Aufgabe 6 (8 Punkte):

Es sei K ein Körper. Wir betrachten $V = K^2$ mit der Standardbasis $E = \{e_1, e_2\}$. Seien $b_1 = e_1 + e_2$ und $b_2 = e_1$. Dann ist $B = \{b_1, b_2\}$ eine Basis von V. Sei nun V^* der Dualraum zu V, $E^* = \{e_1^*, e_2^*\}$ die duale Basis zu E und $B^* = \{b_1^*, b_2^*\}$ die duale Basis zu B.

Schreiben Sie b_1^* und b_2^* als Linearkombinationen von e_1^* und e_2^*.

Lösung:

Die Zuordnung $b_1 \mapsto e_1$ und $b_2 \mapsto e_2$ setzen wir zu einer linearen Abbildung $f\colon V \to V$ fort. Es gilt $f(e_1) = f(b_2) = e_2$ und $f(e_2) = f(b_1 - b_2) = e_1 - e_2$. Folglich gilt

$$M(f^*; e_1^*, e_2^*) = M(f; e_1, e_2)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt $b_1^* = f^*(e_1^*) = e_2^*$ und $b_2^* = f^*(e_2^*) = e_1^* - e_2^*$.

Def. die lineare Abb. $f: V \to V$ durch $f(b_1) := e_1$, $f(b_2) := e_2$

$f(e_1) = f(b_2) = e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$

$f(e_2) = f(b_1 - b_2) = f(b_1) - f(b_2) = e_1 - e_2 = 1 \cdot e_1 + (-1) \cdot e_2$

$\Rightarrow M_E^E(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\overset{\text{Satz}}{\Rightarrow} M_{E^*}^{E^*}(f) = (M_E^E(f))^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f^*(e_1^*) = 0 \cdot e_1^* + 1 \cdot e_2^* = e_2^*$

$f^*(e_2^*) = 1 \cdot e_1^* + (-1) \cdot e_2^* = e_1^* - e_2^*$

$f^*: V \to K$, $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$

$f^*(e_1^*) = e_1^* \circ f = \underbrace{(e_1^* \circ f)(b_1)}_{=1} \cdot b_1^* + \underbrace{(e_1^* \circ f)(b_2)}_{=0} \cdot b_2^* = b_1^*$

$f^*(e_2^*) = e_2^* \circ f = \underbrace{(e_2^* \circ f)(b_1)}_{=0} \cdot b_1^* + \underbrace{(e_2^* \circ f)(b_2)}_{=1} \cdot b_2^* = b_2^*$

Alternativ:

$b_1^* = b_1^*(e_1) \cdot e_1^* + b_1^*(e_2) \cdot e_2^* = \underbrace{b_1^*(b_2)}_{=0} \cdot e_1^* + \underbrace{b_1^*(b_1 - b_2)}_{=1-0} \cdot e_2^* = e_2^*$

$b_2^* = b_2^*(e_1) \cdot e_1^* + b_2^*(e_2) \cdot e_2^* = \underbrace{b_2^*(b_2)}_{=1} \cdot e_1^* + \underbrace{b_2^*(b_1 - b_2)}_{=0-1} \cdot e_2^* = e_1^* - e_2^*$

Aufgabe

Es seien K ein Körper und $V = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in K\}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 mit der Basis $b_1 = 1$, $b_2 = x$ und $b_3 = x^2$. Weiter sei V^* der Dualraum von V mit dualer Basis $B^* = \{b_1^*, b_2^*, b_3^*\}$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $\alpha \in K$ die Abbildung $\lambda_\alpha \colon V \to K$, $f \mapsto f(\alpha)$ ein Element des Dualraums V^* ist.

(b) Stellen Sie λ_α als Linearkombination von b_1^*, b_2^* und b_3^* dar.

(c) Zeigen Sie, dass $\{\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \lambda_\gamma\}$ für paarweise verschiedene $\alpha, \beta, \gamma \in K$ eine Basis von V^* ist.

Lösung

Zu (a): Es sei $\alpha \in K$. Für Polynome $p = ax^2 + bx + c$, $q = dx^2 + ex + f$ und $\delta \in K$ gilt:

$$\lambda_\alpha(\delta p + q) = (\delta p + q)(\alpha) = \delta(a\alpha^2 + b\alpha + c) + d\alpha^2 + e\alpha + f = \delta\lambda_\alpha(p) + \lambda_\alpha(q)$$

Zu (b): Für $p = ax^2 + bx + c$ folgt aus $b_1^*(f) = c$, $b_2^*(f) = b$ und $b_3^*(f) = a$

$$\lambda_\alpha(f) = a\alpha^2 + b\alpha + c = b_3^*(f)\alpha^2 + b_2^*(f)\alpha + b_1^*(f) = (\alpha^2 b_3^* + \alpha b_2^* + b_1^*)(f)$$

also gilt $\lambda_\alpha = \alpha^2 b_3^* + \alpha b_2^* + b_1^*$.

Zu (c): Es seien $\alpha, \beta, \gamma \in K$. Nach (b) haben λ_α, λ_β und λ_γ bezüglich der Basis b_1^*, b_2^*, b_3^* die Koeffizientenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta^2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ \gamma^2 \end{pmatrix}$. Sind α, β und γ paarweise verschieden, so sind wegen

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{pmatrix} = (\gamma - \beta)(\gamma - \alpha)(\beta - \alpha) \neq 0$$

die Koeffizientenvektoren und damit λ_α, λ_β und λ_γ linear unabhängig. Diese bilden eine Basis von V^*, da $\dim V^* = \dim V = 3$ gilt. $\square$

Aufgabe:

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Seien $\mathcal{A}^*$ und $\mathcal{B}^*$ die zugehörigen dualen Basen von V^*.

Zeigen Sie:

$$T_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*} = ((T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T)^{-1}$$

Lösung:

$$T_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*} = \mathcal{M}_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*}(\mathrm{id}_V^*) \overset{\text{Satz}}{=} (\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V))^T = (T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^T = ((T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^{-1})^T = ((T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T)^{-1} \qquad \square$$

Aufgabe

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in V^*$ Linearformen auf V. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

i) $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ sind linear abhängig in V^*.

ii) Es gibt ein $v \in V \setminus \{0\}$, so dass $\varphi_1(v) = \ldots = \varphi_n(v) = 0$.

Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung: $\psi : V \to K^n, \quad v \mapsto (\varphi_1(v), \ldots, \varphi_n(v))^\top$.