Lösungen Übung 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Seien A, B und C beliebige Mengen. Zeigen Sie:

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

Lösung:
1) Sei $x \in A \setminus (B \setminus C)$, also $x \in A$ und $x \notin B \setminus C$.
1.Fall: $x \notin B$ Dann folgt $x \in A \setminus B$ und somit auch $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
2.Fall: $x \in B$ Wegen $x \notin B \setminus C$ folgt dann $x \in C$ und somit auch $x \in A \cap C$, also auch $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
2) Sei $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
1.Fall: $x \in A \setminus B$, also $x \in A$ und $x \notin B$. Dann gilt erst recht $x \notin B \setminus C$, also $x \in A \setminus (B \setminus C)$.
2.Fall: $x \in A \cap C$, also $x \in A$ und $x \in C$. Letzteres impliziert $x \notin B \setminus C$, also gilt auch hier $x \in A \setminus (B \setminus C)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie die folgende Summenformel mittels vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Lösung: Induktionsanfang: Für $n = 1$ sind beide Seiten gleich $1/4$.
Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \\
&= \frac{n}{3n+1} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{n(3n+4)+1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{3n^2+4n+1}{(3n+1)(3n+4)} \\
&= \frac{(3n+1)(n+1)}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{n+1}{3n+4}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 + 2n$ teilbar durch 3.

Lösung: Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist $n^3 + 2n = 3$.
Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $3 \mid n^3 + 2n$.
Es gilt

$$(n+1)^3 + 2(n+1) = (n+1)(n^2 + 2n + 1) + 2n + 2$$
$$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = n^3 + 2n + 3(n^2 + n + 1).$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist n^3+2n teilbar durch 3 und $3(n^2+n+1)$ ist offensichtlich ebenfalls durch 3 teilbar. Also ist auch die Summe der beiden Zahlen durch 3 teilbar. Das zeigt die Behauptung für $n + 1$.