Logik
Serie 3

Nikita Emanuel John Fehér, 3793479
Erik Thun, 3794446

13. Mai 2025
Mittwoch 09:15-10:45 Keitsch, Jamie; Gruppe e

H 3-1. Disjunktion und Folgerung
Seien $\varphi, \psi, \xi \in \mathcal{F}$. Beweisen bzw. Widerlegen Sie die nachfolgenden Aussagen.

a) $\varphi \vee \psi \models \xi$ gdw. $\varphi \models \xi$ <u>oder</u> $\psi \models \xi$

b) $\varphi \vee \psi \models \xi$ gdw. $\varphi \models \xi$ <u>und</u> $\psi \models \xi$

$$\mathrm{Mod}(\varphi \vee \psi) \subseteq \mathrm{Mod}(\xi) \iff \mathrm{Mod}(\varphi) \subseteq \mathrm{Mod}(\xi) \vee \mathrm{Mod}(\psi) \subseteq \mathrm{Mod}(\xi)$$

$$\mathrm{Mod}(\varphi) \cup \mathrm{Mod}(\psi) \subseteq \mathrm{Mod}(\xi) \iff$$

$$A \cup B \subseteq Z \iff A \subseteq Z \wedge B \subseteq Z$$

$\varphi = x$ $\quad \mathrm{Mod}(\varphi) = \{\beth_3, \beth_4\}$

$\psi = y$ $\quad \mathrm{Mod}(\psi) = \{\beth_2, \beth_4\}$

$\xi = y$ $\quad \mathrm{Mod}(\xi) = \{\beth_2, \beth_4\}$

$\mathrm{Mod}(\varphi \vee \psi) = \{\beth_2, \beth_3, \beth_4\}$

	x	y	$x \vee y$
$\beth_1$	0	0	0
$\beth_2$	0	1	1
$\beth_3$	1	0	1
$\beth_4$	1	1	1

$$\mathrm{Mod}(\psi) \subseteq \mathrm{Mod}(\xi) \vee \mathrm{Mod}(\varphi) \subseteq \mathrm{Mod}(\xi) \iff \{\beth_2\} \subseteq \{\beth_2\} \vee \{\beth_1\} \subseteq \{\beth_2\}$$

$$\vee \{\beth_1\} \subseteq \{\beth_2\}$$

Wahr $\vee$ ______ $\iff$ Wahr

Wahr $\iff$ Wahr

$$\mathrm{Mod}(\varphi \vee \psi) \subseteq \mathrm{Mod}(\xi) \iff \{\beth_1, \beth_2, \beth_3\} \not\subseteq \{\beth_2, \beth_3\}$$

$\iff$ Falsch

Wahr $\not\iff$ Falsch

b) $\varphi \vee \psi \models \varepsilon \Longleftrightarrow \mathrm{Mod}(\varphi \vee \psi) \subseteq \mathrm{Mod}(\varepsilon)$

$$\Longleftrightarrow \mathrm{Mod}(\varphi) \cup \mathrm{Mod}(\psi) \subseteq \mathrm{Mod}(\varepsilon)$$

$$\Longleftrightarrow A \cup B \subseteq Z$$

$$\boxed{\begin{array}{l} A := \mathrm{Mod}(\varphi) \\ B := \mathrm{Mod}(\psi) \\ Z := \mathrm{Mod}(\varepsilon) \end{array}}$$

$$\Longleftrightarrow \exists x \in (A \cup B) \Longrightarrow \exists x \in Z$$

$$\Longleftrightarrow \exists x \in A \vee \exists x \in B \Longrightarrow \exists x \in Z$$

$$\Longleftrightarrow \neg(\exists x \in A \vee \exists x \in B) \vee \exists x \in Z$$

$$\Longleftrightarrow (\neg \exists x \in A \wedge \neg \exists x \in B) \vee \exists x \in Z$$

$$\Longleftrightarrow (\neg \exists x \in A \vee \exists x \in Z) \wedge (\neg \exists x \in B \vee \exists x \in Z)$$

$$\Longleftrightarrow \exists x \in A \Longrightarrow \exists x \in Z \wedge \exists x \in B \Longrightarrow \exists x \in Z$$

$$\Longleftrightarrow A \subseteq Z \wedge B \subseteq Z$$

$$\Longleftrightarrow \mathrm{Mod}(\varphi) \subseteq \mathrm{Mod}(\varepsilon) \text{ und } \mathrm{Mod}(\psi) \subseteq \mathrm{Mod}(\varepsilon)$$

$$\Longleftrightarrow \varphi \models \varepsilon \ \underline{\text{und}} \ \psi \models \varepsilon$$

H 3-2. Folgerung und Unerfüllbarkeit
Gegeben eine Menge $T \subseteq \mathcal{F}$ und eine Formel $\varphi \in \mathcal{F}$. Beweisen Sie:

$$T \models \varphi \qquad \text{gdw.} \qquad T \cup \{\neg\varphi\} \text{ ist unerfüllbar}$$

	x ($\mathcal{J}_{3,4}$)	y ($\mathcal{J}_{2,3,4}$)	$x \vee y$
$\mathcal{J}_1$	0	0	0
$\mathcal{J}_2$	0	1	1
$\mathcal{J}_3$	1	0	1
$\mathcal{J}_4$	1	1	1

$\{x\} \cup \{\neg(x \vee y)\}$ $\underline{\subseteq \mathcal{F}}$ erfüllbar wenn alle ellement mit 1 Belegung wahr sind

$\{x, \neg x \wedge \neg y\}$

„$\Rightarrow$"

$\mathrm{Mod}(T) \subseteq \mathrm{Mod}(\varphi) \Rightarrow \{\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_k\} \subseteq \{\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_k, \dots, \mathcal{J}_n\}$

$\Rightarrow \{\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_k\} \cup \neg\{\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_k, \dots, \mathcal{J}_n\} = \{\mathcal{J}_1, \neg\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_k, \neg\mathcal{J}_k, \dots, \neg\mathcal{J}_n\}$

$\Rightarrow T \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar

Da „T" nur die möglichen Belegungen „$\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_k$" besitzt und all diese keine möglichen Belegungen für die Vereinigung sind, kann es keine Belegung für diese geben.

„$\Leftarrow$"

Widerspruchsbeweis:

beliebig $\mathcal{J} : \mathcal{J} \models T$

Angenommen $\mathcal{J} \not\models \varphi \Rightarrow \mathcal{J} \models \neg\varphi$

$\Rightarrow \mathcal{J}$ erfüllt T und $\neg\varphi$

$\Rightarrow \mathcal{J}$ erfüllt $T \cup \{\neg\varphi\}$ ↯ soll unerfüllbar sein

$\Rightarrow$ jedes $\mathcal{J}$ das T erfüllt, erfüllt auch φ

$\Rightarrow \mathrm{Mod}(T) \subseteq \mathrm{Mod}(\varphi)$

$\Rightarrow T \models \varphi$

$\square$

H 3-3. Kompaktheitsatz und Endlichkeitssatz

Kompaktheitssatz. Gegeben eine Formelmenge $T \subseteq \mathcal{F}$. Es gilt:

$$T \text{ erfüllbar gdw. jede endliche Teilmenge } T' \subseteq T \text{ ist erfüllbar}$$

Endlichkeitssatz. Gegeben $T \subseteq \mathcal{F}$ und $\varphi \in \mathcal{F}$. Es gilt:

$$T \models \varphi \text{ gdw. es existiert endliche Teilmenge } T' \subseteq T \text{ mit } T' \models \varphi$$

Zeigen Sie, daß aus dem Kompaktheitssatz der Endlichkeitssatz folgt.

Kompakt $\Rightarrow$ Endlich

Sei $T \models \varphi$, in welchen es keine (endliche) Teilmenge $T' \subseteq T$ mit $T' \models \varphi$ gibt.

$\Rightarrow$ Da jedes $T' \subseteq T$ $\neg\varphi$ erfüllt muss auch $T \cup \{\neg\varphi\}$ erfüllbar sein.

$\Rightarrow$ Es gibt ein Modell, welches T und $\neg\varphi$ erfüllt $\lightning$

$\Rightarrow$ steht im Widerspruch zu $T \models \varphi$, also muss eine (endliche) Teilmenge $T' \subseteq T$ mit $T' \models \varphi$ geben

H 3-4. Hornformeln und Schnitteigenschaft

√ a) Gegeben die beiden nachfolgenden Formeln φ und ψ. Sind die Formeln Horn? Falls nein, sind sie semantisch äquivalent zu einer Hornformel? Kurze Begründung.
$\varphi = (A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3) \wedge (\neg A_1 \vee A_2 \vee A_3) \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3)$
$\psi = (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \vee (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3)$

b) Beweisen Sie, daß jede Hornformel die Schnitteigenschaft erfüllt.

a)

A_1	A_2	A_3	φ	ψ
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0

$(A_1 \vee A_2 \vee A_3) \wedge (A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3)$
$\wedge (\neg A_1 \vee A_2 \vee A_3) \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3)$
$\wedge (\neg A_1 \vee \neg A_2 \neg A_3)$

φ ist nicht Horn, da bereits in KNF,
$\Rightarrow$ nicht semantisch äquivalent zu Horn
ψ ist nicht Horn, KNF ist auch nicht Horn.
$\Rightarrow$ nicht semantisch äquivalent zu Horn

b) Alle Horn Formeln sind der Form: $A, B \in$ Atom, $i, j, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\varphi = (\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_i \vee B_1) \wedge (\neg A_j \vee \ldots \vee \neg A_k \vee B_2) \wedge \ldots$$

Dabei können die Disjunkte der Form sein:

- $\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_i \vee B$
- B
- $\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_i$

diese Formen wir um:

- $\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_i \vee B \Rightarrow (A_1 \wedge \ldots \wedge A_i) \rightarrow B$
- $B \Rightarrow 1 \rightarrow B$
- $\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_i \Rightarrow (A_1 \wedge \ldots \wedge A_i) \rightarrow 0$

$\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2 \in Mod(\varphi)$

$\mathfrak{I} := \mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2$

Wenn $\mathfrak{I}$ durch A erfüllt $\Rightarrow$ $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$ durch A erfüllt

Ist $\mathfrak{I} \in Mod(\varphi)$?

wir Betrachten belibige Klausel

$(A_1 \wedge \ldots \wedge A_i) \rightarrow B$

Für $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$ erfüllen Formel

$x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq i$

Fall 1 A_x falsch in $\mathfrak{I}$

$\Rightarrow$ Implikation erfüllt

Fall 2 Alle A_x wahr in $\mathfrak{I}$

$\Rightarrow$ sind auch in $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$ wahr

$\Rightarrow$ B auch wahr da $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$ Modelle

Da das für alle Klauseln gilt

$\Rightarrow$ $\mathfrak{I}$ Model von φ

$\Rightarrow$ alle Hornformeln erfüllen die Schnitteigenschaft

$\square$

H 3-5. Implikative Form und Markierungsalgorithmus

a) Überführen Sie die nachfolgende Hornformel in ihre implikative Form.

$$(A_1 \vee \neg A_4) \wedge \neg A_1 \wedge A_4 \wedge (\neg A_3 \vee A_2 \vee \neg A_4) \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_2)$$

b) Wenden Sie den Markierungsalgorithmus auf nachfolgende Formel an. Geben Sie im Erfüllbarkeitsfalle ein Modell an.

$$(A_1 \wedge A_6 \rightarrow A_3) \wedge (A_4 \rightarrow 0) \wedge (A_3 \wedge A_6 \rightarrow A_2) \wedge (A_6 \rightarrow A_1) \wedge (A_5 \wedge A_2 \rightarrow A_4) \wedge (1 \rightarrow A_6)$$

a) $A_1 \vee \neg A_4 \equiv \neg A_4 \vee A_1$

$\equiv A_4 \rightarrow A_1$

$\neg A_1 \equiv \neg A_1 \vee 0$

$\equiv A_1 \rightarrow 0$

$A_4 \equiv A_4 \vee 0$

$\equiv 0 \vee A_4$

$\equiv \neg 1 \vee A_4$

$\equiv 1 \rightarrow A_4$

$1 \rightarrow A_4$

$0 \vee A_4$

$\neg A_3 \vee A_2 \vee \neg A_4 \equiv \neg A_3 \vee \neg A_4 \vee A_2$

$\equiv \neg\neg(\neg A_3 \vee \neg A_4) \vee A_2$

$\equiv \neg(A_3 \wedge A_4) \vee A_2$

$\equiv (A_3 \wedge A_4) \rightarrow A_2$

$\neg A_1 \vee \neg A_2 \equiv \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee 0$

$\equiv \neg\neg(\neg A_1 \vee \neg A_2) \vee 0$

$\equiv \neg(A_1 \wedge A_2) \vee 0$

$\equiv (A_1 \wedge A_2) \rightarrow 0$

b)

$$(A_1 \wedge A_6 \to A_3) \wedge (A_4 \to 0) \wedge (A_3 \wedge A_6 \to A_2) \wedge (A_6 \to A_1) \wedge (A_5 \wedge A_2 \to A_4) \wedge (1 \to A_6)$$

$$(A_1 \wedge A_6 \to A_3) \wedge (A_4 \to 0) \wedge (A_3 \wedge A_6 \to A_2) \wedge (A_6 \to A_1) \wedge (A_5 \wedge A_2 \to A_4) \wedge (1 \to A_6)$$

$$(A_1 \wedge A_6 \to A_3) \wedge (A_4 \to 0) \wedge (A_3 \wedge A_6 \to A_2) \wedge (A_6 \to A_1) \wedge (A_5 \wedge A_2 \to A_4) \wedge (1 \to A_6)$$

$$(A_1 \wedge A_6 \to A_3) \wedge (A_4 \to 0) \wedge (A_3 \wedge A_6 \to A_2) \wedge (A_6 \to A_1) \wedge (A_5 \wedge A_2 \to A_4) \wedge (1 \to A_6)$$

$$(A_1 \wedge A_6 \to A_3) \wedge (A_4 \to 0) \wedge (A_3 \wedge A_6 \to A_2) \wedge (A_6 \to A_1) \wedge (A_5 \wedge A_2 \to A_4) \wedge (1 \to A_6)$$

$$(A_1 \wedge A_6 \to A_3) \wedge (A_4 \to 0) \wedge (A_3 \wedge A_6 \to A_2) \wedge (A_6 \to A_1) \wedge (A_5 \wedge A_2 \to A_4) \wedge (1 \to A_6)$$

$$\{A_1, A_2, A_3, A_6\}$$

H 3-6. Resolution

In VL4 haben wir den Begriff der Resolvente kennengelernt. Ein Operator, der zu einer Klauselmenge M alle möglichen (Einschritt)Resolventen aus M hinzufügt wäre:

$$\mathrm{Res}(M) = M \cup \{R \mid R \text{ ist Resolvente zweier Klauseln aus } M\}$$

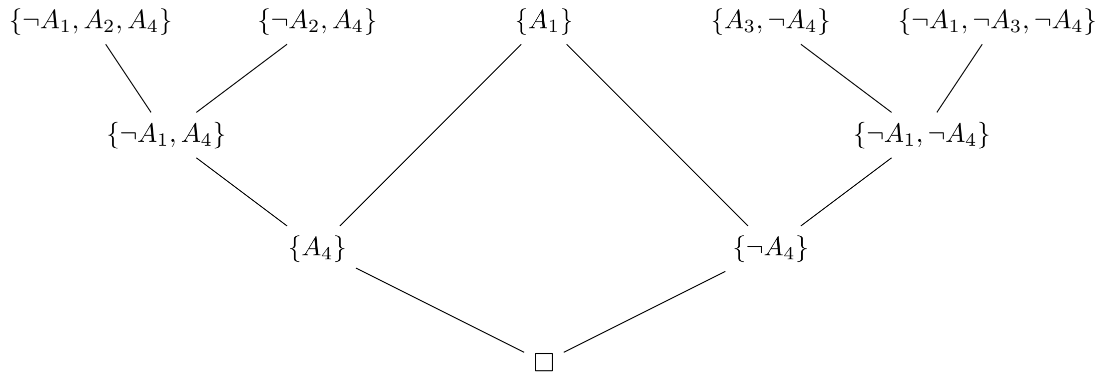
Dies können wir nun iterieren und erhalten die Resolutionshülle $\mathrm{Res}^*(M)$ wie folgt.

$$\mathrm{Res}^0(M) = M \qquad \mathrm{Res}^{i+1}(M) = \mathrm{Res}(\mathrm{Res}^i(M)) \qquad \mathrm{Res}^*(M) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Res}^i(M)$$

Wir werden in VL5 den berühmten Resolutionssatz zeigen, nämlich:

$$M \text{ unerfüllbar gdw. } \square \in \mathrm{Res}^*(M)$$

Das erfolgreiche Ableiten der leeren Klausel wird üblicherweise graphisch veranschaulicht. Beispiel: $M = \{\{A_1\}, \{\neg A_2, A_4\}, \{\neg A_1, A_2, A_4\}, \{A_3, \neg A_4\}, \{\neg A_1, \neg A_3, \neg A_4\}\}$



a) Überprüfen Sie graphisch die Erfüllbarkeit der Menge

$$M = \{\{A_1, A_2, \neg A_3\}, \{\neg A_2\}, \{A_2, A_3, A_1\}, \{A_3\}, \{\neg A_1, \neg A_3, A_2\}\}$$