Logik Übungsblatt 2

Paula Ewald, 3706225

Tim Schlenstedt, 3797524

Hausaufgabe 4

a) f_1

x	y	z	$x \vee y$	$x \vee y \rightarrow z$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

f_3

x	y	$\neg x$	$\neg x \rightarrow y$	$y \rightarrow \neg x$	$\neg x \leftrightarrow y$
0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0

Die Belegung $x=0 \wedge y=0$ ist ein Modell von f_1 allerdings nicht von f_3,

daher $f_1 \not\equiv f_3$.

b) $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi_3 \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_3) \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)$ Distributivgesetz

c) f_1: $x \vee y \rightarrow z$

$= \neg(x \vee y) \vee z$

$\Leftrightarrow (\neg x \wedge \neg y) \vee z$ DeMorgan

$\Leftrightarrow (\neg x \vee z) \wedge (\neg y \vee z)$ Distributivgesetz

$= (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z) \equiv f_2$

f_3: $\neg x \leftrightarrow y$

$= (\neg x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow \neg x)$

$= (\neg\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee \neg x)$

$\Leftrightarrow (x \vee y) \wedge (\neg y \vee \neg x)$ Doppelte Negation

$\Leftrightarrow (y \vee x) \wedge (\neg x \vee \neg y)$ Kommutativität Disjunktion

$\Leftrightarrow (\neg\neg y \vee x) \wedge (\neg x \vee \neg y)$ Doppelte Negation

$\Leftrightarrow (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg\neg y \vee x)$ Kommutativität Konjunktion

$= (x \rightarrow \neg y) \wedge (\neg y \rightarrow x)$

$= x \leftrightarrow \neg y \equiv f_4$

Hausaufgabe 5

a) $(\uparrow f_1) \not\leftrightarrow (\uparrow f_2)$

b) $For_1(\{\neg, \vee\})$ ist funktional vollständig

zz. $For_2(\{\uparrow, \not\leftrightarrow, \vee\})$ ist ebenfalls funktional vollständig

$f_1 \vee f_2 \in For_1 \rightsquigarrow f_1 \vee f_2 \in For_2$

$\neg f_1 \in For_1 \rightsquigarrow (\uparrow f_1) \not\leftrightarrow f_1 \in For_2$

$\Rightarrow$ For_2 ist ebenfalls funktional vollständig

c) Beweis durch Induktion

I.A. $f = x$, dann $V_1(f) = 1$

I.V. Angenommen für $\psi_1, \psi_2 \in \{\not\leftrightarrow\}$ gilt die Behauptung

$V_1(\psi_1) = V_1(\psi_2) = 1$

I.S. $f = \psi_1 \not\leftrightarrow \psi_2$

$V_1(f) = V_1(\psi_1 \not\leftrightarrow \psi_2) = V_1(\psi_1) \not\leftrightarrow V_1(\psi_2)$

$\overset{I.V.}{=} 1 \not\leftrightarrow 1 = 0$

$\Rightarrow$ Es gibt keine zu $\vee, 1$ äquivalente Formel.

Hausaufgabe 6

a)

f_1

x	y	$x \not\leftrightarrow y$	$(x \not\leftrightarrow y) \not\leftrightarrow y$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	0	1

f_2

x	y	z	$\uparrow y$	$\uparrow y \not\leftrightarrow z$	$x \not\leftrightarrow (\uparrow y \not\leftrightarrow z)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1

b)

KNF:

$$f_1 = (\neg x \lor \neg y) \land (\neg x \lor y)$$

$$f_2 = (\neg x \lor \neg y \lor z) \land (\neg x \lor y \lor z) \land (x \lor \neg y \lor \neg z) \land (x \lor y \lor \neg z)$$

DNF:

$$f_1 = (x \land \neg y) \lor (x \land y)$$

$$f_2 = (\neg x \land \neg y \land \neg z) \lor (\neg x \land y \land \neg z) \lor (x \land \neg y \land z) \lor (x \land y \land z)$$

Hausaufgabe 7

a) Die Aussage ist falsch, denn für Tautologien hat die KNF keine Literale und ist somit kleiner als φ.

b) Die Aussage ist falsch, denn falls $V(\varphi) = 0$ dann gilt $\varphi \models 1$ nicht.

c) Die Aussage ist falsch, da $V(\varphi \wedge \neg\varphi) = 0$ $\Rightarrow 0 \models \varphi$ und somit φ nicht gültig wird, was nicht für $V(\varphi) = 1$ gilt

d) Die Aussage ist wahr, da $\neg(\varphi \wedge \psi) \wedge \varphi$

$\Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi) \wedge \varphi$ De Morgan

$\Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \varphi) \vee (\neg\psi \wedge \varphi)$ Distributivgesetz

$\Leftrightarrow 0 \vee (\neg\psi \wedge \varphi)$ Kontradiktion

$\Leftrightarrow \neg\psi \wedge \varphi$ Neutrales Element Disjunktion

$\Rightarrow \{\neg\psi, \varphi\} \models \neg\psi$ (Modus Ponens)