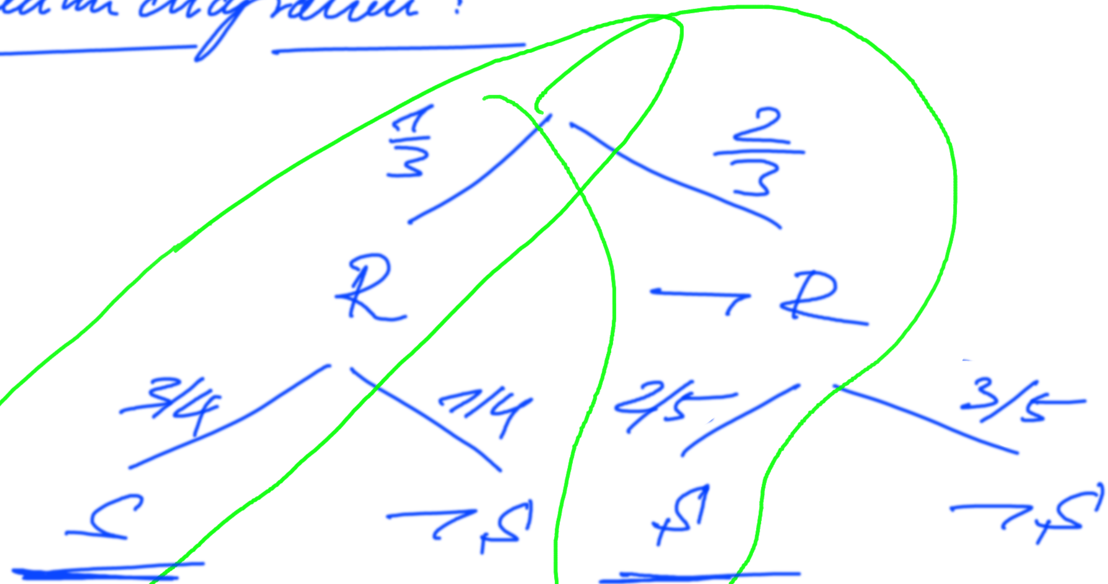
Valery Bodnastle
für Lehramt & Informatik
VL vom 11.11.'24

Dozent: Max Renesse

Herr Müller hat mit W-keit $\frac{3}{4}$ den Regenschirm dabei, wenn es regnet
——— " ——— " ——— $\frac{2}{5}$
——— " ———, wenn es nicht regnet
Es regnet an einem typischen Tag mit W-keit $\frac{1}{3}$.
Heute hat Herr Müller den Regenschirm dabei.
Mit welcher W-keit regnet es?

Baumdiagramm:



$1/3 = P(R)$; $2/3 = P(\neg R)$

$3/4 = P(S|R)$; $1/4 = P(\neg S|R)$

$2/5 = P(S \mid \neg R)$; $3/5 = P(\neg S \mid \neg R)$

gesucht: $P(R \mid S) = ?$

$$\overset{!}{=} \frac{P(R \cap S)}{P(S)}$$

$$P(R \cap S) = \underbrace{\boxed{\frac{P(R \cap S)}{P(S)}} \cdot P(S)}$$

$$= P(R \mid S) \cdot P(S)$$

$$= \frac{P(R \cap S)}{P(R)} \cdot P(R)$$

$$= P(S \mid R) \cdot P(R)$$

$$= \frac{3}{4} \qquad \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$P(S) = P(S \cap R) + P(S \cap \neg R)$$

$$= \frac{P(S \cap R)}{P(R)} P(R) + \frac{P(S \cap \neg R)}{P(\neg R)} P(\neg R)$$

$$= P(S \mid R) \cdot P(R) + P(S \mid \neg R) \cdot P(\neg R)$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{4}{15}$$

$$= \frac{15 + 16}{60} = \frac{31}{60}$$

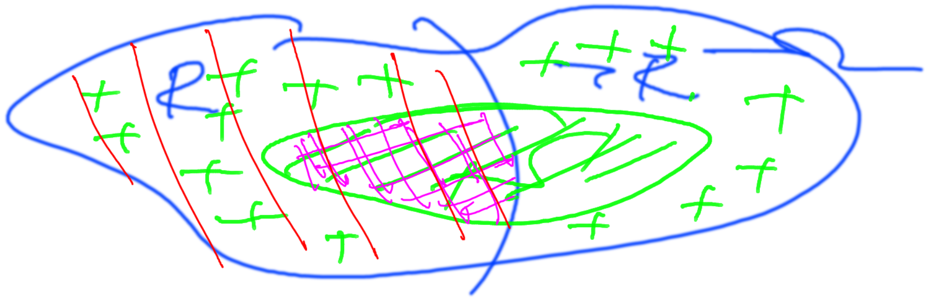
$$P(R \mid S) = \frac{1/4}{\frac{31}{60}} = \frac{1}{4 \cdot \frac{31}{60}}$$

$$= \frac{60}{4 \cdot 31}$$

$$= \frac{60}{124} = \frac{30}{62} = \frac{15}{31}.$$

⇝ siehe Satz von Bayes im Skript.

Alternative zum Baumdiagramm:



$$P(S|R) = \frac{\text{„ "}}{\text{„ "}} = \frac{P(S\cap R)}{\ }$$

Def.: Zwei Ereignisse A, B heißen stochastisch unabhängig $:\Longleftrightarrow P(A\cap B) = P(A)\,P(B)$!!

Beispiel: 2-facher Münzwurf mit einer fairen Münze:
mathematische Beschreibung:
Ω = Menge der möglichen Versuchsprotokolle

$$= \{(K,K), (K,Z), (Z,Z), (Z,K)\}.$$

$$P(\{(K,K)\}) = \frac{1}{4}\ ; \quad P((a,b)) = \frac{1}{4}$$

alle $a,b \in \{Z,K\}$.

$A :=$ "1. Wurf ergibt Kopf"

$B :=$ "2. Wurf ergibt Zahl".

Sind A und B unabhängig?

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}\left(\begin{array}{l}\text{"1. Wurf ergibt Kopf und}\\ \text{2. Wurf — " — Zahl"}\end{array}\right)$$

$$= \mathbb{P}(\{(K,Z)\})$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{(K,K), (K,Z)\})$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Analog

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{(K,Z), (Z,Z)\})$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B) &= \frac{1}{4} \\ &\overset{?}{=} \underbrace{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)}_{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \quad \checkmark\end{aligned}}$$

Bem.: Falls A stoch. unabh. von B so gilt

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$$

Bew.: $$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

(Unabhängigkeit)

$$= \frac{\mathbb{P}(A)\cdot \cancel{\mathbb{P}(B)}}{\cancel{\mathbb{P}(B)}}$$

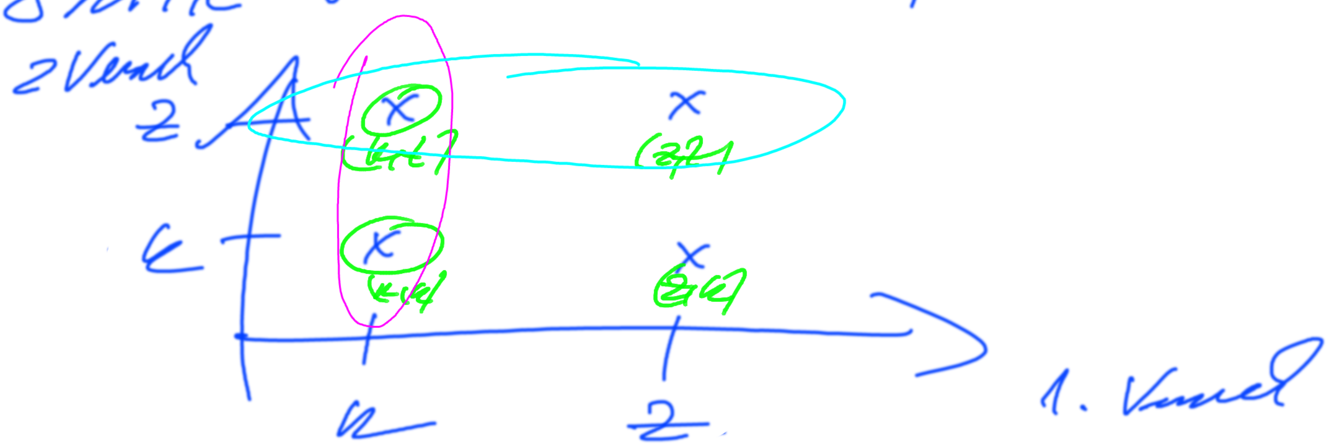
$$= \mathbb{P}(A) \quad \checkmark$$

$\square$

Analog: $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$

Bem.: Dies ist äquivalent zur Unabhängigkeit

Skizze für das Münzexperiment

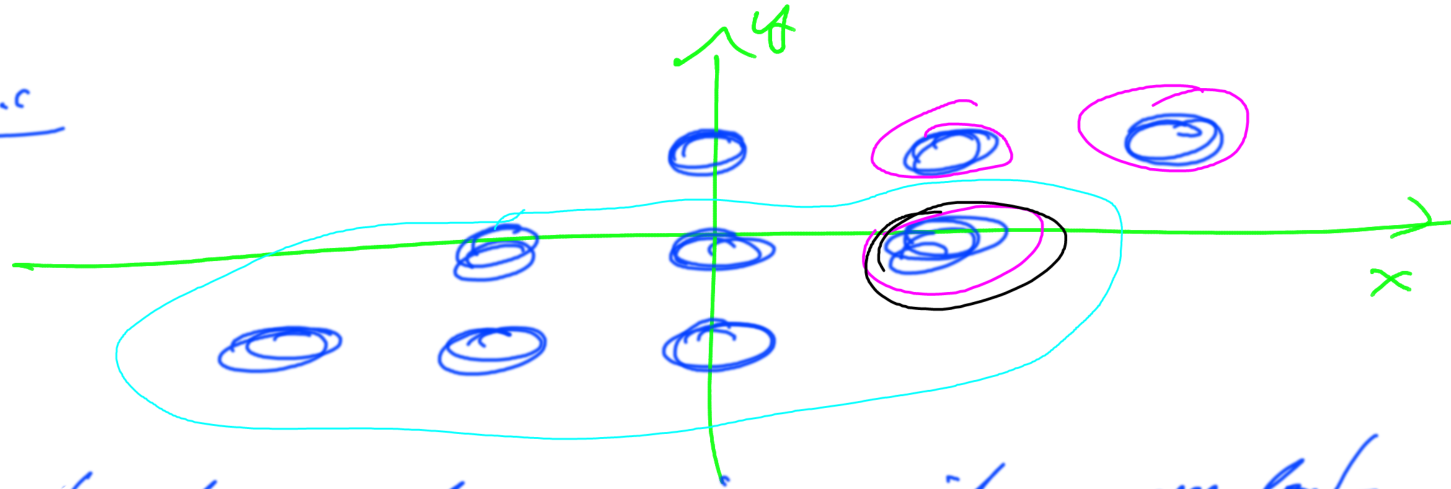


A = „1. Wurf Kopf"

B = „2. Wurf Zahl"

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Bsp.:



9 Kugeln werden wie gezeigt angeordnet. Wähle eine Kugel zufällig, und zwar gleich verteilt.

A := „x-Koordinate hat mindestens den Wert 1 oder größer"

B := „y-Koordinate ist höchstens null".

$A \cap B$

A und B unabhängig?

$P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$;

$P(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{9} \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

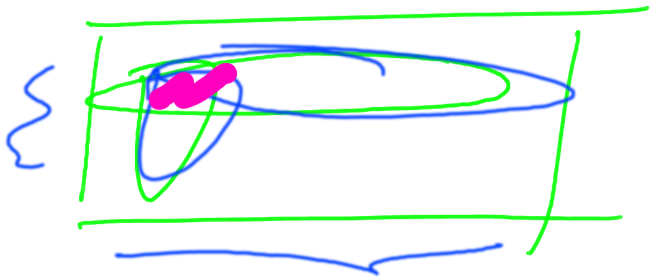
$$\lightning$$

A sind nicht stoch. unabhängig!

$$P(A \mid B) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{3} = P(A)$$

Stochastik für LmI und LA
Vorlesung vom 12.11.24

B



A

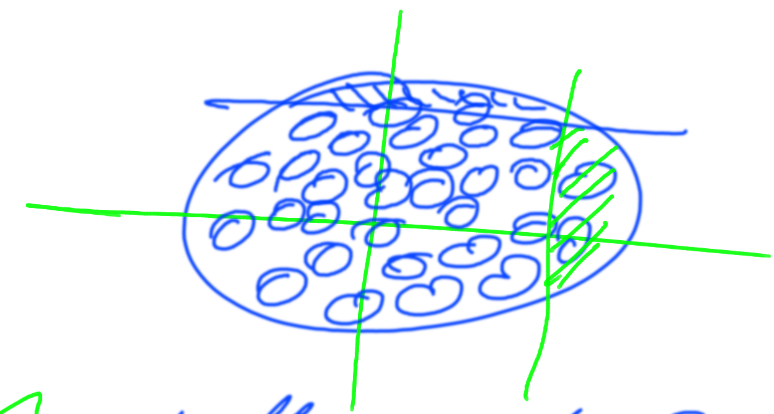
Unabhängigkeit ≙ Rechteckgestalt für Flächeninhalte

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Bem.: $\boxed{P(B \mid A) = P(B)}$

$\Longleftrightarrow$ A und B stoch. unabhängig.

Bsp.:



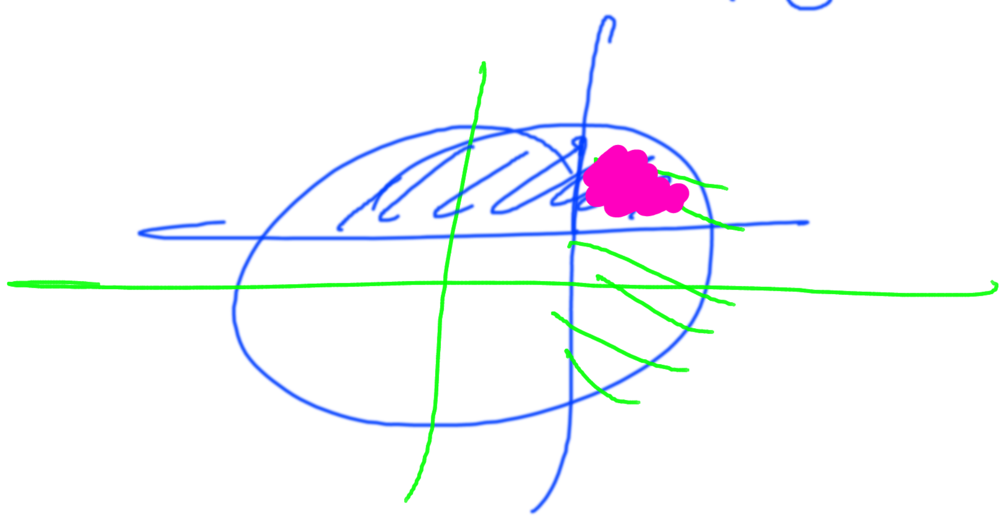
$A \triangleq$ „trifft jeweils 3/4 in x-Richtung"

$B \triangleq$ „trifft jeweils 3/4 in z-Richtung".

$$P(A) = P(B) = \frac{|\cdot|}{|\Omega|} = \frac{|\cdot|}{\pi}$$

$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$$

$$= \underbrace{P(A)}_{>0} \cdot \underbrace{P(B)}_{>0} > 0$$



$$P(A \cap B) = \frac{|\cdot|}{\pi} \neq \underbrace{\frac{|\cdot|}{\pi} \cdot \frac{|\cdot|}{\pi}}_{P(A) \cdot P(B)}$$

Def.: Die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ heißen unabhängig, falls $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Bem.: A_i, $i = 1..n$ heißen paarweise unab. $\Longleftrightarrow$ $\forall i \neq j$: $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$

Bem.: A_i, $i = 1..M$ stoch. unabh.

$\Longrightarrow$ paarw. unabh.

$\not\Longleftarrow$ i.A.

Beispiel: $\Omega = \{1,2,3,4\}$

$P(\{k\}) = \frac{1}{4}$

$A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{2,3\}$, $A_3 := \{1,3\}$.

$P(\underbrace{A_1 \cap A_2 \cap A_3}_{=\emptyset}) = P(\emptyset) = 0$

$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$

$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} = P(A_1) \cdot P(A_2)$

analog $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) P(A_3)$; $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3)$

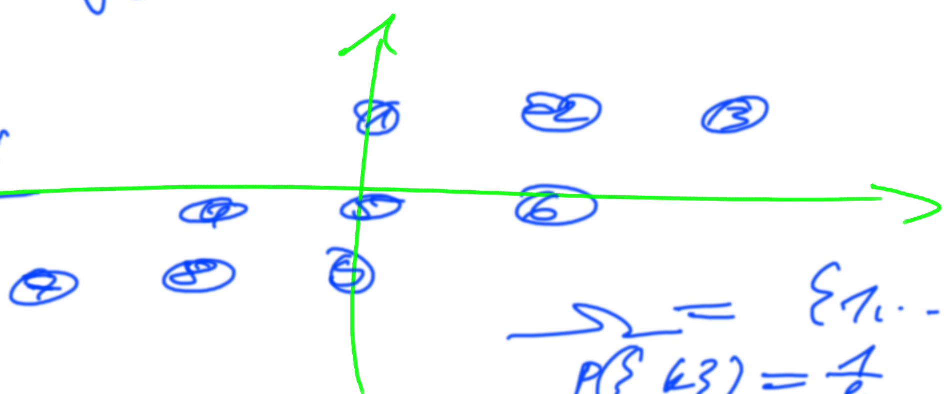
Def.: Eine Abbildung

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

nennen wir Zufallsvariable.

Bedeutung: X stellt eine Auszahlungsfunktion auf eine Wette dar.

Beispiel:



$\Omega = \{1, \dots, 9\}$

$P(\{k\}) = \frac{1}{9}$

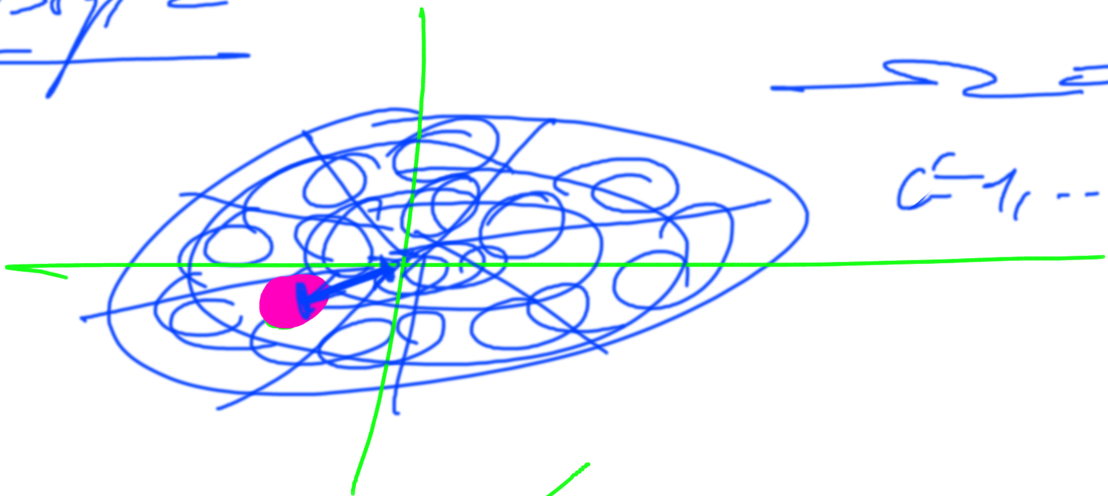
Werteauszählung:

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$X(\omega) =$ x-Koordinate von ω.

ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$X(\omega)$	0	1	2	-1	0	1	-2	-1	0

Bsp 2



$\Omega = \{\omega_i \mid i = 1, \dots, 100\}$.

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X(\omega) = (\text{„Abstand von } \omega \text{ zum Zentrum"})^p$$

$$= |\omega|^p, \quad p = 1, 2, -1.$$

Falls $\omega = \bullet$

$\rightsquigarrow X(\omega) = |\bullet|^p$

$$Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$Y(\omega) = x\text{-Koordinate von } \omega$$

$$= \omega_1 \quad \text{falls } \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

$$Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$Z(\omega) := X(\omega) \cdot Y(\omega)$$

Def.: Sei $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, so nennen wir

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\omega) \in \mathbb{R}$$

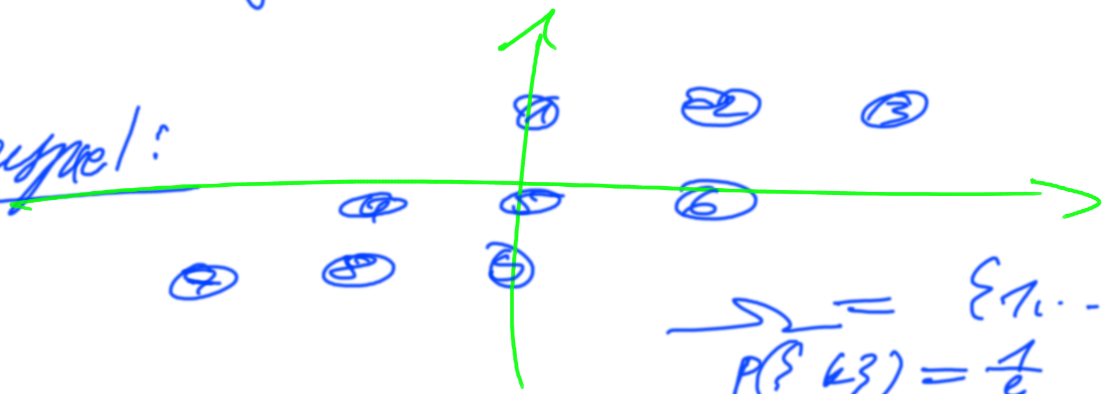
Erwartungswert von X. $\perp$

Interpretation: Mittlere Auszahlung von X gemittelt über alle Szenarien $\omega \in \Omega$ gewichtet mit der W-keit der Szenarien.

Bsp.:

Bedeutung: X stellt eine Auszahlungsfunktion auf eine Wette dar.

Beispiel:



$$\Omega = \{1, \dots, 9\}$$
$$P(\{k\}) = \frac{1}{9}$$

$$X(\omega) = (\omega_1)^2$$

ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$X(\omega)$	0	1	4	1	0	1	4	1	0

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \underbrace{P(\omega)}_{\text{hier: } \frac{1}{9}}$$

Spezial-Fall

$$= \frac{1}{9} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)$$

$$= \frac{1}{9} \cdot (0+1+4+1+0+1+4+1+0)$$

$$= \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$$

<u>Bem./Lemma:</u> Es sei X eine Zufallsvariable $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Es seien $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ die möglichen Ausprägungswerte von X, dann gilt

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{z_i} z_i \cdot \mathbb{P}(X = z_i).}$$

<u>Bsp. 5</u> (Forts.):

Welche z-Werte kommen als Ausprägungswerte von X vor?

$Z = Z_X = \{0, 1, 4\}$.

$\mathbb{P}(Z=0) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

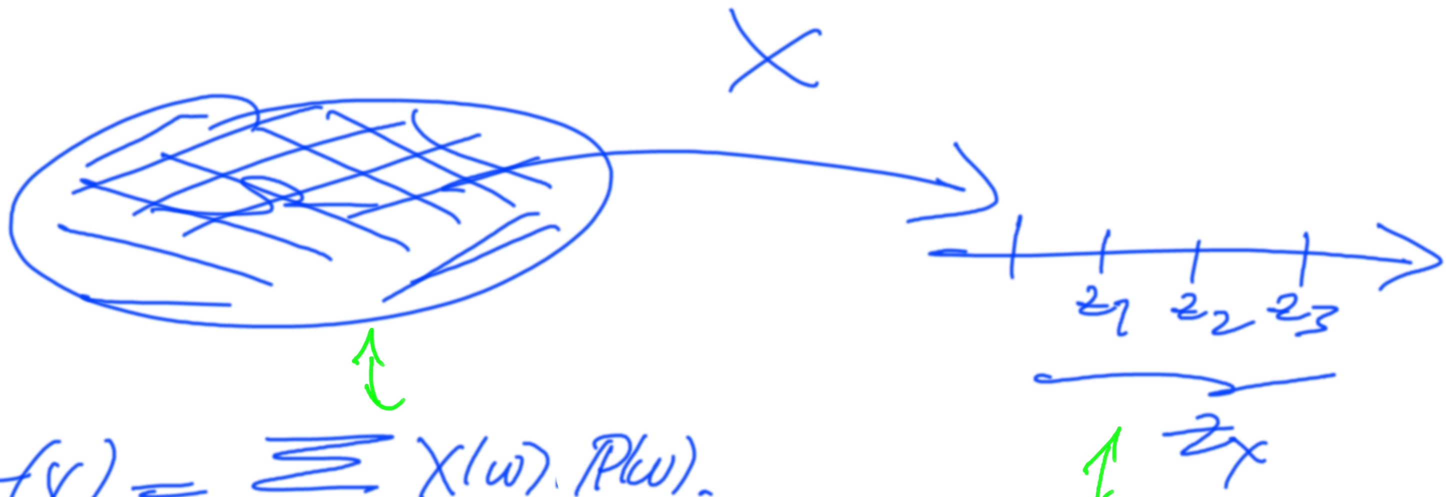
$\mathbb{P}(Z=1) = \frac{4}{9}$

$\mathbb{P}(Z=4) = \frac{2}{9}$.

Bsp: $\mathbb{E}(X) \overset{!}{=} \sum_{z\in Z_X} z\cdot\mathbb{P}(X=z)$

$$= \underbrace{\underbrace{0\cdot\frac{1}{3}}_{\text{„}X=0\text{"}}}_{z=0} + \underbrace{\underbrace{1\cdot\frac{4}{9}}_{\text{„}X=1\text{"}}}_{z=1} + \underbrace{\underbrace{4\cdot\frac{2}{9}}_{\text{„}X=4\text{"}}}_{z=4}$$

$$= 0\cdot\frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{9} = \frac{12}{9} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$



$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\cdot\mathbb{P}(\omega)$$

$$= \boxed{\sum_{z_i\in Z_X} z_i\cdot P(z_i)}$$

Bem. zur Schreibweise:

Schreiben auch

„$\mathbb{E}(X)$" = „m_X" = „μ_X" = „$\langle X\rangle$".

Def.: Sei $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable; $\mu_X = \mathbb{E}(X)$.
Dann heißt

$$\mathbb{E}\left([X - \mu_X]^2 \right) =: \mathbb{V}(X).$$

<u>Varianz</u> von X. ||

Bem.: $\omega \longrightarrow \underbrace{[X(\omega) - \mu_X]}_{\text{Abweichung der Auszahlung im Szenario } \omega \text{ von der mittleren Auszahlung}}{}^2 = \underline{Z(\omega)}$

"quadratische Abweichung ----- "

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(Z)$$

Interpretation: $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(Z)$ ist mittlere quadratische Abweichung vom Mittel.
$\leadsto$ Maß für die „Streuung" von X. ||

Bsp.: (Tests). X

$$X(\omega) = (\omega_1)^2$$

$$\mathbb{E}(X) = \mu_X = \frac{4}{3}.$$

ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$(X(\omega)-\mu_X)^2$	$\frac{16}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{64}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{64}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{16}{9}$

$$\mathbb{E}((X-\mu_X)^2)$$

$$= \sum_{\omega\in\Omega} (X-\mu_X)^2(\omega)\, \underbrace{P(\omega)}_{=1/9}$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{16}{9} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{16}{9}\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{180}{9}\right] = \frac{20}{9}.$$