# Wahrscheinlichkeitstheorie

## Übung 3

Lennox Heimann: 3776050
Merlin Hofmann: 3792248
Nikita Emanuel John Fehér: 3793479
Nataliia Kotsiuba: 3738575

4/4

## Aufgabe 1

ⓐ $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

die Kovarianz ist definiert als:

$cov(X,Y) := E((X-E(X))(Y-E(Y)))$

$E(X \cdot E(Y)) = E(Y)E(X)$

$E(X \cdot E(Y)) = E(Y) \cdot E(X)$

$\equiv (X-E(X))(Y-E(Y)) = E(XY) - E(X \cdot E(Y)) - E(E(X) \cdot Y) + E(E(X)E(Y)) =$

$E(E(X) \cdot E(Y)) =$

$= E(X)E(Y)$

$= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) =$

$= E(XY) - E(X)E(Y)$ ✓

ⓑ $cov(X,X) = Var(X)$

$cov(X,X) = E((X-E(X))(X-E(X)))$

Da $(X-E(X))(X-E(X)) = (X-E(X))^2$ und $Var(X) = (X-E(X))^2$,

$\Rightarrow cov(X,X) = Var(X)$ ✓

ⓒ $cov(aX+b, cY+d) = ac \cdot cov(X,Y)$

$cov(aX+b, cY+d) = E(((aX+b) - E(aX+b))((cY+d) - E(cY+d)))$

Da $E(aX+b) = aE(X)+b$ und $E(cY+d) = cE(Y)+d$

$cov(aX+b, cY+d) = E((aX+b - (aE(X)+b))(cY+d - (cE(Y)+d))) =$

$= E((aX+b-aE(X)-b)(cY+d-cE(Y)-d)) =$

$= E((aX-aE(X))(cY-cE(Y))) =$

$= E(ac(X-E(X))(Y-E(Y))) = acE((X-E(X))(Y-E(Y)))$

$= ac \cdot cov(X,Y)$ ✓

# d)
Sind X, Y unabhängige ZV, so gilt $cov(X,Y)=0$

Falls X und Y unabhängig sind, so gilt $E(XY)=E(X)E(Y)$

Wir setzen das in die Def. der Kovarianz ein:

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

## Aufgabe 2

$max(a,b) = k$, wo a,b Ergebnisse von den zwei Würfeln

$6 \times 6 = 36$ – Mögliche Kombinationen aus 2 Würfelwürfen

#Anzahl der günstigen Fällen $= 2k-1$

↳ Szenario #1: $a=k,\ b \leq k$

$b = 1, \dots k$

↳ Szenario #2: $b=k,\ a \leq k$

$a = 1, \dots k$

↳ Szenario #3: $a=b=k$

$$P(X=k) = \frac{2k-1}{36}$$

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P(X=k) | $\frac{1}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{7}{36}$ | $\frac{9}{36}$ | $\frac{11}{36}$ |

$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} k \cdot P(X=k) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} =$$

$$= \frac{161}{36}$$

# b)
$X+Y = \underbrace{Z_1 + Z_2}_{\text{Augenzahl des ersten und zweiten Wurfs}}$ => aus dem Hinweis

Es gilt $X+Y = Z_1+Z_2$. Daraus folgt $E(X+Y) = E(Z_1+Z_2) \overset{\text{Linearität}}{=} E(Z_1)+E(Z_2)$

Da $Z_1$ und $Z_2$ unabhängig und gleich verteilt sind, gilt:

$E(Z_1) = E(Z_2)$

Erwartungswert von $Z_1$ $\{1,2,3,4,5,6\}$

$$E(Z_1) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = 3.5 = E(Z_2)$$

$$\Rightarrow E(Z_1)+E(Z_2) = 7 = E(X)+E(Y) = E(X+Y)$$

Im ersten Teil a) wurde $E(X) = \frac{161}{36}$ berechnet

$$E(X)+E(Y) = 7$$

$\Rightarrow E(Y) = 7 - E(X) = 7 - \frac{161}{36} = \frac{91}{36}$ ✓

ⓒ

$E(3X^2 - Y)$

$E(X^2) = \sum_{k=1}^{6} k^2 \cdot P(X=k) =$

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P(X=k) | $\frac{1}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{7}{36}$ | $\frac{9}{36}$ | $\frac{11}{36}$ |

$= 1^2 \frac{1}{36} + 2^2 \frac{3}{36} + 3^2 \frac{5}{36} + 4^2 \frac{7}{36} + 5^2 \frac{9}{36} + 6^2 \frac{11}{36} = \frac{791}{36}$

$3E(X^2 - Y) = 3(E(X^2) - E(Y)) = \frac{1141}{18}$ ✓

$E(X+Y)$

$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{161}{36} + \frac{91}{36} = \frac{252}{36} = 7$ ✓

$E(X \cdot Y)$

$\operatorname{cov}(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X)E(Y)$

$\Rightarrow E(XY) = \operatorname{cov}(X,Y) + E(X)E(Y)$ f

3/4

## Aufgabe 3

ⓐ Berechnen der Randwahr-keiten:

X:

- $P(X=1) = P(\omega=1) + P(\omega=3) + P(\omega=5) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$
- $P(X=2) = P(\omega=2) + P(\omega=4) + P(\omega=6) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Y:

- $P(Y=1) = P(\omega=1) + P(\omega=2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$
- $P(Y=2) = P(\omega=3) + P(\omega=6) = \frac{1}{2}$
- $P(Y=3) = P(\omega=4) + P(\omega=5) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

Z:

- $P(Z=-3) = P(\omega=6) = \frac{1}{4}$
- $P(Z=-2) = P(\omega=5) = \frac{1}{8}$
- $P(Z=1) = P(\omega=2) = \frac{1}{8}$
- $P(Z=2) = P(\omega=4) = \frac{1}{8}$
- $P(Z=3) = P(\omega=3) = \frac{1}{4}$
- $P(Z=-1) = P(\omega=1) = \frac{1}{8}$

| $Y \backslash X$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |
| 2 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 3 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

| $Z \backslash X$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| -3 | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| -2 | $\frac{1}{8}$ | 0 |
| 1 | 0 | $\frac{1}{8}$ |
| 2 | 0 | $\frac{1}{8}$ |
| 3 | $\frac{1}{4}$ | 0 |
| -1 | $\frac{1}{8}$ | 0 |

| $Z \backslash Y$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| -3 | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| -2 | 0 | 0 |
| 1 | $\frac{1}{8}$ | 0 |
| 2 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| -1 | $\frac{1}{8}$ | 0 |

Zwei Zufallsvariablen sind unabhängig, wenn für alle möglichen Werte $x$ und $y$ gibt:

$$P(X=x \text{ und } Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y)$$

für $P(X \text{ und } Y)$:

$P(X=1, Y=1) = \frac{1}{8} = P(X=1) \cdot P(Y=1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$ ✓

$P(X=1, Y=2) = \frac{1}{4} = P(X=1) \cdot P(Y=2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ ✓ unabhängig

$P(X=1, Y=3) = \frac{1}{8} = P(X=1) \cdot P(Y=3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$ ✓

Nach den Berechnungen sind die anderen Zufallsvariablen nicht unabhängig.

4.1

$$E(X) = \sum_{w \in \Omega} X(w) P(w) = 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} = 1.5$$

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 2$$

$$E(Z) = -1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} + (-2) \cdot \frac{1}{8} + (-3) \cdot \frac{1}{4} = 0$$

$$E(XY) = \sum_{w \in \Omega} X(w) Y(w) P(w) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = 2.75$$

4.2 3

$$E(XZ) = 1 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot (-2) \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot (-3) \cdot \frac{1}{4} = -\frac{3}{8}$$

$$E(YZ) = 1 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot (-2) \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot (-3) \cdot \frac{1}{4} = 0$$

## Aufgabe 4: 4|4

z.z $\phi(X)$ und $\psi(Y)$ sind unabhängig

1. Für eine Funktion $\phi$ gilt:

$$\phi(x) \in A \iff x \in \phi^{-1}(A) \quad \text{Für } A \subseteq R$$

dabei ist $\phi^{-1}(A) = \{x \in R : \phi(x) \in A\}$ Dies gilt analog. für $\psi(y)$:

$$\psi(y) = B \iff y \in \psi^{-1}(B) \quad \text{für } B \subseteq R$$

2. Die Unabhängigkeit von $X$ und $Y$ lässt sich wie folgt schreiben:

$$P(X \in \phi^{-1}(A) \text{ und } Y \in \psi^{-1}(B)) = P(X \in \phi^{-1}(A)) \cdot P(Y \in \psi^{-1}(B))$$

nach der in 1. festgestellten Äquivalenz.

3. Die Wahrscheinlichkeitswerte von $P(X \in \phi^{-1}(A))$ und $P(Y \in \psi^{-1}(B))$ entsprechen per Definition denen von $P(\phi(x) \in A)$ und $P(\psi(Y) \in B)$. Setzen wir dies in die Gleichung der Unabhängigkeit ein, erhalten wir:

$$P(\phi(x) \in A \text{ und } \psi(Y) \in B) = P(\phi(x) \in A) \cdot P(\psi(Y) \in B)$$

Also sind $\phi(x)$ und $\psi(Y)$ unabhängig.

# Index der Kommentare

4.1 bitte explizit Gegenbeispiel angeben

4.2 X und Y unabhängig -> E(X*Y)=E(X)*E(Y)