Def.:

Sei $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in K^{m \times n}$.

A ist in Zeilenstufenform, falls gilt:

$$A = \left(\begin{array}{cccccccccccccccccc}
0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & \cdots & * & * & \cdots & * & \cdots & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2j_2} & \cdots & * & \cdots & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\
 & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & & \cdots & \\
0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{rj_r} & \cdots & * \\
0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & & \cdots & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right)$$

r Zeilen $\neq 0$

hier dürfen beliebig viele 0-Zeilen stehen (auch keine)

hier dürfen beliebig viele 0-Spalten stehen (meistens keine)

Die Stufen dürfen beliebig lang sein und unter den Stufen stehen nur Nullen

wobei $0 \le r \le m$ und $a_{1j_1}, \ldots, a_{rj_r} \neq 0$. Die Indizies $j_1, \ldots, j_r$ heißen Pivotindizes.

A ist in reduzierter Zeilenstufenform, falls gilt:

$$A = \left(\begin{array}{cccccccccccccccccc}
0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * & 0 & \cdots & * & \cdots & * & \cdots & * & 0 & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * & \cdots & * & \cdots & * & 0 & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & * & \cdots & * & 0 & \cdots & * \\
 & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & & \cdots & \\
0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * \\
0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & & \cdots & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right)$$

r Zeilen $\neq 0$

hier dürfen beliebig viele 0-Zeilen stehen (auch keine)

hier dürfen beliebig viele 0-Spalten stehen (meistens keine)

Die Stufen dürfen beliebig lang sein und unter den Stufen stehen nur Nullen

wobei $0 \le r \le m$.

d.h. A ist in Zeilenstufenform, am Anfang einer neuen Stufe steht jeweils eine 1

d.h. $a_{ij_i} = 1$ $(i = 1, \ldots, r)$ und in den Zeilen darüber stehen in den Spalten j_i $(i = 1, \ldots, r)$ jeweils nur Nullen.

Bsp.:

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ ist in Zeilenstufenform, aber nicht in reduzierter Zeilenstufenform

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist in reduzierter Zeilenstufenform

Satz:

Sei $A \in K^{m \times n}$. Dann gilt:

A lässt sich mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform bringen.

Elementare Zeilenumformungen sind:

(1) Vertausche die i-te und die j-te Zeile von A.

$(1 \leq i, j \leq m,\ i \neq j)$

(2) Multipliziere die i-te Zeile von A mit λ

$(1 \leq i \leq m,\ \lambda \in K \setminus \{0\})$

(3) Addiere das λ-fache der i-ten Zeile von A zur j-ten Zeile von A

$(1 \leq i, j \leq m,\ i \neq j,\ \lambda \in K \setminus \{0\})$

Bsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{(-1)\cdot \mathrm{II} \\ \mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\mathrm{II} + (-2)\cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{III} + (-3)\cdot \mathrm{I}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{III}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III} + (-2)\cdot \mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$ ist in Zeilenstufenform

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}\cdot \mathrm{III}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\mathrm{I} + 2\cdot \mathrm{III} \\ \mathrm{II} + (-5)\cdot \mathrm{III}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I} + \mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ist in reduzierter Zeilenstufenform

Insbesondere gilt: $\operatorname{rang}(A) = 3$

Def.:

Sei $A = (a_1 \; a_2 \; \dots \; a_n) \in K^{m \times n}$ mit Spaltenvektoren $a_j \in K^m$ $(j = 1, \dots, n)$.

Dann heißt $\operatorname{rang}(A) := \dim(\operatorname{span}(a_1, \dots, a_n))$ der Rang von A. (Spaltenrang von A)

Satz:

Sei $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$ mit Zeilenvektoren $a_i \in K^n$ $(i = 1, \dots, m)$.

Dann gilt $\operatorname{rang}(A) = \dim(\operatorname{span}(a_1, \dots, a_m))$ (Zeilenrang von A)

Satz:

Sei $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in K^{m \times n}$ mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform gebracht, d.h.:

$$A \to \left(\begin{array}{cccccccccccccccc}
0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{1j_1} & \cdots & * & * & \cdots & * & \cdots & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{2j_2} & \cdots & * & \cdots & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\
 & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & & \cdots & \\
0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{rj_r} & \cdots & * \\
0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & & \cdots & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} r \text{ Zeilen} \neq 0 \\ \\ \\ \\
\end{array}$$

wobei $0 \le r \le m$ und $\tilde{a}_{1j_1}, \dots, \tilde{a}_{rj_r} \neq 0$.

Dann gilt: $\operatorname{rang}(A) = r$.