(1) K^4

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in K^3$$

$$x + y = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \in K^3$$

$$2 \cdot x = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(2) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

a_{ij}

$\uparrow$ Zeile $\uparrow$ Spalte

$$2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

(3) $$f = 2 \cdot x^3 + x^2 - x + 1$$

$$g = 4 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 5$$

$$f + g = 6 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 2x + 6$$

$$2 \cdot f = 4 \cdot x^3 + 2x^2 - 2 \cdot x + 2$$

(4) $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$f = \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp(x) = e^x$

$g = \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sin(x)$

$f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$
$= e^x + \sin(x)$

(b) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x_1 + x_2 = 0, \; x_2 - x_3 = 0 \right\}$

(1) $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$, denn

$2 \cdot 0 + 0 = 0$ ✓

$0 - 0 = 0$ ✓

(2) Seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in U$

$\Rightarrow \quad 2x_1 + x_2 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0$

$2 \cdot y_1 + y_2 = 0, \quad y_2 - y_3 = 0$

z.z.: $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \in U$

$2 \cdot (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$
$= (2 \cdot x_1 + x_2) + (2 \cdot y_1 + y_2)$
$= 0 + 0 = 0$

$$(x_2 + y_2) - (x_3 + y_3)$$
$$= (x_2 - x_3) + (y_2 - y_3)$$
$$= 0 + 0$$
$$= 0 \checkmark$$

(3) Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 2x_1 + x_2 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0$

z.z.: $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \lambda \cdot x_3 \end{pmatrix} \in U$, d.h.

$$2 \cdot (\lambda \cdot x_1) + \lambda x_2 = 0$$
$$\lambda \cdot x_2 - \lambda \cdot x_3 = 0$$

$$2 \cdot (\lambda \cdot x_1) + \lambda \cdot x_2$$
$$= \lambda \cdot (2x_1 + x_2)$$
$$= \lambda \cdot 0$$
$$= 0 \checkmark$$

$$\lambda \cdot x_2 - \lambda \cdot x_3$$
$$= \lambda \cdot (x_2 - x_3)$$
$$= \lambda \cdot 0$$
$$= 0 \checkmark$$

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} = 2 \cdot v_1$$

$\Rightarrow \quad \{v_1, v_2\}$ sind l.a.

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} \neq \lambda \cdot v_1$$

$\Rightarrow \quad \{v_1, v_2\}$ sind l.u.

(i) $\underbrace{(2,1,0)}_{=:v_1}, \underbrace{(1,0,1)}_{=:v_2}, \underbrace{(-2,-3,4)}_{=:v_3}$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \cdot(-2)\ + \quad \cdot 2\ +$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \quad \cdot 3\ +$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 2 < 3$$

$\Rightarrow \{a_1, a_2, a_3\}$ ist l.a.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$A \cdot e_j$ = j-te Spalte von A

Aufgabe:

Sei $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ def durch

$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1-x_2+2x_3,\ 2x_1-2x_3,\ -x_1-x_2+4x_3,\ 3x_1-x_2)$

Bestimmen Sie eine Basis von Kern(f) und von Bild(f)

Lösung:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(x) = A \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 - 2x_3 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{span}(v_1, v_2) = U$

$\Rightarrow \{v_1, v_2\}$ ist ein Erz. Syst.

Ist zusätzlich $\{v_1, v_2\}$ l.u

dann ist $\{v_1, v_2\}$ ist eine Basis von U

$\operatorname{span}\{v_1, v_2\} = \langle v_1, v_2 \rangle$

$\operatorname{span}\{v_1, v_2\} = \{\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in K\}$

(b) $B = (1, x, x^2+x)$

$1, x \in B$, $x^2 = (x^2+x) + (-1)\cdot x \in \operatorname{span}(B)$

$\Rightarrow$ B ist ein Erzeugendensystem.

Wegen $|B| = 3 = \dim(\mathbb{R}[x]_2)$ ist B bereits eine Basis.

(c) ${}_B M(f)_B = ?$

$$f(1) = -2x^2 + 1 = 1\cdot 1 + 2\cdot x + (-2)\cdot(x^2+x) \qquad (*)$$

$$f(x) = x^2 + 3x + 2 = 2\cdot 1 + 2\cdot x + 1\cdot(x^2+x)$$

$$f(x^2+x) = 4x^2 + 5x + 1 = 1\cdot 1 + 1\cdot x + 4\cdot(x^2+x)$$

$$\Rightarrow \quad {}_B M(f)_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$(*)$ $f(1) = -2x^2 + 1$

$$\overset{!}{=} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot (x^2 + x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_3 \cdot x^2 + (\lambda_2 + \lambda_3)\cdot x + \lambda_1 \cdot 1$$

$$\overset{!}{=} -2\cdot x^2 + 0\cdot x + 1\cdot 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_3 = -2, \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_3 = -2, \quad \lambda_2 = -\lambda_3 = 2, \quad \lambda_1 = 1$$

$$B = (\underbrace{1}_{v_1}, \underbrace{x}_{v_2}, \underbrace{x^2 + x}_{v_3}) \quad \text{Basis}$$

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot (x^2 + x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_3 \cdot x^2 + (\lambda_2 + \lambda_3) \cdot x + \lambda_1 \cdot 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_3 = 0 \land (\lambda_2 + \lambda_3) = 0 \land \lambda_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_2 = -\lambda_3 = 0$$

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ l.u.

$$|\{v_1, v_2, v_3\}| = 3 = \dim \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$$

$\Rightarrow v_1, v_1, v_3$ ist Basis von $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow M^e_e(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Satz:

Sei $f: K^n \to K^m$, $f(x) = A \cdot x$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$$

$\mathcal{A} := \{e_1, \dots, e_n\}$ Basis von K^n

$\mathcal{B} := \{e_1, \dots, e_m\}$ Basis von K^m

Dann gilt

$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) = A$.

$$f(e_1) = A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot e_1 + \dots + a_{m1} \cdot e_m$$

$\vdots$

$$f(e_n) = A \cdot e_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = a_{1n} \cdot e_1 + \dots + a_{mn} \cdot e_n$$

$$\Rightarrow M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3$$

$$x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3$$

$$= x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$V = \mathbb{R}^3$$

$$B = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_3} \Big\}$$

$$K_B\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right) = \;?$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_2 = 2, \quad \lambda_1 = 1 - \lambda_2 = -1$$

$$\lambda_3 = -\lambda_1 = 1$$

$$\Rightarrow K_B\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$K_B^{-1}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$$

$$= 1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 3 \cdot v_3$$

$$= 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}$$

$$B = \{1, x, x^2\}$$

$$K_B^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot x + 2 \cdot x^2$$

$$= 2x^2 - x + 1$$