Aufgabe:

Sei V ein K-Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume von V.

Zeigen Sie: $U_1 \cup U_2$ ist ein Unterraum von V $\Leftrightarrow$ $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.

Lösung:

„$\Leftarrow$" Es gelte: $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.

Dann gilt: $U_1 \cup U_2 = U_2$ oder $U_1 \cup U_2 = U_1$

$\Rightarrow$ $U_1 \cup U_2$ ist ein Unterraum von V, denn U_1 und U_2 sind Unterräume von V.

„$\Rightarrow$" Es gelte: $U_1 \cup U_2$ ist ein Unterraum von V

Angenommen $U_1 \subsetneq U_2$ und $U_2 \subsetneq U_1$.

Dann ex. ein $u_1 \in U_1 \setminus U_2$ und ein $u_2 \in U_2 \setminus U_1$. Setze $u := u_1 + u_2$.

Dann gilt $u \in U_1 \cup U_2$, da $u_1, u_2 \in U_1 \cup U_2$ und $U_1 \cup U_2$ ein Unterraum von V ist.

$\Rightarrow$ $u \in U_1 \vee u \in U_2$. Es sei o.B.d.A. $u \in U_1$.

Dann gilt $u_2 = u - u_1 \in U_1$, da $u, u_1 \in U_1$ und U_1 ein Unterraum von V ist. $\lightning$

$\Rightarrow$ $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ $\square$

Aufgabe

Sei K ein Körper und sei $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$. Sei

$$C_A := \{B \in \mathcal{M}_{n,n}(K) |\ AB = BA\}.$$

Man zeige:

a) C_A ist ein Untervektorraum von $\mathcal{M}_{n,n}(K)$.

b) Für alle $B \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ gilt: Liegt B in C_A, so auch AB.

c) Die Abbildung $C_A \longrightarrow C_A,\ B \mapsto AB$ ist K-linear.

d) Für $n = 2$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ gilt $C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Lösung: a) Die Menge C_A ist nicht-leer, denn sie enthält die Matrix mit Einträgen 0 an allen Stellen. (aber auch 1_n.)
Seien nun $B, B_1, B_2 \in C_A$ und $\lambda \in K$. Dann gelten:
i) $\lambda B \in C_A$, denn: $A(\lambda B) = \lambda(AB) \overset{\text{Def. v. } C_A}{=} \lambda(BA) = (\lambda B)A$.
ii) $B_1 + B_2 \in C_A$, denn: $A(B_1+B_2) = AB_1 + AB_2 \overset{\text{Def. v. } C_A}{=} B_1A + B_2A = (B_1+B_2)A$.
Also ist C_A ein Untervektorraum.
b) Liegt B in C_A, so gilt $BA = AB$. Es folgt:
$A(BA) = (AB)A \overset{\text{Def. v. } C_A}{=} (BA)A$, und folglich liegt BA in C_A.
c) Die Abbildung $B \mapsto AB$ sei mit f bezeichnet. Für $B, B_1, B_2 \in C_A$ und $\lambda \in K$ gelten dann:
i) $f(\lambda B) = A(\lambda B) = \lambda(AB) = \lambda f(B)$, und
ii) $f(B_1 + B_2) = A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2 = f(B_1) + f(B_2)$.
Folglich ist f linear.
d) Wir setzen allgemein $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ an. Die Bedingung $AB = BA$ führt durch Ausmultiplizieren auf

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}$$

Da $K = \mathbb{R}$ in Teil d), folgt aus $b = -b$ und $c = -c$ die Gleichheit $b = c = 0$. Für a und d gibt es keine Bedingungen. Dies zeigt Teil d).

Aufgabe
Sei $\mathrm{Sym}_n := \{A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) | A^t = A\}$ und $\mathrm{Alt}_n := \{A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) | A^t = -A\}$. Man zeige:

a) Alt_n und Sym_n sind Untervektorräume von $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

b) Sei $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ und seien $S := \frac{1}{2}(A+A^t)$, $T := \frac{1}{2}(A-A^t)$. Dann ist $S \in \mathrm{Sym}_n$, $T \in \mathrm{Alt}_n$ und $A = S + T$.

c) $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathrm{Sym}_n \oplus \mathrm{Alt}_n$.

Lösung: a) Es ist zu zeigen, dass mit $A, B \in \mathrm{Sym}_n$ und $\lambda \in K$ auch $A + B$ und λA in Sym_n liegen (und die Analoge Aussage für Alt_n.): Für solche A, B, λ gilt aber:

$$(A + B)^t = A^t + B^t \overset{A,B\in\mathrm{Sym}_n}{=} A + B \quad \text{und} \quad (\lambda A)^t = \lambda A^t \overset{A\in\mathrm{Sym}_n}{=} \lambda A.$$

Dies zeigt $A + B, \lambda A \in \mathrm{Sym}_n$.
Seien nun $A, B \in \mathrm{Alt}_n$ und $\lambda \in K$. Diesmal folgt:

$$(A + B)^t = A^t + B^t \overset{A,B\in\mathrm{Alt}_n}{=} -A + (-B) = -(A + B) \quad \text{und}$$

$$(\lambda A)^t = \lambda A^t \overset{A\in\mathrm{Alt}_n}{=} \lambda(-A) = -(\lambda A).$$

Dies zeigt $A + B, \lambda A \in \mathrm{Alt}_n$.

b) Aus den Definitionen von S und T und den bekannten Eigenschaften des Transponierens folgen:

$$S^t = \left(\frac{1}{2}(A + A^t)\right)^t = \frac{1}{2}(A^t + (A^t)^t) = \frac{1}{2}(A^t + A) = \frac{1}{2}(A + A^t) = S,$$

$$T^t = \left(\frac{1}{2}(A - A^t)\right)^t = \frac{1}{2}(A^t - (A^t)^t) = \frac{1}{2}(A^t - A) = -\frac{1}{2}(A - A^t) = -T,$$

$$S + T = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t) = \frac{1}{2}(A + A^t + A - A^t) = \frac{1}{2}(2A) = A.$$

c) Aus b) folgt zunächst direkt: $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathrm{Sym}_n + \mathrm{Alt}_n$. Es bleibt zu zeigen, dass Sym_n und Alt_n komplementär sind, also, dass gilt

$$\mathrm{Sym}_n \cap \mathrm{Alt}_n = \{0\} :$$

Sei also A eine Matrix aus diesem Durchschnitt. Dann folgt

$$A \overset{A\in\mathrm{Sym}_n}{=} A^t \overset{A\in\mathrm{Alt}_n}{=} -A.$$

Dies zeigt $2A = 0$, und da 2 in $\mathbb{R}$ invertierbar ist, auch $A = 0$, was zu beweisen war.