Analysis für Informatik

Jun.-Prof. Dr. Alexander Fuchs-Kreiß

Wintersemester 2025/26
Version: 8. Oktober 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Mengenlehre, Abbildungen und logische Schlussfolgerungen

In diesem Kapitel möchten wir ganz kurz einige fundamentale Begriffe der Mathematik einführen. Wir werden uns konkret mit Mengen, Abbildungen und logischen Schlussfolgerungen befassen. Sie behandeln diese Begriffe ausführlicher in den kommenden Wochen in der Vorlesung *Diskrete Strukturen*. Wir beschränken uns deshalb hier auf kurze, übersichtsartige Definitionen, damit wir die Begriffe auf einem grundlegenden Level direkt benutzen können. Mit der Zeit werden Sie mehr Details darüber lernen und die Konzepte auch in Übungen verwenden, sodass Sie diese schon bald sicher verwenden können.

1.1 Grundlegendes über Mengen

Definition 1.1 (intuitive Definition von G. Cantor)**.** *Eine* **Menge** *ist die Zusammenfassung von Objekten (Elementen), die eine bestimmte Eigenschaft ("$P(x)$ gilt") haben.*

Wir schreiben $x \in M$, wenn x ein Element von M ist, d.h. zu M gehört, und $x \notin M$ andernfalls. Dies schreiben wir als

$$M = \{x \,:\, P(x) \textit{ ist wahr}\}, \textit{ also } x \in M \textit{ bedeutet genau, dass } P(x) \textit{ gilt.}$$

Definition 1.2. *Zwei Mengen A und B heißen* ***gleich****, wenn sie dieselben Elemente haben, d.h. jedes Element von A auch ein Element von B ist, und umgekehrt jedes Element von B auch in A ist.*

Bemerkung 1.3. *Typischerweise studieren wir $\{x \in X \,:\, P(x)\}$, d.h. die Menge aller x aus einer (großen) Menge X, für die die (mathematische) Aussage $P(x)$ wahr ist. X kann z.B. die Menge aller natürlichen, ganzen oder reellen Zahlen sein oder auch aller Punkte der Ebene (alle diese Begriffe werden noch definiert).*

Beispiel 1.4.

- *Wir können die Elemente einer Menge aufzählen, z.B.*
  - *$M = \{$Hund,Katze,Maus$\}$, in diesem Fall ist die Bedinung $P(x) =$„x* ist Hund, Katze oder Maus*".*
  - *$M = \{-1, 3, 7, 19\}$, in diesem Fall ist die Bedinung $P(x) =$„x* ist $-1, 3, 7, 19$*".*
- *Abstraktere Mengen definieren durch Angabe der Bedingung $P(x)$ wie folgt:*

$$M = \{n \in \mathbb{N} \,:\, n > 5\}$$

  alle natürlichen Zahlen größer als 5.

Definition 1.5. *Wir nenne A eine* **Teilmenge** *von B (Notation $A \subset B$), wenn alle Elemente von A auch zu B gehören.*

Definition 1.6. *Die leere Menge ist diejenige Menge, welche keine Elemente hat und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.*

Definition 1.7. *Aus gegebenen Mengen A, B konstruieren wir*

- *$A \cap B = \{x \,:\, x \in A \;\&\; x \in B\}$ Schnittmenge, Durchschnitt von A und B*
- *$A \cup B = \{x \,:\, x \in A \text{ oder } x \in B\}$ Vereinigung von A und B*

- $A \setminus B = \{x : x \in A \,\&\, x \notin B\}$ *Differenzmenge von A und B*

Die Mengen A und B heißen disjunkt, falls $A \cap B = \emptyset$, d.h. sie keine gemeinsamen Elemente haben.

Beispiel 1.8. *Es gilt*

$$\{a,b\} = \{a\} \cup \{b\} = \{a\} \cup \{a,b\} = \{b,a\}$$

und

$$\{1,2,3,4,5\} \setminus \{4,2,6\} = \{3,1,5\}.$$

Als letzte grundlegende Mengenoperation führen wir die Produktmenge ein, mit der sich z.B. die Euklidische Ebene aus der Zahlengeraden konstruieren lässt. Hierzu brauchen wir den Begriff des geordneten Paares.

Definition 1.9 (Geordnetees Paar). *Für die mathematischen Objekte a und b definieren wir das **geordnete Paar** $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$.*

Bemerkung 1.10. *Mengen keine* Reihenfolge *haben, sodass $\{0,1\} = \{1,0\}$. Geordnete Paare haben allerdings eine Reihenfolge, sodass $(1,0) \neq (0,1)$.*

Nun können wir Triple $(a,b,c) := ((a,b),c)$, Quadruple $(a,b,c,d) = ((a,b,c),d)$ usw. als geordnete Objekte mit analogen Gleichheitskriterien definieren.

Definition 1.11 (Produktmenge). *Für zwei Mengen A und B ist ihr **kartesisches Produkt** definiert als die Menge*

$$A \times B = \{(a,b)\ ,\ a \in A \,\&\, b \in B\} := \{x\ :\ \text{es existieren } a \in A \text{ und } b \in B \text{ mit } x = (a,b)\}.$$

1.2 Grundlegendes über Abbildungen

Definition 1.12 (Abbildung, Funktion). *Eine **Abbildung** f bildet eine Menge X in eine Menge Y ab. Wir schreiben $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$, d.h. dem Element $x \in X$ wird das Element $f(x) \in Y$ zugeordnet. Wir nennen*

$$F = \{(x, F(x))\ :\ x \in X\}$$

*den **Graphen** von f. Wir nennen $dmn(f) := X$ den **Definitionsbereich** und $im(f) := \{y \in Y\ :\ \text{existiert ein } x \in X \text{ mit } y = F(x)\}$ das **Bild** von f.*

*Wenn $Y = \mathbb{R}$, (eventuell $\mathbb{C}, \mathbb{R}^n$) nennen wir f oft **Funktion**.*

Bemerkung 1.13. *Der Wertebereich einer Funktion ist (für uns) nicht eindeutig festgelegt: jede Menge, die $im(f)$ enthält, kann als solcher genutzt werden.*

Beispiel 1.14. *Nun ein paar Illustrationen für Funktionen:*

a) $f_1 : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ *definiert durch* $f(a) = 4 - a$ *für* $a \in \{1,2,3\}$

b) $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *definiert als* $f(n) = 1$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, *eine konstante Funktion*

c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiert durch* $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x$, *die Identität (auf $\mathbb{R}$)*

d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiert durch* $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$, *die Standardparabel*

e) *$f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x$ wenn $x \geq 0$ und $f(x) = x^3$ sonst (dh $x < 0$), eine der vielen Funktionen/Abbildungen die nicht durch eine (einzige) geschlossene Formel dargestellt werden.*

Definition 1.15 (Bild und Urbild)**.** *Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und seien $X' \subset X$ und $Y' \subset Y$ gegeben. Dann definieren wir*

$$f(X') = \{f(x) \; : \; x \in X'\} \subset Y \text{ als } f\text{-Bild von } X', \text{ und}$$

$$f^{-1}(Y') = \{x \in X \; , \; f(x) \in Y'\}, \text{ das } f\text{-Urbild von } Y'.$$

Lemma 1.16. *Sei $f : X \to Y$ und beliebige $X_1, X_2 \subset X$ sowie $Y_1, Y_2 \subset Y$ gegeben. Dann gilt*

a) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$,

b) $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$,

c) $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$ *und*

d) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

Beweis. Wir zeigen hier nur a). Die anderen Teile behandeln Sie in den Übungen. Um zu zeigen, dass zwei Mengen gleich sind, müssen wir beweisen, dass alle Elemente der einen Menge auch in der anderen Menge enthalten sind. Wir tun dies in zwei Schritten:

$\underline{f(X_1 \cup X_2) \subset f(X_1) \cup f(X_2)}$:

Sei $y \in f(X_1 \cup X_2)$. Dies bedeutet, dass es ein $x \in X_1 \cup X_2$ gibt, sodass $y = f(x)$. Falls $x \in X_1$, so ist $y = f(x) \in f(X_1)$. Ist $x \in X_2$, folgt $y = f(x) \in f(X_2)$. Also muss $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$.

$\underline{f(X_1) \cup f(X_2) \subset f(X_1 \cup X_2)}$:

Sei nun $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$. Falls $y \in f(X_1)$, so existiert ein $x \in X_1$ und folglich ist $y = f(x) \in f(X_1 \cup X_2)$. Falls $y \in f(X_2)$, so existiert ein $x \in X_2$ und folglich ist ebenfalls $y = f(x) \in f(X_1 \cup X_2)$. □

Der letzte wichtig(st)e Begriff betrifft eine Operation speziell für Abbildungen, die es erlaubt weitere zu konstruieren.

Definition 1.17 (Verkettung)**.** *Seien Mengen X, Y, Z und Abbildungen $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ gegeben, dann definieren wir die **Verkettung** von g und f als*

$$g \circ f : X \to Z \text{ durch } (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ wenn } x \in X.$$

1.3 Grundlegendes über logische Schlussfolgerungen

Die Mathematik basiert auf grundlegenden als slebstverständlich erachteten Aussagen, die sogenannten Axiome. Ausgehend von diesen werden nach den Regeln der formalen Logik weitere Aussagen abgeleitet. Auf diese Weise entstehen Stück für Stück immer komplexere Aussagen. Das wichtigste Hilfsmittel ist dabei die Implikation.

Definition 1.18. *Wir schreiben $A \Rightarrow B$, falls die Korrektheit der Aussage A zur Folge hat, dass die Aussage B ebenfalls korrekt ist.*

Beispiel 1.19. *Seien A =„Es regnet“ und B =„Die Straße ist nass“. Immer wenn A zutrifft, dann trifft auch B zu. Wir schreiben also*

$$\text{Es regnet} \Rightarrow \text{Die Straße ist nass.}$$

Häufig interssieren wir uns nicht für festgelegte Aussagen A und B, sondern betrachten Bedingungen $P(x)$ und $Q(x)$, die für ein Element x gelten können oder nicht. Wir verstehen deshalb unter

$$P(x) \;\Rightarrow\; Q(x),$$

dass $Q(x)$ für ein Element x immer dann richtig ist, wenn $P(x)$ richtig ist.

Beispiel 1.20. *Die Implikation $x > 2 \;\Rightarrow\; x^2 > 4$ sagt aus, dass für jedes x, welches größer als 2 ist, sein Quadrat größer als 4 ist. Aber es gibt natürlich Zahlen x, die kleiner als 2 sind.*

Wir können Implikationen auch im Sinne der Mengenlehre verstehen.

Lemma 1.21. *Seien P und Q beliebige Bedingungen und definiere die Mengen*

$$A := \{x : P(x) \text{ ist wahr}\} \text{ und } B := \{x : Q(x) \text{ ist wahr}\}.$$

Die Implikation $P(x) \;\Rightarrow\; Q(x)$ ist gleichbedeutend mit $A \subset B$.

Beweis. Die Implikationb $P(x), \Rightarrow\; Q(x)$ bedeutet, dass für jedes x, für das $P(x)$ wahr ist, auch $Q(x)$ wahr ist. In anderen Worten heißt dies, dass jedes $x \in A$ auch in B enthalten ist. Dies ist die Definition der Aussage $A \subset B$. $\square$

Zum Abschluss dieses Abschnitts halten wir noch eine praktische Definition fest.

Definition 1.22 (Äquivalenz)**.** *Zwei Aussages A und B heißen* ***äquivalent****, falls $A \Rightarrow B$ und $A \Leftarrow B$ gelten. Wir schreiben dann $A \Leftrightarrow B$ und sagen A* gilt genau dann, wenn (gdw.) *B* gilt*.*

Obige Definition wenden wir analog auf Bedingungen $P(x)$ und $Q(x)$ an.

2 Reelle und komplexe Zahlen Zahlen

2.1 Reelle Zahlen

Die reellen Zahlen sind das Brot des Analytikers. Für die Konstruktion der reellen Zahlen siehe W.Rudins Buch “Analysis”, wir setzen hier die Existenz gleich voraus. Die reellen Zahlen sind eine Menge $\mathbb{R}$ mit

- zwei Rechenoperationen die jedem Paar $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zweier reeller Zahlen ein Element $x + y \in \mathbb{R}$ bzw. $x \cdot y \in \mathbb{R}$ zuordnen, und
- einer Ordnungs- (oder Vergleichsrelation) $<$,

sodass die im Folgenden allmählich diskutierten 13 Axiome gelten.

2.1.1 Körperaxiome

Es gibt 9 Körperaxiome und sie betreffen nur die Rechenoperationen (siehe auch Kapitel 2 im Buch Otto Forster, Analysis 1, Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen, elektronische CampusLizenz an der Uni Leipzig). Wie führen zunächst Quantoren ein, um die Körperaxiome zu formulieren. Sei $P(x)$ eine Bedingung und M eine Menge. Wir schreiben $\forall x \in M : P(x)$, falls $P(x)$ für alle $x \in M$ wahr ist. Außerdem schreiben wir $\exists x \in M : P(x)$, falls ein $x \in M$ existiert, für das $P(x)$ wahr ist. Die Körperaxiome sehen dann wie folgt aus.

	Addition		Multiplikation	
(AA)	$(x + y) + z = x + (y + z)$	(MA)	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ Assoziativgesetz
(AK)	$x + y = y + x$	(MK)	$x \cdot y = y \cdot x$	$\forall x, y \in \mathbb{R}$ Kommutativgesetz
(AN)	$\exists 0 \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : \ 0 + x = x$	(MN)	$\exists 1 \in \mathbb{R} : (1 \neq 0 \ \& \ \forall x \in \mathbb{R} : 1 \cdot x = x)$	neutrales Element
(AI)	$\forall x \in \mathbb{R} \, \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$	(MI)	$\forall x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0 \, \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$	inverses Element
(DG)	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$			$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ Distributivgesetz

Bemerkung 2.1.
- *Statt $x \cdot y$ schreiben wir oft einfach xy, wenn dadurch keine Doppeldeutigkeit entsteht.*
- *Die neutralen Elemente in (AN),(MN) sind eindeutig, dies macht die rechten Seiten in (AI),(MI) wohldefiniert.*
- *Inverse Elemente in (AI),(MI) sind eindeutig für gegebenes x (siehe Satz 2.2). Wir schreiben $-x$ bzw. x^{-1} für additives bzw. multiplikatives Inverses.*
- *Die 9 Körperaxiome charakterisieren $\mathbb{R}$ noch nicht, es gibt andere (noch zu diskutierende) Körper, welche diese ebenfalls erfüllen. Siehe, z.B. Beispiel 2.7. Ein ganz trivialer Körper ist $\{0\}$ mit den Operationen $0 + 0 = 0 = 0 \cdot 0$. Um dieses Beispiel auszuschliessen, fordern wir im Folgenden* **immer** $0 \neq 1$.

Satz 2.2. *Eindeutige Lösbarkeit von Gleichungen*

a) $\forall x, y \in \mathbb{R}\, \exists z \in \mathbb{R} : x+z = y$. Dieses z ist eindeutig und durch $z = y+(-x)$ gegeben.

b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0\, \exists z \in \mathbb{R} : xz = y$ Dieses z ist eindeutig und durch $z = yx^{-1}$ gegeben.

Wir schreiben $z = y - x$ für die Lösung in a) und $z = y/x$ für die Lösung in b).

Beweis. Zu a): Hausaufgabe
Zu b): Wir prüfen leicht, dass $z = yx^{-1}$ tatsächlich eine Lösung der Gleichung ist:

$$xz = x(yx^{-1}) \overset{MK}{=} (yx^{-1})x \overset{MA}{=} y(x^{-1}x) \overset{MI}{=} y \cdot 1 \overset{MN}{=} y.$$

Wir zeigen nun, dass $z = yx^{-1}$ auch die einzige Lösung ist. Angenommoen, z erfülle $x \cdot z = y$, dann erhalten wir durch Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit x^{-1} von links wieder eine Gleichheit, nämlich

$$x^{-1}(xz) = x^{-1}y.$$

Wir vertauschen die beiden Seiten und formen/vereinfachen die neue rechte Seite:

$$x^{-1} \cdot y = x^{-1}(xz) \overset{MA}{=} (x^{-1}x)z \overset{MI}{=} 1 \cdot z \overset{MN}{=} z.$$

Somit ist $x^{-1}y = yx^{-1}$ der einzige Kandidat für z. □

Bemerkung 2.3. *Satz 2.2 sagt aus, dass die (evtl. aus der Schule bekannten) Äquivalenzumformungen zulässig sind:*

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R} :\ x = y \Leftrightarrow x + z = y + z$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\, \forall z \in \mathbb{R} \setminus \{0\} :\ x = y \Leftrightarrow xz = yz$

Lemma 2.4. *a)* $\forall x \in \mathbb{R} : -(-x) = x$

b) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : (x^{-1} \neq 0\ \&\ (x^{-1})^{-1} = x)$

Beweis. Aus der Gleichung $-x + x = 0$ folgt durch Anwendung von Satz 2.2 a) mit $-x$ anstelle von x, x anstelle von z und 0 anstelle von y, dass $x = 0 - (-x) = -(-x)$. Die zweite Aussage kann analog bewiesen werden. □

Satz 2.5. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $0 \cdot x = 0$.*

Beweis. Es ist

$$0 \cdot x \overset{AN}{=} (0 + 0) \cdot x \overset{DG}{=} 0 \cdot x + 0 \cdot x.$$

Nach Satz 2.2 a) ist also

$$0 \cdot x = 0 \cdot x + (-(0 \cdot x)) = 0.$$

□

Korollar 2.6. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $(-1) \cdot x = -x$.*

Beweis. Nach Satz 2.5 gilt $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ und folglich

$$x+(-1)\cdot x = x\cdot 1+x\cdot(-1) = x\cdot(1+(-1)) = x\cdot 0 = 0 = x+(-x) \;\Rightarrow\; x+(-1)\cdot x = x+(-x).$$

Daraus folgt durch Addition mit $-x$ von links die Behauptung. □

Beispiel 2.7 (Ein endlicher Körper)**.** *Wir bezeichnen mit* $GF(3)$ *die Menge* $\{0, 1, 2\}$ *versehen mit folgenden Rechenregeln ("Restklassen modulo 3")*

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Damit ist z.B. $2^{-1} = 2$ *oder* $-1 = 2$*. Diese Kombinationen erfüllen die neun Körperaxiome. Dies kann von hand überprüft werden, ist aber mühsam (einfacher gestaltet sich dies z.B. für* $GF(2) = \{0, 1\}$ *mit entsprechenden Rechenregeln, von denen nur* $1 + 1 = 0$ *nicht unmittelbar aus (AN),(MN) oder Satz 2.5 folgt). Es zeigt sich, das für jede Primzahl* p *ein Körper* $GF(p)$ *mit* p *Elementen existiert, und die Gültigkeit der Körperaxiome (AA),(MA),(AK),(MK),(AN),(MN) und (DG) folgt leicht aus ähnlichen Aussagen für die die natürlichen Zahlen ohne lästiges Probieren aller Einzelfälle.)*

2.1.2 Anordnungsaxiome

Die bisher definierte Körperaxiome ermöglichen das Rechnen mit Gleichungen, für das Rechnen mit Ungleichungen brauchen wir den Begriff der (An)Ordnung (vergleiche Kapitel 3 in O.Forsters Buch). Primär muss man festlegen, welche Zahlen "postiv", d.h. größer als Null sind. Diese Zahlen müssen dann die im Folgenden angeführten Eigenschaften haben.

Es gibt eine Menge $\mathbb{P}$ von reellen Zahlen (d.h. $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$), so dass

(O.1) $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt *genau* eine der Aussagen: $x \in \mathbb{P}$, $x = 0$, $-x \in \mathbb{P}$ „Trichotomie"

(O.2) Wenn $x \in \mathbb{P}$ & $y \in \mathbb{P}$ dann $x + y \in \mathbb{P}$ „Abgeschlossenheit bezüglich Addition"

(O.3) Wenn $x \in \mathbb{P}$ & $y \in \mathbb{P}$ dann $xy \in \mathbb{P}$ „Abgeschlossenheit bezüglich Multiplikation"

Definition 2.8 (Positive Zahlen)**.** *Wir schreiben* $0 < x$ *und sagen* x ist **positiv***, falls* $x \in \mathbb{P}$*. Analog schreiben wir* $0 > x$ *und sagen* x ist **negativ***, falls* $-x \in \mathbb{P}$*.*

Allgemeiner schreiben wir $x < y$ *und sagen* x ist kleiner als y*, falls* $0 < y - x$*; wir shreiben* $x \leq y$*, falls* $x < y$ *oder* $x = y$*. Die Notationen* $x > y$ *und* $x \geq y$ *sind analog definiert.*

Bemerkung 2.9. *a) Jedes* $x \in \mathbb{R}$ *ist positiv, negativ oder null*

b) Nach Satz 2.2 gilt $x = y \Leftrightarrow 0 = y - x$*, also ist* $x < y$ *oder* $x > y$ *oder* $x = y$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$*.*

c) $x < y \Leftrightarrow -(x - y) = y - x \in \mathbb{P} \Leftrightarrow 0 > x - y \Leftrightarrow y > x$*, also ist* y *größer* x *genau dann wenn* x *kleiner* y *ist.*

Wir halten im Folgenden Lemma einige Rechenregeln zu Ungleichungen fest:

Lemma 2.10. *Für beliebige* $x, y, u, v, z \in \mathbb{R}$ *gilt*

a) $(x < y \,\&\, y < z) \Rightarrow x < z$ *(Transitivität)*

b) $x \leq y \,\&\, y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ *mit* $x < z$*, falls zudem* $x < y$ *oder* $y < z$*.*

c) *$x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$ (Translationsinvarianz)*

d) *$(x < y \;\&\; u < v) \Rightarrow x + u < y + v$*

e) *$x < y \Leftrightarrow -y < -x$ (Spiegelung)*

f) *Sei $x < y$. Dann gilt $(0 < z \Rightarrow zx < zy), (0 > z \Rightarrow zx > zy)$*

g) *$(0 \leq x < y \;\&\; 0 \leq u < v) \Rightarrow xu < yv$*