Aufgabe Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen lineare Abbildungen sind.

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x + 1$

(ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 4x_3, x_1 x_2)$

(iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 2x_2 - 4x_3, 2x_2 + 3x_3, x_1 - 2x_3)$

(iv) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2 - 1, 3x_1 - 4x_2 + 3)$

(i) $f(0) = 3 \cdot 0 + 1 = 1 \neq 0.$

$\Rightarrow$ f ist nicht linear

$f(x) = ax + b$

affin - linear

f ist linear $\Leftrightarrow$ $b = 0$

(ii) Setze $v := (1,1,1)$, $\lambda := 2.$

Dann gilt:

$f(\lambda \cdot v) = f(2,2,2) = (2 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2,\ 2 \cdot 2) = (14, 4)$

$\lambda \cdot f(v) = 2 \cdot f(1,1,1) = 2 \cdot (1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1,\ 1 \cdot 1) = 2 \cdot (7, 1) = (14, 2)$

$\Rightarrow$ $f(\lambda \cdot v) \neq \lambda \cdot f(v)$

$\Rightarrow$ f ist nicht linear.

(iii) $f(x_1, x_2, x_3) = (-1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3,\ 0 \cdot x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3)$

Setze $A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$

Dann gilt:

$f(x_1, x_2, x_3) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und f ist linear

(iv) $f(0,0) = (0 - 2 \cdot 0 - 1,\ 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 3) = (-1, 3) \neq (0,0)$

$\Rightarrow$ f ist nicht linear.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ $f(x) = A \cdot x + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$f(0) \neq 0$

Aufgabe:

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Linearität:

(a) $f_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x-y,\ 1+y)$

(b) $f_2: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x-y,\ 2z-x+y)$

(c) $f_3: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$ für $K = \mathbb{R}$ und für $K = \mathbb{C}$.

Lösung:

(a) $f(0,0) = (0,1) \neq (0,0) \Rightarrow f$ ist nicht linear.

(b) $f(x,y,z) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow f$ ist linear.

(c) Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$f(z_1+z_2) = \overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = f(z_1) + f(z_2)$ ✓

$f(\lambda \cdot z) = \overline{\lambda \cdot z} = \bar{\lambda} \cdot \bar{z} = \bar{\lambda} \cdot f(z)$

Ist $K = \mathbb{R}$, so ist $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\bar{\lambda} = \lambda$, d.h. $f(\lambda \cdot z) = \lambda \cdot f(z)$

Also ist f linear.

Ist $K = \mathbb{C}$, so setze $z := 1$, $\lambda := i$. Dann gilt:

$f(\lambda \cdot z) = f(i) = \bar{i} = -i$,

$\lambda \cdot f(z) = i \cdot f(1) = i \cdot \bar{1} = i \cdot 1 = i \neq -i = f(\lambda \cdot z)$

$\Rightarrow f$ ist nicht linear.

Def.:

Sei $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

$\bar{z} := x - iy$

Bem.:

Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt: $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ und $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

Bew.:

Schreibe $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ mit $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2)} = x_1 + x_2 - i \cdot (y_1 + y_2)$$

$$= x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)} = \overline{x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)}$$

$$= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) - (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (x_1 - iy_1) \cdot (x_2 - iy_2) = x_1 \cdot x_2 - ix_1 \cdot y_2 - i \cdot y_1 \cdot x_2 + \underbrace{(-i)^2}_{=-1} \cdot y_1 \cdot y_2$$

$$= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) - (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}, A \in K^{n \times n}$ invertierbar, $b \in K^n \setminus \{0\}$.

(a) Man zeige, daß die Abbildung $f : K^n \to K^n$; $f(x) := Ax + b$ injektiv und surjektiv, aber nicht linear ist.

(b) Man zeige, daß die Abbildung $g : K^{n+1} \to K^n$; $\begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} \mapsto Ax + \alpha b$ linear und surjektiv, aber nicht injektiv ist.

In $\begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix}$ sei dabei $x \in K^n$ und $\alpha \in K$.

Beweis:

Ad (a):

- f ist nicht linear, da für jede lineare Abbildung g $g(0) = 0$ gelten muß, hier aber

$$f(0) = A \cdot 0 + b = b \neq 0$$

ist.

- f ist injektiv, denn es ist für alle $x, y \in K^n$:

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\iff Ax + b = Ay + b \\ &\iff Ax = Ay \\ &\underset{\text{invertierbar}}{\overset{A}{\Longrightarrow}} x = E_n \cdot x = (A^{-1}A) \cdot x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}(Ay) = (A^{-1}A) \cdot y = E_n \cdot y = y \\ &\Longrightarrow x = y \end{aligned}$$

- f ist surjektiv, denn für jedes $z \in K^n$ gilt für geeignetes $x \in K^n$:

$$z = f(x) = Ax + b \iff z - b = Ax \underset{\text{invertierbar}}{\overset{A}{\iff}} A^{-1} \cdot (z - b) = A^{-1} \cdot Ax = x$$

Wir verifizieren, daß dieses x tatsächlich ein Urbild von z unter f ist:

$$f(x) = f\left(A^{-1}(z-b)\right) \underset{f}{\overset{\text{Def.}}{=}} A \cdot \left(A^{-1}(z-b)\right) + b = (A \cdot A^{-1}) \cdot (z-b) + b = (z-b) + b = z$$

Ad (b):

- g ist linear, denn für alle $\begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ \beta \end{pmatrix} \in K^{n+1}$ und $\gamma \in K$ gilt:

$$\begin{aligned} g\left(\begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ \beta \end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix} x+y \\ \alpha+\beta \end{pmatrix}\right) &\underset{g}{\overset{\text{Def.}}{=}} A \cdot (x+y) + (\alpha+\beta) \cdot b \\ &\underset{\text{distr.}}{=} A \cdot x + A \cdot y + \alpha \cdot b + \beta \cdot b \\ &= (Ax + \alpha b) + (Ay + \beta b) \\ &\underset{g}{\overset{\text{Def.}}{=}} g\left(\begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix}\right) + g\left(\begin{pmatrix} y \\ \beta \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

und

$$g\left(\gamma \cdot \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix} \gamma x \\ \gamma\alpha \end{pmatrix}\right) \underset{g}{\overset{\text{Def.}}{=}} A(\gamma x) + (\gamma\alpha)b = \gamma(Ax) + \gamma(\alpha b) = \gamma \cdot (Ax + \alpha b) \underset{g}{\overset{\text{Def.}}{=}} \gamma \cdot g\left(\begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix}\right)$$

- g ist surjektiv, denn mit A invertierbar ist für jedes $z \in K^n$ der Vektor $A^{-1} \cdot z \in K^n$ wohldefiniert und es gilt

$$g\left(\begin{pmatrix} A^{-1}z \\ 0 \end{pmatrix}\right) = A \cdot (A^{-1}z) + 0 \cdot b = (AA^{-1})z = E_n \cdot z = z$$

also $K^n \subseteq \operatorname{Bild}(g) \subseteq K^n \implies K^n = \operatorname{Bild}(g) \implies g$ surjektiv

- g ist nicht injektiv, denn wie eben gezeigt, gilt $g\left(\begin{pmatrix} A^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}\right) = b$, aber auch

$g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = A \cdot 0 + 1 \cdot b = b$, also

$$g\left(\begin{pmatrix} A^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}\right) = b = g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \text{aber } \begin{pmatrix} A^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alternativ kann man dies auch mit der Dimensionsformel beweisen, denn mit $g : K^{n+1} \to K^n$ linear ist

$$n + 1 = \dim\left(K^{n+1}\right) = \dim(\operatorname{Kern} g) + \dim(\underbrace{\operatorname{Bild} g}_{\substack{=K^n, \text{da } g \\ \text{surjektiv}}}) = \dim(\operatorname{Kern} g) + n$$

$\implies \dim(\operatorname{Kern} g) = (n + 1) - n = 1 \implies \operatorname{Kern} g \neq \{0\}$,

also ist g nicht injektiv