

### Hausaufgabenblatt 3

Abgabe bis 16.12.2024 (Mo) um 09.00 auf moodle

**Aufgabe 1.** Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung zweier Zufallsgrößen  $X$  und  $Y$  sei durch die folgende Tabelle gegeben.

$XY$	0	1	2	$\sum$
0		0	$1/8$	$\frac{3}{16}$
1	0			
2	$1/8$	$1/4$	$1/16$	
$\sum$		$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	

Die Einträge der Tabelle entsprechen dabei den Wahrscheinlichkeiten  $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$  für  $i, j \in \{0, 1, 2\}$ .

- (a) Füllen Sie die Tabelle aus.
- (b) Bestimmen Sie die Erwartungswerte  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\mathbb{E}(Y)$  und  $E(XY)$ .
- (c) Bestimmen Sie die Kovarianz von  $X$  und  $Y$ . Sind  $X$  und  $Y$  stochastisch unabhängig?

### Aufgabe 2.

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit Werten in  $\mathbb{N}_0$ , die Verteilung, für  $\lambda > 0$ , sei gegeben durch

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

- a) Prüfen Sie nach, dass durch  $p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ , tatsächlich die Eigenschaft einer Verteilung erfüllt.
- b) Berechnen Sie  $\mathbb{E}(X)$

**Aufgabe 3.** Eine unfaire Münze wird zweimal geworfen. Mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{3}$  zeigt sie 1 und mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{2}{3}$  zeigt sie 0. Sei  $X$  die Zufallsvariable, die Anzahl der Erfolge (also 1) misst, sei  $Y$  eine Zufallsvariable, die den ersten Zeitpunkt des ersten Erfolges misst. Sei ferner  $Z$  die Zufallsvariable, die das Ergebnis des zweifachen Münzwurfs als binäre Zahl liest und ins Zehnersystem überführt. (Beispiel:  $Z((1, 1)) = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 = 3$ )

- a) Geben Sie die Verteilung der 3-dimensionalen Zufallsvariable  $(X, Y, Z)$  an.
- b) Geben Sie die Kreuztabellen für  $(X, Y)$ ,  $(Y, Z)$  und  $(X, Z)$  an.

**Aufgabe 4.** Wir betrachten eine Urne mit 5 Kugeln: 2 blaue, 2 rote und 1 grüne. Nach jedem Zug legen wir die Kugel zurück in die Urne und legen noch eine zusätzliche Kugel der selben Farbe dazu. Dieses Spiel führen wir insgesamt zweimal durch. Sei  $X$  die Anzahl der blauen Kugeln,  $Y$  die Anzahl der roten Kugeln und  $Z$  die Anzahl der grünen Kugeln nach zwei Zügen. Geben Sie die Verteilung der 3-dimensionalen Zufallsvariable  $(X, Y, Z)$  an.

**Abgabe:** Die Abgabe erfolgt erstmal als Gruppe (2–4 Teilnehmer) über moodle. Bitte schreiben Sie auf die erste Seite der Abgabe die vollständigen Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder. Die Übungen müssen selbstständig bearbeitet werden. Ein Gruppenmitglied lädt die Abgabe als eine pdf-Datei für alle hoch. Bitte benennen Sie die Datei wie folgt (Name bezieht sich auf das hochladende Gruppenmitglied):

**Vorname-Nachname-MatrNr-HA2.pdf**

Zu späte oder nicht lesbare Abgaben oder Entwürfe oder Einzelabgaben werden nicht korrigiert und mit 0 Punkten bewertet. Vergessene Namen von Gruppenmitgliedern können nicht berücksichtigt werden. Alle Gruppenmitglieder sind für das erfolgreiche Hochladen der Abgabe verantwortlich.