

**Aufgabe** Sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $U, W \subseteq V$  Untervektorräume. Zeige:

- (a) Es gibt einen Isomorphismus  $U/(U \cap W) \rightarrow (U+W)/W$ .  
 (b) Ist  $U \subseteq W$ , so lässt sich  $W/U$  als Untervektorraum von  $V/U$  auffassen, und es ist  $(V/U)/(W/U) \cong V/W$ .

(a) Sei  $\pi: U+W \rightarrow (U+W)/W$ ,  $\pi(v) = [v]_W = v+W$

Setze  $f := \pi|_U$ . Es ist  $\text{Kern}(f) = U \cap \text{Kern}(\pi) = U \cap W = U \cap W$

Homomorphie-  
 $\Rightarrow$  Satz  $\exists! \bar{f}: U/(U \cap W) \rightarrow (U+W)/W$  linear

Wegen  $\text{Kern}(\bar{f}) = \text{Kern}(f)/(U \cap W) = U \cap W / U \cap W = \{0\}$ , ist  $\bar{f}$  injektiv.

$f$  ist surjektiv:

Sei  $y \in (U+W)/W$ . Dann ex.  $u \in U, w \in W$  mit  $y = (u+w)+W \stackrel{w \in W}{=} u+W = f(u) \checkmark$

Wegen  $\text{Bild}(\bar{f}) = \text{Bild}(f)$ , ist auch  $\bar{f}$  surjektiv. Also ist  $\bar{f}$  ein Isom.



(b) Sei  $f: V \rightarrow V/W$ ,  $f(v) = [v]_W = v+W$ ,

$\pi: V \rightarrow V/U$ ,  $\pi(u) = [u]_U = u+U$

Es ist  $\text{Kern}(f) = W \supseteq U$

Homomorphie-  
 $\Rightarrow$  Satz  $\exists! \bar{f}: V/U \rightarrow V/W$  linear

Es ist  $\text{Kern}(\bar{f}) = \text{Kern}(f)/U = W/U$

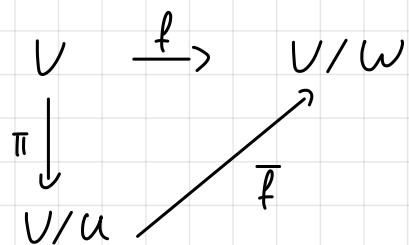
$\Rightarrow W/U$  ist ein Unterraum von  $V/U$ .

Nach dem 1. Isomorphiesatz gilt:

$(V/U) / \text{Kern}(\bar{f}) \cong \text{Bild}(\bar{f})$

Wegen  $\text{Bild}(f) = V/W$  und  $\text{Kern}(\bar{f}) = W/U$  folgt:

$(V/U) / (W/U) \cong V/W$



### Aufgabe

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Weiterhin sei  $u_1, \dots, u_m$  eine Basis von  $U$ .

Dann gibt es nach dem Basisergänzungssatz ein  $n \in \mathbb{N}_0$  und Vektoren  $v_1, \dots, v_n \in V$ , so dass  $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$  ist.

Zeigen Sie, dass in dieser Situation die Elemente  $v_1 + U, \dots, v_n + U$  eine Basis von  $V/U$  bilden.

### Lösung:

- Es sei  $v + U$  ein beliebiges Element aus  $V/U$ . Dann ist  $v \in V$  und da  $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$  ist, gibt es Koeffizienten  $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$  mit

$$v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n.$$

Wegen  $v - (\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n) = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m \in U$  folgt

$$v + U = (\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n) + U = \mu_1(v_1 + U) + \dots + \mu_n(v_n + U).$$

D.h. die Vektoren  $v_1 + U, \dots, v_n + U$  erzeugen  $V/U$ .

- Seien nun  $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$  mit

$$0 + U = \mu_1(v_1 + U) + \dots + \mu_n(v_n + U) = (\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n) + U.$$

Insbesondere gilt also  $0 \in (\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n) + U$ . D.h. es existiert ein  $u \in U$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  mit

$$0 = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n + u = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m.$$

Da  $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig sind, folgt daraus

$$\mu_1 = \dots = \mu_n = 0.$$

D.h. die Vektoren  $v_1 + U, \dots, v_n + U$  sind linear unabhängig.

Insgesamt folgt, dass die Vektoren  $v_1 + U, \dots, v_n + U$  eine Basis von  $V/U$  bilden.