Wahrscheinlichkeitstheorie für Inf. & Lehramt Prof. Dr. Max von Renesse
Wintersemester 2024/2025 Dr. S. Kliem, M. Hehl, A. Weiß

Übungsblatt 6

Aufgabe 1.

1. Partielle Integration

Die **partielle Integration** ist eine Methode, um Integrale eines Produkts von zwei Funktionen zu berechnen. Sie basiert auf der Umkehrung der Produktregel der Differentiation.

Definition: Seien $u(x)$ und $v(x)$ differenzierbare Funktionen. Dann gilt für ein Integral des Produkts:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x)\, dx.$$

Für bestimmte Integrale: Wenn die Grenzen a und b gegeben sind, lautet die Formel:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx = \Big[u(x) \cdot v(x)\Big]_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x)\, dx.$$

2. Integration durch Substitution

Die **Integration durch Substitution** ist eine Methode, die es ermöglicht, Integrale zu vereinfachen, indem man eine neue Variable einführt.

Definition: Wenn ein Integral die Form

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx$$

hat, kann durch die Substitution $u = g(x)$ und $du = g'(x)\, dx$ das Integral umgeschrieben werden als:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(u)\, du.$$

Für bestimmte Integrale: Bei bestimmten Integralen müssen auch die Integrationsgrenzen angepasst werden: - Wenn die ursprünglichen Grenzen a und b sind, berechne die neuen Grenzen für u:

$$u_a = g(a), \quad u_b = g(b).$$

Das Integral wird dann:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int_{u_a}^{u_b} f(u)\, du.$$

Berechnen Sie folgende Integrale

a)

$$\int_0^1 x \cdot \sin(x)\, dx$$

b)

$$\int_0^1 (2x+1)^3\, dx$$

Berechnen Sie das bestimmte Integral mithilfe von Integration durch Substitution:

Aufgabe 2. Entscheiden Sie, welche der folgenden Funktionen eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist und skizzieren sie ihren Graph.

(a) $f\colon (0,2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - |1-x|$.

(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2\sigma} \mathrm{e}^{-(|x-\mu|)/\sigma}$, $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$.

(c) $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{4} x \mathrm{e}^{-x/2}$.

Aufgabe 3. Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 1, \\ cx & , \ 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & , \ x > 2. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion f für positives c.

(b) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(c) Sei X eine Zufallsgröße mit Dichte f. Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion, den Erwartungswert und die Varianz von X.

(d) Bestimmen Sie den kleinsten Wert $t \in \mathbb{R}$, für den
$\mathbb{P}(X \leq t) \geq 0.5$ gilt.

Aufgabe 4. Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = \mu \in \mathbb{R}$ und Varianz $\mathrm{Var}(Y) = \sigma^2 > 0$. Das heißt, X is verteilt mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

und es gilt

$$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \int_a^b f_X(x) \mathrm{d}x$$

für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir definieren nun die Zufallsvariable

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}(Y) = 0$ und $\mathrm{Var}(Y) = 1$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass Y standardnormalverteilt (mit Erwartungswert $\mathbb{E}(Y) = 0$ und Varianz $\mathrm{Var}(Y) = 1$) ist.