Prof. Dr. Ringo Baumann
Moritz Schönherr
Jamie Keitsch

SoSe 2025
Übungsblatt 6
Ausgabe: 19.06.2025

Übungen zur Vorlesung „Logik“
6. Übungsblatt

H 6-1. Normalformen

a) Kreuzen Sie in der Tabelle an, ob die betreffende Formel in Negationsnormalform (NNF), Bereinigter Form (BF), Pränexnormalform (PNF) oder Skolemnormalform (SNF) vorliegt. (4 Pkt.)

Formel	**NNF**	**BF**	**PNF**	**SNF**
$\neg\forall x\,\exists y\,(P(x,y) \wedge \neg Q(y))$				
$\forall x\,\neg P(x) \vee (\exists y\, R(x,y) \wedge \forall z\, \neg R(z,y))$				
$\exists y\,\forall x\,\neg(P(x,y) \vee B(z))$				
$\forall x\,\forall y\,(\neg P(x,y) \vee \neg Q(y))$				

b) Forme in nachvollziehbaren Schritten die nachfolgende Formel in eine semantisch äquivalente PNF um: (2 Pkt.)

$$\forall x\,\exists y\,\neg\forall z\,P\big(f(x,y),z\big) \;\wedge\; \neg\forall x\,\exists z\,Q(x,z,y)$$

c) Erstellen Sie eine Skolemnormalform der nachfolgenden Formel: (2 Pkt.)

$$\exists x\,\forall y\,\forall z\,\exists u\,\exists v\,\big(P(y,z,u) \wedge Q(x,u,v)\big)$$

H 6-2. Herbrand-Strukturen

a) Gegeben sei die Formel $\varphi_1 = P(f(x),z) \wedge Q(g(z,x))$. Geben Sie sechs verschiedene Elemente des Herbrand-Universums $D(\varphi_1)$ an. (1 Pkt.)

b) Gegeben sei die Formel $\varphi_2 = \forall x\,\forall y\,\forall z\,(P(x,c) \wedge (Q(d) \to P(y,z)))$. (4 Pkt.)

i) Wie viele verschiedene Herbrand-Strukturen gibt es für φ_2?

ii) Spezifizieren Sie ein Herbrand-Modell $\mathfrak{A}$ von φ_2. Es reicht, $P^{\mathfrak{A}}$ und $Q^{\mathfrak{A}}$ anzugeben, wobei $P^{\mathfrak{A}} \neq U^{\mathfrak{A}} \times U^{\mathfrak{A}}$ und $Q^{\mathfrak{A}} \neq \emptyset$ erfüllt sein soll.

iii) Spezifizieren Sie eine Herbrand-Struktur $\mathfrak{B}$ für φ_2, welche eine Widerlegung von φ_2 ist. Es reicht, $P^{\mathfrak{B}}$ und $Q^{\mathfrak{B}}$ anzugeben, wobei $\{(c,c),(d,c)\} \subseteq P^{\mathfrak{B}}$ erfüllt sein soll.

c) Gegeben sei die Formel $\varphi_3 = \forall x\,P(x,f(x))$. Sei des Weiteren $\mathfrak{C}$ Herbrand-Struktur mit folgender Prädikatinterpretation: Für alle $t_1,t_2 \in D(\varphi_3)$ gilt, (1 Pkt.)

$$(t_1,t_2) \in P^{\mathfrak{C}} \quad \text{gdw.} \quad f^{\mathfrak{C}}(t_1) = t_2$$

Ist $\mathfrak{C}$ Herbrand-Modell von φ_3? Kurze Begründung.

d) Gegeben sei die Formel $\varphi_4 = \forall x\, \forall y\, \forall z\, (P(f(x), y, g(z,z)) \to Q(y, g(z,z)))$. Sei des Weiteren $\mathfrak{D}$ Herbrand-Struktur mit folgender Prädikatinterpretation: Für alle $t_1, t_2, t_3 \in D(\varphi_4)$ und $s_1, s_2 \in D(\varphi_4)$ gilt, (2 Pkt.)

$$(t_1, t_2, t_3) \in P^{\mathfrak{D}} \quad \text{gdw.} \quad g^{\mathfrak{D}}(t_1, t_1) = g(g(t_3, t_3), t_2),$$

$$(s_1, s_2) \in Q^{\mathfrak{D}} \quad \text{gdw.} \quad f^{\mathfrak{D}}(s_1) = f(g(s_2, s_2))$$

Ist $\mathfrak{D}$ Herbrand-Modell von φ_4? Kurze Begründung.

H 6-3. Algorithmus von Gilmore

a) Gegeben sei die Formel $\varphi = \forall x\, \forall y\, (\neg R(x,y) \wedge R(c, f(c)))$. (2 Pkt.)

i) Geben Sie vier verschiedene Elemente des Herbrand-Expansion $E(\varphi)$ an.

ii) Terminiert der Algorithmus von Gilmore für φ? Ohne Begründung.

b) Gegeben sei eine gleichheitsfreie Formel ψ. Erläutern Sie in wenigen Sätzen, wie die Allgemeingültigkeit von ψ algorithmisch nachgewiesen werden kann. (2 Pkt.)

Termine:

- Abgabe der Aufgaben bis spätestens 29.06.2025 via moodle.
- Besprechung der Aufgaben ab Montag, dem 30.06.2025 (A-Woche).