Universität Leipzig
Institut für Informatik
Sommersemester 2024

Prof. Dr. Andreas Maletti,
Dr. Erik Paul, Fabian Sauer,
Dr. habil. Karin Quaas

Aufgaben zur Lehrveranstaltung

Berechenbarkeit

Serie 2

- Die Übungsaufgaben werden in den Übungen ab dem 29.4.2024 besprochen.
- Abgabeschluss für Hausaufgaben: **13.5.2024 um 22:00 Uhr** im Moodle-Kurs.
- Sie können gern in 2er-Gruppen abgeben. Bitte schreiben Sie dazu die Namen und Matrikelnummern beider Personen auf das Blatt und reichen Sie Ihre Lösungen über einen Account ein.

Liebe Studis,

habt Ihr Probleme mit den Übungsaufgaben? Die Tutoren des **Offenen Matheraums Informatik** beantworten gerne Fragen zu allen Modulen des ersten Semesters. Ihr findet uns Montags 11 - 13 + 15 - 17 Uhr im Paulinum P401 und Dienstag bis Freitag von 11 - 17 Uhr im Augusteum A412.

Übungsaufgabe 2.1 (Normierte Mehrband TMs und Mächtigkeit)

In Vorlesung 4 haben wir in §4.1 gezeigt, dass für jede beliebige Grammatik G eine normierte Turingmachine M_G mit $L(M_G) = L(G)$ existiert. In dieser Aufgabe werden wir dies für den einfacheren Fall, dass G eine *reguläre Grammatik* ist, formal beweisen.

(a) Sei $G = (N, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik mit $N = \{S, T\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, und Produktionen P

$$S \to \varepsilon \quad S \to aT \quad S \to bT \quad T \to a \quad T \to b \quad T \to aS \quad T \to bS.$$

(i) Geben Sie eine Ableitung von *abbaba* an.

(ii) Bestimmen Sie $L(G)$.

(iii) Geben Sie eine normierte Turingmachine M mit $L(M) = L(G)$ an.

(iv) Geben Sie für das Eingabewort $w = aa$ eine Folge von Ableitungsschritten von M an, welche akzeptierend hält.

(b) Beweisen Sie nun folgendes Theorem, indem Sie die Konstruktion aus der ersten Teilaufgabe verallgemeinern:

Für jede reguläre Grammatik G existiert eine normierte Turing Maschine M_G mit $L(M_G) = L(G)$.

Übungsaufgabe 2.2 (Turing-Berechenbarkeit)

Sei $f : \{1\}^* \to \{1\}^*$ die totale Funktion definiert durch $f(1^n) = 1^{2n}$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass f Turing-berechenbar ist, d.h., dass es eine deterministische TM M mit $T(M) = f$ gibt. Geben Sie kurz und prägnant die Idee der Funktionsweise Ihrer TM an.

Übungsaufgabe 2.3 (LOOP-Programme)

Geben Sie ein LOOP-Programm an, das die Fakultätsfunktion

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n!$$

berechnet.

Hausaufgabe 2.4 (Mächtigkeit) (7)

Beweisen Sie das folgende Theorem.

Für jeden endlichen Automaten $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ existiert eine normierte 1-Band Turingmaschine M_A mit $L(M_A) = L(A)$.

In Ihrem Beweis geben Sie bitte für einen beliebigen Automaten A eine *direkte* Konstruktion von M_A an, das heisst, vermeiden Sie die Verwendung von bereits bekannten Zusammenhängen zwischen Automaten und Grammatiken.

Hausaufgabe 2.5 (Turing-Berechenbarkeit) (8)

Sei $f : \{1\}^* \dashrightarrow \{0, \#\}^*$ die partielle Funktion definiert durch

$$f(1^n) = \begin{cases} 0^{\frac{n}{2}} \# 0^{\frac{n}{2}} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \bot & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass f Turing-berechenbar ist, d.h., dass es eine deterministische TM M mit $T(M) = f$ gibt. Geben Sie kurz und prägnant die Idee der Funktionsweise Ihrer TM an.

Hausaufgabe 2.6 (LOOP-Programme) (5)

Geben Sie ein LOOP-Programm an, das die Funktion $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, definiert durch

$$f(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n_1 = n_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

berechnet.