Def.:

Sei V ein $\mathbb{R}$-VR.

Eine Abb.: $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt Skalarprodukt $:\Leftrightarrow$

(i) $\langle x_1 + x_2 , y \rangle = \langle x_1 , y \rangle + \langle x_2 , y \rangle \quad \forall x_1, x_2, y \in V$

(ii) $\langle \lambda \cdot x , y \rangle = \lambda \cdot \langle x , y \rangle \quad \forall x, y \in V, \lambda \in K$

(iii) $\langle x , y_1 + y_2 \rangle = \langle x , y_1 \rangle + \langle x , y_2) \quad \forall x, y_1, y_2 \in V$

(iv) $\langle x , \lambda \cdot y \rangle = \lambda \cdot \langle x , y \rangle \quad \forall x, y \in V, \lambda \in K$

(v) $\langle x , y \rangle = \langle y , x \rangle \quad \forall x, y \in V$

(vi) $\langle x , x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in V$

(vii) $\langle x , x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \forall x \in V$

In diesem Fall heißt $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ euklidischer VR.

(i) - (iv) : Bilinearität

(v) : Symmetri

(vi) - (vii) : Positive Definitheit

Def.:

Sei $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ ein euklidischer VR.

$\forall v \in V$: $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ heißt Norm von v.

Bsp.:

(1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$: $\langle x, y \rangle := x^t \cdot y = x_1 \cdot y_1 + \ldots + x_n \cdot y_n$ ist ein SKP.

(2) $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$: $\langle x, y \rangle := x^t \cdot \bar{y} = x_1 \cdot \bar{y}_1 + \ldots + x_n \cdot \bar{y}_n$ ist ein SKP.

$\forall x \in \mathbb{C}^n$: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

(3) $\forall f, g \in C[a,b]$: $\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$ ist ein SKP.

$(C[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig} \})$

Def.:

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer VR und seien $v_1, \dots, v_n \in V$.

(i) $(v_1, \dots, v_n)$ heißt orthogonal

$:\Leftrightarrow v_i \perp v_j :\Leftrightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall i,j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$

(ii) $(v_1, \dots, v_n)$ heißt orthonormal

$:\Leftrightarrow (v_1, \dots, v_n)$ ist orthogonal und $\|v_i\| = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$

(iii) $(v_1, \dots, v_n)$ heißt Orthonormalbasis

$:\Leftrightarrow (v_1, \dots, v_n)$ ist orthonormal und $(v_1, \dots, v_n)$ ist eine Basis von V.

(iv) Seien $U, W \subseteq V$ Unterräume.

$U \perp W :\Leftrightarrow \forall u \in U \; \forall w \in W: \langle u, w \rangle = 0$

In diesem Fall heißen U und W orthogonal.

(v) Seien $U_1, \dots, U_n \subseteq V$ Unterräume.

$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n :\Leftrightarrow V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n \wedge U_i \perp U_j \quad \forall i,j = 1, \dots, n, \; i \neq j.$

In diesem Fall heißt die direkte Summe $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ orthogonal.

Satz:

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer VR und sei $(v_1, \dots, v_n)$ orthogonal und $v_i \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$.

Dann gilt: $(v_1, \dots, v_n)$ ist l.u.

Bew.:

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ und gelte $\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n = 0$

$\Rightarrow \langle \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n, v_i \rangle = \langle 0, v_i \rangle = 0 \quad , i = 1, \dots, n$

und $\langle \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n, v_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \langle v_j, v_i \rangle = \lambda_i \cdot \underbrace{\|v_i\|^2}_{\neq 0}$

$\Rightarrow \lambda_i = 0 \quad , i = 1, \dots, n.$ $\square$

Satz:

Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und sei $U \subseteq V$ ein Unterraum.

Dann gilt:

$V = U \textcircled{\perp} U^{\perp}$ und $\dim V = \dim U + \dim U^{\perp}$.

Satz:

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endl. dim. euklidischer VR und sei $W \subseteq V$ ein U.R.

mit Orthonormalbasis $(w_1, \dots, w_m)$.

Dann gibt es eine Ergänzung $(w_1, \dots, w_m, w_{m+1}, \dots, w_n)$ von V.

wobei $(w_1, \dots, w_n)$ eine Orthonormalbasis von U ist.

Satz (Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren)

Seien $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}^n$ linear unabhängig.

Dann ex. eine Orthonormalbasis $v_1, \dots, v_n$ von $\operatorname{span}(w_1, \dots, w_n)$.

Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ erhält man wie folgt:

$$v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$$

$$v_2' = w_2 - \langle v_1, w_2 \rangle \cdot v_1$$

$$v_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|}$$

$$v_3' = w_3 - \langle v_1, w_3 \rangle \cdot v_1 - \langle v_2, w_3 \rangle \cdot v_2$$

$$v_3 = \frac{v_3'}{\|v_3'\|}$$

$$\vdots$$

$$v_n' = w_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_i, w_n \rangle \cdot v_i$$

$$v_n = \frac{v_n'}{\|v_n'\|}$$

Allgemein:

$$v_j' = w_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle v_i, w_j \rangle \cdot v_i$$

$$v_j = \frac{v_j'}{\|v_j'\|}$$