

## Aufgabe

Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen lineare Abbildungen sind.

- (i)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 1$
- (ii)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 4x_3, x_1x_2)$
- (iii)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 2x_2 - 4x_3, 2x_2 + 3x_3, x_1 - 2x_3)$
- (iv)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2 - 1, 3x_1 - 4x_2 + 3)$

(i)  $f(0) = 3 \cdot 0 + 1 = 1 \neq 0.$

$\Rightarrow f$  ist nicht linear

(ii) Setze  $u := (1, 1, 1), \lambda := 2.$

Dann gilt:

$$f(\lambda \cdot u) = f(2, 2, 2) = (2 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2, 2 \cdot 2) = (14, 4)$$

$$\lambda \cdot f(u) = 2 \cdot f(1, 1, 1) = 2 \cdot (1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1, 1 \cdot 1) = 2 \cdot (7, 1) = (14, 2)$$

$$\Rightarrow f(\lambda \cdot u) \neq \lambda \cdot f(u)$$

$\Rightarrow f$  ist nicht linear.

(iii)  $f(x_1, x_2, x_3) = (-1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3, 0 \cdot x_1 + 2x_2 + 3x_3, 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3)$

Setze  $A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$

Dann gilt:

$$f(x_1, x_2, x_3) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ und } f \text{ ist linear}$$

(iv)  $f(0, 0) = (0 - 2 \cdot 0 - 1, 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 3) = (-1, 3) \neq (0, 0)$

$\Rightarrow f$  ist nicht linear.

## Aufgabe:

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Linearität:

(a)  $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x - y, 1 + y)$

(b)  $f_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x - y, 2z - x + y)$

(c)  $f_3: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \bar{z}$  für  $K = \mathbb{R}$  und für  $K = \mathbb{C}$ .

## Lösung:

(a)  $f(0, 0) = (0, 1) \neq (0, 0) \Rightarrow f$  ist nicht linear.

(b)  $f(x, y, z) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=: A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow f$  ist linear.

(c) Für alle  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$  gilt:

$$f(z_1 + z_2) = \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = f(z_1) + f(z_2) \quad \checkmark$$

$$f(\lambda \cdot z) = \overline{\lambda \cdot z} = \bar{\lambda} \cdot \bar{z} = \bar{\lambda} \cdot f(z)$$

Ist  $K = \mathbb{R}$ , so ist  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $\bar{\lambda} = \lambda$ , d.h.  $f(\lambda \cdot z) = \lambda \cdot f(z)$

Also ist  $f$  linear.

Ist  $K = \mathbb{C}$ , so setze  $z := 1, \lambda := i$ . Dann gilt:

$$f(\lambda \cdot z) = f(i) = \bar{i} = -i,$$

$$\lambda \cdot f(z) = i \cdot f(1) = i \cdot \bar{1} = i \cdot 1 = i \neq -i = f(\lambda \cdot z)$$

$\Rightarrow f$  ist nicht linear.

## Def.:

Sei  $z \in \mathbb{C}, z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$ .

$$\bar{z} := x - iy$$

## Bem.:

Für alle  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  gilt:  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$  und  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

Bew.:

Schreibe  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  mit  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2)} = x_1 + x_2 - i \cdot (y_1 + y_2)$$

$$= x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)} = \overline{x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)}$$

$$= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) - (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (x_1 - iy_1) \cdot (x_2 - iy_2) = x_1 \cdot x_2 - ix_1 \cdot y_2 - i \cdot y_1 \cdot x_2 + \underbrace{(-i)^2}_{=-1} \cdot y_1 \cdot y_2$$

$$= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) - (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \quad \checkmark$$

Sei  $K$  ein Körper,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A \in K^{n \times n}$  invertierbar,  $b \in K^n \setminus \{0\}$ .

- (a) Man zeige, daß die Abbildung  $f : K^n \rightarrow K^n$ ;  $f(x) := Ax + b$  injektiv und surjektiv, aber nicht linear ist.
- (b) Man zeige, daß die Abbildung  $g : K^{n+1} \rightarrow K^n$ ;  $\begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} \mapsto Ax + \alpha b$  linear und surjektiv, aber nicht injektiv ist.

In  $\begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix}$  sei dabei  $x \in K^n$  und  $\alpha \in K$ .

**Beweis:**

**Ad (a):**

- $f$  ist nicht linear, da für jede lineare Abbildung  $g$   $g(0) = 0$  gelten muß, hier aber

$$f(0) = A \cdot 0 + b = b \neq 0$$

ist.

- $f$  ist injektiv, denn es ist für alle  $x, y \in K^n$ :

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\iff Ax + b = Ay + b \\ &\iff Ax = Ay \\ &\stackrel{\substack{A \\ \text{invertierbar}}}{\implies} x = E_n \cdot x = (A^{-1}A) \cdot x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}(Ay) = (A^{-1}A) \cdot y = E_n \cdot y = y \\ &\implies x = y \end{aligned}$$

- $f$  ist surjektiv, denn für jedes  $z \in K^n$  gilt für geeignetes  $x \in K^n$ :

$$z = f(x) = Ax + b \iff z - b = Ax \stackrel{\substack{A \\ \text{invertierbar}}}{\iff} A^{-1} \cdot (z - b) = A^{-1} \cdot Ax = x$$

Wir verifizieren, daß dieses  $x$  tatsächlich ein Urbild von  $z$  unter  $f$  ist:

$$f(x) = f(A^{-1}(z - b)) \stackrel{\text{Def.}}{=} A \cdot (A^{-1}(z - b)) + b = (A \cdot A^{-1}) \cdot (z - b) + b = (z - b) + b = z$$

**Ad (b):**

- $g$  ist linear, denn für alle  $\begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ \beta \end{pmatrix} \in K^{n+1}$  und  $\gamma \in K$  gilt:

$$\begin{aligned} g\left(\begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ \beta \end{pmatrix}\right) &= g\left(\begin{pmatrix} x+y \\ \alpha+\beta \end{pmatrix}\right) \stackrel{\text{Def.}}{=} A \cdot (x+y) + (\alpha+\beta) \cdot b \\ &\stackrel{\text{distr.}}{=} A \cdot x + A \cdot y + \alpha \cdot b + \beta \cdot b \\ &= (Ax + \alpha b) + (Ay + \beta b) \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} g\left(\begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix}\right) + g\left(\begin{pmatrix} y \\ \beta \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

und

$$g\left(\gamma \cdot \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix} \gamma x \\ \gamma \alpha \end{pmatrix}\right) \stackrel{\text{Def.}}{=} A(\gamma x) + (\gamma \alpha)b = \gamma(Ax) + \gamma(\alpha b) = \gamma \cdot (Ax + \alpha b) \stackrel{\text{Def.}}{=} \gamma \cdot g\left(\begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix}\right)$$

- $g$  ist surjektiv, denn mit  $A$  invertierbar ist für jedes  $z \in K^n$  der Vektor  $A^{-1} \cdot z \in K^n$  wohldefiniert und es gilt

$$g\left(\begin{pmatrix} A^{-1}z \\ 0 \end{pmatrix}\right) = A \cdot (A^{-1}z) + 0 \cdot b = (AA^{-1})z = E_n \cdot z = z$$

also  $K^n \subseteq \text{Bild}(g) \subseteq K^n \implies K^n = \text{Bild}(g) \implies g$  surjektiv

- $g$  ist nicht injektiv, denn wie eben gezeigt, gilt  $g\left(\begin{pmatrix} A^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}\right) = b$ , aber auch

$$g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = A \cdot 0 + 1 \cdot b = b, \text{ also}$$

$$g\left(\begin{pmatrix} A^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}\right) = b = g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \text{ aber } \begin{pmatrix} A^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Alternativ** kann man dies auch mit der Dimensionsformel beweisen, denn mit  $g : K^{n+1} \rightarrow K^n$  linear ist

$$n + 1 = \dim(K^{n+1}) = \dim(\text{Kern } g) + \dim(\underbrace{\text{Bild } g}_{=K^n, \text{ da } g \text{ surjektiv}}) = \dim(\text{Kern } g) + n$$

$$\implies \dim(\text{Kern } g) = (n + 1) - n = 1 \implies \text{Kern } g \neq \{0\},$$

also ist  $g$  nicht injektiv