Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 1 **(10 Punkte)**

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind. Es muss keine Begründung gegeben werden.

Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Sie erhalten jedoch mindestens 0 Punkte.
Hinweis: *Unbeantwortete Fragen werden nicht als falsch gewertet. Wenn Sie sich nicht sicher sind, lassen Sie also besser eine Frage unbeantwortet als zu raten!*

Jedes lineare Gleichungssystem mit n Gleichungen in n Unbestimmten besitzt genau eine Lösung. ☐ wahr ☒ falsch

Sei A eine Matrix und $B = A^t$ ihre Transponierte. Dann gilt für die zugehörigen linearen Abbildungen $\underbrace{\dim(\mathrm{Bild}(\varphi_A))}_{\text{Spaltenrang}} = \underbrace{\dim(\mathrm{Bild}(\varphi_B))}_{\text{Zeilenrang}}$. ☒ wahr ☐ falsch

Seien A und B zwei $n \times n$-Matrizen. Dann gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. ☒ wahr ☐ falsch

Seien A und B zwei $n \times n$-Matrizen. Dann gilt $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$. ☐ wahr ☒ falsch

Ist A eine invertierbare $n \times n$ Matrix, so gilt $\det(A) \neq 0$. ☒ wahr ☐ falsch

Sei stets K ein Körper und seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume.

Ist U ein Untervektorraum von V und ist $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, so ist $f(U)$ ein Untervektorraum von W. ☒ wahr ☐ falsch

Ist $M \subset V$ kein Untervektorraum, so ist auch $f(M)$ kein Untervektorraum. ☐ wahr ☒ falsch

Zu je zwei Vektoren $v \neq v' \in V$ existiert eine lineare Abbildung $f\colon V \to K$ mit $f(v) \neq f(v')$. ☒ wahr ☐ falsch

Zu jedem Untervektorraum U von V gibt es genau einen Untervektorraum U' von V mit $U \cap U' = \{0\}$ und $U + U' = V$. ☐ wahr ☒ falsch

Ist $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung, so ist $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f) = \{0\}$. ☐ wahr ☒ falsch

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 2 **(6 Punkte)**

Sei K ein Körper. Entscheiden Sie, für welche Werte von $a \in K$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ invertierbar ist. Der Rechenweg muss klar ersichtlich sein.

Lösung. Erste Möglichkeit: Sei M_a die gegebene Matrix. Die Determinante berechnet sich zu $\det(M_a) = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$. Da eine Matrix genau dann invertierbar ist, wenn ihre Determinante ungleich 0 ist, ist M_a also genau dann invertierbar, wenn $a \neq 1$ gilt.

Zweite Möglichkeit: Eine 3×3-Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie Rang 3 hat. Mit Gauß-Elimination bringt man die Matrix auf die obere Dreiecksform

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & 2a - a^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist der Eintrag $2a - a^2 - 1 = -(a-1)^2$ genau für $a \neq 1$ von 0 verschieden, so dass M_a genau für diesen Wert den vollen Rang hat. $\square$

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 3 **(10 Punkte)**

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils (durch ein Gegenbeispiel), dass die folgenden Abbildungen $\mathbb{R}$-linear sind:

(a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\quad (x,y,z)^t \mapsto (x+3y, 2y-x)^t$. (2 Punkte)

(b) $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R};\quad (x,y,z)^t \mapsto \max\{x,y,z\}$. (4 Punkte)

(c) $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\quad (x,y)^t \mapsto \det(AB^{-1})$, wobei (4 Punkte)

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}.$$

(*Hinweis:* Es ist nicht erforderlich, B^{-1} explizit zu berechnen.)

Lösung. (a) Die Abbildung f ist linear, denn sie ist bezüglich der Standardbasen durch Multiplikation mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(b) Die Abbildung g ist nicht-linear, denn sie ist nicht additiv: z.B. gilt $g((1,1,0)^t + (0,0,1)^t) = g((1,1,1)^t) = 1 \neq g((1,1,0)^t) + g((0,0,1)^t) = 1 + 1 = 2$. (Sie ist auch nicht mit der Skalarmultiplikation verträglich.)

(c) Die Abbildung h ist linear. Unter Benutzung der Multiplikativität der Determinante erhält man nämlich

$$\det\left(\begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}^{-1}\right) = \det\begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{x^2y + y}{x^2 + 1} = y.$$

Also gilt $h(x,y) = y$, und diese Abbildung ist linear.

$\square$

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 4 **(10 Punkte)**

Sei V ein K-Vektorraum, und sei φ ein Endomorphismus von V. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(i) $\mathrm{Kern}(\varphi) \cap \mathrm{Bild}(\varphi) = \{0\}$.

(ii) $\mathrm{Kern}(\varphi \circ \varphi) = \mathrm{Kern}(\varphi)$.

Lösung. (i)⇒(ii): Es gilt immer $\mathrm{Kern}(\varphi) \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi \circ \varphi)$, denn für $v \in V$ folgt aus $\varphi(v) = 0$ auch $\varphi(\varphi(v)) = \varphi(0) = 0$. Für die umgekehrte Inklusion sei $v \in \mathrm{Kern}(\varphi \circ \varphi)$. Dann ist $\varphi(v) \in \mathrm{Kern}(\varphi) \cap \mathrm{Bild}(\varphi)$, also $\varphi(v) = 0$ wegen (i). Damit ist aber $v \in \mathrm{Kern}(\varphi)$.

(ii)⇒ (i): Es gelte $\mathrm{Kern}(\varphi \circ \varphi) = \mathrm{Kern}(\varphi)$. Sei $v \in \mathrm{Kern}(\varphi) \cap \mathrm{Bild}(\varphi)$, d.h. $\varphi(v) = 0$ und $v = \varphi(w)$ für ein $w \in V$. Dann ist $\varphi(\varphi(w)) = \varphi(v) = 0$, also gilt $w \in \mathrm{Kern}(\varphi \circ \varphi)$. Wegen (i) folgt daraus $w \in \mathrm{Kern}(\varphi)$, und damit $v = \varphi(w) = 0$.

□

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 5 **(14 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $x \mapsto A \cdot x$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ von f und dazu jeweils einen Eigenvektor $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$. (5 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist und geben Sie (ohne zu rechnen!) die Darstellungsmatrix $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ an. (2 Punkte)

(c) Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen $T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$ und $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$ der Basiswechsel, wobei $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis ist. (4 Punkte)

(d) Berechnen Sie (ohne allzu großen Aufwand) die Potenzen

$$A^n := \underbrace{A \cdots A}_{n \text{ mal}}$$

für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. (*Hinweis*: $A = T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$) (3 Punkte)

Die Rechenwege sind jeweils nachvollziehbar aufzuschreiben.

Lösung. (a) Es ist

$$\det(A - \lambda E_n) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

genau dann, wenn $\lambda \in \{1, 2, 3\}$, d.h. es gibt die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$.
Ein zu λ_1 gehörender Eigenvektor findet sich in

$$\mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Lin}\big((1,0,0)^t\big),$$

somit kann man $v_1 = (1, 0, 0)^t$ wählen.
Ein zu λ_2 gehörender Eigenvektor findet sich in

$$\mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Lin}\big((3,1,0)^t\big),$$

somit kann man $v_2 = (3, 1, 0)^t$ wählen.
Ein zu λ_3 gehörender Eigenvektor findet sich in

$$\mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Lin}\big((5,2,2)^t\big),$$

somit kann man $v_3 = (5, 2, 2)^t$ wählen.

(b) Die Matrix

$$(v_1 v_2 v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

hat vollen Rang, also sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig und bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Die darstellende Matrix von f bezüglich $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ ist

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(c)

$$T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = (v_1 v_2 v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Stellen nun $\mathcal{E}$ in der Basis $\mathcal{B}$ dar:
$e_1 = 1v_1$; $e_2 = -3v_1 + 1v_2$; $e_3 = \frac{1}{2}v_1 - 1v_2 + \frac{1}{2}v_3$, also

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(alternativ: Berechnen $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = (T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}})^{-1}$ mit Gauß-Elimination)

(d) Setze $T := T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$, so dass $T^{-1} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$, und setze $M := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$. Es ist $A = T \cdot M \cdot T^{-1}$, somit folgt

$$\begin{aligned} A^n =& T \cdot M \cdot \underbrace{T^{-1} \cdot T}_{=I_3} \cdot M \cdot T^{-1} \cdots T \cdot M \cdot \underbrace{T^{-1} \cdot T}_{=I_3} \cdot M \cdot T^{-1} = T \cdot M^n \cdot T^{-1} = \\ & T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3(2^n - 1) & \frac{1}{2} - 3 \cdot 2^n + \frac{5}{2}3^n \\ 0 & 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\square$

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 6 **(10 Punkte)**

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus und $n \in \mathbb{N}$. Seien $v_1, \dots, v_n \in V \setminus \{0\}$ Eigenvektoren von f zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. Beweisen Sie, dass $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind.
(Sie erhalten immerhin noch 6 von 10 Punkten, wenn Sie die Behauptung für den Spezialfall $n = 2$ beweisen.)

Lösung. Beweis durch Induktion nach n:
Induktionsanfang $n = 1$: Nach Definition ist der Eigenvektor v_1 ungleich 0 und damit die Familie (v_1) linear unabhängig. (Man kann auch mit $n = 0$ beginnen, dann ist gar nichts zu zeigen.)
Induktionsschritt: $(n \rightsquigarrow n+1)$. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in K$ mit

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n+1} v_{n+1} = 0.$$

Wenden f auf beide Seiten der Gleichung an und erhalten

$$\lambda_1 \alpha_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n+1} \alpha_{n+1} v_{n+1} = 0.$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit λ_{n+1} und ziehen die zweite Gleichung von ihr ab.

$$(\lambda_{n+1} - \lambda_1)\alpha_1 v_1 + \cdots + (\lambda_{n+1} - \lambda_n)\alpha_n v_n = 0.$$

Nach Induktionsvoraussetzung sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig, also ist $(\lambda_{n+1} - \lambda_1)\alpha_1 = \cdots = (\lambda_{n+1} - \lambda_n)\alpha_n = 0$. Wegen $\lambda_{n+1} - \lambda_i \neq 0$ für $i \neq n+1$ folgt $\alpha_i = 0$ für $1 \leq i \leq n$. Setzt man dies in die Ausgangsgleichung ein, hat man auch noch $\alpha_{n+1} = 0$, da $v_{n+1} \neq 0$.

Der Fall $n = 2$ geht explizit so: Nehmen wir an, dass v_1 und v_2 linear abhängig sind. Da v_1, v_2 beide $\neq 0$ sind, gibt es ein $\alpha \in K$ mit $v_1 = \alpha v_2$. Wenden wir auf beide Seiten der Gleichung f an, so erhalten wir

$$\lambda_1 v_1 = f(v_1) = f(\alpha v_2) = \alpha f(v_2) = \alpha(\lambda_2 v_2) = \lambda(\alpha v_2) = \lambda_2 v_1.$$

Das heißt $(\lambda_1 - \lambda_2)v_1 = 0$ und da $v_1 \neq 0$ folgt $\lambda_1 = \lambda_2$. Widerspruch.

□