UNIVERSITÄT LEIPZIG

Vorlesung 2 - Aussagenlogik und Sprache der Prädikatenlogik

Diskrete Strukturen (WS 2023-24)

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

- Atome $A, B, C, \ldots$ die Wert entweder 0 “falsch” oder 1 “wahr” haben können
- Mit Atome und Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \iff$ können wir Formeln bauen, z.B. $(A \rightarrow B) \vee C$. Die Wahrheitswerte kann man aus den Wahrheitswerten der Atome berechnet, mitte der Tabelle:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

- Die einfachste Methode, eine gegebene Aussageformel zu untersuchen, ist anhand ihrer "Wahrheitstabelle". z.B. die Wahrheitstabelle für $\neg A \lor B$:

A	B	$\neg A$	$\neg A \lor B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

- eine Tautologie ist ein Formel die immer wahr ist, unabhängig davon, was sind die Werte von Atomen. Z.B. $(A \land B) \to A$.

- Wir sagen dass zwei Formeln F und G äquivalent sind, wenn F und G haben die gleiche Wahrheitswerte für alle Belegungen der Atome. Z.B. die Formeln $A \to B$ und $\neg A \vee B$ sind äquivalent.
  - Anders gesagt, F und G sind äquivalent, gdw die Formel $F \leftrightarrow G$ ist eine Tautologie.
- Die einfachste Methode zu checken ob zwei Formel äquivalent sind : Vergleich der Wahrheitstabellen.
- Äquivalenz ist nicht das gleiche als Gleichheit. Z.B. Die Formeln $(A \vee B) \vee C$ and $A \vee (B \vee C)$ sind äquivalent, aber dies sind zwei verschieden Formeln.

- Wenn wir eine große Formel F haben und darin eine Unterformel U sehen, können wir U durch eine äquivalente Unterformel U' ersetzen und erhalten so eine neue formel F' die zu F äquivalent ist.
- Dieser “Substitutionsprinzip” eröffnet uns die Möglichkeit die Formeln zu vereinfachen, und zu zeigen dass zwei Formelm äquivalent sind, durch Äquivalenzketten.

Beispiel: Äquivalenzkette und Substitutionsprinzip

Wir zeigen dass die Aussagen $((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \wedge A$ und $A \wedge (B \vee C)$ äquivalent sind.

Wir fangen mit $((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \wedge A$ an.

- Äquivalent zu $(A \wedge (B \vee C)) \wedge A$ (Distributivität $\wedge$)
- Äquivalent zu $A \wedge (A \wedge (B \vee C))$ (Kommutativität $\wedge$)
- Äquivalent zu $(A \wedge A) \wedge (B \vee C)$ (Assoziativität $\wedge$)
- Äquivalent zu $A \wedge (B \vee C)$ (Idempotenz $\wedge$)

Also wir sehen dass die Aussagen $((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \wedge A$ und $A \wedge (B \vee C)$ äquivalent sind.

- Insbesondere, die Formel $(((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \wedge A) \leftrightarrow (A \wedge (B \vee C))$ ist eine Tautologie.

- Im Allgemeinen ist es sehr schwierig, algorithmisch zu entscheiden, ob eine gegebene Formel eine Tautologie ist oder ob zwei gegebene Formeln äquivalent sind (dies sind so-genannte NP-komplette Probleme

- Beweisprinzipien, insbesondere Kontraposition und “Beweiss durch Wiederspruch”
- Warum Aussagenlogik reicht nicht - Prädikate und kurz über Prädikatenlogik

- Gemäß der Eliminationsregel sind die Formeln $A \iff B$ und $A \to B \land B \to A$ äquivalent. Wir betrachten diese Regel als ein “Beweisprinzip”.
  - Um irgenwelchen Satz zu beweisen der sagt dass sagt $A \iff B$, können wir stattdessen beweisen dass $A \to B$ und $B \to A$.
- Z.B betrachten wir den Satz “Eine natürliche Zahl n ist genau dann durch 3 teilbar, wenn die Summe ihrer Dezimalziffern durch 3 teilbar ist”.
  - Da die Formeln $A \iff B$ und $(A \to B) \land (B \to A)$ äquivalent sind, ist dieser Satz äquivalent dem Satz “Wenn n durch 3 teilbar ist, dann ist die Summe seiner Dezimalstellen durch 3 teilbar. Und wenn die Summe seiner Dezimalziffern durch 3 teilbar ist, dann ist n durch 3 teilbar”.
- Die erste Formulierung ist natürlich kürzer und wird daher normalerweise bei der Darstellung des Ergebnisses verwendet. Bei der eigentlichen Beweisführung wäre es jedoch bequemer, mit der zweiten Formulierung zu arbeiten. Den Studenten wird im Allgemeinen geraten, beim Beweis von Äquivalenzen immer beide Implikationen zu beweisen.

- Ein wichtiges Beweisprinzip für die Implikation ist die Kontraposition. Anstelle des Beweises einer Aussage $A \rightarrow B$ kann ein Beweis für die Aussage $\neg B \rightarrow \neg A$ geführt werden, da beide Aussagen äquivalent sind.

> ***Satz.*** *Die Formeln $A \rightarrow B$ und $\neg B \rightarrow \neg A$ sind äquivalent.*

Beweis.

- $A \rightarrow B$ ist äquivalent zu $\neg A \vee B$ (Elimination $\rightarrow$)
- $\neg A \vee B$ ist äquivalent zu $\neg A \vee \neg\neg B$ (Involution $\neg$)
- $\neg A \vee \neg\neg B$ ist äquivalent zu $\neg\neg B \vee \neg A$ (Kommutativität $\vee$)
- $\neg\neg B \vee \neg A$ ist äquivalent zu $\neg B \rightarrow \neg A$ (Elimination $\rightarrow$)

Beispiel. *Sei n eine beliebige ganze Zahl. Falls n^2 gerade ist, so ist auch n gerade.*

Beweis. Anstelle von

$$\text{QuadratGerade} \rightarrow \text{ZahlGerade}$$

beweisen wir die Kontraposition

$$\neg\text{ZahlGerade} \rightarrow \neg\text{QuadratGerade}$$

Sei n eine Ganzzahl, die nicht gerade, also ungerade, ist. Dann gilt $n = 2k + 1$ für eine ganze Zahl k Jetzt können wir schreiben

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1$$

womit n^2 wieder ungerade (nicht gerade) ist. Damit ist die Kontraposition nachgewiesen und da die Ursprungsaussage äquivalent ist, ist diese ebenso bewiesen. $\square$

Satz (Modus Ponens). *Die Formel $(A \wedge (A \to B)) \to B$ ist eine Tautologie.*

Beweis. Wir beweisen es mit Hilfe der Wahrheitstabelle. Anstatt sie explizit aufzuschreiben, ist es praktisch, die folgenden Fälle zu betrachten.

- Falls B wahr ist, dann ist $F = \cdots \to B$ wahr.
- Falls B falsch ist, dann ist entweder
  - (i) A wahr, womit $A \wedge (A \to B)$ falsch ist oder
  - (ii)A falsch, womit $A \wedge (A \to B)$ auch falsch ist. In beiden Unterällen ist also $F' = A \wedge (A \to B)$ falsch und damit $F = F' \to B$ wahr.
- In beiden Fällen ist also, F wahr. Da es keine weiteren Fälle gibt, ist die Aussage bewiesen.

- Wir haben gerade ein weiteres Beweisprinzip benutzt : die Fallunterscheidung. Innerhalb eines Beweises befinden wir uns in einem von mehreren möglichen Fällen. In jdem möglichen Fall können wir eine zusätzliche Annahme benutzen.
- Zur Ausnutzung dieses Umstandes sind zwei Schritte zu erfüllen:
  - Vollständige Aufstellung der möglichen Fälle
  - Einzelbetrachtung eines jeden Falls mit Angabe eines Beweises unter Ausnutzung der zusätzlichen Annahme
- Wir können dieses Prinzip als die folgende Tautologie betrachten: $((A \to C) \land (B \to C) \land (A \lor B)) \to C$.

Satz (Kettenschluss). *Die Formel* $((A \to B) \land (B \to C)) \to (A \to C)$ *ist eine Tautologie.*

Beweis. Wir zeigen die Kontraposition $\neg(A \to C) \to \underbrace{\neg((A \to B) \land (B \to C))}_{F'}$.

Fallunterscheidung:

- Falls $\neg(A \to C)$ falsch ist, dann die ganze Implikation wahr ist.
- Falls $\neg(A \to C)$ wahr ist, dann ist $A \to C$ falsch, woraus A wahr und C falsch folgen. Betrachten wir zwei Unterfälle:
    - (i) Sei B falsch. Dann ist $A \to B$ falsch und damit F' wahr. (ii) Sei B wahr. Dann ist $B \to C$ falsch und damit F' wahr.
- In beiden Unterfällen ist F' wahr ist, also auch die ganze Implikation ist wahr.

***Satz (Reduction ad absurdum, indirekter Beweis, Beweis durch Widerspruch)**: Die Formel*

$$((\neg A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow \neg B)) \rightarrow A$$

ist eine Tautologie.

Interpretation: Eine Behauptung gilt als bewiesen, wenn aus ihrer Negation ein Widerspruch hergeleitet werden kann.

Beispiel. *Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$.*

Beweis. Beweis durch Widerspruch. Wir nehmen an, dass es eine rationale Zahl x gibt , mit $x^2 = 2$.

- Dann existieren teilerfremde ganze Zahlen m und n mit $n \neq 0$ und $x = \frac{m}{n}$. Also auch

$$2 = x^2 = (\tfrac{m}{n})^2 = \frac{m^2}{n^2}$$

und damit $2n^2 = m^2$, womit m^2 gerade ist. Somit ist auch m, also existiert eine ganze Zahl k mit $m = 2k$.

- Es gilt $2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2$, also $n^2 = 2k^2$
- Also ist auch n^2 gerade und damit auch n. Da m und n gerade sind, sind sie nicht teilerfremd.

- Es gibt also eine teilerfremde Darstellung und gleichzeitig kann es diese nicht geben. Widerspruch. Folglich gilt die Behauptung. $\square$

- Zur Analyse der Beweisstruktur betrachten wir die folgenden Aussagen:

  - $\underbrace{\text{Es existiert eine rationale Zahl } x \text{ mit } x^2 = 2.}_{\neg A}$

  - $\underbrace{\text{Es existieren teilerfremde ganze Zahlen } m \text{ und } n \text{ mit } n \neq 0 \text{ und } (\frac{m}{n})^2 = 2.}_{B}$

  Wir zeigten nacheinander die Aussagen $\neg A \to B$ und $\neg A \to \neg B$ durch direkte Beweise, und wir leiten daraus ab, dass A gilt.

- Beachten Sie jedoch, dass bei realer Beweisführung eine passende Aussage B erst gefunden werden muss

Betrachten wir die bisherigen Beispiele erneut, so fallen einige Beschränkungen der Aussagenlogik ins Auge.

> *Sei n eine beliebige ganze Zahl. Falls n^2 gerade ist, so ist auch n gerade.*

- Anders gesagt: wir haben die Aussage $P =$“jede ganze Zahl n hat die Eigenschaft dass wenn n^2 gerade ist dann ist auch n gerade.”
- Was ist die Negation? $N =$“Existiert eine ganze Zahl n mit der Eigenschaft dass n^2 gerade ist, aber n ungerade ist”.
- Problem: Es gibt keine Regeln der Aussagenlogik die uns sagen dass das tatsätzlich N die Negation von P ist.

Unsere Beobachtungen motivieren die Einführung von pb Variablen und Prädikaten, die als “Aussagenschablonen” betrachtet werden können.

- Quantoren (oder Qunatifikatoren) zur Modellierung der Beschränkung bzw. Wahl der Variablen.
- Intuitiv sind Prädikaten abstrakte Aussagen, in denen Variablen zugelassen sind, so dass für jede Belegung der Variablen eine konkrete Aussage entsteht.

Beispiel. *Wir identifizieren*

- *QuadratGerade*(n) *als Aussagenschablone mit*

  "Das Quadrat der Zahl n *ist gerade."*

- *Gerade*(n) *als Aussagenschablone mit*

  "Die Zahl n *ist gerade."*

Also z.B. Gerade(5) *ist eine Aussage.*

- Durch Einsetzen eines konkreten Objektes erhält man eine Aussage.
- Wir führen doch noch eine Möglichkeit ein, wie man aus einem Prädikat eine Aussage erhält: Quantifizierung.

- Der Allquantor $\forall$ fordert die Gültigkeit der Aussagenschablone für alle möglichen Belegungen einer Variable,
- der Existenzquantor $\exists$ fordert die Gültigkeit der Aussagenschablone für mindestens eine Belegung einer Variable.
- Dabei nehmen wir entweder implizit ein Universum aller Objekte an, oder wir geben im Kontext der Formeln explizit einen Grundbereich für die Variablen.

Mithilfe der neuen Ausdrucksmittel erreichen wir die Formalisierung

$$\forall n\Big(\mathsf{QuadratGerade}(n) \to \mathsf{Gerade}(n)\Big),$$

wenn wir explizit den Bereich der ganzen Zahlen betrachten.

- Oder wir könnten auch schreiben

$$\forall n\Big(\mathsf{GanzeZahl}(n) \to (\mathsf{QuadratGerade}(n) \to \mathsf{Gerade}(n))\Big),$$

wobei GanzeZahl(n) ist das Prädikat "n ist eine ganze Zahl".

Beispiel. *Wir formalisieren die Aussage*

"Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$"

als

$$\neg\exists x \big(\textit{Rat}(x) \wedge \textit{QuadratGleich2}(x)\big),$$

wobei Rat(x) das Prädikat "x is eine Rationale Zahl" ist, und QuadratGleich2(x) die Prädikat "$x^2 = 2$" ist.

Beispiel. *Cauchy-Konvergenz einer Folge* $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall iin\mathbb{N}\ \forall \ell \in \mathbb{N} \quad (i \geq n) \wedge (\ell \geq n) \to (|x_\ell - x_i| < \epsilon)$$

Weitere äquivalente Formeln		Bezeichnung
$\neg\forall x\, F$	$\exists x\, \neg F$	Negation Allquantor
$\neg\exists x\, F$	$\forall x\, \neg F$	Negation Existenzquantor

Z.B. die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- “Es ist nicht wahr, dass jede natürliche Zahl durch 7 teilbar ist”
- “Es gibt eine natürliche Zahl n, die nicht durch 7 teilbar ist”
- Die Formalisierungen lauten jeweils $\neg\forall n P(n)$, und $\exists n P(n)$, wobei $P(n)$ ist die Aussage: $7 \mid n$.

- Strategie für den Allquantor $\forall x\, F$
    - Man nehme ein **beliebiges** abstraktes Element u des Universums an.
    - Als Variable hat u genau die Eigenschaften, die alle Elemente des Universums gemein haben.
    - Man zeige F für u als Belegung von x.
- Strategie für den Existenzquantor $\exists x\, F$
    - Man wähle ein **geeignetes** konkretes Element u des Universums.
    - Da u konkret ist, können Eigenschaften von u genutzt werden.
    - Man zeige F für u als Belegung von x.

Beispiel. *Für jede natürliche Zahl existiert eine echt größere gerade natürliche Zahl.*

Formalisierung für das Universum natürlicher Zahlen:

$$\forall n \, \exists m \, \Big(\mathsf{Gerade}(m) \wedge (m > n)\Big)$$

Beweisversuch. Sei n eine beliebige natürliche Zahl. Wir definieren $m = 2n$. Dann ist m offenbar durch 2 teilbar und damit gerade. Wir haben auch $m - n = 2n - n = n > 0$ und damit $m > n$ folgt. $\square$

Der Beweis ist falsch, denn die Annahme einer zusätzlichen Eigenschaft von n, d.h. $n > 0$, ist nicht zulässig.

Ein korrektes Beweis. Sei n eine beliebige natürliche Zahl.

Wir definieren $m = 2(n + 1)$.

Dann ist m offenbar durch 2 teilbar und damit gerade.

Weiterhin gilt $m - n = 2(n + 1) - n = n + 2 > 0$ und damit ist $m > n$. $\square$

UNIVERSITÄT
LEIPZIG

VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT!

Łukasz Grabowski
Mathematisches Institut

grabowski@math.uni-leipzig.de