Universität Leipzig
Institut für Informatik
Sommersemester 2024

Prof. Dr. Andreas Maletti,
Dr. Erik Paul, Fabian Sauer,
Dr. habil. Karin Quaas

Aufgaben zur Lehrveranstaltung

Berechenbarkeit

Serie 3

- Die Übungsaufgaben werden in den Übungen ab dem 13.5.2024 besprochen.
- Abgabeschluss für Hausaufgaben: **27.5.2024 um 22:00 Uhr** im Moodle-Kurs.
- Sie können gern in 2er-Gruppen abgeben. Bitte schreiben Sie dazu die Namen und Matrikelnummern beider Personen auf das Blatt und reichen Sie Ihre Lösungen über einen Account ein.

Liebe Studis,

habt Ihr Probleme mit den Übungsaufgaben? Die Tutoren des **Offenen Matheraums Informatik** beantworten gerne Fragen zu allen Modulen des ersten Semesters. Ihr findet uns Montags 11 - 13 + 15 - 17 Uhr im Paulinum P401 und Dienstag bis Freitag von 11 - 17 Uhr im Augusteum A412.

Übungsaufgabe 3.1 (Ackermann-Funktion)

Wir betrachten die Ackermann-Funktion $a \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die wie folgt definiert ist:

$$a(x,y) = \begin{cases} y+1 & \text{falls } x = 0 \\ a(x-1,1) & \text{falls } x \neq 0 \text{ und } y = 0 \\ a(x-1, a(x, y-1)) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für alle $n, x, y \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a(n+1, y) > a(n,y) + y.$$

Hinweis: Sie können den Beweis per Doppelinduktion über n und y führen. Hilfreich ist auch §5.3 aus Vorlesung 5.

Übungsaufgabe 3.2 (WHILE Programme)

Geben Sie ein WHILE Programm P in strikter Syntax an, welches die Funktion $f \colon \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n < 42 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

berechnet.

Übungsaufgabe 3.3 (Berechenbarkeit)
Wir definieren die folgenden Mengen von Funktionen:

- $\mathbb{L} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ ist LOOP-berechenbare Funktion}\}$
- $\mathbb{T} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ ist total und WHILE-berechenbare Funktion}\}$
- $\mathbb{W} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ ist WHILE-berechenbare Funktion}\}$
- $\mathbb{F} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ ist eine Funktion}\}$

Beweise:

$$\emptyset \subsetneq \mathbb{L} \subsetneq \mathbb{T} \subsetneq \mathbb{W} \subsetneq \mathbb{F}$$

Hausaufgabe 3.4 (Ackermann-Funktion) (7)
Wir betrachten die Ackermann-Funktion $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die wie folgt definiert ist:

$$a(x, y) = \begin{cases} y + 1 & \text{falls } x = 0 \\ a(x-1, 1) & \text{falls } x \neq 0 \text{ und } y = 0 \\ a(x-1, a(x, y-1)) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für alle $n, x, y \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a(n, x + y) \geq a(n, x) + y.$$

Hinweis: Sie können den Beweis per Doppelinduktion über n und y führen. Hilfreich ist auch § 5.3 aus Vorlesung 5.

Hausaufgabe 3.5 (WHILE Programme) (4)
Geben Sie ein WHILE Programm P in strikter Syntax an, welches die Funktion $f : \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \geq 42 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

berechnet.

Hausaufgabe 3.6 (Berechenbarkeit) (9)
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine LOOP-berechenbare, totale und injektive Funktion. Definiere $f^{-1} : \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ durch

$$f^{-1}(n) = \begin{cases} m & \text{falls } f(m) = n \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}.$$

(a) Ist f^{-1} LOOP-berechenbar? Beweisen Sie Ihre Antwort. (3)

(b) Ist f^{-1} WHILE-berechenbar? Beweisen Sie Ihre Antwort. (6)