Aufgabe:

Seien $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ und sei

$U = \operatorname{span}\{u_1, u_2\}$ und $W = \operatorname{span}\{w_1, w_2\}$.

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $U+W$.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $U \cap W$.

Lösung:

(a) $U+W = \operatorname{span}\{u_1, u_2, w_1, w_2\}$.

$$\begin{pmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ w_1^T \\ w_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \\ + \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 1 \quad \cdot 1 \\ + \\ \quad + \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis von $U+W$.

(b) $U \cap W = \{ v \in \mathbb{R}^4 \mid v \in U \wedge v \in W \}$

$= \{ v \in W \mid v \in U \}$.

$= \{ \beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2 \mid \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ und es ex. $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit $\underbrace{\beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2 = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2}_{(*)} \}$

$(*) \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 - \beta_1 \cdot w_1 - \beta_2 \cdot w_2 = 0$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \beta_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \beta_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \beta_1 = 0 & \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \\ \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = 0 & \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2 = 0 & + \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \beta_1 = 0 & \quad + \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \beta_1 = 0 & \\ \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = 0 & \cdot(-1) \quad \cdot(-2) \\ \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = 0 & + \\ 2\alpha_2 + 2\beta_1 = 0 & \quad + \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \beta_1 = 0 \\ \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = 0 \\ -2\beta_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Es ex. $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit $(*)$ genau dann, wenn $\beta_2 = 0$

$\Rightarrow U \cap W = \{\beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2 \mid \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ und $\beta_2 = 0\} = \{\beta_1 \cdot w_1 \mid \beta_1 \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{w_1\}$.

$\Rightarrow \{w_1\}$ ist eine Basis von $U \cap W$.

Zusatz:

$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

$\Rightarrow \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U+W) = 2 + 2 - 3 = 1$

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Es ist $w_1 = u_1 - u_2 \in U$.

In $\mathbb{R}^4$ seien die linearen Unterräume

$$U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 = -3x_2 - 3x_4\}$$
$$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_4 = x_2 + x_3\}$$

gegeben. Bestimmen Sie Basen der Unterräume U_1, U_2, $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$.

$$U_1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 0\}$$
$$= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = -3x_2 + x_3 - 3x_4\}$$
$$= \{(-3x_2 + x_3 - 3x_4, x_2, x_3, x_4) \mid x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{x_2 \cdot \underbrace{(-3,1,0,0)}_{=:v_1} + x_3 \cdot \underbrace{(1,0,1,0)}_{=:v_2} + x_4 \cdot \underbrace{(-3,0,0,1)}_{=:v_3} \mid x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$
$$= \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \cdot 3 \quad \cdot 3 \\ + \\ \quad\; + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\underbrace{(1,0,1,0)}_{=:u_1}$, $\underbrace{(0,1,3,0)}_{=:u_2}$, $\underbrace{(0,0,3,1)}_{=:u_3}$ ist eine Basis von U_1 $\Rightarrow$ $\dim U_1 = 3$

$$U_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$$
$$= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 + x_3 + x_4\}$$
$$= \{(x_2 + x_3 + x_4, x_2, x_3, x_4) \mid x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{x_2 \cdot \underbrace{(1,1,0,0)}_{=:w_1} + x_3 \cdot \underbrace{(1,0,1,0)}_{=:w_2} + x_4 \cdot \underbrace{(1,0,0,1)}_{=:w_3} \mid x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$
$$= \operatorname{span}\{w_1, w_2, w_3\}$$

Offensichtlich sind w_1, w_2, w_3 linear unabhängig, daher ist $\{w_1, w_2, w_3\}$ eine Basis von U_2.

$\Rightarrow$ $\dim U_2 = 3$

$U_1 = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \}$

$U_2 = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \}$

$U_1 \cap U_2 = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \wedge x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ + \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1 \quad - x_3 \quad &= 0 \\ x_2 \quad + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad x_2 = -x_4 \, , \quad x_1 = x_3$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad U_1 \cap U_2 &= \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = -x_4 \, , \, x_1 = x_3 \} \\ &= \{ (x_3, -x_4, x_3, x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ x_3 \cdot \underbrace{(1,0,1,0)}_{=: z_1} + x_4 \cdot \underbrace{(0,-1,0,1)}_{=: z_2} \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \} \\ &= \operatorname{span}\{z_1, z_2\} \end{aligned}$$

Offensichtlich sind z_1, z_2 linear unabhängig $\Rightarrow \{z_1, z_2\}$ ist eine Basis von $U_1 \cap U_2$. $\Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) = 2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \dim(U_1 + U_2) &= \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2) \\ &= 3 + 3 - 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad U_1 + U_2 = \mathbb{R}^4 \quad \Rightarrow \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ist eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

($U \subseteq V$ ist ein Unterraum von V und $\dim(U) = \dim(V) \quad \Rightarrow U = V$)

Alternativ:

$U_1 + U_2 = \operatorname{span}\{u_1, u_2, u_3, w_1, w_2, w_3\}$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \{(1,0,1,0), (0,1,-1,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ ist eine Basis von $U_1 + U_2$