Matrikelnummer:

Universität Leipzig
Fakultät für Mathematik und Informatik
Institut für Informatik

Prof. Dr. Andreas Maletti,
Dr. Erik Paul, Fabian Sauer,
Dr. habil. Karin Quaas

Prüfungsklausur Berechenbarkeit

Sommersemester 2024, 10.7.2024

Bearbeitungszeit: **60 Minuten** Gesamtpunktzahl: **60 + 3 Punkte**

Allgemeine Hinweise

- Die Klausur besteht aus sechs Aufgaben und einer Zusatzaufgabe.
- Versehen Sie jedes Lösungsblatt mit Ihrer **Matrikelnummer**.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen dokumentenecht in blau oder schwarz auf; **keinesfalls mit Bleistift** und bitte nicht in rot oder grün.
- Als Hilfsmittel ist **ein Blatt DIN A4** (beidseitig) mit Notizen zugelassen. Alle anderen Hilfsmittel (inklusive elektronischer Geräte) sind nicht zugelassen.
- Sie können für Ihre Lösungen jeweils die Aufgabenblätter nutzen oder eigenes Papier verwenden.
- Beweisschritte sind grundsätzlich zu begründen. Alle Resultate aus der Vorlesung und den Übungsaufgaben dürfen zitiert werden.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	Z	Bonus	Σ	Note

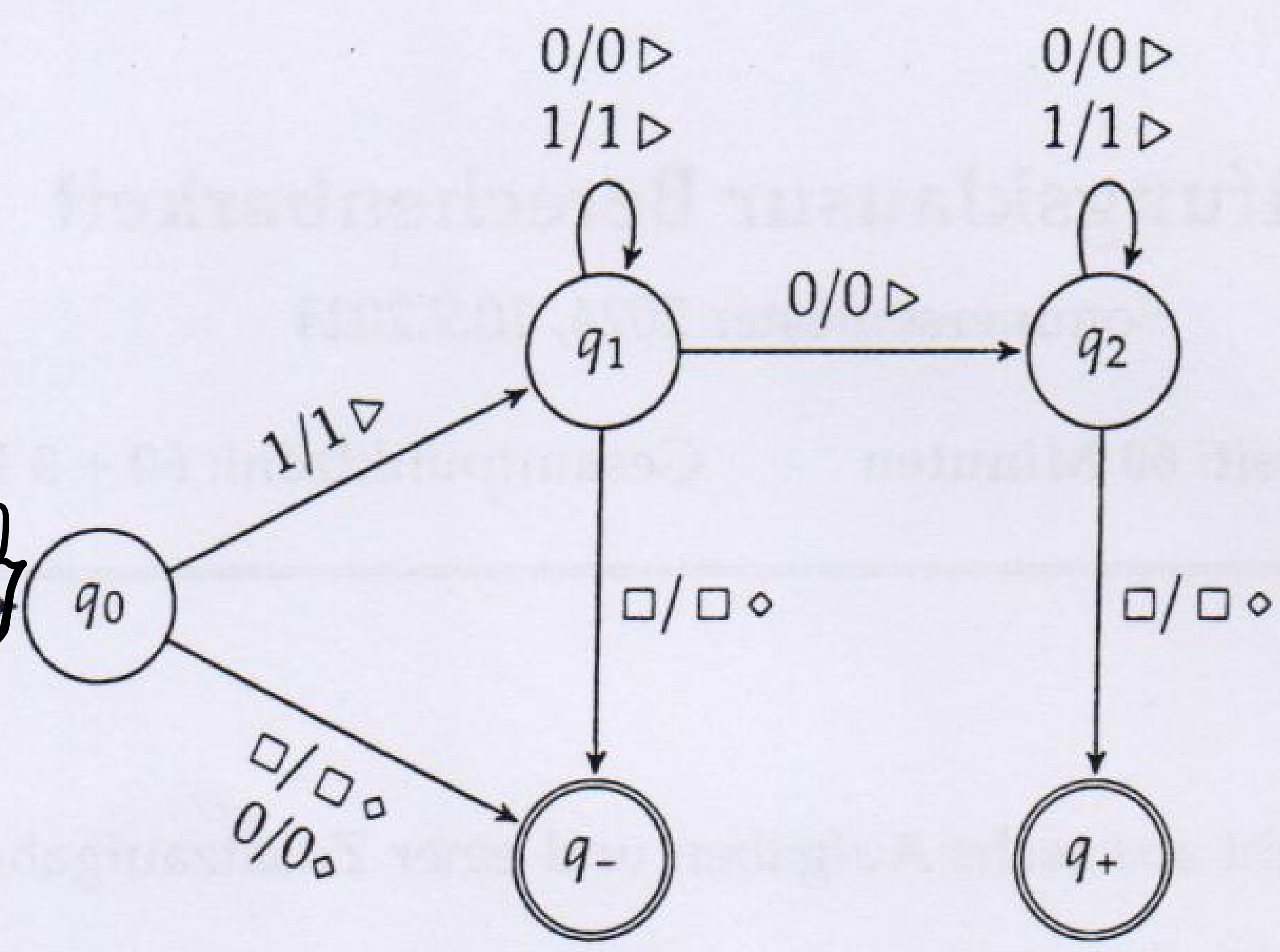
Aufgabe 1 (Turing-Maschinen)
Gegeben sei die Turing-Maschine

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_+, q_-\}, \{0,1\}, \{0,1,\square\}, \Delta, \square, q_0, q_+, q_-) ,$$

wobei Δ durch folgendes Diagramm gegeben ist:

$L(M) = \{ 1 \cdot (0,1)^* \cdot 0 \cdot (0,1)^* \}$

$L(M) = \{ 1w0v \mid v,w \in \{0,1\}^* \}$



(a) Geben Sie für die beiden Wörter 100 und 11 je eine Folge von Ableitungsschritten von M bis zu einem Finalzustand an. (3)

(b) Geben Sie die von M akzeptierte Sprache $L(M)$ an. (2)

(c) Sei die totale Funktion $f\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ gegeben durch (5)

1101

$$f(w) = \begin{cases} 1w' & \text{falls } w = w'1 \text{ für ein } w' \in \{0,1\}^* \\ w & \text{sonst} \end{cases}$$

für jedes $w \in \{0,1\}^*$. Geben Sie eine deterministische Turing-Maschine M' an, die f berechnet. Stellen Sie dabei die Übergangsfunktion als Diagramm dar, wie in der Aufgabenstellung oben für die Turing-Maschine M zu sehen.

Lösung Aufgabe 1:

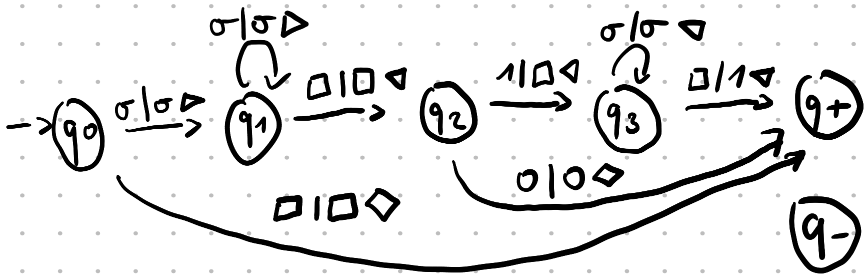
a) $q_0 100 \vdash^* 1 q_1 00 \vdash^* 10 q_2 0 \vdash^* 100 q_2 \vdash^* 100 q_+$

$q_0 11 \vdash^* 1 q_1 1 \vdash^* 11 q_1 \vdash^* 11 q_-$

(c) Sei die totale Funktion $f\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ gegeben durch

$$f(w) = \begin{cases} 1w' & \text{falls } w = w'1 \text{ für ein } w' \in \{0,1\}^* \\ w & \text{sonst} \end{cases}$$

für jedes $w \in \{0,1\}^*$. Geben Sie eine deterministische Turing-Maschine M' an, die f berechnet. Stellen Sie dabei die Übergangsfunktion als Diagramm dar, wie in der Aufgabenstellung oben für die Turing-Maschine M zu sehen.



Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (LOOP- und WHILE-Programme)

(a) Sei $c \in \mathbb{N}$. Geben Sie ein Loop-Programm in strikter Syntax an, welches die folgende Funktion $f_c\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechnet. (4)

$$f_c(n) = \max\{0, c - n\}$$

(b) Sei P das folgende Loop-Programm.

$x_1 = c + 0;$
$x_2 = n + 0;$

$\mathrm{loop}(x_2)$ {
$x_1 = x_1 - 1$
}

```
6      x1 = x1 + x1
0      x1 = x1 - x2
       LOOP(x1) {
           x3 = x1 + x2
       }
x1=0   x1 = x3
```

(i) Geben Sie $|P|_2(\overset{6}{3,4})$ sowie $|P|_2(\overset{0}{3,8})$ an. (2)

(ii) Wie oft wird die LOOP-Schleife bei einem Aufruf $|P|_2(a,b)$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ ausgeführt? $2a - b$ (1)

(iii) Geben Sie die von P berechnete Funktion $|P|_2\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ an. (3)

Lösung Aufgabe 2: $P(a,b) = \begin{cases} 2a & \text{falls } 2a > b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Matrikelnummer:

$\pi_1^{(2)}(a, b) = a$

Aufgabe 3 (Rekursion)

(a) Gegeben sei die folgende primitiv rekursive Definition der Funktion h_1: (4)

$$h_1 = \text{pr}[2^{(0)}, \text{nf}\langle\pi_1^{(2)}\rangle]$$

$2^0 : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$, $() \mapsto 2$

$\text{nf} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $a \to a+1$

$\pi_1^{(2)} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(a, b) \to a$

$\text{nf}\langle\pi_1^{(2)}\rangle : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(a, b) \to a+1$

Geben Sie für alle Teilfunktionen von h_1 (inklusive h_1) die Stelligkeit an und welche Funktion diese berechnen.

(b) Geben Sie für die wie folgt definierte Funktion h_2 eine primitiv rekursive Darstellung an. (4)

$$h_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : a \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } a \text{ gerade} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\text{pr}[0_1^{0}, \text{sub}(1^{0}, \pi_1^{(2)})]$

also $h_2(0) = 0, h_2(1) = 1, h_2(2) = 0$ usw. Sie dürfen in der Vorlesung definierte Funktionen wie add, mult, sub, ... verwenden.

(c) Sei $h_3 = \mu h_2$, wobei h_2 die in Aufgabe (b) definierte Funktion ist. (2)

(i) Zeigen Sie, dass $h_3 = 0^{(0)}$.

(ii) Ist h_3 eine totale Funktion?

Lösung Aufgabe 3:

$\mu h_2(a) = h_2(0, a)$

$a = 0 \Rightarrow f \Rightarrow 0^0 = 0$

0 ist kleinstes $\in$ der $\mathbb{N}$ Zahlen

Matrikelnummer:

Aufgabe 4 (Grundbegriffe)

(a) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Beweisen Sie Ihre Antwort.
Alle totalen Funktionen sind berechenbar. Nein teilstring π (3)

(b) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Beweisen Sie Ihre Antwort.
Das Komplement jeder semientscheidbaren Menge ist unentscheidbar. (3)

(c) Sei $L \subseteq \{0,1\}^*$ eine unendliche, rekursiv aufzählbare Sprache, und sei $u \in \{0,1\}^*$ ein beliebiges Wort. Zeigen Sie, dass die Sprache (4)

$$\{w \cdot u \mid w \in L\}$$

auch rekursiv aufzählbar ist.

Lösung Aufgabe 4:

Aufgabe 5 (Entscheidbarkeit)
Gegeben seien die folgenden Probleme:

$G = \{\text{code}(M) \mid \text{TM } M \text{ hält in } q_+ \text{ auf mindestens einem Wort } w \in \Sigma^* \text{ mit gerader Länge}\}$
$S = \{\text{code}(M) \mid \text{TM } M \text{ hält in } q_+ \text{ auf mindestens einem Wort } w \in \Sigma^*\}$

(a) Zeigen Sie, dass G die Voraussetzungen des Satzes von Rice erfüllt, indem Sie (4)

- eine Funktionsmenge $\mathcal{F} \subseteq \{f\colon \Sigma^* \to \Sigma^* \mid f \text{ berechenbar}\}$ mit $C(\mathcal{F}) = G$ sowie
- berechenbare Funktionen $g, h\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ mit $g \in \mathcal{F}, h \notin \mathcal{F}$ angeben.

(b) Zeigen Sie $G \leq S$, indem Sie eine Reduktion $f\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ von G auf S beschreiben und argumentieren, dass f tatsächlich eine Reduktion ist, d.h. berechenbar und total mit $w \in G \Leftrightarrow f(w) \in S$. (6)

Lösung Aufgabe 5:

Matrikelnummer:

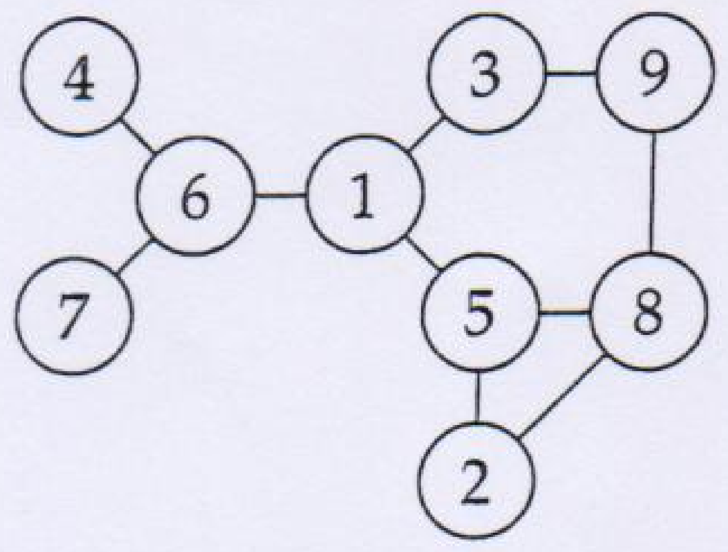
Aufgabe 6 (Komplexität)
Gegeben sei das folgende Entscheidungsproblem:

Problem des einfachen Kreises	
Gegeben:	• Ein ungerichteter Graph $G = (E, K)$ mit Ecken $E = \{1, \ldots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und Kanten $K \subseteq E \times E$, • eine Zahl $\ell \in \mathbb{N}$.
Frage:	Gibt es einen einfachen Kreis der Länge ℓ in G?

Bemerkung: Ein einfacher Kreis in einem Graphen ist ein Weg, der jede Ecke höchstens einmal besucht und dessen Anfangs- und Endecke übereinstimmen. Die Länge eines Weges ist die Anzahl der Kanten, die er enthält.

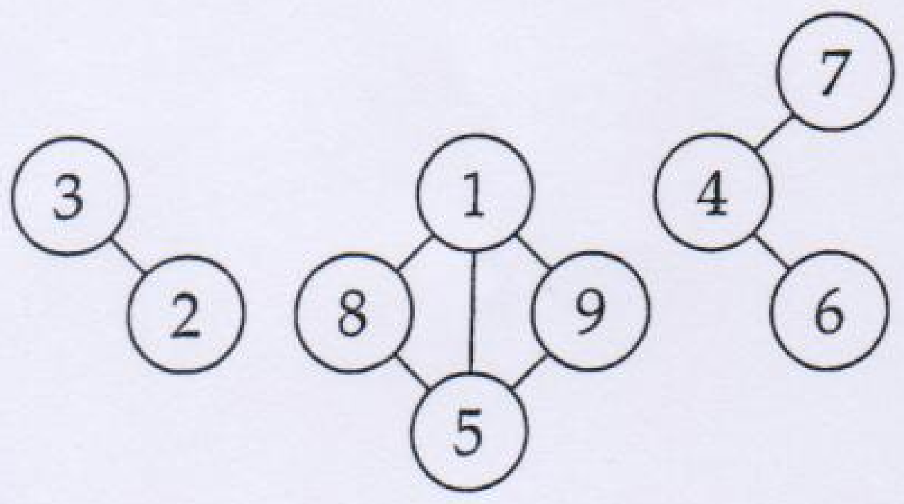
(a) Sind die folgenden Instanzen *positive* oder *negative* Instanzen des Problems des einfachen Kreises? Begründen Sie Ihre Antwort. (3)

(i) Der Graph G ist durch folgendes Diagramm gegeben:



Die geforderte Länge des Kreises ist $\ell = 5$.

(ii) Der Graph G ist durch folgendes Diagramm gegeben:



Die geforderte Länge des Kreises ist $\ell = 5$.

(b) Zeigen Sie, dass das Problem P des einfachen Kreises nichtdeterministisch polynomiell entscheidbar ist, indem Sie eine Zertifikatsrelation $R \subseteq \{0, 1, \#\}^* \times \{0, 1\}^*$ und ein $k \in \mathbb{N}$ angeben und nachweisen, dass R die folgenden Bedingungen erfüllt: (7)

(0100011 00 101, 011001)

- $\{w\#z \mid (w, z) \in R\}$ ist deterministisch polynomiell entscheidbar,
- $w \in P$ gdw. ein $z \in \{0, 1\}^*$ existiert mit $(w, z) \in R$ und $|z| \leq |w|^k$ für jedes $w \in \{0, 1, \#\}^*$.

Wie üblich ist das Problem über $\{0,1,\#\}^*$ codiert. Dazu sei $m = |K|$ die Anzahl der Kanten und $\kappa_1, \dots, \kappa_m$ eine (beliebige) Nummerierung der Kanten. Eine Instanz von P ist dann gegeben durch das Wort

$$\mathrm{bin}(n)\#\mathrm{bin}(\kappa_1)\#\cdots\#\mathrm{bin}(\kappa_m)\#\mathrm{bin}(\ell)$$

wobei $\mathrm{bin}((d,e)) = \mathrm{bin}(d)\#\mathrm{bin}(e)$ für eine Kante $(d,e) \in K$.

Lösung Aufgabe 6:

Zusatzaufgabe

Besitzt die folgende Instanz des Postschen Korrespondenzproblems (PCP) eine Lösung? Falls ja, geben Sie eine Lösung an. Falls nicht, begründen Sie, warum keine Lösung existiert. (+3)

$$\langle (ab, abaa), (aaa, ab), (ab, b) \rangle$$