzen und unabhängig voneinander schalten.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Universität erreicht, ohne vor einer Ampel halten zu müssen?

Aufgabe 4. Eine faire Münze wird n mal geworfen. Wir nehmen an, das $n \in 2\mathbb{N}$ gerade ist. Zur Modellierung seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und identisch Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit Parameter $p = 1/2$. Es ist also insbesondere

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

Wir bezeichnen den empirischen Mittelwert mit

$$M_n = \frac{1}{n} S_n, \quad \text{wobei} \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von M_n.

(b) Zeigen Sie
$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(M_n = 1/2) = 0.$$
Hinweis: Benutzen Sie, dass $\mathbb{P}(M_n = 1/2) = \mathbb{P}(S_n = n/2)$ und zeigen Sie zunächst, dass S_n binomialverteilt mit Parametern n und $p = 1/2$ ist. Nutzen Sie dann die Stirlingformel zum Abschätzen der Binomialkoeffizienten.

(c) In der Vorlesung haben wir das schwache Gesetz der großen Zahlen kennengelernt. Formulieren Sie dieses.

Erik Thun, 3794446
Paula Ewald, 3706225
Tim Schlenstedt, 3797524

Aufgabe 1 4/4

a) $\rho(X,Y) = 0 = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\, Var(Y)}}$

$\Rightarrow cov(X,Y) = 0$

$cov(X,Y) = 0 = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$

$\Leftrightarrow \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$

$\mathbb{E}(XY) = 0 \cdot 0 \cdot \mathbb{P}(X=0, Y=0) + 1 \cdot 0 \cdot \mathbb{P}(X=1, Y=0) + 0 \cdot 1 \cdot \mathbb{P}(X=0, Y=1) + 1 \cdot 1 \cdot \mathbb{P}(X=1, Y=1)$

$= \mathbb{P}(X=1, Y=1)$

$\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = (0 \cdot \mathbb{P}(X=0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X=1)) \cdot (0 \cdot \mathbb{P}(Y=0) + 1 \cdot \mathbb{P}(Y=1)) = \mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=1)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X=1, Y=1) = \mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=1)$ ✓

b) Die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Y=1)$ ist genau die Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzigen Ereignisse bei denen $Y=1$ ist, nämlich $\mathbb{P}(X=0, Y=1)$ und $\mathbb{P}(X=1, Y=1)$ ✓

c) $\mathbb{P}(X=0, Y=1) \overset{b)}{=} \mathbb{P}(Y=1) - \mathbb{P}(Y=1, X=1)$

$\overset{a)}{=} \mathbb{P}(Y=1) - \mathbb{P}(X=1) \cdot \mathbb{P}(Y=1)$

$= \mathbb{P}(Y=1) \cdot (1 - \mathbb{P}(X=1))$

$= \mathbb{P}(Y=1) \cdot \mathbb{P}(X=0)$ ✓

d)

(I) $\mathbb{P}(X=1, Y=1) = \mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=1)$ ✓ a)

(II) $\mathbb{P}(X=0, Y=1) = \mathbb{P}(Y=1) \cdot \mathbb{P}(X=0)$ ✓ c)

(III) $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=1, Y=0) + \mathbb{P}(X=1, Y=1)$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(X=1, Y=0) = \mathbb{P}(X=1) - \mathbb{P}(X=1, Y=1)$

$$\overset{a)}{=} \mathbb{P}(X=1) - \mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=1)$$

$$= \mathbb{P}(X=1) \cdot (1 - \mathbb{P}(Y=1))$$

$$= \mathbb{P}(X=1) \cdot \mathbb{P}(Y=0)$$

(IV) $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X=0, Y=0) + \mathbb{P}(X=0, Y=1)$

$$\mathbb{P}(X=0, Y=0) = \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=0, Y=1)$$
$$\overset{c)}{=} \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=0) \cdot \mathbb{P}(Y=1)$$
$$= \mathbb{P}(X=0) \cdot (1 - \mathbb{P}(Y=1))$$
$$= \mathbb{P}(X=0) \cdot \mathbb{P}(Y=0)$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X \cap Y) = \mathbb{P}(X)\,\mathbb{P}(Y)$ und somit sind X und Y unabhängig

Aufgabe 2

314

a)

(I) $\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = 0-(-1) = 1$ ✓

(II) $x \geq 0: \; f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = \frac{\lambda}{e^{\lambda x}} \overset{\lambda>0}{>} 0$ ✓

$x < 0: \; f(x) = 0$

aus (I) und (II) folgt, dass $f(x)$ eine W-Dichte hat.

b)

$$F(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$ ✓

5.1

c) $P(1 \leq X \leq 3) = \int_1^3 \lambda e^{-\lambda x} = \left[-e^{-\lambda x}\right]_1^3 = -e^{-3\lambda} + e^{-\lambda}$ ✓

d) $P(X > s+t \mid X > s) = \frac{P(X > s+t \cap X > s)}{P(X>s)}$

5.2

$$= \frac{P(X > s+t)}{P(X>s)}$$

$$= \frac{1-P(X \leq s+t)}{1-P(X\leq s)}$$

$$= \frac{1-(1-e^{-\lambda(s+t)})}{1-(1-e^{-\lambda s})}$$

$$= \frac{e^{\lambda s}}{e^{\lambda(s+t)}}$$

$$= e^{-\lambda t}$$

$$= P(X>t)$$ ✓

Aufgabe 3

3,5/4

a) $X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$$D_X = \{(0, \tfrac{1}{2}), (1, \tfrac{1}{4}), (2, \tfrac{1}{8}), (3, \tfrac{1}{16}), (4, \tfrac{1}{32}), (5, \tfrac{1}{32})\}$$

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot \tfrac{1}{4} + 2 \cdot \tfrac{1}{8} + 3 \cdot \tfrac{1}{16} + 4 \cdot \tfrac{1}{32} + 5 \cdot \tfrac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \cdot \tfrac{1}{2} + 1^2 \cdot \tfrac{1}{4} + 2^2 \cdot \tfrac{1}{8} + 3^2 \cdot \tfrac{1}{16} + 4^2 \cdot \tfrac{1}{32} + 5^2 \cdot \tfrac{1}{32}$$

$$= \frac{83}{32}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{83}{32} - \left(\frac{31}{32}\right)^{2} = \frac{13}{8}$$ f

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\frac{13}{8}}$$ ff

b) $\mathbb{P}(X=5) = \frac{1}{32}$

Aufgabe 4

1,5/4

a) $M_n = \frac{1}{n} S_n$

$\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} S_n\right)$

$= \frac{1}{n} E(S_n)$

$\overset{\text{ZV}}{\underset{\text{unabhängig}}{=}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$

$= \frac{1}{n} \cdot n \cdot 0{,}5$

$= 0{,}5$ ✓

$Var(M_n) = Var\left(\frac{1}{n} S_n\right)$

$= \frac{1}{n} Var(S_n)$

$\overset{\text{ZV}}{\underset{\text{unabhängig}}{=}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$

$= \frac{1}{n} \cdot n \cdot (0{,}5(1-0{,}5))$

$= 0{,}25$ f

b) $\lim_{n \to \infty} P(M_n = \frac{1}{2}) = 0$

$n \to \infty$: Gesetz der großen Zahlen gilt

$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right|\right)$

7.1

$= P\left(\left|\frac{1}{n}(S_n - n \cdot \frac{1}{2})\right|\right) = P\left(\left|\frac{S_n - \frac{n}{2}}{n}\right|\right) = \frac{2S_n - n}{2n} \underset{\text{Hinweis}}{=} \frac{2\frac{n}{2} - n}{2n} = \frac{0}{2n} = 0$

c) Das schwache Gesetz der großen Zahlen besagt, dass der Mittelwert mit einer zunehmenden Anzahl von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen gegen ihren Erwartungswert konvergiert. ✓

7.2

Index der Kommentare

5.1 aber das muss rechnerisch gezeigt werden

5.2 wieso gilt diese Gleichheit?

7.1 es sollte mit der Stirling Formel der Binomialkoeffizient abgeschätzt werden und damit gezeigt werden

7.2 genaue Formel gefordert