Übungsblatt 8

1) Untersuchen Sie durch Vergleich mit schon bekannten Reihen, oder unter Benutzung von Wurzel- oder Quotientenkriterium, die folgenden Reihen $\sum_n a_n$ auf Konvergenz.

$$(i)\ \ a_n = \frac{n^2+1}{2^n},\ (ii)\ \ a_n = \frac{1}{3n-2},\ (iii)\ \ a_n = \frac{n}{n^3+7n^2-5},\ (iv)\ \ a_n = \frac{n!}{2^{n^2}}.$$

1+1+1+2 Punkte

2) a) Seien $u, w \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $||u| - |w|| \leq |u - w|$. *[Hinweis Δ-UGl und Lemma 2.30.a) könnten helfen.]*

b) Sei $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ eine konvergente Folge. Zeigen Sie, mit a) oder anders, dass

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \left| \lim_{n\to\infty} z_n \right|.$$

c) Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Zeigen Sie, wenn $\varepsilon > 0$ dann gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: wenn $n \geq N$ dann $\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon$. Schlußfolgern Sie (diese Beobachtung ausbauend oder anders), dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

d) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

$1 + 1 + 2 + 1$ Punkte

Wie immer, begründen Sie Ihre Aussagen sorgfältig! Skizzen können und sollen der Lösungsfindung dienen, sind aber keine Beweise.

Bitte geben Sie pro Lösungsteam nur EINE Lösung ab !!!, die Korrekturen verzögern sich sonst unnötig. Danke.

Nach der Vorlesung abgegebene Lösungen werden nicht voll bewertet!

Abgabe am 12.12.2024 11:00 online(Moodlekurs) oder 17:15 HS2 zur Vorlesung.