Def.:

Sei $A \in GL(n, \mathbb{R})$. A heißt orthogonal $:\Leftrightarrow A^{-1} = A^T$

Aufgabe 8 (4 Punkte):

Zeigen Sie, dass die Determinante einer orthogonalen Matrix entweder 1 oder -1 ist.
Erinnerung: Wir nennen eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal, falls sie invertierbar ist und $A^{-1} = A^T$ gilt.

Lösung:

$$A^{-1} = A^T \Rightarrow A \cdot A^T = E_n$$

$$\Rightarrow 1 = \det(E_n) = \det(A \cdot A^T) = \det(A) \cdot \underbrace{\det(A^T)}_{=\det(A)} = (\det(A))^2$$

$$\Rightarrow \det(A) = \pm 1.$$

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A^2 = -E_n$. Man zeige:

(a) A ist invertierbar.

(b) $E_n + A$ ist invertierbar und es gilt $(E_n + A)^{-1} = \frac{1}{2}(E_n - A)$.

(c) Gilt zusätzlich $A^T = -A$, so ist $\frac{1}{\sqrt{2}}(E_n + A)$ eine orthogonale Matrix.

(d) n ist gerade.

Löaung:

Ad (a):

Die Invertierbarkeit von A kann man auf verschiedene Art zeigen:

- $A \cdot (-A) = (-A) \cdot A = -A^2 = -(-E_n) = E_n \underset{\text{invertierbar}}{\overset{\text{Definition}}{\Longrightarrow}} A$ ist invertierbar.
- $\det(A)^2 \underset{\text{kationssatz}}{\overset{\text{Multipli-}}{=}} \det\left(A^2\right) = \det(-E_n) = (-1)^n \neq 0 \implies \det(A) \neq 0$

  $\overset{\text{Rechenregel}}{\Longrightarrow}$ A ist invertierbar
- $\operatorname{rang}\left(A^2\right) = \operatorname{rang}(-E_n) = n \implies n \geq \operatorname{rang}(A) \geq \operatorname{rang}\left(A^2\right) = n$

  $\implies \operatorname{rang}(A) = n \quad = \quad A$ ist invertierbar

Ad (b):

Wir prüfen nach, ob mit $\frac{1}{2} \cdot (E_n - A)$ tatsächlich ein Inverses zu $E_n + A$ existiert:

$$
\begin{aligned}
(E_n + A) \cdot \frac{1}{2} \cdot (E_n - A) &= \frac{1}{2} \cdot (E_n + A) \cdot (E_n - A) = \frac{1}{2} \cdot \left(E_n^2 - E_n \cdot A + A \cdot E_n - A^2\right) \\
&\underset{E_n^2 = E_n}{\overset{A^2 = -E_n}{=}} \frac{1}{2} \cdot \left(E_n - (-E_n)\right) = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot E_n) = E_n
\end{aligned}
$$

Nach Vorlesung/Folgerung ist damit $\frac{1}{2} \cdot (E_n - A)$ bereits die inverse Matrix zu $E_n + A$.

Ad (c):

Nach Definition ist eine Matrix $X \in K^{n \times n}$ orthogonal, wenn $X^T \cdot X = E_n$ gilt.
Wir prüfen dies für $X = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (E_n + A)$:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (E_n + A)\right)^T \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (E_n - A)\right) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \left(E_n^T + A^T\right) \cdot (E_n + A) \\
&\underset{A^T = -A}{=} \frac{1}{2} \cdot (E_n - A) \cdot (E_n + A) \\
&\underset{\text{Teil } (b)}{\overset{\text{siehe}}{=}} E_n
\end{aligned}
$$

Äquivalent kann man prüfen, ob $X^T = X^{-1}$ erfüllt ist:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (E_n + A)\right)^T &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (E_n^T + A^T) \underset{A^T=-A}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (E_n - A) \\
&= \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (E_n - A)\right) \\
&\underset{\text{Teil }(b)}{=} \sqrt{2} \cdot (E_n + A)^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1} \cdot (E_n + A)^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (E_n + A)\right)^{-1}
\end{aligned}$$

Ad (d):

$$0 \leq \det(A)^2 \underset{\text{multiplikationssatz}}{\overset{\text{Determinanten-}}{=}} \det\left(A^2\right) \underset{\text{setzung}}{\overset{\text{Voraus-}}{=}} \det(-E_n) \overset{\text{Rechenregel}}{=} (-1)^n \implies n \text{ gerade}$$

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^T = -A$. Man zeige:

(a) $x^T A y = -y^T A x \qquad (x, y \in \mathbb{R}^n)$

(b) $x^T A x = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$

(c) $x = -Ax \implies x = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$

(d) $E_n + A$ ist invertierbar.

(e) $(E_n + A)^{-1} \cdot (E_n - A) = (E_n - A) \cdot (E_n + A)^{-1}$.

(f) Man zeige für $U := (E_n + A)^{-1} \cdot (E_n - A)$, daß $U^T U = E_n$ gilt, d.h. daß U eine orthogonale Matrix ist.

Lösungen:

Ad (a);

Da $x^T A y \in \mathbb{R}$ folgt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$x^T A y = \left(x^T A y\right)^T \quad = \quad y^T A^T \left(x^T\right)^T \quad = \quad y^T A^T x \underset{A^T=-A}{=} y^T(-A)x = -y^T A x$$

Ad (b):

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n \; : \; x^T A x \underset{\text{Teil (a)}}{=} -x^T A x \implies 2 \cdot x^T A x = 0 \implies x^T A x = 0$$

Ad (c):

$$0 \underset{\text{Teil (b)}}{=} x^T A x = x^T(Ax) \underset{\text{Voraussetzung}}{=} x^T(-x) = -x^T x = -\langle x\, ,\, x\rangle \overset{\text{Skalarpr.}}{\underset{\text{positiv def.}}{=}} x = 0$$

Ad (d):

Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$(E_n + A) \cdot x = 0 \iff x + Ax = 0 \iff x = -Ax \underset{\text{Teil (c)}}{\implies} x = 0$$

Dies ist aber äquivalent dazu, daß $(E_n + A)$ invertierbar ist.

Ad (e):

$$(E_n{+}A){\cdot}(E_n{-}A) \underset{\text{distrib.}}{=} E_n^2 \underbrace{-E_nA + AE_n}_{=0} -A^2 = E_n^2 + \underbrace{E_nA - AE_n}_{=0} -A^2 = (E_n{-}A){\cdot}(E_n{+}A) \qquad (\bullet)$$

Also

$$\begin{aligned} E_n - A \quad &= \quad (E_n - A) \cdot \underbrace{(E_n + A) \cdot (E_n + A)^{-1}}_{=E_n} = \left[(E_n - A) \cdot (E_n + A)\right] \cdot (E_n + A)^{-1} \\ &\underset{(\bullet)}{=} \left[(E_n + A) \cdot (E_n - A)\right] \cdot (E_n + A)^{-1} \qquad (\bullet\bullet) \qquad \implies \end{aligned}$$

$$(E_n{+}A)^{-1} \cdot (E_n{-}A) \underset{(\bullet\bullet)}{=} \underbrace{(E_n + A)^{-1} \cdot \left[(E_n + A)\right.}_{=E_n} \left.{\cdot}(E_n{-}A)\right] \cdot (E_n{+}A)^{-1} = (E_n{-}A) \cdot (E_n{+}A)^{-1}$$

Ad (f):

Zunächst ist mit $E_n + A$ nach Vorlesung auch

$$(E_n + A)^T = E_n + A^T \underset{\text{Voraussetzung}}{=} E_n - A$$

invertierbar und wir können schreiben

$$\begin{aligned}
U^T \cdot U &= \left((E_n + A)^{-1} \cdot (E_n - A)\right)^T \cdot (E_n + A)^{-1} \cdot (E_n - A) \\
&= (E_n - A)^T \cdot \left((E_n + A)^{-1}\right)^T \cdot (E_n + A)^{-1} \cdot (E_n - A) \\
&= (E_n - A)^T \left((E_n + A)^T\right)^{-1} \cdot \underbrace{(E_n + A)^{-1} \cdot (E_n - A)}_{\text{Teil (d)}} \\
&\underset{A^T = -A}{=} \left(E_n + A^T\right)^T \cdot \left(E_n + A^T\right)^{-1} (E_n - A) \cdot (E_n + A)^{-1} \\
&\overset{(A^T)^T = A}{\underset{-A = A^T}{=}} (E_n + A) \cdot \underbrace{(E_n - A)^{-1} \cdot (E_n - A)}_{= E_n} \cdot (E_n + A)^{-1} \\
&= (E_n + A) \cdot (E_n + A)^{-1} \\
&= E_n
\end{aligned}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Man betrachte die folgende binäre Relation auf $\mathbb{R}^{n \times n}$

$$A \sim B :\Longleftrightarrow \exists\, S \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ Orthogonalmatrix } : A = S^T \cdot B \cdot S$$

und zeige:

(a) Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

(b) $A \sim B \implies \det(A) = \det(B) \qquad (A, B \in \mathbb{R}^{n \times n})$

(c) $A \sim B \implies \operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B) \qquad (A, B \in \mathbb{R}^{n \times n})$

Beweis:

Ad (a) :

Zunächst gilt für jede Orthogonalmatrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nach Vorlesung

$$S \text{ orthogonal} \iff S^T \text{ orthogonal und } S^T \cdot S = E_n = S \cdot S^T \qquad (\bullet)$$

Zu zeigen ist, daß die Relation $\sim$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

- **reflexiv:** Für jedes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt mit E_n die $n \times n$-Einheitsmatrix:

$$E_n^T \cdot A \cdot E_n = A$$

und da E_n eine Orthogonalmatrix ist (d.h $E_n^T \cdot E_n = E_n$) ist damit die Reflexivität erfüllt.

- **symmetrisch:** Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A \sim B$, d.h. es gibt eine Orthogonalmatrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so daß $A = S^T \cdot B \cdot S$. Dann folgt

$$S \cdot A \cdot S^T = S \cdot \left(S^T \cdot B \cdot S\right) \cdot S^T = \left(S S^T\right) \cdot B \cdot \left(S S^T\right) \underset{(\bullet)}{=} E_n \cdot B \cdot E_n = B$$

Da gemäß $(\bullet)$ mit der Matrix S auch die Matrix $S_1 := S^T$ orthogonal ist, gibt es also eine Orthogonalmatrix $S_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$B = S \cdot A \cdot S^T \underset{S_1^T = (S^T)^T = S}{=} S_1^T \cdot A \cdot S_1$$

und das bedeutet nach Definition gerade $B \sim A$.

- **transitiv:** Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A \sim B$ und $B \sim C$, d.h. es gibt Orthogonalmatrizen $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A = S_1^T \cdot B \cdot S_1$ und $B = S_2^T \cdot C \cdot S_2$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} A &= S_1^T \cdot B \cdot S_1 \underset{\text{einsetzen}}{\overset{\text{für } B}{=}} S_1^T \cdot (S_2^T \cdot C \cdot S_2) \cdot S_1 \\ &= \left(S_1^T S_2^T\right) \cdot C \cdot (S_2 S_1) \\ &= (S_2 S_1)^T \cdot C \cdot (S_2 S_1) \qquad \text{(Rechenregel} \qquad (AB)^T = B^T A^T) \end{aligned}$$

Nun bilden die Orthogonalmatrizen eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, weshalb $S := S_2 S_1$ eine Orthogonalmatrix ist und für dieses S gilt

$$A = S^T \cdot C \cdot S\,, \qquad \text{also } A \sim C \qquad \text{q.e.d.}$$

Ad (b):

Sei für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $A \sim B$, d.h. $A = S^T \cdot B \cdot S$ für eine Orthogonalmatrix $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Nach Vorlesung gilt für die Orthogonalmatrix S, daß S invertierbar ist und daß

$$S^{-1} = S^T$$

Also:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\left(S^T \cdot B \cdot S\right) \\
&\overset{\text{Multiplikations-}}{\underset{\text{-satz}}{=}} \det\left(S^T\right) \cdot \det(B) \cdot \det(S) \\
&= \det\left(S^{-1}\right) \cdot \det(B) \cdot \det(S) \\
&= \det(S)^{-1} \cdot \det(B) \cdot \det(S) \\
&= \underbrace{\det(S)^{-1} \cdot \det(S)}_{=1} \cdot \det(B) \\
&= \det(B) \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Ad (c):

Nach Vorlesung gilt für eine Matrix M und invertierbare Matrizen S, T mit dem korrekten Format bei der Multiplikation:

$$\text{rang(M)} = \text{rang}(S \cdot M \cdot T)$$

Damit folgt für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A \sim B$, d.h. $A = S^T \cdot B \cdot S$ für eine Orthogonalmatrix $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da ja mit S auch S^T invertierbar ist:

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(S^T \cdot B \cdot S) = \text{rang}(B) \qquad \text{q.e.d.}$$

Häufiger Fehler:

In der Defintion der Relation wurde oft angenommen, bei der Orthogonalmatrix S handele es sich um eine konstante, für die gesamte Relation immer gleiche Matrix. Nun steht aber in der Definition ein Existenzquantor; d.h. A und B sind äquivalent, wenn es ein orthogonales S **gibt**, so daß $A = S^T \cdot B \cdot S$: Jedes Paar $A \sim B$ hat also ein eigenes S.
So gilt zum Beispiel für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, daß $A = E_2 \cdot A \cdot E_2$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=S^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=S}$$

aber für dieses <u>feste</u> S gilt nicht „ reflexiv “ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

d.h. mit diesem <u>festen</u> S gilt zwar $A \sim B$, aber $A \neq S^T A S$

Sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^2 = E_n$. Zeigen Sie:

(a) A ist invertierbar. Geben Sie A^{-1} an.

(b) $|\det(A)| = 1$

(c) $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal $\wedge$ $B := S^T A S \implies B^2 = E_n$.

(d) $A - E_n$ oder $A + E_n$ ist *nicht* invertierbar.

Lösung:

Ad (a)

Nach Vorlesung (2.13) ist eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau dann invertierbar, wenn es $A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt, so daß $A \cdot A' = A' \cdot A = E_n$. Gemäß der Voraussetzung $A^2 = E_n$ erfüllt $A' := A$ diese Bedingung, und da A' dann die inverse Matrix ist, folgt $A^{-1} = A' = A$.

Ad (b)

$$1 = \det(E_n) = \det(A^2) \underset{\text{satz}}{\overset{\text{Multipl.}}{=}} \det(A) \cdot \det(A) = \det(A)^2 = |\det(A)|^2 \overset{|\cdot|\geq 0}{\Longrightarrow} |\det(A)| = 1$$

Ad (c)

Da S orthogonal ist, gilt $S^T S = S S^T = E_n$, und wegen $B = S^T A S$ folgt:

$$B^2 = \left(S^T A S\right) \cdot \left(S^T A S\right) = S^T A \underbrace{(S S^T)}_{=E_n} A S = S^T \cdot \underset{\substack{\parallel \\ E_n}}{A^2} \cdot S = S^T S = E_n$$

Ad (d)

Es ist $(A + E_n) \cdot (A - E_n) = A^2 - E_n^2 \underset{A^2 = E_n}{=} E_n - E_n = 0$

Wären nun sowohl $A + E_n$ als auch $A - E_n$ invertierbar, so gilt dies mit Vorlesung auch für ihr Produkt, d.h. die Nullmatrix - doch diese hat Rang 0 und ist nicht invertierbar. Also muß einer der Faktoren $A + E_n$ oder $A - E_n$ nicht invertierbar sein.