Diskrete Strukturen (WS 2024-25) - Halbserie 4

4.1 **[5]**

Bitte direkt auf Moodle als Quiz antworten.

4.2 **[1]**

Geben Sie zwei **Relationen** R_1 und R_2 jeweils auf der Menge $\mathbb{N}$ an, sodass

1. R_1 reflexiv, symmetrisch, und nicht transitiv ist,
   z. B. $R_1 = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid |a-b| \leq 1\}$
2. R_2 symmetrisch, nicht transitiv, und nicht reflexiv ist,
   z. B. $R_2 = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid |b-a| = 1\}$

4.3 **[4]**

(Alternives geordnetes Paar) Seien A, B, C, D vier beliebige Objekte. Zeigen Sie dass

$$\Big\{\{\{A\}, \emptyset\}, \{\{B\}\}\Big\} = \Big\{\{\{C\}, \emptyset\}, \{\{D\}\}\Big\}$$

genau dann wenn $A = C$ und $B = D$.

Solution. Wenn $A = C$ und $B = D$ dann die gleichheit $\{\{\{A\}, \emptyset\}, \{\{B\}\}\} = \{\{\{C\}, \emptyset\}, \{\{D\}\}\}$ ist klar.

Nehmen wir jetzt an, dass

$$\{\{\{A\}, \emptyset\}, \{\{B\}\}\} = \{\{\{C\}, \emptyset\}, \{\{D\}\}\} \tag{1}$$

Wir bemerken erst, dass

$$|\{\{B\}\}| = 1 = |\{\{D\}\}|$$

und

$$|\{\{A\}, \emptyset\}| = 2 = |\{\{C\}, \emptyset\}|,$$

da $\{A\}$ ich nicht die leere Menge.

Also in (1) die beiden Seite haben genau zwei Elemente. Diese Zwei Elemente sind jeweils zwei Mengen mit Kardinalität 1 und 2. Das heißt, dass wenn (1) gilt dann

$$\{\{B\}\} = \{\{D\}\},$$

und insbesondere $\{B\} = \{D\}$ und daraus folgt $B = D$.

Ähnlich, leiten wir ab dass

$$\{\{A\}, \emptyset\} = \{\{C\}, \emptyset\}.$$

Da $\{A\}$ keine leere Menge ist, müssen wir haben dass $\{A\} = \{C\}$ und deswegen $A = C$.

4.4 Wir definieren für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$ eine Relation $\equiv_n$ auf der Menge $\mathbb{Z}$ durch

$$(a, b) \in \equiv_n \text{ genau dann, wenn } n \text{ ist ein Teiler von } a - b.$$

1. Zeigen Sie, dass $\equiv_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine **Äquivalenzrelation** ist.
2. Geben Sie für $n = 5$ alle **Äquivalenzklassen** von $\equiv_n$ an.

Solution.

1. Wir zeigen, dass die Relation $\equiv_n$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist:
   - Reflexivität: Sei $a \in \mathbb{Z}$. Es gilt $a - a = 0$. Da n ein Teiler von 0 ist, gilt also auch $(a, a) \in \equiv_n$.
   - Symmetrie: Gelte $(a, b) \in \equiv_n$. Dann ist n ein Teiler von $a - b$. Nun gilt aber auch $b - a = -1 \cdot (a - b)$. Also teilt n auch $b - a$ und damit gilt $(b, a) \in \equiv_n$.
   - Transitivität: Gelte $(a, b) \in \equiv_n$ und $(b, c) \in \equiv_n$. Dann ist n ein Teiler von $a - b$ und von $b - c$. Folglich teilt n auch die Summe $(a - b) + (b - c)$, das ist $a - c$. Also gilt $(a, c) \in \equiv_n$.
2. Die Äquivalenzklassen sind $K_i = \{5n + i \mid n \in \mathbb{Z}\}$ für alle $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

4.5 Gegeben sei die Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$ und die folgende **Relation** $R \subseteq M \times M$:

$$R := \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}.$$

1. Geben Sie die **Komposition** $R;R$ an.
2. Welche der folgenden **Eigenschaften** besitzt $R;R$? Beweisen Sie Ihre Antwort.
   (a) reflexiv Ja. $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \in R;R$
   (b) antisymmetrisch Nein. $(1, 3), (3, 1) \in R;R$ und $1 \neq 3$
   (c) vollständig Nein. $(1, 2), (2, 1) \notin R;R$

Solution. $R;R = \{(1, 3), (1, 1), (2, 4), (2, 2), (3, 3), (3, 1), (4, 2), (4, 4)\}$.

4.6 Gegeben sei die Menge $M = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ und folgende **Relation** $R \subseteq M \times M$:

$$R = \left\{ \Big((n_1, z_1), (n_2, z_2) \Big) \in M \times M \;\middle|\; n_1 \cdot z_2 = n_2 \cdot z_1 \right\}$$

Zeigen Sie, dass R eine **Äquivalenzrelation** ist.

Solution. Wir zeigen, dass R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

- Sei $(n, z) \in M$. Klarerweise gilt $n \cdot z = n \cdot z$. Also gilt nach Definition von R auch $((n, z), (n, z)) \in R$, d. h. R ist reflexiv.
- Sei $((n_1, z_1), (n_2, z_2)) \in R$. Nach Definition von R gilt also $n_1 \cdot z_2 = n_2 \cdot z_1$. Wegen der Symmetrie von $=$ gilt $n_2 \cdot z_1 = n_1 \cdot z_2$. Also gilt nach Definition von R auch $((n_2, z_2), (n_1, z_1)) \in R$, d. h. R ist symmetrisch.
- Seien $((n_1, z_1), (n_2, z_2)), ((n_2, z_2), (n_3, z_3)) \in R$. Es gilt also $n_1 \cdot z_2 = n_2 \cdot z_1$ und $n_2 \cdot z_3 = n_3 \cdot z_2$. Wegen der ersten Gleichung gilt $z_2 = (n_2 \cdot z_1)/n_1$. Das setzen wir in die zweite Gleichung ein und erhalten: $n_2 \cdot z_3 = (n_3 \cdot n_2 \cdot z_1)/n_1$. Zwei weitere einfache Umstellungen (Multiplikation von n_1, Division von n_2) ergeben $n_1 \cdot z_3 = n_3 \cdot z_1$. Also gilt nach Definition $((n_1, z_1), (n_3, z_3)) \in R$, d. h. R ist transitiv.

4.7 Gegeben sei die Menge $M = \{\{1, 2\}, (a, b), \emptyset\}$.
Geben Sie alle **Zerlegungen** von M an.

Solution. Es gibt folgende Zerlegungen:

- $\{\{\{1, 2\}\}, \{\emptyset\}, \{(a, b)\}\}$
- $\{\{\{1, 2\}\}, \{\emptyset, (a, b)\}\}$
- $\{\{\{1, 2\}, \emptyset\}, \{(a, b)\}\}$
- $\{\{\{1, 2\}, (a, b)\}, \{\emptyset\}\}$
- $\{M\}$