Diskrete Strukturen
Pflichtserie 8

Nikita Emanuel John Fehér, 3793479

16. Dezember 2024
09:15-10:45 Dietzschold, Johannes

8.1

Geben Sie für die folgenden Abbildungen f_1, f_2, f_3 alle Fixpunkte an.

(a) $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, z \mapsto z^2 + z - 1$

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= z \\
z^2 + z - 1 &= z && | - z \\
z^2 - 1 &= 0 && | + 1 \\
z^2 &= 1 && |\sqrt{()} \\
z &= \pm 1 \\
z_1 &= 1 \\
z_2 &= -1
\end{aligned}$$

(b) $f_2 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto (2x - y, y + x \cdot y)$

$$\begin{aligned}
f_2((x, y) &= (x, y) \\
(2x - y, y + xy) &= (x, y) \\
x = 2x - y, y &= y + xy \\
x &= 2x - y && | + y| - x \\
y &= x \\
y &= y + xy \\
y &= y + (y)y && | - y \\
0 &= yy \\
0 = y &= x \\
(x, y) &= (0, 0)
\end{aligned}$$

(c) $f_3 : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}), X \mapsto \{n \in \mathbb{N} | \exists x \in X(n \geq x)\}$

$$f_3(X) = X$$
$$\{n \in \mathbb{N} | \exists x \in X(n \geq x)\} = X$$

Fall 1: $X = \emptyset$: $\implies \nexists x \in X(n \geq x)$
$X = \emptyset$ ist ein Fixpunkt

Fall 2: $X \neq \emptyset$ Dann existiert ein $x \in X$. Für jedes $n \geq x \implies n \in f_3(X)$

$$f_3(X) = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists x \in X(n \geq x)\} = [\min(X), \infty) \cap \mathbb{N}.$$

Annahme: $X = f_3(X)$ ist ein Fixpunkt. Daraus folgt:

$$X = [\min(X), \infty) \cap \mathbb{N}.$$

Da X keine obere Schranke hat, müsste $X = [\min(X), \infty)$. Dies ist jedoch nur möglich, wenn X genau die Form $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\}$ für ein $k \in \mathbb{N}$ 2.1 hat. Andererseits enthält $f_3(X)$ stets alle natürlichen Zahlen $n \geq \min(X)$, unabhängig von der ursprünglichen Struktur von X. Also:

$$f_3(X) \neq X.$$

Schlussfolgerung: Für $X \neq \emptyset$ ist X kein Fixpunkt von f_3.

Index der Kommentare

2.1 setze dieses k als min(X mit deiner Defintion von X von oben, schon hast du alle Fixpunktmengen der Form {k,k+1,k+2,k+3,...} mit k aus N -1 BE