Übungsblatt 11

1) a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{Z}$ die Funktion $f_n : x \mapsto x^n$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar ist und für alle $a \neq 0$ gilt $f_n(x)' = na^{n-1}$. (Der Fall ≥ 0 wurde in der VL Bsp 5.3.a) behandelt.) 1 Punkt

   b) Leiten Sie aus $\cos'(z) = -\sin(z)$ direkt $\sin(z)' = \cos(z)$ her, betrachten Sie geeignete Verschiebungen des Argumentes. 1 Punkt

   c) Untersuchen Sie, in welchen Punkten des Definitionsbereiches die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw $g_i : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind und bestimmen Sie die Ableitung, falls sie existiert

$$f_1(x) = \sin((\exp(\cos(x^2)))^3),\, f_2(x) = 5^{\cos(e^x)},\, f_3(x) = \log(\sqrt{1 + e^x(\cos(x))^2}\,),$$
$$f_4(x) = ((\sin(x/(x^2+1)))^2)^{1/3},\, g_1(x) = x^{(x^x)}.$$
5 Punkte

   [Hinweis: Natürlich sind 5.5-5.8 aus der VL sind zentral, aber auch die Beispiele in 5.9 können hilfreich sein. Und Vereinfachen ist (fast) immer gut!]

2) Zeigen Sie, dass es eine differenzierbare Funktion $g : (-\infty, 0) \to (0, \infty)$ gibt, so dass

$$2g(x) - \log(1 + 2g(x)) + x = 0 \text{ für alle } x \in (-\infty, 0).$$
3 Punkte

   [Hinweis: Wenn es so ein g gäbe, was könten Sie über die inverse Funktion g^{-1} sagen?]

3) Sei $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ stetig, invertierbar und möge $f'(x) \neq 0$ für alle positiven x gelten. Wir wissen also, dass die inverse Funktion f^{-1} existiert, auf $f((0, \infty))$, und differenzierbar ist.

   Wir setzen weierhin voraus, dass f ein zweites mal differenzierbar ist - das heißt einfach, dass auch $x \mapsto f'(x)$ wiederum differenzierbar ist.

   Zeigen Sie, dass dann auch die inverse Funktion f^{-1} ein zweites mal differenzierbar ist, und finden Sie eine Formel für $((f^{-1})')'(y)$, $y \in f((0, \infty))$.

   Überprüfen Sie Ihr Ergebnis explizit für $f(x) = x^p$, $p > 0$. $4^* + 1^*$ Punkte

Wie immer, begründen Sie Ihre Aussagen sorgfältig! Skizzen können und sollen der Lösungsfindung dienen, sind aber keine Beweise.

Bitte geben Sie pro Lösungsteam nur EINE Lösung ab !!!, die Korrekturen verzögern sich sonst unnötig. Danke.

Nach der Vorlesung abgegebene Lösungen werden nicht voll bewertet!

Abgabe am 16.1.2024 11:00 online(Moodlekurs) oder 17:15 HS2 zur Vorlesung.