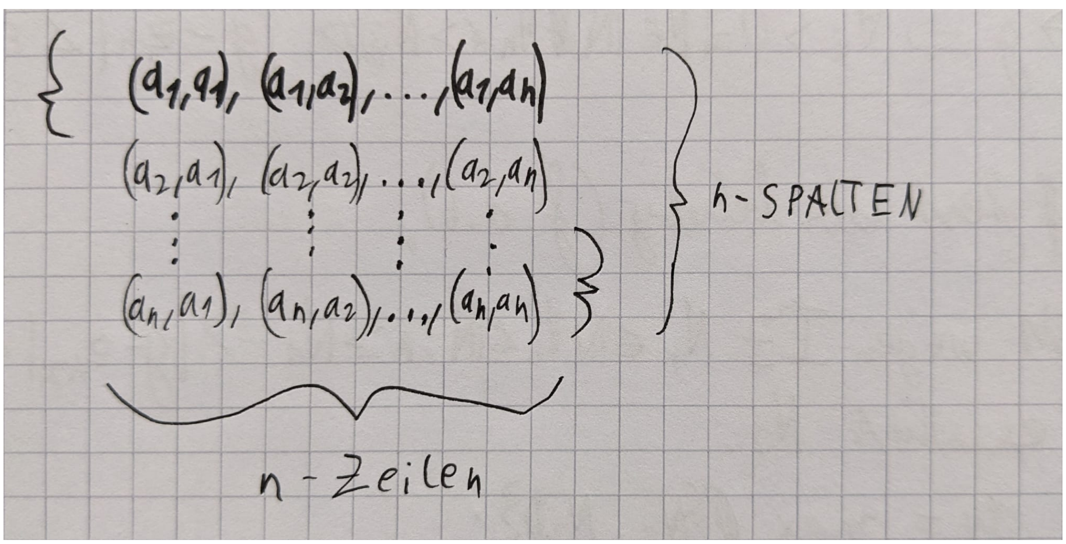
Diskrete Strukturen
Pflichtserie 7

Nikita Emanuel John Fehér, 3793479

09. Dezember 2024
09:15-10:45 Dietzschold, Johannes

7.1
Seien A und B Mengen mit $|A| = |B|$. Zeigen Sie dass $|A_2| = |B_2|$.
Da:
$A = \{a | a \in A\}$
$A^2 = A \times A = \{(a_1, a_2) | a_1, a_2 \in A\}$



Damit lässt sich zeigen das $|A^2| = |A| \cdot |A| = n \cdot n = n^2 = |A|^2$
Für B gilt das gleiche $|B^2| = |B| \cdot |B| = n \cdot n = n^2 = |B|^2$
$\implies$ Wenn $|A| = |B|$
$\implies$ $|A^2| = |B^2|$

7.1

Für eine Menge M und $k \in \mathbb{N}$, definieren wir $\mathcal{P}_k(M) := \{X \subseteq M : |X| = k\}$. Seien A und B Mengen mit $|A| = |B|$.

(a) Zeigen Sie, dass $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$.

$$\begin{aligned}
\text{Da wir wissen das } |\mathcal{P}(M)| &= 2^{|M|} \\
\implies |\mathcal{P}(A)| &= 2^{|A|} \\
\implies |\mathcal{P}(B)| &= 2^{|B|} \\
\text{Da } |A| &= |B| \\
\implies 2^{|A|} &= 2^{|B|}
\end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass für jede $k \in \mathbb{N}$ gilt $|\mathcal{P}_k(A)| = |\mathcal{P}_k(B)|$

$$\begin{aligned}
\text{Da für beliebige } M \text{ gilt: } |\mathcal{P}_k(M)| &= \binom{|M|}{k} \\
\implies |\mathcal{P}_k(A)| &= \binom{|A|}{k} \\
\implies |\mathcal{P}_k(B)| &= \binom{|B|}{k} \\
\text{Da } |A| &= |B| \\
\implies \binom{|A|}{k} &= \binom{|B|}{k} \\
\implies |\mathcal{P}_k(A)| &= |\mathcal{P}_k(B)|
\end{aligned}$$

7.3

Sei A eine unendliche abzählbare Menge. Zeigen Sie dass $|\mathcal{P}_2(A)| = \aleph_0$. (Hinweise: Sie können die Resultate der vorherigen Übungen auf diesem oder einem vorherigen Blatt verwenden.)