Universität Leipzig
Institut für Informatik
Sommersemester 2025

Prof. Dr. Andreas Maletti,
Dr. habil. Karin Quaas,
Fabian Sauer

Aufgaben zur Lehrveranstaltung

Berechenbarkeit

Serie 3

- Die Übungsaufgaben werden in den Übungen ab dem 12.5.2025 besprochen.
- Abgabeschluss für Hausaufgaben: **25.5.2025 um 22:00 Uhr** im Moodle-Kurs.
- Sie können gern in 2er-Gruppen abgeben. Bitte schreiben Sie dazu die Namen und Matrikelnummern beider Personen auf das Blatt und reichen Sie Ihre Lösungen über einen Account ein. Einen Bonuspunkt erhalten Sie in dieser Serie bei Erreichen von **11** Punkten.

Übungsaufgabe 3.1 (Turingmaschinen Mächtigkeit)

Beweisen Sie die folgende Aussage.

Für jeden endlichen Automaten $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ *existiert eine normierte Turingmachine* M_A *mit* $L(M_A) = L(A)$.

In Ihrem Beweis geben Sie bitte für einen beliebigen Automaten A eine *direkte* Konstruktion von M_A an, das heisst, vermeiden Sie die Verwendung von bereits bekannten Zusammenhängen zwischen Automaten und Grammatiken.

Übungsaufgabe 3.2 (Turing-berechenbare Funktionen)

Sei Σ ein endliches Alphabet. Wir definieren die Präfixrelation $\leq_p$ über Σ^* durch $u \leq_p w$ falls $v \in \Sigma^*$ mit $w = u \cdot v$ existiert. Analog definieren wir die Suffixrelation $\leq_s$ über Σ^* durch $u \leq_p w$ falls $v \in \Sigma^*$ mit $w = v \cdot u$ existiert. Wir definieren die Funktion $f : \Sigma^* \to \mathcal{P}(\Sigma^+)$ durch

$$f(w) = \{u \in \Sigma^+ \mid u \leq_p w \text{ und } u \leq_s w\}$$

für alle $w \in \Sigma^*$. Beispielsweise ist $f(abaab) = \{ab\}$ und $f(aaaa) = \{a, aa, aaa\}$.

Zeigen Sie, dass f Turing-berechenbar ist, d.h. geben Sie eine deterministische Turingmaschine an, welche f berechnet. Bitte geben Sie auch aussagekräftige Erläuterungen zur Verhaltensweise Ihrer Turingmaschine.

Übungsaufgabe 3.3 (LOOP-berechenbare Funktionen)

Zeigen Sie, dass die beidem im Folgenden definierten Funktionen LOOP-berechenbar sind.

(a) $g_1 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei definiert durch

$$g_1(n) \mapsto n!$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) $g_2 \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sei definiert durch

$$g_2(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n_1 = n_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hausaufgabe 3.4 (Turingmaschinen Mächtigkeit) (6)

Sei $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ ein endlicher Automat[1] und sei $w \in \Sigma^*$. Wir nennen w einen *Zeugen für Mehrdeutigkeit von A* falls es mindestens zwei unterschiedliche akzeptierende Läufe von A auf w gibt.

Beweisen Sie die folgende Aussage.

Für jeden endlichen Automaten $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ existiert eine Turingmachine M_A mit $L(M_A) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ ist Zeuge für Mehrdeutigkeit von } A\}$.

Hausaufgabe 3.5 (Turing-berechenbare Funktionen) (11)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Wir definieren die Infixrelation $\leq_i$ über Σ^* durch $u \leq_i w$ falls $v_1, v_2 \in \Sigma^*$ mit $w = v_1 \cdot u \cdot v_2$ existieren. Wir definieren die partielle Funktion $f : \{a, b, \#\}^* \dashrightarrow \{0, 1\}$ durch

$$f(u\#w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } u \leq_i w \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $u, w \in \{a, b\}^*$. Beispielsweise ist $f(ab\#aab) = 1$, $f(aa\#b) = 0$, und $f(aa) = \perp$ ist undefiniert.

Zeigen Sie, dass f Turing-berechenbar ist, d.h. geben Sie eine deterministische Turingmaschine an, welche f berechnet. Bitte geben Sie auch aussagekräftige Erläuterungen zur Verhaltensweise Ihrer Turingmaschine.

Hausaufgabe 3.6 (LOOP-berechenbare Funktionen) (5)

Definiere die Funktion $g : \{0, 1\}^3 \to \{0, 1\}$ durch

$$g(a_1, a_2, a_3) = (a_1 \wedge a_2) \vee \neg a_3$$

für alle $a_1, a_2, a_3 \in \{0, 1\}$.

Zeigen Sie, dass g LOOP-berechenbar ist.

[1] $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$, d.h., es sind keine ε-Transitionen erlaubt.