Grundlagen Lineare Algebra für Informatiker

Nikita Emanuel John Fehér, 3793479

02. Mai 2024
Montag 09:15-11:15 Valerie Christiana Sabrina Freund

Aufgabe 1 Untersuchen Sie die folgenden Vektoren auf lineare Unabhängigkeit im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$. Falls die Vektoren linear abhängig sind, bestimmen Sie die Dimension ihrer linearen Hülle.

(a) $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&2\\3&1&1\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&0\\0&-2&-2\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \Longrightarrow$ linear unabhängig

(b) $u_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $u_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $u_3 = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&0&2\\3&1&1\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-2&4\\0&-2&4\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix} \Longrightarrow$ linear abhängig

- $\operatorname{span}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix} = 2$

(c) $w_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ $w_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ $w_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ $w_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \Longrightarrow$ linear unabhängig

Aufgabe 2 Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden. Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind.

- $x, y, z \in \mathbb{R} : xu + yv + zw = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\implies \begin{matrix} x + ay + a^2 z = 0 & |z^{-1} \\ x + bx + b^2 z = 0 & |z^{-1} \\ x + cx + c^2 z = 0 & |z^{-1} \end{matrix} \implies \begin{matrix} \frac{x}{z} + a\frac{y}{z} + a^2 = 0 & |\text{pq-formel} \\ \frac{x}{z} + b\frac{y}{z} + b^2 = 0 & \\ \frac{x}{z} + c\frac{y}{z} + c^2 = 0 & \end{matrix}$$

Fall 1 $a = \frac{\frac{-y}{z}}{2} + \sqrt{\frac{\frac{y^2}{z^2}}{4} - \frac{x}{z}}$

$b = \frac{\frac{-y}{z}}{2} - \sqrt{\frac{\frac{y^2}{z^2}}{4} - \frac{x}{z}}$

$c = ...$ es gibt keine lösung für c da a, b, c paarweise verschieden sind, außer wenn $x, y, z = 0$

Fall 2 $a = \frac{\frac{-y}{z}}{2} - \sqrt{\frac{\frac{y^2}{z^2}}{4} - \frac{x}{z}}$

$b = \frac{\frac{-y}{z}}{2} + \sqrt{\frac{\frac{y^2}{z^2}}{4} - \frac{x}{z}}$

$c = ...$ es gibt keine lösung für c da a, b, c paarweise verschieden sind, außer wenn $x, y, z = 0$

Aufgabe 3 Sei $V_{\mathbb{R}}$ der Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt gerade, falls $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. f heißt ungerade, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist. Wir setzen

$$G = \{f \in V_{\mathbb{R}} : f \text{ ist gerade}\} \quad \text{und} \quad U = \{f \in V_{\mathbb{R}} : f \text{ ist ungerade}\}.$$

Zeigen Sie, dass G und U Unterräume von $V_{\mathbb{R}}$ sind und dass $V_{\mathbb{R}} = G \oplus U$ gilt.