Klausur zur Linearen Algebra I 02.02.2007

Hinweise: (vor der Bearbeitung der Klausur lesen!)

1. Tragen Sie auf diesem Deckblatt und auf jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer deutlich lesbar ein.
2. Unterschreiben Sie die Klausur auf diesem Deckblatt (s.u.).
3. Prüfen Sie, ob Sie alle 10 Aufgaben erhalten haben.
4. Soweit möglich, bearbeiten Sie jede Aufgabe auf der zugehörigen Seite einschließlich der Rückseite des vorherigen Blattes. Falls dies nicht ausreicht, können Sie von der Aufsicht zusätzliche Blätter bekommen. Schreiben Sie auf die Zusatzblätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer und die Nummer der bearbeiteten Aufgabe.
5. Zugelassene Hilfsmittel: KEINE, ausgenommen natürlich Schreibgerät (kein Bleistift) und Lineal bzw. Geodreieck.
6. Halten Sie bitte Studentenausweis und Personalausweis bereit.
7. Klausurbeginn: 14.00 Uhr. Die Bearbeitungszeit beträgt 2 Stunden.
8. Die Klausurergebnisse werden voraussichtlich ab 05.02.07 auf der Seite http://www.uni-due.de/ hm0019/lehre/index.html veröffentlicht.
9. Klausureinsicht: Mi., 05.02.07, 12.00 - 13.00 Uhr im Raum T03 R02 D82

Name, Vorname: (deutlich!) ....

Matrikelnr.: ....

Unterschrift: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$
mögliche Punkte	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	100
erreichte Punkte											

Klausur bestanden: ☐ **nicht bestanden:** ☐

Name, Vorname: **Matrikelnr.:**

Aufgabe 1:
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Pro richtiger Antwort erhalten sei einen Punkt, pro falscher Antwort erhalten sei einen Minuspunkt, unbeantwortete Fragen werden nicht gewertet. Ihre Gesamtpunktzahl wird, falls sie negativ sein sollte, auf Null angehoben.

Sei im folgenden V in $\mathbb{R}$-Vektorraum, $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, A eine $n \times n$-Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$.

- Es gibt 5 Vektoren im $\mathbb{R}^4$, die linear unabhängig sind. Ja: ☐ Nein: ☒
- Es gibt 4 Vektoren im $\mathbb{R}^5$, die linear unabhängig sind. Ja: ☒ Nein: ☐
- Ist $M \subset V$ linear unabhängig und V unendlichdimensional, so ist jede Teilenge $M_1 \subset M$ auch linear unabhängig. Ja: ☒ Nein: ☐
- Es gibt eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $\dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Bild}(f) = 4$ Ja: ☐ Nein: ☒
- Ist die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ surjektiv, so ist $\dim \operatorname{Ker}(f)$ höchstens 2. Ja: ☒ Nein: ☐
- Gilt für $x, y \in V$ und eine lineare Abbildung $f : V \to V$ die Aussage $f(x) = f(y)$, so sind x und y linear abhängig. Ja: ☐ Nein: ☒
- Sind U_1, U_2 und $U_1 \cup U_2$ Untervektorräume von V, so gilt $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$. Ja: ☒ Nein: ☐
- Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung, so sind $f(U)$ und $f^{-1}(U)$ Untervektorräume von V. Ja: ☒ Nein: ☐
- Ist A mit $\operatorname{rk}(A) < n$ gegeben, so ist das Gleichungssystem $Ax = b$ für alle $b \in \mathbb{R}^n$ lösbar. Ja: ☐ Nein: ☒
- Ist $b = 0$, so ist das Gleichungssystem $Ax = b$ für alle Matrizen A lösbar. Ja: ☒ Nein: ☐

Name, Vorname: **Matrikelnr.:**

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 6 & 6 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Also hat das Gleichungssystem keine Lösung.

Algorithmus: 6P. Für richtiges Ablesen des Ergebnisses aus dem (evtl. falschen) Algorithmusendprodukt: 4P.

Name, Vorname: **Matrikelnr.:**

Augabe 3:
Es seien x, y, z drei Vektoren in einem $\mathbb{F}_2$-Vektorraum. Gilt die folgende Äquivalenz ?

$$\{x, y, z\} \text{ linear unabhängig} \quad \Leftrightarrow \{x+y, y+z, z+x\} \text{ linear unabhängig}$$

Geben sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

Lösung:
Gegenbeispiel: Seien $\{x, y, z\}$ Basis von $\mathbb{F}_2^3$, also linear unabhängig. Dann ist (dennoch) $\{x+y, y+z, z+x\}$ linear abhängig, denn

$$(x+y)+(y+z)+(z+x)=0$$

für alle x, y, z (10 P)

Name, Vorname: **Matrikelnr.:**

Aufgabe 4:
Sei $\mathcal{B} := \{b_1, b_2\}$ eine Basis eines Vektorraums V und ein Endomorphismus f gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} f(b_1) & = & b_1 + 3b_2 \\ f^2(b_1) & = & -b_1 + b_2 \end{array}$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ von f bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Lösung:

$$-b_1 + b_2 = f^2(b_1) = f(b_1 + 3b_2) = b_1 + 3b_2 + 3f(b_2).$$

Also ist $f(b_2) = -\frac{2}{3}(b_1 + b_2)$. (6 P)

Die Abbildungsmatrix ist (4 P; falls stattdessen Transponierte: 1 P)

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Name, Vorname: **Matrikelnr.:**

Aufgabe 5:
Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen über eine lineare Abbildung $f : V \to V$ äquivalent sind:

i) f ist ein Isomorphismus

ii) Für alle $1 \leq n \in \mathbb{N}$ ist f^n ein Isomorphismus

iii) Es gibt ein $1 \leq n \in \mathbb{N}$, so dass f^n ein Isomorphismus ist.

Lösung:
$i) \Rightarrow ii) :$ f Iso, also invertierbar. Sei f^{-1} die Inverse. Dann ist $(f^{-1})^n \circ f^n = id$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also f^n invertierbar, also f^n ein Iso für alle $n \in \mathbb{N}$ (4 P).

$ii) \Rightarrow iii)$: Eine Aussage, die für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, gilt erst recht für ein $n \in \mathbb{N}$ (2 P).

$iii) \Rightarrow i)$: Sei f^n ein Iso mit Inversem g. Dann ist $(g \circ f^{n-1}) \circ f = id$. Also ist $g \circ f^{n-1}$ Inverses von f. Also ist f ein Iso (4 P).

Name, Vorname: **Matrikelnr.:**

Aufgabe 6:
Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die folgende Matrix invertierbar ist.

$$A := \begin{pmatrix} 5-t & 1 & \pi - t & -1 \\ 1 & 3-t & 9 & 1 \\ 0 & 0 & t & \pi \\ 0 & 0 & t & t \end{pmatrix}.$$

Lösung:
Die Determinante von A ist aufgrund der Blockgestalt (4 P)

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 5-t & 1 \\ 1 & 3-t \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} t & \pi \\ t & t \end{pmatrix} = (14 - 8t + t^2)t(t - \pi)$$

Die Nullstellen dieses Polynoms (in t) sind $\{0, \pi, \sqrt{2}+4, -\sqrt{2}+4\}$ (4P). Die Matrix ist also für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pi, \sqrt{2}+4, -\sqrt{2}+4\}$ invertierbar (2P)

Name, Vorname: **Matrikelnr.:**

Aufgabe 7:
Seien U und W Untervektorräume des endlichdimensionalen Vektorraums V mit den Eigenschaften $V = U+W$ und $U \cap W = \{0\}$. Daher lässt sich $v \in V$ eindeutig als $v = u+w$ mit $u \in U$ und $w \in W$ schreiben. Die Abbildung $\pi := \pi(U,W) : V \to V, \quad v \mapsto u$ ist also wohldefiniert.

i) Zeigen Sie, dass π linear ist und dass $\pi \circ \pi = \pi$ gilt.

ii) Bestimmen Sie $\mathrm{Ker}(\pi)$ und $\mathrm{Bild}(\pi)$.

iii) Sei nun $\Pi : V \to V$ linear und habe die Eigenschaft $\Pi \circ \Pi = \Pi$. Zeigen Sie, dass es Untervektorräume U und W von V gibt, sodass $\Pi = \pi(U,W)$ ist.

Lösung
zu i): Linearität: $\pi((u+w)+a(u'+w')) = \pi(u+au'+w+aw') = u+au' = \pi(u+w)+a\pi(u'+w'))$ (1 P). Außerdem gilt für alle $x = u+w$: $\pi^2(u+w) = \pi(u) = u = \pi(u+w)$ (1 P).

zu ii): $\pi(u+v) = 0$ genau dann wenn $u = 0$. Also ist $W = \mathrm{Ker}(\pi)$ (1 P). Nach Definition ist $\mathrm{Bild}(\pi) \subset U$ und für jedes $u \in U$ gilt $\pi(u) = u$. Also ist $\mathrm{Bild}(\pi) = U$ (1 P).

zu iii): Sei $W := \mathrm{Ker}(\Pi)$ und $U := \mathrm{Bild}(\Pi)$ (2 P). Sei $u \in U$, also $u = \Pi(x)$. Dann gilt $\Pi(u) = \Pi^2(x) = \Pi(x) = u$. Gilt zudem $u \in W$, so ist $\Pi(u) = 0$. Also $U \cap W = \{0\}$ und aus Dimensionsgründen $U + W = V$ (2 P). Es gilt $\Pi|_W = \pi(U,W)|_W$ und $\Pi|_U = \pi(U,W)|_U$. Also gilt $\Pi = \pi(U,W)$ (2 P).

Name, Vorname: **Matrikelnr.:**

Aufgabe 8:
Sei $\mathcal{A} = \{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis von $V = \mathbb{C}^3$ und sei

$$\mathcal{B} = \left\{ y_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

eine weitere Basis von V. Sei $\varphi : V \to V$ ein lineare Abbildung mit Darstellungsmatrix

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$ und $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\varphi^{2007})$.

Lösung:
Die Basiswechselmatrizen sind (2P)

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

und (4P, auch bei richtiger Intervertierung einer falschen $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$)

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(id) = (M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(id))^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist (2 P)

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\varphi) &= M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(id) \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\varphi) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(id) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5-5i & -5-4i & -5-5i \\ 3+5i & 4+4i & 4+5i \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

und (2 P)

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\varphi^{2007}) &= M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(id) \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\varphi^{2007}) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(id) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5+5i & -5+4i & -5+5i \\ 3-5i & 4-4i & 4-5i \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

Name, Vorname: **Matrikelnr.:**

Aufgabe 9:

a) Sei G eine abelsche Gruppe mit neutralem Element e. Zeigen Sie, dass die Menge

$$U = \{g \in G : g^3 = e\}$$

eine Untergruppe von G ist.

b) Sei S_3 die Permutationsgruppe von 3 Elementen und

$$U = \{g \in S_3 : g^2 = e\}$$

Zeigen Sie, dass U ist keine Untergruppe von S_3 ist.

Lösung

a): $e \in U$, denn $e^3 = 3$. Ist $g \in U$, so ist $(g^{-1})^3 = (g^3)^{-1} = e^{-1} = e$, also $g^{-1} \in U$. Sind $g, h \in U$, so ist $(gh)^3 = g^3h^3$, da G abelsch und $g^3h^3 = e$. Also ist $gh \in U$. (5 P, -1 P, falls nicht ersichtlich, wo abelsch verwendet wird)

b): S_3 besteht nur aus e, 3 Transpositionen und 2 Elementen der Ordnung 3. Also hat U vier Elemente. Wäre U eine Untergruppe, so müsste die Elementanzahl die von S_3 (also 6) teilen (5 P).

Oder: In Zykelschreibweise: $(12) \in U$, $(23) \in U)$, aber $(12) \circ (23) \notin U$ (5 P)

Name, Vorname: **Matrikelnr.:**

Aufgabe 10:
Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis x_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Sei $f : V \to V$ die lineare Abbildung gegeben durch

$$x_1 \mapsto x_2, \quad x_2 \mapsto x_3, \quad x_3 \mapsto x_4, \quad x_4 \mapsto x_1.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von f.

Lösung
Die Abbildungsmatrix ist (2P)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit dem charakteristischen Polynom $x^4 = 1$ (2P). D.h. die Eigenwerte sind $\{1, -1, i, -i\}$ (2P) mit den Eigenräumen respektive (je 1P, kein Abzug, falls nur Eigenvektor, statt Eigenraum angegeben)

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, \quad \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle, \quad \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} \rangle, \quad \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix} \rangle.$$

(Diese kann man als Kerne von $A - \lambda id$ bestimmen oder (kommentarlos genügt!) aufgrund der einfachen Gestalt von f erraten.)

Name, Vorname: **Matrikelnr.:**

Aufgabe 1:
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Pro richtiger Antwort erhalten sei einen Punkt, pro falscher Antwort erhalten sei einen Minuspunkt, unbeantwortete Fragen werden nicht gewertet. Ihre Gesamtpunktzahl wird, falls sie negativ sein sollte, auf Null angehoben.

Im folgenden betrachten wir die $\mathbb{R}$-Vektorräume $\mathbb{R}^4$ und $\mathbb{R}^5$, sowie zwei $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ und $g : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$.

- Jede vierelementige Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^4$ ist eine Basis. Ja: ☐ Nein: ☒
- Ist $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$, so ist $\{f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4)\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^5$. Ja: ☐ Nein: ☒
- Ist $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$, so ist $\{f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4)\}$ eine Basis von $\mathrm{im}(f)$. Ja: ☐ Nein: ☒
- Sind U_1 und U_2 Untervektorräume von $\mathbb{R}^5$, so sind auch $U_1 \cap U_2$ und $U_2 \cup U_1$ Untervektorräume. Ja: ☐ Nein: ☒
- Ist $U \subset \mathbb{R}^4$ ein Untervektorraum, so sind $f(U)$ und $g^{-1}(U)$ auch Untervektorräume. Ja: ☒ Nein: ☐
- Ist g surjektiv, so ist die lineare Gleichung $g(x) = a$, für alle $a \in \mathbb{R}^4$ eindeutig lösbar. Ja: ☐ Nein: ☒
- Ist f injektiv, so existiert ein g mit $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}$. Ja: ☒ Nein: ☐
- Ist g surjektiv, so existiert ein f mit $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^5}$. Ja: ☐ Nein: ☒
- Ist g surjektiv, so ist $\ker(g)$ eindimensional. Ja: ☒ Nein: ☐
- Ist f surjektiv, so ist $\ker(g)$ vierdimensional. Ja: ☒ Nein: ☐
  (Hier ist dem Aufgabensteller KEIN Tippfehler unterlaufen!)

Name, Vorname: **Matrikelnr.:**

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 24 \\ 3 & 5 & 12 & 29 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 32 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Wir wenden den Gaußschen Algorithmus auf die Matrix $A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 10 \\ 2 & 7 & 4 & 24 & 32 \\ 3 & 5 & 12 & 29 & 19 \end{array}\right)$ und erhalten:

Nach einem Schritt: $A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & -2 & 14 & 24 \\ 0 & -1 & 3 & 14 & 7 \end{array}\right)$ (4 Punkte)

Nach zwei Schritten: $A_2 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 16 & 13 \end{array}\right)$ (3 Punkte)

Und nach drei Schritten: $A_2 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ (1 Punkte)

Damit ist der Rank der Abbildungsmatrix echt kleiner als der der erweiterten Matrix und das System ist nicht lösbar. (2 Punkte)

Name, Vorname: **Matrikelnr.:**

Augabe 3:

Berechnen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ die Matrix $\exp\begin{pmatrix} t & t \\ 0 & t \end{pmatrix}$.

(Zur Erinnerung: $\exp(A) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} A^k$.)

Lösung:

Behauptung: $\begin{pmatrix} t & t \\ 0 & t \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} t^n & nt^n \\ 0 & t^n \end{pmatrix}$ (2 Punkte)

Beweis der Behauptung (z.B. per Induktion) (4 Punkte)

Abschlußrechnung:

$$\exp\begin{pmatrix} t & t \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{t^n}{n!} & \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{nt^n}{n!} \\ 0 & \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{t^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{t^n}{n!} & t\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{t^n}{n!} \\ 0 & \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{t^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(t) & t\exp(t) \\ 0 & \exp(t) \end{pmatrix}$$

(4 Punkte)

Name, Vorname: **Matrikelnr.:**

Aufgabe 4:
Wir betrachten den reellen Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]_2$ mit der Basis $\mathcal{A} = \{1, x, x^2\}$ sowie den Vektorraum $W = \mathbb{R}[x]_3$ mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Weiterhin betrachten wir die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} I: \quad V &\to W \\ f(x) &\mapsto \int_1^x f(t)dt\,. \end{aligned}$$

Geben Sie die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(I)$ an!

Lösung:

Wir wenden die lineare Abbildung zunächst auf unsere Basiselemente an und berechnen:

$I(1) = x - 1$ (1 Punkte)

$I(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$ (2 Punkte)

$I(x^2) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$ (3 Punkte)

Damit ist die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(I)$ die 4×3 Matrix (1 Punkte)

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(I) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$ (3 Punkte)

Name, Vorname: **Matrikelnr.:**

Aufgabe 5:
Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen über eine lineare Abbildung $f : V \to V$ äquivalent sind:

i) f ist diagonalisierbar.

ii) $\mathrm{id}_V + f$ ist diagonalisierbar.

Lösung:

Es gibt für beide Inklusionen (i) $\implies$ (ii) und (ii) $\implies$ (i) jeweils 5 Punkte!

Die Wiederholung einer der Definitionen aus der Vorlesung:

diagonalsierbar $\iff$ es existiert eine Basis $\{v_i\}$ mit $fv_i = \lambda_i v_i$, oder
diagonalsierbar $\iff$ es existiert eine Basis $\mathcal{A} = \{v_i\}$ mit $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$ ist Diagonalmatrix,

bringt zwei Punkte.

Name, Vorname: **Matrikelnr.:**

Aufgabe 6:
Wir betrachten die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle reellen Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume!

Lösung:

Wir berechnen zunächst das charakterische Polynom
$P_A(t) = \det(A - tE) = 1 - 3t + 3t^2 - t^3$ (4 Punkte)

Nun bestimmen wir die Nullstellen,
$P_A(t) = -(t-1)^3 \implies P_A$ hat genau eine Nullstelle, also hat A genau einen Eigenwert, nämlich $\lambda = 1$. (2 Punkte)

Der zugehörige Eigenraum $\mathrm{Eig}(A, 1) = \ker(A - \mathrm{id})$ ist zweidimensional, eine Basis ist (z.B.) durch $(-1, 1, 0)^t$ und $(3, 0, 1)^t$ gegeben. (4 Punkte)

Name, Vorname: **Matrikelnr.:**

Aufgabe 7:
Wir betrachten einen Endomorphismus $f : V \to V$ eines endlichdimensionalen Vektorraumes V. Mit K_n bezeichnen wir den Kern von $f^n : V \to V$.

i) Zeigen Sie, dass $K_{n-1} \subseteq K_n$ für alle $n \geq 2$ gilt.

ii) Beweisen Sie die Aussage: Gilt $K_{n-1} = K_n$, so gilt auch $K_n = K_{n+1}$.

iii) Geben Sie eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $K_1 \subsetneqq K_2$ an!

Lösung:

zu (i):
Ist $v \in K_{n-1} \implies f^{n-1}(v) = 0 \implies f(f^{n-1}(v)) = f(0) = 0$, da lineare Abbildung
$\implies f^n(v) = 0 \implies v \in K_n$. (2 Punkte)

zu (ii):
Es genügt (wegen (i)) die Implikation $K_{n+1} \subseteq K_n$ zu zeigen.
Sei $v \in K_{n+1} \implies f^{n+1}(v) = 0 \implies f^n(f(v)) = 0 \implies f(v) \in K_n = K_{n-1}$
$\implies f^{n-1}(f(v)) = 0 \implies f^n(v) = 0 \implies v \in K_n$ (5 Punkte)

zu (iii):
Ist f durch die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben, so ist $0 \subsetneqq K_1 \subsetneqq K_2 = \mathbb{R}^2$. (3 Punkte)

Name, Vorname: **Matrikelnr.:**

Aufgabe 8:
Sei $\mathcal{A} = \{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis von $V = \mathbb{C}^3$ und sei

$$\mathcal{B} = \left\{ y_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

eine weitere Basis von V. Sei $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung mit Darstellungsmatrix

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$ und $\left(M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\varphi)\right)^{2008}$.

Lösung:

Die Basiswechselmatrizen sind (2P)

$$T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

und (4P, auch bei richtiger Intervertierung einer falschen $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$)

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = (T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist (2 P)

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\varphi) &= T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5-5i & -5-4i & -5-5i \\ 3+5i & 4+4i & 4+5i \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

und (2 P)

$$\begin{aligned} (M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\varphi))^{2008} &= T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)^{2008} \cdot T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

Name, Vorname: **Matrikelnr.:**

Aufgabe 9:

a) Sei p eine Primzahl, $r \geq 1$ eine natürliche Zahl und G eine Gruppe mit p^r Elementen. Zeigen Sie, dass G ein Element der Ordnung p enthält.

b) Wieviele Elemente der Ordnung p enthält die Gruppe $\mathbb{Z}/(p^r\mathbb{Z})$ mit p^r Elementen?

Lösung:

Zu (a):
Sei $g \neq e$ ungleich dem neutralen Element, dann teilt $\mathrm{ord}(g)$ ja p^r, es gilt also $\mathrm{ord}(g) = p^k$ mit $1 \leq k \leq r$. (2 Punkte)
Betrachten wir nun $g' := g^{p^{k-1}}$, so stellen wir fest $g'^p = g^{p^k} = e$ (2 Punkte)
Ferner ist $g' \neq e$, da $\mathrm{ord}(g) > p^{k-1}$ gilt. (1 Punkt)
Mithin, $\mathrm{ord}(g') = p$. (1 Punkt)

Zu (b):
Es sind genau $p - 1$ Elemente, nämlich die Elemente vom Typ $[ap^{r-1}]$ mit $a \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$. (4 Punkte)

Name, Vorname: **Matrikelnr.:**

Aufgabe 10:
Wir betrachten die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -6 & 5 & 12 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob eine Matrix $S \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ existiert, so dass $S^{-1} \cdot A \cdot S$ eine Diagonalmatrix ist!
Begründen Sie Ihre Entscheidung und geben Sie ein solches S, sowie $S^{-1} \cdot A \cdot S$ im Falle der Existenz an.

Lösung:

Wir bestimmen das charakterische Polynom P_A der Matrix A:
$P_A(t) = \det(A - tE) = -(t^3 - t - 2\,t^2 + 2)$. (3 Punkte)

Wir bestimmen die Nullstellen von P_A
$P_A(t) = -(t+1)(t-1)(t+2)$. (1 Punkt)

Da $P_A(t)$ drei Nullstellen mit algebraischer Vielfachheit eins besitzt,
ist A diagonalisierbar. (1 Punkt)

Wir bestimmen nun die Eigenräume $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$ für die drei Eigenwerte:

$\mathrm{Eig}(A, 1) = \mathrm{span}((2, 0, 1)^t)$. (1 Punkt)

$\mathrm{Eig}(A, -1) = \mathrm{span}((1, -1, 1)^t)$. (1 Punkt)

$\mathrm{Eig}(A, 2) = \mathrm{span}((3, 2, 1)^t)$. (1 Punkt)

Setzen wir nun $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (1 Punkt)

so gilt $S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (1 Punkt)