

## 1. DAS FUNDAMENT DER MATHEMATIK: MENGEN UND ABBILDUNGEN

Der Begriff der Menge ist fundamental in der Mathematik, formal wenn auch nicht immer am schnellsten oder intuitivsten, lässt sich jedes mathematische Objekt als Menge auffassen. Hierauf beruht die universelle Gültigkeit und absolute Zuverlässigkeit mathematischer Resultate, wenn auch oftmals weniger formale, wie zB geometrisch - anschauliche, Auffassungen dem Verständnis und der Gewinnung neuer Erkenntnis besser dienen. Wir werden hier die mengentheoretische Sicht wohl mehr als in der Schulmathematik betonen, müssen aber auf eine vollständig formale Abhandlung verzichten.

Diese würde die Sprache der Mathematik (Logik) in einem Umfang benutzen, der noch nicht vorhanden ist. Ihr Aufbau würde unser Vorankommen unnötig verzögern, zumal diese Begriffe der Logik sowieso später im Studium der Informatik gründlicher behandelt werden.

### 1.1. Grundlegendes über Mengen.

**Definition 1.1. Menge** (*intuitive Definition von G. Cantor*) ist die Zusammenfassung von Objekten (Elementen), die eine bestimmte Eigenschaft (" $P(x)$  gilt") haben.

Wir schreiben  $x \in M$  wenn  $x$  ein Element von  $M$  ist, d.h. zu  $M$  gehört, und  $x \notin M$  andernfalls. Dies kann schreibt man als

$$M = \{x : P(x) \text{ ist wahr}\}, \text{ also } x \in M \text{ bedeutet genau, dass } P(x) \text{ gilt.}$$

Den Grundbegriff mathematische Aussage (der sich nur über eine strikte Einschränkung der Formeln, welche diese beschreiben, widerspruchsfrei halten lässt - siehe Fundamentalkrise der Mathematik) führen wir hier aus obigen Gründen nicht formal ein. Wir betreiben also **naïve** Mengenlehre, werden aber Situationen vermeiden, die mit den strikten Einschränkungen (Zermelo- Fraenkel oder Bernays-Gödel- von Neumann) kollidieren.

Zwei Mengen  $A$  und  $B$  sind gleich, wenn sie dieselben Elemente haben, d.h. jedes Element von  $A$  auch ein Element von  $B$  ist, und umgekehrt jedes Element von  $B$  auch in  $A$  ist. ("Extensionalitätsprinzip" der ML).

Typischerweise studieren wir  $\{x \in X : P(x)\}$ , d.h. die Menge aller  $x$  aus einer (grossen fixen "Universal-")Menge  $X$ , für die die (mathematische) Aussage  $P(x)$  wahr ist. Z.B. kann  $X$  die Menge aller natürlichen, ganzen oder reellen Zahlen sein oder auch aller Punkte der Ebene (alle diese Begriffe werden noch definiert).

### Beispiel 1.2.

- $\{n \in \mathbb{N} : n > 5\}$  alle natürlichen Zahlen größer als 5, dh 6 und alle nachfolgenden
- $\{n \in \mathbb{Z} : \text{es existiert ein } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } n = 2k - 1\}$ , die ungeraden ganzen Zahlen
- $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \in \mathbb{Q} \text{ \& } x \geq 0\}$  - die "Wurzeln" der rationalen Zahlen

**Definition 1.3.** Wir sagen  $A$  ist Teilmenge von  $B$  (Notation  $A \subset B$ ), wenn alle Elemente von  $A$  auch zu  $B$  gehören. (Statt  $A$  Teilmenge von  $B$  sagen wir oft  $A$  ist kleiner(oder auch kleiner gleich)  $B$ ).

Analog zur Ordnungsrelation für reelle Zahlen ist  $A \subset B$  gleichbedeutend mit  $B \supset A$ . wir schreiben  $A \subsetneq B$  wenn  $A \subset B$  und  $A \neq B$  und sagen  $A$  ist *strikt* kleiner als  $B$ .

**Unterschied:** Nicht alle Mengen sind in diesem Sinne vergleichbar! Jedenfalls gilt

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ und } B \subset A),$$

Grundlage einer typischen Methode um die Gleichheit zweier Mengen zu zeigen.

**Definition 1.4.** Die leere Menge ist diejenige Menge, welche keine Elemente hat und wird mit  $\emptyset$  bezeichnet.

Für jedes mathematische Objekt  $a$  bezeichnet  $\{a\}$  diejenige Menge, die  $a$  und nur  $a$  als einziges Element enthält. Sie heißt Einermenge mit Element  $a$ . (dh  $\{a\} = \{x : x=a\}$ )

**Bemerkung:** Spätestens jetzt sieht man, wie schwer es allein wäre, den Begriff "gleich sein", z.B. im Sinne von oben, rigoros zu definieren.

DIY: Zeigen Sie als Übung, dass die Mengen  $\emptyset$ ,  $\{\emptyset\}$  und  $\{\{\emptyset\}\}$  alle paarweise voneinander verschieden sind.

**Definition 1.5.** Aus gegebenen Mengen  $A, B$  konstruieren wir

- $A \cap B = \{x : x \in A \text{ \& } x \in B\}$  Schnittmenge, Durchschnitt von  $A$  und  $B$
- $A \cup B = \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$  Vereinigung von  $A$  und  $B$
- $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ \& } x \notin B\}$  Differenzmenge von  $A$  und  $B$

Die Mengen  $A$  und  $B$  heißen *disjunkt*, falls  $A \cap B = \emptyset$ , d.h. sie keine gemeinsamen Elemente haben.

Es gilt also z.B.

$$\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\} = \{a\} \cup \{a, b\} = \{b, a\}, \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{4, 2, 6\} = \{3, 1, 5\}.$$

Es gibt viele "Rechenregeln" für  $\cap$  und  $\cup$ , wir erwähnen die wichtigsten, die Assoziativität, Kommutativität und Distributivität ausdrücken (symmetrischer als für "+" und "·"!!)

**Lemma 1.6.** Für alle Mengen  $A, B$  und  $C$  gilt

- i)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- ii)  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- iii)  $A \cup B = B \cup A$
- iv)  $A \cap B = B \cap A$
- v)  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- vi)  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

**Beweis:**(Ihrer Wahl)

Als letzte grundlegende Mengenoperation führen wir die Produktmenge ein, mit der sich z.B. die Euklidische Ebene aus der Zahlengeraden konstruieren lässt. Hierzu brauchen wir den Begriff des geordneten Paares, den klarerweise haben  $x$ - und  $y$ -Koordinate eines Punktes in der Ebene ganz verschiedene Bedeutung! Also  $(1, 0) \neq (0, 1)$ , aber bei Mengen gilt ja  $\{0, 1\} = \{1, 0\}$ !?

**Definition 1.7.** Für die mathematischen Objekte  $a$  und  $b$  definieren wir das geordnete Paar  $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ .

Dann erhalten wir wie gewünscht

**Lemma 1.8.** Für alle mathematischen Objekte  $a, b, c, d$  gilt

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c \text{ und } b = d).$$

**Beweis:** Idee: Rückrichtung trivial, bleibt  $z_z$  aus  $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$  folgt  $a = c$  und  $b = d$ . Da  $a$  und  $c$  einzeln in Mengen auftreten, ist es wohl leichter zuerst  $a = c$   $z_z$ .

Dies beweisen wir **indirekt**, d.h. mit **Widerpruch**. **Sonst** wäre  $a \neq c$  und also  $c \notin \{a\}$ . Dies zeigt  $\{a\} \neq \{c\}$  und  $\{a\} \neq \{c, d\}$  wegen des Existenzialitätsprinzips, also  $\{a\} \notin \{\{c\}, \{c, d\}\}$  - ein Widerspruch zur Voraussetzung. Damit kann "sonst" nicht eintreten und es muss  $a = c$  gelten.

Die Voraussetzung gibt nun also  $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\}$ , bleibt  $b = d$  zu zeigen. Hierzu machen wir eine **vollständige Fallunterscheidung**. **Falls**  $a = b$ , dann folgt  $\{\{a\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\}$  und also  $\{a\} = \{a, d\}$ . Dh  $d \in \{a\}$  und also  $a = b = c = d$ . **Sonst**  $b \notin \{a\}$ , also  $\{a, b\} = \{a, d\}$  und somit  $b \in \{a, d\}$ . Also  $b = a$  oder  $b = d$ , aber  $a = b$  war ja gerade mit "sonst" ausgeschlossen, also muss  $b = d$  gelten. ☺

Nun können wir Triple  $(a, b, c) := ((a, b), c)$ , Quadruple  $(a, b, c, d) = ((a, b, c), d)$  usw als geordnete Objekte mit analogen Gleichheitskriterien definieren.

**Definition 1.9.** Für zwei Mengen  $A$  und  $B$  ist ihr (kartesisches) Produkt definiert als die Menge

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\} := \{x \mid \text{es existieren } a \in A \text{ und } b \in B \text{ mit } x = (a, b)\}.$$

Die linke, kompaktere Schreibweise wird wegen der Schreibökonomie öfters genutzt.

**1.2. Grundlegendes über Abbildungen.** Wir beginnen mit einer recht abstrakt anmutenden Definitionen, diese ist das Resultat eines Verallgemeinerungsprozesses, der über sehr lange Zeit ging. Beispiele aus der Schulmathematik erläutern das Ganze aber sehr gut.

**Definition 1.10.** Eine Abbildung  $F$  bildet eine Menge  $X$  in eine Menge  $Y$  ab, wenn

$$F \subset X \times Y, \quad \forall x \in X \exists y \in Y : (x, y) \in F \text{ und } \forall (x, y), (x, y') \in F : y = y'.$$

Wir schreiben dann  $F : X \rightarrow Y$ , und wenn  $(x, y) \in F$  dann schreiben wir  $y = F(x)$ . Wir identifizieren also die Abbildung  $F = \{(x, F(x)) \mid x \in X\}$  direkt mit ihrem "Graphen".

Dann heißt  $X$  der Definitionsbereich, mit  $\text{dmn}(F)$  bezeichnet, und das Bild der Funktion ist  $\text{im}(F) = \{y \in Y : \text{existiert ein } x \in X \text{ mit } y = F(x)\}$ . Der Wertebereich der Funktion ist (für uns) nicht eindeutig festgelegt: jede Menge, die  $\text{im}(f)$  enthält, kann als solcher genutzt werden.

Wenn  $Y = \mathbb{R}$ , (eventuell  $\mathbb{C}, \mathbb{R}^n$ ) nennen wir  $F$  oftmals Funktion und benutzen gerne kleine Buchstaben  $f, g, h, \dots$

Nun ein paar Illustrationen für Funktionen, wir greifen dabei Resultaten aus dem nächsten Kapitel vor, was aber hier erlaubt sein sollte, da diese auch schon in der Schule diskutiert wurden.

### Beispiel 1.11.

- (1)  $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$  definiert durch  $f(a) = 4 - a$  für  $a \in \{1, 2, 3\}$
- (2)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definiert als  $f(n) = 1$  für alle  $(\forall)n \in \mathbb{N}$ , eine konstante Funktion
- (3)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$  definiert als  $f(n) = \frac{1}{n}$  wenn  $n \in \mathbb{N}$
- (4)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x$ , die Identität (auf  $\mathbb{R}$ )
- (5)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$ , die Standardparabel
- (6)  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  definiert durch  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$ , hierbei  $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ . Diese Funktion  $f_6$  ist verschieden von der Funktion  $f_5$  aus (5), obwohl sie die gleiche Formel nutzt, hat sie ganz andere Eigenschaften, siehe unten. (Def 1.13)
- (7)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) = x$  wenn  $x \geq 0$  und  $f(x) = x^3$  sonst (dh  $x < 0$ ), eine der vielen Funktionen/Abbildungen die nicht durch eine (einzige) geschlossene Formel dargestellt werden. (DIY\*: kann als Grenzwert einer geschlossenen Formel dargestellt werden)

### Definition 1.12. Bild und Urbild

Sei  $F : X \rightarrow Y$  eine Abbildung und seien  $X' \subset X$  und  $Y' \subset Y$  gegeben. Dann definieren wir

$$F(X') = \{F(x) : x \in X'\} \subset Y \text{ als } F\text{-Bild von } X', \text{ und}$$

$$F^{-1}(Y') = \{x \in X, F(x) \in Y'\}, \text{ das } F\text{-Urbild von } Y'.$$

**Bemerkung/Warnung** Das  $F$ -Urbild existiert immer, auch wenn die "inverse Funktion  $F^{-1}$ ", siehe unten, nicht definiert ist.  $F(X) = \text{im}(F)$  gilt auch immer.

**Lemma 1.13.** Sei  $F : X \rightarrow Y$  und beliebige  $X_1, X_2 \subset X$  sowie  $Y_1, Y_2 \subset Y$  gegeben. Dann gilt

- a)  $F(X_1 \cup X_2) = F(X_1) \cup F(X_2)$ ,
- b)  $F(X_1 \cap X_2) \subset F(X_1) \cap F(X_2)$ ,
- c)  $F^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = F^{-1}(Y_1) \cup F^{-1}(Y_2)$  und
- d)  $F^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = F^{-1}(Y_1) \cap F^{-1}(Y_2)$ .

**Beweis:**

Nun wollen wir Begriffe einführen, die beschreiben, inwieweit  $F$  eine umkehrbare Abbildung ist.

**Definition 1.14.** Eine Abbildung  $F : X \rightarrow Y$  heißt

- *injektiv* (auch 1 – 1 genannt) wenn  $F(x) = F(x') \Rightarrow x = x'$ ,
- *surjektiv* (bildet auf  $Y$  ab, engl "onto") wenn  $\forall y \in Y \exists x \in X : F(x) = y$ ,
- *bijektiv* wenn  $F$  injektiv und surjektiv ist.

**Bemerkung** Man sieht sofort:  $F$  ist injektiv genau dann wenn das  $F$  Urbild jeder Einermenge von  $Y$  leer oder eine Einermenge ist. Und  $F$  ist surjektiv genau dann wenn  $F(X) = Y$  genau dann wenn das Urbild jeder nichtleeren Teilmenge von  $Y$  nichtleer ist. Die Beispiele aus 1.11 zeigen, dass eine Abbildung  $F$  surjektiv werden kann, ohne  $F$  zu ändern, wohl aber das  $Y$ , siehe  $\hat{f}_2 : \mathbb{N} \rightarrow \{1\}, \forall n \in \mathbb{N} : \hat{f}_2(n) = 1$ , aber dies geht immer ( $Y = F(X)$ ). Wenn eine Funktion  $F$  nicht injektiv ist, muss man einige Paare aus  $F$  entfernen um Injektivität zu erreichen (5) versus (6).

**Definition 1.15. Inverse- oder Umkehrfunktion** Sei  $F : X \rightarrow Y$  bijektiv. Dann definieren wir die Umkehrfunktion als

$F^{-1} : Y \rightarrow X$  so: wenn  $y \in Y$  dann ist  $F^{-1}(y)$  dasjenige  $x \in X$  welches  $F(x) = y$  erfüllt.

**Bemerkung** Die Existenz eines solchen  $x$  folgt aus der Surjektivität von  $F$ , seine Eindeutigkeit da  $F$  injektiv ist. **Dann** gilt auch  $\forall Y' \subset Y : F^{-1}(Y') = (F^{-1})(Y')$ , was die etwas verwirrende aber praktische Notation für  $F$ -Urbilder erklärt.

**Beispiel 1.16.** Die Funktion  $f_6$  aus Beispiel 11(6) ist injektiv (siehe Übungszettel) und surjektiv (wie der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen aus zeigen wird). Ihre Umkehrfunktion ist die

$$(\text{Quadrat})\text{Wurzelfunktion} \quad (f_6)^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \text{ mit } (f_6)^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

Der letzte wichtig(st)e Begriff betrifft eine Operation speziell für Abbildungen, die es erlaubt weitere zu konstruieren

**Definition 1.17. Zusammensetzung**

Seien Mengen  $X, Y, Z$  und Abbildungen  $F : X \rightarrow Y, G : Y \rightarrow Z$  gegeben, dann definieren wir die Verkettung von  $G$  und  $F$  als

$$G \circ F : X \rightarrow Z \text{ durch } (G \circ F)(x) = G(F(x)) \text{ wenn } x \in X.$$

Es gibt viele sehr allgemeine aber etwas abstrakte Resultate über Verkettung, hier nur 2 ganz einfache, bevor wie die Beispiele aus 1.11 konkret nutzen.

**Lemma 1.18.** Seien Mengen  $X, Y, Z$  und Abbildungen  $F : X \rightarrow Y, G : Y \rightarrow Z$  gegeben.

Dann ist  $F$  injektiv falls  $G \circ F$  injektiv ist, und  $G$  surjektiv wenn  $G \circ F$  so ist. Beide Schlussfolgerungen lassen sich nicht umkehren!

**Beweis:**

**Beispiel 1.19.** (1)  $f_5 \circ f_3 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $f_5 \circ f_3(n) = \frac{1}{n^2}$   
(2) Sei  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  definiert als  $d(x) = \sqrt{x}$ . Wenn  $g$  das quadratische Polynom  $y \mapsto y^2 - 3y + 1$  für alle reellen  $y$ . Dann ist  $g \circ f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$g \circ f(x) = (\sqrt{x})^2 - 3\sqrt{x} + 1 = x + 1 - 3\sqrt{x} \text{ für alle } x \geq 0.$$

## 2. REELLE ZAHLEN

Diese sind das Brot des Analytikers. Für die Konstruktion der reellen Zahlen siehe W.Rudins Buch “Analysis”, wir setzen hier die Existenz gleich voraus. Dann sind die reellen Zahlen eine Menge  $\mathbb{R}$  mit

- zwei Rechenoperationen die jedem Paar  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  zweier reeller Zahlen ein Element  $x + y \in \mathbb{R}$  bzw.  $x \cdot y \in \mathbb{R}$  zuordnen, und
- einer Ordnungs- (oder Vergleichsrelation)  $<$

so dass die im Folgenden allmählich diskutierten 13 Axiome gelten.

### I. Körperaxiome

Davon gibt es 9, und sie betreffen nur die Rechenoperationen (siehe auch Kapitel 2 im Buch Otto Forster, Analysis 1, Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen, elektronische CampusLizenz an der Uni Leipzig)

Addition		Multiplikation	
(AA)	$(x + y) + z = x + (y + z)$	(MA)	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ Assoziativgesetz
(AK)	$x + y = y + x$	(MK)	$x \cdot y = y \cdot x$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ Kommutativgesetz
(AN)	$\exists 0 \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : 0 + x = x$	(MN)	$\exists 1 \in \mathbb{R} : (1 \neq 0 \ \& \ \forall x \in \mathbb{R} : 1 \cdot x = x)$ neutrales Element
(AI)	$\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$	(MI)	$\forall x \in \mathbb{R} \text{ mit } x \neq 0 \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$ inverses Element
(DG)	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$		$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ Distributivgesetz

**Bemerkung 2.1.** Neutrale Elemente in (AN),(MN) sind eindeutig, dies macht die rechten Seiten in (AI),(MI) wohldefiniert.

Denn, z.B. wenn 1 und  $1'$  beide neutrale Element der Multiplikation sind, dann gilt ja

$$1' \stackrel{(MN)x=1'}{=} 1 \cdot 1' \stackrel{(MK)}{=} 1' \cdot 1 \stackrel{(MN)x=1}{=} 1,$$

also insgesamt  $1' = 1$ . Dh, alle möglichen neutralen Elemente der Multiplikation sind in der Tat dasselbe Element.

Das neutrale Element der Addition wird als Null bezeichnet, das neutrale Element der Multiplikation als Eins.

**Bemerkung 2.2.** Wir sehen, ohne das Distributivgesetz wären die Addition und die Multiplikation fast gleichwertige ("isomorphe") Operationen, man beachte allerdings den Ausschluss der Null in (MI). Erst dieses neunte Axiom bricht die weitgehende strukturelle Symmetrie zwischen diese beiden.

**Bemerkung 2.3.** Inverse Elemente in (AI),(MI) sind eindeutig für gegebenes  $x$ , siehe Satz 2.5 für eine allgemeinere Behauptung. Wir schreiben  $-x$  bzw.  $x^{-1}$  für additives bzw. multiplikatives Inverses.

**Bemerkung 2.4.** Die 9 Körperaxiome charakterisieren  $\mathbb{R}$  noch nicht, es gibt andere (noch zu diskutierende) Körper, welche diese ebenfalls erfüllen. Siehe, zB. Beispiel 2.11. Ein ganz trivialer Körper ist  $\{0\}$  mit den Operationen  $0 + 0 = 0 = 0 \cdot 0$ . Um dieses Beispiel auszuschliessen, fordern wir im Folgenden **immer**  $0 \neq 1$ .

**Satz 2.5.** *Eindeutige Lösbarkeit von Gleichungen*

- a)  $\forall x, y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} : x + z = y$ . Dieses  $z$  ist eindeutig und durch  $z = y + (-x)$  gegeben.
- b)  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x \neq 0 \exists z \in \mathbb{R} : xz = y$  Dieses  $z$  ist eindeutig und durch  $z = y(x^{-1})$  gegeben.

*Wir schreiben  $z = y - x$  für die Lösung in a) und  $z = y/x$  für die Lösung in b).*

**Beweis:**

NuN die b). Analog zu a), aber um multiplikatives Inverses zu nutzen, brauchen wir gemäß (MI) dass  $x \neq 0$ , wie vorausgesetzt.

Sonst wie zuvor: wenn es ein  $z$  mit  $x \cdot z = y$ , dann erhalten wir durch Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit  $(x^{-1})$  von links wieder eine Gleichheit, nämlich

$$(x^{-1})(xz) = (x^{-1})y.$$

Wir vertauschen die beiden Seiten und formen/vereinfachen die neue rechte Seite:

$$x^{-1} \cdot y = (x^{-1})(xz) \stackrel{MA}{=} ((x^{-1}x)z \stackrel{MI}{=} 1 \cdot z \stackrel{MN}{=} z.$$

Somit ist  $x^{-1}y = yx^{-1}$  der einzige Kandidat für  $z$ . Durch Einsetzen lässt sich leicht überprüfen, dass es eine(dh die einzige Lösung ist). Oder wir bemerken eben, dass sich der Übergang von der ersten zur zweiten Gleichung umkehren lässt indem wir letztere mit  $x$  von links multiplizieren. Das bedeutet, unsere **Umformungen** waren **äquivalent**.  $\square$

**Satz 2.6.**  $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \cdot x = 0$ .



**Korollar 2.7.**  $\forall x \in \mathbb{R} : (-1) \cdot x = -x$ .

**Beweis:**

$$x + (-1) \cdot x = x \cdot 1 + x \cdot (-1) = x \cdot (1 + (-1)) = x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0 = x + (-x).$$

Also  $x + (-1) \cdot x = x + (-x)$  Daraus folgt mit Addition von  $-x$  von links, oder aus Satz 2.5 (dessen Beweis genau dies tut), die Behauptung.

**Satz 2.8.**  $\forall x, y \in \mathbb{R} : xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ oder } y = 0)$ .

*Algebraiker formulieren das als: Keine "Nullteiler" in  $\mathbb{R}$  bzw einem Körper/ Integritätsbereich.*

**Beweis:**

**Lemma 2.9.**

- a)  $\forall x \in \mathbb{R} : -(-x) = x$
- b)  $\forall x \in \mathbb{R} \text{ mit } x \neq 0 : (x^{-1})^{-1} = x$

**Beispiel 2.10.**  $z^2 = 1 \Leftrightarrow (z = 1 \text{ oder } z = -1)$ .

**Beispiel 2.11.** Ein endlicher Körper

$GF(3) = \{0, 1, 2\}$  mit folgenden Rechenregeln ("Restklassen modulo 3" - für Experten).

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

also  $2^{-1} = 2$  und  $2 = -1$  hier.

Die Überprüfung der neun Körperaxiome von hand ist möglich aber mühsam. (Einfacher gestaltet sich dies z.B. für  $GF(2) = \{0, 1\}$  mit entsprechenden Rechenregeln, von denen nur  $1 + 1 = 0$  nicht unmittelbar aus (AN), (MN) oder Satz 1.5 folgt). Es zeigt sich, dass für jede Primzahl  $p$  ein Körper  $GF(p)$  mit  $p$  Elementen existiert, und die Gültigkeit der Körperaxiome (AA), (MA), (AK), (MK), (AN), (MN) und (DG) folgt leicht aus ähnlichen Aussagen für die natürlichen Zahlen ohne lästiges Probieren aller Einzelfälle.)

**Bemerkung 2.12.** *In den bisherigen Beweisen ließen sich die Schlussfolgerungen jeweils leicht aus den Axiomen herleiten. Wir brauchten noch keine feineren Methoden wie z.B. den indirekten Beweis (Widerspruchsbeweis). Dies wird sich im Folgenden ändern.*

Die bisher definierte Körperaxiome ermöglichen Rechnen mit Gleichungen, für das Rechnen mit Ungleichungen brauchen wir den Begriff der (An)Ordnung. (vergleiche Kapitel 3 in O.Forsters Buch) Primär muss man festlegen, welche Zahlen "positiv", d.h. größer als Null sind. Diese Zahlen müssen dann die im Folgenden angeführten Eigenschaften haben:

## II. Anordnungsaxiome

Es gibt eine Menge  $\mathbb{P}$  von reellen Zahlen (d.h.  $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$ ), so dass

(O.1)  $\forall x \in \mathbb{R}$  gilt *genau* eine der Aussagen:  $x \in \mathbb{P}, x = 0, -x \in \mathbb{P}$  "Trichotomie"

(O.2) Wenn  $x \in \mathbb{P}$  &  $y \in \mathbb{P}$  dann  $x + y \in \mathbb{P}$  "Abgeschlossenheit bezüglich Addition"

(O.3) Wenn  $x \in \mathbb{P}$  &  $y \in \mathbb{P}$  dann  $xy \in \mathbb{P}$  "Abgeschlossenheit bezüglich Multiplikation"

**Definition 2.13.** Wir sagen

$0 < x$  (d.h.  $x$  ist *positiv*) gdw.  $x \in \mathbb{P}$ ;  $0 > x$  (d.h.  $x$  ist *negativ*) gdw.  $-x \in \mathbb{P}$   
 $x < y$  (d.h.  $y$  größer  $x$ ) gdw.  $0 < y - x$ ;  $x > y$  (d.h.  $y$  kleiner  $x$ ) gdw.  $0 > y - x$   
 $x \leq y$  gdw. ( $x < y$  oder  $x = y$ );  $x \geq y$  gdw. ( $x > y$  oder  $x = y$ )

**Bemerkung 2.14.** a) *jedes  $x \in \mathbb{R}$  ist positiv, negativ oder null*

b) *nach Satz 1.5 gilt  $x = y \Leftrightarrow 0 = y - x$ , also  $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y$  oder  $x > y$  oder  $x = y$*

c)  *$x < y \Leftrightarrow -(x - y) = y - x \in \mathbb{P} \Leftrightarrow 0 > x - y \Leftrightarrow y > x$ , also  $y$  grösser  $x$  genau dann wenn  $x$  kleiner  $y$*

d)  *$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{P}_0 = \mathbb{P} \cup \{0\}$  nichtnegativ*

**Satz 2.15.** *Transitivität der Ordnung  $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x < y \text{ \& } y < z) \Rightarrow x < z$*

**Beweis**

**Bemerkung 2.16.** *Also  $(x \leq y \text{ \& } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ , mit  $x < z$  falls zudem  $x < y$  oder  $y < z$ .*

**Lemma 2.17.** *Translationsinvarianz  $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$*

**Beweis**

**Lemma 2.18.**  *$\forall x, y, u, v \in \mathbb{R} : (x < y \text{ \& } u < v) \Rightarrow x + u < y + v$*

**Beweis**

**Proposition 2.19.** *Spiegelung*  $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Leftrightarrow -y < -x$

**Beweis**

**Lemma 2.20.**  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$  mit  $x < y : (0 < z \Rightarrow zx < zy), (0 > z \Rightarrow zx > zy)$

**Beweis**

**Korollar 2.21.**  $\forall x, y, u, v \in \mathbb{R} : (0 \leq x < y \ \& \ 0 \leq u < v) \Rightarrow xu < yv$

**Beweis**

**Satz 2.22.**  $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ , und  $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ .

**Beweis:** Idee - mit vollständiger Fallunterscheidung.

**Korollar 2.23.**  $0 < 1$ , da  $1 = 1 \cdot 1 = 1^2$

Obwohl  $1 > 0$  und auch die etwas allgemeinere Ungleichung  $0 < x^2, x \neq 0$  sehr natürlich erscheinen, sind sie zentral für die weitere Entwicklung der Analysis! Weil in GF(3), siehe Beispiel 2.11,  $1 + 1 + 1 = 0$  kann in diesem Körper keine geeignete Menge  $\mathbb{P}$  "positiver" Elemente gefunden werden.

Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, dass umgekehrt jede positive reelle Zahl auch das Quadrat einer reellen Zahl ist. Dies wird noch ein weiteres (letztes) Axiom brauchen. Zuerst vollenden(zeigen) wir die Rechenregeln für Ungleichungen aus der Schule.

**Proposition 2.24.**  $\forall x, y \in \mathbb{R} :$

- a)  $x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0$
- b)  $0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$  ("Spiegelung an der 1")

**Beweis**

a) Wenn  $x > 0$ , dann  $x \neq 0$  und  $x^{-1} \neq 0$  (Lemma 1.9.b)). Somit  $0 < x^{-1}x^{-1}$  wegen Satz 1.22. Wegen  $x > 0$  zeigt Lemma 1.20, dass

$$0 = x \cdot 0 < x(x^{-1} \cdot x^{-1}) = (x \cdot x^{-1})x^{-1} = 1 \cdot x^{-1} = x^{-1}.$$

Umgekehrt, da  $(x^{-1})^{-1} = x$  folgt aus dem gerade Gezeigten die Umkehrimplikation.

b) Da  $0 < x, y$  gilt nach Teil a), dass  $0 < x^{-1}, y^{-1}$  und also  $0 < x^{-1}y^{-1}$ . Nun nutzen wir wieder Lemma 1.20, um

$$0 = 0(x^{-1}y^{-1}) < y^{-1} = x(x^{-1}y^{-1}) < x^{-1} = y(x^{-1}y^{-1})$$

zu folgern.

**Beispiel 2.25.** Seien  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $x > 0$  sowie  $y > 0$ . Dann gilt  $x < y$  genau dann wenn  $x^2 < y^2$ .

**Beweis**

**Beispiel 2.26.** Wenn  $x, y \in \mathbb{R}$ , dann folgt aus  $x^2 + y^2 = 0$ , dass  $x = y = 0$ .

**Beweis:** Idee Widerspruch und Satz 2.22.

**Beispiel 2.27.** Sei  $0 < x < y$  und möge  $\sqrt{xy}$  existieren (dh. positive Zahl, deren Quadrat  $xy$  ist). Dann gilt die AG-Ungleichung (zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel)

$$y > \frac{x+y}{2} > \sqrt{xy} > x.$$

**Beweis: Idee** - für die mittlere Ungleichung quadrieren (nutze Bsp 2.25) und quadratische Ergänzung (dh nutze binomischen Formel für Quadrate).

## Absolutbetrag, Maximum und Minimum

**Definition 2.28.** Sei  $x \in \mathbb{R}$ , wir definieren den Betrag von  $x$  als

$$|x| = \begin{cases} x & \text{wenn } x > 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \\ -x & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

**Bemerkung 2.29.** i) wichtige geometrische Bedeutung:  $|x - y|$  Abstand von  $x$  zu  $y$

ii) aus der Definition (mit Fallunterscheidung  $x >, =, < 0$ ) folgt leicht

$$x \leq |x| = |-x|, |x| \geq 0 \text{ mit "=" gdw. } x = 0$$

**Lemma 2.30.** Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

- a)  $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$  (und dann  $y \geq 0$ ),
- b) Sei  $\sigma \in \{-1, 1\}$  dann  $\sigma x \leq |x|$ , und falls  $x \geq 0$  dann  $|\sigma x| = |x| = x$ .

**Beweis:** a) Wenn  $-y \leq x \leq y$  dann  $x \leq y$  und  $-x \leq y$ . Da  $|x| \in \{x, -x\}$ , folgt  $|x| \leq y$ . Umgekehrt, wenn  $|x| \leq y$  dann sicher  $y \geq 0$  und entweder  $x \geq 0$  und somit  $y \geq |x| = x \geq 0 \geq -y$  oder  $x < 0$  und also  $y \geq |x| = -x \geq 0 \geq -y$  impliziert nach Prop. 2.19  $-y \leq -(-x) = x \leq -(-y) = y$ . b) nutze Bem 2.29.ii).

**Definition 2.31.** Sei  $x \in \mathbb{R}$ , wir definieren das Signum (entspricht Vorzeichen) von  $x$  als

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x > 0 \\ -1 & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

**Bemerkung 2.32.**  $\operatorname{sgn}(0)$  wird im Allgemeinen und in dieser VL als 1 definiert, auch  $-1$  ist möglich und ebenfalls  $\operatorname{sgn}(0) = 0$  wird gelegentlich in der Literatur verwendet. In jedem Falle gilt, wie der zweite Punkt in 2.29 (oder direkte FU) zeigt

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x| = \operatorname{sgn}(x) \cdot x \text{ und } x = \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|.$$

Dies hilft oftmals, lästige FUn einzusparen.

**Satz 2.33.** Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$

- a)  $|xy| = |x||y|$  Multiplikativität
- b)  $|x + y| \leq |x| + |y|$  Dreiecks-Ungleichung!

**Beweis: Ideen** Nutze Lemma 2.30b), für a) mit  $\operatorname{sgn}(x)$  und  $\operatorname{sgn}(y)$ , für b) mit  $\operatorname{sgn}(x+y)$ .

**Definition 2.34.** Seien  $x, y \in \mathbb{R}$  gegeben, wir definieren dann

$$\min(x, y) = \begin{cases} x & \text{wenn } x \leq y \\ y & \text{wenn } x > y \end{cases}, \text{ und } \max(x, y) = \begin{cases} y & \text{wenn } x \leq y \\ x & \text{wenn } x > y \end{cases}.$$

**Lemma 2.35.** Für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$\max(x, y) = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2} \text{ und } \min(x, y) = \frac{x+y}{2} - \frac{|x-y|}{2}.$$

**Beweis** FU:

Die geometrische Bedeutung dieser Formel ist klar: gehe von der Mitte  $\frac{x+y}{2}$  zwischen zwei Zahlen  $x, y$  den halben Abstand  $\frac{|x-y|}{2}$  der beiden Zahlen in positive Richtung und gelange zur grösseren der beiden Zahlen. Analog für  $\min(x, y)$ .

Mittels  $\max(x, y, z) = \max(x, \max(y, z))$  usw. ist Maximum und analog Minimum für beliebige “endliche” (noch zu definieren!) Mengen reeller Zahlen definiert. Diese größten und kleinsten Elemente einer Menge existieren nicht mehr, wenn wir, wie im Folgenden, allgemeine unendliche Mengen betrachten.

**Beispiel 2.36.**  $M = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$  hat kein Minimum, das heißt es gibt kein kleinstes Element in dieser Menge.

**Beweis** indirekt

**Definition 2.37.** Sei  $M \subset \mathbb{R}$  beliebig

- a)  $s \in \mathbb{R}$  ist **max**  $M$ , das Maximum der Menge  $M$ , wenn  $s \in M$  und  $\forall x \in M : x \leq s$ .  
 $s \in \mathbb{R}$  ist **min**  $M$ , das Minimum der Menge  $M$ , wenn  $s \in M$  und  $\forall x \in M : x \geq s$
- b)  $s \in \mathbb{R}$  ist obere Schranke (**OS**) für  $M$  wenn  $\forall x \in M : x \leq s$ ,  $s \in \mathbb{R}$  ist untere Schranke (**US**) für  $M$  wenn  $\forall x \in M : x \geq s$
- $s \in \mathbb{R}$  ist **Supremum** von  $M$  ( $s = \sup M$ ) wenn  $s$  die kleinste aller oberen Schranken von  $M$  ist, d.h.

$$(\forall x \in M : x \leq s) \text{ \& } (\forall t \text{ OS von } M : t \geq s).$$

- $s \in \mathbb{R}$  ist **Infimum** von  $M$  ( $s = \inf M$ ) wenn  $s$  die größte aller unteren Schranken von  $M$  ist, d.h.

$$(\forall x \in M : x \geq s) \text{ \& } (\forall t \text{ US von } M : t \leq s).$$

- $M$  ist von oben (bzw. unten) beschränkt wenn es eine obere (bzw. untere Schranke) für  $M$  gibt.  $M$  beschränkt wenn von unten und oben beschränkt.

**Beispiel 2.36.** (Fortsetzung)  $M = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$  hat keine OS,  $s$  ist US gdw.  $s \leq 0$ , also  $\inf M = 0$  aber  $\sup M$  existiert nicht.

**Beweis**

Die Existenz von  $\inf$  und  $\sup$  wann immer es entsprechende Schranken gibt, gilt nicht nur für so einfache Mengen wie dieses  $M$  (Intervall), sondern im Allgemeinen. Das unterscheidet  $\mathbb{R}$  von anderen Körpern und ist formuliert im letzten noch benötigten

### III. Vollständigkeitsaxiom

(VA) Für jede nichtleere und von oben beschränkte Menge  $M \subset \mathbb{R}$  existiert das Supremum  $\sup M$ .

**Lemma 2.38.** Sei  $M$  eine Menge reeller Zahlen, dann  $(\exists \max M \Leftrightarrow \sup M \in M)$

**Beweis**

**Proposition 2.39.** Sei  $M \subset \mathbb{R}$  nichtleer und von oben beschränkt,  $s \in \mathbb{R}$ . Dann

- $s \geq \sup M \Leftrightarrow \forall m \in M : m \leq s$
- $s = \sup M \Leftrightarrow (\forall m \in M : m \leq s \ \& \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in M : s - \varepsilon < m)$

APPROXIMATIONSPRINZIP

**Beweis**

**Lemma 2.40.** *Seien  $M, N \subset \mathbb{R}$  nichtleer und von oben beschränkt. Dann*

- a)  $\inf(-M) = -\sup M$ ,
- b)  $\sup(M + N) = \sup M + \sup N$ ,

wobei  $-M = \{-m : m \in M\}$  ist die "Spiegelung" von  $M$ , und  $M + N = \{m + n : m \in M \text{ \& } n \in N\}$  die Summe der beiden Mengen ist.

**Beweis** Teil a) siehe ÜZ4. Teil b) etwas schwerer - aber nicht wirklich schwer: nutzen Approximationseigenschaft und  $\frac{\varepsilon}{2}$ -Trick.

Nun die erste überraschende und wichtige Konsequenz des Vollständigkeitsaxioms.

**Satz 2.41.** *Für alle positiven reellen  $x$  existiert ein eindeutiges  $w > 0$ , so dass  $w^2 = x$ .*

Wir schreiben für diese Zahl  $w = \sqrt{x}$  und nennen sie Wurzel aus(von)  $x$ .

**Beweis** Eindeutigkeit schon gezeigt. Die Schlüsselidee für Existenz ist zu zeigen, dass  $w^2 = x$  wobei  $w = \sup\{y > 0 : y^2 < x\}$ . Hierfür sowohl  $w^2 > x$  als auch  $w^2 < x$  durch "Linearisierung der Quadratfunktion" zu Widersprüchen führen.

Dass heißt,  $z_z$  die Ungleichungen  $x^2 > 2$  und  $x^2 < 2$  bleiben gültig wenn  $x$  nur "wenig" geändert wird. Hierzu explizite (und geeignete! - je nach Typ der Ungleichung) Vereinfachungen von  $(x + \delta)^2 = x^2 + 2\delta x + \delta^2$  finden. Stabilität von Ungleichungen wie  $f(x) > y$  hat mit "Stetigkeit" der Funktion  $f$  zu tun - diese erhalten wir später allgemeiner ohne explizites Rechnen ("softer") für den "Zwischenwertsatz". Deshalb diesen Beweis verstehen!!





## Zahlbereiche

Nachdem wir alle grundlegenden Axiome für  $\mathbb{R}$  eingeführt und erste Anwendungen gesehen haben, benennen wir noch wichtige Teilmengen von  $\mathbb{R}$  – wie die natürlichen, die ganzen und die rationalen Zahlen.

**Definition 2.42.**  $M \subset \mathbb{R}$  heißt induktiv wenn  $1 \in M$  und  $\forall n \in \mathbb{R} : n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$ .

zB  $\mathbb{R} \supset (0, \infty) \supset [1, \infty) \supset \{1\} \cup [2, \infty)$  sind 4 verschiedene induktive Mengen.

**Satz 2.43.** *Es gibt eine kleinste induktiven Menge, dh. sie ist Teilmenge jeder induktiven Menge. Diese kleinste induktive Menge ist eindeutig, wird mit  $\mathbb{N}$  bezeichnet und ihre Elemente werden natürliche Zahlen genannt.*

**Beweis- Idee:** der Durchschnitt der Familie aller induktiven Mengen ist induktiv - das heißt, wir definieren

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{R} : \text{wenn } M \subset \mathbb{R} \text{ dann } n \in M \},$$

und zeigen dieses  $\mathbb{N}$  ist induktiv - trivialerweise die kleinste.

**Korollar 2.44.** (Schwaches) Induktionsprinzip:  $M$  induktiv  $\Rightarrow \mathbb{N} \subset M$ . Also wenn  $P$  eine mathematische Aussage ist, so dass:  $P(1)$  wahr ist und für alle  $n \in \mathbb{N}$  aus  $P(n)$  wahr auch  $P(n+1)$  wahr folgt, dann gilt  $P(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Beweis- Idee:** Nur überprüfen, dass die Menge  $M$  aller  $n \in \mathbb{N}$ , für die  $P(n)$  gilt, induktiv ist. Aber das ist ja trivial!

Bemerkung Wenn  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ , dann  $(0 \in M \text{ und } (n \in M \Rightarrow n+1 \in M))$  impliziert  $\mathbb{N}_0 \subset M$ , da  $0+1 \in M$  also  $M$  induktiv und somit  $\mathbb{N} \subset M$ , Also wenn  $P$  mathematische Aussage, so dass:  $P(0)$  und  $\forall n \in \mathbb{N}_0 : P(n) \Rightarrow P(n+1)$ , dann gilt  $P(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Definition 2.45.** Summen-und Produktsymbol Für  $n, m, k \in \mathbb{N}_0$  setzen wir ("rekursive Definition")

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{n-1} a_k &= 0 \text{ (leere Summe)}, \forall m \geq n-1 : \sum_{k=n}^{m+1} a_k = \left( \sum_{k=n}^m a_k \right) + a_{m+1} \\ \prod_{k=n}^{n-1} a_k &= 1 \text{ (leeres Produkt)}, \forall m \geq n-1 : \prod_{k=n}^{m+1} a_k = \left( \prod_{k=n}^m a_k \right) \cdot a_{m+1} \\ a^n &= \prod_{k=1}^n a, \text{ Potenz } (a^0 = 1 \text{ wenn } a \neq 0), n! = \prod_{k=1}^n k, \text{ Fakultät } (0! = 1) \end{aligned}$$

Mit Induktion kann man zeigen, diese Symbole sind für  $a_k \in \mathbb{R}$  immer wohl definiert.

**Satz 2.46.** Bernoullische Ungleichung:

a)  $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R} \text{ mit } x \geq -1 : (1+x)^n \geq 1+nx.$

b) Überdies gilt  $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R} \text{ wenn } n \geq 2 (= 1+1) \text{ und } (x \geq -1 \text{ \& } x \neq 0) \text{ dann}$

$$(1+x)^n > 1+nx. \quad (*)$$

**Beweis-Idee:** Falls  $n = 1$  oder  $x = 0$  sind Behauptungen a) and b) trivial. Also oBdA  $x \neq 0$  und  $n \neq 1, \Rightarrow n \geq 2$  (wird noch gezeigt). Somit b)  $z_z$ , hierzu fixieren wir  $x \in [-1, 0) \cup (0, \infty)$ , betrachten die Aussage  $P(n)(= P_x(n)) : (n = 1 \text{ oder } (*)) \text{ gilt}$  und beweisen sie mit Induktion.

**Proposition 2.47.** Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Dann  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$ .

**Beweis** Idee: zB  $\frac{a_m}{a_{m-1}} > 1$  für  $m (= n+1) \in \mathbb{N}$  mit Bernoullischer Ungleichung 2.26.a) beweisen (Dieser (Doppel)Bruch ist einfacher zu behandeln, schließlich nur  $m^2$  im Nenner). Keine Induktion nötig!

**Definition 2.48.** Für  $n, k \in \mathbb{N}_0$  ist der Binominalkoeffizient definiert durch

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left( = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} \right) & \text{für } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{wenn } k > n. \end{cases}$$

$$\text{z.B. } \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = n, n > 0, \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, 0 \leq k \leq n.$$

**Lemma 2.49.** Vom Pascalschen Dreieck

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \forall k \in \mathbb{N} : \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

**Beweis** Wenn  $k > n$  Definition direkt nutzen, sonst Bruchrechnung.

**Satz 2.50.** Binominalsatz Mit der (Zusatz)Vereinbarung  $0^0 = 1$  gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}_0 : (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

**Beweis** Idee: Induktion in  $n$ . Entstehen  $\sum_{k=0}^n$  und  $\sum_{k=1}^{n+1}$ , den gemeinsamen Teil  $\sum_{k=1}^n$  mit Lemma 2.49 behandeln.

Obwohl wir  $\mathbb{N}$  über die Eigenschaft induktive Menge definiert haben, erlaubt es als Zahlenbereich, die Rechenoperationen, wie aus der Elementarmathematik gewohnt, auszuführen.

**Lemma 2.51.**

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : n + m \in \mathbb{N} \ \& \ n \cdot m \in \mathbb{N}.$$

**Beweis:** Idee – mit Induktion, zuerst für beliebiges aber fixes  $n \in \mathbb{N}$  Induktion in  $m$  machen für die Addition. Dies dann nutzen, um wieder für beliebiges aber fixes  $n \in \mathbb{N}$  Induktion in  $m$  für die Multiplikation zu machen.  $P_n^+(m) : n + m \in \mathbb{N}$ ,  $P_n(m) : n \cdot m \in \mathbb{N}$ .  $P_n^+ — \text{DIY}$ , für  $P_n(m) \Rightarrow P_n(m + 1)$  nutzen Distributivgesetz und den Teil für “+”.

**Lemma 2.52.**

$$\forall n \in \mathbb{N} : n = 1 \text{ oder } (n > 1 \ \& \ n - 1 \in \mathbb{N}).$$

*Insbesondere ist  $1 = \min \mathbb{N}$ .*

**Beweis- Idee:**  $[1, \infty) \supset \mathbb{N}$  da induktiv und  $M = \mathbb{N} \setminus \{n\}$  echte Teilmenge von  $\mathbb{N}$  also keine induktive Menge.

Oder Induktion in  $n$  – Standard: Nennen obige Aussage  $P(n)$ , dann  $P(1)$  trivial.

Nun  $z_z$ , dass  $\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ . Da  $1 = 1^2 > 0$  folgt  $2 = 1 + 1 > 1$  und  $2 - 1 = 1 \in \mathbb{N}$ , also gilt  $P(2)$  und somit obige Implikation für  $n = 1$ .

Sonst  $n \neq 1$  und weil  $P(n)$  gilt also  $n > 1$ . Damit  $n + 1 > n > 1$  und wie zuvor  $(n + 1) - 1 \in \mathbb{N}$ , also wieder  $P(n + 1)$  wahr.  $\square$

**Satz 2.53.**

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : n \leq m \text{ oder } n - m \in \mathbb{N}. \quad (: P_n(m))$$

**Beweis-Idee:** für fixes  $n$  Induktion in  $m$ , hierbei Lemma 2.52 für  $m = 1$  und  $k = n - m$  nutzen.

Wir haben also gezeigt:  $m < n$  in  $\mathbb{N} \Rightarrow m \leq n - 1$ , denn  $n - m \in \mathbb{N}$  also  $n - m \geq 1$ .

**Definition 2.54.**  $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$  sind die ganzen Zahlen.

**Proposition 2.55.** a)  $\mathbb{Z} = \mathbb{N} - \mathbb{N} = \{n - m : n, m \in \mathbb{N}\}$ .

b) (Deshalb)  $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x + y, x - y, x \cdot y \in \mathbb{Z}$ .

**Beweis: Idee -** In a) nur  $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N} - \mathbb{N}$  nichttrivial, nutzen Lemma 2.53. Für b): nutze a) und Lemma 2.51 (mit oder ohne FU).

**Definition 2.56.**  $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \text{ \& } q \in \mathbb{N}\}$  sind die rationalen Zahlen. Also  $q \neq 0$ !

Klarerweise  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

**Bemerkung 2.57.**  $(\mathbb{Q}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}})$  mit  $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{P} \cap \mathbb{Q}$  erfüllt die 9 Körperaxiome und die 3 Anordnungsaxiome, dies lässt sich einfach überprüfen — da  $\frac{p}{q} \frac{m}{n} = \frac{pm}{qn}$  und  $\frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{pn+qm}{qn}$ , führen die Operation  $+, \cdot$  von  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  nach  $\mathbb{Q}$  zurück,  $-\frac{p}{q} = \frac{-p}{q}$  und  $(\frac{p}{q})^{-1} = \frac{q}{p}$  für  $p > 0$ ,  $(\frac{p}{q})^{-1} = \frac{-q}{-p}$  für  $p < 0$  zeigt die Existenz der Inversen in  $\mathbb{Q}$ .

## Starke Induktion

mal etwas Neues

**Satz 2.58.** WOHLORDNUNG DER NATÜRLICHEN ZAHLEN *Sei  $M \subset \mathbb{N}$  nichtleer, dann existiert  $\min M$ .*

**Beweis** Idee – Für beliebiges aber fixes solches  $M$  mit Induktion ( Korollar 2.44) in  $n$  zeigen:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists m \in M : m \leq n \Rightarrow \exists \min M.$$

**Korollar 2.59.** STARKES INDUKTIONSPRINZIP *Sei  $P$  eine mathematische Aussage, so dass  $P(1)$  und  $\forall n \in \mathbb{N} : (\forall k \in \mathbb{N} : k \leq n \Rightarrow P(k)) \Rightarrow P(n+1)$ . Dann gilt  $P(n)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Beweis** Idee: Betrachte  $M = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ falsch} \}$ . Falls  $M \neq \emptyset$  gibt es einen Widerspruch für  $n = \min M - 1 \in \mathbb{N}$  da wegen  $P(1)$  sicher  $\min M \neq 1$ .

### Bemerkungen

- auch als Prinzip der "least criminals" bekannt, eine gute Übersetzung wäre: die kleinsten/ersten "Bösewichte" im Sinne von minimalen Gegenbeispielen. Es ist oftmals einfacher, die Existenz solcher als die Existenz allgemeiner Gegenbeispiele auszuschliessen.
- warum *starkes* Induktionsprinzip genannt: Um das entscheidende  $P(n+1)$  zu beweisen, können wir nunmehr  $P(1), P(2), \dots, P(n)$  voraussetzen. Bisher konnten wir nur  $P(n)$  annehmen und also haben wir nun eine "stärkere" Beweismethode, die es erlaubt, mehr und "stärkere" Aussagen zu beweisen.
- eine einfacherere (meine Lieblings-)Formulierung, die allerdings von der bekannten Formulierung " $\Rightarrow P(n+1)$ " abweicht ist folgende.

Sei  $P$  eine mathematische Aussage, so dass für jedes  $n \in \mathbb{N}$   $P(n)$  gilt, falls

$$\forall k \in \mathbb{N} : k < n \Rightarrow P(k). \text{ Dann gilt } P(n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(DIY: zB  $P(1)$  gilt dann)

**Definition 2.60.** *Wir sagen  $p$  ist Primzahl, wenn  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p > 1$  und*

$$(p = n \cdot m, \text{ mit } n, m \in \mathbb{N}) \Rightarrow (n = 1 \text{ oder } m = 1)).$$

**Behauptung:** *Jedes  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > 1$  ist Produkt (eventuell einfaktorieles) endlich vieler Primzahlen. (Die Eindeutigkeit der Produktdarstellung ist viel tiefliegender!)*

**Beweis:** Mit starker Induktion einfachst, mit Kor. 2.44 (schwache Induktion) unklar!

**Lemma 2.61.**  $\forall n \in \mathbb{N} : (\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k \text{ oder } \exists l \in \mathbb{N} : n = 2l - 1)$ , und nur einer der Fälle tritt ein. (nennen  $n$  dann gerade bzw ungerade).

**Beweis:** Induktion, Widerspruch zu  $1 = \min \mathbb{N}$  für Eindeutigkeit des Falles.

**Satz 2.62.** (Der Klassiker)  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ , d.h. die Diagonale im Einheitsquadrat ist irrational.

**Beweis: Idee-** Mit  $\zeta$ , betrachte eine Bruchdarstellung mit kleinstem Nenner. Zeige Zähler & Nenner gerade, wir können also kürzen!  $M = \{q \in \mathbb{N} : \exists p \in \mathbb{N} : p^2/q^2 = 2\} \neq \emptyset$ .



## Rational versus Reell

Weil nicht alle reellen Zahlen rational sind, müssen wir das Verhältnis von  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  studieren. Wir beginnen mit der folgenden Aussage, die auf Archimedes zurückgeführt wird, obwohl er Eudoxos von Knidos als Urheber erwähnt. Die Bezeichnung "Axiom" ist zwar in der Literatur aus historischen Gründen üblich, in der Theorie der reellen Zahlen jedoch unbegründet, da es sich hier um eine Konsequenz aus unseren 13 Axiomen handelt.

**Satz 2.63.** (Archimedisches "Axiom") *Die Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen ist in  $\mathbb{R}$  nicht von oben beschränkt.*

**Beweis:** Idee: Mit  $\zeta$ , betrachte dazu  $\sup \mathbb{N}$  und Approximationsprinzip.

**Korollar 2.64.** (Eudoxos)  $\forall x \in \mathbb{R} : x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$

**Beweis:** Idee: folgt direkt aus dem Archimedischen Axiom.

Nunmehr können wir zeigen, dass obwohl nicht alle Zahlen rational sind, die rationalen Zahlen zumindest alle Zahlen gut annähern können.

**Satz 2.65.** (Rationale Zahlen sind dicht) *Für alle  $x < y$  reell existiert  $z \in \mathbb{Q}$ , die  $x < z < y$  erfüllt.*

**Beweis:** Idee: Erst nach  $\mathbb{R}_+$  verschieben. Nun führen kleine Schritte zum Ziel!

## Die komplexen Zahlen

Als letzten Körper führen wir die komplexen Zahlen ein, in diesem Körper ist die in  $\mathbb{R}$  unlösbare Gleichung  $x^2 + 1 = 0$  leicht lösbar.

**Definition 2.66.** Wir betrachten  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$  mit den Operationen

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Dann ist  $\mathbb{C}$  ein Körper mit Nullelement  $(0, 0)$  (neutral für “+”) und Einselement  $(1, 0)$  (neutral für “·”).

**Bemerkung 2.67.**

- nur die Axiome (MA), (MK) und (DG) erfordern etwas Arbeit
- für  $(a, b) \neq (0, 0)$  ist  $(a/(a^2 + b^2), -b/(a^2 + b^2))$  das multiplikative Inverse !!
- $\mathbb{R} \equiv \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C}$ , d.h.  $x \rightarrow (x, 0)$  gibt  $\mathbb{R}$  als Unterkörper von  $\mathbb{C}$  - wir haben  $x + y \rightarrow (x, 0) + (y, 0)$  und  $x \cdot y \rightarrow (x, 0) \cdot (y, 0)$
- $(0, 1)^2 = (-1, 0)$ !! Wir schreiben  $i$  für  $(0, 1)$  und  $a + bi$  für  $(a, b)$  Somit  $i^2 = -1$  und  $\mathbb{C}$  kann nicht angeordnet werden, d.h. es gibt kein  $\mathbb{P} \subset \mathbb{C}$ , das (O.1), (O.2) und (O.3) erfüllt.
- Definition von “·” lässt sich “motivieren” aus Körperaxiomen und  $(0, 1)^2 = (-1, 0)$ .

**Definition 2.68.** Für  $z = a + bi = (a, b) \in \mathbb{C}$  definieren wir

$$\operatorname{Re}(z) = a, \operatorname{Im}(z) = b, |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ Realteil, Imaginärteil und Betrag von } z$$

sowie

$$\bar{z} = a - bi \text{ die zu } z \text{ komplex konjugierte Zahl.}$$

Wie in  $\mathbb{R}$  ist  $|z|$  der Abstand von  $z$  zum Ursprung ( $\mathbb{C}$  wird mit der Euklidischen Ebene  $\mathbb{R}^2$  identifiziert).

**Lemma 2.69.**  $\forall z, w \in \mathbb{C}$

- a)  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} !$
- b)  $\bar{\bar{z}} = z, |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = |\bar{z}|, \operatorname{Re}(z) = (z + \bar{z})/2, \operatorname{Im}(z) = (z - \bar{z})/2i.$

**Beweis:** Zweite Teilbehauptung von a) in der Tat entscheidend, zB Satz 2.70.c) & d).

**Satz 2.70.** Für alle  $z, w \in \mathbb{C}$

- a)  $|Re(z)| \leq |z|, |Im(z)| \leq |z|$  und  $|Re(z)| = |z| \Leftrightarrow Im(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- b)  $|z| \geq 0, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$  (wie in  $\mathbb{R}$ )
- c)  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$  Multiplikativität (wie in  $\mathbb{R}$ )
- d)  $|z + w| \leq |z| + |w|$   $\Delta$ -Ungleichung (wie in  $\mathbb{R}$ )

**Beweis:**

ENDE VL8 11.11.24 (minus rat versus reel)

**Proposition 2.71.** Komplexe Quadratwurzeln Für gegebenes  $c \in \mathbb{C}$  suchen wir alle (da kein "Positives" ausgezeichnet ist)  $w \in \mathbb{C}$  mit  $w^2 = c$ .

Hierbei  $w^2 = 0 \Leftrightarrow w = 0$ , und wenn  $c \neq 0$  dann ist

$$w_1 = \sqrt{\frac{|c| + Re(c)}{2}} + \sigma \sqrt{\frac{|c| - Re(c)}{2}} i \text{ wo } \sigma = \begin{cases} 1 & \text{für } Im(c) \geq 0 \\ -1 & \text{für } Im(c) < 0 \end{cases}$$

eine Lösung, die einzige andere Lösung ist  $w_2 = -w_1$ .

Jede quadratische Gleichung

$$0 = z^2 + az + b = (z + \frac{a}{2})^2 - (\frac{a^2}{4} - b) = (z + \frac{a}{2} + w)(z + \frac{a}{2} - w)$$

wobei  $w^2 = \frac{a^2}{4} - b$  kann somit in  $\mathbb{C}$  gelöst werden.

**Beweis:**

IM ZUSAMMENHANG MIT DER EXPONENTIALFUNKTION UND DER EULERSCHEN FORMEL WERDEN WIR BALD EINEN GEOMETRISCHEREN ZUGANG ZU DEN KOMPLEXEN ZAHLEN  $\mathbb{C}$  FINDEN, DER DIESE ALS EBENE UND DIE RECHENOPERATIONEN ALS GEOMETRISCHE VERSCHIEBUNGEN UND DREHSTRECKUNGEN INTERPRETIERT.

Zum Beispiel, wenn  $(0, z, w) \in \mathbb{C}$  ein Dreieck  $\Delta$  in der komplexen Ebene darstellt und  $u \in \mathbb{C}$ , dann hat das Dreieck  $(0+u = u, z+u, w+u)$  wieder Seiten der Länge  $|z|, |w|, |z-w|$  (also kongruent und parallel zu  $\Delta$ ) und das Dreieck  $(0 \cdot u = 0, z \cdot u, w \cdot u)$  Seiten der Länge  $|z| \cdot |u|, |w| \cdot |u|, |z-w| \cdot |u|$ , ist also ähnlich zu  $\Delta$  und hat somit gleiche Winkel.

### 3. FOLGEN UND REIHEN

**Definition 3.1.** Eine Folge  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  in  $\mathbb{R}$  (in  $\mathbb{C}, M$ ) ist eine Abbildung  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$   $n \mapsto a_n$  ( $n \mapsto z_n \in \mathbb{C}$ ,  $n \mapsto x_n \in M$ ), dh. jedem  $n \in \mathbb{N}$  ist ein Folgenglied  $a_n$  ( $z_n, x_n$ ) zugeordnet.

**Definition 3.2.** Sei  $(z_n)_{n=1}^{\infty}$  Folge in  $\mathbb{C}$ . Wir sagen,  $(z_n)_{n=1}^{\infty}$  hat Grenzwert  $z \in \mathbb{C}$  wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N (= N_{\varepsilon}) \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |z - z_n| < \varepsilon.$$

Folge heißt konvergent, wenn sie einen Grenzwert hat, sonst divergent.

#### Bemerkung

a) die vollkommen analoge Definition wird benutzt für den reellen Grenzwert  $a \in \mathbb{R}$  und die reelle Zahlenfolge  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ , da  $|a_n - a|_{\mathbb{R}} = |a_n - a|_{\mathbb{C}}$ , konvergieren reelle konvergente Folgen auch in  $\mathbb{C}$ .

b) die Annahme, dass  $N = (N_{\varepsilon}) \in \mathbb{N}$ , also eine natürliche Zahl ist, ist nicht wirklich notwendig und wird im Folgenden ausgelassen, auch wenn sie in der Literatur sehr oft gemacht wird. In der Tat, wenn für ein gegebenes  $\varepsilon > 0 \exists N (= N_{\varepsilon}) \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |z - z_n| < \varepsilon$ , dann gibt es nach dem Archimedes' Axiom ein  $\hat{N} \in \mathbb{N}$  mit  $\hat{N} > N$  und also  $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq \hat{N} \Rightarrow n \geq N \Rightarrow |z - z_n| < \varepsilon$ .

**Satz 3.3.** Jede konvergente Folge hat genau einen Grenzwert.

**Beweis: Idee:** Dreiecksungleichung benutzen, Abstand zwischen zwei (potentiellen) Grenzwerten ist "beliebig klein".

Wir schreiben  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$  oder auch  $(z_n \rightarrow z \text{ für } n \rightarrow \infty)$  wenn die Folge  $(z_n)_{n=1}^{\infty}$  den Grenzwert  $z$  hat.

**Definition 3.4.** Eine Folge ist Nullfolge (**NF**) wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ .

**Beispiel 3.5.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , siehe Eudoxos 2.64.

**Definition 3.6.**  $(z_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$  eine beschränkte Folge **BF** wenn  $\exists M \forall n \geq 1 : |z_n| \leq M$ , d.h. es gibt einen (vielleicht großen) Kreis, der die gesamte Folge enthält. (Reelle Folge genauso: ist beschränkt wenn in einem endlichen Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ .

**Proposition 3.7.** a) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

b) Sei  $(z_n)_{n=1}^\infty$  Nullfolge und  $(u_n)_{n=1}^\infty$  beschränkt, dann ist  $(z_n u_n)_{n=1}^\infty$  wieder Nullfolge

**Beweis-Idee:**  $\Delta$ -Ungleichung und 2.70.c) - Multiplikativität des Betrages.

**Lemma 3.8.** a) Sei  $(z_n)_{n=1}^\infty$  eine komplexe Folge und  $z \in \mathbb{C}$ , dann

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \Leftrightarrow (z - z_n)_{n=1}^\infty \text{ Nullfolge} \Leftrightarrow (|z - z_n|)_{n=1}^\infty \text{ reelle Nullfolge.}$$

b) Wenn  $(z_n)_{n=1}^\infty, (u_n)_{n=1}^\infty$  Nullfolgen sind, dann ist  $(z_n + u_n)_{n=1}^\infty$  auch eine Nullfolge.

**Beweis-Idee:** a) offensichtliche Reformulierung, für b) die  $\Delta$ -UGL.

**Korollar 3.9.** Algebra für Grenzwerte Seien  $(z_n)_{n=1}^\infty, (w_n)_{n=1}^\infty$  konvergente Folgen in  $\mathbb{C}$

a)  $\forall \alpha \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + \alpha w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n + \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$  ( $\alpha = \pm 1$  wichtig)

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \cdot w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$

c) Wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq 0$  dann  $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : z_n \neq 0$  und  $(z_n^{-1})_{n=N}^\infty$  hat Grenzwert  $(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n^{-1}$ .

**Beweis-Idee:** einfachst mit Prop 3.7 und Lemma 3.8

**Bemerkung:** Es gab am 14.11.25 eine lebhafte Diskussion (in der VL und danach), ob ein anderer als unser Grenzwertbegriff möglich bzw "besser" ist. Insbesondere wurde ein Konzept erwähnt, dass im allgemeinen als **HäufungsPunkt** bekannt.

Wenn  $(a_n)_1^\infty$  eine reelle oder komplexe Folge ist, dann ist  $a$  ein Häufungspunkt wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : |a - a_n| < \varepsilon$$

Man kann leicht sehen, dass  $a$  ein HP der Folge  $(a_n)_1^\infty$  ist genau dann wenn es eine strikt wachsende Folge  $(n_k)_1^\infty$  gibt, so dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ , dies ist aber hier nicht notwendig zu überprüfen.

In jedem Falle lässt sich zeigen, dass jede beschränkte Folge mindest einen HP aber eventuell auch unendlich viele HP hat. Dieser Begriff scheint also viel nützlicher als der des GW, denn letzterer existiert oftmals gar nicht. Er hat aber einen entscheidenden Nachteil: es gibt keine Entsprechung zu Korollar 3.9, keine "Algebra für Häufungspunkte", zB ist die Menge der HP von  $(a_n + b_n)_1^\infty$  ist durch die Mengen der HP von  $(a_n)_1^\infty$  und von  $(b_n)_1^\infty$ .

Als Beispiel betrachten wir die Folgen  $\hat{a}$  mit  $a_n = (-1)^n$  und  $\hat{b}$  mit  $b_n = (-1)^{n+1} = -a_n$  für  $n \in \mathbb{N}$ .

Es ist leicht zu überprüfen, dass  $HP(\hat{a}) = HP(\hat{b}) = \{-1, 1\}$  gleich sind, aber  $HP(\hat{a} + \hat{a}) = HP((2(-1)^n)_1^\infty) = \{-2, 2\}$  und gleichzeitig  $HP(\hat{a} + \hat{b}) = HP((0)_1^\infty) = \{0\}$ !

**Beispiel 3.10.** a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+23}{n^2+2024n+42} = 2$

b) Wenn  $0 < t < 1$ , dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} t^n = 0$ .

c) Wenn  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1$  dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$  und  $\forall k \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty} n^k z^n = 0$

**Beweis—Ideen** in a) geschickt kürzen schafft viele Nullfolgen, dann Algebra für GW, b) Bernoulli gibt  $\frac{1}{t^n} > \frac{1}{\varepsilon}$  wenn  $n > N = \frac{1}{(1/t)-1\varepsilon}$ , c)  $Z_z \exists C_k \in (0, \infty) \forall n : |n^k z^n| \leq C_k (\frac{1+|z|}{2})^n$ .

Konvergenz in  $\mathbb{C}$  kann auf Konvergenz reeller Folgen zurückgeführt werden:

**Proposition 3.11.** Sei  $(z_n)_{n=1}^\infty$  eine komplexe Folge.

- a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0 \Leftrightarrow (\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z) \ \& \ \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(z)).$
- b) wenn  $z_n \in \mathbb{R}$  für alle  $n$ , und  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$  dann  $z \in \mathbb{R}$ .

**Beweis: DIY**

Somit hat eine reelle Folge einen Grenzwert im Reellen genau dann wenn sie einen Grenzwert im Komplexen hat. Vergleiche mit der Situation bzgl.  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$ !

Nun zum Zusammenhang von Konvergenz und Ungleichungen.

**Satz 3.12.** Möge  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$  für  $n \rightarrow \infty$  und seien alle  $a_n, b_n$  reell.

- a) Wenn  $a_n \leq b_n$  für alle  $n$ , dann  $a \leq b$ .
- b) Sandwichprinzip Wenn  $(c_n)_1^\infty$  Folge in  $\mathbb{R}$  mit  $\forall n : a_n \leq c_n \leq b_n$  und wenn  $a = b$  dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ .

**Beweis-Idee** a) mit Widerspruch, in b)  $z_z \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  existiert und a) nutzen, oder  $(c_n - a_n) = t_n(b_n - a_n)$ ,  $(t_n)_0^\infty$  in  $[0, 1]$  BF und  $(b_n - a_n)_1^\infty$  NF.

Für Konvergenz in  $\mathbb{R}$  gibt es sehr allgemeine und nützliche Kriterien, könnte man auch in Bsp 3.10.b) und c) nutzen.

**Definition 3.13.** Wir sagen eine Folge  $(a_n)_n^\infty$  ist monoton wachsend (fallend) wenn

$$\forall n < m : a_n \leq a_m \quad (a_n \geq a_m).$$

Induktion gibt:  $(a_n)_n^\infty$  monoton wachsend (fallend) gdw.  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1} \quad (a_n \geq a_{n+1})$



**Satz 3.14.** Monotonie und Konvergenz Sei  $(a_n)_n^\infty$  eine beschränkte und monoton wachsende (fallende) **reelle** Folge. Dann ist  $(a_n)_n^\infty$  konvergent mit Grenzwert  $\sup_{n \geq 1} a_n$  ( $\inf_{n \geq 1} a_n$ ).

**Beweis-Idee:** Nur für wachsende  $(a_n)_n^\infty$  (sonst  $(-a_n)_n^\infty$  betrachten). Zeigen  $a_n$  kann nicht wieder runter, wenn es größer als  $\sup_n a_n - \varepsilon$  war (+ Approximationsprinzip 2.39).

**Beispiel 3.15.** a)  $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  Eulersche Zahl,  $2 < e < 3$ ,

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

**Beweis(Idee):** in a) betrachten  $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ , nach 2.47 monoton wachsend.  $a_n$  ist (von oben) beschränkt. Das ist nicht so einfach, wir beweisen  $b_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$  ist eine monoton fallende Folge. Dann ist klar

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n = a_n \frac{n+1}{n} \leq b_1 = 4 \text{ und } b_n \geq a_n \geq a_1 = 2,$$

also existieren  $\alpha = \lim_n a_n, \beta = \lim_n b_n \in [2, 4]$ . Ausserdem  $\beta = \lim_n a_n \lim_n \frac{n+1}{n} = \alpha$ . Diesen gemeinsamen GW nennt man  $e$ , er liegt im  $(2, 4)$  da  $a_4 > 2.4$  und  $b_6 < 2.99$ . Um  $z_z$ , dass  $(b_n)$  fällt argumentieren wir wie im Beweis von 2.47. Wenn  $n \geq 2$ , dann

$$\begin{aligned} \frac{b_{n-1}}{b_n} &= \frac{(n/n-1)^n}{(n+1/n)^{n+1}} = \frac{n^{2n+1}}{((n+1)(n-1))^n(n+1)} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &\geq \left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right) \left(1 - \frac{n-1}{n^2-1}\right) \text{ mit Bernoulli für 1. Klammer, 2. Klammer erweitert} \\ &= 1 + \frac{n - (n-1)}{n^2-1} - \frac{n(n-1)}{(n^2-1)^2} = 1 + \frac{1 \cdot (n^2-1) - n^2 + n}{(n^2-1)^2} = 1 + \frac{n-1}{(n^2-1)^2} > 1. \end{aligned}$$

Das zeigt a).

In b) ist Monotonie nicht entscheiden, aber das Sandwich-Lemma: Dazu nutzen wir das quadratische Glied im Binomischen Satz für  $(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})^n$ . Zunächst  $(1/\sqrt{n})$  ist positive fallende Folge, hat einen GW  $\ell$  und  $\ell^2 = \lim_n \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_n \frac{1}{n} = 0$ , also  $\lim_n 1/\sqrt{n} = 0$  (geht auch direkt). Nun für alle  $n > 1$

$$n \leq 2(n-1) = \binom{n}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2 \leq \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n \Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}},$$

und die Behauptung folgt aus Satz 3.12.b) da  $\lim_n 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} = 1$ .

**Definition 3.16.** Sei  $(x_n)_{n=1}^\infty$  eine Folge in  $M$  (beliebige Menge). Wenn  $(n_k)_{k=1}^\infty$  eine strikt wachsende ( $n_{k+1} > n_k$ ) Folge in  $\mathbb{N}$  ist, dann ist  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ , also  $k \mapsto x_{(n_k)}$ , eine Teilfolge von  $(x_n)_{n=1}^\infty$ .

**Bemerkung** Das strikte Wachstum erzwingt  $n_k \geq k$ , also erbt TF den  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , falls der existiert.

**Proposition 3.17.** Jede reelle Folge  $(x_n)_{n=1}^\infty$  hat eine monotone Teilfolge!

**Beweis:** (Schon am Ende der letzten VL) Betrachten die Menge aller Aussichtspunkte

$$AP = \{n \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N} : k > n \Rightarrow a_k < a_n\}.$$

Falls es ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt mit  $\forall n \in AP, n \leq N$  (dh  $AP$  ist endlich), dann setzen wir  $n_1 = N+1$  und iterativ  $n_{k+1} = \min\{m > n_k : a_m \geq a_{n_k}\}$ , diese Menge ist nicht leer, da  $n_k \notin AP$ . Also gilt  $n_k < n_{k+1}$  und  $a_{n_{k+1}} \geq a_{n_k}$ , dh wir haben eine monoton wachsende TF.

Sonst gilt  $\forall m \in \mathbb{N}$  existiert  $n > m$  mit  $n \in AP$ . Wir definieren dann iterativ  $n_1 = \min AP$  und  $n_{k+1} = \min\{m > n_k : m \in AP\}$ , wieder wohldefiniert da die Menge nichtleer ist. Weil  $n_{k+1} > n_k$  und  $n_k \in AP$  folgt  $a_{n_{k+1}} < a_{n_k}$ , die TF ist fallend.  $\square$

Es gilt: Teilfolge einer Teilfolge ist immer auch Teilfolge der ursprünglichen Folge. Und, jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist wiederum konvergent mit demselben Grenzwert.

**Satz 3.18.** Bolzano-Weierstrass Jede beschränkte reelle Folge hat eine (monotone) konvergente Teilfolge. Ebenfalls gilt: jede **komplexe** Folge  $(z_n)_1^\infty$  hat eine konvergente Teilfolge.

**Beweis-Idee:** Reelle Folge 3.17 und 3.14. Bei komplexer Folge TF  $(n_k)_k$  finden, so dass  $(\operatorname{Re}(z_{n_k}))_k$  konvergiert, dann *darin(!)* TF  $(k_l)_l$  finden, so dass  $(\operatorname{Im}(z_{n_{k_l}}))_l$  konvergiert.

**Beispiel 3.19.** KETTENBRÜCHE Sei  $a > 0$ . Dann

$$a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \dots}}}} = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + 1} = \alpha_0.$$

in Sinne des Grenzwertes.

**Beweis-Idee:** Sei  $a_n$ , der  $n$ -te Kettenbruch, dann ist  $a_{n+1} = f(a_n)$  der um einen Bruchstrich längere, wobei  $f(x) = a + \frac{1}{x}$ , also  $x$  und alle  $a_n$  sind positiv, ab  $n \geq 2$  auch größer als

a. Wir (sollten) zeigen: der Startwert  $a_1 > 0$  spielt keine Rolle für den GW, dafür reicht es zu zeigen, dass es für jedes  $a_1 > 0$  solchen GW  $\alpha = \alpha(a_1)$  gibt.

Denn dann  $f(\alpha) = \alpha \geq a$ , weil  $\alpha \geq a$  und nach Korollar 3.9 Algebra GW

$$f(\alpha) = f(\lim_n a_n) = \lim_n f(a_n) = \lim_n a_n + 1 = \alpha$$

Und der einzige positive "Fixpunkt"  $\alpha_0$  von  $f$ , dh  $f(\alpha_0) = \alpha_0$ , löst  $\alpha_0 = a + \frac{1}{\alpha_0}$  und somit  $\alpha_0^2 - a\alpha_0 - 1 = 0$  dh  $(\alpha - \frac{a}{2})^2 = 1 + (\frac{a}{2})^2$  wie oben angegeben. Dh dann wenn der GW  $\alpha(a_1)$  existiert ist er automatisch gleich  $\alpha_0$ !

Da  $f$  strikt fallend ist, ist die Folge  $(a_n)_n$  nicht monoton, denn es gilt ja  $a_{n-1} < a_n \Leftrightarrow a_n = f(a_{n-1}) > f(a_n) = a_{n+1}$ . Aber  $f^2 = f \circ f$  ist dann strikt wachsend (DIY)! Dh, beide TF  $(a_{2n})_n$  und  $(a_{2n-1})_n$  sind monoton, hoffentlich beschränkt und haben also jeweils einen GW  $\alpha_g$  und  $\alpha_u$  größer gleich  $a$ . Wenn  $\alpha_u = \alpha_g$ , dann ist es der GW der ganzen Folge  $(a_n)_1^\infty$ , der Beweis ist beendet.

Um letztere zu zeigen, betrachten wir  $f^2$  oder besser noch  $\Delta(x) = f^2(x) - x$  genauer, und die Nullstelle und das Vorzeichen zu verstehen.

$$\Delta(x) = \left(a + \frac{1}{a + \frac{1}{x}}\right) - x = \left(a + \frac{x}{ax + 1}\right) - x = \frac{(a^2x + a) + x - (ax^2 - x)}{ax + 1} = \frac{-a(x^2 - ax - 1)}{ax + 1}.$$

Wenn  $x > 0$  gilt für die Vorzeichen also

$$\text{sgn}(\Delta(x)) = -\text{sgn}(x^2 - ax - 1) = -\text{sgn}\left(\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(1 + \frac{a^2}{4}\right)\right),$$

die quadratische Ergänzung von oben. Dh in  $(0, \infty)$  ist  $\Delta(x) = 0$  gwd  $x = \alpha_0$ , ist positiv in  $(0, \alpha_0)$  und negativ in  $(\alpha_0, \infty)$ . Somit  $a_{n+2} = a_n + \Delta(a_n) > a_n$  wenn  $a_n \in (0, \alpha_0)$  und  $a_{n+2} < a_n$  wenn  $a_n > \alpha_0$ . Da  $f(\alpha_0) = \alpha_0$  und  $f$  strikt fallend, gilt  $f((0, \alpha_0)) \subset (\alpha_0, \infty)$  und  $f(\alpha_0, \infty) \subset (a, \alpha_0)$ . Also, da oBdA  $a_1 < \alpha_0$  ist  $(a_{2n-1})_1^\infty$  strikt wachsend und in  $(0, \alpha_0)$  und  $(a_{2n})$  strikt fallend in  $(\alpha_0, \infty)$ . Beide TF sind also BF und es gibt nach Satz 3.14  $\alpha_u = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} \in (a, \alpha_0]$  sowie  $\alpha_g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} \in [\alpha_0, \infty)$ .

Wir argumentieren wie oben für  $f$  nun für  $f^2$  und erhalten aus 3.9 Algebra für GW, dass

$$\alpha_u = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(f(a_{2n-1})) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_{2n-1})\right) = f\left(f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1}\right)\right) = f^2(\alpha_u).$$

Somit  $\Delta(\alpha_u) = 0$  und also  $\alpha_u = \alpha_0$ , analog  $\alpha_g = \alpha_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

In VL kürzeren Beweis, der  $|\alpha_0 - a_{n+1}| \leq \frac{1}{\alpha_0} |\alpha_0 - a_n|$  nutzt - Differenzenquotient von  $f!$   
Funktioniert ohne weitere Anstrengungen wenn  $a \geq 1$ .

Nunmehr wollen wir entscheiden, wann eine allgemeine Folge konvergent ist, ohne deren Grenzwert kennen zu müssen!

**Definition 3.20.** Eine (komplexe) Folge  $(z_n)_{n=1}^{\infty}$  ist eine *Cauchy-Folge* (oder auch *Fundamentalfolge* genannt) wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(= N_{\varepsilon}) \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

**Proposition 3.21.** Sei  $(z_n)_{n=1}^{\infty}$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{C}$ , dann

- a)  $(z_n)_{n=1}^{\infty}$  ist beschränkt
- b) Wenn für eine Teilfolge  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k} = z$  dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$  für die ganze Folge.

**Beweis:** a) trivial und b) einfach, immer nur  $\Delta$ UGL. Nun zu den "Details" :

**Korollar 3.22.** Cauchy-Kriterium Eine (komplexe) Folge ist konvergent genau dann wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

**Beweis:**

Anwendung dieser allgemeinen Konvergenzsätze beim Verstehen "unendlicher Summen", wichtige Funktionen wie  $\sin x, \cos x, e^x$  durch solche "unendlichen Polynome"  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  gegeben.

$$\text{Idee: } a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k.$$

**Definition 3.23.** Für  $(z_n)_{n=1}^\infty$  in  $\mathbb{R}(\mathbb{C})$  ist  $s_n = \sum_{k=1}^n z_k$  die  $n$ -te Partialsumme dieser Folge. Die Folge  $(s_n)_{n=1}^\infty$  nennt man Reihe  $\sum_k z_k$  ( $= \sum_n z_n$ ).

Reihe  $\sum_k z_k$  konvergent(divergent) gdw.  $(s_n)_{n=1}^\infty$  eine konvergente(divergente) Folge ist. Wir schreiben  $\sum_{k=1}^\infty z_k = s$ , die Summe der Reihe, wenn  $s_n \rightarrow s$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Die Zahlen  $z_k$  sind die Glieder der Reihe  $\sum_k z_k$ .

**Proposition 3.24.** Algebra für Reihen Seien  $\sum_n z_n, \sum_n w_n$  konvergente Reihen in  $\mathbb{C}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Dann  $\sum_n (\alpha z_n + \beta w_n)$  konvergent und

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha z_n + \beta w_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} z_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} w_n.$$

**Beweis:** Direkt aus 3.9 Algebra für GW.

Problem oft: keine expliziten Formeln für  $s_n$ , brauchen allgemeine Konvergenzsätze. Und keine Formel für Produkte!

**Satz 3.25.** Cauchy-Kriterium für Reihen

$$\sum_n z_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N (= N_\varepsilon) \forall n \geq N \forall l \geq 1 : \left| \sum_{k=n+1}^{n+l} z_k \right| < \varepsilon.$$

**Beweis-Idee:** nur Reformulierung von 3.22 für Partialsummen, da  $|s_{n+l} - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+l} z_k \right|$

**Korollar 3.26.**

- a)  $\exists N \forall n \geq N : z_n = w_n$ , dann  $(\sum_n z_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_n w_n \text{ konv.})$ , die Summen der Reihen können natürlich verschieden sein!
- b) **Notwendige** Bedingung:  $\sum_n z_n \text{ konv.} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ .

**Beweis:**

**Beispiel 3.27.** harmonische Reihe  $\sum_n \frac{1}{n}$  *divergent!* (Obwohl  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ .)

**Beweis:**

**Proposition 3.28.** Beschränktheit Sei  $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ . Dann

$$\sum_n a_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \exists C \forall n \sum_{k=1}^n a_k \leq C \text{ (d.h. } (s_n)_n \text{ beschränkt)}.$$

**Beweis:** Idee– nutze 3.14 da Folge der Partialsummen monoton.

**Korollar 3.29.** Vergleichskriterium Sei  $0 \leq a_n \leq b_n \forall n (\geq N)$ . Dann

$$\left( \sum_n b_n \text{ konv.} \Rightarrow \sum_n a_n \text{ konv.} \right) \& \left( \sum_n a_n \text{ div.} \Rightarrow \sum_n b_n \text{ div.} \right)$$

**Beweis:**

**Beispiel 3.30.**

- a) Geometrische Reihe  $\forall z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \Leftrightarrow \sum_n z^n \text{ konv.}$  ( &  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$  dann ).
- b) Teleskopische R.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1$  konvergent,  $\sum_n \frac{1}{n^2}$  auch (Summe schwer(er):  $\frac{\pi^2}{6}$ ).

**Proposition 3.31.** Wurzel- & Quotientenkriterium Sei  $a_n \geq 0 \forall n$ .

- a)  $(\exists C \exists a < 1 \forall n : a_n \leq C a^n) \Rightarrow \sum_n a_n \text{ konv.}$   
 b)  $(\exists N \exists q < 1 \forall n \geq N : a_{n+1} \leq q a_n) \Rightarrow \sum_n a_n \text{ konv.}$

**Bemerkung:** Voraussetzung<sub>b</sub>)  $\Rightarrow$  Voraussetzung<sub>a</sub>) und nicht umgekehrt, z.B. für Folge  $a_{2n} = 1/3^n$  und  $a_{2n+1} = 1/2^n$  ist a) erfüllt mit  $a = 1/\sqrt{2}$  aber nicht b) weil  $a_{2n+1}/a_{2n} = (3/2)^n \gg 1$ . Quotientenkriterium aber oft einfacher auszuwerten, deshalb erstmal das Verhalten von  $a_{n+1}/a_n$  für grosse  $n$  versuchen zu verstehen.

Einfach nutzbare Kriterien:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow a)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n < 1 \Rightarrow b)$ .

**Vorsicht:**  $\forall n : a_{n+1}/a_n < 1$  impliziert *nicht* die Konvergenz, z.B. siehe  $a_n = 1/n$ .

**Beweis:** Idee 2.29 und 2.30 kombinieren.

**Satz 3.32.** Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen. Sei  $a_n \geq 0, a_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $\boxed{\forall n : a_n \geq a_{n+1}}$ . Dann ist  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  konvergent.

**Beweis:** Idee  $s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq s_7 \geq \dots s_8 \geq s_6 \geq s_4 \geq s_2$  und  $s_{2k+1} - s_{2k} \rightarrow 0$  wenn  $k \rightarrow \infty$ .

**Beispiel 3.33.**  $\frac{1}{2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots \leq 1$  alternierende harmonische Reihe



**Bemerkung 3.34.**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  kann sich durch Umordnen (unendlich vieler)  $a_n$  ändern (sogar divergieren).

Wir betrachten konkret die alternierende harmonische Reihe, und definieren folgende Umordnung

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{29} - \frac{1}{8} + \cdots$$

Die Idee ist, ähnlich wie bei der harmonischen Reihe positive Blöcke der Länge  $2^k$  aus Reziproken ungerader Zahlen zu bilden und nur mit einem negativen Reziproken der  $k$ -ten geraden Zahl zu kombinieren. Da wir nur mit jeder zweiten (da ungeraden) Zahl arbeiten, wird die Summe über den positiven Block ungefähr  $1/4$  statt des vorherigen  $1/2$  sein, aber noch immer viel grösser als das Reziproke der  $k$ -ten geraden Zahl. Somit muss die Folge der Partialsummen über diese Blöcke (bestimmt) divergent sein. Die formale Rechnung erfordert etwas Sorgfalt, wird nur im Skript präsentiert. Wir erhalten für das allgemeine Reihenglied

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2(n-k)+1} & \text{wenn } 2^{k-1} + k - 2 < n < 2^k + k - 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ -\frac{1}{2k} & \text{wenn } n = 2^k + k - 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Dann ergibt sich für die Partialsummen  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$

$$\begin{aligned} s_{2^{k+1}+(k+1)-1} - s_{2^k+k-1} &= \sum_{n=2^k+k}^{2^{k+1}+k-1} \frac{1}{2(n-k)-1} - \frac{1}{2(k+1)} \\ &= \sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{2l-1} - \frac{1}{2(k+1)} \geq (2^{k+1} - 2^k) \frac{1}{2(2^{k+1}-1)-1} - \frac{1}{2(k+1)} \\ &\geq (2^k) \frac{1}{2 \cdot 2^{k+1}} - \frac{1}{2(k+1)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(k+1)} \geq \frac{1}{8} \text{ wenn } k \geq 3 \end{aligned}$$

Es folgt (mit Induktion)  $s_{2^{k+3}+(k+3)-1} \geq s_{10} + (k/8)$ , und die Folge  $(s_n)_{n=1}^{\infty}$  ist somit unbeschränkt und also divergent, genauer gesagt  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ .

Wir können die der gerade gezeigte Konstruktion zugrundeliegende Idee sehr weitgehend verallgemeinern. Nötig ist hierbei immer, dass sowohl die Summe der positiven Glieder alleine und auch die Summe der negativen Glieder alleine unbeschränkt wird. Zuerst eine Definition, die dies ausschließt.

**Definition 3.35.** Eine komplexe Reihe  $\sum_n^{\infty} z_n$  heisst absolut konvergent wenn die dazugehörige Reihe der Beträge  $\sum_n^{\infty} |z_n|$  konvergiert.

**Bemerkung 3.36.** Es folgt aus der Dreiecksungleichung und dem Cauchy Kriterium Satz 3.25 sofort, dass jede absolut konvergente Reihe auch konvergiert (vergleiche Beweis 3.39 (\*)),

**Satz 3.37.** (RIEMANN) Sei  $\sum_n a_n$  eine konvergente reelle Reihe, die nicht absolut konvergiert. Dann gibt es für jedes  $s \in \mathbb{R}$  eine Permutation (d.h. Bijektion, d.h. Umordnung)  $\sigma$  von  $\mathbb{N}$  so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = s.$$

Es gibt auch Perturbationen  $\sigma_{\pm}$  so dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_{\sigma_{\pm}(n)} = \pm \infty.$$

**Beweis-Idee** Sei also  $s \in \mathbb{R}$ , die Definition von  $\sigma$  ist ein einfacher Algorithmus. Wir setzen zuerst

$$I_+ = \{n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0\} \text{ und } I_- = \{n \in \mathbb{N} : a_n < 0\},$$

und wählen die Startwerte  $I_+(0) = I_+, I_-(0) = I_-$  sowie  $k = 0$ . Nun wird induktiv definiert

$$\sigma(k+1) = \begin{cases} \min I_+(k) & \text{wenn } \sum_{l=1}^k a_{\sigma(l)} < s \\ \min I_-(k) & \text{wenn } \sum_{l=1}^k a_{\sigma(l)} \geq s \end{cases}, \text{ also dann } \begin{cases} a_{\sigma(k+1)} \geq 0 \\ a_{\sigma(k+1)} < 0 \end{cases},$$

sowie  $I_+(k+1) = I_+(k) \setminus \{\sigma(k+1)\}$  und  $I_-(k+1) = I_-(k) \setminus \{\sigma(k+1)\}$  — effektiv wird natürlich nur eine der Mengen geändert. Nun können wir den induktiven Definitionsschritt iterieren.

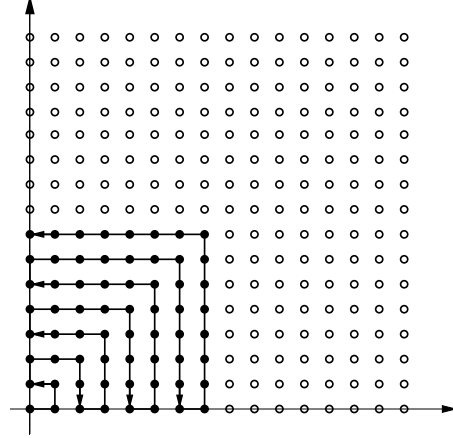
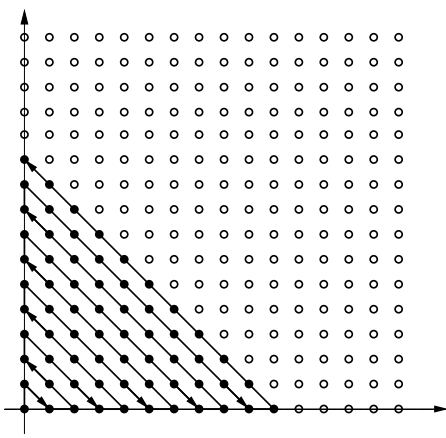
Bedeutend anspruchsvoller ist es nun  $z_z$ , dass  $\sigma$  tatsächlich eine Permutation von ganz  $\mathbb{N}$  ist. Dies werden wir in der VL nicht tun, der Beweis davon steht in Moodle. Für gewünschten GW  $\pm \infty$  können wir wie im Beispiel in Bem 3.34 vorgehen

Das gerade studierte Phänomen mag etwas "konstruiert erscheinen". Es ist zweifelsohne von grosser praktischer Bedeutung, wenn wir Produkte von Reihen studieren - z.B. um die fundamentale Identität  $e^{x+y} = e^x e^y$  herzuleiten. Es gibt tatsächlich keinen kanonischen Weg wie die Produkte der unendliche vielen Paare der Glieder zweier Reihen anzuordnen sind, wie folgendes Beispiel zeigt.

**Beispiel 3.38.** Wir betrachten die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n / \sqrt{n+1}$ , wegen des Leibnizkriteriums konvergiert diese Reihe. Was ist nun das Produkt der Reihe mit sich selbst?

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right) \cdot \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\sqrt{m+1}} \right) \stackrel{?}{=} \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0} \frac{(-1)^{n+m}}{\sqrt{n+1}\sqrt{m+1}},$$

insbesondere, was bedeutet die rechte Doppelsumme? Es gibt wohl zwei "gleichnatürliche" Wege,  $\sum a_n b_m$  über  $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  zu summieren. Diese sind in folgenden Bildern zusammen mit den entstehenden Partialsummen dargestellt.



$$\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^K \sum_{\max\{n,m\}=k} a_n b_m = \left( \sum_{n=0}^K a_n \right) \left( \sum_{m=0}^K a_m \right)$$

In unserem Beispiel erhalten wir eine konvergente und eine divergente Folge von Partialsummen. Klarerweise

$$\left( \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right) \rightarrow \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right)^2$$

gemäss der Algebra konvergenter Folgen. Andererseits sagt uns AGM-UGL bzw.

$$0 \leq (\sqrt{k+1} - \sqrt{n-k+1})^2 = n+2 - 2\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}, \text{ dass}$$

$$\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1} \leq \frac{n+2}{2} \text{ und also } \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} \geq \frac{2}{n+2} \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Somit

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} \right| \geq \sum_{k=0}^n \frac{2}{n+2} \geq \frac{2(n+1)}{n+2} \geq 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

also gehen die Glieder der äusseren Reihe (entspricht einzelnen Summen über Nebendiagonalen) nicht gegen Null und die linke Doppelreihe ist divergent.

**Satz 3.39.**

- a) **SATZ VON DIRICHLET** Sei  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  eine absolut konvergente komplexe Reihe (d.h.  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  konvergent). Dann ist  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  konvergent, und  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)}$  für jede Umordnung  $\sigma$  von  $\mathbb{N}$  (d.h.  $\forall n \in \mathbb{N} : \sigma(n) \in \mathbb{N}$  und für jedes  $m \in \mathbb{N}$  gibt es genau ein  $n \in \mathbb{N} : \sigma(n) = m$ .)
- b) **CAUCHYPRODUKT** Seien  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n, \sum_{n=0}^{\infty} w_n$  absolut konvergente komplexe Reihen. Dann ist  $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0} z_n w_m$  eine absolut konvergente (verallgemeinerte) Reihe und

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} z_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} w_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n z_k w_{n-k}.$$

**Beweis-Idee** entscheidend ist a). Dann folgt b) wenn wir die beiden Anordnungen von  $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  aus Bsp 3.38 nutzen. Die rechte (immer am Rand der Quadrate entlang) liefert, für die entstprechende Betragsreihe in der wachsenden Folge von Partialsummen die TF, die Summen über volle Quadrate entspricht und eine BF ist, denn

$$\forall N : \sum_{(n,k): 0 \leq m, k \leq N} |z_m w_k| = \left( \sum_{n=0}^N |z_n| \sum_{n_0}^N |w_{n_0}| \right)_{N=0}^{\infty} \leq \left( \sum_{n=0}^{\infty} |z_n| \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} |w_n| \right) \in \mathbb{R}.$$

Die Reihe für  $z_m w_k$  ist also in der rechten, und nach a) damit jeder Anordnung absolut konvergent und auch die Summe der eigentlichen Glieder ist unabhängig von der Reihenfolge.

Für a) Sei  $s_a = \sum_1^{\infty} |z_n| \in \mathbb{R}$  und  $\sigma$  eine beliebige Perturbation von  $\mathbb{N}$ . Wenn  $n \in \mathbb{N}$ , existiert  $N(n) = \max_{k \leq n} \sigma(k)$  und also  $\sum_{k=1}^n |z_{\sigma(n)}| \leq \sum_{m=1}^{N(n)} |z_m| \leq s_a$ , dh  $\sum_n |z_{\sigma(n)}|$  konvergiert und  $\sum_{k=1}^{\infty} |z_{\sigma(n)}| \leq s_a = \sum_1^{\infty} |z_n|$ . Wenn wir  $\sigma^{-1}$  auf die Reihe  $\sum_n |z_{\sigma(n)}|$  anwenden folgt die umgekehrte UGL, also  $\sigma$  ändert Summe der Beträge nicht. Wegen 3.25 ist jede absolut konvergente Reihe auch konvergent, bleibt  $z_z : s = s'$  wobei  $s = \sum_1^{\infty} z_n$  und  $s' = \sum_1^{\infty} z_{\sigma(n)}$ . Dazu beliebiges  $\varepsilon > 0$  wählen, dann gibt es  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\left| s_a - \sum_1^N |z_n| \right| < \varepsilon$ . Nun sehen wir : wenn  $A \subset M$  endlich und  $\min A > N$ , dann

$$\sum_{n \in A} |z_n| \leq \sum_{n=\min A}^{\max A} |z_n| \leq \sum_{n=N+1}^{\max A} |z_n| = \sum_{n=1}^{\max A} |z_n| - \sum_{n=1}^N |z_n| \leq s_a - \sum_{n=1}^N |z_n| < \varepsilon \quad (*)$$

Insbesondere, wenn  $n > N$  und auch  $m \geq M_n = \max_{k \leq N} \sigma^{-1}(k)$  dann haben wir (DIY)  $B = \sigma(\{1, \dots, m\}) \supset \{1, \dots, n\}$  und  $\min A > n > N$  für  $A = B \setminus \{1, \dots, n\}$ . Wir erhalten

$$\left| \sum_{k=1}^m z_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^n z_k \right| = \left| \sum_{k \in A} z_k \right| \leq \sum_{k \in A} |z_k| < \varepsilon \text{ nach } (*).$$

Wenn  $m \rightarrow \infty$  folgt im GW  $|s' - \sum_{k=1}^n z_k| \leq \varepsilon$  für alle  $n > N$  und schließlich mit  $n \rightarrow \infty$  auch  $|s' - s| \leq \varepsilon$ . Da  $\varepsilon$  positiv aber beliebig war gilt  $s' = s$   $\square$

**Definition 3.40.** Für beliebiges  $z \in \mathbb{C}$  definieren wir die Exponential-, Kosinus und Sinusfunktion durch

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

**Satz 3.41.** Für alle  $z, w \in \mathbb{C}$  sind  $\exp(z)$ ,  $\cos(z)$  und  $\sin(z)$  als Summe absolut konvergenter Reihen wohldefiniert und erfüllen

- a)  $\exp(z+w) = \exp(z) \exp(w)$  **eine der WICHTIGSTEN Formeln in Analysis**, die **FUNKTIONALGLEICHUNG** für die Exponentialfunktion.
- b)  $\cos(-z) = \cos(z)$  und  $\sin(-z) = -\sin(z)$
- c)  $\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$  - die **Eulersche Formel**, und also  $\cos(z) = \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz))$ ,  $\sin(z) = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))$ .
- d)  $\forall z \in \mathbb{C} : (\cos(z))^2 + (\sin(z))^2 = 1$ , wenn  $z \in \mathbb{R}$  dann  $\cos(z), \sin(z)$  auch reell und in  $[-1, 1]$ .

**Beweis:**

**Korollar 3.42.** Additionstheoreme Für alle  $z, w \in \mathbb{C}$ :

$$\cos(z+w) = \cos(z) \cos(w) - \sin(z) \sin(w) \quad \& \quad \sin(z+w) = \sin(z) \cos(w) + \cos(z) \sin(w).$$

**Beweis:** DIY/ÜZ

## APPENDIX A. NOTATIONEN

Wir werden die hier zusammengetragenen Begriffe und Symbole in der Vorlesung jeweils bei Bedarf einführen, dieses Kapitel dient also zur nochmaligen Übersicht.

**Definition A.1. Menge** (*intuitive Definition von G. Cantor*) ist die Zusammenfassung von Objekten (Elementen), die eine bestimmte Eigenschaft (“die mathematische Aussage  $P(x)$  gilt”) haben.

Wir schreiben  $x \in M$  wenn  $x$  ein Element von  $M$  ist, d.h. zu  $M$  gehört, und  $x \notin M$  andernfalls.

Typischerweise studieren wir  $\{x \in X : P(x)\}$ , d.h. die Menge aller  $x$  aus einer (grossen fixen “Universal-”)Menge  $X$ , für die die (mathematische) Aussage  $P(x)$  wahr ist.

Wir sagen  $M$  ist Teilmenge von  $N$  (Notation  $M \subset N$ ), wenn alle Elemente von  $M$  auch zu  $N$  gehören, zwei Mengen sind gleich wenn sie genau die gleichen Elemente haben. (Statt  $M$  Teilmenge von  $N$  sagen wir oft  $M$  ist kleiner (oder auch kleiner gleich)  $N$ ). Analog zur Ordnungsrelation für reelle Zahlen ist  $M \subset N$  gleichbedeutend mit  $N \supset M$ . wir schreiben  $M \subsetneq N$  wenn  $M \subset N$  und  $M \neq N$  und sagen  $M$  ist *strikt* kleiner als  $N$ .

Aus gegebenen Mengen  $M, N$  konstruieren wir

- $M \cap N = \{x : x \in M \ \& \ x \in N\}$  Schnittmenge, Durchschnitt von  $M$  und  $N$
- $M \cup N = \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}$  Vereinigung
- $M \setminus N = \{x : x \in M \ \& \ x \notin N\}$  Differenzmenge
- $M \times N = \{(x, y) : x \in M \ \& \ y \in N\}$  Produktmenge, wobei  $(x, y) = (x', y')$  genau dann wenn  $x = x'$  und  $y = y'$  - geordnete Paare. Man kann diese auch als Mengen darstellen, zB.  $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ .
- $\mathfrak{P}(M) = \{N : N \subset M\}$  die Potenzmenge von  $M$

Spezielle Notation ist reserviert für

- $\emptyset$  leere Menge, enthält *kein* Element
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  natürliche Zahlen
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  ganze Zahlen
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \ \& \ n \in \mathbb{N}\}$  rationale Zahlen
- $\mathbb{R}$  reellen Zahlen
- $\mathbb{C}$  die komplexen Zahlen

*Warnung:*  $\{\emptyset\} \neq \emptyset$ !

Ausserdem bezeichnen wir Intervalle von ganzen oder reellen Zahlen durch die üblichen Notationen (die später flexibler gehandhabt werden):


- $\{k, \dots, m\} = \{l \in \mathbb{Z} : k \leq l \leq m\}$  wenn  $k, m \in \mathbb{Z}$ , das ist eine Teilmenge von  $\mathbb{N}_0$  bzw.  $\mathbb{N}$  wenn  $k \in \mathbb{N}_0$  bzw.  $k \in \mathbb{N}$ ,
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  abgeschlossenes Intervall für  $a, b \in \mathbb{R}$ ,
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  offenes Intervall für  $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$  und  $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , wobei wir  $\pm\infty$  nicht als Teil des (algebraischen) Körpers  $\mathbb{R}$  betrachten können, aber annehmen, dass  $\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < \infty$ .
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  rechts offenes (halboffenes) Intervall für  $a \in \mathbb{R}$  und  $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  links offenes (halboffenes) Intervall für  $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$  und  $b \in \mathbb{R}$ .

**Definition A.2. Quantoren** Wir benutzen die Abkürzungen

- $\forall x \dots$  bedeutet “für alle  $x$  gilt  $\dots$ ”
- $\exists x \dots$  bedeutet “es gibt ein  $x$  so dass  $\dots$ ”

Weitere (logische (Junktoren) und andere) Symbole:

- $\&$  für “und”
- $\Rightarrow$  für “impliziert” und auch  $\curvearrowright$  im sehr ähnlichen Sinne von “also”
- $\Leftrightarrow$  für “genau dann wenn”
- $\nmid$  für “Widerspruch” (erzielt)
- $\#$  für Kardinalität, dh. Anzahl der Elemente einer Menge
- $\odot, \square$  für q.e.d, d.h. Beweis beendet
-  für Warnung

Eine Abbildung  $F$  bildet eine Menge  $X$  in eine Menge  $Y$  ab, wenn

$$F \subset M \times N, \quad \forall x \in X \exists y \in Y : (x, y) \in F \text{ und } \forall (x, y), (x, y') \in F : y = y'.$$

Wenn  $(x, y) \in F$  dann schreiben wir  $y = F(x)$ . Wir identifizieren also die Abbildung  $F = \{(x, F(x)) : x \in X\}$  mit ihrem ”Graphen”. Wenn  $Y = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  (oder  $\mathbb{R}^n$ ) nennen wir  $F$  oftmals Funktion und benutzen gerne kleine Buchstaben  $f, g, h, \dots$

Eine Abbildung  $F : X \rightarrow Y$  heißt

- injektiv (auch 1 – 1 genannt) wenn  $F(x) = F(x') \Rightarrow x = x'$ ,
- surjektiv (bildet *auf*  $Y$  ab, engl ”onto”) wenn  $\forall y \in Y \exists x \in X : F(x) = y$ ,
- bijektiv wenn  $F$  injektiv und surjektiv ist.