# Übungsblatt 10

1) Die Funktion (zickzack) : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$\text{zickzack}(x) = \left|[x + \frac{1}{2}] - x\right|, \text{ wobei } [\cdot] \text{ der ganze Teil aus Beispiel 4.1.c) ist.}$$

Zeichnen Sie den Graph der Funktion zickzack und beweisen Sie:

a) $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \text{zickzack}(x) = |x|$,

b) $\forall x \in \mathbb{R}\, \forall k \in \mathbb{Z} : \text{zickzack}(x + k) = \text{zickzack}(x)$,

c) zickzack ist stetig auf $\mathbb{R}$.

$2 + 1 + 3^*$ Punkte

2) Finden Sie eine stetige Funktion

a) $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$, die unbeschränkt ist

b) $g : [0, 1) \to \mathbb{R}$, die beschränkt ist, aber ihr Supremum nicht annimmt

c) $h : [0, 1) \to \mathbb{R}$, die beschränkt ist, aber weder ihr Supremum noch ihr Infinimum annimmt.

$1 + 1 + 3^*$ Punkte

3) Gegeben seien auf $X = (-2\pi, 2\pi)$ die Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} \cos(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Skizzieren Sie die Graphen von $f$ und $g$, und entscheiden Sie, in welchen $x \in X$ die Funktion $f$ bzw. die Funktion $g$ stetig ist (Begründen Sie Ihre Aussagen sorgfältig !). *[Hinweis: Sie sollten wissen, für welche Argument* sin *bzw* cos *die Werte* 0 *bzw* 1 *haben.*

$5^*$ *Punkte*

4) a) *Zeigen Sie die Existenz eines $x > 0$ mit $\cos(x + \exp(x^2)) = x^3 - \frac{1}{x}$.* 2 *Punkte*

b) *Beweisen Sie: für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt $|\exp(it)| = 1$ und für jedes $z \in \mathbb{C}$ : $|\exp(z)| = \exp(Re(z))$* $2^*$ *Punkte*

5) *Sei $a \in X \subset \mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass für jede Folge $(a_n)_n$ in $X$, die gegen $a$ konvergiert die Folge $(f(a_n))_n$ auch konvergiert (mit einem beliebigen reellen Grenzwert). Muss dann $f$ in $a$ stetig sein? Geben Sie einen vollständigen Beweis oder ein Gegenbeispiel.* [Hinweis ÜZ 7.1.b) könnte helfen.] $3^*$ *Punkte*

6) a) *Beweisen Sie: wenn $x > 0$ und $p, q \in \mathbb{R}$ dann gilt $(x^p)^q = x^{pq}$.* *1 Punkt*

b) *Bestimmen und klassifizieren Sie (mit den Methoden der Differentialrechnung) die lokalen Maximal und Minimalstellen der Funktion*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x + 2025.$$

3 *Punkte*

Wie immer, begründen Sie Ihre Aussagen sorgfältig! Skizzen können und sollen der Lösungsfindung dienen, sind aber keine Beweise.

**Bitte geben Sie pro Lösungsteam nur EINE Lösung ab !!!**, die Korrekturen verzögern sich sonst unnötig. Danke.
**Nach der Vorlesung, bzw 17:30 abgegebene Lösungen werden nicht voll bewertet**

---

**Abgabe** am 9.1.2025 11:00 online(Moodlekurs) oder 17:15 HS2 zur Vorlesung.