Diskrete Strukturen (WS 2023-24) - Halbserie 3

Bitte nur Probleme 3.1, 3.2 und 3.3 einreichen.

3.1 **[2]**

Sei I eine Menge, und seien A_i und B_i Mengen für jedes $i \in I$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\bigcap_{i\in I} A_i \cup \bigcap_{i\in I} B_i \subset \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B_i)$$

(b) Geben Sie ein Beispiel, dass zeigt, dass die andere Teilmengerelation kann falsch sein.

Solution.

(a) Sei $x \in \bigcap_{i\in I} A_i \cup \bigcap_{i\in I} B_i$. Dann ist $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ oder $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$. Daraus folgt, dass entweder $\exists i$ mit $x \in A_i$ oder $\exists i$ mit $x \in B_i$. Wir stellen fest, dass für alle i haben wir $A_i \subset A_i \cup B_i$ und $B_i \subset A_i \cup B_i$. Daraus leiten wir ab, dass $\exists i$ mit $x \in A_i \cup B_i$. Dies bedeutet, dass $x \in \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B_i)$.

(b) $I := \{-1, 1\}$, $A_i := \{i\}$, $B_i := \{-i\}$. Die linke Seite ist $\emptyset$, die rechte Seite ist $\{-1, 1\}$.

3.2 **[4]**

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Schreiben Sie explizit was sind Induktionsanfang, Induktionshypothese und Induktionsbehauptung. Markieren Sie, wo im Beweis die Induktionshypothese verwendet wird.

Solution. IA: Linke Seite wenn $n = 1$: $\frac{1}{(2-1)(2+1)}$. Rechte Seite $\frac{1}{3}$, also die Aussage ist wahr.

IH: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

IB: Zu zeigen ist $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}$.

Beweis der IB: Linke Seite ist gleich $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}$. Mit IH das ist gleich

$$\frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$$

Das ist gleich der rechten Seite, was beenden den Beweis.

3.3 **[4]**

Seien $A_1, \ldots, A_n$ Mengen. Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \\ A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots \cup (A_{n-1} \setminus A_n) \cup (A_n \setminus A_1).$$

Ursprünglich sollte diese Übung mit Induktion gelöst werden. Obwohl das möglich ist, war das ein Fehler - ein Beweis ohne Induktion ist viel natürlicher. Deswegen bekommen alle 4 Punkte für dieses Problem.

Solution.

Sei $L := A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, und

$$R := A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots \cup (A_{n-1} \setminus A_n) \cup (A_n \setminus A_1).$$

Erst zeigen wir $R \subset L$. Wir haben $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \subset A_1$ und $A_i \setminus A_{i+1} \subset A_i$, $A_n \setminus A_1 \subset A_n$, deswegen (durch Monotonie) haben wir auch $R \subset L$.

Zunächst zeigen wir $L \subset R$. Sei $x \in L$.

Fall 1) $x \in A_1 \cap \ldots \cap A_n$. Dann gilt (durch Abschwächung) auch $x \in R$.

Fall 2) $x \notin A_1 \cap \ldots \cap A_n$. Dann wir können das kleinste i betrachten so dass $x \notin A_i$.

Unterfall 2a) $i = 1$. Sei j das grösste natürliche Zahl mit $x \in A_j$. Falls $j < n$ dann $x \in A_j \setminus A_{j-1}$. Falls $j = n$ dann $x \in A_n \setminus A_1$. Im jeden Fall haben wir $x \in R$.

Unterfall 2b) $i > 1$ Dann $x \in A_{i-1} \setminus A_i$, und deswegen wieder $x \in R$.

3.4 Zeigen Sie durch die vollständige Induktion, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 0$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n}(2 \cdot i - 1) = n^2.$$

Schreiben Sie explizit was sind Induktionsanfang, Induktionshypothese und Induktionsbehauptung. Markieren Sie, wo im Beweis die Induktionshypothese verwendet wird.

Solution. **Induktionsanfang**: Für $n = 0$ gilt $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 0 = n^2$.
Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte

- **Induktionshypothese**: $\sum_{i=1}^{n}(2 \cdot i - 1) = n^2$.

- **Induktionsbehauptung**: Zu zeigen ist $\sum_{i=1}^{n+1} 2 \cdot i - 1 = (n+1)^2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}(2\cdot i-1) = &\quad \sum_{i=1}^{n}(2\cdot i-1)+2(n+1)-1 \\
\stackrel{IH}{=} &\quad n^2+2(n+1)-1 \\
= &\quad n^2+2n+2-1 \\
= &\quad n^2+2n+1 \\
= &\quad (n+1)^2
\end{aligned}$$

3.5 Sei M eine Menge mit n Elementen. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Potenzmenge von M dann

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}$$

Teilmengen mit genau drei Elementen enthält.

Schreiben Sie explizit was sind Induktionsanfang, Induktionshypothese und Induktionsbehauptung. Markieren Sie, wo im Beweis die Induktionshypothese verwendet wird.

Solution. Vollständige Induktion über n.

- Induktionsanfang: $n=0$. Dann ist $M=\emptyset$ und damit $\mathcal{P}(M)=\{\emptyset\}$. Also enthält die Potenzmenge keine dreielementigen Teilmengen ("3-Menge") und in der Tat gilt

  $$\frac{0\cdot(0-1)\cdot(0-2)}{6}=0.$$

- Induktionshypothese: Angenommen, die Aussage gilt für beliebiges, aber festes $n\in\mathbb{N}$. Dann enthält die Potenzmenge einer Menge M mit $|M|=n$ nach Induktionsvoraussetzung $\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}$ 3-Mengen.

- Induktionsbehauptung: Zu zeigen: Die Potenzmenge einer $(n+1)$-elementigen Menge enthält

  $$\frac{(n+1)\cdot((n+1)-1)\cdot((n+1)-2)}{6}=\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}{6}$$

  3-Mengen.

- Beweis der IB: Betrachte $M' := M \,\dot\cup\, \{\perp\}$, womit $|M'|=|M|+1=n+1$ gilt. Offensichtlich gilt

  $$\mathcal{P}(M')=\mathcal{P}(M)\,\dot\cup\,\underbrace{\{X\,\dot\cup\,\{\perp\}\mid X\in\mathcal{P}(M)\}}_{=:\mathcal{X}}.$$

  Nach IH enthält $\mathcal{P}(M)$ $\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-1)}{6}$ 3-Mengen. Andererseits ist eine Menge aus $\mathcal{X}$ genau dann eine 3-Menge, wenn X $(\in\mathcal{P}(M))$ eine 2-Menge ist. Wegen $|M|=n$

enthält $\mathcal{P}(M)$ nach Aufgabe 3.4 $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ solche Mengen. Da $\mathcal{X}$ und $\mathcal{P}(M)$ disjunkt sind, folgt nun für die Anzahl der 3-Mengen in $\mathcal{P}(M')$:

$$\begin{aligned}\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}+\frac{n\cdot(n-1)}{2} &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)+3n\cdot(n-1)}{6}\\ &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2+3)}{6}\\ &= \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}{6}\end{aligned}$$

3.6 Gegeben sei die Menge $M = \{0, 5, 7\}$ und die **Äquivalenzrelation** $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert durch

$(x, y) \in R$ genau dann, wenn für alle $m \in M$ die folgenden Bedingungen gelten:

(i) $x = m$ genau dann, wenn $y = m$,

(ii) $x < m$ genau dann, wenn $y < m$,

(iii) $x > m$ genau dann, wenn $y > m$.

Geben Sie alle **Äquivalenzklassen** von R an.

Solution. $\{0\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{x \in \mathbb{N} \mid x > 7\}$.

3.7 Gegeben sei die Menge $M = \{a, b, c\}$.
Geben Sie alle **Zerlegungen** von M an.

Solution. Es gibt die folgenden Zerlegungen $\mathcal{N}_i \subseteq \mathcal{P}(M)$ für $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$:
$\mathcal{N}_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$;
$\mathcal{N}_2 = \{\{a\}, \{b, c\}\}$;
$\mathcal{N}_3 = \{\{a, b\}, \{c\}\}$;
$\mathcal{N}_4 = \{\{a, c\}, \{b\}\}$;
$\mathcal{N}_5 = \{\{a, b, c\}\}$.

3.8 Seien A, B, C Mengen.
Sind die folgenden Aussagen über das **kartesische Produkt** wahr? Beweisen Sie Ihre Antwort.

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
2. $A \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$

Solution.

1. Wahr. Es gilt:

$$\begin{aligned}(x,y) \in A \times (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cup C \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)\end{aligned}$$

2. Falsch , wähle z.B. $A = B = C = M = \{1\}$.

3.9 Sei $M = \{a, b, c\}$ und die **Relation** $R \subseteq M \times M$ definiert durch

$$R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a), (a,c), (c,b)\}.$$

Welche der folgenden **Eigenschaften** besitzt R? Beweisen Sie Ihre Antwort.

1. reflexiv
   Ja, $(a,a), (b,b), (c,c) \in R$
2. irreflexiv
   Nein, $(a,a) \in R$
3. symmetrisch
   Nein, $(a,c) \in R$ und $(c,a) \notin R$
4. antisymmetrisch
   Nein, $(a,b), (b,a) \in R$ und $a \neq b$
5. transitiv
   Nein, $(b,a), (a,c) \in R$ und $(b,c) \notin R$
6. vollständig
   Ja, weil $(a,a), (b,b), (c,c) \in R$ und $(a,b), (a,c), (c,b) \in R$

3.10 Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine **Relation** auf M.
Beweisen Sie die folgende Aussage durch einen **direkten Beweis**:

> Falls R symmetrisch und vollständig ist, so ist R auch reflexiv und transitiv.

Solution. Sei R symmetrisch und vollständig.
Sei $a \in M$. Da R vollständig ist, gilt $(a,a) \in R$ (oder $(a,a) \in R$), somit ist R reflexiv.
Seien $a, b, c \in M$ mit $(a,b) \in R$ und $(b,c) \in R$. Da R vollständig ist, gilt (i) $(a,c) \in R$ oder (ii) $(c,a) \in R$. Wir machen eine Fallunterscheidung:

(i) Gelte $(a,c) \in R$. Die für die Transitivität geforderte Bedingung ist sofort erfüllt.

(ii) Gelte $(c,a) \in R$. Weil R symmetrisch ist, gilt auch $(a,c) \in R$.

In jedem der Fälle gilt $(a,c) \in R$. Es folgt, dass R transitiv ist.