Prof. Dr. Ringo Baumann
Moritz Schönherr
Jamie Keitsch

SoSe 2025
Übungsblatt 1
Ausgabe: 10.04.2025

Übungen zur Vorlesung „Logik“
1. Übungsblatt

H 1-1. Mengenlehre

a) Sei $M = \{a, b, c\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche nicht? Ohne Begründung. (3 Pkt.)

i) $a \in M$ Wahr	ii) $\emptyset \subseteq M$ Wahr	iii) $\{a, c\} \notin 2^M$ Falsch
iv) $\{\emptyset\} \notin 2^M$ Falsch	v) $\{\{a\}, \{b, c\}\} \in 2^{2^M}$ Wahr	vi) $\left\|2^{2^M}\right\| = 256$ Wahr

b) Beweisen Sie nachfolgende Aussage. Für beliebige Mengen S und T gilt: (2 Pkt.)

$$S \cup T = S \quad \text{gdw.} \quad T \subseteq S$$

H 1-2. Vollständige Induktion (5 Pkt.)

Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n^3 - n \text{ ist durch 3 teilbar}$$

1 $n=0$
2 es gilt für n
3 Schritt für $n+1$

H 1-3. Syntaktische Eigenschaften

a) Definieren Sie rekursiv die Funktion $j : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$, die die *Anzahl der Junktoren* einer Formel zählt. Beispielsweise sollte $j((\neg A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3))) = 3$ ergeben. (2 Pkt.)

b) Sei $\varphi = \neg(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))$. Bestimmen Sie: (3 Pkt.)

i) den Rang $r(\varphi)$,
ii) die Menge der Teilformeln $t(\varphi)$,
iii) den Syntaxbaum $b(\varphi)$.

H 1-4. Induktion über den Formelaufbau (5 Pkt.)

Zeigen Sie per Induktion über den Formelaufbau, dass für alle Formeln $\varphi \in \mathcal{F}$ gilt:

$$|t(\varphi)| \leq 2^{r(\varphi)+1} - 1.$$

Termine:

- Abgabe der Aufgaben bis spätestens 20.04.2025 via moodle.
- Besprechung der Aufgaben ab Dienstag, dem 22.04.2025 (A-Woche). 21.04. ist Feiertag.

H 1-2. Vollständige Induktion (5 Pkt

Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n^3 - n \text{ ist durch 3 teilbar}$$

1 $n=0$

2 es gilt für n

3 Schritt für $n+1$

H 1-3. Syntaktische Eigenschaften

IA: $n=0$

$3 \mid (n^3 - n)$

$3 \mid (0^3 - 0)$

$3 \mid 0$ ✓

IV: es gilt

$3 \mid (n^3 - n)$

IS: $\boxed{n+1}$

$3 \mid (n+1)^3 - (n+1))$

$3 \mid (n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1)$

$3 \mid (\underbrace{n^3 - n} + (3n^2 + 3n) + \cancel{1} - \cancel{1})$

$3 \mid (IV + 3 \cdot (n^2 + n))$

$3 \mid (n^3 - n) + 3 \mid (3(n^2 + n))$

$(n+1)^3 = (n+1) \cdot (n+1) \cdot (n+1)$

$= (n^2 + 2n + 1) \cdot (n+1)$

$= n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n + n + 1$

$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

H 1-3. Syntaktische Eigenschaften

3 Schritt für n+1

a) Definieren Sie rekursiv die Funktion $j : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$, die die *Anzahl der Junktoren* einer Formel zählt. Beispielsweise sollte $j((\neg A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3))) = 3$ ergeben. (2 Pkt.)

b) Sei $\varphi = \neg(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))$. Bestimmen Sie: (3 Pkt.)

i) den Rang $r(\varphi)$,

ii) die Menge der Teilformeln $t(\varphi)$,

iii) den Syntaxbaum $b(\varphi)$.

a)

$j(\phi) = 0$

$j(\neg \phi) = j(\phi) + 1$

$j((\phi \circ \psi)) = j(\phi) + j(\psi) + 1$

$j((\neg A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3))) =$

$= j(\neg A_1) + j((A_2 \wedge A_3)) + 1$

$= j(A_1) + 1 + j(A_2) + j(A_3) + 1 + 1$

$= 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1$

$= 3$

b) i) Rang $r((\neg(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))))$

$= r((A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))) + 1$

$= \max\{r(A_1), r(\neg(\neg A_2 \wedge A_3))\} + 1$

$= \max\{0, r((\neg A_2 \wedge A_3)) + 1\} + 1$

$= \max\{0, \max\{r(\neg A_2), r(A_3)\} + 1 + 1\} + 1$

$= \max\{0, \max\{r(A_2) + 1, 0\} + 1 + 1\} + 1$

$= \max\{0, \max\{0 + 1, 0\} + 1 + 1\} + 1$

$= \max\{0, 1 + 1 + 1\} + 1$

$= 3 + 1$

$= 4$

ii) $t(\neg(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3)))$

$= t((A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))) \cup \{\neg(A_1 \vee \neg(A_2 \wedge A_3))\}$

$= t(A_1) \cup t(\neg(\neg A_2 \wedge A_3)) \cup \{(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))\} \cup \{A_1 \vee \neg(A_2 \wedge A_3)\}$

$= \{A_1\} \cup t((\neg A_2 \wedge A_3)) \cup \{(\neg A_2 \wedge A_3)\} \cup$

$=$

b) Beweisen Sie nachfolgende Aussage. Für beliebige Mengen S und T gilt: (2 Pkt.)

$$S \cup T = S \quad \text{gdw.} \quad T \subseteq S$$

$S \cup T = S \Rightarrow T \subseteq S$:

Menge A = Menge B ist definiert als
$A \subseteq B$ und $B \subseteq A$

$S \cup T = S \Leftrightarrow S \cup T \subseteq S \wedge S \subseteq S \cup T \Rightarrow T \subseteq S \cup T \subseteq S$

$\Rightarrow T \subseteq S$

$T \subseteq S \Rightarrow S \cup T = S$:

$T \subseteq S \Rightarrow \{\forall x \in T \mid x \in S\} = T$

$\Rightarrow S \cup T = \{\forall x \mid x \in S \vee x \in T\}$

Da $x \in T \Rightarrow x \in S$ gilt $S \cup T = \{\forall x \mid x \in S\} = S$