Lösungen Übung 7

Aufgabe 1 (3+3 Punkte)**.** Bestimmen Sie sämtliche Lösungen der folgenden homogenen linearen Gleichungssysteme mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus.

$$x + 3y - 2z = 0$$
$$5x + 6y - z = 0$$
$$2x + y + z = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1 - x_3 + 2x_4 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 0$$
$$x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

Lösung:
1) Die Koeffizientenmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 6 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir ziehen von der zweiten Zeile das 5-fache der ersten und von der dritten Zeilen das 2-fache der ersten Zeile ab. Das liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -9 & 9 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nun teilen wir die zweite Zeile durch -9 und die dritte Zeile durch -5 und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt ziehen wir von der dritten Zeile die zweite Zeile ab, so dass wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erhalten.
Wählt man $\lambda := z$ als freie Variable, so ergibt sich hieraus $y = \lambda$ und $x = -3y + 2z = -\lambda$. Die Lösungsmenge ist also

$$L(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2) Die Koeffizientenmatrix ist

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Von der zweiten und der dritten Zeile ziehen wir jeweils das 1/2-fache der ersten Zeile ab und erhalten so

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -3/2 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nun multiplizieren wir die zweite mit $-2/3$ und die dritte Zeile mit -2 und erhalten

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt ziehen wir von der dritten und der vierten Zeile jeweils die zweite Zeile ab. Das liefert

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir wählen $\lambda := x_3$ und $\mu := x_4$ als freie Variable. Dann folgt $x_2 = -\lambda + \mu$ und $x_1 = (-x_3 - x_4 - 3x_2)/2 = \lambda - 2\mu$. Die Lösungsmenge ist also

$$L(B) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda - 2\mu \\ -\lambda + \mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Bestimmen Sie sämtliche Lösungen des folgenden inhomogenen linearen Gleichungssystems mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus.

$$\begin{aligned} 2x + 5y - 3z &= 1 \\ 3x + 4y + z &= 0 \\ 3x + y + 2z &= 8 \end{aligned}$$

Lösung: Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right).$$

Wir multiplizieren die erste Zeile mit 3 und die zweite und dritte Zeile mit 2. Das ergibt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 15 & -9 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 16 \end{array}\right).$$

Nun ziehen wir von der zweiten und dritten Zeile jeweils die erste Zeile ab und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 15 & -9 & 3 \\ 0 & -7 & 11 & -3 \\ 0 & -13 & 13 & 13 \end{array}\right).$$

Nun nehmen wir die dritte Zeile mal $-7/13$, teilen die erste Zeile wieder durch 3 und erhalten:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & -3 \\ 0 & 7 & -7 & -7 \end{array}\right).$$

Schließlich addieren wir zur dritten Zeile die zweite Zeile. Das liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -10 \end{array}\right).$$

Das zugehörige lineare Gleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned} &2x + 5y - 3z = 1 \\ &-7y + 11z = -3 \\ &4z = -10 \end{aligned}$$

Daraus folgt $z = -5/2$, $y = (3 + 11z)/7 = -7/2$ und $x = (1 - 5y + 3z)/2 = 11/2$. Das Gleichungssystem ist also eindeutig lösbar.

Aufgabe 3 (3+3 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Inversen der folgenden Matrizen mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:
1) Wir bilden zunächst die Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

und ziehen von der zweiten Zeile das 2-fache der ersten Zeile sowie von der dritten Zeile die erste Zeile ab. Das ergibt

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Jetzt multiplizieren wir die dritte Zeile mit -6 und addieren dann die zweite Zeile zur dritten. Das liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & 1 & -6 \end{array}\right).$$

Nun teilen wir die dritte Zeile durch 4 und die zweite Zeile durch 2 und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1/4 & -3/2 \end{array}\right).$$

Jetzt addieren wir die dritte Zeile zur zweiten und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 3/4 & -3/2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1/4 & -3/2 \end{array}\right).$$

Nun teilen wir die dritte Zeile durch -2 und die zweite Zeile durch -3. Das führt auf

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/8 & 3/4 \end{array}\right).$$

Jetzt addieren wir zur ersten Zeile die dritte Zeile und erhalten so

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1/2 & -1/8 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/8 & 3/4 \end{array}\right).$$

Schließlich ziehen wir von der ersten Zeile noch das 3-fache der zweiten Zeile ab und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 5/8 & -3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/8 & 3/4 \end{array}\right).$$

Rechts steht die Matrix A^{-1}.
2) Wir bilden die Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

und ziehen von der dritten Zeile das 4-fache der ersten Zeile ab, was auf

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

führt.
Nun ziehen wir von der dritten Zeile die zweite ab und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Zur zweiten Zeile addieren wir jetzt das 3-fache der dritten Zeile. Das ergibt

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -12 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Nun teilen wir die zweite Zeile durch 2 und multiplizieren die dritte Zeile mit -1. Das ergibt

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Nun addieren wir noch die zweite Zeile zur ersten und erhalten so

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Rechts steht nun die Matrix B^{-1}.