Universität Leipzig
Institut für Informatik
Sommersemester 2025

Prof. Dr. Andreas Maletti,
Dr. habil. Karin Quaas,
Fabian Sauer

Aufgaben zur Lehrveranstaltung

Berechenbarkeit

Lösungen zu Serie 5

Übungsaufgabe 5.1 (Primitiv Rekursive Funktionen)

Gegeben sei die folgende primitiv rekursive Definition der Funktion h:

$$h = \mathrm{pr}[\mathrm{nf}\langle 0^{(0)}\rangle, \pi_1^{(3)}\langle 2^{(2)}, \pi_2^{(2)}, 0^{(2)}\rangle]$$

Geben Sie für alle Teilfunktionen von h die Stelligkeit an, sowie welche Funktionen diese berechnen.

Funktion	Stelligkeit	Was wird berechnet
$g_1 = 0^{(0)}$	0-stellig	$g_1 : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N} : \langle\rangle \mapsto 0$
$g_2 = 2^{(2)}$	2-stellig	$g_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} : (a_1, a_2) \mapsto 2$ für alle $(a_1, a_2) \in \mathbb{N}^2$
$g_3 = 0^{(2)}$	2-stellig	$g_3 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} : (a_1, a_2) \mapsto 0$ für alle $(a_1, a_2) \in \mathbb{N}^2$
$g_4 = \mathrm{nf}$	1-stellig	$g_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : a_1 \mapsto a_1 + 1$ für alle $a_1 \in \mathbb{N}$
$g_5 = g_4\langle g_1\rangle$	0-stellig	$g_5 : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N} : \langle\rangle \mapsto 1$
$g_6 = \pi_1^{(3)}$	3-stellig	$g_6 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N} : (a_1, a_2, a_3) \mapsto a_1$ für alle $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{N}^3$
$g_7 = \pi_2^{(2)}$	2-stellig	$g_7 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} : (a_1, a_2) \mapsto a_2$ für alle $(a_1, a_2) \in \mathbb{N}^2$
$g_8 = g_6\langle g_2, g_7, g_3\rangle$	2-stellig	$g_8 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} : (a_1, a_2) = g_6(g_2(a_1, a_2), g_7(a_1, a_2), g_3(a_1, a_2))$ $= g_2(a_1, a_2) = 2$ für alle $(a_1, a_2) \in \mathbb{N}^2$
$h = \mathrm{pr}[g_5, g_8]$	1-stellig	$h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : 0 \mapsto g_5(\langle\rangle) = 1; a + 1 \mapsto g_8(h(a), a) = 2$ für alle $a \in \mathbb{N}$

Übungsaufgabe 5.2 (Primitiv Rekursive Funktionen)

Geben Sie für jede der folgenden Funktionen eine primitiv rekursive Darstellung an.

(a) $f_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} : (a_1, a_2) \mapsto |a_1 - a_2|$ für alle $(a_1, a_2) \in \mathbb{N}^2$.

Hinweis: $|a_1 - a_2| = \mathrm{sub}(a_1, a_2) + \mathrm{sub}(a_2, a_1)$ *für alle* $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$.

$f_1 = \mathrm{add}\langle \mathrm{sub}, \mathrm{sub}\langle \pi_2^{(2)}, \pi_1^{(2)}\rangle\rangle$

(b) $f_2 : \mathbb{N}^2 \to \{0, 1\} : (a_1, a_2) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } a_1 = a_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ für alle $(a_1, a_2) \in \mathbb{N}^2$.

Hinweis: $a_1 = a_2$ *gdw.* $\mathrm{sub}(1, |a_1 - a_2|) = 1$ *für alle* $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$.

$f_2 = \mathrm{sub}\langle 1^{(2)}, f_1\rangle$

(c) $f_3 : \mathbb{N}^3 \to \{0,1\} : (a_1, a_2, a_3) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } a_1 + a_2 = a_3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ für alle $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{N}^3$.

$f_3 = f_2\langle \mathrm{add}\langle \pi_1^{(3)}, \pi_2^{(3)} \rangle, \pi_3^{(3)} \rangle$

(d) $f_4 : \mathbb{N}^3 \to \{0,1\} : (a_1, a_2, a_3) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls es } a \leq a_1 \text{ gibt sodass } a + a_2 = a_3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ für alle $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{N}^3$.

f_4 entspricht der Anwendung des beschränkten $\exists$-Quantoren auf die primitiv rekursive Funktion f_3, d.h., $f_4 = \exists_{f_3}$, und ist daher nach §7.5 auch primitiv rekursiv; wir geben dennoch die Definition der Funktion an, dem Beweis von §7.5 folgend:

Wir haben

- $\exists_{f_3}(0, a_1, a_2) = f_3(0, a_1, a_2)$
- $\exists_{f_3}(a+1, a_1, a_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f_3(a+1, a_1, a_2) = 1 \\ \exists_{f_3}(a, a_1, a_2) & \text{sonst} \end{cases}$

  Diese Fallunterscheidung ist äquivalent zu $\max(f_3(a+1, a_1, a_2), \exists_{f_3}(a, a_1, a_2))$.

$\exists_{f_3} = pr[h_1, h_2]$, wobei $h_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} : f_3\langle 0^{(2)}, \pi_1^{(2)}, \pi_2^{(2)} \rangle$ (damit $\exists_{f_3}(0, a_1, a_2) = h_1(a_1, a_2)$), und $h_2 : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N} : \max\langle f_3\langle \mathrm{nf}\langle \pi_2^{(4)} \rangle, \pi_3^{(4)}, \pi_4^{(4)} \rangle, \pi_1^{(4)} \rangle$

Übungsaufgabe 5.3 (μ-rekursive Funktionen)

(a) Sei $f_5 = \mu\mathrm{sub}\langle 1^{(3)}, f_3 \rangle$, mit f_3 wie in Übungsaufgabe 5.2 definiert. Berechnen Sie $f_5(2,5)$ und $f_5(8,5)$. Welche Funktion berechnet f_5?

Sei $s = \mathrm{sub}\langle 1^{(3)}, f_3 \rangle$. Dann $s(a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} 0 & \text{falls } a_1 + a_2 = a_3 \\ 1 & \text{anderenfalls} \end{cases}$. Dann also $\mu s(2,5) = \min\{a \mid s(a, 2, 5) = 0, s(b, 2, 5) \text{ ist definiert für alle } b \leq a\} = 3$ und $\mu s(8,5) = \min \emptyset = \perp$. Es gilt $\mu s : \mathbb{N}^2 \dashrightarrow \mathbb{N}$ mit $s(a_1, a_2) = a_2 - a_1$ falls $a_1 \leq a_2$ und $s(a_1, a_2) = \perp$ falls $a_1 > a_2$.

(b) Sei $f_6 = \mu\mathrm{sub}\langle \pi_2^{(2)}, \pi_1^{(2)} \rangle$ und $f_7 = \pi_1^{(1)}$. Zeigen Sie, dass $f_6 = f_7$ gilt.

f_7 entspricht der Identitätsfunktion, also $f_7 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : a \mapsto a$ für alle $a \in \mathbb{N}$.

Sei $s = \mathrm{sub}\langle \pi_2^{(2)}, \pi_1^{(2)} \rangle$. Dann $s(a_1, a_2) = \mathrm{sub}(a_2, a_1)$. Also $\mu s(a_1) = \min\{a \mid \mathrm{sub}(a_1, a) = 0, \mathrm{sub}(a_1, b) \text{ ist definiert für alle } b \leq a\}$. Es gilt aber $\mathrm{sub}(a_1, a_1) = 0$ sowie $\mathrm{sub}(a_1, b) > 0$ für alle a_1 und $b < a_1$, also $\mu s(a_1) = a_1$ für alle a_1. Also entspricht μs der Identitätsfunktion.

Hausaufgabe 5.4 (Primitiv Rekursive Funktionen) (10)

Gegeben sei die folgende primitiv rekursive Definition der Funktion h:

$$h = \mathrm{pr}[3^{(2)}, \pi_2^{(3)}\langle 0^{(4)}, \mathrm{nf}\langle \pi_2^{(4)} \rangle, 1^{(4)} \rangle]$$

Geben Sie für alle Teilfunktionen von h die Stelligkeit an, sowie welche Funktionen diese berechnen.

Funktion	Stelligkeit	Was wird berechnet
$g_1 = 3^{(2)}$	2-stellig	$g_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} : (a_1, a_2) \mapsto 3$ für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$
$g_2 = 0^{(4)}$	4-stellig	$g_2 : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N} : (a_1, a_2, a_3, a_4) \mapsto 0$ für alle $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{N}$
$g_3 = 1^{(4)}$	4-stellig	$g_3 : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N} : (a_1, a_2, a_3, a_4) \mapsto 1$ für alle $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{N}$
$g_4 = \mathrm{nf}$	1-stellig	$g_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : a_1 \mapsto a_1 + 1$ für alle $a_1 \in \mathbb{N}$
$g_5 = \pi_2^{(4)}$	4-stellig	$g_5 : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N} : (a_1, a_2, a_3, a_4) \mapsto a_2$ für alle $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{N}$
$g_6 = g_4\langle g_5 \rangle$	4-stellig	$g_6 : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N} : (a_1, a_2, a_3, a_4) \mapsto g_4(g_5(a_1, a_2, a_3, a_4)) = g_4(a_2) = a_2 + 1$ fü
$g_7 = \pi_2^{(3)}$	3-stellig	$g_7 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N} : (a_1, a_2, a_3) \mapsto a_2$ für alle $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{N}$
$g_8 = g_7\langle g_2, g_6, g_3 \rangle$	4-stellig	$g_8 : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N} :$ $(a_1, a_2, a_3, a_4) \mapsto g_7(g_2(a_1, a_2, a_3, a_4), g_6(a_1, a_2, a_3, a_4), g_3(a_1, a_2, a_3, a_4))$ $= g_7(0, a_2 + 1, 1) = a_2 + 1$ für alle $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{N}$
$h = \mathrm{pr}[g_1, g_8]$	3-stellig	$h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit $h(0, a_1, a_2) = g_1(a_1, a_2) = 3$ und $h(a + 1, a_1, a_2) = g_8(h(a, a_1, a_2), a, a_1, a_2) = a + 1$ also $h(0, a_1, a_2) = 3, h(a, a_1, a_2) = a$ für alle $a \geq 1$ und $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$

Hausaufgabe 5.5 (Primitiv Rekursive Funktionen)

Geben Sie für jede der folgenden Funktionen eine primitiv rekursive Darstellung an.

(a) $g_1 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N} : (a_1, a_2, a_3) \mapsto \begin{cases} a_2 & \text{falls } a_1 = 0 \\ a_3 & \text{sonst} \end{cases}$ für alle $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{N}$. (4)

(b) $g_2 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N} : (a_1, a_2, a_3) \mapsto \begin{cases} a_1 & \text{falls } a_3 = 0 \\ a_2 & \text{sonst} \end{cases}$ für alle $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{N}$. (2)

(c) $g_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : a_1 \mapsto a_1!$ für alle $a_1 \in \mathbb{N}$. (4)

Lösung: (a) $g_1 = \mathrm{pr}[\pi_1^{(2)}, \pi_4^{(4)}]$ denn

$$g_1(0, a, b) = \pi_1^{(2)}(a, b) = a \text{ und } g_1(n + 1, a, b) = \pi_4^{(4)}(g_1(n, a, b), n, a, b) = b.$$

(b) $g_2 = f_1\langle \pi_3^{(3)}, \pi_1^{(3)}, \pi_2^{(3)} \rangle$ denn

$$g_2(a, b, c) = f_1(\pi_3^{(3)}(a, b, c), \pi_1^{(3)}(a, b, c), \pi_2^{(3)}(a, b, c)) = f_1(c, a, b) = \begin{cases} a & \text{falls } c = 0 \\ b & \text{sonst} \end{cases}$$

(c) $g_3 = \mathrm{pr}[1^{(0)}, \mathrm{mult}\langle \pi_1^{(2)}, \mathrm{nf}\langle \pi_2^{(2)} \rangle \rangle]$ denn

$g_3(0) = 1^{(0)}(\langle\rangle) = 1 = 0!$ und $g_3(n + 1) = \mathrm{mult}\langle \pi_1^{(2)}, \mathrm{nf}\langle \pi_2^{(2)} \rangle \rangle (g_3(n), n) = g_3(n) \cdot (n + 1) = n! \cdot (n + 1) = (n + 1)!$

Hausaufgabe 5.6 (μ-rekursive Funktionen)

(a) Welche Funktion berechnet μg_3, mit g_3 wie in Hausaufgabe 5.5 definiert? (1)

$\mu g_3 : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$ mit $\langle\rangle \mapsto \perp$. ●21

(b) Sei $g_4 = \mu f_4$, mit f_4 wie in Übungsaufgabe 5.2 definiert. Berechnen Sie $g_4(4,4), g_4(4,5)$ und $g_4(5,4)$. Welche Funktion berechnet g_4? (4)

- $g_4(4,4) = \min\{k \mid f_4(k,4,4) = 0$ und $f_4(m,4,4) =\perp$ für alle $m < k\}$. Da aber $f_4(0,4,4) = 1$ ist, gilt $g_4(4,4) = \min(\emptyset) =\perp$. ●22
- $g_4(5,4) = \min\{k \mid f_4(k,5,4) = 0$ und $f_4(m,4,4) =\perp$ für alle $m < k\} = \min \mathbb{N} = 0$●23
- $g_4(4,6) = \min\{k \mid f_4(k,4,6) = 0$ und $f_4(m,4,4) =\perp$ für alle $m < k\} = \min\{0,1\} = 0$. ●24

Die Funktion $g_4 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ berechnet folgende Funktion:

$$(a,b) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } a \neq b \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $a, b \in \mathbb{N}$●25