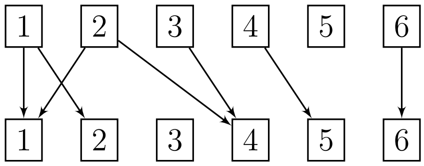
Diskrete Strukturen (WS 2024-25) - Halbserie 5

5.1 **[3]**

Bitte direkt auf Moodle als Quiz antworten.

5.2 **[3]**

Gegeben sei die Relation R_0 auf der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, die mit folgendem Diagramm dargestellt werden kann:



(a) Entfernen Sie zwei Tupel aus R_0, sodass die entstehende Relation R_1 **eindeutig** ist.

(b) Fügen Sie eine Tupel zu R_1 hinzu, sodass die entstehende Relation R_2 **total** ist.

(c) Finden Sie eine Relation Q mit $R_2 \subset Q$ die eine **surjektive Funktion** ist, oder erklären Sie warum das nicht möglich ist.

Solution.

(a) Es gibt vier Möglichkeiten: z.B. $(1, 1)$ und $(2, 1)$.

(b) irgendwelche Tupel der Form $(5, x)$

(c) Je nach dem was in (a) und (b) gemacht wurde.

5.3 **[4]**

Sei $f\colon X \to X$ eine injektive Funktion und sei $g\colon X \to X$ eine Funktion so dass $g; f = f$.

(a) Zeigen Sie, dass $g = \mathrm{id}_X$

(b) Geben Sie ein Beispiel, das zeigt, dass g nicht gleich id_X sein muss, wenn $g; f = f$ aber f nicht injektiv ist.

Solution.

(a) Sei $x \in X$. Wir müssen zeigen, dass $g(x) = x$. Sei $y := g(x)$ und um einen Widerspruch zu bekommen, nehmen wir dass $y \neq x$ ist. Da f injektiv ist, es folgt $f(y) \neq f(x)$, d.h. $f(g(x)) \neq f(x)$. Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass $g; f = f$. Dies zeigt dass $g(x) = x$.

(b) Zum Beispiel $X = \{1, 2\}$, $f = g = \{(1, 1), (2, 1)\}$.

5.4 Sei $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben durch die Formel $f((x, y) = x^2 + y^2$.

(a) Entscheiden Sie, ob f surjektiv ist

(b) Entscheiden Sie, ob f injektiv ist

(c) Finden Sie $f^{-1}(0)$

(d) Finden Sie $f^{-1}(25)$

Solution.

(a) f ist nicht surjektiv, z.B. 3 ist nicht im Bild, da 3 keine Summe von zwei Quadraten ist.

(b) f ist nicht injektiv $f((1, 0)) = f((0, 1)) = 1$

(c) $f^{-1}(0) = \{(0, 0)\}$

(d) $f^{-1}(24) = \{(0, 5), (5, 0), (4, 3), (3, 4)\}$

5.5 Gegeben seien die folgenden **Funktionen**

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ mit } f(n) = 2^n \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$
$$g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \text{ mit } g(x) = \frac{1}{x^2} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Sind f und g jeweils

1. **injektiv**,
2. **surjektiv**?

Beweisen Sie die entsprechenden Bedingungen oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Solution.

1. Angenommen $f(n_1) = f(n_2)$. Dann gilt $2^{n_1} = 2^{n_2} = x$ mit $x \in \mathbb{N}$. Dann gilt aber auch $n_1 = log_2 x = n_2$. Also ist f injektiv.

   g ist nicht injektiv, da für $x < 0$ gilt, dass $g(x) = g(-x)$, aber $x \neq -x$.

2. f ist nicht surjektiv, denn es gibt kein $n \in \mathbb{N}$ sodass $2^n = 3$.
   g ist nicht surjektiv, da es kein $x \in \mathbb{R}$ gibt, für das $g(x) = 0 \in \mathbb{R}$.

5.6 Gegeben seien die folgenden Relationen

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2x = 5y\},$$
$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = x - y\},$$
$$R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 = y^2\}.$$

Sind R_1, R_2 und R_3 **Funktionen?** Beweisen Sie die entsprechenden Bedingungen oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Solution.

- R_1: Keine Funktion. Gegenbeispiel zu Totalität: Nach Definition gilt $(1, y) \in R_1$ gdw. $\frac{2}{5} \cdot 1 = y$. Das heißt aber, es gibt kein y mit $y \in \mathbb{N} \wedge R_1(1, y)$.
- R_2: Ist eine Funktion.
  - Totalität:
    Zu zeigen ist $\forall x(x \in \mathbb{R} \rightarrow \exists y(y \in \mathbb{R} \wedge R_2(x, y))$.
    Sei $x \in \mathbb{R}$. Es ist $x = x - 0$. Also gilt $(x, 0) \in R_2$. Da $0 \in \mathbb{R}$, gilt auch $\exists y(y \in \mathbb{R} \wedge R_2(x, y))$.
  - Eindeutigkeit:
    Zu zeigen ist $\forall m, x, y((m, x, y \in \mathbb{R} \wedge R_2(m, x) \wedge R_2(m, y)) \rightarrow x = y)$.
    Seien $m, x, y \in \mathbb{R}$ und gelte $R_2(m, x)$ und $R_2(m, y)$. Dann gilt also $m = m - x$ und $m = m - y$. Also gilt $m - x = m - y$, also $-x = -y$ und somit auch $x = y$.
- R_3: Keine Funktion. Gegenbeispiel zu Eindeutigkeit für $x = 1$: $(1, 1) \in R_3$ und $(1, -1) \in R_3$, aber $1 \neq -1$.

5.7 Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $z \mapsto |z|$ für alle $z \in \mathbb{Z}$.
Ist f **bijektiv**?

Solution. Die Funktion f ist nicht bijektiv, da sie nicht injektiv ist. Zum Beispiel ist $f(-2) = f(2) = 2$, aber $2 \neq -2$.