Aufgabe:

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{3\times 3}$

Untersuchen Sie, ob A invertierbar ist und bestimmen Sie ggfs. die inverse Matrix A^{-1}.

Lösung:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{1. Spalte}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2\cdot 2 - 1\cdot(-1) = 5 = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow A \text{ ist invertierbar.}$$

$$(A \mid E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \cdot \tfrac{1}{2} = 2 \qquad (2\cdot 2 = 4 = 1)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \qquad (2+1 = 3 = 0,\ 2+2 = 4 = 0)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{=E_3} \qquad \underbrace{\begin{matrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}}_{=A^{-1}}$$

Aufgabe:

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{3\times 3}$

Untersuchen Sie, ob A invertierbar ist und bestimmen Sie ggfs. die inverse Matrix A^{-1}.

Lösung:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \cdot 1 \\ \\ + \end{matrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Entw. nach}}{\underset{\text{1. Spalte}}{=}} 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2\cdot 2 - 1\cdot(-1) = 5 = 0 \Rightarrow A \text{ ist nicht invertierbar.}$$

Aufgabe:

Sei $p>0$ eine Primzahl.

Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_p^{3\times 3}$

Für welche p ist A invertierbar?

Lösung:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 4 & \cdot 7 \\ + & \\ & + \end{matrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 13 & -6 \\ 0 & 22 & -12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ + \end{matrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 13 & -6 \\ 0 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{1. Spalte}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} -1 \cdot \det\begin{pmatrix} 13 & -6 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$$

$$= -(13 \cdot (-6) + 9 \cdot 6)$$

$$= 4 \cdot 6$$

$$= 2^2 \cdot 2^1 \cdot 3^1$$

$$= 2^3 \cdot 3^1$$

$$= 0$$

$\Leftrightarrow \quad p = 2 \lor p = 3$

$\Rightarrow \quad A$ ist invertierbar $\Leftrightarrow p \notin \{2; 3\}$.