3.2

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Induktionsanfang Es gilt $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1}$$
$$\frac{1}{(2 \cdot 1 - 1)(2 \cdot 1 + 1)} = \frac{1}{2+1}$$
$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Induktionshypothese Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, nehmen wir an das:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1} \text{ Wahr ist.}$$

Induktionsbehauptung Zu zeigen ist $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} \\
&= \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} + \frac{n}{2n+1} \text{ einsetzen der Induktionshypothese} \\
&= \frac{1}{(2 \cdot n + 2 - 1)(2 \cdot n + 2 + 1)} + \frac{n}{2n+1} \\
&= \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{n}{2n+1} \\
&= \frac{1 + n(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{2n^2 + 3n + 1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{n+1}{2n+3} \\
&= \frac{n+1}{2n+2+1} \\
&= \frac{n+1}{2(n+1)+1}
\end{aligned}$$