Grundlagen Lineare Algebra für Informatiker

Nikita Emanuel John Fehér, 3793479

13. April 2024
Montag 09:15-11:15 Valerie Christiana Sabrina Freund

Aufgabe 1 Seien A, B und C beliebige Mengen. Zeigen Sie:

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
&\text{Sei } x \in A \setminus (B \setminus C) \\
&\iff x \in A \land x \notin (B \setminus C) \\
&\iff x \in A \land \neg x \in (B \setminus C) \\
&\iff x \in A \land \neg(x \in B \land x \notin C) \\
&\iff x \in A \land \neg(x \in B \land \neg x \in C) \\
&\iff x \in A \land (\neg x \in B \lor x \in C) \\
&\iff (x \in A \land \neg x \in B) \lor (x \in A \land x \in C) \\
&\iff (x \in A \land x \notin B) \lor (x \in A \land x \in C) \\
&\iff (x \in A \setminus B) \lor (x \in A \land x \in C) \\
&\iff (x \in A \setminus B) \lor x \in (A \cap C) \\
&\iff x \in (A \setminus B) \lor x \in (A \cap C) \\
&\iff x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 Beweisen Sie die folgende Summenformel mittels vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1} \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Induktionsanfang: $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(3 \cdot 1 - 2)(3 \cdot 1 + 1)} = \frac{1}{3 \cdot 1 + 1}$$
$$\frac{1}{(3-2)(3+1)} = \frac{1}{3+1}$$
$$\frac{1}{1 \cdot 4} = \frac{1}{4}$$

Induktionsvoraussetzung:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

Induktionsschritt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n+1}{3(n+1)+1}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} &= \frac{1}{(3(n+1)-2)(3(n+1)+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} \\
&= \frac{1}{(3n+3-2)(3n+3+1)} + \frac{n}{3n+1} \\
&= \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} + \frac{n}{3n+1} \\
&= \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} + \frac{n(3n+4)}{(3n+1)(3n+4)} \\
&= \frac{1+(n(3n+4))}{(3n+1)(3n+4)} \\
&= \frac{3n^2+4n+1}{(3n+1)(3n+4)} \\
&= \frac{(3n+1)(n+1)}{(3n+1)(3n+4)} \\
&= \frac{n+1}{3(n+1)+1}
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 + 2n$ teilbar durch 3.

Induktionsanfang: $n = 1$

$$3|(1^3 + 2 \cdot 1) = 3|3$$

Induktionsvoraussetzung:

$$3|(n^3 + 2n) \iff \forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{Z} : n^3 + 2n = 3k$$

Induktionsschritt:

$$3|((n+1)^3 + 2(n+1))$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
&3|(n+1)^3 + 2(n+1) \\
&3|((n+1)(n+1)(n+1) + 2n + 2) \\
&3|((n^2 + n + n + 1)(n+1) + 2n + 2) \\
&3|((n^2 + 2n + 1)(n+1) + 2n + 2) \\
&3|(n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n + n + 1 + 2n + 2) \\
&3|(n^3 + 3n^2 + 5n + 3) \\
&3|(n^3 + 2n + 3n^2 + 3n + 3) \\
&3|(3k + 3n^2 + 3n + 3) \\
&3|(3n^2 + 3n + 3) \\
&3|(3(n^2 + n + 1))
\end{aligned}$$

$\square$