WEIHNACHTS VORLESUNG

MIT PROF. SCHWARZ

WIE IRRATIONAL DARF ES SEIN?
VON HIMMLISCHER SPHÄRENMUSIK UND
CHAOS IM DREIKÖRPERPROBLEM

11. DEZEMBER 2024

19:15 UHR, HÖRSAAL 3

Der Glühwein- und Punschverkauf startet 18:30 Uhr vor dem Ziegenledersaal (Innenhof). Dort wird es auch weihnachtliches Gebäck geben.

FSR MATHE
Universität Leipzig

Bringt euch gern einen eigenen Becher mit :)

Diskrete Strukturen (WS 2024-25) - Halbserie 8

8.1 **[4]**

Geben Sie für die folgenden Abbildungen f_1, f_2, f_3 alle Fixpunkte an.

(a) $f_1 \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, z \mapsto z^2 + z - 1$

(b) $f_2 \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto (2x - y, y + x \cdot y)$

(c) $f_3 \colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}), X \mapsto \{n \in \mathbb{N} \mid \exists x \in X\ n \geq x)\}$

8.2 **[3]**

Sei M eine Menge. Für zwei Teilmengen $X, Y \subseteq M$ definieren wir die *symmetrische Differenz* von X und Y durch

$$X \triangle Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y).$$

Weiter definieren wir für jede Teilmenge $Y \subseteq M$ eine Funktion f_Y durch

$$\begin{aligned} f_Y \colon \mathcal{P}(M) &\to \mathcal{P}(M), \\ X &\mapsto X \triangle Y. \end{aligned}$$

Sei $Y \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass f_Y hat keine Fixpunkte.

8.3 **[3]**

Sei X die Menge von allen funktionen $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Mit anderen Worten: X ist die Menge aller Sequenzen $a_0, a_1, \ldots$, so dass $a_i \in \mathbb{N}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie dass $|X| = \mathfrak{c}$. (Hinweis: es kann hilfreich sein, die Zerlegung $\mathbb{N} = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$ zu verwenden, wobei S_i unendliche disjunkte Mengen sind).

8.4 *Diese Aufgabe ist wesentlich schwieriger als andere Aufgaben und auch schwieriger als die Aufgaben, die in der Prüfung vorkommen werden. Sie ist für Studierende gedacht, die herausgefordert werden wollen. Sie sollte nur von den Studierenden bearbeitet werden, die bereits ein gutes Verständnis von stetigen Funktionen aus anderen Kursen mitbringen.*

Sei $C(\mathbb{R})$ die Menge von allen stetigen Funktionen $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Entscheiden Sie, was ist die Kardinalität von $C(\mathbb{R})$ (d.h. ob $|C(\mathbb{R})| = \aleph_0$, oder $|C(\mathbb{R})| = \mathfrak{c}$, oder $|C(\mathbb{R})| > \mathfrak{c}$).

8.5 Gegeben sei $M = \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n_1 + n_2 = n_3)\}$.
Beweisen Sie mithilfe des Satzes von Cantor-Schröder-Bernstein, dass

$$|M| = |\mathbb{N}|\,.$$

8.6 Zeigen Sie dass $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$.