Skript zur Vorlesung

Analysis

für Informatik

Dr. Jan-David Hardtke

Universität Leipzig
Institut für Mathematik

Wintersemester 2023/2024

Falls Sie etwaige Tippfehler oder auch inhaltliche Fehler bemerken, senden Sie mir diese bitte per Email an: hardtke@math.uni-leipzig.de

Inhaltsverzeichnis

I Mengen und Abbildungen

Der Mengenbegriff und der Begriff einer Abbildung (Funktion) zwischen zwei Mengen sind grundlegend nicht nur für die Analysis, sondern für die gesamte Mathematik. Daher soll in diesem einleitenden Kapitel kurz das Nötigste zum Thema Mengen und Abbildungen zusammengestellt werden, wobei, im Interesse der Kürze und Einfachheit, die Diskussion an einigen Stellen bewusst etwas informal gehalten ist.

I.1 Grundlegendes über Mengen

Unter einer Menge verstehen wir hier einfach die Zusammenfassung gewisser mathematischer Objekte zu einem neuen mathematischen Objekt. Die Ausgangsobjekte bilden dabei die sogenannten Elemente der Menge. Bei diesen kann es sich z. B. um natürliche, rationale oder reelle Zahlen, aber auch um gänzlich andere Objekte handeln. So können etwa die Elemente einer Menge auch selbst wieder Mengen sein.

Um auszudrücken, dass ein Objekt x Element einer Menge A ist, schreiben wir $x \in A$, anderenfalls $x \notin A$.

Zwei Mengen A und B sind gleich ($A = B$), falls sie dieselben Elemente haben, d. h. falls jedes Element von A auch ein Element von B und umgekehrt jedes Element von B auch ein Element von A ist.

Mengen werden häufig über Eigenschaften ihrer Elemente definiert. Ist $\mathcal{E}$ eine mathematische Eigenschaft[1], so bezeichnet

$$\{x : x \text{ hat die Eigenschaft } \mathcal{E}\}$$

die Menge aller x mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$.

Ist M eine bereits vorgegebene Menge, so schreibt man kurz

$$\{x \in M : x \text{ hat die Eigenschaft } \mathcal{E}\}$$

für die Menge

$$\{x : x \in M \text{ und } x \text{ hat die Eigenschaft } \mathcal{E}\}.$$

[1] Ich vermeide hier bewusst eine Präzisierung, in der Praxis wird man (hoffentlich) schnell verstehen, was gemeint ist.

Einige konkrete Beispiele: Bezeichnen wir wie üblich die Mengen der natürlichen, rationalen und reellen Zahlen[2] mit $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$, so steht

$$\{n \in \mathbb{N} : n > 5\}$$

für die Menge aller natürlichen Zahlen größer als 5,

$$\{n \in \mathbb{N} : \text{es existiert ein } k \in \mathbb{N} \text{ mit } n = 2k\}$$

ist die Menge aller geraden Zahlen und

$$\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \in \mathbb{Q}\right\}$$

bezeichnet die Menge aller reellen Zahlen, deren Quadrat rational ist.

Als Nächstes kommen wir zum wichtigen Begriff der Teilmengen.

Definition I.1.1. Sind A und B zwei Mengen, so heißt A eine *Teilmenge* von B (in Zeichen: $A \subseteq B$), falls jedes Element von A auch ein Element von B ist.[3]

Das obige Gleichheitskriterium für Mengen liest sich damit kürzer wie folgt: Für alle Mengen A und B gilt[4]

$$A = B \;\Leftrightarrow\; (A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A).$$

Wir werden dieses Kriterium zum Beispiel unten im Beweis von Lemma I.1.4 anwenden. Zuvor noch einige weitere Definitionen.

Definition I.1.2. Die *leere Menge* ist diejenige Menge, welche keine Elemente enthält. Sie wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

Für jedes mathematische Objekt a bezeichne $\{a\}$ diejenige Menge, die a als einziges Element enthält. $\{a\}$ heißt die *Einermenge* mit Element a.

In der obigen "Eigenschaftenschreibweise" ist z. B. $\{a\} = \{x : x = a\}$.

Als kleine Übung mache man sich klar, dass die Mengen $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ und $\{\{\emptyset\}\}$ jeweils voneinander verschieden sind.

Wir definieren als Nächstes zwei wichtige Operationen mit Mengen.

---

[2]Diese Zahlenbereichen werden offiziell erst später eingeführt (siehe Kapitel II), sind Ihnen aber sicherlich schon aus der Schule hinlänglich vertraut.

[3]Eine kleine Warnung hinsichtlich der Schreibweise: Manche Autoren schreiben $A \subset B$ anstelle von $A \subseteq B$, bei wieder anderen steht $A \subset B$ jedoch für eine *echte* Teilmenge, also für $A \subseteq B$ und $A \neq B$. Wir werden hier nur die Schreibweise $A \subseteq B$ verwenden und ggf. $A \neq B$ explizit dazu schreiben.

[4]Das Symbol $\Leftrightarrow$ bedeutet "genau dann, wenn", siehe Anhang A.1 zur Erklärung der Logiksymbole.

Definition I.1.3. Für zwei Mengen A und B definieren wir die *Vereinigung* von A und B durch[5]

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

und den *Durchschnitt* von A und B durch

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}.$$

A und B heißen *disjunkt*, falls $A \cap B = \emptyset$ gilt, d. h. falls A und B keine gemeinsamen Elemente haben.

Ausgehend von Einermengen können wir durch Vereinigung "größere" Mengen erzeugen. So definieren wir Paarmengen $\{a, b\}$ durch $\{a, b\} := \{a\} \cup \{b\}$, Dreiermengen durch $\{a, b, c\} := \{a, b\} \cup \{c\}$ und so fort. Dabei bezeichnen $a, b, c, \ldots$ beliebige mathematische Objekte, die nicht notwendig verschieden sein müssen. Ist z. B. $a = b$, so ist $\{a, b\} = \{a\}$. Auch die Reihenfolge der Elemente spielt keine Rolle, z. B. ist $\{a, b\} = \{b, a\}$ und $\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$.

Hier noch ein paar konkrete Beispiele: Es ist $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 4\} = \{2\}$ und $\{1, 3\} \cap \{2, 4\} = \emptyset$.

Als Nächstes stellen wir einige allgemeine "Rechenregeln" für Vereinigung und Durchschnitt zusammen.

Lemma I.1.4. *Für alle Mengen A, B und C gilt:*

(i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(iii) $A \cup B = B \cup A$

(iv) $A \cap B = B \cap A$

(v) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(vi) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Beweis. Wir beweisen nur exemplarisch die Aussage (v). Die übrigen Beweise sind den Leserinnen und Lesern selbst zur Übung überlassen.
Zum Beweis verwenden wir das obige Gleichheitskriterium für Mengen. Wir haben also $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$ und $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$ zu zeigen.
1) Beweis von $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
Sei $x \in (A \cup B) \cap C$. Dann ist $x \in A \cup B$ und $x \in C$.

[5] Hier und im Folgenden bedeutet die Schreibweise := eine Gleichheit per definitionem, d. h. das Objekt, welches links von := steht, wird durch das rechts von := stehende Objekt definiert.

Wegen $x \in A \cup B$ gilt $x \in A$ oder $x \in B$. Im ersten Fall folgt wegen $x \in C$ auch $x \in A \cap C$, im zweiten Fall folgt analog $x \in B \cap C$. Also gilt in jedem Fall $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
2) Beweis von $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$.
Sei $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Dann ist $x \in A \cap C$ oder $x \in B \cap C$.
Im ersten Fall ist $x \in A$ und $x \in C$, also auch $x \in A \cup B$ und $x \in C$, also $x \in (A \cup B) \cap C$.
Im zweiten Fall ist $x \in B$ und $x \in C$, folglich auch $x \in A \cup B$ und $x \in C$, also $x \in (A \cup B) \cap C$. Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Wir definieren nun noch die Differenz zweier Mengen.

Definition I.1.5. Sind A und B zwei Mengen, so heißt die Menge

$$A \setminus B := \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}$$

die *Differenzmenge* von A und B.

Man beachte, dass bei dieser Definition nicht unbedingt $B \subseteq A$ vorausgesetzt ist. Beispielsweise ist $\{1, 2, 3\} \setminus \{1, 4\} = \{2, 3\}$.

Schließlich kommen wir noch zum Begriff der geordneten Paare. Wir hatten oben schon bemerkt, dass für Paarmengen $\{a, b\} = \{b, a\}$ gilt. Manchmal will man aber zwei Objekte auch unter Berücksichtigung der Reihenfolge zu einem neuen Objekt zusammenfassen. Dazu dient der Begriff der geordneten Paare.

Definition I.1.6. Für zwei mathematische Objekte a und b definieren wir das *geordnete Paar* (a, b) durch $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Es gilt dann das folgende Gleichheitskriterium (das war der Sinn der Definition).

Lemma I.1.7. *Für alle mathematischen Objekte a, b, c, d gilt:*

$$(a, b) = (c, d) \;\Leftrightarrow\; a = c \textit{ und } b = d.$$

Beweis. Die Schlussrichtung “$\Leftarrow$” ist klar. Wir zeigen nun “$\Rightarrow$”.
Sei also $(a, b) = (c, d)$. Dann ist insbesondere $\{a\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$, also $\{a\} = \{c\}$ oder $\{a\} = \{c, d\}$, woraus in jedem Fall $a = c$ folgt.
Weiter ist auch $\{a, b\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\}$ (die letzte Gleichheit folgt aus der schon bewiesenen Tatsache $a = c$). Wir unterscheiden zwei Fälle.
1) Ist $a = b$, so folgt $(a, b) = (b, b) = \{\{b\}\}$. Wegen $(c, d) = (a, b)$ folgt daher $\{c, d\} = \{b\}$, also $d = b$.
2) Ist $a \neq b$, so folgt aus der oben beobachteten Tatsache $\{a, b\} \in \{\{a\}, \{a, d\}\}$, dass $\{a, b\} = \{a, d\}$ sein muss. Also ist $b \in \{a, d\}$, aber $a \neq b$, also $b = d$.
□

Für drei Objekte a, b, c definiert man das geordnete Tripel durch $(a, b, c) := ((a, b), c)$. Dann gilt offenbar $(a, b, c) = (d, e, f)$ genau dann, wenn $a = d$, $b = e$ und $c = f$ ist.

Entsprechend werden Vierertupel (Quadrupel) (a, b, c, d) erklärt durch $(a, b, c, d) := ((a, b, c), d)$ und es gilt ein analoges Gleichheitskriterium. Ebenso verfährt man für Fünfertupel, etc.

Auch geordnete Paare lassen sich natürlich wieder zu neuen Mengen zusammenfassen.

Definition I.1.8. Für zwei Mengen A und B ist ihr *kartesisches Produkt*[6] definiert durch

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Hierzu eine kleine Bemerkung: Die obige Definition müsste eigentlich ausführlich

$$A \times B := \{x : \text{es existieren ein } a \in A \text{ und ein } b \in B \text{ mit } x = (a, b)\}$$

lauten. Allerdings verwendet man in solchen Fällen häufig abkürzende Schreibweisen wie die obige. In der Praxis sollte recht schnell klar werden, was jeweils gemeint ist.

Beispiel: $\{1, 2\} \times \{1, 2, 3\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$.

Natürlich kann man auch Produkte von mehr als zwei Mengen definieren. Für drei Mengen A, B, C setzt man entsprechend $A \times B \times C := \{(a, b, c) : a \in A, b \in B, c \in C\}$, usw.

I.2 Grundlegendes über Abbildungen

Wir kommen nun zum Begriff der Abbildungen (Funktionen). In den Beispielen werden wir dabei im Vorgriff schon einige elementare Funktionen (wie z. B. die Wurzelfunktion) verwenden, die offiziell erst später eingeführt werden, Ihnen aber sicherlich schon aus der Schule hinreichend bekannt sind, um damit zu arbeiten.

Hier nun die Definition:

Definition I.2.1. Seien A und B zwei Mengen. Eine *Abbildung* oder *Funktion* von A nach B ist ein Tripel (A, B, f), wobei f eine Zuordnungsvorschrift ist, die jedem Element $a \in A$ genau ein Element $f(a) \in B$ zuweist.
$f(a)$ heißt der Wert der Funktion an der Stelle a.
A heißt der *Definitionsbereich* und B der *Wertebereich* der Funktion.

[6] Benannt nach René Descartes (1596–1650): französischer Philosoph und Mathematiker, lieferte wichtige Beiträge zur Geometrie.

Anstelle von (A, B, f) schreibt man in der Regel $f : A \to B$ oder kurz nur f, falls Definitions- und Wertebereich implizit klar sind.[7]

Zwei Funktionen $f : A \to B$ und $g : C \to D$ sind gleich genau dann, wenn ihre Definitions- und Wertebereiche übereinstimmen (also $A = C$ und $B = D$ gilt) und sie an jeder Stelle denselben Funktionswert haben (also $f(a) = g(a)$ für alle $a \in A = C$ gilt).

Einige Beispiele für Funktionen:
1) $f : \{1, 2, 3\} \to \{2, 3, 4\}$ definiert durch $f(a) := a + 1$ für $a \in \{1, 2, 3\}$.
2) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f(n) := 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (eine konstante Funktion).
3) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definiert durch $f(n) := \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
6) $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ definiert durch $f(x) := x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$. Hierbei ist $\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Beachten Sie, dass diese Funktion von der aus Beispiel 5) verschieden ist (Definitions- und Wertebereich gehören ausdrücklich zu einer Funktion dazu).
7) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x$ für $x \geq 0$ und $f(x) := x^3$ für $x < 0$ definiert ebenfalls eine Funktion. Die Funktionswerte müssen sich nicht immer durch eine geschlossene Formel angeben lassen.

Das obige Beispiel 4) lässt sich natürlich analog auf jeder beliebigen Menge betrachten. Hierzu eine extra Definition.

Definition I.2.2. Sei A eine Menge. Die Abbildung $\mathrm{id}_A : A \to A$ definiert durch $\mathrm{id}_A(a) := a$ für alle $a \in A$ heißt die *identische Abbildung* (oder *identische Funktion*) auf A.

id_A bildet also jedes Element von A auf sich selbst ab.

Auch das obige Beispiel 2) einer konstanten Funktion lässt sich natürlich verallgemeinern.

Definition I.2.3. Seien A und B zwei Mengen und sei $b_0 \in B$. Wir definieren eine Funktion $\underline{b_0} : A \to B$ durch $\underline{b_0}(a) := b_0$ für alle $a \in A$.
$\underline{b_0}$ heißt die *konstante Funktion* auf A mit Wert b_0.

Die Funktion $\underline{b_0}$ bildet also jedes Element aus A auf denselben Wert b_0 ab. Diese Funktion ist zu unterscheiden vom Element b_0 selbst (z. B. ist $\underline{1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die konstante Funktion mit Wert 1 auf $\mathbb{R}$, etwas anderes als die Zahl 1). In der Praxis schreibt man dennoch häufig nur b_0 anstatt $\underline{b_0}$

[7] Zu dieser Funktionsdefinition ist zu bemerken, dass sie eigentlich nicht mathematisch präzise ist (was genau bedeutet "Zuordnungsvorschrift"?). Die mathematisch saubere Definition lautet: f ist eine Teilmenge von $A \times B$, so dass für alle $a \in A$ genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in f$ existiert. Für praktische Zwecke ist die obige Definition aber gut genug und wir wollen daher den streng formalen Funktionsbegriff hier nicht weiter diskutieren.

und man muss aus dem Kontext schließen, ob b_0 selbst oder die zugehörige konstante Funktion gemeint ist.

Als Nächstes definieren wir noch Graph und Bild einer Funktion.

Definition I.2.4. Seien A und B zwei Mengen und sei $f : A \to B$ eine Funktion. Dann ist der *Graph* von f definiert durch

$$\mathrm{gr}(f) := \{(a, f(a)) : a \in A\}.$$

Das *Bild* von f ist definiert durch

$$\mathrm{Im}(f) := \{f(a) : a \in A\}.$$

Der Graph von f ist also eine Teilmenge von $A \times B$. Etwas salopp gesagt besteht er aus all jenen "Punkten" $(a, f(a))$, welche von f "getroffen" werden.

Das Bild von f ist eine Teilmenge des Wertebereichs B. Sie besteht aus denjenigen Elementen von B, welche als Funktionswerte von f auftreten. Man beachte, dass $\mathrm{Im}(f)$ deutlich kleiner sein kann als B, z. B. besteht bei einer konstanten Funktion das Bild nur aus einem einzigen Element (vergleiche auch die Definition der Surjektivität weiter unten).[8]

Nun kommen wir zur Hintereinanderausführung (Verkettung) zweier Funktionen.

Definition I.2.5. Gegeben seien Mengen A, B, C und Funktionen $g : A \to B$ und $f : B \to C$. Dann ist die *Verkettung* von f und g definiert durch $f \circ g : A \to C$ mit

$$(f \circ g)(a) := f(g(a)) \quad \text{für alle } a \in A.$$

Für diese Definition ist es wesentlich, dass die Funktionswerte von g im Definitionsbereich von f liegen, anderenfalls wäre $f(g(a))$ gar nicht definiert. $f \circ g$ wird übrigens gelesen als "f nach g", eben weil man erst die Funktion g und danach die Funktion f anwendet.

Wir betrachten wieder einige Beispiele:

1) Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definiert durch $g(n) := 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ durch $f(q) := q^2$ für alle $q \in \mathbb{Q}$.

Dann ist $f \circ g$ eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}$ und es gilt $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(1/n) = (1/n)^2 = 1/n^2$ für $n \in \mathbb{N}$.

2) Sei $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := \sqrt{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ (zur Erinnerung $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$). Weiter sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(y) = y^2+3y+1$ für jedes $y \in \mathbb{R}$.

Dann ist $f \circ g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ mit $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 3\sqrt{x} + 1 = x + 3\sqrt{x} + 1$ für alle $x \geq 0$.

[8] Die Bezeichnung $\mathrm{Im}(f)$ für das Bild von f stammt übrigens vom englischen Wort "image". Manche Autoren schreiben stattdessen $\mathrm{ran}(f)$ für das Bild von f (von englisch "range").

3) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erklärt durch $f(y) := \sqrt{y^2+1}$ für alle $y \in \mathbb{R}$ und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := x+1$. Dann ist $f \circ g$ eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = \sqrt{(x+1)^2+1}$, was man mittels binomischer Formel auch als $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2+2x+2}$ schreiben kann.

Als Nächstes wollen wir die wichtigen Begriffe der Injektivität und Surjektivität kennenlernen.

Definition I.2.6. Seien A und B zwei Mengen und sei $f : A \to B$ eine Funktion.

(i) f heißt *injektiv*, falls für alle Elemente $a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 \neq a_2$ auch $f(a_1) \neq f(a_2)$ gilt.

(ii) f heißt *surjektiv*, falls für alle $b \in B$ ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ existiert.

(iii) f heißt *bijektiv*, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Injektivität von f bedeutet also, dass f verschiedene Elemente aus A auch auf verschiedene Elemente von B abbildet. Surjektivität bedeutet, dass jedes Element von B als Funktionswert von f auftritt. Die Formulierung "es existiert ein $a \in A$ mit $f(a) = b$" bedeutet dabei, dass mindestens ein solches a existiert, eventuell kann es mehrere (sogar unendlich viele) solche Elemente geben.

Mit Hilfe des Bildes von f lässt sich die Definition der Surjektivität kürzer fassen:

$$f \text{ ist surjektiv } \Leftrightarrow \operatorname{Im}(f) = B.$$

Wir betrachten wiederum einige konkrete Beispiele:
1) Für jede Menge A ist die identische Abbildung id_A bijektiv, wie sofort aus der Definition folgt.
2) Die Abbildung $f : \{1,2,3\} \to \{2,3,4\}$ mit $f(a) = a+1$ für $a \in \{1,2,3\}$ ist bijektiv, wie man leicht sieht.
3) Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ mit $f(n) := 1/n$ für $n \in \mathbb{N}$ ist injektiv, denn aus $f(n_1) = f(n_2)$ folgt durch Kehrwertbildung $n_1 = n_2$. Hingegen ist f nicht surjektiv, da z. B. $2 \notin \operatorname{Im}(f)$ ist.
4) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist nicht injektiv, da z. B. $f(1) = f(-1)$ ist. Ferner ist f auch nicht surjektiv, denn es ist $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, das Bild $\operatorname{Im}(f)$ enthält also keine negativen Zahlen.
5) Im Unterschied zu Beispiel 4) ist die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) := x^2$ bijektiv.

Begründung: Sind $x, y \geq 0$ mit $x \neq y$, so können wir ohne Einschränkung $0 \leq x < y$ annehmen und daraus $x^2 < y^2$, also $f(x) \neq f(y)$ schließen. Das zeigt die Injektivität von f.

Für die Surjektivität nehme man ein beliebiges $y \in \mathbb{R}_0^+$ her. Dann ist $x := \sqrt{y} \in \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = y$.

Als letzten Punkt in diesem Kapitel wollen wir nun noch den Begriff der Umkehrfunktion einführen: Ist $f : A \to B$ eine bijektive Funktion, so existiert zu jedem $b \in B$ *genau ein* $a \in A$ mit $f(a) = b$ (wegen der Surjektivität existiert mindestens ein solches a, wegen der Injektivität kann es nicht mehr als eines geben). Das führt zu folgender Definition.

Definition I.2.7. Seien A und B zwei Mengen und sei $f : A \to B$ eine bijektive Funktion. Die *Umkehrfunktion* $f^{-1} : B \to A$ wird folgendermaßen erklärt: Für alle $b \in B$ ist $f^{-1}(b)$ dasjenige Element von A mit $f(f^{-1}(b)) = b$.

Für bijektives $f : A \to B$ ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Umkehrfunktion:

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B \quad \text{und} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A.$$

Ferner ist leicht zu sehen, dass auch f^{-1} wieder bijektiv ist und dass $(f^{-1})^{-1} = f$ gilt (die Details überlasse ich Ihnen zur Übung).

Zum Abschluss betrachten wir ein paar Beispiele, die sich an die obigen Beispiele zur Bijektivität anschließen:

1) Wir hatten oben schon festgestellt, dass für jede Menge A die identische Abbildung id_A bijektiv ist. Aus den Definitionen folgt nun unmittelbar $\mathrm{id}_A^{-1} = \mathrm{id}_A$.

2) Für die Abbildung $f : \{1, 2, 3\} \to \{2, 3, 4\}$ mit $f(a) = a + 1$ hatten wir auch schon die Bijektivität festgestellt. Die Umkehrfunktion ist gegeben durch: $f^{-1} : \{2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3\}$ mit $f^{-1}(b) = b - 1$.

3) Ebenfalls hatten wir schon gesehen, dass die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) := x^2$ bijektiv ist. Aus der obigen Rechnung folgt auch gleich $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ für $y \geq 0$.

II Die Zahlenbereiche

Wir wollen in diesem Kapitel das Wichtigste zu den Bereichen der natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen zusammenstellen, wobei wir die Existenz dieser Zahlenbereiche allerdings als gegeben hinnehmen.

II.1 Der Körper der reellen Zahlen

Wir beginnen mit den natürlichen Zahlen. Zwar hatten wir diese schon bei den Beispielen in Kapitel I verwendet, wir führen sie aber noch einmal offiziell ein: Es bezeichnet

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

die Menge der natürlichen Zahlen. Diese ist Ihnen sicherlich aus der Schule bestens bekannt und daher soll die Natur dieser Menge und ihrer Elemente hier auch nicht weiter hinterfragt werden. Wir setzen die natürlichen Zahlen als Grundobjekte voraus.

Manchmal will man nicht bei 1 sondern 0 anfangen zu zählen, daher definieren wir noch

$$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

(Bei der Notation ist etwas Vorsicht geboten, denn bei einigen Autoren schließt die Menge $\mathbb{N}$ die Null bereits mit ein.)

Eigentlich müsste man nun zunächst das Beweisprinzip der vollständigen Induktion und das Prinzip der rekursiven Definitionen für die Menge der natürlichen Zahlen diskutieren (beides werden wir noch tun, allerdings erst im übernächsten Abschnitt) und müsste die üblichen arithmetischen Operationen (Addition und Multiplikation), sowie die Ordnungsstruktur der natürlichen Zahlen einführen. Anschließend müsste man aus den natürlichen Zahlen die ganzen Zahlen, aus diesen wiederum die rationalen Zahlen und schließlich aus den rationalen die reellen Zahlen konstruieren. Dieses Vorgehen ist allerdings insgesamt sehr aufwendig und wird erfahrungsgemäß nur von wenigen Studenten zu Beginn der Analysis-Vorlesung wirklich verstanden.

Daher setzen wir hier einfach die reellen Zahlen mit ihrer üblichen Arithmetik und Ordnungsstruktur als gegeben voraus und stellen nur ihre wesentlichen Eigenschaften zusammen. Die ganzen und die rationalen Zahlen fallen uns dann als Teilmengen in den Schoß.

Die Menge der *reellen Zahlen* bezeichnen wir, wie schon in den Beispielen in Kapitel I, mit $\mathbb{R}$. Sie umfasst die Menge der natürlichen Zahlen inklusive der Null, also $\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{R}$.

Weiter existieren auf $\mathbb{R}$ eine Addition (bezeichnet mit $+$) und eine Multiplikation (bezeichnet mit $\cdot$), die folgende Eigenschaften haben[1]:

(i) $(a+b)+c = a+(b+c)$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ (Assoziativgesetz der Addition)

(ii) $a + b = b + a$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ (Kommutativgesetz der Addition)

(iii) $0 + a = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$ (Null ist neutrales Element der Addition)

(iv) Für alle $a \in \mathbb{R}$ existiert genau ein Element $-a \in \mathbb{R}$ mit $(-a) + a = 0$. (Existenz von additiven Inversen)

(v) $(ab)c = a(bc)$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ (Assoziativgesetz der Multiplikation)

(vi) $ab = ba$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ (Kommutativgesetz der Multiplikation)

(vii) $1a = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$ (Eins ist neutrales Element der Multiplikation)

(viii) Für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert genau ein Element $a^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $a^{-1}a = 1$. (Existenz von multiplikativen Inversen)[2]

(ix) $a(b + c) = ab + ac$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ (Distributivgesetz)

Diesen Sachverhalt fasst man kurz folgendermaßen zusammen: Das Tripel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ bildet einen *Körper*. Die Eigenschaften (i)–(ix) werden auch Körperaxiome genannnt.

Man beachte, dass wegen (ii) und (iii) auch $a + 0 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt. Ebenso ist auch $a + (-a) = 0$ und $a1 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$, sowie $aa^{-1} = 1$ für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Weiter folgt aus den obigen Eigenschaften (wie?): Es ist $-0 = 0$ und $-(-a) = a$, sowie $1^{-1} = 1$ und $(a^{-1})^{-1} = a$ (falls $a \neq 0$).

Auch alle weiteren bekannten Rechenregeln für die reellen Zahlen lassen sich aus den Körperaxiomen herleiten. Ein Beispiel:

Lemma II.1.1. *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:*

(a) $0a = 0 = a0$.

(b) $(-a)b = -(ab) = a(-b)$ *(insbesondere ist $(-1)b = -b = b(-1)$).*

[1] Bei $+$ und $\cdot$ handelt es sich eigentlich um Funktionen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, wobei man die Funktionswerte an der Stelle $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ als $a + b$ bzw. $a \cdot b$ (oder kurz ab) notiert.

[2] Das "genau ein" ist eigentlich nicht nötig. Man kann zeigen, dass die additiven und multiplikativen Inversen automatisch eindeutig bestimmt sind, falls sie existieren. Ebenso kann man beweisen, dass die neutralen Elemente 0 und 1 bereits durch ihre oben angegebene Eigenschaft eindeutig bestimmt sind.

Natürlich kennen Sie diese Regeln (und sie mögen Ihnen als selbstverständlich erscheinen), für den Mathematiker ist aber auch von Interesse, wie sie sich aus den Körperaxiomen ergeben.

Beweis. Zu (a): Wegen der Neutralitätseigenschaft der 0 und des Distributivgesetzes ist

$$0a = (0 + 0)a = 0a + 0a. \tag{II.1}$$

Hier haben wir bereits das Distributivgesetz in der Form $(x + y)z = xz + yz$ benutzt. Es ergibt sich aus der ursprünglichen Form (ix) zusammen mit dem Kommutativgesetz der Multiplikation.
Nun addieren wir zu beiden Seiten der Gleichung (II.1) das Element $-(0a)$ und erhalten:

$$0 = -(0a) + 0a = -(0a) + (0a + 0a).$$

Die rechte Seite lässt sich wegen der Assoziativität der Addition weiter umformen und man erhält:

$$0 = (-(0a) + 0a) + 0a = 0 + 0a = 0a.$$

Also ist in der Tat $0a = 0$. Wegen der Kommutativität der Multiplikation ist dann auch $a0 = 0a = 0$.
Zu (b): Nach Teil (a) ist $0b = 0$ (das Element a in Teil (a) war eine beliebige reelle Zahl, also gilt die Aussage ebenso für b). Daher folgt mit dem Distributivgesetz

$$(-a)b + ab = ((-a) + a)b = 0b = 0.$$

Nun addieren wir zu beiden Seiten $-(ab)$ und erhalten:

$$((-a)b + ab) + (-(ab)) = 0 + (-(ab)) = -(ab). \tag{II.2}$$

Wegen der Assoziativität von + gilt aber

$$((-a)b + ab) + (-(ab)) = (-a)b + (ab + (-ab)) = (-a)b + 0 = (-a)b. \tag{II.3}$$

Aus (II.2) und (II.3) folgt nun $(-a)b = -(ab)$.
Da a und b beliebig waren gilt entsprechend auch $(-b)a = -(ba)$. Wegen der Kommutativität der Multiplikation folgt daraus $a(-b) = -(ab)$. □

Hier noch eine weitere Ihnen sicher bekannte Rechenregel, die wir aus den Körperaxiomen herleiten wollen.

Lemma II.1.2. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $b \neq 0$. Dann ist auch $ab \neq 0$ und es gilt $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.*

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}(ab)(a^{-1}b^{-1}) &= (ba)(a^{-1}b^{-1}) = ((ba)a^{-1})b^{-1} \\ &= (b(aa^{-1}))b^{-1} = (b1)b^{-1} = bb^{-1} = 1\end{aligned}$$

(machen Sie sich selbst klar, welche Körperaxiome in jedem der obigen Rechenschritte benutzt wurden).
Wegen Lemma II.1.1 gilt $0(a^{-1}b^{-1}) = 0$, daher folgt $ab \neq 0$. Nun multiplizieren wir die obige Gleichung von links mit $(ab)^{-1}$ und erhalten

$$(ab)^{-1}((ab)(a^{-1}b^{-1})) = (ab)^{-1}.$$

Daraus folgt

$$(ab)^{-1} = ((ab)^{-1}(ab))(a^{-1}b^{-1}) = a^{-1}b^{-1}$$

(machen Sie sich wieder klar, welche Körperaxiome hier angewendet wurden). □

Auch Differenzen und Brüche können wir nun definieren.

Definition II.1.3. Für $a, b \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$a - b := a + (-b).$$

Ist $b \neq 0$, so setzen wir zudem

$$\frac{a}{b} := ab^{-1}.$$

Es gelten die folgenden bekannten Rechenregeln für Brüche.

Lemma II.1.4. *Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:*

(a) $\frac{a}{1} = a$ *und* $\frac{1}{b} = b^{-1}$, *falls* $b \neq 0$.

(b) $\frac{ac}{bd} = \frac{a}{b}\frac{c}{d}$, *falls* $b \neq 0$ *und* $d \neq 0$.
Insbesondere ist $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, *falls* $b, c \neq 0$ *(Kürzen/Erweitern).*

(c) $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$, *falls* $c \neq 0$.

(d) $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$, *falls* $a \neq 0$ *und* $b \neq 0$ *(Kehrwertbildung).*

(e) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, *falls* $b \neq 0$ *und* $d \neq 0$.

Beweis. Die Beweise für (a), (b) und (d) können Sie sich selbst zur Übung überlegen. Um (c) zu beweisen schreiben wir mit Hilfe des Distributivgesetzes:

$$\frac{a+b}{c} = (a+b)c^{-1} = ac^{-1} + bc^{-1} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Zum Beweis von (e) beobachtet man zunächst, dass wegen (c)

$$\frac{ad+bc}{bd} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}$$

gilt. Wegen (b) folgt daraus die Behauptung. □

Als Nächstes definieren die Menge $\mathbb{Z}$ der *ganzen Zahlen*, indem wir zu $\mathbb{N}$ noch die Null und die entsprechenden additiven Inversen hinzunehmen. Wir setzen also

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \cup \{-1, -2, -3, \ldots\}.$$

Schließlich definieren wir die Menge $\mathbb{Q}$ der *rationalen Zahlen* als die Menge aller Brüche zweier ganzer Zahlen, also

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Reelle Zahlen, die nicht rational sind, heißen *irrationale Zahlen*. Dass es überhaupt solche Zahlen gibt (und zwar sogar sehr viele) werden wir allerdings erst in späteren Abschnitten dieses Kapitels sehen.

II.2 Die Ordnungsstruktur der reellen Zahlen

Neben den im letzten Abschnitt beschriebenen Rechenoperationen verfügen die reellen Zahlen auch über eine Ordnungsrelation $<$, mit deren Hilfe man zwei reelle Zahlen der Größe nach vergleichen kann. Wie schon zuvor bei der Addition und der Multiplikation, wollen wir nicht formal definieren, was genau "$a < b$" bedeutet. Wir nehmen die Ordnungsstruktur von $\mathbb{R}$ schlichtweg als gegeben hin und stellen nur ihre wesentlichsten Eigenschaften zusammen.

Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $a < b \;\Rightarrow a \neq b$ (Irreflexivität)

(ii) $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$ (Transitivität)

(iii) Es gilt genau eine der drei Aussagen $a = b$, $a < b$ oder $b < a$. (Linearität)

(iv) $a < b \;\Rightarrow\; a + c < b + c$

(v) $a < b$ und $0 < c \Rightarrow ac < bc$

Die Zahl a heißt *positiv*, falls $0 < a$ gilt und *negativ*, falls $a < 0$ gilt.

Anstelle von $a < b$ schreibt man natürlich auch $b > a$. Falls $a < b$ und $b < c$ gilt, so schreibt man auch kurz $a < b < c$. Weiter schreibt man $a \leq b$ (oder $b \geq a$), falls $a < b$ oder $a = b$ gilt.[3] Für die Relation $\leq$ gelten die folgende Regeln (für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$):

(i') $a \leq a$ (Reflexivität)

(ii') $a \leq b$ und $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (Transitivität)

[3] "$a \leq b$" wird gelesen als "a kleiner gleich b" (das "oder" wird verschluckt).

(iii') $a \leq b$ und $b \leq a \Rightarrow a = b$. (Antisymmetrie)

(iv') Es gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$. (Linearität)

(v') $a \leq b \;\Rightarrow\; a + c \leq b + c$

(vi') $a \leq b$ und $0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc$

Diese Aussagen ergeben sich aus den obigen Regeln für die Relation $<$ (Beweis als Übung). Ferner gelten noch folgende Regeln.

Lemma II.2.1. *Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:*

(a) $a < b$ *und* $c < d \Rightarrow a + c < b + d$

(b) $c < 0 \Leftrightarrow -c > 0$

(c) $a < b$ *und* $c < 0 \Rightarrow ac > bc$

(d) $a^2 > 0$*, falls* $a \neq 0$ *(insbesondere ist* $1 = 1^2 > 0$*)*

(e) *Ist* $a > 0$*, so ist auch* $\frac{1}{a} > 0$*. Ist* $a < 0$*, so ist* $\frac{1}{a} < 0$*.*

(f) $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

(g) $a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Analoge Aussagen gelten auch für die Relation $\leq$ (soweit sinnvoll).

Beweis. (a) Angenommen es gilt $a < b$ und $c < d$. Dann ist wegen der obigen Regel (iv) auch $a + c < b + c$ und $b + c < b + d$. Die Transitivität von $<$ impliziert daher $a + c < b + d$.
(b) Ist $c < 0$, so folgt wiederum wegen der obigen Regel (iv) durch Addition von $-c$, dass $0 < -c$ gilt. Ist umgekehrt $0 < -c$, so folgt durch Addition von c analog $c < 0$.
(c) Seien $a < b$ und $c < 0$. Wegen (b) ist dann $-c > 0$ und daher folgt aus der obigen Regel (v): $-ac < -bc$. Addition von ac zu beiden Seiten liefert $0 < ac - bc$. Nun addiert man noch bc zu beiden Seiten und erhält $bc < ac$.
(d) Sei $a \neq 0$. Ist $a > 0$, so folgt aus (v), dass auch $a^2 = aa > 0$ gilt. Ist $a < 0$, so folgt aus (c) ebenfalls $a^2 = aa > 0$.
(e) Sei $a > 0$. Wäre $\frac{1}{a} < 0$, so wäre wegen (v) $1 = a\frac{1}{a} < 0$, im Widerspruch zu (d). Also muss $\frac{1}{a} > 0$ gelten. Analog sieht man: $a < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0$.
(f) Es gelte $0 < a < b$. Da nach (e) $\frac{1}{a} > 0$ gilt, folgt $1 = a\frac{1}{a} < b\frac{1}{a}$. Multiplikation mit $\frac{1}{b} > 0$ liefert $\frac{1}{b} < \frac{1}{b}b\frac{1}{a} = \frac{1}{a}$.
Aussage (g) können Sie als Übung in analoger Weise selbst beweisen. Das Formulieren und Beweisen entsprechender Regeln für $\leq$ überlasse ich Ihnen ebenfalls zur Übung. □

Mit Hilfe der Ordnung von $\mathbb{R}$ können wir nun auch den Begriff der Intervalle einführen.

Definition II.2.2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir setzen

$$\begin{aligned}
[a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}\\
(a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}\\
[a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}\\
(a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.
\end{aligned}$$

$[a, b]$ heißt das *abgeschlossene Intervall* von a bis b. Entsprechend heißt (a, b) das *offene*, $(a, b]$ das *linkshalboffene* und $[a, b)$ das *rechtshalboffene* Intervall von a bis b.[4]

Weiter definieren wir noch

$$\begin{aligned}
[a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}\\
(a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}\\
(-\infty, a] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}\\
(-\infty, a) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}.
\end{aligned}$$

Anstelle von $(0, \infty)$ schreiben wir auch $\mathbb{R}^+$ und anstelle von $[0, \infty)$ auch $\mathbb{R}_0^+$.

In der Analysis werden wir es später häufig mit Funktionen zu tun haben, deren Definitionsbereich ein Intervall ist.

Als Nächstes wollen wir mit Hilfe der Ordnungsstruktur die Begriffe von Minimum und Maximum einführen.

Definition II.2.3. Sei A eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Ein Element $a_0 \in A$ heißt *Maximum* von A, falls $a \leq a_0$ für alle $a \in A$ gilt.
Entsprechend heißt $a_0 \in A$ *Minimum* von A, falls $a_0 \leq a$ für alle $a \in A$ gilt.

Bemerkung II.2.4. Falls $A \subseteq \mathbb{R}$ ein Maximum besitzt, so ist dieses eindeutig bestimmt. Wären nämlich a_0, b_0 zwei Maxima von A, so folgt $b_0 \leq a_0$ (wegen der Maximumseigenschaft von a_0) und auch $a_0 \leq b_0$ (wegen der Maximumseigenschaft von b_0), also $a_0 = b_0$.
Analog sieht man, dass A auch höchstens ein Minimum besitzen kann.
Falls das Maximum von A existiert, so bezeichnen wir es mit $\max(A)$. Das Minimum von A wird, falls es existiert, mit $\min(A)$ bezeichnet.

Zum Beispiel ist $\min\{1, 2, 3\} = 1$ und $\max\{1, 2, 3\} = 3$. Im nächsten Abschnitt werden wir formal beweisen, dass jede endliche Menge $\{a_1, \ldots, a_n\}$ von reellen Zahlen ein Maximum und ein Minimum besitzt. Für unendliche Mengen A müssen dagegen $\max(A)$ und $\min(A)$ nicht unbedingt existieren, beispielsweise besitzt die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen kein Maximum

[4] Das offene Intervall (a, b) ist natürlich nicht zu verwechseln mit dem geordneten Paar von a und b. Aus dem Kontext sollte stets klar sein, was gemeint ist.

(denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist auch $n+1 \in \mathbb{N}$ mit $n+1 > n$). Es gilt sogar noch mehr:

Archimedisches Axiom[5]: Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.

Jede reelle Zahl wird also von einer natürlichen Zahl übertroffen. Diese Aussage ist Ihnen sicherlich intuitiv klar, sie müsste aber streng genommen bewiesen werden. Aus Gründen der Kürze und Einfachheit verzichten wir aber darauf. Wir werden das Archimedische Axiom allerdings in Kapitel III benötigen, um zu zeigen, dass die Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ tatsächlich gegen 0 konvergiert.

Als Nächstes führen wir den Begriff der Beschränktheit ein.

Definition II.2.5. Sei A eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$. A heißt *nach oben beschränkt*, falls es ein $s \in \mathbb{R}$ mit $a \leq s$ für alle $a \in A$ gibt (ein solches s heißt dann eine *obere Schranke* von A).
Entsprechend heißt A *nach unten beschränkt*, falls es ein $t \in \mathbb{R}$ mit $t \leq a$ für alle $a \in A$ gibt und ein solches t wird eine *untere Schranke* von A genannt.
A heißt *beschränkt*, falls A sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

Man beachte hier den entscheidenden Unterschied zur Definition von Maximum und Minimum: Es ist nicht gefordert, dass eine obere bzw. untere Schranke von A selbst wieder zur Menge A gehört. Insbesondere ist mit s auch jede reelle Zahl $s' > s$ wieder eine obere Schranke von A (Entsprechendes gilt für untere Schranken).

Beispiel: Die Intervalle $[a,b]$, $(a,b]$, (a,b) und $[a,b)$ (wobei $a < b$) sind sämtlich beschränkt mit a als unterer und b als oberer Schranke. Hingegen ist z. B. $[a,\infty)$ nach unten beschränkt (durch a), aber nach oben unbeschränkt.[6]

Auch das Archimedische Axiom lässt sich nun etwas anders formulieren: $\mathbb{N}$ ist als Teilmenge von $\mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt.

Hat man etwa eine nach oben beschränkte Menge vorzuliegen, so stellt sich häufig die Frage nach einer bestmöglichen oberen Abschätzung, also nach einer *kleinsten* oberen Schranke. Das eine solche immer existiert ist allerdings alles andere als selbstverständlich. Die folgende Aussage bedürfte daher eigentlich eines Beweises, den wir aber aus Gründen der Zeit und Einfachheit hier nicht führen werden.

[5] Benannt nach Archimedes von Syrakus (ca. 287 v. Chr.–212 v. Chr.): griechischer Mathematiker, Physiker und Ingenieur, gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker der Antike. Das Archimedische Axiom wurde allerdings schon früher von Eudoxos von Knidos (ca. 397–390 v. Chr. geboren, ca. 345–338 v. Chr. gestorben) formuliert. Eudoxos war ein griechischer Universalgelehrter (Mathematiker, Astronom, Geograph, Arzt und Philosoph).

[6] Denn wäre s eine obere Schranke von $[a,\infty)$, so wäre insbesondere $s \geq a$. Dann wäre aber auch $s+1 \in [a,\infty)$ mit $s+1 > s$, was ein Widerspruch zur oberen Schrankeneigenschaft von s ist.

Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$: Für jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ existiert eine kleinste obere Schranke, d. h. es existiert

$$\min\{s \in \mathbb{R} : s \text{ ist obere Schranke für } A\}.$$

Ebenso besitzt jede nichtleere, nach unten beschränkte Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ eine größte untere Schranke, d. h. es existiert

$$\max\{t \in \mathbb{R} : t \text{ ist untere Schranke für } B\}.$$

Die kleinste obere bzw. größte untere Schranke einer Menge bekommen jeweils eine eigene Bezeichnung.

Definition II.2.6. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere, nach oben beschränkte Menge. Dann heißt

$$\sup(A) := \min\{s \in \mathbb{R} : s \text{ ist obere Schranke für } A\}$$

das *Supremum* von A.

Sei $B \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere, nach unten beschränkte Menge. Dann heißt

$$\inf(B) := \max\{t \in \mathbb{R} : t \text{ ist untere Schranke für } B\}$$

das *Infimum* von B.

Es ist äußerst wichtig, den Unterschied zwischen Supremum/Infimum und Maximum/Minimum einer Menge zu beachten: Das Supremum/Infimum einer Menge muss nicht zwangsläufig wieder ein Element dieser Menge sein, mithin das Maximum/Minimum nicht zwangsläufig existieren.

Hierzu ein Beispiel: Für $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Menge $A := (-\infty, a)$ aller reellen Zahlen, welche echt kleiner als a sind. Natürlich ist a eine obere Schranke von A, folglich existiert $\sup(A)$ und es gilt $\sup(A) \leq a$.

Ich behaupte, dass sogar $\sup(A) = a$ gilt. Zum Beweis setzen wir kurz $s := \sup(A)$. Wäre $s < a$, so gäbe es eine reelle Zahl x mit $s < x < a$ (z. B. ist $x = (s + a)/2$ eine solche Zahl (wieso?)). Dann ist aber einerseits $x \in A$ (wegen $x < a$) und andererseits $x > s$, was im Widerspruch dazu steht, dass s eine obere Schranke von A ist. Also muss $\sup(A) = a$ gelten.

Hingegen besitzt die Menge A kein Maximum. Denn würde $\max(A)$ existieren, so wäre $\sup(A) = \max(A)$ (warum?), also $a = \max(A)$ und folglich $a \in A$, was ein Widerspruch ist.

Für die Menge $A' := (-\infty, a]$ gilt dagegen $\sup(A') = \max(A') = a$.

Zum Schluss dieses Abschnitts führen wir noch die wichtige Betragsfunktion ein.

Definition II.2.7. Für $x \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$|x| := \begin{cases} x \text{ falls } x \geq 0 \\ -x \text{ falls } x < 0. \end{cases}$$

$|x|$ heißt der *Betrag* von x.

Die Betragsfunktion hat folgende Eigenschaften.

Lemma II.2.8. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

(a) $|xy| = |x||y|$

(b) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(Dreiecksungleichung)*

(c) $||x| - |y|| \leq |x - y|$ *(umgekehrte Dreiecksungleichung)*

Beweis. (a) beweist man leicht durch Fallunterscheidung nach den Vorzeichen von x und y. Die Details überlasse ich Ihnen zur Übung.
(b) Wir bemerken zunächst, dass $a \leq |a|$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt. Also ist $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$, folglich auch

$$x + y \leq |x| + |y|.$$

Ebenso ist $-x \leq |-x| = |x|$ und $-y \leq |-y| = |y|$, also auch

$$-(x + y) = -x - y \leq |x| + |y|.$$

Da $|x + y| = x + y$ oder $|x + y| = -(x + y)$ gilt, folgt in jedem Fall $|x + y| \leq |x| + |y|$.
(c) Nach der schon bewiesenen Dreiecksungleichung gilt

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|,$$

also

$$|x| - |y| \leq |x - y|.$$

Analog zeigt man auch

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|,$$

also gilt in jedem Fall $||x| - |y|| \leq |x - y|$. □

Als weitere kleine Übung können Sie noch beweisen, dass eine nichtleere Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ genau dann beschränkt ist, wenn es ein $K \geq 0$ mit $|a| \leq K$ für alle $a \in A$ gibt.

II.3 Vollständige Induktion und Rekursion

In diesem Abschnitt wollen wir das wichtige Beweisprinzip der vollständigen Induktion für die Menge der natürlichen Zahlen kennenlernen. Auch das Prinzip der rekursiven Definitionen soll kurz vorgestellt werden. Wir beginnen mit der vollständigen Induktion.

Prinzip der vollständigen Induktion (Version 1): Sei $E \subseteq \mathbb{N}$ eine Menge von natürlichen Zahlen, welche die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:
1) Es ist $1 \in E$.
2) Für alle $n \in E$ ist auch $n + 1 \in E$.
Dann gilt $E = \mathbb{N}$.

Dieses Prinzip kann man sich folgendermaßen veranschaulichen: Nach Eigenschaft 1) ist $1 \in E$. Wegen der Eigenschaft 2) ist dann auch $1 + 1 = 2 \in E$. Eine erneute Anwendung von 2) ergibt dann $2 + 1 = 3 \in E$, anschließend folgt $3 + 1 = 4 \in E$, $4 + 1 = 5 \in E$, $5 + 1 = 6 \in E$ etc.

Auf eine formalere Begründung dieses Prinzips wollen wir hier verzichten, wir formulieren aber noch eine leicht andere Version.

Prinzip der vollständigen Induktion (Version 2): Es sei $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft, welche natürliche Zahlen besitzen können. Es gelte:
1) 1 hat die Eigenschaft $\mathcal{E}$.
2) Für alle natürlichen Zahlen n gilt: Hat n die Eigenschaft $\mathcal{E}$, so hat auch $n + 1$ die Eigenschaft $\mathcal{E}$.
Dann hat jede natürliche Zahl die Eigenschaft $\mathcal{E}$.

Zum Beweis wende man einfach das Prinzip der vollständigen Induktion in der Version 1 auf die Menge $E = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ hat die Eigenschaft } \mathcal{E}\}$ an.

Will man also durch vollständige Induktion zeigen, dass jede natürliche Zahl eine bestimmte Eigenschaft $\mathcal{E}$ besitzt, so hat man zwei Schritte auszuführen: Erstens muss man nachweisen, dass 1 die fragliche Eigenschaft besitzt. Dieser erste Schritt wird auch *Induktionsanfang* genannt (er ist in der Regel einfach). Zweitens muss man zeigen, dass für jede natürliche Zahl n mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$ auch $n + 1$ diese Eigenschaft besitzt. Das ist der sogenannte *Induktionsschritt*.

Ein analoges Beweisprinzip gilt natürlich auch für $\mathbb{N}_0$. Dann ist der Induktionsanfang bei 0 zu wählen und im Induktionsschritt ist zu zeigen: Hat $n \in \mathbb{N}_0$ die Eigenschaft $\mathcal{E}$, so auch $n + 1$. Ebenso kann die Induktion auch bei irgendeiner natürlichen Zahl $n_0 \geq 2$ beginnen.

Wir werden sogleich ein erstes Beispiel betrachten. Zuvor führen wir aber noch folgende Schreibweise ein: Für reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ setzen wir

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

und

$$\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n.$$

Aufgrund der Assoziativität von Addition und Multiplikation ist es gleichgültig, wo man in solch einer endlichen Summe/einem endlichen Produkt Klammern setzt. Jede Klammerung führt zu demselben Ergebnis[7], weshalb die Klammern meist von vornherein weggelassen werden.[8]

Nun kommen wir zum ersten Beispiel für einen Beweis durch vollständige Induktion.

Beispiel II.3.1. (Gaußsche Summenformel[9]) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis. Im Induktionsanfang haben wir die Richtigkeit der Behauptung für $n = 1$ zu überprüfen. Das ist einfach: Für $n = 1$ ergeben beide Seiten der obigen Gleichung 1.
Kommen wir nun zum Induktionsschritt: Angenommen n ist eine natürliche Zahl mit

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{II.4}$$

Wir müssen zeigen, dass dann auch

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

gilt.

[7]Das müsste eigentlich formal bewiesen werden, ist aber ziemlich technisch. Da die Aussage intuitiv klar ist, verzichten wir hier auf einen Beweis.

[8]Die Verwendung des Buchstaben i für den Index solcher Summen oder Produkte ist natürlich nicht wesentlich, man kann auch jeden anderen Buchstaben zur Bezeichnung wählen (j und k sind ebenfalls sehr beliebt). Natürlich ist es auch erlaubt, dass eine Summe/ein Produkt bei irgendeinem anderen Index $m \in \mathbb{N}_0$ anstelle bei $m = 1$ beginnt.

[9]Carl Friedrich Gauß (1777–1855): deutscher Mathematiker mit zahlreichen wichtigen Beiträgen zu verschiedenen Teilgebieten der Mathematik, unter anderem zur Zahlentheorie und zur Geometrie. Der nach ihm benannte Gaußsche Integralsatz ist in der Analysis von Vektorfeldern und damit auch für Anwendungen in der Physik von großer Bedeutung. Gauß gilt neben L. Euler (siehe Fußnote zur Eulerschen Zahl) als einer der bedeutendsten Mathematiker aller Zeiten.

Dazu addieren wir $n+1$ zu (II.4) und erhalten:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$
$$= (n+1)\Big(\frac{n}{2}+1\Big) = (n+1)\frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen. $\square$

Bevor wir zum nächsten Beispiel kommen, führen wir noch einmal offiziel Potenzen ein:

Definition II.3.2. Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$a^n := \prod_{i=1}^{n} a = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ mal}}.$$

Außerdem setzen wir noch $a^0 := 1$.

Es gelten die bekannten Potenzgesetze

$$a^{n+m} = a^n a^m \qquad (a^m)^n = a^{nm} \qquad (ab)^n = a^n b^n,$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{N}_0$ beliebig sind. Auch diese Regeln müsste man streng genommen durch vollständige Induktion beweisen, was ich Ihnen zur Übung überlasse (führen Sie jeweils eine vollständige Induktion nach n durch, bei beliebigen, aber festen Werten a, b und m).

Hier betrachten wir stattdessen noch einige etwas interessantere Beispiele.

Beispiel II.3.3. (Geometrische Summenformel) Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 1$. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Beweis. Der Induktionsanfang ist wieder einfach: Für $n = 0$ steht auf beiden Seiten der obigen Gleichung 1.
Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Dann folgt:

$$\sum_{i=0}^{n+1} q^i = \sum_{i=0}^{n} q^i + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q}$$
$$= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q},$$

was gerade die Behauptung für $n+1$ ist, also ist der Beweis abgeschlossen. $\square$

Als Nächstes beweisen wir eine wichtige Ungleichung.

Beispiel II.3.4. (Bernoulli-Ungleichung[10]) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis. Induktionsanfang: Für $n = 1$ ergeben beide Seiten $1 + x$, es gilt also sogar Gleichheit.
Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Multiplizieren wir diese Ungleichung mit $1 + x$, so erhalten wir

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x). \tag{II.5}$$

Dabei ist zu beachten, dass $1 + x \geq 0$ gilt (wegen der Voraussetzung $x \geq -1$), sodass die Ungleichung bei Multiplikation mit $1 + x$ tatsächlich erhalten bleibt.
Durch Ausmultiplizieren erhält man

$$(1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x \tag{II.6}$$

(die letzte Ungleichung gilt wegen $nx^2 \geq 0$).
Aus (II.5) und (II.6) folgt nun

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x,$$

wie gewünscht. □

Nicht nur Gleichungen und Ungleichungen, auch andere Aussagen lassen sich gegebenenfalls durch vollständige Induktion beweisen. Als Beispiel betrachten wir hier, wie schon im vorigen Abschnitt angekündigt, die Existenz von Maxima und Minima endlicher Mengen.

Beispiel II.3.5. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Sind $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, so existieren $\max\{a_1, \ldots, a_n\}$ und $\min\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Beweis. Wir beweisen nur die Aussage für Maxima. Den Beweis für Minima können Sie sich in analoger Weise selbst überlegen.
Induktionsanfang: Sei $a_1 \in \mathbb{R}$. Dann ist offensichtlich $\max\{a_1\} = a_1$.
Induktionsschritt: Angenommen es ist $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $\max\{a_1, \ldots, a_n\}$ für alle $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ existiert.
Seien nun $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ beliebig. Nach Voraussetzung existiert dann $\max\{a_1, \ldots, a_n\}$. Sei $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $a_j = \max\{a_1, \ldots, a_n\}$.
Wir unterscheiden zwei Fälle:
1) Es ist $a_j \leq a_{n+1}$. Da für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ $a_i \leq a_j$ gilt, folgt $a_i \leq a_{n+1}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, also ist $\max\{a_1, \ldots, a_{n+1}\} = a_{n+1}$.
2) Es ist $a_j > a_{n+1}$. Wegen $a_i \leq a_j$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ folgt dann $\max\{a_1, \ldots, a_{n+1}\} = a_j$. □

[10] Jakob Bernoulli (1654–1705): Schweizer Mathematiker, der unter anderem wesentliche Beiträge zur Wahrscheinlichkeitstheorie lieferte.

Hier noch ein weiteres Beispiel für einen Beweis durch vollständige Induktion, diesmal aus der Teilbarkeitslehre.

Beispiel II.3.6. Seien $a, b, m \in \mathbb{N}$ derart, dass sowohl $a + b$ als auch $a - 1$ durch m teilbar sind.

Dann ist auch $a^n + b$ durch m teilbar für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen, da $a + b$ nach Voraussetzung teilbar durch m ist.
Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $a^n + b$ durch m teilbar ist, d. h. es ist $a^n + b = mk$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$a^{n+1} + b = a \cdot a^n + b = (a-1)a^n + a^n + b = (a-1)a^n + mk.$$

Nach Voraussetzung auch $a - 1$ durch m teilbar, also $a - 1 = ml$ für ein gewisses $l \in \mathbb{N}_0$. Es folgt $a^{n+1} + b = mla^n + mk = ms$, wobei $s := la^n + k \in \mathbb{N}$. Also ist auch $a^{n+1} + b$ teilbar durch m. $\square$

Als nächstes Beispiel für einen Beweis durch vollständige Induktion wollen wir noch den wichtigen binomischen Satz kennenlernen. Das erfordert allerdings etwas Vorbereitung. Zunächst eine Definition.

Definition II.3.7. Für alle $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$n! := \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

$n!$ wird gelesen als "n Fakultät".

$n!$ ist also das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen. Z. B. ist $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$. Weil es häufig bequem ist setzt man noch $0! := 1$.

Mit Hilfe der Fakultätsfunktion definieren wir nun die sogenannten *Binomialkoeffizienten.*

Definition II.3.8. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und sei $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$. Wir setzen

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$\binom{n}{k}$ wird gelesen als "n über k".

Offenbar gilt $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Ferner ist $\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zur Berechnung weiterer Binomialkoeffizienten ist folgende Beziehung nützlich.

Lemma II.3.9. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n - 1$ gilt*

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Beweis. Seien n und k wie oben. Es gilt

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\
&= \frac{(k+1)n!}{(k+1)k!(n-k)!} + \frac{(n-k)n!}{(k+1)!(n-k-1)!(n-k)} \\
&= \frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{(n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(k+1)n! + (n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(k+1+n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

□

Aufgrund dieses Lemmas lassen sich die Binomialkoeffizienten nach folgendem Schema berechnen (*Pascalsches Dreieck*)[11]:

$$\begin{array}{c}
1 \\
1\ 1 \\
1\ 2\ 1 \\
1\ 3\ 3\ 1 \\
1\ 4\ 6\ 4\ 1
\end{array}$$

In der ersten Zeile dieses Dreiecks steht $\binom{0}{0} = 1$, in der zweiten Zeile steht $\binom{1}{0} = 1$, $\binom{1}{1} = 1$, in der dritten $\binom{2}{0} = 1$, $\binom{2}{1} = 2$, $\binom{2}{2} = 1$, in der vierten $\binom{3}{0} = 1$, $\binom{3}{1} = 3$, $\binom{3}{2} = 3$, $\binom{3}{3} = 1$, usw.

Abgesehen von den äußeren Einsen ist jede Zahl in diesem Dreieck die Summe der beiden unmittelbar links und rechts darüberliegenden Zahlen, z. B. $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 2$, $4 = 1 + 3$, $6 = 3 + 3$, etc. Die nächste Zeile wäre also 1 5 10 10 5 1.

Nun kommen wir zum binomischen Satz (der auch erklärt, woher die Binomialkoeffizienten ihren Namen haben).

Satz II.3.10. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Für $n = 2$ ist das gerade die bekannte binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

[11]Benannt nach Blaise Pascal (1623–1662): französischer Mathematiker, Physiker und christlicher Philosoph, u. a. sind auch die Pascal-Verteilung (negative Binomialverteilung) der Wahrscheinlichkeitstheorie, die physikalische Einheit Pascal (Pa) für den Druck und das Pascalsche Gesetz der Hydrostatik nach ihm benannt.

Beweis. Wir beweisen den Satz durch vollständige Induktion.
Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die rechte Summe gleich $a + b$, wie man leicht sieht.
Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.\end{aligned}$$

Wegen des Distributivgesetzes kann man die Faktoren a und b jeweils in die Summe hineinziehen und erhält:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}. \tag{II.7}$$

Nun nehmen wir eine kleine Indexverschiebung vor: Es ist

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^k. \tag{II.8}$$

(Das ist in der Tat dieselbe Summe, nur werden die Summanden links mit $0, \ldots, n$ durchnummeriert, rechts mit $1, \ldots, n+1$. Entsprechend muss man in der rechten Summe vom Summationsindex k Eins abziehen).
Setzt man (II.8) in (II.7) ein, so folgt:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k + b^{n+1}.\end{aligned}$$

Hier haben wir den ersten Summanden der ersten Summe und den letzten Summanden der zweiten Summe abgespalten.
Nun fassen wir die beiden großen Summen zu einer zusammen:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k \right) + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n-k+1} b^k \right) + b^{n+1}.\end{aligned}$$

Wegen Lemma II.3.9 (angewendet auf $k-1$ anstatt k) ist

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

für alle $k \in \{1, \dots, n\}$. Daher folgt:

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Es gibt auch noch folgende Variante der vollständigen Induktion, die bisweilen sehr nützlich ist.

Starkes Prinzip der vollständigen Induktion: Es sei $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft, welche natürliche Zahlen besitzen können. Es gelte:
1) 1 hat die Eigenschaft $\mathcal{E}$.
2) Für alle natürlichen Zahlen n gilt: Hat jede der Zahlen $1, \dots, n$ die Eigenschaft $\mathcal{E}$, so hat auch $n+1$ die Eigenschaft $\mathcal{E}$.
Dann hat jede natürliche Zahl die Eigenschaft $\mathcal{E}$.

Auch dieses Prinzip gilt natürlich entsprechend, wenn man nicht bei Eins sondern bei einer anderen Zahl $n_0 \in \mathbb{N}_0$ beginnt.

Zum Beweis des Prinzips wende man einfach das ursprüngliche vollständige Induktionsprinzip auf die Eigenschaft $\mathcal{E}'$ an, die folgendermaßen erklärt ist: Eine natürliche Zahl n hat die Eigenschaft $\mathcal{E}'$, falls jede der Zahlen $1, \dots, n$ die Eigenschaft $\mathcal{E}$ hat.

Ein klassisches Beispiel für eine Anwendung des starken Prinzips der vollständigen Induktion ist der Beweis der Existenz der Primfaktorzerlegung.

Satz II.3.11. *Jede natürliche Zahl n lässt sich als Produkt von Primzahlen*[12] *schreiben, d. h. es existieren $s \in \mathbb{N}$ und Primzahlen $p_1, \dots, p_s$ mit $n = \prod_{i=1}^{s} p_i$.*

Die Primfaktoren $p_1, \dots, p_s$ müssen dabei natürlich nicht alle verschieden sein, z. B. ist $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$.

Beweis. Induktionsanfang: Da 2 selbst eine Primzahl ist, ist hier nichts weiter zu zeigen.
Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ derart, dass sich jede natürliche Zahl $2 \leq k \leq n$ als Produkt von Primzahlen darstellen lässt.
Ist $n+1$ selbst eine Primzahl, so muss man nichts weiter beweisen. Ist $n+1$ keine Primzahl, so existiert ein $k \in \{2, \dots, n\}$, welches $n+1$ teilt. Also ist $n+1 = kl$ für ein $l \in \mathbb{N}$. Wegen $k \geq 2$ und $k \leq n$ ist auch $l \leq n$ und $l \geq 2$.

[12] Zur Erinnerung: Eine natürliche Zahl $p \geq 2$ heißt Primzahl, falls p nur durch 1 und durch p selbst teilbar ist.

Laut unserer Annahme sind also k und l beide als Produkt von Primzahlen darstellbar, etwa $k = \prod_{i=1}^{s} p_i$ und $l = \prod_{i=1}^{t} q_i$.
Dann ist auch $n + 1 = kl = (p_1 p_2 \dots p_s)(q_1 q_2 \dots q_t)$ ein Produkt von Primzahlen. $\square$

Ohne Beweis merken wir an, dass jede Zahl auch nur genau eine Darstellung als Produkt von Primzahlen besitzt, d. h. die Primfaktorzerlegung ist eindeutig (natürlich nur bis auf die Reihenfolge der Faktoren).

Als letzter Punkt in diesem Abschnitt soll nun noch kurz das Prinzip der rekursiven Definitionen erläutert werden. Dazu führen wir zunächst den Begriff der Folgen ein: Sei A eine Menge. Eine *Folge* in A ist nichts anderes als eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$. Allerdings verwendet man in diesem Zusammenhang meist eine etwas andere Schreibweise. Für den Funktionswert an einer Stelle $n \in \mathbb{N}$ schreibt man gern a_n (oder b_n, c_n etc.) anstelle von $f(n)$. Die gesamte Folge wird dann nicht mit f sondern mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (oder kurz (a_n)) bezeichnet.

Manchmal notiert man Folgen auch (nicht ganz formal, aber suggestiv) als

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots).$$

a_n heißt auch das *n-te Glied* der Folge.

Was den Anfangsindex betrifft, muss man etwas flexibel sein: Manchmal will man die Glieder einer Folge schon ab 0 beginnend durchnummerieren, manchmal erst ab 2 oder irgendeinem anderen Index n_0. Man schreibt dann $(a_n)_{n\geq n_0}$.
Beispiele:
1) $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (konstante Folge mit Wert a).
2) $a_n = 1/n$ für $n \in \mathbb{N}$. Es ist also

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots).$$

3) $a_n = 2^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) = (2, 4, 8, 16, \dots).$$

4) $a_n = (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) = (-1, 1, -1, 1, -1, 1 \dots).$$

Mit Folgen reeller Zahlen werden wir uns in Kapitel III intensiv beschäftigen.

Allerdings ist es nicht immer möglich/zweckmäßig, eine Folge durch Angabe einer expliziten Bildunsvorschrift für a_n zu definieren (wie in den obigen Beispielen). In manchen Fällen will man zur Definition der Glieder a_n implizit vorgehen: Zuerst definiert man a_1. Ausgehend von diesem Wert definiert man a_2. Ausgehend von a_2 definiert man sodann das Glied a_3, mit Hilfe von a_3 definiert man a_4 usw. Allgemein will man das $(n + 1)$-te Glied

a_{n+1} unter Rückgriff auf das bereits definierte n-te Glied a_n erklären. Man spricht dabei von einer *rekursiven* Definition. Dieses Verfahren schreiben wir formal folgendermaßen auf:

Rekursionsprinzip: Sei A eine Menge, $a \in A$ und $F : \mathbb{N} \times A \to A$ eine Funktion. Dann existiert genau eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A mit folgenden Eigenschaften:
1) $a_1 = a$
2) $a_{n+1} = F(n, a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir setzen also zuerst $a_1 = a$, dann $a_2 = F(1, a_1)$, $a_3 = F(2, a_2)$, $a_4 = F(3, a_3)$, usw.

Dass es wirklich genau eine Folge mit obigen Eigenschaften 1) und 2) gibt, müsste man eigentlich beweisen. Da die Aussage aber intuitiv klar ist, wollen wir hier auf den Beweis verzichten. Stattdessen sehen wir uns ein paar konkrete Beispiele an.
1) Sei $q \in \mathbb{R}$. Wir definieren eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $a_1 = q$ und $a_{n+1} = qa_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.[13]
Dann ist also $a_1 = q$, $a_2 = qa_1 = q^2$, $a_3 = qa_2 = q^3$. Allgemein zeigt man leicht durch vollständige Induktion, dass $a_n = q^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
2) Wieder sei $q \in \mathbb{R}$. Diesmal setzen wir $a_1 = q$ und $a_{n+1} = q^{n+1}a_n$ für $n \in \mathbb{N}$.[14] Dann gilt $a_1 = q$, $a_2 = q^2a_1 = q^3$, $a_3 = q^3a_2 = q^6$, $a_4 = q^4a_3 = q^{10}$. Durch vollständige Induktion kann man

$$a_n = q^{\sum_{k=1}^n k} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

nachweisen, was man nach der Gaußschen Summenformel (Beispiel II.3.1) auch als

$$a_n = q^{n(n+1)/2}$$

schreiben kann.
3) Wir setzen $a_1 = 0$ und $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist also $a_2 = \sqrt{2}$, $a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $a_4 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, usw.

Es gibt auch Varianten der Rekursion, bei denen man zur Definition von a_{n+1} nicht nur auf a_n, sondern auf mehrere (eventuell sogar auf alle) vorhergehenden Folgenglieder $a_1, \dots, a_n$ zurückgreift.

Als einfaches Beispiel hierfür betrachten wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die definiert ist durch $a_1 := 1$, $a_2 := 1$ und $a_{n+1} := a_n + a_{n-1}$ für $n \geq 2$.

[13] Die oben auftauchende Funktion F ist hier also $F(n, x) = qx$ für $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Sie hängt tatsächlich nicht von n ab.

[14] Hier ist $F(n, x) = q^{n+1}x$, d. h. die Rekursionsvorschrift hängt hier von n ab.

Das ist die berühmte *Fibonacci-Folge*[15], bei der jedes Glied die Summe der beiden vorhergehenden Glieder ist:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots).$$

II.4 Wurzeln

Wir hatten in den Beispielen der vorangegangenen Abschnitte zwar schon mehrfach Wurzeln reeller Zahlen verwendet, wir wollen sie aber in diesem Abschnitt noch einmal offiziell einführen und etwas näher diskutieren. In der Tat ist bei näherer Überlegung die Existenz einer Zahl wie $\sqrt{2}$, also einer reellen Zahl deren Quadrat gleich 2 ist, durchaus keine Selbstverständlichkeit. Es gilt aber der folgende Satz.

Satz II.4.1. *Für alle reellen Zahlen $a \geq 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ existiert genau eine reelle Zahl $b \geq 0$ mit $b^n = a$.*

Dieser Satz müsste natürlich bewiesen werden und das wäre auch an dieser Stelle bereits möglich. Da wir ihn aber später (durch die Maschinerie der stetigen Funktionen und des Zwischenwertsatzes) quasi "umsonst" bekommen werden, verzichten wir an dieser Stelle auf einen Beweis und nehmen den Satz einstweilen als gegeben hin.

Dieser Satz erlaubt es nun, Wurzeln zu definieren.

Definition II.4.2. Seien $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Diejenige, nach Satz II.4.1 existierende und eindeutig bestimmte, reelle Zahl $b \geq 0$ mit $b^n = a$ wird die *n-te Wurzel aus a* genannt und mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet.

Statt $\sqrt[2]{a}$ schreibt man kurz $\sqrt{a}$ und spricht von der Quadratwurzel oder kurz der Wurzel aus a.

Es gelten die folgenden Rechengesetze:

Lemma II.4.3. *Für alle $a, b \geq 0$ und alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt:*

(i) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$

(ii) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

Beweis. (i) Es gilt $(\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n = ab$, folglich ist $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$.
(ii) Es gilt

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{nm} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^n\right)^m = (\sqrt[m]{a})^m = a,$$

also $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$. □

[15] Leonardo Fibonacci (ca.1170–1240) war ein Mathematiker aus Pisa, der diese Folge zur Beschreibung des Wachstums einer Kaninchenpopulation verwendete. Mittlerweile weiß man, dass auch zahlreiche andere Wachstumsvorgänge in der Natur sich durch diese Folge beschreiben lassen.

Weitere Rechenregeln ergeben sich hieraus leicht bei Bedarf, z. B. folgt aus Teil (i) des obigen Lemmas durch vollständige Induktion leicht $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ (Induktion nach m bei festem n). Weiter ist wegen (i) auch

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{b}\sqrt[n]{\frac{a}{b}},$$

also

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Insbesondere ist $\sqrt[n]{b^{-1}} = (\sqrt[n]{b})^{-1}$.

Hier noch eine kleine Warnung bezüglich des Vorzeichens: Ist $a \in \mathbb{R}$, so hat die Gleichung $x^2 = a^2$ natürlich zwei Lösungen, nämlich $x = a$ und $x = -a$. Die Wurzel von a ist per definionem die *positive* dieser beiden Lösungen. Mit anderen Worten $\sqrt{a^2} = a$ ist nur richtig, falls $a \geq 0$ ist. Für $a < 0$ ist $\sqrt{a^2} = -a$. Allgemein gilt also $\sqrt{a^2} = |a|$.

Wir können die Wurzeln verwenden, um Potenzen mit rationalen Exponenten zu definieren. Zuerst dehnen wir die Definition auf negative ganze Zahlen aus.

Definition II.4.4. Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und sei $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $a^{-n} := (a^{-1})^n$.

Die Potenzgesetze übertragen sich entsprechend auch auf ganzzahlige Exponenten: Es gilt

$$a^{n+m} = a^n a^m \qquad (a^m)^n = a^{nm} \qquad (ab)^n = a^n b^n,$$

für alle $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und alle $n, m \in \mathbb{Z}$ (Beweis als Übung).

Als Nächstes wollen wir die Definition auch auf rationale Exponenten ausdehnen. Dafür muss die Basis a allerdings positiv sein.

Definition II.4.5. Sei $a > 0$ und sei $x \in \mathbb{Q}$. Dann schreibe x als $x = p/q$ für geeignete $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ und setze

$$a^x := \sqrt[q]{a^p}.$$

Beispiel: $a^{1/2} = \sqrt{a}$, $a^{3/2} = \sqrt{a^3}$, $a^{2/3} = \sqrt[3]{a^2}$.

Mit dieser Definition gibt es allerdings noch ein kleines Problem. Die Darstellung einer rationalen Zahl als Bruch zweier ganzer Zahlen ist natürlich nicht eindeutig, beispielsweise ist $4/6 = 2/3$. Der Wert von a^x darf aber natürlich nur von x abhängen und nicht von der speziell gewählten Bruchdarstellung. Mit anderen Worten, bevor die obige Definition akzeptiert werden kann, müssen wir noch folgendes zeigen:

Lemma II.4.6. *Sei $a > 0$. Sind $p, r \in \mathbb{Z}$ und $q, s \in \mathbb{N}$ mit $p/q = r/s$, so ist auch $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[s]{a^r}$.*

Beweis. Es ist $(\sqrt[q]{a^p})^s = \sqrt[q]{(a^p)^s} = \sqrt[q]{a^{ps}}$.
Wegen $p/q = r/s$ ist $ps = qr$, also folgt $(\sqrt[q]{a^p})^s = \sqrt[q]{a^{qr}} = \sqrt[q]{(a^r)^q} = a^r$.
Daraus folgt $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[s]{a^r}$, wie gewünscht. □

Die Potenzegesetze übertragen sich auch auf rationale Exponenten.

Lemma II.4.7. *Für alle $a, b > 0$ und alle $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt:*

(i) $a^{x+y} = a^x a^y$

(ii) $(a^x)^y = a^{xy}$

(iii) $(ab)^x = a^x b^x$

Beweis. Wir schreiben $x = p/q$ und $y = r/s$ mit $p, r \in \mathbb{Z}$ und $q, s \in \mathbb{N}$.
(i) Es gilt $(a^x a^y)^{qs} = (\sqrt[q]{a^p}\sqrt[s]{a^r})^{qs} = (\sqrt[q]{a^p})^{qs}(\sqrt[s]{a^r})^{qs} = (a^p)^s(a^r)^q = a^{ps+qr}$.
Es folgt $a^x a^y = \sqrt[qs]{a^{ps+qr}} = a^{(ps+qr)/qs} = a^{x+y}$.
Die Beweise für (ii) und (iii) überlasse ich Ihnen zur Übung. □

Als Nächstes wollen wir das Verhalten von Potenzen und Wurzeln bezüglich der Ordnung $<$ diskutieren.

Lemma II.4.8. *Es gilt:*

(i) $0 \leq a < b \Rightarrow a^n < b^n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $0 < a < b \Rightarrow b^{-n} < a^{-n}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $a > 1 \Rightarrow a^k < a^{k+1}$ *für alle* $k \in \mathbb{Z}$.

(iv) $0 < a < 1 \Rightarrow a^{k+1} < a^k$ *für alle* $k \in \mathbb{Z}$.

(v) $0 \leq a < b \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

(vi) $a > 1 \Rightarrow \sqrt[n+1]{a} < \sqrt[n]{a}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

(vii) $0 < a < 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n+1]{a}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. (i) beweist man leicht durch vollständige Induktion, was ich Ihnen zur Übung überlasse. (ii) folgt aus (i) durch Kehrwertbildung.
(iii) und (iv) beweisen wir parallel: Ist $a > 1$, so zeigt man leicht durch vollständige Induktion $a^n < a^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (Übung). Ebenso zeigt man $a^{n+1} < a^n$ für $0 < a < 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$.
Sei nun $a > 0$ und $k = -n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $a^k = (a^{-1})^n$ und $a^{k+1} = (a^{-1})^{n-1}$.
Ist $a > 1$, so ist $a^{-1} = 1/a < 1$ und daher gilt nach dem schon Bewiesenen: $(a^{-1})^n < (a^{-1})^{n-1}$, also $a^k < a^{k+1}$.
Ist $a < 1$, so ist $a^{-1} > 1$, also gilt nach dem bereits Gezeigten: $(a^{-1})^n > (a^{-1})^{n-1}$, also $a^k > a^{k+1}$.

(v) Seien $0 \leq a < b$. Wäre $\sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{b}$, so wäre wegen (i) $a = (\sqrt[n]{a})^n \geq (\sqrt[n]{b})^n = b$, was ein Widerspruch ist. Also gilt $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.
(vi) Sei $a > 1$. Wäre $\sqrt[n+1]{a} \geq \sqrt[n]{a}$, so wäre wegen (i) auch $a = (\sqrt[n+1]{a})^{n+1} \geq (\sqrt[n]{a})^{n+1} = a\sqrt[n]{a}$, also $1 \geq \sqrt[n]{a}$, also $1 \geq (\sqrt[n]{a})^n = a$, was ein Widerspruch ist. Also muss $\sqrt[n+1]{a} < \sqrt[n]{a}$ gelten.
(vii) schließlich folgt aus (vi) durch Kehrwertbildung (Details als Übung). □

Aus diesem Lemma folgt weiter (wie?): $a^k < a^l$ für $a > 1$ und $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $k < l$ (Verallgemeinerung von (iii)). Auch die Aussagen (iv), (vi) und (vii) lassen sich entsprechend verallgemeinern. Schließlich kann man die Aussagen auch auf rationale Exponenten ausdehnen:

Lemma II.4.9. *Es gilt:*

(i) $0 < a < b \Rightarrow a^x < b^x$ *für alle* $x \in \mathbb{Q}$ *mit* $x > 0$.

(ii) $0 < a < b \Rightarrow b^x < a^x$ *für alle* $x \in \mathbb{Q}$ *mit* $x < 0$.

(iii) $a > 1 \Rightarrow a^x < a^y$ *für alle* $x, y \in \mathbb{Q}$ *mit* $x < y$.

(iv) $0 < a < 1 \Rightarrow a^x > a^y$ *für alle* $x, y \in \mathbb{Q}$ *mit* $x < y$.

Den Beweis dieses Lemmas überlasse ich Ihnen als Übungsaufgabe.

Es ist möglich, a^x auch für irrationale Exponenten x sinnvoll zu definieren. Das verschieben wir allerdings noch ein ganzes Stück (siehe Abschnitt V.3).

Zum Abschluss wollen wir nun noch beweisen, was Ihnen als Aussage sicherlich schon bekannt ist: $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Satz II.4.10. $\sqrt{2}$ *ist irrational.*

Beweis. Wir beginnen mit einer kleinen Vorüberlegung: Ist $n \in \mathbb{N}$ eine ungerade Zahl, so ist auch n^2 ungerade. (Beweis: Als ungerade Zahl lässt sich n schreiben als $n = 2k + 1$ für ein geeignetes $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist aber $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ ebenfalls ungerade, denn $4k^2 + 4k$ ist gerade.)
Nun zum eigentlichen Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$. Solch eine Aussage zeigt man grundsätzlich durch einen Widerspruchsbeweis: Angenommen $\sqrt{2}$ wäre rational. Dann wäre $\sqrt{2} = a/b$ für gewisse $a, b \in \mathbb{N}$, wobei wir ohne Einschränkung annehmen können, dass der Bruch bereits ausgekürzt ist, d. h. a und b haben keinen gemeinsamen Teiler außer 1.
Durch quadrieren folgt $2 = a^2/b^2$, also $2b^2 = a^2$. Daher ist a^2 gerade und wegen unserer Vorüberlegung muss dann auch a gerade sein. Also ist $a = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.
Dann folgt aber $2b^2 = a^2 = 4k^2$ und somit $b^2 = 2k^2$. Also ist b^2 gerade und wiederum wegen der Vorüberlegung ist dann auch b selbst gerade.
Also wären a und b beide teilbar durch 2, obwohl sie teilerfremd sein sollten. Das ist ein Widerspruch und folglich kann $\sqrt{2}$ nicht rational sein. □

Allgemeiner kann man zeigen, dass für $a, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ folgendes gilt: Entweder ist $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{N}$ oder $\sqrt[n]{a}$ ist irrational. Insbesondere ist $\sqrt[n]{p}$ irrational für alle Primzahlen p.

II.5 Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit

In diesem Abschnitt wollen wir die Begriffe der Abzählbarkeit/Überabzählbarkeit von Mengen kennenlernen und insbesondere zeigen, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, $\mathbb{R}$ dagegen überabzählbar. Wir beginnen mit der Definition.

Definition II.5.1. Eine Menge A heißt *abzählbar*, falls es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$ gibt. Anderenfalls heißt A *überabzählbar.*

Abzählbarkeit von A bedeutet also, dass sich die Elemente von A mit Hilfe der natürlichen Zahlen durchnummerieren lassen, wobei wir Wiederholungen zulassen (f muss nicht injektiv sein): $A = \{f(1), f(2), f(3), \ldots\}$.

Beispiele:
1) Jede endliche Menge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ist abzählbar, denn die Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$ definiert durch

$$f(i) := \begin{cases} a_i \text{ für } i \in \{1, \ldots, n\} \\ a_n \text{ für } i > n \end{cases}$$

ist surjektiv.
2) Natürlich ist $\mathbb{N}$ selbst abzählbar (die identische Abbildung ($f(n) = n$ für alle n) ist bijektiv).
3) Auch $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist abzählbar. Beispielsweise ist die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ definiert durch $f(n) := n - 1$ für $n \in \mathbb{N}$ sogar bijektiv. Es ist $\{f(1), f(2), f(3), f(4), \ldots\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}_0$.

Bevor wir weitere Beispiele betrachten, beweisen wir folgende allgemeine Aussage.

Lemma II.5.2. *Sind A und B zwei abzählbare Mengen, so ist auch $A \cup B$ abzählbar.*

Beweis. Sind A und B abzählbar, so existieren surjektive Abbildungen $f : \mathbb{N} \to A$ und $g : \mathbb{N} \to B$. Wir definieren dann $h : \mathbb{N} \to A \cup B$ durch

$$h(n) := \begin{cases} f(k) \text{ falls } n = 2k - 1 \\ g(l) \text{ falls } n = 2l. \end{cases}$$

Es ist also $\{h(1), h(2), h(3), h(4), \ldots\} = \{f(1), g(1), f(2), g(2), \ldots\}$.
Es ist nicht schwer formal nachzuweisen, dass h wirklich surjektiv ist (tun Sie es). $\square$

Als einfache Folgerung aus diesem Lemma erhalten wir die Abzählbarkeit von $\mathbb{Z}$: Es ist $\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$. $\mathbb{N}_0$ ist abzählbar (siehe oben) und auch $A := \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ ist abzählbar, denn $f : \mathbb{N} \to A$ mit $f(n) := -n$ definiert eine bijektive Abbildung. Also ist nach dem obigen Lemma auch $\mathbb{Z}$ abzählbar.

Das mag auf den ersten Blick etwas merkwürdig erscheinen, gibt es doch gefühlt mehr ganze als natürliche Zahlen. Es gilt aber sogar noch mehr.

Satz II.5.3. *Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $\mathbb{Q}^+ := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$ abzählbar ist. Dazu schreiben wir die Elemente von $\mathbb{Q}^+$ in folgendem Schema auf:

$$\begin{matrix} \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}$$

Dieses Schema zählen wir nun längs der Nebendiagonalen durch, d. h. wir definieren eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ durch $f(1) = 1/1$, $f(2) = 2/1$, $f(3) = 1/2$, $f(4) = 3/1$, $f(5) = 2/2$, $f(6) = 1/3$, $f(7) = 4/1$, $f(8) = 3/2$, $f(9) = 2/3$, $f(10) = 1/4$, usw. (wir belassen es bei dieser etwas informalen Definition und verzichten darauf, eine explizite Formel für $f(n)$ anzugeben, obwohl auch das möglich wäre).
Somit ist also $\mathbb{Q}^+$ abzählbar. Ferner ist dann natürlich auch die Menge $\mathbb{Q}^- := \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$ abzählbar, denn $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^-$ mit $g(n) := -f(n)$ ist surjektiv.
Schließlich folgt aus Lemma II.5.2, dass auch $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$ abzählbar ist. □

Da selbst $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, drängt sich langsam die Frage auf, ob es überhaupt überabzählbare Mengen gibt. Die Antwort liefert der folgende Satz.

Satz II.5.4. *$\mathbb{R}$ ist überabzählbar.*

Beweis. Da Teilmengen von abzählbaren Mengen wieder abzählbar sind (Beweis als Übung), genügt es zu zeigen, dass das Intervall $[0, 1)$ überabzählbar ist. Hierzu verwenden wir im Vorgriff die Dezimaldarstellung reeller Zahlen, die wir eigentlich erst später offiziell einführen werden. Da Ihnen diese

Darstellung aber sicherlich aus der Schule hinlänglich vertraut ist, erlauben wir uns diesen kleinen Bruch im deduktiven Aufbau.
Um die Eindeutigkeit der Dezimaldarstellung zu erzwingen, einigen wir uns darauf, keine Darstellungen mit der Periode 9 zuzulassen. So schreiben wir etwa $1/10$ als $0,1000\ldots$ (und nicht als $0,0999\ldots$).
Angenommen nun $[0,1)$ wäre abzählbar. Dann gäbe es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to [0,1)$. Jedes $f(n)$ schreiben wir nun in seiner Dezimaldarstellung auf:

$$\begin{aligned} f(1) &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots \\ f(2) &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots \\ f(3) &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ldots \\ f(4) &= 0, a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Allgemein bezeichnen wir mit a_{ij} die j-te Nachkommastelle von $f(i)$.
Nun definieren wir für jedes $k \in \mathbb{N}$:

$$b_k := \begin{cases} 5, & \text{falls } a_{kk} \neq 5 \\ 4, & \text{falls } a_{kk} = 5. \end{cases}$$

Schließlich setzen wir $y := 0, b_1b_2b_3\ldots$. Dann ist $y \in [0,1)$ und wegen der Surjektivität von f muss also $y = f(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gelten.
Andererseits ist nach Konstruktion $b_k \neq a_{kk}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, d. h. die k-te Nachkommastelle von y ist ungleich der k-ten Nachkommastelle von $f(k)$, mithin $y \neq f(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, was ein Widerspruch ist.
Also ist $[0,1)$ und folglich auch ganz $\mathbb{R}$ überabzählbar. □

Als einfache Folgerung erhält man, dass es überabzählbar viele irrationale Zahlen geben muss. Es existieren also in gewissem Sinne wesentlich mehr irrationale als rationale Zahlen.

Korollar II.5.5. *Die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ der irrationalen Zahlen ist überabzählbar.*

Beweis. Angenommen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ wäre abzählbar. Wegen Lemma II.5.2 und der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ wäre dann auch $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ abzählbar, im Widerspruch zu Satz II.5.4. Also muss $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ überabzählbar sein. □

Die obigen Beweise zur Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ und Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ stammen übrigens von Georg Cantor (1845–1918), dem Begründer der Mengenlehre. Seine Beweistechniken sind auch als erstes und zweites Cantorsches Diagonalverfahren bekannt.

Zum Schluss dieses Kapitels wollen wir nun noch zeigen, dass zwischen je zwei reellen Zahlen sowohl eine rationale als auch eine irrationale Zahl liegt (man sagt dazu auch: $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liegen dicht in $\mathbb{R}$).

Satz II.5.6. *Für alle reellen Zahlen $x < y$ existiert eine rationale Zahl q mit $x < q < y$. Ebenso existiert eine irrationale Zahl r mit $x < r < y$.*

Beweis. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Wir nehmen zunächst $x \geq 0$ an. Es ist $d := y - x > 0$. Wähle ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1/d$ (Archimedisches Axiom).
Die Menge $A := \left\{k \in \mathbb{N}_0 : \frac{k}{n} \leq x\right\}$ ist nicht leer (da $0 \in A$) und endlich.[16]
Nach Beispiel II.3.5 existiert also $m := \max(A)$. Dann ist $q := \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Q}$ und es gilt $x < q < y$.
Beweis dazu: Wegen $m+1 > m = \max(A)$ ist $m+1 \notin A$, also $q = (m+1)/n > x$. Ferner ist wegen $n > 1/d$ auch $q = (m+1)/n = m/n + 1/n < m/n + d \leq x + d = y$.
Ist $x < 0 < y$, so ist 0 eine rationale Zahl zwischen x und y.
Ist schließlich $x < y \leq 0$, so ist $-x > -y \geq 0$ und nach dem schon Bewiesenen existiert ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $-x > q > -y$. Dann ist $-q \in \mathbb{Q}$ mit $x < -q < y$.
Für die Dichtheit der irrationalen Zahlen beachte man, dass mit $x < y$ auch $x/\sqrt{2} < y/\sqrt{2}$ gilt. Daher existiert ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $x/\sqrt{2} < q < y/\sqrt{2}$. Dann ist $r := q\sqrt{2}$ irrational (warum?) und $x < r < y$. $\square$

[16] Wiederum wegen des Archimedischen Axioms existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > xn$. Dann ist $k \leq N$ für alle $k \in A$, also $A \subseteq \{0, \ldots, N\}$ und A ist endlich.

III Folgen und Grenzwerte

Mit diesem Kapitel beginnt nun die eigentliche Analysis. Wir wollen den zentralen Begriff des Grenzwertes einer Folge einführen und studieren. Hierzu sei vorab schon einmal an die Dreiecksungleichung $|x + y| \leq |x| + |y|$ erinnert (siehe Lemma II.2.8), die wir im Folgenden häufig verwenden werden.

III.1 Definition und Beispiele

Den Begriff der Folgen und die üblichen Notationen hatten wir schon gegen Ende von Abschnitt II.3 eingeführt, siehe also dort. Hier kommen wir direkt zum Begriff der Konvergenz.

Definition III.1.1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und sei $a \in \mathbb{R}$. Wir sagen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a *konvergiert* (oder gegen a konvergent ist), falls folgendes gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ |a_n - a| \leq \varepsilon.$$

In diesem Fall schreibt man $a_n \to a$.
Eine Folge, welche nicht konvergiert, heißt *divergent*. Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt *Nullfolge*.

Zur Erinnerung: $\forall$ bedeutet "für alle" und $\exists$ bedeutet "es existiert". Die obige Definition liest sich also ausführlich als: "Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ $|a_n - a| \leq \varepsilon$ gilt."

Man beachte, dass der Index n_0 von ε abhängt, man sollte also eigentlich $n_0(\varepsilon)$ schreiben, was man aber meist der Kürze halber nicht tut.

Anschaulich gesprochen bedeutet die Definition der Konvergenz, dass die Folgenglieder dem Wert a beliebig nahe kommen, wenn man den Index nur groß genug macht.

Die Bedingung $|a_n - a| \leq \varepsilon$ ist übrigens äquivalent zu $a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon$ (Beweis?), was man manchmal auch so ausdrückt: a_n liegt in einer ε-Umgebung von a.

Natürlich ist es nicht wesentlich, dass die Nummerierung der Folgenglieder bei 1 beginnt. Alle folgenden Definitionen und Aussagen gelten sinngemäß auch für Folgen $(a_n)_{n\geq N}$ mit beliebigem Anfangsindex $N \in \mathbb{N}_0$.

Wir werden gleich einige Beispiele betrachten. Vorher müssen wir aber noch festhalten, dass eine Folge nicht gegen zwei verschiedene Zahlen konvergieren kann.

Lemma III.1.2. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a_n \to a$ und $a_n \to b$. Dann gilt $a = b$.*

Beweis. Angenommen es ist $a \neq b$. Dann ist $|a-b| > 0$. Wir wählen ein ε mit $0 < \varepsilon < |a-b|/2$. Wegen $a_n \to a$ existiert ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.
Wegen $a_n \to b$ existiert ebenfalls ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - b| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_1$. Sei nun $m := \max\{n_0, n_1\}$. Dann ist $|a_m - a| \leq \varepsilon$ und $|a_m - b| \leq \varepsilon$, also gilt wegen der Dreiecksungleichung

$$|a-b| = |a - a_m + a_m - b| \leq |a - a_m| + |a_m - b| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Andererseits ist $\varepsilon < |a-b|/2$, also $|a-b| > 2\varepsilon$, was ein Widerspruch ist. Also muss $a = b$ gelten. □

Diese Eindeutigkeitsaussage rechtfertigt auch die folgende Schreibweise: Ist $a_n \to a$, so heißt a der *Grenzwert* (oder der *Limes*) von (a_n) und man schreibt auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Wir kommen nun zu einigen Beispielen: Zunächst das einfachste Beispiel $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (konstante Folge). Dann ist natürlich $|a_n - a| = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also erst recht $a_n \to a$. Selbiges gilt natürlich auch, falls (a_n) nur von einer Stelle an konstant ist (d. h. falls ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n = a$ für alle $n \geq n_0$ existiert).

Nun zu etwas interessanteren Beispielen.

Beispiel III.1.3. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Beweis. Wir geben uns ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vor und müssen ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|1/n - 0| = 1/n \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$ finden.
Dazu wählen wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq 1/\varepsilon$ (dass das in der Tat möglich ist, folgt aus dem Archimedischen Axiom). Dann gilt für alle $n \geq n_0$

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon,$$

wie gewünscht. □

Beispiel III.1.4. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Beweis. Wieder geben wir uns ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vor und versuchen ein passendes n_0 zu finden.
Wählen wir $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq 1/\sqrt{\varepsilon}$, so gilt für alle $n \geq n_0$

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n_0^2} \leq \varepsilon,$$

wie gewünscht. □

Beispiel III.1.5. Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Beweis. Die Aussage ist klar für $q = 0$. Sei also $q \neq 0$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir setzen $x := \frac{1}{|q|} - 1$. Wegen $|q| < 1$ ist $\frac{1}{|q|} > 1$, also $x > 0$.
Nach der Bernoulli-Ungleichung (siehe Beispiel II.3.4) gilt $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, also

$$\frac{1}{|q|^n} \geq 1 + nx \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir wählen nun eine natürliche Zahl n_0 mit $n_0 \geq \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$.
Dann gilt für alle $n \geq n_0$ auch $nx \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$ (beachte $x > 0$) und folglich

$$\frac{1}{|q|^n} \geq 1 + nx \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Daraus folgt $|q^n| = |q|^n \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$. □

Das nächste Beispiel liefert sogar eine noch stärkere Aussage.

Beispiel III.1.6. Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} nq^n = 0.$$

Beweis. Wieder sei ohne Einschränkung $q \neq 0$, $\varepsilon > 0$ beliebig und $x := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$. Die obige Abschätzung mit der Bernoulli-Ungleichung reicht jetzt aber nicht mehr aus. Stattdessen verwenden wir den binomischen Satz (Satz II.3.10): Für $n \geq 2$ gilt

$$\frac{1}{|q|^n} = (1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \geq \binom{n}{2} x^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} x^2 = \frac{1}{2} n(n-1)x^2. \tag{III.1}$$

Die obige Ungleichung gilt, weil alle Summanden $\binom{n}{k}x^k$ positiv sind.
Nun wählen wir eine natürliche Zahl n_0 mit

$$n_0 \geq \max\left\{2, 1 + \frac{2}{\varepsilon x^2}\right\}.$$

Dann gilt für alle $n \geq n_0$ einerseits $n \geq 2$ und andererseits $n-1 \geq 2/(\varepsilon x^2)$, folglich wegen (III.1) auch

$$\frac{1}{n|q|^n} \geq \frac{1}{2}(n-1)x^2 \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Also ist $|nq^n| = n|q|^n \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$. □

Beispiel III.1.7. Sei $a > 0$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Beweis. Das ist klar für $a = 1$. Sei nun $a > 1$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq a/\varepsilon$. Nach der Bernoulli-Ungleichung (Beispiel II.3.4) gilt dann für $n \geq n_0$

$$(1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon \geq 1 + n_0\varepsilon > n_0\varepsilon \geq a$$

und folglich $\sqrt[n]{a} \leq 1+\varepsilon$. Wegen $a > 1$ ist auch $\sqrt[n]{a} > 1$, also $|\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$.
Sei nun $0 < a < 1$ und sei wieder $\varepsilon > 0$. Ohne Einschränkung können wir auch $\varepsilon < 1$ annehmen (warum?).
Nun ist $1/a > 1$ und nach dem soeben Bewiesenen muss also $\lim_{n\to\infty} 1/\sqrt[n]{a} = 1$ gelten. Sei $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Dann ist $\varepsilon' > 0$ und folglich existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|1/\sqrt[n]{a} - 1| \leq \varepsilon'$ für $n \geq n_0$. Dann ist $1/\sqrt[n]{a} \leq 1 + \varepsilon' = 1/(1-\varepsilon)$ und somit $\sqrt[n]{a} \geq 1 - \varepsilon$ für $n \geq n_0$.
Wegen $a < 1$ ist auch $\sqrt[n]{a} < 1$ für alle n. Daher folgt $|\sqrt[n]{a} - 1| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. □

Beispiel III.1.8. Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir verwenden wieder den binomischen Satz (Satz II.3.10): Für alle $n \geq 2$ gilt

$$(1+\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon^k \geq \binom{n}{2}\varepsilon^2 = \frac{1}{2}n(n-1)\varepsilon^2.$$

Nun wählen wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq \max\left\{2, \frac{2}{\varepsilon^2} + 1\right\}$.
Für alle $n \geq n_0$ gilt dann

$$(1+\varepsilon)^n \geq \frac{1}{2}n(n-1)\varepsilon^2 \geq \frac{1}{2}n\frac{2}{\varepsilon^2}\varepsilon^2 = n,$$

also $1 + \varepsilon \geq \sqrt[n]{n}$.
Da natürlich stets $\sqrt[n]{n} \geq 1$ gilt, folgt $|\sqrt[n]{n} - 1| \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$. □

Zum Schluss betrachten wir noch das Standardbeispiel für eine divergente Folge.

Beispiel III.1.9. Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.

Beweis. Anschaulich kann man die Divergenz dieser Folge folgendermaßen begreifen: Die Glieder der Folge springen immer abwechselnd zwischen -1 und 1 hin und her, nähern sich also keinem bestimmten Wert an.
Eine solche Begründung ist aber natürlich für den Mathematiker nicht ausreichend. Es muss ein wasserdichter Beweis geführt werden, der z. B. wie folgt aussieht:
Angenommen es gäbe ein $a \in \mathbb{R}$ mit $(-1)^n \to a$. Dann gäbe es insbesondere einen Index n_0 mit $|(-1)^n - a| \leq 1/2$ für alle $n \geq n_0$.
Es folgt $|1 - a| \leq 1/2$ und $|-1-a| \leq 1/2$ und somit (Dreiecksungleichung) $2 = |1-a-(-1-a)| \leq |1-a|+|-1-a| \leq 1$, was natürlich ein Widerspruch ist. Also ist $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der Tat nicht konvergent. □

III.2 Grenzwertsätze

Wir wollen nun einige Sätze kennenlernen, die das Berechnen von Grenzwerten häufig stark erleichtern können. Zunächst noch eine Definition.

Definition III.2.1. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen heißt *beschränkt*, falls es ein $K \geq 0$ mit $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt.

Mit anderen Worten ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann beschränkt, wenn die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ der Folgenglieder beschränkt ist.
Als erstes halten wir folgendes fest.

Lemma III.2.2. *Jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.*

Beweis. Sei $a_n \to a$. Dann existiert insbesondere ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \leq 1$ für $n \geq n_0$. Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a| \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Sei $K := \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0}|, 1 + |a|\}$. Dann gilt $|a_n| \leq K$ für alle $n \leq n_0$ und wegen der obigen Überlegung auch $|a_n| \leq K$ für $n \geq n_0$. □

Aus diesem Lemma folgt z. B. sofort, dass die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 2, 3, \dots)$ nicht konvergiert, da sie unbeschränkt ist.
Die Umkehrung des obigen Lemmas gilt nicht: Zum Beispiel ist $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, die aber nach Beispiel III.1.9 nicht konvergiert.
Als Nächstes zeigen wir, dass das Produkt aus einer beschränkten Folge und einer Nullfolge wieder gegen Null konvergiert.

Lemma III.2.3. *Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, so ist auch $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da (b_n) beschränkt ist, existiert ein $K > 0$ mit $|b_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Sei $\varepsilon' := \varepsilon/K$. Wegen $a_n \to 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| \leq \varepsilon'$ für $n \geq n_0$.
Also gilt für $n \geq n_0$ auch

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq \varepsilon' K = \varepsilon.$$

Also gilt $a_n b_n \to 0$. $\square$

Als Konsequenz erhält man z. B. $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, denn $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Nun kommen wir zu Summen und Produkten von Grenzwerten.

Satz III.2.4. *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Dann gilt auch:*

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$.

Insbesondere gilt auch $\lim_{n\to\infty} ca_n = ca$ *für alle* $c \in \mathbb{R}$ *und* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$.

Beweis. (i) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $a_n \to a$ existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \leq \varepsilon/2$ für $n \geq n_1$.
Ebenso existiert wegen $b_n \to b$ ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| \leq \varepsilon/2$ für $n \geq n_2$.
Setze $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Dann gilt für $n \geq n_0$

$$|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Das zeigt $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.
(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_n b_n - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|. \quad \text{(III.2)}$$

Wir setzen $c_n := |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Wegen $a_n \to a$ gilt natürlich (?) $|a_n - a| \to 0$. Ebenso gilt $|b_n - b| \to 0$.
Nach Lemma III.2.2 ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, also folgt aus Lemma III.2.3 auch $|b_n - b||a_n| \to 0$.
Gleichfalls folgt aus Lemma III.2.3 auch $|b||a_n - a| \to 0$.
Mit Hilfe des schon bewiesenen Teils (i) erhält man daraus $c_n \to 0$.
Also existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $c_n = |c_n| \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$.
Wegen (III.2) ist dann auch $|a_n b_n - ab| \leq c_n \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$. $\square$

Als Nächstes beweisen wir noch eine Quotientenregel für Grenzwerte.

Satz III.2.5. *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Es gelte $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Beweis. Es genügt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$ zu zeigen. Wegen $\frac{a_n}{b_n} = a_n \frac{1}{b_n}$ folgt dann die Behauptung aus Satz III.2.4 (ii).
Wegen $b \neq 0$ ist $|b|/2 > 0$, also existiert wegen $b_n \to b$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| \leq |b|/2$ für $n \geq n_1$. Daraus folgt (umgekehrte Dreiecksungleichung (siehe Lemma II.2.8 (c)))

$$|b_n| \geq |b| - |b - b_n| \geq |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} \quad \text{für } n \geq n_1$$

und folglich

$$\frac{1}{|b_n|} \leq \frac{2}{|b|} \quad \text{für } n \geq n_1.$$

Es folgt

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n||b|} \leq \frac{2|b - b_n|}{|b|^2} \quad \text{für } n \geq n_1.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $b_n \to b$ existiert ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| \leq \frac{\varepsilon|b|^2}{2}$ für $n \geq n_2$. Sei $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| \leq \frac{2|b - b_n|}{|b|^2} \leq \frac{2\varepsilon|b|^2}{2|b|^2} = \varepsilon.$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Hier ist ein Beispiel zur Anwendung der obigen Grenzwertsätze: Es sei

$$a_n := \frac{n^3 + n^2 - 1}{2n^3 + 5n + 4} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Indem wir Zähler und Nenner mit $1/n^3$ multiplizieren, erhalten wir

$$a_n := \frac{1 + 1/n - 1/n^3}{2 + 5/n^2 + 4/n^3} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da wir bereits $1/n \to 0$ wissen, ergibt eine Anwendung der obigen Grenzwertsätze:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &:= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 1/n - 1/n^3}{2 + 5/n^2 + 4/n^3} \\ &= \frac{1 + \lim_{n\to\infty} 1/n - \lim_{n\to\infty} 1/n^3}{2 + 5\lim_{n\to\infty} 1/n^2 + 4\lim_{n\to\infty} 1/n^3} = \frac{1 + 0 - 0}{2 + 0 + 0} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Als Nächstes zeigen wir, dass man auch Grenzwert und Betragsfunktion vertauschen kann.

Lemma III.2.6. *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge reeller Zahlen und sei* $a \in \mathbb{R}$ *mit* $a_n \to a$*. Dann gilt auch* $|a_n| \to |a|$*.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \le \varepsilon$ für $n \ge n_0$. Wegen der umgekehrten Dreiecksungleichung (siehe Lemma II.2.8 (c)) gilt dann auch $||a_n| - |a|| \le |a_n - a| \le \varepsilon$ für $n \ge n_0$. □

Das nächste Lemma drückt die sogenannte Monotonie des Grenzwertes aus.

Lemma III.2.7. *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folgen reeller Zahlen und seien* $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a_n \to a$ *und* $b_n \to b$*. Es existiere ein* $N \in \mathbb{N}$ *mit* $a_n \le b_n$ *für alle* $n \ge N$*. Dann gilt auch* $a \le b$*.*

Beweis. Sei $c_n := b_n - a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung ist $c_n \ge 0$ für $n \ge N$ und wegen Satz III.2.4 ist $\lim_{n\to\infty} c_n = b - a =: c$.
Angenommen $c < 0$. Dann ist $\varepsilon := -c/2 > 0$ und wegen $c_n \to c$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|c_n - c| \le \varepsilon$ für $n \ge n_0$.
Sei $m := \max\{n_0, N\}$. Dann ist einerseits $c_m \ge 0$ und andererseits $c_m \le c + \varepsilon = c/2 < 0$, was ein Widerspruch ist.
Also ist $c \ge 0$ und somit $a \le b$. □

Achtung: Die entsprechende Aussage für $<$ ist im Allgemeinen *falsch.* So ist z. B. $0 < 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$.

Der nächste Satz ist häufig nützlich, um die Konvergenz einer Folge gegen einen bestimmten Grenzwert nachzuweisen. Er wird auch *Einschachtelungssatz* oder *Sandwichprinzip* genannt.[1]

Satz III.2.8. *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folgen reeller Zahlen und sei* $a \in \mathbb{R}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty} b_n$*.*
Es existiere ein $N \in \mathbb{N}$ *mit* $a_n \le c_n \le b_n$ *für alle* $n \ge N$*.*

Dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} c_n = a$*.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $a_n \to a$ und $b_n \to a$, existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \le \varepsilon$ für $n \ge n_1$ und $|b_n - a| \le \varepsilon$ für $n \ge n_2$.
Setze $n_0 := \max\{n_1, n_2, N\}$. Dann gilt für alle $n \ge n_0$

$$a - \varepsilon \le a_n \le c_n \le b_n \le a + \varepsilon,$$

also $|c_n - a| \le \varepsilon$ für $n \ge n_0$. □

Als Nächstes zeigen wir noch, dass die Grenzwertbildung auch mit der Wurzelfunktion verträglich ist.

[1] Man beachte, dass dieser Satz nicht unmittelbar aus Lemma III.2.7 folgt, da nicht vorausgesetzt wird, dass die Folge (c_n) überhaupt konvergiert. Die Konvergenz von (c_n) ist Bestandteil der Behauptung.

Satz III.2.9. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Dann ist $a \geq 0$ und es gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.*

Beweis. Wegen $a_n \geq 0$ für alle n ist nach Lemma III.2.7 auch $a \geq 0$. Wir nehmen zunächst sogar $a > 0$ an. Wegen $a_n \to a$ gilt dann $|a_n - a| \leq a/2$ ab einem gewissen Index n_1. Daraus folgt $a_n \geq a - a/2 = a/2$ und somit $\sqrt{a_n} \geq \sqrt{a/2}$ für $n \geq n_1$.
Aufgrund der dritten binomischen Formel[2] gilt also

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a/2} + \sqrt{a}} \quad \text{für } n \geq n_1.$$

Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig, so setzen wir $\varepsilon' := \varepsilon(\sqrt{a} + \sqrt{a/2})$ und wählen ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \leq \varepsilon'$ für $n \geq n_2$.
Für alle $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ gilt dann $|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| \leq \varepsilon'/(\sqrt{a} + \sqrt{a/2}) = \varepsilon$. Also gilt $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$.
Nun betrachten wir noch den Fall $a = 0$. Wegen $a_n \to 0$ existiert zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein Index n_0 mit $a_n \leq \varepsilon^2$ für $n \geq n_0$. Daraus folgt $\sqrt{a_n} \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Also gilt in diesem Fall auch $\sqrt{a_n} \to 0$. $\square$

Dieser Satz gilt entsprechend auch für k-te Wurzeln, nicht nur für die Quadratwurzel. Dazu kommen wir allerdings erst in Kapitel V (siehe Korollar V.2.11). Hier fahren wir zunächst mit dem Begriff der monotonen Folgen fort.

Definition III.2.10. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *monoton steigend*, falls $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *monoton fallend*, falls $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *streng monoton steigend* bzw. *streng monoton fallend*, falls $a_n < a_{n+1}$ bzw. $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Zum Beispiel ist die Folge $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend, $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton steigend. Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist dagegen weder monoton steigend noch monoton fallend.

Wenn es nur heißt eine Folge sei monoton, so ist damit gemeint, dass sie monoton fallend oder monoton steigend ist. Eine analoge Sprechweise gilt für strenge Monotonie.

Wir kommen nun zu dem wichtigen Ergebnis, dass monotone und beschränkte Folgen konvergent sind.

Satz III.2.11. *Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende und beschränkte Folge reeller Zahlen, so gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt, so gilt entsprechend $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

[2] Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$.

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend und beschränkt. Dann existiert $s := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, wegen der Ordnungsvollständigkleit von $\mathbb{R}$. Wir wollen $a_n \to s$ zeigen und geben uns dafür ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vor.
Nach Definition des Supremums muss es dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > s - \varepsilon$ geben.[3]
Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend ist, gilt dann für alle $n \geq n_0$ auch $a_n \geq a_{n_0} > s - \varepsilon$.
Andererseits ist natürlich $a_n \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (denn s ist eine obere Schranke für $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$). Somit folgt insgesamt $s - \varepsilon < a_n \leq s < s + \varepsilon$ für $n \geq n_0$, also $|a_n - s| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$, was den Beweis beendet.
Die Aussage für eine monoton fallende Folge können Sie zur Übung auf analoge Weise selbst zeigen. □

Zum Schluss dieses Abschnitts führen noch den Begriff der bestimmten Divergenz gegen ∞ oder $-\infty$ ein.

Definition III.2.12. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt *bestimmt divergent* (oder *uneigentlich konvergent*) gegen ∞, falls folgendes gilt:

$$\forall R \geq 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; a_n \geq R.$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *bestimmt divergent* (oder *uneigentlich konvergent*) gegen $-\infty$, falls

$$\forall R \leq 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; a_n \leq R$$

gilt.

Bestimmte Divergenz gegen ∞ bedeutet also, dass die Glieder der Folge jeweils von einer Stelle an jede positive Zahl übertreffen. Entsprechend bedeutet bestimmte Divergenz gegen $-\infty$, dass die Folgenglieder jeweils von einer Stelle an kleiner als jede negative Zahl werden.

In diesen Fällen schreibt man auch $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ oder $a_n \to \infty$ bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ oder $a_n \to -\infty$.

Da konvergente Folgen beschränkt sein müssen (Lemma III.2.2) sind bestimmt divergente Folgen auch wirklich divergent.

Beispielsweise gilt $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} -n = -\infty$. Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist dagegen zwar divergent (siehe Beispiel III.1.9), aber nicht bestimmt divergent (wieso?).

Auch die im letzten Abschnitt begonnene Untersuchung der Folgen $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $q \in \mathbb{R}$ können wir nun vervollständigen.

Beispiel III.2.13. Sei $q \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{für } -1 < q < 1 \\ 1 & \text{für } q = 1 \\ \infty & \text{für } q > 1. \end{cases}$$

[3] Wäre $a_n \leq s - \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so wäre $s - \varepsilon$ eine obere Schranke von $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ und somit $s - \varepsilon \geq \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = s$, was ein Widerspruch ist.

Für $q \leq -1$ ist die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ weder konvergent noch bestimmt divergent.

Beweis. Den Fall $-1 < q < 1$ hatten wir schon in Beispiel III.1.5 behandelt. Der Fall $q = 1$ ist klar. Sei nun $q > 1$. Dann ist $x := q - 1 > 0$ und nach der Bernoulli-Ungleichung (Beispiel II.3.4) gilt $q^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist also $R \geq 0$, so ist $q^n \geq R$, wenn nur $n \geq (R - 1)/x$ gilt.
Im Fall $q = -1$ hatten wir schon festgestellt, dass die Folge weder konvergent noch bestimmt divergent ist. Sei nun $q < -1$. Dann ist $|q| > 1$, also gilt nach dem schon Bewiesenen $|q^n| = |q|^n \to \infty$. Insbesondere ist die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt und kann daher auch nicht konvergieren.
Weiter ist $q^n = (-1)^n(-q)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $-q > 0$, also ist $q^n > 0$ für jedes gerade n und $q^n < 0$ für jedes ungerade n. Daher kann $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ weder gegen ∞ noch gegen $-\infty$ bestimmt divergieren. □

Auch für bestimmt divergente Folgen kann man gewisse Grenzwertsätze formulieren und beweisen, was ich Ihnen aber selbst zur Übung überlassen möchte.

III.3 Teilfolgen und Häufungspunkte

In diesem Abschnitt wollen wir Teilfolgen von Folgen näher untersuchen. Zunächst zur Definition.

Definition III.3.1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und sei $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge. $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls es eine streng monoton steigende Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von natürlichen Zahlen gibt, sodass $b_k = a_{n_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Teilfolgen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entstehen also, indem man bestimmte Glieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussondert. Zum Beispiel ist $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_2, a_4, a_6, \dots)$ diejenige Teilfolge, die nur die Glieder mit geradem Index aussondert (hier ist $n_k = 2k$). Entsprechend ist $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}} = (a_1, a_3, a_5, \dots)$ die Teilfolge, die nur aus den Gliedern mit ungeradem Index besteht (hier ist $n_k = 2k - 1$).

Als Erstes halten wir nun fest: Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so konvergiert auch jede Teilfolge gegen den selben Grenzwert. Das sollte anschaulich recht klar sein, wir schreiben aber natürlich trotzdem auch einen formalen Beweis auf.

Bemerkung III.3.2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ mit $a_n \to a$ und sei $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gilt auch $b_k \to a$.

Beweis. Wir fixieren eine streng monoton steigende Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ mit $b_k = a_{n_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und geben uns ein $\varepsilon > 0$ vor.
Wegen $a_n \to a$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$.
Da $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge natürlicher Zahlen ist, existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_{k_0} \geq n_0$ und folglich auch $n_k \geq n_{k_0} \geq n_0$ für

$k \geq k_0$. Damit folgt $|b_k - a| = |a_{n_k} - a| \leq \varepsilon$ für $k \geq k_0$ und der Beweis ist abgeschlossen. $\square$

Nun führen wir den Begriff eines Häufungspunktes einer Folge ein.

Definition III.3.3. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt ein *Häufungspunkt* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls es eine Teilfolge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, für die $b_k \to a$ gilt.

Häufungspunkte sind also die Grenzwerte von Teilfolgen. Nach der obigen Bemerkung hat eine konvergente Folge ihren Grenzwert als einzigen Häufungspunkt. Divergente Folgen können mehrere Häufungspunkte besitzen, z. B. hat die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ die beiden Häufungspunkte -1 und 1 (und keine weiteren (Beweis?)). Die Folge $(1, 2, 3, \dots)$ der natürlichen Zahlen hat dagegen überhaupt keinen Häufungspunkt (warum?).

Das Hauptziel dieses Abschnitts ist zu zeigen, dass jede beschränkte Folge mindestens einen Häufungspunkt besitzt (Satz von Bolzano-Weierstraß). Dazu beweisen wir zunächst folgendes auch für sich genommen interessante Lemma.

Lemma III.3.4. *Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen enthält eine monotone Teilfolge.*

Beweis. Der Schlüssel zum Beweis liegt in der Betrachtung der Menge $A := \{n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_k \text{ für alle } k \geq n\}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.
1. Fall: A ist nicht leer, hat aber kein größtes Element.
In diesem Fall kann man eine monoton fallende Teilfolge wie folgt konstruieren: Wegen $A \neq \emptyset$ existiert ein $n_1 \in A$. Da A kein größtes Element besitzt, gibt es ein $n_2 \in A$ mit $n_2 > n_1$. Wiederum weil A kein größtes Element besitzt, existiert ein $n_3 \in A$ mit $n_3 > n_2$, usw.
Hat man allgemein bereits k Elemente $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ in A gefunden, so existiert stets noch ein $n_{k+1} > n_k$ mit $n_{k+1} \in A$.
Dann ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und wegen $n_{k+1} > n_k$ gilt nach Definition von A auch $a_{n_{k+1}} \leq a_{n_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Teilfolge ist also monoton fallend.
2. Fall: A hat ein größtes Element oder $A = \emptyset$.
Dann existiert also ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$ für alle $n \in A$ (falls $A = \emptyset$ leistet dies jedes $m \in \mathbb{N}$).
Wir setzen $n_1 := m + 1$. Dann ist $n_1 \notin A$ und folglich (nach Definition von A), existiert ein $n_2 > n_1$ mit $a_{n_2} > a_{n_1}$. Wegen $n_2 > m$ ist auch $n_2 \notin A$, also existiert ein $n_3 > n_2$ mit $a_{n_3} > a_{n_2}$.
Ist allgemein $k \in \mathbb{N}$ und sind bereits $m + 1 = n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ mit $a_{n_{i+1}} > a_{n_i}$ für $i = 1, \dots, k-1$ gefunden, so ist wegen $n_k > m$ auch $n_k \notin A$ und folglich existiert ein $n_{k+1} > n_k$ mit $a_{n_{k+1}} > a_{n_k}$.
Insgesamt findet man so also eine (sogar streng) monoton steigende Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. $\square$

Nun kommen wir zum angekündigten Satz von Bolzano-Weierstraß.[4]

Satz III.3.5 (Satz von Bolzano-Weierstraß)**.** *Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge, hat also einen Häufungspunkt.*

Beweis. Mit der bereits geleisteten Vorarbeit ist der Beweis ganz einfach: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Nach Lemma III.3.4 existiert eine monotone Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Natürlich ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ebenfalls beschränkt. Nach Satz III.2.11 ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ also konvergent. □

Wir wollen nun noch zeigen, dass jede beschränkte Folge sogar einen kleinsten und einen größten Häufungspunkt besitzt.[5] Dazu führen wir folgende Definition ein.

Definition III.3.6. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Wir setzen

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k : k \geq n\}$$

und

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k : k \geq n\}.$$

$\limsup_{n\to\infty} a_n$ heißt der *Limes superior* und $\liminf_{n\to\infty} a_n$ heißt der *Limes inferior* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bevor diese Definition akzeptiert werden kann, ist natürlich noch zu begründen, warum die obigen Grenzwerte existieren. Wegen der vorausgesetzten Beschränktheit von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existieren zunächst $\sup\{a_k : k \geq n\}$ und $\inf\{a_k : k \geq n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es ist

$$-K \leq \inf\{a_k : k \geq n\} \leq \sup\{a_k : k \geq n\} \leq K \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

wobei $K \geq 0$ mit $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

Ferner gilt

$$\sup\{a_k : k \geq n\} \geq \sup\{a_k : k \geq n+1\}$$

und

$$\inf\{a_k : k \geq n\} \leq \inf\{a_k : k \geq n+1\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ (warum?).

[4] Bernard Bolzano (1781–1848): katholischer Priester, Philosoph und Mathematiker, lieferte wichtige Beiträge zur Analysis und hinterließ auch ein umfangreiches philosophisches Werk. Viele seiner Arbeiten fanden allerdings erst nach seinem Tod ausreichende Beachtung; Karl Weierstraß (1815–1897): deutscher Mathematiker, lieferte wichtige Beiträge zur Analysis und zur Funktionentheorie (Analysis komplexer Funktionen, siehe Abschnitt VIII.7 zur Definition komplexer Zahlen).

[5] Das ist nicht so selbstverständlich, wie es vielleicht auf den ersten Blick erscheint, denn eine beschränkte Folge kann durchaus unendlich viele Häufungspunkte besitzen (können Sie ein Beispiel angeben?).

Also sind $(\sup\{a_k : k \geq n\})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\inf\{a_k : k \geq n\})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen, die monoton fallend bzw. monoton steigend sind. Nach Satz III.2.11 sind sie daher konvergent und es folgt zudem:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf\{\sup\{a_k : k \geq n\} : n \in \mathbb{N}\},$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup\{\inf\{a_k : k \geq n\} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Der Limes superior einer beschränkten Folge ist ihr größter und der Limes inferior ihr kleinster Häufungspunkt, wie der folgende Satz zeigt.

Satz III.3.7. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen und sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(i) $\limsup_{n\to\infty} a_n$ *und* $\liminf_{n\to\infty} a_n$ *sind Häufungspunkte von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) *Ist a ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so gilt*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq a \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

(iii) $a_n \to a \Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} a_n = a = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

Beweis. (i) Wir wollen zeigen, dass $s := \limsup_{n\to\infty} a_n$ ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Wegen $s = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k : k \geq n\}$ existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$s - \varepsilon < \sup\{a_k : k \geq n\} < s + \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon.$$

Insbesondere ist

$$s - 1 < \sup\{a_k : k \geq N_1\} < s + 1$$

und daher existiert ein Index $n_1 \geq N_1$ mit $s - 1 < a_{n_1} < s + 1$.
Sei nun $m \in \mathbb{N}$ mit $m > \max\{n_1, N_2\}$. Dann ist

$$s - \frac{1}{2} < \sup\{a_k : k \geq m\} < s + \frac{1}{2}$$

und folglich existiert ein $n_2 \geq m > n_1$ mit $s - 1/2 < a_{n_2} < s + 1/2$.
Ist allgemein $l \in \mathbb{N}$ und sind bereits Indizes $n_1 < \cdots < n_l$ mit $s - 1/i < a_{n_i} < s + 1/i$ für $i = 1, \ldots, l$ gefunden, so wählen wir als Nächstes eine natürliche Zahl q mit $q > \max\{n_l, N_{l+1}\}$. Dann ist

$$s - \frac{1}{l+1} < \sup\{a_k : k \geq q\} < s + \frac{1}{l+1}$$

und daher gibt es ein $n_{l+1} \geq q > n_l$ mit $s - 1/(l+1) < a_{n_{l+1}} < s + 1/(l+1)$.
Insgesamt finden wir so also eine Teilfolge $(a_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ mit

$$s - \frac{1}{l} < a_{n_l} < s + \frac{1}{l} \quad \text{für alle } l \in \mathbb{N}.$$

Wegen $\lim_{l\to\infty} 1/l = 0$ folgt daraus mit Satz III.2.8: $\lim_{l\to\infty} a_{n_l} = s$. Somit ist s ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Der Beweis, dass auch $\liminf_{n\to\infty} a_n$ ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, verläuft analog. Sie können ihn zur Übung selbst führen.
(ii) Angenommen a ist ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann existiert also eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Es ist

$$t_k := \inf\{a_m : m \geq n_k\} \leq a_{n_k} \leq \sup\{a_m : m \geq n_k\} =: s_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Nach Definition von lim sup und lim inf (und wegen Bemerkung III.3.2) gilt $\lim_{k\to\infty} t_k = \liminf_{n\to\infty} a_n$ und $\lim_{k\to\infty} s_k = \limsup_{n\to\infty} a_n$.
Mit Lemma III.2.7 folgt daher

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq a \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

(iii) Es gelte zunächst $a_n \to a$. Wegen (ii) gilt dann auf jeden Fall auch

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq a \leq \limsup_{n\to\infty} a_n. \tag{III.3}$$

Ist ferner $\varepsilon > 0$ beliebig, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Dann ist auch

$$a - \varepsilon \leq \inf\{a_k : k \geq n\} \leq \sup\{a_k : k \geq n\} \leq a + \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Wegen Lemma III.2.7 folgt daraus für $n \to \infty$:

$$a - \varepsilon \leq \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \leq a + \varepsilon.$$

Da dies für jedes beliebige $\varepsilon > 0$ gelten muss, folgt

$$a \leq \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \leq a. \tag{III.4}$$

Aus (III.3) und (III.4) folgt $\liminf_{n\to\infty} a_n = a = \limsup_{n\to\infty} a_n$.
Nun gelte umgekehrt $\liminf_{n\to\infty} a_n = a = \limsup_{n\to\infty} a_n$ und wir wollen $a_n \to a$ zeigen. Sei dazu wieder $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $\liminf_{n\to\infty} a_n = a$ existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$a + \varepsilon \geq \inf\{a_k : k \geq n\} \geq a - \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_1. \tag{III.5}$$

Wegen $\limsup_{n\to\infty} a_n = a$ existiert entsprechend ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$a + \varepsilon \geq \sup\{a_k : k \geq n\} \geq a - \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_2. \tag{III.6}$$

Sei $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Aus (III.5) und (III.6) folgt $a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon$, also $|a_n - a| \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Damit ist der Beweis beendet. □

III.4 Cauchy-Folgen und Vollständigkeit

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wollen wir noch folgendes Problem etwas näher beleuchten: Will man anhand der Definition überprüfen, ob eine gegebene Folge konvergiert, so muss man bereits eine konkrete Vermutung haben, was der Grenzwert ist. Das ist jedoch häufig nicht offensichtlich (wie könnte z. B. $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/4 + 1/9 + \cdots + 1/n^2)$ aussehen?).

Daher ist es wünschenswert, auch ein *intrinsisches* Konvergenzkriterium zur Verfügung zu haben, d. h. ein Kriterium, welches einem erlaubt die Konvergenz einer Folge nur anhand ihrer Glieder zu überprüfen, ohne eine Vermutung für den Grenzwert. Ein solches Kriterium wollen wir nun kennenlernen. Wir beginnen mit der entscheidenden Definition der Cauchy-Folgen[6].

Definition III.4.1. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt *Cauchy-Folge*, falls sie folgende Bedingung erfüllt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq n_0 \ |a_n - a_m| \leq \varepsilon.$$

Anschaulich gesprochen bedeutet die obige Bedingung, dass die Folgenglieder einander beliebig nahe kommen, wenn man den Index nur groß genug macht.

Wir zeigen nun zunächst zwei Lemmata über Cauchy-Folgen.

Lemma III.4.2. *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge. Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.*

Beweis. 1) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \leq \varepsilon/2$ für alle $n \geq n_0$.
Sind nun $n, m \geq n_0$, so folgt

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.
2) Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| \leq 1$ für alle $n, m \geq n_0$. Es folgt

$$|a_n| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| \leq 1 + |a_{n_0}| \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Sei $K := \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}|\}$. Dann gilt $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man beachte hier die Ähnlichkeit zum Beweis der Beschränktheit konvergenter Folgen (Lemma III.2.2). □

Lemma III.4.3. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt besitzt, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.*

[6] Augustin-Louis Cauchy (1789–1857): französischer Mathematiker mit wichtigen Beiträgen zur Analysis.

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann existiert also eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, welche gegen a konvergiert.
Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig, so existiert wegen der Cauchy-Eigenschaft ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| \leq \varepsilon/2$ für alle $n, m \geq n_0$.
Wegen $a_{n_k} \to a$ existiert auch ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_k} - a| \leq \varepsilon/2$ für alle $k \geq k_0$. Ohne Einschränkung kann man $n_{k_0} \geq n_0$ annehmen (warum?).
Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - a| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Damit ist $a_n \to a$ gezeigt. □

Nun kommen wir zum entscheidenden Satz: Jede Cauchy-Folge konvergiert. Diese Eigenschaft nennt man auch die (metrische)[7] Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

Satz III.4.4. *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis. Dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist hatten wir schon in Lemma III.4.2 gezeigt.
Sei nun umgekehrt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Nach Lemma III.4.2 ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Also hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz III.3.5) einen Häufungspunkt. Aus Lemma III.4.3 folgt damit die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Zum Schluss betrachten wir das folgende Beispiel, das auch gleich eine gute Überleitung zum nächsten Kapitel darstellt.

Beispiel III.4.5. Wir setzen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Beweis. Wir wollen nachweisen, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Dazu bemerken wir zunächst, dass für alle $n > m$ gilt:

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} \right| = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Weiter gilt für alle $k \geq 2$

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

[7] Im Unterschied zur Ordnungsvollständigkeit, allerdings haben wir die Ordnungsvollständigkeit beim Beweis der metrischen Vollständigkeit implizit verwendet (wo nämlich?).

Es folgt (für $n > m$):

$$|s_n - s_m| < \sum_{k=m+1}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$
$$= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}.$$

(alle dazwischenliegenden Summanden heben sich weg, so etwas nennt man auch *Teleskopsumme*).
Insbesondere ist
$$|s_n - s_m| < \frac{1}{m} \quad \text{für } n > m.$$
Ist nun $\varepsilon > 0$, so wählen wir uns ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $1/n_0 < \varepsilon$. Dann gilt auch $|s_n - s_m| < \varepsilon$ für $n > m \geq n_0$.
Also ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und folglich (nach Satz III.4.4) konvergent.
(Warum hat es eigentlich gereicht, den Fall $n > m$ zu betrachten?) $\square$

Die obige Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entstand durch sukzessives Aufsummieren der Glieder der Folge $(1/k^2)_{k\in\mathbb{N}}$. Das ist ein Beispiel für eine sogenannte *Reihe*, mit denen wir uns im folgenden Kapitel näher befassen wollen.

IV Reihen

Reihen entstehen, wenn man die Glieder einer Folge aufsummiert. Sie stellen wichtige Objekte der Analysis dar und sollen daher in diesem Kapitel ausführlich diskutiert werden.

IV.1 Definition, Beispiele und elementare Eigenschaften

Wir beginnen mit der formalen Definition.

Definition IV.1.1. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Wir setzen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird die *Reihe* mit den Gliedern $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ genannt und mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet. s_n heißt die n-te *Partialsumme* der Reihe.

Falls die Reihe konvergiert, so wird ihr Grenzwert (auch die *Summe* der Reihe genannt) ebenfalls mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet, also

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

falls dieser Limes existiert.

Gemäß der obigen Definition taucht das Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ also in zwei unterschiedlichen Bedeutungen auf. Zum einen bezeichnet es die Reihe selbst, also die Folge $(s_1, s_2, \dots)$ der Partialsummen, und zwar unabhängig davon, ob diese konvergiert oder nicht. Fall sie aber konvergiert, so wird ihr Grenzwert mit demselben Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet. Man muss stets aus dem Kontext schließen, was gerade gemeint ist.

Natürlich darf eine Reihe auch bei irgendeinem anderen Index $N \in \mathbb{N}_0$ beginnen als bei 1. Man schreibt dann entsprechend $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$.

Wir betrachten nun zunächst einige Beispiele.

Beispiel IV.1.2 (*Geometrische Reihe*)**.** Für alle $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Für $|q| \geq 1$ ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ divergent.

Beweis. Ist $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$, so gilt nach der geometrischen Summenformel (Beispiel II.3.3)

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Wegen $|q| < 1$ gilt $q^n \to 0$ (siehe Beispiel III.1.5) und somit natürlich auch $q^{n+1} \to 0$. Daher folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Für $|q| \geq 1$ bilden die Glieder der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ keine Nullfolge (Beispiel III.2.13) und wir werden im nächsten Abschnitt zeigen, dass das die Konvergenz der Reihe ausschließt (siehe Korollar IV.2.2). □

Beispiel IV.1.3. Die sogenannte *harmonische Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ ist divergent.

Beweis. Sei $s_n := \sum_{k=1}^{n} 1/k$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen

$$s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{IV.1}$$

durch vollständige Induktion.
Im Induktionsanfang ($n = 1$) gilt sogar Gleichheit.
Angenommen nun es gilt $s_{2^n} \geq 1 + n/2$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{aligned} s_{2^{n+1}} &= \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = s_{2^n} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \\ &\geq 1 + \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2} + 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{n+1}{2}, \end{aligned}$$

denn $\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} 1/k$ hat $2^{n+1} - 2^n = 2^n$ Summanden, die alle größer oder gleich $1/2^{n+1}$ sind.
Damit ist (IV.1) bewiesen und aus dieser Ungleichung folgt natürlich, dass die Teilfolge $(s_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt und somit divergent ist. Dann ist aber erst recht die ganze Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent. □

Beispiel IV.1.4. Im Unterschied zum vorigen Beispiel ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ konvergent.

Das hatten wir bereits in Beispiel III.4.5 mit Hilfe der Cauchy-Bedingung gezeigt. Diese Vorgehensweise liefert allerdings keine Erkenntnisse über den Grenzwert der Reihe. Tatsächlich gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Das zu beweisen liegt aber weit jenseits der Möglichkeiten dieser Vorlesung.[1] Im nächsten Abschnitt werden wir noch diverse weitere Kriterien kennenlernen, mit deren Hilfe man die Konvergenz einer Reihe nachweisen kann, ohne ihren Grenzwert zu bestimmen. Zunächst aber wollen wir noch in den folgenden zwei Lemmata ein paar elementare Eigenschaften von Reihen festhalten.

Lemma IV.1.5. *Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ zwei konvergente Reihen und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ und $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ konvergent und es gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad \textit{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Beweis. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Durch Grenzwertbildung $n \to \infty$ folgt daraus (mit den entsprechenden Grenzwertsätzen für Folgen) die Behauptung. □

Lemma IV.1.6. *Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe.*

(i) *Existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ konvergiert, so ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent und es gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k.$$

(ii) *Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so konvergiert auch $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ für alle $N \in \mathbb{N}$ und es gilt*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=N}^{\infty} a_k = 0.$$

[1] Bislang haben wir nicht einmal die Zahl π offiziell eingeführt. Ich baue hier auf Ihr Schulwissen.

Beweis. (i) Sei $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ konvergent. Für alle $n \geq N$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{n} a_k,$$

woraus für $n \to \infty$ die Behauptung folgt.[2]
(ii) Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. Wiederum gilt für alle $N \in \mathbb{N}$ und alle $n \geq N$:

$$\sum_{k=N}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{N-1} a_k.$$

Folglich ist $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ konvergent und es gilt

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{N-1} a_k \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N}.$$

Für $N \to \infty$ folgt daraus

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=N}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N-1} a_k = 0.$$

□

Im nächsten Abschnitt kommen wir nun zu den schon angekündigten Konvergenzkriterien.

IV.2 Konvergenzkriterien für Reihen

Wir beginnen damit, das Cauchy-Folgenkriterium noch einmal explizit für Reihen aufzuschreiben.

Satz IV.2.1 (Cauchy-Kriterium)**.** *Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit*

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \varepsilon \quad \textit{für alle } n > m \geq N$$

existiert.

Beweis. Sei s_n die n-te Partialsumme der Reihe. Dann ist $|s_n - s_m| = |\sum_{k=m+1}^{n} a_k|$ für alle $n > m$. Die obige Bedingung ist also dazu äquivalent, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bildet und daher wegen Satz III.4.4 auch äquivalent zur Konvergenz der Reihe. □

[2] Für $N = 1$ gilt übrigens konventionsgemäß $\sum_{k=1}^{N-1} a_k = \sum_{k=1}^{0} a_k = 0$ (leere Summe).

Als Folgerung erhält man ein einfaches notwendiges Konvergenzkriterium.

Korollar IV.2.2. *Ist die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent, so gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Beweis. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent und sei $\varepsilon > 0$. Wähle ein $N \in \mathbb{N}$ wie in Satz IV.2.1. Dann ist insbesondere $|a_{m+1}| \leq \varepsilon$ für $m \geq N$ (setze in Satz IV.2.1 $n = m + 1$). Das zeigt $a_{m+1} \to 0$ und folglich auch $a_m \to 0$. □

Warnung: Dieses Kriterium ist *nicht hinreichend*. Das zeigt bereits das Beispiel der harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$. Diese ist nach Beispiel IV.1.3 divergent, obwohl $1/n \to 0$.

Als Nächstes betrachten wir einige Konvergenzkriterien für Reihen mit positiven (genauer: nichtnegativen) Gliedern. Zunächst ist für solche Reihen die Konvergenz äquivalent zur Beschränktheit.

Lemma IV.2.3. *Sei* $a_k \geq 0$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$ *und sei* s_n *die* n*-te Partialsumme der Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. *Dann ist* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *genau dann konvergent, wenn* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt ist.*

Beweis. Da aus der Konvergenz einer Folge stets ihre Beschränktheit folgt (Lemma III.2.2), ist die Notwendigkeit der Bedingung klar.
Sei nun umgekehrt $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Wegen $a_{n+1} \geq 0$ ist

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} = s_{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nur beschränkt sondern auch monoton steigend. Nach Satz III.2.11 existiert daher $\lim_{n\to\infty} s_n$. □

Sind $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ zwei Reihen, so heißt $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine *Majorante* von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (oder auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine *Minorante* von $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$), falls $a_k \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Für Reihen mit positiven Gliedern gilt das folgende wichtige Majoranten-Kriterium.

Lemma IV.2.4 (Majoranten-Kriterium). *Sei* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine Reihe mit* $a_k \geq 0$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$. *Falls* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine konvergente Majorante besitzt, so ist* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *selbst konvergent.*

Beweis. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine konvergente Majorante von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Dann sind die Partialsummen von $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ beschränkt, mit anderen Worten es existiert ein $K \geq 0$ mit

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \leq K \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen $b_k \geq a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k \leq K \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also sind auch die Partialsummen von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ beschränkt und nach Lemma IV.2.3 ist daher $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. $\square$

Aus dem Majoranten-Kriterium folgt natürlich sofort ein entsprechendes Minoranten-Kriterium: Sind $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ zwei Reihen mit nichtnegativen Gliedern und ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine divergente Minorante von $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, so ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent.

Hier ist ein Beispiel für eine Anwendung des Majoranten-/Minoranten-Kriteriums.

Beispiel IV.2.5. Die Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$
ist konvergent für alle $p \in \mathbb{Q}$ mit $p \geq 2$ und divergent für alle $p \in \mathbb{Q}$ mit $0 < p \leq 1$.

Beweis. Sei $p \in \mathbb{Q}$ mit $p \geq 2$. Dann ist $1/k^p \leq 1/k^2$ für alle $k \in \mathbb{N}$, d. h. die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist eine Majorante von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$.
Nach Beispiel IV.1.4 ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent, also konvergiert nach dem Majoranten-Kriterium auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$.
Sei nun $p \in \mathbb{Q}$ mit $0 < p \leq 1$. Dann ist $1/k \leq 1/k^p$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also ist die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ eine divergente Minorante von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ und folglich ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ divergent. $\square$

Die Voraussetzung $p \in \mathbb{Q}$ im obigen Beispiel rührt übrigens nur daher, dass wir bislang noch keine Potenzen mit irrationalen Exponenten eingeführt haben. Tatsächlich gilt die Aussage aber auch für solche Exponenten (mit dem selben Beweis).

Der Fall $1 < p < 2$ ist mit den obigen Überlegungen nicht abgedeckt. Die Reihe ist auch für solche p konvergent, den Beweis dazu müssen wir allerdings noch ein ganzes Stück aufschieben (siehe Kapitel VII, Integralvergleichskriterium).

Als Nächstes wollen wir das sogenannte Quotienten-Kriterium kennenlernen, das auf einer geometrischen Reihe als Majorante beruht.

Satz IV.2.6 (Quotienten-Kriterium)**.** *Sei $a_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.*

(i) *Existieren ein $0 < q < 1$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ für alle $n \geq N$, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.*

(ii) *Existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ für alle $n \geq N$, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.*

Beweis. (i) Sei $q \in (0,1)$ und sei $N \in \mathbb{N}$ mit $a_{n+1}/a_n \leq q$ für $n \geq N$. Eine ganz einfache vollständige Induktion liefert $a_n \leq a_N q^{n-N}$ für alle $n \geq N$.

Wegen $0 < q < 1$ ist die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergent (siehe Beispiel IV.1.2).
Wegen der Lemmata IV.1.5 und IV.1.6 konvergiert dann auch $\sum_{k=N}^{\infty} a_N q^{k-N}$ und diese Reihe ist eine Majorante von $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$. Also ist auch $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ konvergent.[3]
Wegen Lemma IV.1.6 konvergiert dann auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
(ii) Die Annahme liefert $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \geq N$ und folglich $a_n \geq a_N > 0$ für alle $n \geq N$. Damit kann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge sein und somit ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent (Korollar IV.2.2). □

Meist wird das Quotienten-Kriterium in der folgenden vereinfachten Version angewendet.

Korollar IV.2.7 (Vereinfachtes Quotienten-Kriterium)**.** *Sei $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.*

(i) *Ist $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.*

(ii) *Ist $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.*

Beweis. (i) Sei $a := \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Wir wählen ein $\varepsilon > 0$ mit $q := a+\varepsilon < 1$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n+1}/a_n - a| \leq \varepsilon$ für $n \geq N$. Insbesondere ist $a_{n+1}/a_n \leq a + \varepsilon = q$ für $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Quotienten-Kriterium ist also $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.
(ii) Sei $a := \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Sei $\varepsilon > 0$ mit $a - \varepsilon > 1$ und sei $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n+1}/a_n - a| \leq \varepsilon$ für $n \geq N$. Dann ist $a_{n+1}/a_n \geq a - \varepsilon > 1$ für $n \geq N$, also ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nach dem Quotienten-Kriterium divergent. □

Im Falle $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ lässt sich leider keine allgemeine Aussage über die Konvergenz/Divergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ treffen. So ist z. B. die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ divergent, die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ dagegen konvergent, obwohl in beiden Fällen der Grenzwert der Quotienten-Folge gleich 1 ist.

Es folgt ein Beispiel für eine Anwendung des Quotienten-Kriteriums.

Beispiel IV.2.8. Für alle $x \geq 0$ ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

konvergent.

Beweis. Das ist klar für $x = 0$. Sei also $x > 0$. Dann gilt

$$\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \to 0.$$

[3] Das Majoranten-Kriterium gilt natürlich entsprechend auch für bei N beginnende Reihen.

Also ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ nach dem (vereinfachten) Quotienten-Kriterium konvergent. $\square$

In Beispiel IV.2.13 werden wir dieses Ergebnis auch auf negative x ausdehnen. Zunächst führen wir aber noch das sogenannte Wurzel-Kriterium ein, das in Struktur und Beweis dem Quotienten-Kriterium sehr ähnlich ist.

Satz IV.2.9 (Wurzel-Kriterium). *Sei $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.*

(i) *Existieren ein $0 \leq q < 1$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ für alle $n \geq N$, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.*

(ii) *Existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ für alle $n \geq N$, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.*

Beweis. (i) Die Voraussetzung impliziert $a_n \leq q^n$ für $n \geq N$. Somit ist $\sum_{k=N}^{\infty} q^k$ eine (wegen $0 \leq q < 1$ konvergente) Majorante von $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$. Also ist $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ und daher auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.
(ii) In diesem Fall ist natürlich $a_n \geq 1$ für alle $n \geq N$ und folglich $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge. Die Reihe muss also divergieren. $\square$

Auch von diesem Kriterium gibt es eine vereinfachte Version.

Korollar IV.2.10 (Vereinfachtes Wurzel-Kriterium). *Sei $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei $(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.*

(i) *Ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.*

(ii) *Ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.*

Der Beweis ist analog zum Beweis von Korollar IV.2.7. Schreiben sie die Details zur Übung selbst auf.

Im Falle $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ lässt sich auch hier keine allgemeine Aussage treffen, denn beispielsweise ist $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ divergent und $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ konvergent, obwohl wegen $\sqrt[n]{n} \to 1$ (siehe Beispiel III.1.8) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n} = 1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n^2}$ gilt.

Das Wurzel-Kriterium ist übrigens echt schärfer als das Quotienten-Kriterium (jede Konvergenz, die vom Quotienten-Kriterium erkannt wird, wird auch vom Wurzelkriterium erkannt, aber nicht umgekehrt (ohne Beweis)). In der Praxis arbeitet man aber häufig lieber mit dem Quotienten-Kriterium, da die Terme $\sqrt[n]{a_n}$ oft nur schwer zu überblicken sind.

Bisher haben wir fast ausschließlich Reihen mit positiven Gliedern untersucht. Um die Konvergenz von Reihen zu untersuchen, deren Glieder das Vorzeichen beliebig häufig wechseln können, ist das folgende Konzept nützlich.

Definition IV.2.11. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

Entscheidend ist nun die folgende Beobachtung.

Lemma IV.2.12. *Jede absolut konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist auch konvergent und es gilt*

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Beweis. Zum Beweis verwenden wir das Cauchy-Kriterium. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen der Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ existiert dann ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n > m \geq N.$$

Wegen der Dreiecksungleichung[4] gilt dann auch

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n > m \geq N.$$

Also ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nach dem Cauchy-Kriterium konvergent. Weiter liefert die Dreiecksungleichung

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt für $n \to \infty$ mit Lemma III.2.6 und Lemma III.2.7 auch

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

□

Damit können wir nun Beispiel IV.2.8 verallgemeinern.

Beispiel IV.2.13 (Exponentialreihe)**.** Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

absolut konvergent und folglich auch konvergent.

Beweis. Es ist $\left|\frac{x^k}{k!}\right| = \frac{|x|^k}{k!}$ und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}$ konvergiert nach Beispiel IV.2.8. □

[4] Die Dreiecksungleichung für endlich viele Summanden folgt aus der für zwei Summanden durch eine einfache vollstänge Induktion.

Mit der Exponentialreihe werden wir uns im übernächsten Abschnitt noch näher befassen.

Die Umkehrung von Lemma IV.2.12 gilt nicht: Es gibt Reihen, die konvergent, aber nicht absolut konvergent sind, so z. B. die sogenannte *alternierende harmonische Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$. Um das nachzuweisen benötigen wir noch folgendes Konvergenzkriterium.

Satz IV.2.14 (Leibniz-Kriterium[5])**.** *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton (steigende oder fallende) Nullfolge. Dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergent und es gilt*

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k\right| \leq |a_{n+1}| \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist.[6] Dann sind alle Folgenglieder ≥ 0 (warum?).
Sei $s_n := \sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$s_{2n+2} = s_{2n} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} = s_{2n} - (a_{2n+1} - a_{2n+2})$$

und $a_{2n+1} \geq a_{2n+2}$, also

$$s_{2n+2} \leq s_{2n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Ebenso ist

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1} \geq s_{2n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also sind die Folgen $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(s_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend bzw. monoton steigend.
Ferner ist $s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n} \geq s_{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$s_1 \leq s_{2n} \leq s_2 \quad \text{und} \quad s_1 \leq s_{2n-1} \leq s_2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also sind die Folgen $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(s_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton und beschränkt und somit nach Satz III.2.11 konvergent. Seien $s := \lim_{n\to\infty} s_{2n}$ und $t := \lim_{n\to\infty} s_{2n-1}$. Wegen $s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n} \to 0$ folgt $s = t$.
Aus $s_{2n} \to s$ und $s_{2n-1} \to s$ folgt wiederum $s_n \to s$ (Übung).
Wir zeigen nun noch die behauptete Abschätzung für den Grenzwert: Da $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fällt ist $s_{2n} \geq s$ für jedes n. Ebenso ist $s_{2n-1} \leq s$ für alle n, da $(s_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigt. Es folgt $0 \leq s_{2n} - s \leq s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1}$ und $0 \leq s - s_{2n-1} \leq s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also gilt $|s - s_n| \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

[5]Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716): deutscher Universalgelehrter (unter anderem Mathematiker, Philosoph, Historiker), Erfinder der Differentialrechnung (unabhängig von Isaac Newton, siehe Kapitel VI).

[6]Der Fall einer monoton steigenden Nullfolge kann durch Multiplikation mit -1 auf diesen Fall zurückgeführt werden.

Aus dem Leibniz-Kriterium und der Divergenz der harmonischen Reihe folgt nun sofort, dass die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ konvergent, jedoch nicht absolut konvergent ist.

Im folgenden Abschnitt wollen wir nun endlich die Dezimaldarstellung reeller Zahlen einführen.

IV.3 Dezimaldarstellung reeller Zahlen

Dezimaldarstellungen reeller Zahlen sind Ihnen sicherlich aus der Schule vertraut, wenn auch die genaue Bedeutung von unendlichen Dezimalentwicklungen dort meist nicht thematisiert wird. Natürlich steht z. B. $0,125$ für $1/10 + 2/100 + 5/1000$, aber was genau bedeutet eigentlich $0,3333\ldots$? Im Folgenden wollen wir daher die Dezimalentwicklung reeller Zahlen auf mathematisch saubere Art und Weise einführen. Wir beginnen mit dem Satz zur Existenz und Eindeutigkeit dieser Entwicklungen.

Satz IV.3.1. *Sei $x \geq 0$. Dann existiert genau eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{N}_0$ mit den beiden folgenden Eigenschaften:*

1) $a_n \leq 9$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^i} \leq x < \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^i} + \frac{1}{10^n}.$$

Ehe wir zum Beweis kommen führen wir noch die sogenannte *Gauß-Klammerfunktion* ein: Für $y \in \mathbb{R}$ bezeichnet $[y]$ die größte ganze Zahl, welche kleiner oder gleich y ist, also

$$[y] := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq y\}.$$

Beispielsweise ist $[2] = 2$, $[3/2] = 1$, $[-3/2] = -2$. Allgemein gilt für $k_0 \in \mathbb{Z}$:

$$k_0 = [y] \;\Leftrightarrow\; k_0 \leq y < k_0 + 1.$$

Zur Übung können Sie einmal den Graphen der Gauß-Klammerfunktion skizzieren.

Nun zum Beweis des Satzes.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Existenz. Setzt man $a_0 := [x]$, so ist $a_0 \in \mathbb{N}_0$ und $a_0 \leq x < a_0 + 1$, also ist 2) erfüllt (die Bedingung 1) ist für $n = 0$ nicht vorhanden).
Angenommen nun wir haben bereits $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{N}_0$ wie gewünscht konstruiert. Dann setzen wir

$$y := 10^{n+1}\left(x - \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^i}\right).$$

Wegen $\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^i} \leq x < \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^i} + \frac{1}{10^n}$ gilt $0 \leq y < 10$.
Sei $a_{n+1} := [y]$. Es folgt $a_{n+1} \in \mathbb{N}_0$ mit $a_{n+1} \leq 9$. Ferner ist $a_{n+1} \leq y < a_{n+1} + 1$. Daraus folgt

$$\frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \leq x - \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^i} < \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}},$$

also

$$\sum_{i=0}^{n+1} \frac{a_i}{10^i} \leq x < \sum_{i=0}^{n+1} \frac{a_i}{10^i} + \frac{1}{10^{n+1}}.$$

Damit ist die Existenz bewiesen.
Die Eindeutigkeit beweist sich fast genauso: Sind $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ zwei Folgen in $\mathbb{N}_0$, die den Bedingungen 1) und 2) genügen, so folgt zunächst $a_0 \leq x < a_0 + 1$ und $b_0 \leq x < b_0 + 1$, also $a_0 = [x] = b_0$.
Angenommen nun wir wissen schon $a_i = b_i$ für $i = 0, \ldots, n$. Aus der Bedingung 2) folgt

$$a_{n+1} \leq 10^{n+1}\left(x - \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^i}\right) < a_{n+1} + 1$$

und ebenso

$$b_{n+1} \leq 10^{n+1}\left(x - \sum_{i=0}^{n} \frac{b_i}{10^i}\right) < b_{n+1} + 1.$$

Daraus folgt

$$a_{n+1} = \left[10^{n+1}\left(x - \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^i}\right)\right] = \left[10^{n+1}\left(x - \sum_{i=0}^{n} \frac{b_i}{10^i}\right)\right] = b_{n+1}.$$

Also muss nach vollständiger Induktion $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gelten. □

Die nach dem obigen Satz existierende und eindeutig bestimmte Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ nennen wir die *Dezimaldarstellung* von x und schreiben

$$x = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots.$$

Als Nächstes zeigen wir, dass die Folge nicht von einer Stelle an konstant gleich 9 sein kann.

Lemma IV.3.2. *Sei $x \geq 0$ und sei $(a_n)_{n\geq 0}$ die Dezimaldarstellung von x. Dann existiert kein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n = 9$ für alle $n \geq N$.*

Beweis. Angenommen es gibt doch ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n = 9$ für $n \geq N$. Wegen der Bedingung 2) an (a_n) folgt

$$\sum_{i=N}^{n} a_i 10^{-i} \leq \underbrace{x - \sum_{i=0}^{N-1} a_i 10^{-i}}_{=:y} < \sum_{i=N}^{n} a_i 10^{-i} + 10^{-n} \quad \text{für } n \geq N.$$

Nun ist aber

$$\sum_{i=N}^{n} a_i 10^{-i} = 9\sum_{i=N}^{n} 10^{-i} = 9\sum_{i=0}^{n-N} 10^{-(i+N)} = \frac{9}{10^N}\sum_{i=0}^{n-N} 10^{-i}$$
$$= \frac{9}{10^N}\frac{1-1/10^{n-N+1}}{1-1/10} = \frac{1-1/10^{n-N+1}}{10^{N-1}} = \frac{1}{10^{N-1}} - \frac{1}{10^n},$$

wobei wir die geometrische Summenformel verwendet haben.
Es folgt

$$\frac{1}{10^{N-1}} - \frac{1}{10^n} \leq y < \frac{1}{10^{N-1}} \quad \text{für } n \geq N.$$

Wegen $1/10^n \to 0$ impliziert das $1/10^{N-1} \leq y < 1/10^{N-1}$, was ein Widerspruch ist. □

Nun müssen wir noch zeigen, dass auch umgekehrt zu jeder zulässigen Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ von Ziffern genau eine reelle Zahl mit dieser Dezimaldarstellung existiert. Hierzu benötigen wir das Instrument der Reihen.

Satz IV.3.3. *Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{N}_0$ mit $a_n \leq 9$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die nicht von einer Stelle an konstant gleich 9 ist.*

Dann existiert genau eine reelle Zahl $x \geq 0$, deren Dezimaldarstellung gleich $(a_n)_{n\geq 0}$ ist, nämlich

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}.$$

Beweis. Zunächst ist die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$ nach dem Majoranten-Kriterium und der Konvergenz der geometrischen Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^i}$ selbst konvergent. Sei also $x := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$. Dann ist $x \geq 0$ und da die Partialsummenfolge monoton steigend ist, ist $\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^i} \leq x$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Ferner ist

$$x - \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^i} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$$

und da sämtliche a_k mit $k \geq n+1$ kleiner oder gleich 9 und mindestens eines sogar echt kleiner als 9 ist, folgt (wie?)

$$x - \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^i} < \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{9}{10^i}.$$

Mit der geometrischen Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^i} = 1/(1-1/10) = 10/9$ folgt daher

$$x - \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^i} < 9\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^{i+n+1}} = \frac{9}{10^{n+1}}\frac{10}{9} = \frac{1}{10^n}.$$

Damit ist bewiesen, dass $(a_n)_{n\geq 0}$ die Dezimaldarstellung von x ist.

Ist umgekehrt $y \geq 0$ eine reelle Zahl mit Dezimaldarstellung $(a_n)_{n\geq 0}$, so ist

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^i} \leq y < \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^i} + \frac{1}{10^n}$$

und wegen $1/10^n \to 0$ folgt $y = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i} = x$. □

Sicherlich bekannt ist Ihnen auch die Aussage, dass eine reelle Zahl genau dann rational ist, wenn ihre Dezimaldarstellung periodisch ist. Je nach Vorgehensweise kann man dies auch als Definition der rationalen Zahlen verwenden. Wir haben rationale Zahlen allerdings als Brüche von ganzen Zahlen eingeführt und damit wird diese Aussage zu einem Satz, den man eigentlich beweisen müsste, worauf wir aus Gründen der Zeit und Einfachheit aber verzichten wollen.

Satz IV.3.4. *Eine reelle Zahl $x \geq 0$ ist genau dann rational, wenn ihre Dezimaldarstellung periodisch ist.*

Abschließend sei bemerkt, dass die Verwendung der Zahl 10 als Basis eigentlich keine besondere Rolle spielt. Sämtliche Aussagen (inklusive Satz IV.3.4) gelten entsprechend auch für jede andere Basis $q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 2$ (die Rolle der 9 übernimmt dann $q - 1$). Man spricht dann von der q-*adischen Darstellung* reeller Zahlen. Insbesondere erhält man für $q = 2$ die *Binärdarstellung*, die in der Informatik von größter Bedeutung ist.

IV.4 Die Exponentialfunktion

Wir hatten bereits in Beispiel IV.2.13 festgestellt, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert. Nun wollen wir die auf diese Weise definierte Funktion näher untersuchen.

Definition IV.4.1. Die *Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Weiter definieren wir

$$e := \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Die Zahl e wird *Eulersche Zahl*[7] genannt.

[7]Leonhard Euler (1707–1783): Schweizer Mathematiker und Physiker mit diversen wichtigen Beiträgen u. a. zur Analysis und zur Zahlentheorie, gilt neben C. F. Gauß (siehe Fußnote zur Gaußschen Summenformel) als einer der bedeutendsten Mathematiker aller Zeiten.

Man beachte, dass $\exp(0) = 1$ gilt, denn $0^k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, aber $0^0 = 1$.

Die Zahl e gehört zu den wichtigsten mathematischen Konstanten überhaupt. Sie berechnet sich durch Auswertung der Partialsummen $\sum_{k=0}^{n} 1/k!$ für moderate Werte von n näherungsweise zu $e \approx 2,71828$.

Der folgende Satz beschreibt nun die entscheidende Eigenschaft der Exponentialfunktion.

Satz IV.4.2. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y).$$

Der Beweis beruht auf einer allgemeinen Aussage über Produkte von Reihen.

Satz IV.4.3. *Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei absolut konvergente Reihen. Sei*

$$c_k := \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \quad \textit{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Dann ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right).$$

Die obige Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ wird auch das *Cauchy-Produkt* von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ genannt (diese Reihe erhält man, wenn man die "unendlichen Summen" $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ formal ausmultipliziert und alle Summanden $a_i b_j$ mit gleicher Indexsumme $i + j = k$ zusammenfasst).

Der Beweis von Satz IV.4.3 ist nicht ganz einfach und wir wollen ihn daher aus Zeitgründen hier nicht führen, sondern kommen direkt zum Beweis von Satz IV.4.2.

Beweis von Satz IV.4.2. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Wegen der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe gilt nach Satz IV.4.3:

$$\exp(x) \exp(y) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k,$$

wobei

$$c_k := \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} \frac{y^{k-i}}{(k-i)!} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0.$$

Nach dem binomischen Satz gilt

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{k!} \binom{k}{i} x^i y^{k-i} = \frac{1}{k!} (x + y)^k,$$

also ist

$$\exp(x)\exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \exp(x+y).$$

□

Wir ziehen nun einige Folgerungen aus Satz IV.4.2.

Korollar IV.4.4. *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(x) > 0$ *und*

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

Ferner gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$*:* $x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$.

Beweis. 1) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt nach Satz IV.4.2 $\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1$, also $\exp(x) \neq 0$ und

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

Ist $x > 0$, so gilt

$$\exp(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > 1,$$

also erst recht $\exp(x) > 0$. Für $x < 0$ gilt daher ebenfalls $\exp(x) = 1/\exp(-x) > 0$. Also ist $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
2) Sind nun $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$, so ist nach der obigen Überlegung $\exp(y-x) > 1$ und wegen Satz IV.4.2 und $\exp(x) > 0$ folgt $\exp(y) = \exp(y-x)\exp(x) > \exp(x)$. □

Korollar IV.4.5. *Für alle* $r \in \mathbb{Q}$ *und alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(rx) = (\exp(x))^r$. *Insbesondere ist* $\exp(r) = e^r$ *für alle* $r \in \mathbb{Q}$.

Beweis. Mit Satz IV.4.2 folgt durch vollständige Induktion leicht $\exp(nx) = (\exp(x))^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Wegen Korollar IV.4.4 folgt daher auch $\exp(-nx) = (\exp(-x))^n = (\exp(x))^{-n}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $\exp(kx) = (\exp(x))^k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $x \in \mathbb{R}$.
Sei nun $r = p/q \in \mathbb{Q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$: $(\exp(rx))^q = \exp(px) = \exp(x)^p$, folglich $\exp(rx) = \sqrt[q]{\exp(x)^p} = (\exp(x))^r$. □

Die Beziehung $e^r = \exp(r)$ für $r \in \mathbb{Q}$ legt es nahe, auch für irrationale Zahlen r den Wert e^r einfach als $\exp(r)$ zu *definieren*. Wegen Satz IV.4.2 gilt dann $e^{r+s} = e^r e^s$ für alle $r, s \in \mathbb{R}$. Um diese Definition auch auf andere Basen als die Zahl e zu erweitern, benötigen wir noch den natürlichen Logarithmus (die Umkehrfunktion von exp), den wir im nächsten Kapitel einführen werden.

Wir beweisen nun noch eine alternative Darstellung der Eulerschen Zahl.

Satz IV.4.6. *Es gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Beweis. Als erstes zeigen wir

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \quad \text{für alle } n\in\mathbb{N}. \tag{IV.2}$$

Wegen des binomischen Satzes ist nämlich

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$$

und es gilt

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{n^k} \le \frac{1}{k!} \quad \text{für } k=0,\dots,n,$$

denn

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1) \le \underbrace{n\cdot\dots\cdot n}_{k \text{ mal}} = n^k.$$

Weiter gilt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \text{für alle } n\in\mathbb{N},$$

denn

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \\
&= \frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \ge \frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right) \\
&= \frac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n+1)^3} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1,
\end{aligned}$$

wobei wir für den $\ge$-Schritt die Bernoulli-Ungleichung verwendet haben. Die Folge $((1+1/n)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also streng monoton steigend. Da die Partialsummen von $\sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$ beschränkt sind, folgt aus (IV.2), dass auch die Folge $((1+1/n)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Aus Satz III.2.11 folgt daher, dass die Folge konvergiert und wiederum wegen (IV.2) muss

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le e$$

gelten.

Sei nun $N \in \mathbb{N}$ beliebig, aber zunächst fest. Dann gilt für alle $n \geq N$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \geq \sum_{k=0}^{N} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k}$$
$$= \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Für alle $l = 1, \dots, k-1$ gilt $1 - l/n \to 1$ für $n \to \infty$, also folgt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}.$$

Für $N \to \infty$ folgt daraus nun auch

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq e$$

und der Beweis ist abgeschlossen. □

Allgemeiner gilt übrigens sogar

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

für jede reelle Zahl x. Auf den Beweis wollen wir aber der Einfachheit halber verzichten. Stattdessen zeigen wir noch, dass es sich bei e um eine irrationale Zahl handelt.

Satz IV.4.7. *Die Zahl e ist irrational.*

Beweis. Angenommen e wäre rational. Dann wäre auch $1/e$ rational, also

$$\frac{1}{e} = \exp(-1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{p}{q}$$

für gewisse $p, q \in \mathbb{N}$.
Die Folge $(1/k!)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton fallende Nullfolge, daher gilt nach der Fehlerabschätzung im Leibniz-Kriterium (Satz IV.2.14)

$$\left|\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^k}{k!}\right| \leq \frac{1}{(q+1)!}.$$

Multiplikation mit $q!$ liefert

$$\left|p(q-1)! - \sum_{k=0}^{q} (-1)^k \frac{q!}{k!}\right| \leq \frac{1}{q+1}.$$

Nun ist aber $q!/k! = (k+1)(k+2) \cdot \cdots \cdot q \in \mathbb{N}$ für $k = 0, \dots, q$. Daher ist $z := p(q-1)! - \sum_{k=0}^{q} (-1)^k \frac{q!}{k!}$ eine ganze Zahl und andererseits ist $|z| \leq 1/(q+1) < 1$. Deshalb muss $z = 0$ gelten.
Daraus folgt wiederum $\sum_{k=0}^{q} (-1)^k/k! = p/q = 1/e$.
Bezeichnet man mit s_n die n-te Partialsumme von $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k/k!$, so ist $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend und $(s_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton steigend (das zeigt man genauso wie im Beweis von Satz IV.2.14, nur dass man in diesem Fall sogar strenge Monotonie erhält, da $(1/k!)_{k\in\mathbb{N}}$ sogar streng monoton fällt). Dann folgt aber $s_{2n} > 1/e$ und $s_{2n-1} < 1/e$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $1/e = \sum_{k=0}^{q} (-1)^k/k! = s_q \neq 1/e$. Mit diesem Widerspruch ist der Beweis beendet. $\square$

V Stetige Funktionen

Nach unseren Betrachtungen zur Konvergenz von Folgen und Reihen soll nun der Grenzwertbegriff für Funktionen eingeführt werden. Mit seiner Hilfe wird dann das zentrale Konzept der Stetigkeit erklärt.

V.1 Funktionsgrenzwerte und Stetigkeit

Wir führen zuerst den Begriff der Berührungspunkte einer Menge ein.

Definition V.1.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei $a \in \mathbb{R}$. Dann heißt a ein *Berührungspunkt* von D, falls eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $x_n \to a$ existiert.

Natürlich ist jedes Element von D auch ein Berührungspunkt von D, aber eine Menge kann auch noch weitere Berührungspunkte besitzen. So ist z. B. 0 ein Berührungspunkt von $(0, 1]$, denn $1/n \in (0, 1]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $1/n \to 0$.

Allgemeiner gilt: Die Menge aller Berührungspunkte von (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ bzw. $[a, b]$ ist jeweils gleich $[a, b]$. Die Menge der Berührungspunkte von (a, ∞) bzw. $[a, \infty)$ ist $[a, \infty)$, die Menge der Berührungspunkte von $(-\infty, a)$ bzw. $(-\infty, a]$ ist $(-\infty, a]$ (Beweise als Übung).

Grob gesprochen bedeutet "a ist Berührungspunkt von D", dass sich a beliebig gut durch Elemente von D approximieren lässt. Das wird auch in der folgenden äquivalenten Formulierung deutlich.

Lemma V.1.2. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist ein Berührungspunkt von D genau dann, wenn folgendes gilt:*

$$\forall \delta > 0 \ \exists x \in D \ |x - a| \leq \delta. \tag{V.1}$$

Beweis. Sei zunächst a ein Berührungspunkt von D. Dann existiert also eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $x_n \to a$. Sei $\delta > 0$ beliebig. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a| \leq \delta$ für $n \geq n_0$. Insbesondere ist $x_{n_0} \in D$ mit $|x_{n_0} - a| \leq \delta$.
Gelte nun umgekehrt (V.1). Dann existiert insbesondere zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in D$ mit $|x_n - a| \leq 1/n$ (wähle einfach $\delta = 1/n$). Wegen $1/n \to 0$ folgt daraus auch $x_n \to a$. $\square$

Nun wollen wir Grenzwerte von Funktionen definieren.

Definition V.1.3. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Weiter sei $a \in \mathbb{R}$ ein Berührungspunkt von D und $y \in \mathbb{R}$. Wir sagen *$f(x)$ konvergiert für $x \to a$ gegen y*, falls für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D gilt:

$$x_n \to a \ \Rightarrow \ f(x_n) \to y.$$

Dafür schreibt man auch $f(x) \stackrel{x\to a}{\longrightarrow} y$.

Bemerkung V.1.4. Aus $f(x) \stackrel{x\to a}{\longrightarrow} y$ und $f(x) \stackrel{x\to a}{\longrightarrow} z$ folgt $y = z$. Denn ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $x_n \to a$ (eine solche gibt es, da a ein Berührungspunkt von D ist!), so folgt $f(x_n) \to y$ und $f(x_n) \to z$, also wegen der Eindeutigkeit des Folgengrenzwertes $y = z$.

Diese Eindeutigkeit rechtfertigt wiederum die Schreibweise

$$\lim_{x\to a} f(x) = y$$

anstelle von $f(x) \stackrel{x\to a}{\longrightarrow} y$. Die Zahl y heißt dann der *Grenzwert* von $f(x)$ für $x \to a$.

Beispiele:

1) Ist $f(x) = c$ für alle $x \in D$ (konstante Funktion), so ist natürlich auch $\lim_{x\to a} f(x) = c$. Ferner ist offensichtlich $\lim_{x\to a} x = a$.

2) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

und wollen den Grenzwert für $x \to 1$ bestimmen. Sei dazu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ mit $x_n \to 1$. Wegen der dritten binomischen Formel ist

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 - 1}{x_n - 1} = x_n + 1 \to 2.$$

Also gilt $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

3) Wie schon bei Folgen, so kann es auch bei Funktionen vorkommen, dass kein Grenzwert existiert. Betrachten wir z. B. die sogenannte *Signum-Funktion* $\text{sign} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, die definiert ist durch

$$\text{sign}(x) := \begin{cases} 1 \text{ für } x > 0 \\ -1 \text{ für } x < 0. \end{cases}$$

Für $x_n := 1/n$ gilt $x_n \to 0$ und $\text{sign}(x_n) = 1$ für alle n. Für $y_n := -1/n$ dagegen gilt ebenfalls $y_n \to 0$, aber $\text{sign}(y_n) = -1$ für alle n. Folglich besitzt $\text{sign}(x)$ für $x \to 0$ keinen Grenzwert.

Mit Hilfe der in Kapitel III bewiesenen Grenzwertsätze für Folgen lassen sich leicht entsprechende Grenzwertsätze für Funktionen zeigen, die das Berechnen von Funktionsgrenzwerten in vielen Fällen stark erleichtern.

Satz V.1.5. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei a ein Berührungspunkt von D. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen derart, dass $\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to a} g(x)$ existieren. Dann gilt:*

(i) $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

(ii) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$

(iii) *Insbesondere ist* $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$ *und* $\lim_{x\to a} cf(x) = c \lim_{x\to a} f(x)$ *für alle* $c \in \mathbb{R}$.

(iv) *Ist zusätzlich $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ und $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, so gilt auch*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

(v) *Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in D$, so ist auch $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$.*

(vi) *Ist $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$ und ist $h : D \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion mit $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ für alle $x \in D$, so gilt auch $\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$.*

Beweis. Sämtliche Aussagen ergeben sich direkt aus den entsprechenden Aussagen über Folgen. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $x_n \to a$, so gilt nach Definition $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{x\to a} g(x)$, folglich

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n) + g(x_n)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)g(x_n) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x).$$

Das zeigt (i) und (ii), während (iii) eine unmittelbare Folgerung daraus ist. Auch die übrigen Aussagen werden in analoger Weise mit Hilfe von Folgengrenzwerten bewiesen (Übung). □

Beispiele:
1) Sei

$$f(x) := \frac{x^3 + 2x - 5}{x^2 + 3} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Aus den obigen Grenzwertsätzen folgt sofort

$$\lim_{x\to a} f(x) = \frac{a^3 + 2a - 5}{a^2 + 3} = f(a) \quad \text{für jedes } a \in \mathbb{R}.$$

2) Sei

$$f(x) := \frac{1}{x} - \frac{1}{x(x+1)} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}.$$

Dann gilt

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x(x+1)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1} = 1.$$

Als Nächstes wollen wir noch eine alternative Formulierung für die Konvergenz von Funktionen kennenlernen, das sogenannte *ε-δ-Kriterium.*

Satz V.1.6. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei a ein Berührungspunkt von D. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $y \in \mathbb{R}$. Dann ist $\lim_{x\to a} f(x) = y$ genau dann, wenn folgendes gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D\ (|x-a| \le \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - y| \le \varepsilon). \tag{V.2}$$

Beweis. Angenommen es gilt (V.2). Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $x_n \to a$. Wir müssen $f(x_n) \to y$ zeigen. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen ein zu ε passendes $\delta > 0$ gemäß (V.2). Wegen $x_n \to a$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a| \le \delta$ für $n \ge n_0$. Nach Wahl von δ ist dann aber auch $|f(x_n) - y| \le \varepsilon$ für $n \ge n_0$. Damit ist $f(x_n) \to y$ bewiesen.
Sei nun umgekehrt $\lim_{x\to a} f(x) = y$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Angenommen es gäbe *kein* $\delta > 0$ wie in (V.2). Das hieße zu jedem $\delta > 0$ existiert ein $x \in D$ mit $|x - a| \le \delta$, aber $|f(x) - y| > \varepsilon$. Insbesondere findet man also eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit

$$|x_n - a| \le \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - y| > \varepsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{V.3}$$

Wegen $1/n \to 0$ folgt $x_n \to a$. Aufgrund von $\lim_{x\to a} f(x) = y$ muss dann auch $f(x_n) \to y$ gelten und folglich muss es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|f(x_N) - y| \le \varepsilon$ geben. Das steht aber im Widerspruch zu (V.3). Also war die ursprüngliche Annahme falsch und es existiert doch ein $\delta > 0$ wie in (V.2) gefordert. $\square$

Nun führen wir den entscheidenden Begriff der Stetigkeit ein.

Definition V.1.7. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $a \in D$. Dann heißt f *stetig an der Stelle a*, falls $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ gilt.

Die Funktion f heißt *stetig*, falls sie an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches D stetig ist.

Bemerkung V.1.8. Nach der Definition von Funktionsgrenzwerten gilt: $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig an der Stelle $a \in D$ genau dann, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D gilt

$$x_n \to a\ \Rightarrow\ f(x_n) \to f(a).$$

Nach dem ε-δ-Kriterium (Satz V.1.6) kann man die Stetigkeit von f an der Stelle a aber auch so formulieren: f ist stetig bei a genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D\ (|x-a| \le \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| \le \varepsilon)$$

gilt.

Anschaulich bedeutet die Stetigkeit von f an der Stelle a also etwa so viel wie: "Liegt x dicht bei a, so liegt auch $f(x)$ dicht bei $f(a)$."

Bevor wir zu den anstehenden Beispielen kommen, wollen wir noch ein paar Stabilitätseigenschaften von stetigen Funktionen festhalten. Zunächst einige Schreibweisen: Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, so schreiben wir $f + g$ für die Funktion von D nach $\mathbb{R}$ mit $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ für alle $x \in D$ und fg für die Funktion von D nach $\mathbb{R}$ mit $(fg)(x) := f(x)g(x)$ für alle $x \in D$. Insbesondere ist $(cf)(x) = cf(x)$ und $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ für alle $x \in D$. Gilt zudem $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so definieren wir auch $f/g : D \to \mathbb{R}$ durch $(f/g)(x) := f(x)/g(x)$ für $x \in D$.

Es gilt dann der folgende einfache, aber wichtige Satz.

Satz V.1.9. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, welche bei $a \in D$ stetig sind. Dann sind auch $f + g$, $f - g$, cf für $c \in \mathbb{R}$, sowie fg stetig an der Stelle a. Ist ferner $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist auch f/g stetig bei a.*

Beweis. Das folgt sofort aus der Definition der Stetigkeit und Satz V.1.5. □

Eine weitere einfache aber wichtige Beobachtung ist, dass die Stetigkeit auch bei der Verkettung von Funktionen erhalten bleibt.

Satz V.1.10. *Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ und seien $g : D \to E$ und $f : E \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, sowie $a \in D$. Ist g stetig bei a und f stetig bei $g(a)$, so ist auch $f \circ g$ stetig bei a.*

Beweis. Sei g stetig bei a und f stetig bei $g(a)$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $x_n \to a$. Wegen der Stetigkeit von g bei a folgt $g(x_n) \to g(a)$. Da aber auch f bei $g(a)$ stetig ist, folgt $(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) \to f(g(a)) = (f \circ g)(a)$. □

Nun kommen wir zu den angekündigten Beispielen.

Beispiel V.1.11. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine *Polynomfunktion*, d. h. es existieren ein $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dann ist f stetig.

Beweis. Da die identische Funktion (die jedes x auf sich selbst abbildet) und jede konstante Funktion offensichtlich stetig sind, folgt diese Aussage direkt aus Satz V.1.9. □

Beispiel V.1.12. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine *rationale Funktion*, d. h. es existieren Polynomfunktionen p und q mit $q(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ und

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{für alle } x \in D.$$

Dann ist f stetig.

Beweis. Das folgt direkt aus Beispiel V.1.11 und Satz V.1.9. □

Es ist zu beachten, dass die Stetigkeit/Unstetigkeit einer Funktion nur an den Stellen ihres Definitionsbereiches erklärt ist. Bisweilen hört man Aussagen wie "die durch $f(x) := 1/x$ definierte Funktion ist bei 0 nicht stetig". Eine solche Aussage ist aber schlicht sinnlos, da die fragliche Funktion an der Stelle 0 gar nicht definiert ist. Ihr Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und nach dem vorigen Beispiel handelt es sich um eine stetige Funktion. Als weiteres Beispiel in dieser Richtung machen Sie sich klar, dass die oben definierte Signum-Funktion $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Hier fahren wir mit den Standardbeispielen stetiger Funktionen fort.

Beispiel V.1.13. Die Betragsfunktion, also $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := |x|$, ist stetig.

Beweis. Das folgt aus Lemma III.2.6. □

Beispiel V.1.14. Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (siehe Abschnitt IV.4) ist stetig.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass exp an der Stelle 0 stetig ist. Sei dazu $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $y_n \to 0$. Wir müssen $\exp(y_n) \to \exp(0) = 1$ nachweisen. Wegen $y_n \to 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|y_n| \leq 1$ für $n \geq n_0$. Für diese n gilt dann $|y_n|^k \leq |y_n|$ für $k \in \mathbb{N}$. Nach Definition der Exponentialfunktion ist daher

$$|\exp(y_n) - 1| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_n^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|y_n|^k}{k!} \leq |y_n| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = |y_n|(e-1)$$

für $n \geq n_0$, wobei wir noch die Dreiecksungleichung für absolut konvergente Reihen (siehe Lemma IV.2.12) benutzt haben. Wegen $y_n \to 0$ folgt daraus auch $|\exp(y_n) - 1| \to 0$, also $\exp(y_n) \to 1$.
Sei nun $x \in \mathbb{R}$ beliebig und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $x_n \to x$. Nach dem soeben Bewiesenen gilt dann $\exp(x_n - x) \to 1$ und wegen Satz IV.4.2 folgt

$$\exp(x_n) = \exp(x_n - x)\exp(x) \to \exp(x).$$

Also ist exp auch stetig an der Stelle x. □

Die folgende Aussage wirkt zunächst wahrscheinlich etwas kontraintuitiv (bitte gut durchdenken).

Beispiel V.1.15. *Jede* Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Beweis. Zum Beweis verwenden wir das ε-δ-Kriterium. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ und sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen ein $\delta > 0$ finden, so dass

$$n \in \mathbb{N},\ |n - n_0| \leq \delta \ \Rightarrow \ |f(n) - f(n_0)| \leq \varepsilon$$

gilt.
Wählen wir aber für δ irgendeine Zahl, welche echt zwischen 0 und 1 liegt (sagen wir der Bestimmtheit halber $\delta = 1/2$), so folgt aus $n \in \mathbb{N}$ und $|n - n_0| \leq \delta$ bereits $n = n_0$ (denn je zwei verschiedene natürliche Zahlen haben voneinander mindestens den Abstand 1) und somit natürlich auch $f(n) = f(n_0)$. Also ist f stetig. □

Aus diesen Standardbeispielen kann man aufgrund der guten Permanenzeigenschaften stetiger Funktionen (Satz V.1.9 und Satz V.1.10) natürlich sofort zahllose weitere (auf den ersten Blick vielleicht kompliziert wirkende) Beispiele für stetige Funktionen finden. So folgt aus den bisher bewiesenen Aussagen z. B. sofort, dass die durch

$$f(x) := |x^4 - 1| + \frac{5\exp(x^2 - 1)}{3x^2 + 2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

definierte Funktion stetig ist.

Freilich gibt es auch zahlreiche unstetige Funktionen. Hier zunächst ein einfaches Beispiel.

Beispiel V.1.16. Die *Heaviside-Funktion*[1] $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\theta(x) := \begin{cases} 1 \text{ für } x \geq 0 \\ 0 \text{ für } x < 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist an jeder Stelle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig, jedoch an der Stelle 0 unstetig.

Beweis. Setzt man $x_n := -1/n$ für $n \in \mathbb{N}$, so gilt $x_n \to 0$, aber $\theta(x_n) = 0$ für jedes n, also $\theta(x_n) \not\to 1 = \theta(0)$. Daher ist θ an der Stelle 0 nicht stetig. Dass die Funktion an jeder anderen Stelle stetig ist, überlegen Sie sich bitte selbst als einfache Übungsaufgabe. □

Hier ist noch ein wesentlich drastischeres Beispiel für Unstetigkeit.

Beispiel V.1.17. Die *Dirichlet-Funktion*[2] $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\chi(x) := \begin{cases} 1 \text{ für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Diese Funktion ist an *keiner* Stelle ihres Definitionsbereiches $\mathbb{R}$ stetig.

[1] Benannt nach Oliver Heaviside (1850–1925): britischer Mathematiker und Physiker, lieferte wichtige Beiträge zur Theorie des Elektromagnetismus.

[2] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859): deutscher Mathematiker, lieferte wichtige Beiträge zur Analysis und zur Zahlentheorie.

Beweis. Sei $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Da zwischen je zwei reellen Zahlen eine rationale Zahl liegt (Satz II.5.6), findet man eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ mit $x_0 < x_n < x_0 + 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt $x_n \to x_0$ und $\chi(x_n) = 1$ für alle n, also $\chi(x_n) \not\to 0 = \chi(x_0)$. Daher ist χ bei x_0 nicht stetig.
Da nach Satz II.5.6 zwischen je zwei reellen Zahlen auch noch eine irrationale Zahl liegt, kann man analog auch die Unstetigkeit von χ an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{Q}$ nachweisen (tun Sie dies bitte). $\square$

Es gibt verschiedene Varianten der Dirichlet-Funktion, die weitere interessante Beispiele liefern, etwa das folgende.

Beispiel V.1.18. Wir definieren $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 \text{ für } x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \\ 1 \text{ für } x = 0 \\ \frac{1}{q} \text{ für } x \in (0,1] \cap \mathbb{Q},\ x = \frac{p}{q} \text{ vollständig gekürzt.} \end{cases}$$

Dann ist f an jeder Stelle $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ unstetig und an jeder Stelle $x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ stetig.

Beweis. Der Beweis der Unstetigkeit von f an allen rationalen Stellen aus $[0,1]$ ist analog zur Vorgehensweise im Beweis des vorigen Beispiels und wird daher hier nicht noch einmal ausgeführt.
Sei nun $x_0 \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ und sei $0 < \varepsilon < 1$. Wir wählen ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 1/\varepsilon$.
Angenommen nun es ist $x \in (0,1]$ mit $|f(x) - f(x_0)| = |f(x)| > \varepsilon$. Dann muss x rational sein. Wir schreiben x als vollständig gekürzten Bruch p/q. Es folgt $1/q > \varepsilon$ (nach Definition von f) und daher $q < 1/\varepsilon \leq N$. Wegen $x = p/q \leq 1$ folgt auch $p \leq q \leq N$.
Damit ist folgendes gezeigt:

$$A := \{x \in [0,1] : |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon\} \subseteq \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \{1, \ldots, N\} \right\} \cup \{0\} =: B.$$

Die Menge B ist endlich (sie hat höchstens $N^2 + 1$ Elemente) und daher ist auch A endlich. Ferner ist $A \neq \emptyset$ (denn $0 \in A$). Also existiert $\delta := \min\{|x - x_0| : x \in A\}$ und wegen $x_0 \notin A$ ist $\delta > 0$.
Ist nun $x \in [0,1]$ mit $|x - x_0| < \delta$, so folgt $x \notin A$ und daher $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Nach dem ε-δ-Kriterium ist f also stetig an der Stelle x_0. $\square$

Im Gegensatz zum obigen Beispiel gibt es übrigens keine Funktion auf $[0,1]$, die an allen rationalen Stellen stetig und an allen irrationalen Stellen unstetig ist. Der Beweis dieser Aussage ist aber zu schwierig für diese Vorlesung. Stattdessen wollen wir noch kurz über verschiedene Varianten von Funktionsgrenzwerten sprechen. Zuerst betrachten wir einseitige Grenzwerte.

Definition V.1.19. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$, sowie $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $y \in \mathbb{R}$.

(i) Es existiere ein $x_0 < a$ mit $(x_0, a) \subseteq D$. Wir schreiben $\lim_{x \to a^-} f(x) = y$, falls für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $x_n < a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \to a$ gilt: $f(x_n) \to y$.

(ii) Es existiere ein $x_0 > a$ mit $(a, x_0) \subseteq D$. Wir schreiben $\lim_{x \to a^+} f(x) = y$, falls für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $x_n > a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \to a$ gilt: $f(x_n) \to y$.

$\lim_{x \to a^-} f(x)$ bzw. $\lim_{x \to a^+} f(x)$ heißt der *links-* bzw. *rechtsseitige Grenzwert* von f an der Stelle a.

Bemerkung V.1.20. Die Voraussetzung $(x_0, a) \subseteq D$ in (i) stellt sicher, dass es mindestens eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $x_n < a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \to a$ gibt. Damit zeigt man dann wie in Bemerkung V.1.4 die Eindeutigkeit des linsseitigen Grenzwertes (falls er existiert). Eine analoge Bemerkung gilt für rechtsseitige Grenzwerte.

Als Beispiel betrachten wir erneut die Signum-Funktion auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x > 0 \\ -1 \text{ für } x < 0. \end{cases}$$

Dann gilt offensichtlich $\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sign}(x) = -1$ und $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sign}(x) = 1$.

Einseitige Grenzwerte lassen sich ebenfalls über ein ε-δ-Kriterium charakterisieren.

Satz V.1.21. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei $(x_0, a) \subseteq D$ für gewisse $a, x_0 \in \mathbb{R}$ mit $a > x_0$. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $y \in \mathbb{R}$. Dann ist $\lim_{x \to a^-} f(x) = y$ genau dann, wenn folgendes gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \ (a - \delta \leq x < a \ \Rightarrow \ |f(x) - y| \leq \varepsilon).$$

Eine analoge Charakterisierung gilt für rechtsseitige Grenzwerte.

Der Beweis ist ähnlich wie der von Satz V.1.6 und sei Ihnen daher zur Übung überlassen.

Die Stetigkeit einer Funktion lässt sich ggf. auch über einseitige Grenzwerte charakterisieren.

Satz V.1.22. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $a \in D$ und es existieren $x_0 < a < y_0$ mit $(x_0, y_0) \subseteq D$. Dann ist f stetig an der Stelle a genau dann, wenn*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

gilt.

Beweis. Ist f stetig bei a, so gilt $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Mit der Definition der Funktionsgrenzwerte (via Folgen) folgt daraus sofort $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$.
Sei nun umgekehrt $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$ und sei $\varepsilon > 0$. Wegen Satz V.1.21 existieren $\delta_1, \delta_2 > 0$ mit
1) $x \in D,\ a - \delta_1 \le x < a \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| \le \varepsilon$,
2) $x \in D,\ a < x \le a + \delta_2 \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| \le \varepsilon$.
Wir setzen $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Dann gilt für alle $x \in D \setminus \{a\}$:

$$a - \delta \le x \le a + \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| \le \varepsilon$$

(Begründung?).
Also ist f nach dem ε-δ-Kriterium stetig bei a. □

Analog zu Satz V.1.22 kann man folgenden Satz beweisen.

Satz V.1.23. *Seien $x_0 < a < y_0$ und sei $D := (x_0, y_0) \setminus \{a\}$. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $y \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\lim_{x\to a} f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = y = \lim_{x\to a^+} f(x).$$

Es gibt noch weitere Varianten von Funktionsgrenzwerten, bei denen das Argument x nicht gegen eine Zahl a sondern gegen ∞ oder $-\infty$ strebt oder auch der Grenzwert ∞ oder $-\infty$ sein kann. Zum Beispiel bedeutet

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = y,$$

dass für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Definitionsbereich D der Funktion f gilt:

$$x_n \to \infty \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to y.$$

Hierbei muss vorausgesetzt werden, dass D nach oben unbeschränkt ist (warum?). Beispielsweise ist $\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$ (Beweis?).

Eine äquivalente Formulierung lautet:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = y \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\, \exists x_0 \in \mathbb{R}\, (x \in D, x \ge x_0 \Rightarrow |f(x) - y| \le \varepsilon)$$

(Beweis als Übung).

Die Schreibweise

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

bedeutet

$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to \infty$$

für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D (wobei a ein Berührungspunkt von D ist).[3]
Beispiel: $\lim_{x\to 0} 1/x^2 = \infty$.

Auch alle anderen Grenzwert-Varianten verstehen sich auf die naheliegende Weise und werden daher hier nicht einzeln aufgeführt.

[3] Äquivalent: Für alle $R > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass $f(x) > R$ für alle $x \in D$ mit $|x - a| \le \delta$ gilt.

V.2 Eigenschaften stetiger Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir einige wichtige Sätze über stetige Funktionen, namentlich den Zwischenwertsatz und den Satz von der Existenz von Maximum und Minimum stetiger Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen, kennenlernen. Wir beginnen mit einem einfachen Lemma.

Lemma V.2.1. *Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine bei a stetige Funktion. Sei $\eta < f(a)$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit*

$$\eta < f(x) \quad \textit{für alle } x \in [a-\delta, a+\delta] \cap D.$$

Eine analoge Aussage gilt im Falle $\eta > f(a)$.

Beweis. Sei $0 < \varepsilon < f(a) - \eta$. Da f an der Stelle a stetig ist, existiert nach dem ε-δ-Kriterium ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - a| \leq \delta$.
Für alle $x \in D \cap [a-\delta, a+\delta]$ gilt daher $f(x) \geq f(a) - \varepsilon > \eta$.
Den analogen Beweis für $\eta > f(a)$ können Sie zur Übung selbst aufschreiben. □

Nun kommen wir auch schon zum Zwischenwertsatz. Dieser Satz wurde zuerst von Bernard Bolzano[4] bewiesen. Er präzisiert die intuitive Vorstellung, dass der Graph einer stetigen Funktion über einem Intervall keine "Sprünge" aufweisen kann.

Satz V.2.2 (Zwischenwertsatz)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall*[5] *und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine steige Funktion. Seien $a, b \in I$ mit $a < b$ und $f(a) \neq f(b)$. Sei c ein Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$.*[6] *Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = c$.*

Beweis. Ohne Einschränkung können wir den Fall $f(a) < c < f(b)$ betrachten (der andere Fall wird einfach durch Multiplikation von f mit -1 auf diesen zurückgeführt). Wir setzen $M := \{x \in [a, b] : f(x) \leq c\}$. Wegen $a \in M$ ist $M \neq \emptyset$. Ferner ist M nach oben beschränkt (durch b). Also existiert $\xi := \sup(M)$. Sicher ist $\xi \in [a, b]$. Wir wollen $f(\xi) = c$ zeigen.
Zunächst existiert nach Definition des Supremums zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in M$ mit $\xi \geq x_n > \xi - 1/n$. Es folgt $x_n \to \xi$ und wegen der Stetigkeit von f folgt daraus auch $f(x_n) \to f(\xi)$. Da $f(x_n) \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt auch $f(\xi) \leq c$.
Angenommen $f(\xi) < c$. Dann existiert ein $f(\xi) < \eta < c$. Wegen der Stetigkeit von f existiert nach Lemma V.2.1 ein $\delta > 0$ mit $f(x) < \eta$ für alle $x \in [\xi - \delta, \xi + \delta] \cap I$. Indem wir δ notfalls noch weiter verkleinern, können wir

[4] Siehe Fußnote zum Satz von Bolzano-Weierstraß.

[5] Wenn nichts anderes gesagt wird, so bedeutet der Begriff "Intervall" immer ein Intervall beliebigen Typs (offen, abgeschlossen, halboffen, beschränkt oder unbeschränkt).

[6] Das heißt $c \in (f(a), f(b))$, falls $f(a) < f(b)$ und $c \in (f(b), f(a))$, falls $f(b) < f(a)$.

auch $\xi + \delta < b$ annehmen. Dann ist $\xi + \delta \in [a, b]$ und $f(\xi + \delta) < \eta < c$, also $\xi + \delta \in M$, aber $\xi + \delta > \xi = \sup(M)$, was ein Widerspruch ist.
Also muss $f(\xi) = c$ gelten. $\square$

Ein wichtiger Spezialfall des Zwischenwertsatzes betrifft die Existenz von Nullstellen stetiger Funktion, also Stellen, an denen die Funktion den Wert Null annimmt.

Korollar V.2.3 (Nullstellensatz)**.** *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in I$ mit $a < b$. Wenn $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen haben, so besitzt f im Intervall (a, b) eine Nullstelle.*

Diese Aussage folgt natürlich für $c = 0$ sofort aus dem Zwischenwertsatz. Eine weitere Folgerung ist, dass stetige Funktionen Intervalle stets auf Intervalle abbilden.

Korollar V.2.4. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist auch das Bild $\operatorname{Im}(f) = \{f(x) : x \in I\}$ ein Intervall.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $\operatorname{Im}(f)$ beschränkt ist und setzen $s := \inf(\operatorname{Im}(f))$ und $t := \sup(\operatorname{Im}(f))$.
Mit Hilfe des Zwischenwertsatzes folgt dann $(s, t) \subseteq \operatorname{Im}(f)$ (wie?) und natürlich ist $\operatorname{Im}(f) \subseteq [s, t]$. Daher gilt also $\operatorname{Im}(f) = [s, t]$, $\operatorname{Im}(f) = (s, t]$, $\operatorname{Im}(f) = [s, t)$ oder $\operatorname{Im}(f) = (s, t)$, je nach dem, ob s und/oder t zu $\operatorname{Im}(f)$ gehören oder nicht.
Für den Fall, dass $\operatorname{Im}(f)$ unbeschränkt ist, ist das Argument entsprechend zu modifizieren. Die Details überlasse ich Ihnen als Übung. $\square$

Mit Hilfe des Zwischenwertsatzes können wir nun auch bequem die Existenz von Wurzeln beweisen (das hatten wir in Kapitel II zurückgestellt, siehe Satz II.4.1).

Satz V.2.5. *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a \geq 0$. Dann existiert genau ein $b \geq 0$ mit $b^n = a$.*

Beweis. Wir zeigen zuerst die Existenz. Im Falle $a = 0$ oder $a = 1$ ist die Aussage klar, ebenso im Fall $n = 1$. Sei also $a > 0$ mit $a \neq 1$ und sei $n \geq 2$. Wir betrachten nun die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^n$. Diese ist nach Beispiel V.1.11 stetig.
Ist $a > 1$, so ist $f(a) = a^n > a > 0 = f(0)$. Ist $a < 1$, so ist $f(a) = a^n < a < f(1)$. Also existiert nach dem Zwischenwertsatz in jedem Fall ein $b > 0$ mit $b^n = f(b) = a$.
Die Eindeutigkeitsaussage ist richtig wegen $x^n < y^n$ für $y > x \geq 0$. $\square$

Als weitere Anwendung beweisen wir nun, dass jede Polynomfunktion ungeraden Grades wenigstens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ besitzt.

Satz V.2.6. *Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und seien $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$. Sei $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann hat f eine Nullstelle.*

Beweis. Wir können ohne Einschränkung $a_n > 0$ annehmen (ansonsten betrachten wir einfach $-f$). Als Erstes zeigen wir nun $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Für $x \neq 0$ gilt nämlich

$$f(x) = x^n \left(a_n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{x^{n-i}} \right).$$

Es gilt $\lim_{x\to\infty} 1/x^{n-i} = 0$ für $i = 0, \dots, n-1$, der Ausdruck in der Klammer geht also für $x \to \infty$ gegen $a_n > 0$. Wegen $\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$ folgt daher $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
Insbesondere existiert also ein $b > 0$ mit $f(b) > 0$.
Da n ungerade ist gilt für $x \neq 0$

$$f(-x) = -x^n \left(a_n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-i} a_i}{x^{n-i}} \right).$$

Damit folgt analog $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(-x) = -\infty$. Also existiert auch ein $a < 0$ mit $f(a) < 0$.
Da f stetig ist, besitzt f also nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle in (a, b). $\square$

Für Polynome geraden Grades stimmt die obige Aussage nicht, z. B. hat die durch $f(x) = 1 + x^2$ auf $\mathbb{R}$ erklärte Funktion keine Nullstelle.

Als Nächstes definieren wir den Begriff der Beschränktheit einer Funktion in analoger Weise zur Definition der Beschränktheit von Folgen.

Definition V.2.7. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, falls ihr Bild $\mathrm{Im}(f)$ eine beschränkte Menge ist, falls also ein $K \geq 0$ mit $|f(x)| \leq K$ für alle $x \in D$ existiert.

Stetige Funktionen auf abgeschlossen Intervallen $[a, b]$ sind stets beschränkt, wie der folgende Satz zeigt. Tatsächlich gilt sogar noch mehr.

Satz V.2.8. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existieren $\max\{f(x) : x \in [a, b]\}$ und $\min\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Insbesondere ist f beschränkt.*

Beweis. Sei $M := \mathrm{Im}(f) = \{f(x) : x \in [a, b]\}$. Wäre M nach oben unbeschränkt, so gäbe es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a, b]$ mit $f(x_n) > n$. Dann gilt $f(x_n) \to \infty$.
Andererseits ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge (denn $a \leq x_n \leq b$ für alle n), also existieren nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_{n_k} \to x_0$. Es folgt $a \leq x_0 \leq b$ und wegen der Stetigkeit

von f muss $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ gelten. Jedoch gilt wegen $f(x_n) \to \infty$ natürlich auch $f(x_{n_k}) \to \infty$, ein Widerspruch.
Also ist M nach oben beschränkt. Sei $s := \sup(M)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $y_n \in M$ mit $s - 1/n < y_n \leq s$, also $y_n \to s$. Es ist $y_n = f(z_n)$ für geeignetes $z_n \in [a, b]$.
Wiederum wegen des Satzes von Bolzano-Weierstraß existieren eine Teilfolge $(z_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $z_0 \in [a, b]$ mit $z_{m_k} \to z_0$. Wegen der Stetigkeit von f folgt:

$$s = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{k\to\infty} f(z_{m_k}) = f(z_0).$$

Also ist $s \in M$ und folglich $s = \max(M)$.
Die Existenz des Minimums wird analog bewiesen (führen Sie die Details zur Übung selbst aus). $\square$

Ist das Definitionsintervall nicht von der Form $[a, b]$, so folgt aus der Stetigkeit nicht notwendig die Beschränktheit der Funktion. So ist z. B. $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := 1/x$ für $x \in (0, 1]$ eine stetige Funktion, aber wegen $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ ist f nicht beschränkt.

Nun kommen wir noch zur Stetigkeit von Umkehrfunktionen. Zunächst führen wir den Begriff der Monotonie für Funktionen ein (vergleiche mit dem Monotoniebegriff für Folgen).

Definition V.2.9. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
f heißt *monoton (bzw. streng) monoton steigend*, falls gilt:

$$x, y \in D, x < y \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(y) \text{ (bzw. } f(x) < f(y)).$$

Entsprechend heißt f *monoton (bzw. streng) monoton fallend*, falls gilt:

$$x, y \in D, x < y \;\Rightarrow\; f(x) \geq f(y) \text{ (bzw. } f(x) > f(y)).$$

Zum Beispiel ist für $k \in \mathbb{N}$ die durch $f(x) = x^k$ definierte Funktion auf $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton steigend. Ebenso ist die k-te Wurzelfunktion streng monoton steigend.

Nun zum Satz über die Stetigkeit von Umkehrfunktionen.

Satz V.2.10. *Sei I ein Intervall, sei $J \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f : I \to J$ stetig, surjektiv und streng monoton (steigend oder fallend). Dann ist auch J ein Intervall, f ist bijektiv und $f^{-1} : J \to I$ ist ebenfalls stetig.*

Beweis. Aus der strengen Monotonie von f folgt natürlich die Injektivität und da f nach Voraussetzung auch surjektiv ist, ist f bijektiv.
Ferner ist wegen der Stetigkeit von f nach Korollar V.2.4 auch $J = \mathrm{Im}(f)$ ein Intervall.
Zum Nachweis der Stetigkeit von f^{-1} nehmen wir ohne Einschränkung an, dass f streng monoton steigend ist (der Fall einer streng monoton fallenden Funktion wurd durch Multiplikation mit -1 auf diesen Fall zurückgeführt).

Nun seien $y_0 \in J$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir setzen $x_0 = f^{-1}(y_0)$ und wollen zunächst annehmen, dass y_0 kein Randpunkt des Intervalls J und x_0 kein Randpunkt des Intervalls I ist. Dann finden wir ein hinreichend kleines $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, sodass auch $x_0 - \varepsilon' \in I$ und $x_0 + \varepsilon' \in I$ gilt.
Weil f streng monoton steigend ist, folgt $f(x_0 - \varepsilon') < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon')$.
Wir wählen nun $\delta > 0$ mit $\delta < f(x_0+\varepsilon') - f(x_0)$ und $\delta < f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon')$.
Weil y_0 kein Randpunkt von J ist, können wir δ auch noch so klein wählen, dass $y_0 - \delta \in J$ und $y_0 + \delta \in J$ gilt.
Nun sei $y \in J$ mit $|y - y_0| < \delta$, als $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$. Weil f streng monoton steigend ist, ist auch f^{-1} streng monoton steigend (Beweis?). Daher folgt: $f^{-1}(y_0 - \delta) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0 + \delta)$.
Wegen $\delta < f(x_0 + \varepsilon') - f(x_0) = f(x_0 + \varepsilon') - y_0$ ist $y_0 + \delta < f(x_0 + \varepsilon')$, also $f^{-1}(y_0 + \delta) < x_0 + \varepsilon' = f^{-1}(y_0) + \varepsilon' < f^{-1}(y_0) + \varepsilon$.
Analog sieht man $f^{-1}(y_0 - \delta) > f^{-1}(y_0) - \varepsilon$.
Insgesamt folgt $f^{-1}(y_0)-\varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0)+\varepsilon$, also $|f^{-1}(y_0)-f^{-1}(y)| < \varepsilon$.
Damit ist Stetigkeit von f^{-1} an der Stelle y_0 gezeigt. Sollte x_0 oder y_0 ein Randpunkt des jeweiligen Intervalls sein, so muss man den Beweis leicht modifizieren, was ich Ihnen zur Übung überlasse. □

Als Korollar erhält man sofort (wie?) die Stetigkeit der k-ten Wurzelfunktion.

Korollar V.2.11. *Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist die k-te Wurzelfunktion $\sqrt[k]{\cdot} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ stetig.*

V.3 Logarithmen

In diesem Abschnitt führen wir zunächst die natürliche Logarithmus-Funktion ein, mit deren Hilfe wir dann die Exponentialfunktion auf beliebige positive Basen verallgemeinern und anschließend wiederum auch Logarithmen zu beliebigen positiven Basen (ungleich 1) definieren.

Zuerst untersuchen wir das Grenzverhalten der Exponentialfunktion.

Lemma V.3.1. *Es gilt* $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ *und* $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.

Beweis. Sei $R > 0$ beliebig. Wegen $e > 1$ gilt nach Beispiel III.2.13 $e^n \to \infty$, also existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $e^N > R$. Da die Funktion exp nach Korollar IV.4.4 streng monoton steigend ist, folgt für alle $x \geq N$: $\exp(x) \geq \exp(N) = e^N > R$. Das zeigt $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$.
Wegen $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ (siehe wieder Korollar IV.4.4) folgt daraus (wie?), dass auch $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ gilt. □

Nach Korollar IV.4.4 gilt $\mathrm{Im}(\exp) \subseteq \mathbb{R}^+$. Außerdem ist die Exponentialfunktion stetig (Beispiel V.1.14), also ist nach Korollar V.2.4 $\mathrm{Im}(\exp)$ ein Intervall. Wegen Lemma V.3.1 muss daher $\mathrm{Im}(\exp) = \mathbb{R}^+$ gelten. Da exp zudem streng monoton steigend ist, folgt: Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist bijektiv. Das führt zur Definition des natürlichen Logarithmus.

Definition V.3.2. Die Funktion $\log := \exp^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ wird *natürliche Logarithmus-Funktion* genannt. Für $x > 0$ heißt $\log(x)$ der *natürliche Logarithmus* von x.

Es gilt also $\exp(\log(x)) = x$ für alle $x > 0$ und $\log(\exp(y)) = y$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Im nächsten Lemma halten wir einige wichtige Eigenschaften der natürlichen Logarithmus-Funktion fest.

Lemma V.3.3. *Die Funktion* $\log$ *ist stetig, streng monoton steigend und es gilt:*

(i) $\log(1) = 0$ *und* $\log(e) = 1$.

(ii) $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ *für alle* $x, y > 0$.

(iii) $\log(1/x) = -\log(x)$ *für alle* $x > 0$.

(iv) $\log(x/y) = \log(x) - \log(y)$ *für alle* $x, y > 0$.

Beweis. Die Stetigkeit von log folgt aus Satz V.2.10 und weil exp streng monoton steigend ist, ist auch $\log = \exp^{-1}$ streng monoton steigend.
(i) folgt natürlich aus $\exp(0) = 1$ und $\exp(1) = e$.
(ii) Es ist $\exp(\log(x)+\log(y)) = \exp(\log(x))\exp(\log(y)) = xy$, also $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.
(iii) Es gilt $\exp(-\log(x)) = 1/\exp(\log(x)) = 1/x$, folglich $\log(1/x) = -\log(x)$.
(iv) schließlich folgt aus (ii) und (iii). $\square$

Mit Hilfe des natürlichen Logarithmus dehnen wir nun die Exponentialfunktion auf beliebige positive Basen aus.

Definition V.3.4. Sei $a > 0$. Wir definieren $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ durch

$$\exp_a(x) := \exp(x \log(a)) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Natürlich ist $\exp_e = \exp$ und $\exp_1$ ist konstant 1. Weiter haben die Funktionen $\exp_a$ folgende Eigenschaften.

Lemma V.3.5. *Sei* $a > 0$. *Dann ist* $\exp_a$ *stetig und streng monoton steigend für* $a > 1$ *bzw. streng monoton fallend für* $a < 1$. *Ferner gilt:*

(i) $\exp_a(x + y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$.

(ii) $\exp_a(-x) = 1/\exp_a(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

(iii) $\exp_a(rx) = (\exp_a(x))^r$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *und alle* $r \in \mathbb{Q}$.

(iv) $\exp_a(r) = a^r$ *für alle* $r \in \mathbb{Q}$.

Beweis. Da exp und log stetig sind, ist auch $\exp_a$ als Verkettung stetiger Funktionen stetig. Ferner ist $\log(a) > \log(1) = 0$ für $a > 1$ und $\log(a) < \log(1) = 0$ für $a < 1$. Daher folgt die Aussage über die strenge Monotonie von $\exp_a$ aus der strengen Monotonie der Funktion exp.
(i) und (ii) folgen leicht aus den entsprechenden Gleichungen für exp.
(iii) beweist man analog zu Korollar IV.4.5 und (iv) folgt aus (iii) wegen $\exp_a(1) = \exp(\log(a)) = a$. $\square$

Aufgrund der Eigenschaft (iv) definiert man $a^x := \exp_a(x)$ auch für irrationale x. Die obigen Rechenregeln lesen sich dann als

$$a^{x+y} = a^x a^y \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad (a^x)^r = a^{rx} \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\, r \in \mathbb{Q}.$$

Es gilt sogar noch mehr:

Lemma V.3.6. *Für alle* $a, b > 0$ *und alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt:*

(i) $(a^x)^y = a^{xy}$

(ii) $(ab)^x = a^x b^x$

Beweis. (i) Wir wissen bereits, dass das stimmt, falls $y \in \mathbb{Q}$ ist. Ist nun $y \in \mathbb{R}$ beliebig, so findet man wegen Satz II.5.6 zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in \mathbb{Q}$ mit $y < y_n < y + 1/n$. Folglich ist $y_n \to y$. Da die Exponentialfunktion zur Basis a stetig ist, folgt $a^{xy_n} \to a^{xy}$. Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion zur Basis a^x folgt ebenso $(a^x)^{y_n} \to (a^x)^y$.
Es ist aber $(a^x)^{y_n} = a^{xy_n}$ für alle n (da $y_n \in \mathbb{Q}$). Daher folgt $(a^x)^y = a^{xy}$.
(ii) Auch hier wissen wir bereits $(ab)^x = a^x b^x$ für $x \in \mathbb{Q}$. Ist $x \in \mathbb{R}$ beliebig, so finden wir wie eben eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ mit $x_n \to x$ und aus Stetigkeitsgründen folgt $(ab)^{x_n} \to (ab)^x$ und $a^{x_n} b^{x_n} \to a^x b^x$. Wegen $(ab)^{x_n} = a^{x_n} b^{x_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $(ab)^x = a^x b^x$. $\square$

Als Nächstes definieren wir Logarithmen zur Basis a.

Definition V.3.7. Sei $a > 0$ und $a \neq 1$. Wir setzen

$$\log_a(x) := \frac{\log(x)}{\log(a)} \quad \text{für alle } x > 0.$$

Die Funktion $\log_a$ hat die folgenden Eigenschaften.

Lemma V.3.8. *Sei* $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. *Dann gilt:*

(i) $a^{\log_a(x)} = x$ *für* $x > 0$ *und* $\log_a(a^y) = y$ *für* $y \in \mathbb{R}$.

(ii) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ *für alle* $x, y > 0$.

(iii) $\log_a(1/x) = -\log_a(x)$ *für alle* $x > 0$.

(iv) $\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$ *für alle* $x, y > 0$.

(v) $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$ *für alle* $x > 0$, $r \in \mathbb{R}$.

(vi) $\log_b(x) = \log_a(x)\log_b(a)$ *für* $x, b > 0$, $b \neq 1$.

Außerdem ist die Funktion $\log_a$ *stetig und streng monoton steigend für* $a > 1$ *bzw. streng monoton fallend für* $a < 1$.

Beweis. (i) Es gilt $a^{\log_a(x)} = \exp_a(\log_a(x)) = \exp(\log(a)\log_a(x)) = \exp(\log(x)) = x$ für alle $x > 0$. Das zeigt die Surjektivität der Abbildung $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ und da $\exp_a$ streng monoton ist, ist $\exp_a$ bijektiv mit $\exp_a^{-1} = \log_a$. Daher gilt auch $\log_a(a^y) = y$ für alle $y \in \mathbb{R}$.
Die Aussagen (ii), (iii) und (iv) folgen sofort aus den entsprechenden Aussagen für log (siehe Lemma V.3.3).
(v) Es ist $a^{r\log_a(x)} = (a^{\log_a(x)})^r = x^r$, folglich $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$.
(vi) Es gilt $b^{\log_a(x)\log_b(a)} = (b^{\log_b(a)})^{\log_a(x)} = a^{\log_a(x)} = x$. Daraus folgt $\log_b(x) = \log_a(x)\log_b(a)$.
Die Stetigkeit von $\log_a$ folgt aus der Stetigkeit von log. Das Monotonieverhalten von $\log_a$ folgt ebenfalls aus dem Monotonieverhalten von log (beachte $\log(a) > 0$ für $a > 1$ und $\log(a) < 0$ für $a < 1$). □

Es gilt natürlich $\log_e = \log$. Für diesen natürlichen Logarithmus schreibt man manchmal auch ln. Der Logarithmus $\log_{10}$ zur Basis 10 wird auch mit lg bezeichnet.[7] Anstelle von $\log_2$ schreibt man auch lb.

Weiter halten wir fest:

Lemma V.3.9. *Für alle* $r \in \mathbb{R}$ *ist die durch* $f_r(x) := x^r$ *auf* $\mathbb{R}^+$ *definierte Funktion stetig.*

Beweis. Es ist $x^r = e^{r\log(x)}$ für $x > 0$, daher folgt die Behauptung aus der Stetigkeit von Exponential- und Logarithmus-Funktion. □

Zum Schluss betrachten wir nun noch einige Grenzwerte.

Lemma V.3.10. *Es gilt:*

(i) $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ *und* $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ *für* $a > 1$.

(ii) $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ *und* $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$ *für* $0 < a < 1$.

(iii) $\lim_{x\to\infty} \log_a(x) = \infty$ *und* $\lim_{x\to 0} \log_a(x) = -\infty$ *für* $a > 1$.

(iv) $\lim_{x\to\infty} \log_a(x) = -\infty$ *und* $\lim_{x\to 0} \log_a(x) = \infty$ *für* $0 < a < 1$.

[7] Achtung: Manche Leute schreiben log für $\log_{10}$ (und dann natürlich ln für den natürlichen Logarithmus).

(v) $\lim_{x\to\infty} x^r = \infty$ *für* $r > 0$ *und* $\lim_{x\to\infty} x^r = 0$ *für* $r < 0$.

(vi) $\lim_{x\to 0} x^r = 0$ *für* $r > 0$ *und* $\lim_{x\to 0} x^r = \infty$ *für* $r < 0$.

Beweis. (i) beweist man analog zu Lemma V.3.1.
(ii) Ist $0 < a < 1$, so ist $1/a > 1$ und $a^x = (1/a)^{-x}$. Damit kann man (ii) auf (i) zurückführen (wie?).
(iii) Sei $a > 1$ und sei $R > 0$ beliebig. Dann gilt für alle $x > a^R$ auch $\log_a(x) > \log_a(a^R) = R$, denn $\log_a$ ist streng monoton steigend. Das zeigt $\lim_{x\to\infty} \log_a(x) = \infty$.
Ebenso gilt für alle $0 < x < a^{-R}$ auch $\log_a(x) < -R$. Das zeigt $\lim_{x\to 0} \log_a(x) = -\infty$.
(iv) beweist man analog zu (iii).
Wegen $x^r = e^{r\log(x)}$ folgen die Aussagen (v) und (vi) leicht aus den vorigen Aussagen (Details als Übung). □

V.4 Trigonometrische Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir die trigonometrischen Funktionen Sinus, Kosinus und Tangens. Um diese Funktionen sauber definieren zu können, betrachten wir die folgenden Reihen.

Lemma V.4.1. *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *sind die Reihen*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \textit{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

absolut konvergent.

Beweis. Das ist klar für $x = 0$. Sei nun also $x \neq 0$. Dann gilt

$$\frac{|(-1)^{n+1}x^{2n+3}|/(2n+3)!}{|(-1)^n x^{2n+1}|/(2n+1)!} = x^2 \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} \to 0$$

und

$$\frac{|(-1)^{n+1}x^{2n+2}|/(2n+2)!}{|(-1)^n x^{2n}|/(2n)!} = x^2 \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} \to 0.$$

Damit folgt die Behauptung aus dem Quotientenkriterium (genauer Korollar IV.2.7). □

Nun können wir die folgende Definition aussprechen.

Definition V.4.2. Die *Sinus-Funktion* sin und die *Kosinus-Funktion* cos werden definiert durch

$$\sin(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{und} \quad \cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Wir stellen nun einige Eigenschaften dieser Funktionen zusammen.

Satz V.4.3. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

(a) $\sin(-x) = -\sin(x)$

(b) $\cos(-x) = \cos(x)$

(c) $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

(d) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

(e) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

(f) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

(g) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

(h) $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ *und* $-1 \leq \cos(x) \leq 1$

Außerdem gilt $\sin(0) = 0$ *und* $\cos(0) = 1$.

Die Eigenschaften (c) und (d) nennt man die *Additionstheoreme* für den Sinus bzw. den Kosinus, Eigenschaft (e) nennt man auch den *trigonometrischen Satz von Pythagoras*[8] [9] (hierbei ist $\sin^2(x)$ eine Abkürzung für $(\sin(x))^2$ (analog für cos)).

Beweis. Die Aussagen (a) und (b) ergeben sich leicht direkt aus den Definitionen von sin und cos, ebenso wie die Identitäten $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$.
(c) Der Beweis beruht auf dem Satz über Cauchy-Produkte absolut konvergenter Reihen (Satz IV.4.3). Nach diesem Satz gilt:

$$\begin{aligned}\sin(x)\cos(y) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}(-1)^{k-i}\frac{y^{2(k-i)}}{(2(k-i))!}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{x^{2i+1}y^{2k-2i}}{(2i+1)!(2k-2i)!}\right)\end{aligned}$$

[8] Bei der geometrischen Interpretation von Sinus und Kosinus betrachtet man ein rechtwinkliges Dreieck dessen Hypothenuse die Länge 1 hat. Bezeichnet x das Bogenmaß des von der Hypothenuse und einer der Katheten eingeschlossenen Winkels, so wird $\cos(x)$ als die Länge dieser Kathete und $\sin(x)$ als die Länge der anderen Kathete definiert. Aus dem Satz des Pythagoras ergibt sich dann die Beziehung $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. Wir wollen hier aber nicht den geometrischen, sondern den analytischen Zugang zu Sinus- und Kosinus-Funktion verfolgen.

[9] Pythagoras von Samos (ca. 570 v. Chr–nach 510 v. Chr.): griechischer Philosoph, Gründer der nach ihm benannten Gemeinschaft der Pythagoreer. Der sogenannte Satz des Pythagoras (das Quadrat der Länge der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Kathetenlängen), war allerdings schon Jahrhunderte vor Pythagoras in Babylonien und Indien bekannt.

und ebenso

$$\cos(x)\sin(y) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{x^{2i}y^{2k-2i+1}}{(2i)!(2k-2i+1)!}\right).$$

Es folgt

$$\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \sum_{i=0}^{k}\left(\frac{x^{2i+1}y^{2k-2i}}{(2i+1)!(2k-2i)!} + \frac{x^{2i}y^{2k-2i+1}}{(2i)!(2k-2i+1)!}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \sum_{j=0}^{2k+1} \frac{x^j y^{2k+1-j}}{j!(2k+1-j)!},$$

denn spaltet man die Summe $\sum_{j=0}^{2k+1} x^j y^{2k+1-j}/(j!(2k+1-j)!)$ in Summanden mit gerader und ungerader Nummer auf ($j = 2i$ bzw. $j = 2i+1$ für $i = 0, \ldots, k$), so erhält man gerade

$$\sum_{j=0}^{2k+1} \frac{x^j y^{2k+1-j}}{j!(2k+1-j)!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{x^{2i+1}y^{2k-2i}}{(2i+1)!(2k-2i)!} + \sum_{i=0}^{k} \frac{x^{2i}y^{2k-2i+1}}{(2i)!(2k-2i+1)!}.$$

Mit der Definition der Binomialkoeffizienten und dem binomischen Satz folgt schließlich

$$\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{j=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{j} x^j y^{2k+1-j}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(x+y)^{2k+1} = \sin(x+y).$$

(d) beweist man analog zu (c). Die Details seien Ihnen selbst zur Übung überlassen.
(e) Aus (d), (a) und (b) folgt:

$$1 = \cos(0) = \cos(x-x) = \cos(x)\cos(-x) - \sin(x)\sin(-x) = \cos^2(x) + \sin^2(x).$$

Die Aussagen (f) und (g) folgen aus (c) bzw. (d) für $x = y$.
(h) Aus (e) folgt $\sin^2(x) \leq 1$ und $\cos^2(x) \leq 1$, also $|\sin(x)| \leq 1$ und $|\cos(x)| \leq 1$. □

Als Nächstes wollen wir zeigen, dass es sich bei Sinus und Kosinus um stetige Funktionen handelt.

Satz V.4.4. *Die Funktionen* sin *und* cos *sind stetig.*

Beweis. 1) Wir zeigen zuerst die Stetigkeit von sin an der Stelle 0. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq 1$ gilt $|x|^{2k+1} \leq |x|$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und folglich:

$$|\sin(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} \leq |x| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}.$$

Die rechte Seite geht für $x \to 0$ gegen 0, also ist $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0 = \sin(0)$. Ähnlich zeigt man auch die Stetigkeit von cos an der Stelle 0 (Übung).
2) Nun sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \to x_0$. Aus den Additionstheoremen (Satz V.4.3) folgt:

$$\begin{aligned} \sin(x_n) &= \sin(x_n - x_0 + x_0) = \sin(x_n - x_0)\cos(x_0) + \cos(x_n - x_0)\sin(x_0), \\ \cos(x_n) &= \cos(x_n - x_0 + x_0) = \cos(x_n - x_0)\cos(x_0) - \sin(x_n - x_0)\sin(x_0) \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.
Nach 1) gilt $\sin(x_n - x_0) \to 0$ und $\cos(x_n - x_0) \to 1$. Daher folgt $\sin(x_n) \to \sin(x_0)$ und $\cos(x_n) \to \cos(x_0)$, wie gewünscht. □

Weiter benötigen noch die folgenden Formeln.

Lemma V.4.5. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\begin{aligned} \sin(x) - \sin(y) &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right), \\ \cos(x) - \cos(y) &= 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{y-x}{2}\right). \end{aligned}$$

Beweis. Setze $u := (x+y)/2$ und $v := (x-y)/2$. Dann folgt mit Hilfe des Additionstheorems für die Sinus-Funktion

$$\begin{aligned} &\sin(x) - \sin(y) = \sin(u+v) - \sin(u-v) \\ &= \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v) - \sin(u)\cos(-v) - \cos(u)\sin(-v) \\ &= 2\cos(u)\sin(v), \end{aligned}$$

denn $\cos(-v) = \cos(v)$ und $\sin(-v) = -\sin(v)$.
Die zweite Gleichung wird analog bewiesen (Übung). □

Unser nächstes Ziel ist es, die Zahl π mit Hilfe der Kosinus-Funktion zu definieren. Dazu beweisen wir zunächst das folgende Lemma.

Lemma V.4.6. *Es gilt:*

(i) $\cos(2) < 0$,

(ii) $\sin(x) > 0$ *für* $x \in (0, 2]$,

(iii) $\cos(x) > \cos(y)$ *für* $0 \leq x < y \leq 2$.

Beweis. (i) Es ist

$$
\begin{aligned}
\cos(2) &= 1 - \frac{4}{2} + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!} = -1 + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{4^k}{(2k)!} \\
&\leq -1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4^k}{(2k)!} = -1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{5 \cdot 6 \cdots 2k} \frac{4^k}{2 \cdot 3 \cdot 4} \\
&\leq -1 + \frac{1}{6} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4^{k-1}}{5^{2k-4}},
\end{aligned}
$$

denn $5 \cdot 6 \cdots 2k$ enthält $2k-4$ Faktoren, die alle größer oder gleich 5 sind.
Es folgt

$$
\begin{aligned}
\cos(2) &\leq -1 + \frac{2}{3} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{4}{25}\right)^{k-2} = -1 + \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{25}\right)^{k} \\
&= -1 + \frac{2}{3(1-4/25)} = -1 + \frac{50}{63} = -\frac{13}{63} < 0,
\end{aligned}
$$

wobei wir die Formel für die geometrische Reihe mit $q = 4/25$ verwendet haben.
(ii) Sei $x \in (0,2]$. Es gilt

$$\sin(x) = x + R,$$

wobei

$$R := \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x^3}{6} \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$$

mit

$$a_k := \frac{6x^{2k-2}}{(2k+1)!} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Nun ist

$$a_{k+1} = a_k \frac{x^2}{(2k+2)(2k+3)}$$

und (wegen $x \in (0,2]$)

$$\frac{x^2}{(2k+2)(2k+3)} \leq \frac{4}{(2k+2)(2k+3)} \leq 1,$$

also $a_{k+1} \leq a_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Es folgt

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1} a_k = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq 0,$$

denn alle geklammerten Terme auf der rechten Seite sind positiv. Weiter folgt

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} a_k = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} a_k + a_{2n+1} \geq 0,$$

denn alle a_k sind positiv.
Ferner gilt auch

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} a_k &= 1 + \sum_{k=2}^{2n} (-1)^{k+1} a_k \\ &= 1 + (a_3 - a_2) + (a_5 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n-2}) - a_{2n} \leq 1 - a_{2n}, \end{aligned}$$

denn alle geklammerten Terme sind negativ. Es folgt (wegen $a_{2n} \geq 0$):

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} a_k \leq 1$$

und

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} a_k = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} a_k + a_{2n+1} \leq 1 - a_{2n} + a_{2n+1} \leq 1,$$

denn $a_{2n+1} \leq a_{2n}$.
Insgesamt gilt also

$$0 \leq \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} a_k \leq 1$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ (sowohl die geraden als auch die ungeraden).
Es folgt

$$\left| \sum_{k=1}^{m} (-1)^k a_k \right| \leq 1 \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Daher ist auch

$$|R| = \left| \frac{x^3}{6} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leq \frac{x^3}{6} \leq \frac{2}{3} x$$

(beachte $0 < x \leq 2$).
Somit folgt $\sin(x) = x(1 + R/x) \geq x(1 - 2/3) = x/3 > 0$.
(iii) Seien $0 \leq x < y \leq 2$. Nach Lemma V.4.5 gilt

$$\cos(x) - \cos(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{y-x}{2}\right).$$

Wegen $0 \leq x < y \leq 2$ gilt auch $0 < (x+y)/2 \leq 2$ und $0 < (y-x)/2 \leq 2$. Aus (ii) folgt daher $\sin((x+y)/2) > 0$ und $\sin((y-x)/2) > 0$, also ist $\cos(x) - \cos(y) > 0$. □

Nun können wir folgenden Satz zeigen.

Satz V.4.7. *Es existiert genau ein* $x_0 \in (0, 2)$ *mit* $\cos(x_0) = 0$.

Beweis. Es ist $\cos(0) = 1 > 0$ und $\cos(2) < 0$ (nach Lemma V.4.6). Da cos nach Satz V.4.4 eine stetige Funktion ist, folgt die Existenz einer Nullstelle $x_0 \in (0, 2)$ aus dem Nullstellensatz (Korollar V.2.3).
Die Eindeutigkeit folgt aus Teil (iii) von Lemma V.4.6. □

Jetzt können wir π definieren.

Definition V.4.8. Sei x_0 wie in Satz V.4.7. Wir setzen $\pi := 2x_0$.

$\pi/2$ ist also die eindeutig bestimmte Nullstelle der Kosinus-Funktion im Intervall $(0, 2)$. Der ungefähre Wert von π kann mit Hilfe numerischer Methoden ermittelt werden: Es ist

$$\pi \approx 3,14159.$$

Wie Ihnen sicherlich bekannt ist, handelt es sich bei π um eine irrationale Zahl, was wir aber nicht beweisen werden. In Kapitel VII wird aber explizit gezeigt, dass sich der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius r wie gewohnt zu πr^2 berechnet.

Nun bestimmen wir zunächst einige weitere spezielle Werte von Sinus und Kosinus.

Lemma V.4.9. *Es gilt* $\sin(\pi/2) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi) = 0$, $\cos(\pi) = -1$, $\sin(3\pi/2) = -1$, $\cos(3\pi/2) = 0$, $\sin(2\pi) = 0$, $\cos(2\pi) = 1$.

Beweis. $\cos(\pi/2) = 0$ gilt nach Definition und mit dem trigonometrischen Satz von Pythagoras (Satz V.4.3, Teil (e)) folgt daher $\sin^2(\pi/2) = 1 - \cos^2(\pi/2) = 1$. Aus Lemma V.4.6 folgt $\sin(\pi/2) > 0$, also muss $\sin(\pi/2) = 1$ gelten.
Weiter folgt aus Satz V.4.3

$$\sin(\pi) = \sin(2\pi/2) = 2\sin(\pi/2)\cos(\pi/2) = 0$$

und

$$\cos(\pi) = \cos(2\pi/2) = \cos^2(\pi/2) - \sin^2(\pi/2) = -1.$$

Auf analoge Weise erhält man die Werte von Sinus und Kosinus an der Stelle 2π aus den Werten an der Stelle π. Die Werte an der Stelle $3\pi/2 = \pi + \pi/2$ ergeben sich schließlich mit Hilfe der Additionstheoreme. □

Weiter gelten folgende “Verschiebungsregeln”.

Lemma V.4.10. *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt:*

(i) $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ *und* $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

(ii) $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ *und* $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$

(iii) $\sin(x+\pi/2) = \cos(x)$ *und* $\cos(x+\pi/2) = -\sin(x)$

Beweis. Das ergibt sich leicht aus den in Lemma V.4.9 ermittelten Werten und den Additionstheoremen. □

Allgemein heißt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *p-periodisch* (wobei $p > 0$), falls $f(x+p) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Die Aussage (i) des obigen Lemmas bedeutet also gerade, dass Sinus und Kosinus 2π-periodisch sind. Daraus folgt leicht (wie?), dass auch $\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$ und $\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt.

Als Nächstes bestimmen wir sämtliche Nullstellen von Sinus- und Kosinus-Funktion.

Satz V.4.11. *Für die Nullstellen von Sinus und Kosinus gilt:*

$$\{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = 0\} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} : \cos(x) = 0\} = \{k\pi + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$$

Beweis. Wir wissen schon: $\pi/2$ ist die einzige Nullstelle von cos in $(0,2)$.
Wegen $\cos(0) = 1 > 0$ folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass $\cos(x) > 0$ für alle $x \in [0, \pi/2)$ gilt.
Wegen $\cos(x) = \cos(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt damit: $\cos(x) > 0$ für alle $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.
Aus Lemma V.4.10 (iii) folgt $\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also ist $\sin(x) > 0$ für alle $x \in (0, \pi)$.
Wegen $\sin(-x) = -\sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt daraus auch $\sin(x) < 0$ für $x \in (-\pi, 0)$.
Ferner wissen wir schon $\sin(\pi) = 0 = \sin(0) = \sin(-\pi)$. Also ist

$$\{x \in [-\pi, \pi] : \sin(x) = 0\} = \{-\pi, 0, \pi\}. \tag{V.4}$$

Da sin 2π-periodisch ist, folgt $\sin(2l\pi) = \sin(0) = 0$ und $\sin((2l+1)\pi) = \sin(\pi) = 0$ für alle $l \in \mathbb{Z}$. Also ist

$$\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = 0\}.$$

Sei nun umgekehrt $x \in \mathbb{R}$ mit $\sin(x) = 0$. Wir setzen $m := [x/(2\pi)]$ ($[\cdot]$ bezeichnet die Gauß-Klammer). Dann gilt für $y := x - 2m\pi$ einerseits $0 \le y < 2\pi$ und andererseits $\sin(y) = \sin(y + 2m\pi) = \sin(x) = 0$.
Aus Lemma V.4.10 (ii) folgt $\sin(y-\pi) = -\sin(\pi-y) = \sin(-y) = -\sin(y) = 0$.
Wegen $-\pi \le y - \pi < \pi$ folgt daraus mit (V.4) $y = 0$ oder $y = \pi$. Daher gilt $x = y + 2m\pi = 2m\pi$ oder $x = y + 2m\pi = (2m+1)\pi$. Damit ist

$$\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = 0\}$$

gezeigt.
Wegen $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (Lemma V.4.10) ergeben sich daraus auch leicht die Nullstellen von cos. $\square$

Zum Schluss definieren wir noch die Tangens-Funktion.

Definition V.4.12. Die *Tangens-Funktion* tan wird definiert durch

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Wegen $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ und $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ (Lemma V.4.10) ergibt sich leicht das folgende Resultat: Liegt x im Definitionsbereich der Tangens-Funktion, so liegt auch $x + \pi$ im Definitionsbereich der Tangens-Funktion und es gilt $\tan(x + \pi) = \tan(x)$.

Ferner gilt:

Lemma V.4.13. *Es ist* $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ *und folglich* $\tan(\pi/4) = 1$.

Beweis. Aus Satz V.4.3 folgt $0 = \cos(\pi/2) = \cos^2(\pi/4) - \sin^2(\pi/4) = 1 - 2\sin^2(\pi/4)$, also $\sin^2(\pi/4) = 1/2$. Wegen $\sin(\pi/4) > 0$ folgt $\sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$. Weiter ist $\cos^2(\pi/4) = 1 - \sin^2(\pi/4) = 1/2$ und $\cos(\pi/4) > 0$, also auch $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$. $\square$

Die Einführung der Umkehrfunktionen von Sinus, Kosinus und Tangens (der sogenannten Arcus-Funktionen) verschieben wir auf Kapitel VIII.

VI Differenzierbarkeit

In diesem Kapitel geht es um differenzierbare Funktionen. Die Differentialrechnung ist einer der Eckpfeiler der Analysis. Sie besitzt zahlreiche Anwendungen in den Naturwissenschaften. Entwickelt wurde sie unabhängig voneinander von Gottfried Wilhelm Leibniz[1] und Sir Isaac Newton.[2]

VI.1 Definition, Beispiele, Ableitungsregeln

Die zentrale Definition lautet wie folgt.

Definition VI.1.1. Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in D$ derart, dass a ein Berührungspunkt von $D \setminus \{a\}$ ist. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f *differenzierbar an der Stelle* a, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. Ggf. wird dieser Grenzwert dann die *Ableitung* von f an der Stelle a genannt und mit $f'(a)$ bezeichnet.

Die Funktion f heißt *differenzierbar*, wenn sie an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches differenzierbar ist. Die Abbildung f', die jedem $a \in D$ den Wert $f'(a)$ zuordnet, heißt dann die *Ableitungsfunktion* oder kurz die *Ableitung* von f.

Die Interpretation dieser Definition ist die folgende: Der Wert $(f(x) - f(a))/(x - a)$ ist die Steigung der *Sekante* an den Graphen von f durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$. Der Grenzwert für $x \to a$, also $f'(a)$, ist dann die Steigung der *Tangente* an den Graphen von f im Punkt $(a, f(a))$. Der Wert $f'(a)$ ist also ein Maß für die Steigung der Funktion f an der Stelle a.

Hier ist eine äquivalente Umschreibung der Ableitungsdefinition, die bisweilen nützlich ist.

---

[1] Siehe Fußnote zum Leibniz-Kriterium.

[2] Englischer Mathematiker und Physiker (1643–1727), neben der Differentialrechnung entwickelte er unter anderem auch die Newtonschen Axiome der klassischen Mechanik und das Newtonsche Gravitationsgesetz. Auch die physikalische Einheit Newton (N) für die Kraft ist nach ihm benannt, ebenso wie das Newton-Verfahren zur Nullstellenberechnung (siehe Kapitel VIII).

Bemerkung VI.1.2. Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D$ ein Berührungspunkt von $D \setminus \{a\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist f an der Stelle a differenzierbar genau dann, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existiert. Ggf. ist dieser Grenzwert dann gleich $f'(a)$.

Beweis. Zunächst ist der Quotient $(f(a+h) - f(a))/h$ definiert auf $M := \{h \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : a + h \in D\}$. Da a ein Berührungspunkt von D ist, ist leicht einzusehen, dass 0 ein Berührungspunkt von M ist (Übung).
Angenommen nun es existiert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} =: s.$$

Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $D \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$. Dann ist $h_n := x_n - a \to 0$ und folglich

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(a + h_n) - f(a)}{h_n} = s.$$

Also ist f differenzierbar mit $f'(a) = s$.
Der Beweis für die andere Schlussrichtung ist sehr ähnlich und sei Ihnen daher zur Übung überlassen. □

Nun betrachten wir ein paar einfache Beispiele:
1) Jede konstante Funktion ist differenzierbar mit $f' = 0$ (das folgt sofort aus der Definition).
2) Ist $f(x) = x$ für $x \in \mathbb{R}$, so ist f differenzierbar mit $f'(a) = 1$ für alle $a \in \mathbb{R}$ (denn $(f(x) - f(a))/(x - a)$ ist konstant gleich 1).
3) Sei $f(x) = x^2$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt an jeder Stelle a:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} (x + a) = 2a,$$

wobei wir die dritte binomische Formel ausgenutzt haben.
4) Sei $f(x) = 1/x$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gilt an jeder Stelle $a \neq 0$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{1/x - 1/a}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{a-x}{xa}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{-1}{xa} = -\frac{1}{a^2}.$$

Diese Beispiele werden wir im Folgenden noch wesentlich verallgemeinern. Damit uns das Berechnen von Ableitungen leichter fällt, beweisen wir aber zunächst einige Ableitungsregeln. Zuerst betrachten wir Summen und Vielfache.

Lemma VI.1.3. *Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D$ ein Berührungspunkt von $D \setminus \{a\}$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die an der Stelle a differenzierbar sind. Ferner sei $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $f+g$ und cf an der Stelle a differenzierbar und es gilt $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ und $(cf)'(a) = cf'(a)$.*

Beweis. Es gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x-a}$$
$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = f'(a) + g'(a).$$

Also ist $f+g$ an der Stelle a differenzierbar mit $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$. Die Aussage für cf wird analog bewiesen. □

Aus diesem Lemma und den obigen Beispielen folgt z. B. sofort, dass für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ die durch $f(x) := ax^2 + bx + c$ auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion differenzierbar ist und $f'(x) = 2ax + b$ gilt.

Als Nächstes zeigen wir die wichtige Aussage, dass Differenzierbarkeit Stetigkeit impliziert.

Satz VI.1.4. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D$ ein Berührungspunkt von $D \setminus \{a\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die an der Stelle a differenzierbar ist. Dann ist f auch stetig bei a.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $D \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} (f(x_n) - f(a)) = \lim_{n\to\infty} (x_n - a) \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = 0 \cdot f'(a) = 0,$$

also $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.
Das zeigt $f(x) \to f(a)$ für $x \to a$ auf dem eingeschränkten Definitionsbereich $D \setminus \{a\}$. Mit der ε-δ-Formulierung folgt daraus aber auch $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, also ist f stetig bei a. □

Die Umkehrung des obigen Satzes gilt nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel VI.1.5. Die Betragsfunktion ($f(x) = |x|$ für $x \in \mathbb{R}$) ist stetig, aber an der Stelle 0 nicht differenzierbar.

Beweis. Wir wissen bereits, dass die Betragsfunktion stetig ist (Beispiel V.1.13). Um einzusehen, dass sie bei 0 nicht differenzierbar ist, muss man nur $|x|/x = \operatorname{sign}(x)$ für $x \neq 0$ beobachten und sich daran erinnern, dass $\operatorname{sign}(x)$ für $x \to 0$ keinen Grenzwert besitzt. □

An allen Stellen $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Betragsfunktion allerdings differenzierbar mit Ableitung 1 für $x > 0$ und Ableitung -1 für $x < 0$ (Beweis?). Tatsächlich gibt es sogar stetige Funktionen (definiert etwa auf $[0, 1]$), die an *keiner Stelle* differenzierbar sind. Solche Beispiele sind allerdings nicht ganz einfach zu konstruieren und wir wollen sie daher hier nicht behandeln.

Nun kommen wir zur *Produktregel.*

Satz VI.1.6. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei $a \in D$ ein Berührungspunkt von $D \setminus \{a\}$. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die an der Stelle a differenzierbar sind. Dann ist auch fg an der Stelle a differenzierbar und es gilt:*

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Beweis. Für $x \in D \setminus \{a\}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} &= \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \frac{(f(x) - f(a))g(x) + f(a)(g(x) - g(a))}{x - a} \\ &= g(x)\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + f(a)\frac{g(x) - g(a)}{x - a}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \quad \text{und} \quad \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a).$$

Ferner ist nach Satz VI.1.4 g auch stetig bei a, also gilt auch $g(x) \to g(a)$ für $x \to a$. Insgesamt folgt also

$$\lim_{x \to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

□

Als Anwendung der Produktregel berechnen wir nun die Ableitung von x^n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Lemma VI.1.7. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ bezeichne p_n die n-te Potenzfunktion, d. h. $p_n(x) := x^n$ für $x \in \mathbb{R}$.*

Dann ist p_n differenzierbar mit

$$p_n'(x) = nx^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion. Der Induktionsanfang $n = 1$ ist klar (siehe Beispiel 2) oben).
Angenommen nun es ist $n \in \mathbb{N}$ mit $p_n'(x) = nx^{n-1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen $p_{n+1}(x) = xp_n(x)$ folgt aus der Produktregel

$$p_{n+1}'(x) = 1 \cdot p_n(x) + xp_n'(x) = x^n + nx^n = (n + 1)x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

Eine unmittelbare Konsequenz ist die Differenzierbarkeit von Polynomfunktionen:

Korollar VI.1.8. *Seien $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und sei $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f differenzierbar mit*

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Das folgt sofort aus den Lemmata VI.1.7 und VI.1.3. □

Als Nächstes berechnen wir die Ableitung des Kehrwertes einer Funktion.

Lemma VI.1.9. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei $a \in D$ ein Berührungspunkt von $D \setminus \{a\}$. Sei $g : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die an der Stelle a differenzierbar ist und es gelte $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Dann ist auch $1/g$ an der Stelle a differenzierbar und es gilt:*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}.$$

Beweis. Für alle $x \in D \setminus \{a\}$ gilt:

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} = -\frac{1}{g(x)g(a)} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

Es ist

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$$

und (weil g nach Satz VI.1.4 an der Stelle a stetig ist)

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)g(a)} = \frac{1}{g^2(a)}.$$

Es folgt also

$$\lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}.$$

□

Damit erhält man nun auch die Ableitung von $1/x^n$.

Lemma VI.1.10. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $q_n(x) := 1/x^n$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ist q_n differenzierbar mit*

$$q_n'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Beweis. Aus den Lemmata VI.1.7 und VI.1.9 folgt

$$q_n'(x) = -\frac{p_n'(x)}{p_n^2(x)} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

für alle $x \neq 0$. □

Jetzt kommen wir zur allgemeinen *Quotientenregel*.

Satz VI.1.11. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei $a \in D$ ein Berührungspunkt von $D \setminus \{a\}$. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die an der Stelle a differenzierbar sind. Ferner sei $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Dann ist auch f/g an der Stelle a differenzierbar und es gilt:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Beweis. Schreibt man $f/g = (1/g)f$ und wendet die Produktregel und Lemma VI.1.9 an, so erhält man

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} + f(a)\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} - f(a)\frac{g'(a)}{g^2(a)} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

□

Aus der Quotientenregel und der Differenzierbarkeit von Polynomfunktionen ergibt sich sofort, dass auch alle rationalen Funktionen differenzierbar sind und ihre Ableitung sich explizit berechnen lässt.
Beispiel: Sei

$$f(x) := \frac{x^3 - 4x}{x - 1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 - 4)(x - 1) - (x^3 - 4x) \cdot 1}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{3x^3 - 4x - 3x^2 + 4 - x^3 + 4x}{(x - 1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2 + 4}{(x - 1)^2} \end{aligned}$$

für alle $x \neq 1$.

Als Nächstes wenden wir uns der Ableitung der Exponentialfunktion zu.

Satz VI.1.12. *Die Exponentialfunktion ist differenzierbar mit*

$$\exp'(x) = \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. 1) Wir zeigen zuerst die Behauptung für $x = 0$. Für alle $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $|h| \leq 1$ gilt $|h|^{k-1} \leq |h|$ für alle natürlichen Zahlen $k \geq 2$, also:

$$\left|\frac{\exp(h) - 1}{h} - 1\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!} - 1\right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|h|^{k-1}}{k!} \leq |h| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Der letzte Term geht für $h \to 0$ gegen 0, daher folgt:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1. \tag{VI.1}$$

Nach Bemerkung VI.1.2 bedeutet das gerade $\exp'(0) = 1$.
2) Nun sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Aus (VI.1) folgt:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\exp(x + h) - \exp(x)}{h} = \exp(x) \lim_{h \to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x),$$

also $\exp'(x) = \exp(x)$. □

Eine weitere wichtige Ableitungsregel ist die folgende *Kettenregel*.

Satz VI.1.13. *Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$, sei $a \in D$ ein Berührungspunkt von $D \setminus \{a\}$ und seien $g : D \to E$ und $f : E \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, wobei g an der Stelle a differenzierbar sei. Ferner sei $g(a)$ ein Berührungspunkt von $E \setminus \{g(a)\}$ und f sei an der Stelle $g(a)$ differenzierbar.*

Dann ist auch $f \circ g$ an der Stelle a differenzierbar und es gilt:

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Beweis. Wir definieren uns eine Hilfsfunktion $h : E \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$h(y) := \begin{cases} \frac{f(y)-f(g(a))}{y-g(a)} & \text{für } y \in E \setminus \{g(a)\} \\ f'(g(a)) & \text{für } y = g(a). \end{cases}$$

Dann gilt definitionsgemäß $\lim_{y \to g(a)} h(y) = h(g(a))$, d. h. h ist an der Stelle $g(a)$ stetig. Da nach Satz VI.1.4 g an der Stelle a stetig ist, ist also auch $h \circ g$ stetig bei a, also ist $\lim_{x \to a} h(g(x)) = h(g(a))$.
Ferner gilt $f(y) - f(g(a)) = h(y)(y - g(a))$ für alle $y \in E$, also auch $f(g(x)) - f(g(a)) = h(g(x))(g(x) - g(a))$ für alle $x \in D$. Es folgt:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = \lim_{x \to a} h(g(x)) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = h(g(a))g'(a),$$

also ist $(f \circ g)'(a) = h(g(a))g'(a) = f'(g(a))g'(a)$. □

Beispiel: Sei $h(x) := \exp(x^2+3x) = e^{x^2+3x}$ für $x \in \mathbb{R}$. Aus der Kettenregel folgt (mit $f = \exp$ und $g(x) = x^2+3x$):

$$h'(x) = \exp'(x^2+3x)(2x+3) = (2x+3)\exp(x^2+3x) = (2x+3)e^{x^2+3x}$$

für $x \in \mathbb{R}$.

Als Anwendung der Kettenregel erhält man nun auch sofort die Ableitung von $\exp_a(x) = a^x$.

Korollar VI.1.14. *Sei $a > 0$. Dann ist $\exp_a$ differenzierbar und es gilt $\exp_a'(x) = \exp_a(x)\log(a) = a^x \log(a)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Wegen $\exp_a(x) = \exp(x\log(a))$ folgt aus der Kettenregel:

$$\exp_a'(x) = \exp'(x\log(a))\log(a) = \exp(x\log(a))\log(a) = \exp_a(x)\log(a)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Nun kommen wir zur Ableitung von Sinus- und Kosinus-Funktion.

Satz VI.1.15. *Die Sinus- und die Kosinus-Funktion sind differenzierbar mit*

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \textit{und} \quad \cos'(x) = -\sin(x) \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. 1) Wir zeigen zuerst

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1 \tag{VI.2}$$

und

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0. \tag{VI.3}$$

Für alle $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $|h| \leq 1$ gilt

$$\left|\frac{\sin(h)}{h} - 1\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{h^{2k}}{(2k+1)!}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|h|^{2k}}{(2k+1)!} \leq |h| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}.$$

Da der letzte Term für $h \to 0$ gegen 0 geht, folgt (VI.2).
Der Beweis für (VI.3) ist ähnlich und sei Ihnen daher zur Übung überlassen.
2) Sei nun $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Aus den Additionstheoremen für Sinus und Kosinus folgt für $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h}\\ &= \sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h}\end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} &= \frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h} \\
&= \cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h}.
\end{aligned}
$$

Mit (VI.2) und (VI.3) folgt daraus

$$
\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \cos(x)
$$

und

$$
\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = -\sin(x),
$$

wie behauptet. □

Als Korollar erhält man auch die Ableitung des Tangens.

Korollar VI.1.16. *Sei $D := \mathbb{R}\setminus\{k\pi+\pi/2 : k\in\mathbb{Z}\}$. Die Tangens-Funktion ist auf D differenzierbar und es gilt*

$$
\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x) \quad \textit{für alle } x\in D.
$$

Beweis. Wegen $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ folgt aus der Quotientenregel und dem vorigen Satz:

$$
\begin{aligned}
\tan'(x) &= \frac{\sin'(x)\cos(x)-\sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)
\end{aligned}
$$

für alle $x\in D$, wobei wir noch den trigonometrischen Satz von Pythagoras verwendet haben. □

Schließlich betrachten wir noch die Differentiation von Umkehrfunktionen.

Satz VI.1.17. *Seien $I, J\subseteq\mathbb{R}$ Intervalle und sei $f : I\to J$ eine surjektive, streng monotone, stetige Funktion. Sei $b\in J$ derart, dass f an der Stelle $f^{-1}(b)\in I$ differenzierbar ist mit $f'(f^{-1}(b))\neq 0$.*

Dann ist f^{-1} an der Stelle b differenzierbar und es gilt

$$
\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.
$$

Beweis. Setze $a := f^{-1}(b)\in I$. Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $J\setminus\{b\}$ mit $y_n\to b$. Sei $x_n := f^{-1}(y_n)$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Dann ist $x_n\in I$ und $x_n\neq a$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Da f stetig und streng monoton ist, ist nach dem Satz über die Stetigkeit der Umkehrfunktion (Satz V.2.10) auch f^{-1} stetig. Aus $y_n \to b$ folgt daher $x_n \to a$.
Da f an der Stelle a differenzierbar ist, folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(a).$$

Wegen $f'(a) \neq 0$ und $f(x_n) \neq f(a)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Nach Definition von a und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt das aber

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

□

Als Anwendung dieses Satzes bestimmen wir die Ableitung von $\log_a$.

Korollar VI.1.18. *Sei $a > 0$ und $a \neq 1$. Die Funktion $\log_a$ ist differenzierbar mit*

$$\log_a'(x) = \frac{1}{x\log(a)} \qquad \forall x > 0.$$

Insbesondere ist $\log'(x) = 1/x$ für $x > 0$.

Beweis. Wir wissen schon: Die Funktion $\exp_a$ ist streng monoton (steigend für $a > 1$, fallend für $a < 1$), sowie differenzierbar (insbesondere stetig) mit $\exp_a'(y) = \exp_a(y)\log(a) \neq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$.
Nach Satz VI.1.17 ist also auch $\log_a = \exp_a^{-1}$ an jeder Stelle $x > 0$ differenzierbar mit

$$\log_a'(x) = \frac{1}{\exp_a'(\log_a(x))} = \frac{1}{\exp_a(\log_a(x))\log(a)} = \frac{1}{x\log(a)}.$$

□

Damit erhält man nun auch die Ableitung von x^r für beliebige reelle Exponenten r.

Korollar VI.1.19. *Sei $r \in \mathbb{R}$. Sei $f_r(x) := x^r$ für $x > 0$. Dann ist f_r differenzierbar mit $f_r'(x) = rx^{r-1}$ für alle $x > 0$.*

Beweis. Es ist $f_r(x) = e^{r\log(x)}$ für alle $x > 0$. Mit Hilfe der schon bekannten Ableitungen von exp und log folgt also mit der Kettenregel: $f_r'(x) = e^{r\log(x)}(r/x) = rx^r/x = rx^{r-1}$ für alle $x > 0$. □

Für $r = 1/n$ folgt aus diesem Korollar insbesondere, dass auch die n-te Wurzelfunktion $f_{1/n}$ an jeder Stelle $x > 0$ differenzierbar ist mit der Ableitung $f'_{1/n}(x) = 1/(nx^{(n-1)/n})$. Insbesondere gilt für die Ableitung der Quadratwurzel: $f'_{1/2}(x) = 1/(2\sqrt{x})$ für $x > 0$.

An der Stelle 0 ist die n-te Wurzelfunktion allerdings nicht differenzierbar (falls $n \geq 2$), denn für $x \to 0^+$ gilt

$$\frac{\sqrt[n]{x} - 0}{x - 0} = \frac{1}{x^{1-1/n}} \to \infty,$$

da $1 - 1/n > 0$.

Zum Ende dieses Abschnitts führen wir noch höhere Ableitungen ein: Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so kann man sich fragen, ob die Ableitungsfunktion $f' : D \to \mathbb{R}$ selbst wieder differenzierbar ist. Wenn dem so ist, so bezeichnet man die Ableitung von f' als die zweite Ableitung von f und schreibt kurz f'' anstelle von $(f')'$.
Beispiel: Sei $f(x) := x^2 \sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Die erste Ableitung berechnet sich nach der Produktregel zu

$$f'(x) = 2x \sin(x) + x^2 \cos(x)$$

und die zweite Ableitung zu

$$f''(x) = 2\sin(x) + 2x\cos(x) + 2x\cos(x) - x^2 \sin(x) = (2 - x^2)\sin(x) + 4x\cos(x)$$

für $x \in \mathbb{R}$.
Analog ist die dritte Ableitung f''' definiert als die Ableitung von f'', falls diese existiert. Entsprechend kann man auch für jedes $n \in \mathbb{N}$ Ableitungen n-ter Ordnung definieren, wobei man aber anstelle der Schreibweise mit den Strichen ab $n \geq 4$ $f^{(n)}$ für die n-te Ableitung schreibt.

Eine Funktion f, bei der alle Ableitungen bis einschließlich zur n-ten Ordnung existieren, heißt *n-mal differenzierbar*. Falls $f^{(n)}$ zusätzlich stetig ist, so heißt f *n-mal stetig differenzierbar*.

Dass Ableitungsfunktionen in der Tat nicht stetig sein müssen, zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel VI.1.20. Wir definieren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Dann ist f differenzierbar mit

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

An der Stelle 0 ist die Ableitungsfunktion f' unstetig.

Beweis. Aus den bisherigen Ableitungsregeln folgt leicht

$$f'(x) = 2x\sin(1/x) + x^2\cos(1/x)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$$

für $x \neq 0$.
Weiter gilt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wegen $|\sin(1/x)| \leq 1$:

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x}\right| = |x\sin(1/x)| \leq |x| \to 0,$$

also ist $f'(0) = 0$.
Um zu zeigen, dass f' bei 0 unstetig ist, setzen wir $x_n := 1/(2n\pi)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $x_n \to 0$. Wäre f' bei 0 stetig, so müsste also $f'(x_n) \to 0$ gelten. Wegen $|2x_n \sin(1/x_n)| \leq 2|x_n| \to 0$ würde daraus auch $\cos(1/x_n) \to 0$ folgen. Es ist aber $\cos(1/x_n) = \cos(2n\pi) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also kann f' bei 0 nicht stetig sein. $\square$

VI.2 Sätze über differenzierbare Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir die wichtigsten Sätze über differenzierbare Funktionen kennenlernen. Eine der wesentlichsten Anwendungen der Differentialrechnung ist die Behandlung von Optimierungsproblemen, d. h. man will eine gegebene Funktion maximieren oder minimieren. Dazu zunächst folgende Definition.

Definition VI.2.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sowie $x_0 \in D$.

(i) f hat ein *lokales Maximum* an der Stelle x_0, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap D$ gilt.

(ii) f hat ein *lokales Minimum* an der Stelle x_0, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap D$ gilt.

Gilt die jeweilige Ungleichung sogar für alle $x \in D$, so spricht man von einem *globalen Maximum/Minimum* von f. Die Sprechweise "f hat bei x_0 ein *lokales Extremum*" bedeutet, dass f dort ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum besitzt (analog im globalen Fall).

Bei einem lokalen Maximum/Minimum ist $f(x_0)$ also der größte/kleinste Funktionswert von f in einer gewissen (unter Umständen nur sehr kleinen) Umgebung von x_0.
Zum Beispiel hat die Funktion f mit $f(x) = x^2$ für $x \in \mathbb{R}$ bei 0 ein (sogar globales) Minimum.
Der folgende Satz liefert eine wichtige notwendige Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extremums einer differenzierbaren Funktion.

Satz VI.2.2. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei x_0 ein innerer Punkt (d. h. kein Randpunkt) von I. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine an der Stelle x_0 differenzierbare Funktion. Falls f an der Stelle x_0 ein lokales Extremum besitzt, so ist $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. Der Bestimmtheit halber nehmen wir an, dass f bei x_0 ein lokales Maximum besitzt (der andere Fall wird analog behandelt). Es existiert also ein $\varepsilon > 0$ mit $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap I$. Da x_0 ein innerer Punkt von I ist, kann man (indem man ε ggf. noch etwas weiter verkleinert) auch $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq I$ annehmen.
Es folgt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \qquad \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \tag{VI.4}$$

und

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \qquad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0). \tag{VI.5}$$

Aus (VI.4) folgt $f'(x_0) \leq 0$ und aus (VI.5) folgt $f'(x_0) \geq 0$, also ist $f'(x_0) = 0$. □

Die obige Bedingung ist allerdings nicht hinreichend, ist z. B. $f(x) = x^3$ für $x \in \mathbb{R}$, so gilt $f'(0) = 0$, aber f hat an der Stelle 0 weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum. Stellen an denen die erste Ableitung verschwindet, aber kein lokales Extremum vorliegt nennt man auch *Sattelpunkte* der Funktion.

Eine hinreichende Bedingung für lokale Extrema formulieren wir etwas später mit Hilfe der zweiten Ableitung (siehe Satz VI.2.7). Zunächst beweisen wir den *Satz von Rolle.*

Satz VI.2.3 (Satz von Rolle[3])**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und an allen Stellen aus (a, b) differenzierbar. Es gelte $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Beweis. Da die Funktion f stetig auf $[a, b]$ ist, existieren nach Satz V.2.8 $m := \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$ und $M := \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Klar ist $m \leq M$. Im Falle $m = M$ ist f konstant auf $[a, b]$ und folglich $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$.
Sei nun $m < M$. Seien $x_0, y_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = m$ und $f(y_0) = M$. Wegen $f(a) = f(b)$ folgt $x_0 \in (a, b)$ oder $y_0 \in (a, b)$. Aus Satz VI.2.2 folgt daher $f'(x_0) = 0$ oder $f'(y_0) = 0$, also kann man $\xi = x_0$ oder $\xi = y_0$ wählen. □

Mit Hilfe des Satzes von Rolle beweisen wir nun den zentralen *Mittelwertsatz der Differentialrechnung.*

[3]Michel Rolle (1652–1719) war ein französischer Mathematiker, schwerpunktmäßig Algebraiker, der die Analysis sogar ablehnte. Dennoch geht der obige Satz im wesentlichen auf ihn zurück, obwohl er die Differentialrechnung nicht explizit verwendete.

Satz VI.2.4 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die an allen Punkten aus (a, b) differenzierbar ist. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Anschaulich gesprochen bedeutet die Aussage dieses Satzes, dass es zwischen a und b eine Stelle ξ gibt, so dass die Tangente an den Graphen von f an der Stelle ξ parallel zur Sekante an den Graphen von f durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ verläuft.

Beweis. Wir definieren eine Hilfsfunktion $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \qquad \forall x \in [a, b].$$

Da f auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar ist, trifft dasselbe auch auf h zu. Ferner ist $h(a) = f(a) = h(b)$. Nach dem Satz von Rolle existiert also ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

wie behauptet. □

Eine wichtige Konsequenz aus dem Mittelwertsatz ist das folgende Korollar.

Korollar VI.2.5. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$. Dann ist f konstant.*

Beweis. Seien $a, b \in I$ mit $a < b$ beliebig. Wir wollen $f(a) = f(b)$ zeigen. Aus dem Mittelwertsatz folgt: Es existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) = 0.$$

Es folgt $f(a) = f(b)$. Also ist f konstant. □

Die Voraussetzung, dass der Definitionsbereich von f ein Intervall ist, ist wesentlich für die obige Schlussfolgerung. Zum Beispiel ist die Signum-Funktion sign auf ihrem Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar mit $\operatorname{sign}'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, aber sie ist nicht konstant.

Als Nächstes wollen wir den Zusammenhang zwischen dem Monotonieverhalten einer Funktion und dem Vorzeichen ihrer Ableitung herstellen.

Satz VI.2.6. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar.*

(a) *Ist $f'(x) \geq 0$ (bzw. > 0 bzw. ≤ 0 bzw. < 0) für alle $x \in I$, so ist f monoton steigend (bzw. streng monoton steigend bzw. monoton fallend bzw. streng monoton fallend).*

(b) *Ist f monoton steigend bzw. monoton fallend, so ist $f'(x) \geq 0$ bzw. $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$.*

Beweis. (a) Sei $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$. Seien $a, b \in I$ mit $a < b$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \geq 0.$$

Wegen $b - a > 0$ folgt daraus $f(b) \geq f(a)$. Also ist f monoton steigend.
Die anderen drei Fälle werden analog bewiesen.
(b) Sei f monoton steigend. Sei $x_0 \in I$ beliebig. Dann gilt für alle $x \in I \setminus \{x_0\}$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

(denn ist $x > x_0$, so sind Zähler und Nenner beide positiv, anderenfalls sind Zähler und Nenner beide negativ, der Quotient ist also in jedem Fall ≥ 0).
Damit folgt aber

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Den Fall einer monoton fallenden Funktion behandelt man analog. □

Die zu (b) analoge Aussage für streng monotone Funktionen gilt im Allgemeinen nicht. So ist z. B. die durch $f(x) = x^3$ definierte Funktion auf $\mathbb{R}$ streng monoton steigend, aber es ist $f'(0) = 0$.

Nun können wir auch das versprochene hinreichende Kriterium für lokale Extrema beweisen.

Satz VI.2.7. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei x_0 ein innerer Punkt von I. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion mit $f'(x_0) = 0$. Dann gilt:*
1) Ist $f''(x_0) > 0$, so hat f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum.
2) Ist $f''(x_0) < 0$, so hat f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum.

Beweis. 1) Sei $f''(x_0) > 0$. Es ist

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}$$

(Letzteres wegen $f'(x_0) = 0$). Sei $\varepsilon := f''(x_0)/2 > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\left| \frac{f'(x)}{x - x_0} - f''(x_0) \right| \leq \varepsilon \quad \forall x \in (I \setminus \{x_0\}) \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta].$$

Da x_0 ein innerer Punkt von I ist, kann man ohne Einschränkung $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq I$ annehmen. Es folgt

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} \geq f''(x_0) - \varepsilon = \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}.$$

Daher ist

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta] \quad \text{und} \quad f'(x) < 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0).$$

Nach Satz VI.2.6 ist f also (sogar streng) monoton steigend auf $(x_0, x_0 + \delta]$ und (streng) monoton fallend auf $[x_0 - \delta, x_0)$. Daraus folgt $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, also hat f bei x_0 ein lokales Minimum.
2) wird einfach durch Betrachtung von $-f$ auf 1) zurückgeführt. □

Beispiel: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Wir wollen f auf lokale Extrema untersuchen und berechnen dazu zuerst die erste Ableitung von f mit Hilfe der Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 + 2)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Offensichtlich ist 0 die einzige Nullstelle von f' und damit nach Satz VI.2.2 die einzige mögliche Extremstelle. Als Nächstes berechnen wir noch die zweite Ableitung:

$$f''(x) = \frac{-2(x^2 + 1)^2 + 2x2(x^2 + 1)2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-2(x^2 + 1) + 8x^2}{(x^2 + 1)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3}.$$

Damit folgt $f''(0) = -2 < 0$, also hat f an der Stelle 0 ein lokales Maximum. Der Wert dieses Maximums ist $f(0) = 2$.

Die obige Bedingung an die zweite Ableitung ist allerdings nicht notwendig, so ist z. B. für die durch $f(x) = x^4$ auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f''(0) = 0$, trotzdem hat f bei 0 ein (sogar globales) Minimum.

Zum Schluss dieses Abschnitts beweisen wir noch eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes, die wir im nächsten Abschnitt benötigen werden.

Satz VI.2.8 (Erweiterter Mittelwertsatz der Differentialrechnung)**.** *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, die auf (a, b) sogar differenzierbar sind. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

Für $g(x) = x$ ist das gerade die Aussage des gewöhnlichen Mittelwertsatzes.

Beweis. Ist $g(a) = g(b)$, so existiert nach dem Satz von Rolle ein $\xi \in (a, b)$ mit $g'(\xi) = 0$. Dieses ξ leistet dann das Gewünschte.

Sei nun $g(a) \neq g(b)$. Wir definieren wieder eine Hilfsfunktion $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Dann ist h stetig und auf (a, b) differenzierbar mit

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x) \quad \text{für alle } x \in (a, b).$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
h(a) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(a) = \frac{f(a)(g(b) - g(a)) - f(b)g(a) + f(a)g(a)}{g(b) - g(a)} \\
&= \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(b)(g(b) - g(a)) - f(b)g(b) + f(a)g(b)}{g(b) - g(a)} \\
&= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(b) = h(b).
\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rolle existiert also ein $\xi \in (a, b)$ mit $h'(\xi) = 0$. Einsetzen in die obige Formel für h' und Umstellen liefert die Behauptung. □

VI.3 Taylor-Approximation

In diesem Abschnitt geht es darum, eine n-mal differenzierbare Funktion in der Umgebung einer Stelle a durch ein Polynom vom Grad $\leq n$ zu approximieren. Für eine differenzierbare Funktion f kann man die Tangente an den Graphen von f an der Stelle a, also die durch $t(x) := f'(a)(x - a) + f(a)$ gegebene Funktion, als eine lineare Approximation verwenden. Nach Definition gilt dann

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - t(x)|}{|x - a|} = \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| = 0,$$

d. h. der Fehler der Approximation, $|f(x) - t(x)|$, geht für $x \to a$ schneller gegen 0 als $|x - a|$.

Für Approximationen höherer Ordnung verwendet man die sogenannten Taylor-Polynome, die wie folgt erklärt sind.

Definition VI.3.1. Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion. Das n-te *Taylor-Polynom*[4] von f mit *Entwicklungspunkt* a ist definiert durch

$$T^f_{n,a}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Dabei verwendet man die Konvention $f^{(0)} := f$.

[4] Benannt nach dem britischen Mathematiker Brook Taylor (1685–1731).

Es ist also

$$T_{n,a}^f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Insbesondere ist $T_{n,a}^f(a) = f(a)$, d. h. zumindest an der Stelle a stimmen $T_{n,a}^f$ und f exakt überein. $T_{1,a}^f$ ist gerade die oben definierte Tangente.

Beispiel: Sei $f(x) := \exp(x) = e^x$ für $x \in \mathbb{R}$. Da die Ableitung der Exponentialfunktion wieder die Exponentialfunktion ist, folgt $f^{(n)}(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere ist $f^{(n)}(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und daher gilt

$$T_{n,0}^f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Das n-te Taylor-Polynom von exp mit Entwicklungspunkt 0 ist also gerade die n-te Partialsumme der die Exponentialfunktion definierenden Reihe. Analoges kann man sich auch für die Sinus- und Kosinus-Funktion überlegen (Übung).

Entscheidend ist nun der folgende Satz.

Satz VI.3.2 (Taylor-Formel mit Restglied in der Form von Lagrange[5])**.** *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a \in I$. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion (wobei $n \in \mathbb{N}_0$). Wir definieren das Restglied der Taylor-Approximation durch*

$$R_n(x) := f(x) - T_{n,a}^f(x) \quad \textit{für } x \in I.$$

Dann gilt: Für alle $x \in I \setminus \{a\}$ existiert ein ξ zwischen x und a mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Es ist wichtig zu beachten, dass das ξ im obigen Satz von der Stelle x abhängt, R ist also kein Polynom (es sei denn f selbst ist ein Polynom).

Beweis. Sei $x \in I \setminus \{a\}$. Der Bestimmtheit halber nehmen wir $x > a$ an, der andere Fall wird völlig analog bewiesen. Wir definieren nun auf dem Intervall $[a, x]$ zwei Hilfsfunktionen φ und ψ wie folgt:

$$\varphi(y) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k = T_{n,y}^f(x), \quad \psi(y) := (x-y)^{n+1} \text{ für alle } y \in [a, x].$$

[5] Joseph-Louis de Lagrange (1736–1813): italienischer Mathematiker und Astronom, lieferte Beiträge u. a. zur Analysis, Variationsrechnung, Zahlentheorie und zur Behandlung des Dreikörperproblems der Himmelsmechanik. Auch der Lagrange-Formalismus zur Formulierung der klassischen Mechanik wurde von ihm entwickelt.

Dann sind φ und ψ auf ganz $[a, x]$ differenzierbar und es gilt:

$$\psi'(y) = -(n+1)(x-y)^n$$

und

$$\begin{aligned}\varphi'(y) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(y)}{k!}(x-y)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k!} k(x-y)^{k-1}(-1) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(y)}{(k-1)!}(x-y)^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{(k-1)!}(x-y)^{k-1} = \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n.\end{aligned}$$

Nach dem erweiterten Mittelwertsatz (Satz VI.2.8) existiert ein $\xi \in (a, x)$ mit

$$\varphi'(\xi)(\psi(x) - \psi(a)) = \psi'(\xi)(\varphi(x) - \varphi(a)).$$

Es folgt

$$-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a)^{n+1} = -(n+1)(x-\xi)^n(f(x) - T^f_{n,a}(x)),$$

was sich zu

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

vereinfachen lässt. □

Beispiel: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für $f = \exp$ hatten wir oben schon das n-te Taylor-Polynom bzgl. des Entwicklungspunktes 0 ausgerechnet. Mit dem obigen Satz ergibt sich nun: Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $|\xi| \leq |x|$ und

$$R_n(x) = \exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Es folgt

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}.$$

Insbesondere ist für $x \in [0, 1]$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \leq \frac{e}{(n+1)!}.$$

Eine natürliche Frage ist nun, ob für eine beliebig häufig differenzierbare Funktion auch $\lim_{n\to\infty} T^f_{n,a}(x) = f(x)$ für alle x aus dem Definitionsbereich von f gilt. Für die Exponentialfunktion ist das wie wir wissen der Fall, ebenso für Sinus- und Kosinus-Funktion. Es gibt aber auch Funktionen bei denen es nicht klappt. Mit dieser Thematik werden wir uns in Kapitel VIII (Potenzreihen, Taylorreihen) näher beschäftigen.

VII Integralrechnung

Das grundlegende Problem der Integralrechnung ist die Berechnung des Flächeninhalts, der von einem Funktionsgraphen und der horizontalen Koordinatenachse eingeschlossen wird. Die Grundidee besteht darin, diese Fläche durch Rechteckstreifen zu approximieren, deren Flächeninhalt sich leicht berechnen lässt. Diesen Gedanken sollten Sie im Folgenden stets im Hinterkopf behalten, um nicht den Wald vor lauter Bäumen aus den Augen zu verlieren, denn zur Präzisierung des Integralbegriffs sind leider einige technische Hürden zu überwinden.

VII.1 Definition und Eigenschaften des Integrals

Wir beginnen mit der Einführung des Begriffs der Treppenfunktion.

Definition VII.1.1. Sei $[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall. Eine *Unterteilung* von $[a, b]$ ist eine endliche Folge $X = (x_i)_{i=0}^n$ von Punkten mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.

Eine Funktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, falls es eine Unterteilung $X = (x_i)_{i=0}^n$ von $[a, b]$ gibt, so dass φ auf jedem offenen Teilintervall (x_{i-1}, x_i) konstant ist $(i = 1, \ldots, n)$.

Die Menge aller Treppenfunktionen auf $[a, b]$ bezeichnen wir mit $T[a, b]$.

Der Graph einer Treppenfunktion besteht also aus endlich vielen "Stufen". Man beachte allerdings, dass über die Randwerte $\varphi(x_{i-1})$ und $\varphi(x_i)$ nichts vorausgesetzt ist. Diese können mit dem Wert von φ auf (x_{i-1}, x_i) übereinstimmen, müssen es aber nicht. Natürlich ist insbesondere jede konstante Funktion auf $[a, b]$ auch eine Treppenfunktion (mit der trivialen Unterteilung $x_0 = a$, $x_1 = b$).

Wir wollen nun zuerst eine Art vorläufigen Integralbegriff für Treppenfunktionen definieren.

Definition VII.1.2. Sei $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. Sei $X = (x_i)_{i=0}^n$ eine Unterteilung von $[a, b]$, so dass φ auf jedem offenen Teilintervall (x_{i-1}, x_i) konstant ist mit Wert c_i. Dann setzen wir

$$I(\varphi) := \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_{i-1}).$$

$I(\varphi)$ ist also eine Summe von Flächeninhalten von Rechtecken mit den Seitenlängen $x_i - x_{i-i}$ (der Länge des i-ten Teilintervalls) und c_i (dem Wert von φ auf dem i-ten Teilintervall). Es ist allerdings zu beachten, dass diese Flächeninhalte vorzeichenbehaftet sind: Ist c_i negativ, so geht auch der entsprechende Flächeninhalt mit negativem Vorzeichen in die Summe ein.

Weiterhin gibt es mit der obigen Definition noch ein kleines Problem: $I(\varphi)$ hängt, zumindest auf den ersten Blick, nicht nur von φ sondern auch von der speziell gewählten Unterteilung X ab.[1] Wir schreiben daher zunächst noch $I_X(\varphi)$ und wir haben zu zeigen, dass tatsächlich $I_X(\varphi) = I_Y(\varphi)$ für je zwei Unterteilungen X und Y gilt, auf deren offenen Teilintervallen φ jeweils konstant ist. Das geschieht in mehreren Schritten.

1) Wir nehmen zur Unterteilung $X = (x_i)_{i=0}^n$ noch einen weiteren Unterteilungspunkt z hinzu. Dieser liege im k-ten offenen Teilintervall von X, also $x_{k-1} < z < x_k$. Die auf diese Weise entstandene neue Unterteilung nennen wir X_z. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
I(\varphi) &= \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} c_i(x_i - x_{i-1}) + c_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} c_i(x_i - x_{i-1}) + c_k(z - x_{k-1}) + c_k(x_k - z) + \sum_{i=k+1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) = I_{X_z}(\varphi),
\end{aligned}
$$

denn sowohl auf (x_{k-1}, z) als auch auf (z, x_k) hat φ den Wert c_k.

2) Aus 1) folgt durch sukzessive Hinzunahme weiterer Unterteilungspunkte, dass $I_X(\varphi) = I_{X'}(\varphi)$ für alle Unterteilungen X' gilt, welche die Unterteilungspunkte von X beinhalten (die sogenannten *Verfeinerungen* von X).

3) Seien nun X und Y zwei Unterteilungen von $[a, b]$, auf deren offenen Teilintervallen φ konstant ist. Sei Z diejenige Unterteilung von $[a, b]$, die entsteht indem man alle Unterteilungspunkte von X und alle Unterteilungspunkte von Y zusammenfasst und in wachsender Reihenfolge neu ordnet. Dann ist Z eine Verfeinerung sowohl von X als auch von Y und daher folgt aus 2): $I_X(\varphi) = I_Z(\varphi) = I_Y(\varphi)$.

Also ist $I_X(\varphi)$ tatsächlich unabhängig von der speziellen Wahl von X und wir können nur $I(\varphi)$ schreiben.

Beispiel: Sei $\varphi : [0, 2] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$
\varphi(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } 0 \le x < 1 \\ 2 & \text{für } 1 \le x \le 2. \end{cases}
$$

[1] Zu einer gegebenen Treppenfunktion φ gibt es nicht nur eine sondern viele Unterteilungen, auf deren offenen Teilintervallen φ konstant ist. Ist z. B. φ konstant auf ganz $[a, b]$, so kann man jede beliebige Unterteilung wählen.

Dann ist $I(\varphi) = (-1)(1-0) + 2(2-1) = 1$.

Als Nächstes stellen wir einige Eigenschaften der Abbildung $I : T[a,b] \to \mathbb{R}$ zusammen. Zuvor noch eine Schreibweise: Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, so schreiben wir kurz $f \leq g$, falls $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ gilt.

Lemma VII.1.3. *Seien $\varphi, \psi \in T[a,b]$ und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt auch $\varphi+\psi \in T[a,b]$ und $c\varphi \in T[a,b]$ mit $I(\varphi+\psi) = I(\varphi)+I(\psi)$ und $I(c\varphi) = cI(\varphi)$.*

Gilt zudem $\varphi \leq \psi$, so ist auch $I(\varphi) \leq I(\psi)$.

Beweis. Die Aussage für $c\varphi$ ergibt sich leicht direkt aus der Definition. Für $\varphi + \psi$ muss man beachten, dass man eine Unterteilung $X = (x_i)_{i=0}^n$ von $[a,b]$ finden kann, so dass sowohl φ als auch ψ auf (x_{i-1}, x_i) konstant sind (etwa mit Wert c_i bzw. d_i) für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ (vgl. dazu die obige Argumentation). Dann ist aber auch $\varphi + \psi$ konstant auf (x_{i-1}, x_i) mit Wert $c_i + d_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, also ist auch $\varphi + \psi$ eine Treppenfunktion und es gilt

$$\begin{aligned} I(\varphi + \psi) &= \sum_{i=1}^n (c_i + d_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n d_i(x_i - x_{i-1}) = I(\varphi) + I(\psi). \end{aligned}$$

Ist zudem $\varphi \leq \psi$, so folgt $c_i \leq d_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und daher

$$I(\varphi) = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n d_i(x_i - x_{i-1}) = I(\psi),$$

denn $x_i - x_{i-1} > 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. □

Um die Flächenberechnung von Treppenfunktionen auf andere Funktionen auszudehnen, definieren wir nun zunächst das Ober- und das Unterintegral einer beschränkten Funktion. Die Idee besteht darin, den Flächeninhalt unter dem Funktionsgraphen von unten bzw. von oben durch Flächeninhalte von Graphen von Treppenfunktionen zu approximieren.

Definition VII.1.4. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Wir setzen

$$\begin{aligned} U(f) &:= \sup\{I(\varphi) : \varphi \in T[a,b], \varphi \leq f\}, \\ O(f) &:= \inf\{I(\psi) : \psi \in T[a,b], f \leq \psi\}. \end{aligned}$$

$U(f)$ heißt das *Unterintegral* und $O(f)$ das *Oberintegral* von f.

Bemerkung: Da f als beschränkt vorausgesetzt ist, existiert ein $M \geq 0$ mit $-M \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$. Dann sind die konstanten Funktionen mit Wert $-M$ bzw. M auf $[a, b]$ Treppenfunktionen mit $-M \leq f \leq M$, also sind die obigen Mengen nicht leer. Ferner gilt für alle Treppenfunktionen φ, ψ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ auch $\varphi \leq M$ und $\psi \geq -M$, also (siehe Lemma VII.1.3): $I(\varphi) \leq I(M) = M(b-a)$ und $I(\psi) \geq -I(M) = -M(b-a)$. Daher sind die obigen Mengen auch nach oben bzw. unten beschränkt und folglich existiert das Supremum bzw. das Infimum.

Weiter gilt $U(f) \leq O(f)$ (denn sind $\varphi, \psi \in T[a, b]$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$, so folgt $\varphi \leq \psi$ und daher (Lemma VII.1.3) $I(\varphi) \leq I(\psi)$).

Nun kommen wir zur Definition der Integrierbarkeit.

Definition VII.1.5. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. f heißt *Riemann-integrierbar*[2] oder kurz *integrierbar*[3], falls $U(f) = O(f)$ gilt. In diesem Fall heißt die Zahl

$$\int_a^b f := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := U(f) = O(f)$$

das *Riemann-Integral* oder kurz das *Integral* von f über $[a, b]$.

Ein Wort zur Notation: Aus theoretischer Sicht ist die Schreibweise $\int_a^b f$ vollkommen ausreichend, die Schreibweise $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist aber historisch gewachsen und bis heute weit verbreitet.[4] Man beachte allerdings, dass nur das Gesamtsymbol $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ Sinn macht. *Es gibt kein einzelnes* $\mathrm{d}x$.

Als Erstes wollen wir nun festhalten, dass Treppenfunktionen φ tatsächlich im Sinne der obigen Definition integrierbar sind und ihr Integral mit dem zuvor definierten $I(\varphi)$ übereinstimmt.

Lemma VII.1.6. *Sei $\varphi \in T[a, b]$. Dann ist φ integrierbar mit $\int_a^b \varphi = I(\varphi)$.*

Beweis. Wir wissen schon $U(\varphi) \leq O(\varphi)$. Da aber φ selbst eine Treppenfunktion ist, die sowohl ober- als auch unterhalb von φ liegt, gilt definitionsgemäß

[2] Nach Bernhard Riemann (1826–1866): deutscher Mathematiker, lieferte bedeutende Beiträge zur Analysis, Differentialgeometrie, analytischen Zahlentheorie und auch zur mathematischen Physik. Unter anderem ist auch die berühmte Riemannsche Vermutung nach ihm benannt. Der hier vorgestellte Zugang zum Begriff des Integrals ist allerdings nicht Riemanns ursprünglicher Ansatz (dieser verwendete sogenannte Riemannsche Summen (siehe Satz VII.1.10 für einen Spezialfall einer solchen)). Die obige Integraldefinition stammt eigentlich vom französischer Mathematiker Jean Gaston Darboux (1842–1917), stellt sich aber als äquivalent zur Riemannschen Definition heraus, wobei wir auf die Details aus Zeitgründen leider nicht eingehen können.

[3] Auf den Verweis auf Riemann kann man streng genommen nicht verzichten, denn es gibt auch andere, nicht äquivalente, Integrationsbegriffe, von denen Ihnen allerdings in dieser Vorlesung (vielleicht sogar in Ihrem gesamten Studium) keiner begegnen wird.

[4] Sie ist auch in der Tat nötig, falls die Funktionswerte durch eine konkrete Formel angegeben sind, die neben der Variable x noch einen Parameter, etwa t, enthalten. Dann dient das $\mathrm{d}x$ am Ende des Integrals dazu anzuzeigen, dass bzgl. x und nicht bzgl. t integriert werden soll.

auch $I(\varphi) \leq U(\varphi)$ und $O(\varphi) \leq I(\varphi)$. Insgesamt folgt $U(\varphi) = I(\varphi) = O(\varphi)$. □

Unser nächstes Ziel ist es zu zeigen, dass jede stetige Funktion integrierbar ist. Dazu ist allerdings etwas Vorbereitung nötig. Wir führen zunächst den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit ein.

Definition VII.1.7. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig*, falls folgendes gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \in D \, (|x - y| \leq \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

Man vergleiche diese Definition mit der ε-δ-Charakterisierung der Stetigkeit: f ist stetig, falls

$$\forall x \in D \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall y \in D \, (|x - y| \leq \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$$

gilt. Hier darf das δ nicht nur von ε sondern auch von der Stelle x abhängen. Gleichmäßige Stetigkeit dagegen bedeutet, dass δ unabhängig von x gewählt werden kann.

Natürlich ist jede gleichmäßig stetige Funktion auch stetig, die Umkehrung ist jedoch im Allgemeinen falsch, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel VII.1.8. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^2$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

Beweis. Natürlich wissen wir schon, dass f stetig ist. Wäre f sogar gleichmäßig stetig, so gäbe es ein $\delta > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: $|x^2 - y^2| \leq 1$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| \leq \delta$.
Insbesondere wäre $1 \geq |(x + \delta)^2 - x^2| = 2x\delta + \delta^2$ für alle $x \geq 0$.
Es gilt aber $2x\delta + \delta^2 \to \infty$ für $x \to \infty$, was ein Widerspruch ist. Also kann f nicht gleichmäßig stetig sein. □

Ist der Definitionsbereich der Funktion allerdings von der Form $[a, b]$, so impliziert Stetigkeit bereits gleichmäßige Stetigkeit, wie wir nun zeigen werden.

Satz VII.1.9. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f sogar gleichmäßig stetig.*

Beweis. Angenommen f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass gilt:

$$\forall \delta > 0 \, \exists x, y \in [a, b] \, (|x - y| \leq \delta \;\wedge\; |f(x) - f(y)| > \varepsilon).$$

Insbesondere existieren Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[a, b]$ mit $|x_n - y_n| \leq 1/n$ und $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt $x_n - y_n \to 0$.
Da die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ganz in $[a, b]$ liegt, ist sie beschränkt und folglich existieren nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ und ein $x_0 \in [a, b]$ mit $x_{n_k} \to x_0$. Wegen $x_n - y_n \to 0$ folgt auch $y_{n_k} \to x_0$.

Da f stetig ist, folgt daraus $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ und $f(y_{n_k}) \to f(x_0)$, also $f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \to 0$. Es ist aber $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| > \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Mit diesem Widerspruch ist der Beweis beendet. $\square$

Nun können wir auch beweisen, dass stetige Funktionen integrierbar sind.

Satz VII.1.10. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar. Setzt man ferner*

$$S_n(f) := \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + i(b-a)/n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(das ist ein Spezialfall einer sogenannten Riemannschen Summe), so gilt

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f) = \int_a^b f.$$

Beweis. Beachte zunächst, dass f als stetige Funktion auf $[a,b]$ beschränkt ist.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i \in \{0, \dots, n\}$ sei $x_{i,n} := a + i(b-a)/n$. Dann ist $X_n := (x_{i,n})_{i=0}^n$ eine Unterteilung von $[a,b]$ (eine sogenannte äquidistante Unterteilung, denn die Längen der Teilintervalle sind jeweils $x_{i,n} - x_{i-1,n} = (b-a)/n$). Es gilt

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n}).$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei $\varepsilon' := \varepsilon/(b-a)$. Da f nach Satz VII.1.9 sogar gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$x, y \in [a,b], |x-y| \le \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| \le \varepsilon'.$$

Wähle nun ein $N \in \mathbb{N}$ mit $(b-a)/N \le \delta$.

Behauptung: $S_n(f) - \varepsilon \le U(f) \le O(f) \le S_n(f) + \varepsilon$ für alle $n \ge N$.

Haben wir diese Behauptung gezeigt, so folgt $U(f) = \lim_{n\to\infty} S_n(f) = O(f)$ und der Beweis ist abgeschlossen.

Sei also $n \ge N$ beliebig. Wir setzen $m_i := \min\{f(x) : x \in [x_{i-1,n}, x_{i,n}]\}$ und $M_i := \max\{f(x) : x \in [x_{i-1,n}, x_{i,n}]\}$ für $i = 1, \dots, n$ (diese Minima und Maxima existieren, weil f stetig ist). Nun sei

$$\varphi(x) := \begin{cases} m_i \text{ für } x \in [x_{i-1,n}, x_{i,n}),\ i = 1, \dots, n \\ f(b) \text{ für } x = b \end{cases}$$

und

$$\psi(x) := \begin{cases} M_i \text{ für } x \in [x_{i-1,n}, x_{i,n}),\ i = 1, \dots, n \\ f(b) \text{ für } x = b. \end{cases}$$

Dann sind φ und ψ Treppenfunktionen mit $\varphi \leq f \leq \psi$. Es folgt $I(\varphi) \leq U(f) \leq O(f) \leq I(\psi)$.
Nun wählen wir $y_i, z_i \in [x_{i-1,n}, x_{i,n}]$ mit $f(y_i) = m_i$ und $f(z_i) = M_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Die Länge von $[x_{i-1,n}, x_{i,n}]$ ist $(b-a)/n \leq (b-a)/N \leq \delta$, also gilt $|y_i - x_{i,n}| \leq \delta$ und $|z_i - x_{i,n}| \leq \delta$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Nach Wahl von δ gilt daher $|m_i - f(x_{i,n})| \leq \varepsilon'$ und $|M_i - f(x_{i,n})| \leq \varepsilon'$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Es folgt

$$\begin{aligned}
I(\psi) &= \sum_{i=1}^{n} M_i (x_{i,n} - x_{i-1,n}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} M_i \\
&\leq \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} (f(x_{i,n}) + \varepsilon') = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i,n}) + \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon' \\
&= S_n(f) + (b-a)\varepsilon' = S_n(f) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Analog sieht man auch $S_n(f) - \varepsilon \leq I(\varphi)$. Daraus folgt $S_n(f) - \varepsilon \leq U(f) \leq O(f) \leq S_n(f) + \varepsilon$, wie behauptet. □

Dieser Satz gestattet es nun auch, einige einfache Integrale zu berechnen.

Beispiel VII.1.11. Sei $b > 0$. Nach Satz VII.1.10 gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^b x \, \mathrm{d}x &= \lim_{n \to \infty} \frac{b}{n} \sum_{i=1}^{n} i \frac{b}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{b^2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{b^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{b^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{b^2}{2},
\end{aligned}$$

wobei wir die Gaußsche Summenformel benutzt haben.

Durch vollständige Induktion kann man auch die Summenformel

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

beweisen (Übung). Damit ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\int_0^b x^2 \, \mathrm{d}x &= \lim_{n \to \infty} \frac{b}{n} \sum_{i=1}^{n} i^2 \frac{b^2}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{b^3}{6n^3} n(n+1)(2n+1) = \lim_{n \to \infty} \frac{b^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{b^3}{3}.
\end{aligned}$$

Man sieht hier bereits, dass das Berechnen von Integralen mit Hilfe dieser Technik selbst bei einfachen Funktionen schon recht aufwendig ist. Wir werden diesen Ansatz deshalb auch nicht weiter verfolgen, sondern stattdessen im nächsten Abschnitt eine deutlich effizientere Berechnungsmethode kennenlernen. Zunächst stellen wir aber noch einige Eigenschaften des Integrals für stetige Funktionen zusammen.

Satz VII.1.12. *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(i) $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

(ii) $\int_a^b cf = c \int_a^b f$

(iii) $f \leq g \;\Rightarrow\; \int_a^b f \leq \int_a^b g$

(iv) $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

Dabei bezeichnet $|f|$ die Funktion auf $[a, b]$, die jedes $x \in [a, b]$ auf $|f(x)|$ abbildet.

Beweis. Man beachte zunächst, dass mit f und g auch die Funktionen $f + g$, cf und $|f|$ stetig sind, so dass alle auftretenden Integrale existieren.
Mit der Notation von Satz VII.1.10 gilt $S_n(f + g) = S_n(f) + S_n(g)$ und $S_n(cf) = cS_n(f)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wie man leicht sieht. Damit folgen die Behauptungen (i) und (ii) aus Satz VII.1.10 indem man den Grenzwert für $n \to \infty$ bildet.
(iii) Ist $f \leq g$, so ist $S_n(f) \leq S_n(g)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wieder folgt die Behauptung durch Grenzwertbildung für $n \to \infty$.
(iv) Es gilt $f \leq |f|$ und $-f \leq |f|$, also folgt aus (ii) und (iii):

$$\int_a^b f \leq \int_a^b |f| \quad \text{und} \quad -\int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

also

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

□

Die nächste Eigenschaft wird *Intervalladditivität* genannt.

Satz VII.1.13. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei $c \in (a, b)$. Dann gilt*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Beweis. Wir bezeichnen mit $f_1 : [a, c] \to \mathbb{R}$ und $f_2 : [c, b] \to \mathbb{R}$ die Einschränkungen von f auf $[a, c]$ bzw. $[c, b]$, d. h. $f_1(x) := f(x)$ für $x \in [a, c]$ und $f_2(x) := f(x)$ für $x \in [c, b]$. Die Symbole $\int_a^c f$ und $\int_c^b f$ stehen eigentlich für $\int_a^c f_1$ und $\int_c^b f_2$, in der Praxis schreibt man aber meist nur $\int_a^c f$ und $\int_c^b f$. Man beachte, dass f_1 und f_2 wieder stetig sind, so dass die Integrale existieren. Den eigentlichen Beweis teilen wir nun in zwei Schritte auf.

1) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Definition des Unterintegrals existieren Treppenfunktionen $\varphi_1 \in T[a,c]$ und $\varphi_2 \in T[c,b]$ mit $\varphi_1 \leq f_1$ und $\varphi_2 \leq f_2$, so dass

$$U(f_i) - \varepsilon < I(\varphi_i) \quad \forall i = 1,2 \tag{VII.1}$$

gilt. Sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} \varphi_1(x) \text{ für } x \in [a,c] \\ \varphi_2(x) \text{ für } x \in (c,b]. \end{cases}$$

Dann ist $\varphi \in T[a,b]$ mit $I(\varphi) = I(\varphi_1) + I(\varphi_2)$ (warum?). Aus (VII.1) folgt daher $I(\varphi) > U(f_1) + U(f_2) - 2\varepsilon$. Ferner ist $\varphi \leq f$, also gilt $I(\varphi) \leq U(f)$. Somit folgt $U(f) > U(f_1) + U(f_2) - 2\varepsilon$.
Da aber $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt durch Grenzwübergang $\varepsilon \to 0$ auch $U(f) \geq U(f_1) + U(f_2)$.
2) Sei $h \in T[a,b]$ mit $h \leq f$ beliebig. Es bezeichne h_1 bzw. h_2 die Einschränkung von h auf $[a,c]$ bzw. $[c,b]$. Dann sind h_1 und h_2 Treppenfunktionen mit $I(h) = I(h_1) + I(h_2)$ (Beweis?). Außerdem ist $h_1 \leq f_1$ und $h_2 \leq f_2$, also $I(h_1) \leq U(f_1)$ und $I(h_2) \leq U(f_2)$. Es folgt $I(h) \leq U(f_1) + U(f_2)$.
Wegen der Beliebigkeit von h folgt daraus $U(f) \leq U(f_1) + U(f_2)$.
Aus 1) und 2) folgt insgesamt

$$\int_a^b f = U(f) = U(f_1) + U(f_2) = \int_a^c f_1 + \int_c^b f_2.$$

□

Außer stetigen Funktionen und Treppenfunktionen kennen wir bisher keine weiteren Beispiele für integrierbare Funktionen. Für unsere Zwecke ist das auch ausreichend, allerdings wollen wir zumindest erwähnen, dass es auch noch andere integrierbare Funktionen gibt. Eine Verallgemeinerung der Klasse der stetigen Funktionen stellen z. B. die sogenannten stückweise stetigen Funktionen dar.

Definition VII.1.14. Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *stückweise stetig*, falls folgendes gilt:

(i) $\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to b} f(x)$ existieren.

(ii) $\lim_{x\to c^+} f(x)$ und $\lim_{x\to c^-} f(x)$ existieren für alle $c \in (a,b)$.

(iii) Die Menge $(a,b)\backslash\{x \in (a,b) : \lim_{x\to c^+} f(x) = f(c) = \lim_{x\to c^-} f(x)\}$ ist endlich.

Ohne Beweis erwähnen wir nun noch den folgenden Satz.

Satz VII.1.15. *Jede stückweise stetige Funktion auf* $[a,b]$ *ist integrierbar. Jede monotone Funktion auf* $[a,b]$ *ist integrierbar.*

Die Sätze VII.1.12 und VII.1.13 gelten übrigens sinngemäß nicht nur für stetige, sondern allgemein für integrierbare Funktionen. Sie sind in diesem Kontext allerdings etwas schwieriger zu beweisen.

Zum Abschluß wollen wir uns noch ein Beispiel für eine beschränkte, aber nicht integrierbare Funktion ansehen.

Beispiel VII.1.16. Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ die Einschränkung der Dirichlet-Funktion auf $[0, 1]$ (siehe Beispiel V.1.17), d. h. $f(x) = \chi(x)$ für $x \in [0, 1]$. Dann ist f beschränkt, aber nicht integrierbar.

Beweis. Zur Erinnerung: Es ist $\chi(x) = 1$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $\chi(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Also ist f natürlich beschränkt.
Sei nun $\varphi \in T[0, 1]$ mit $\varphi \leq f$. Sei $(x_i)_{i=0}^n$ eine Unterteilung von $[0, 1]$, so dass φ auf (x_{i-1}, x_i) konstant ist mit Wert c_i für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Da jedes Intervall (x_{i-1}, x_i) eine irrationale Zahl enthält, folgt aus $\varphi \leq f$ auch $c_i \leq 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Daher ist auch $I(\varphi) = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}) \leq 0$. Es folgt $U(f) \leq 0$. Wegen $0 \leq f$ ist natürlich auch $U(f) \geq 0$, also $U(f) = 0$. Analog zeigt man mit Hilfe der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, dass $O(f) = 1$ gilt. Also ist $U(f) \neq O(f)$, daher ist f nicht integrierbar. $\square$

VII.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

In diesem Abschnitt wollen wir den sogenannten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung kennenlernen, der uns das Berechnen von Integralen stetiger Funktionen stark erleichtern wird. Entscheidend ist der folgende Begriff der Stammfunktion.

Definition VII.2.1. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von f, falls F differenzierbar ist mit $F' = f$.

Ist F eine Stammfunktion von f, so ist natürlich auch $F + C$ eine Stammfunktion von f für alle $C \in \mathbb{R}$. Sind umgekehrt F_1 und F_2 zwei Stammfunktionen von f, so gilt $F_1' - F_2' = 0$, also ist nach Korollar VI.2.5 $F_1 - F_2$ konstant.

Leider gibt es kein allgemeines Rezept zur Bestimmung von Stammfunktionen (in manchen Fällen existiert auch gar keine, siehe Beispiel VII.2.2 weiter unten). Bei einfachen Funktionen kann man eine Stammfunktion durch "scharfes Hinsehen" bestimmen, indem man die bekannten Ableitungsregeln rückwärts anwendet. Hierzu einige Beispiele:
1) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $f(x) := x^n$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist eine Stammfunktion von f gegeben durch $F(x) := x^{n+1}/(n + 1)$.
2) Für $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \leq -2$ und $f(x) := x^k$ für $x > 0$ ist eine Stammfunktion ebenfalls gegeben durch $F(x) := x^{k+1}/(k + 1)$. Dasselbe gilt auch für die

negativen reellen Zahlen als Definitionsbereich.
3) Ist $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ beliebig und $f(x) := x^r$ für $x > 0$, so ist wiederum eine Stammfunktion gegeben durch $F(x) := x^{r+1}/(r+1)$ (im Falle $r > 0$ kann man den Definitionsbereich auch auf $x \geq 0$ erweitern).
4) Sei $f(x) := 1/x$ für $x > 0$. Dann ist der natürliche Logarithmus log eine Stammfunktion von f.
5) Sei $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und sei $f(x) := e^{ax}$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist eine Stammfunktion von f gegeben durch $F(x) := e^{ax}/a$.
6) Sei wieder $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und seien $f(x) := \sin(ax)$ und $g(x) := \cos(ax)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Seien $F(x) := -\cos(ax)/a$ und $G(x) := \sin(ax)/a$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist F eine Stammfunktion von f und G eine Stammfunktion von g.
7) Sei $f(x) := 1/\cos^2(x)$ für $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Dann ist die Tangens-Funktion tan eine Stammfunktion von f.

Es gibt auch Funktionen, die keine Stammfunktion besitzen, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel VII.2.2. Die Heaviside-Funktion $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (siehe Beispiel V.1.16) besitzt keine Stammfunktion.

Beweis. Zur Erinnerung: Es ist $\theta(x) = 1$ für $x \geq 0$ und $\theta(x) = 0$ für $x < 0$. Angenommen nun $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wäre eine Stammfunktion von θ, also $F'(x) = \theta(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert zu jedem $h < 0$ ein $\xi \in (h, 0)$ mit

$$\frac{F(0) - F(h)}{0 - h} = F'(\xi) = \theta(\xi) = 0.$$

Also ist

$$\frac{F(h) - F(0)}{h} = 0 \quad \forall h < 0.$$

Daraus folgt $F'(0) = 0$. Andererseits müsste $F'(0) = \theta(0) = 1$ gelten, was natürlich ein Widerspruch ist. Also kann θ keine Stammfunktion besitzen. $\square$

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wird insbesondere zeigen, dass jede stetige Funktion eine Stammfunktion besitzt. Bevor wir den Satz formulieren können benötigen wir aber noch ein paar Vorbereitungen. Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so wissen wir bereits, dass das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ für alle $a, b \in I$ mit $a < b$ existiert. Im Falle $a > b$ setzen wir nun noch $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. Schließlich setzen wir noch $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x := 0$ für alle $a \in I$. Mit diesen Konventionen gilt dann das folgende allgemeine Prinzip der Intervalladditivität (c muss hier nicht mehr zwischen a und b liegen).

Lemma VII.2.3. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

für alle $a, b, c \in I$.

Beweis. Das folgt leicht durch Fallunterscheidung aus Satz VII.1.13 (Details als Übung). □

Nun kommen wir zum Hauptsatz.

Satz VII.2.4 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $a \in I$. Wir setzen*

$$F_a(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad \forall x \in I.$$

Dann ist F_a eine Stammfunktion von f.

Um diesen Satz beweisen zu können benötigen wir noch den sogenannten Mittelwertsatz der Integralrechnung, der auch von unabhängigem Interesse ist.

Satz VII.2.5 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Anschaulich gesprochen bedeutet diese Aussage, dass der Flächeninhalt unter dem Graphen von f (also gerade $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$) gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks mit Grundseite der Länge $b - a$ und Höhe $f(\xi)$ ist.

Beweis. Da f stetig auf $[a, b]$ ist, existieren $M := \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$ und $m := \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Wegen $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$ folgt aus Teil (iii) von Satz VII.1.12

$$m(b-a) = \int_a^b m\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b M\,\mathrm{d}x = M(b-a),$$

also

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M.$$

Da f stetig ist, gilt nach dem Zwischenwertsatz $[m, M] \subseteq \mathrm{Im}(f)$, also existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

Jetzt können wir den Hauptsatz beweisen.

Beweis des Hauptsatzes. Es sei $x \in I$ beliebig. Wir wollen $F_a'(x) = f(x)$ nachweisen. Sei $D := \{h \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x+h \in I\}$. Zunächst gilt wegen Lemma VII.2.3 für alle $h \in D$:

$$\begin{aligned}\frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\\ = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t\right) &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Ist $h \in D$ mit $h > 0$, so existiert nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein $\xi_h \in [x, x+h]$ mit

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi_h).$$

Ist $h \in D$ mit $h < 0$, so existiert ebenfalls nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein $\xi_h \in [x+h, x]$ mit

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{-h}\int_{x+h}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi_h).$$

Also ist

$$\frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h} = f(\xi_h) \qquad \forall h \in D.$$

Da ξ_h stets zwischen x und $x+h$ liegt, folgt $\lim_{h\to 0}\xi_h = x$. Weil f stetig ist, folgt daraus $\lim_{h\to 0} f(\xi_h) = f(x)$. Also gilt

$$F_a'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi_h) = f(x).$$

□

Zur besseren Anwendbarkeit formulieren wir den Hauptsatz noch einmal auf etwas andere Weise.

Korollar VII.2.6. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:*
1) f besitzt eine Stammfunktion.
2) Für jede Stammfunktion F von f und alle $a, b \in I$ gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Beweis. 1) ist klar nach dem Hauptsatz.
2) Sei F eine Stammfunktion von f und seien $a, b \in I$. Sei F_a definiert wie im Hauptsatz. Dann gilt

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F_a(b) - F_a(a).$$

Da aber F_a und F beide Stammfunktionen von f sind, ist $F - F_a$ konstant. Also gilt $F_a(b) - F_a(a) = F(b) - F(a)$. □

Eine unmittelbare Konsequenz daraus ist die folgende sogenannte *Newton-Leibniz-Formel*.

Korollar VII.2.7. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$$

für alle $a, b \in I$.

Beweis. Wende einfach das vorige Korollar auf die stetige Funktion f' an. □

Hier noch eine Notation: Die oben auftretende Differenz $F(b) - F(a)$ schreibt man häufig auch als $[F(x)]_a^b$.

Mit Hilfe des Hauptsatzes und unserer kleinen Sammlung von Stammfunktionen (siehe weiter oben) können wir nun auch leicht einige Integrale explizit berechnen.
Beispiele:
1) Für alle reellen Zahlen $b > a$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_a^b x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

2) Es gilt

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

3) Es ist

$$\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = -(-1) + 1 = 2.$$

4) Für $a > 0$ gilt

$$\int_0^a e^{-x}\,\mathrm{d}x = [-e^{-x}]_0^a = 1 - e^{-a}.$$

5) Für alle $b > a > 0$ gilt

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\log(x)]_a^b = \log(b) - \log(a) = \log(b/a).$$

6) Wegen der schon zuvor bewiesenen Eigenschaften des Integrals (Satz VII.1.12) lassen sich auch durch Summen und Vielfache zusammengesetzte Beispiele leicht berechnen, z. B.

$$\begin{aligned}\int_0^1 (4x^2 + 2e^x)\,\mathrm{d}x &= 4\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + 2\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x \\ &= 4\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + 2[e^x]_0^1 = \frac{4}{3} + 2(e-1).\end{aligned}$$

Bei komplizierteren Funktionen kann man allerdings eine Stammfunktion nicht ohne weiteres “sehen”. In der Tat gibt es sogar stetige Funktionen, deren Stammfunktionen sich überhaupt nicht in Form einer geschlossenen Formel mit Hilfe von “elementaren”Funktionen ausdrücken lassen. Das Standard Beispiel hierfür ist die durch $f(x) = e^{-x^2}$ gegebene Funktion.[5] Im nächsten Abschnitt werden wir aber dennoch einige raffiniertere Techniken zur Integration/Stammfunktionsfindung kennenlernen.

Diesen Abschnitt beschließen wir, indem wir der Vollständigkeit halber noch den sogenannten erweiterten Mittelwertsatz der Integralrechnung formulieren und beweisen.

Satz VII.2.8 (Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und sei $g \geq 0$ oder $g \leq 0$. Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Für $g = 1$ ist das gerade die Aussage des gewöhnlichen Mittelwertsatzes der Integralrechnung. Der Satz gilt übrigens auch dann noch, wenn g nur integrierbar (und nicht notwendig stetig) ist, allerdings muss man dann erst die Integrierbarkeit von fg nachweisen, worauf wir verzichten wollen.

Beweis. Ohne Einschränkung nehmen wir $g \geq 0$ an. Wie im Beweis des gewöhnlichen Mittelwertsatzes setzen wir $M := \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$ und $m := \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$. Wegen $g \geq 0$ folgt $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ für alle $x \in [a,b]$ und daher auch

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wegen $g \geq 0$ ist auch $S := \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$. Im Falle $S = 0$ folgt aus der obigen Ungleichung $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ und man kann jedes beliebige

[5] Man kann tatsächlich mathematisch präzisieren, was genau “ausdrückbar mittels elementarer Funktionen”bedeutet und die obige Aussage über e^{-x^2} dann auch formal beweisen. Das geht allerdings weit über die Möglichkeiten dieser Vorlesung hinaus.

$\xi \in [a,b]$ wählen. Ist dagegen $S > 0$, so folgt

$$m \leq \frac{1}{S} \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq M$$

und wegen der Stetigkeit von f gilt nach dem Zwischenwertsatz $[m, M] \subseteq \mathrm{Im}(f)$. Also gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{S} \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

VII.3 Partielle Integration und Integration durch Substitution

Wir wollen in diesem Abschnitt zwei fortgeschrittenere Techniken zur Integration kennenlernen. Die erste ist die sogenannte partielle Integration.

Satz VII.3.1 (Partielle Integration)**.** *Seien $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Beweis. Nach der Produktregel gilt $(uv)' = u'v + uv'$. Da u und v nach Voraussetzung *stetig* differenzierbar sind, ist auch $(uv)'$ stetig. Also folgt aus der Newton-Leibniz-Formel (Korollar VII.2.7):

$$\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b.$$

Auseinanderziehen des linken Integrals und umstellen liefert die Behauptung.

□

Dieser Satz liefert keine explizite Formel zur Lösung des rechts stehenden Integrals. Dieses wird lediglich auf ein anderes Integral umgeschrieben, das manchmal leichter zu lösen ist.

Beispiele:

1) Sei $u(x) := -\cos(x)$ und $v(x) := x$. Dann gilt $u'(x) = \sin(x)$ und $v'(x) = 1$. Aus dem obigen Satz folgt also

$$\int_0^\pi x\sin(x)\,\mathrm{d}x = [-x\cos(x)]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos(x))\,\mathrm{d}x$$
$$= -\pi\cos(\pi) + \int_0^\pi \cos(x)\,\mathrm{d}x = \pi + [\sin(x)]_0^\pi = \pi.$$

2) Als Nächstes wollen wir $\int_0^\pi x^2 \cos(x)\,\mathrm{d}x$ berechnen. Nach dem Prinzip der partiellen Integration gilt zunächst

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x^2 \cos(x)\,\mathrm{d}x &= [x^2 \sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi 2x \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -2\int_0^\pi x\sin(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

(hierbei ist $u(x) := \sin(x)$ und $v(x) := x^2$). Zusammen mit Beispiel 1) folgt daraus

$$\int_0^\pi x^2 \cos(x)\,\mathrm{d}x = -2\pi.$$

Anhand dieses Beispiels sieht man bereits, dass man den Trick mit der partiellen Integration manchmal mehrfach anwenden muss, um zum endgültigen Ergebnis zu kommen.

3) Für alle $x > 0$ gilt (mit $u(t) := e^t$ und $v(t) := t$):

$$\int_0^x te^t\,\mathrm{d}t = [te^t]_0^x - \int_0^x e^t\,\mathrm{d}t = xe^x - [e^t]_0^x = (x-1)e^x + 1.$$

Durch Ableiten kann man leicht bestätigen, dass $F(x) := (x-1)e^x$ wirklich eine Stammfunktion der durch $f(x) := xe^x$ erklärten Funktion definiert.

4) Für alle $x > 0$ gilt (mit $u(t) := e^t$ und $v(t) := \sin(t)$):

$$\int_0^x e^t \sin(t)\,\mathrm{d}t = [e^t \sin(t)]_0^x - \int_0^x e^t \cos(t)\,\mathrm{d}t = e^x \sin(x) - \int_0^x e^t \cos(t)\,\mathrm{d}t.$$

Analog sieht man

$$\int_0^x e^t \cos(t)\,\mathrm{d}t = [e^t \cos(t)]_0^x + \int_0^x e^t \sin(t)\,\mathrm{d}t = e^x \cos(x) - 1 + \int_0^x e^t \sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

Setzt man dieses Ergebnis in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$\int_0^x e^t \sin(t)\,\mathrm{d}t = e^x(\sin(x) - \cos(x)) + 1 - \int_0^x e^t \sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

Folglich ist

$$\int_0^x e^t \sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{e^x}{2}(\sin(x) - \cos(x)) + \frac{1}{2}.$$

Die zweite Integrationstechnik, die wir kennenlernen wollen, ist die Integration durch Substitution.

Satz VII.3.2 (Substitutionsregel)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und sei $g : [a,b] \to I$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy.$$

Beweis. Sei $F: I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Sei $G(x) := F(g(x))$ für alle $x \in [a,b]$. Aus der Kettenregel folgt $G'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Also ist G eine Stammfunktion der stetigen Funktion $(f \circ g)g'$. Daher gilt

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a) = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

□

Wiederum handelt es sich hier nicht um eine explizite Formel zur Lösung eines Integrals, sondern es wird lediglich ein Integral durch ein anderes ausgedrückt, von dem man hofft, dass es einfacher zu berechnen ist.
Beispiele:
1) Es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 e^y\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}[e^y]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)\end{aligned}$$

(hierbei ist $f(y) := e^y$ und $g(x) := x^2$).
2) Es ist

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int_0^1 3x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_1^2 \sqrt{y}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}y^{3/2}\right]_1^2 = \frac{2}{9}(2^{3/2}-1)\end{aligned}$$

(hierbei ist $f(y) := \sqrt{y}$ und $g(x) := x^3 + 1$).
3) Mit $f(y) := y^2$ und $g(x) := \sin(x)$ ergibt sich

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Als weiteres Beispiel wollen wir noch den Flächeninhalt eines Kreises mit Radius $R > 0$ bestimmen. Der Mittelpunkt liege im Koordinatenursprung. Dann besteht der Kreis aus all jenen Punkten (x,y), deren Abstand vom Koordinatenursprung gleich R ist. Nach dem Satz des Pythagoras ist der Abstand von (x,y) zum Koordinatenursprung $(0,0)$ aber gerade $\sqrt{x^2+y^2}$. Also ist besagter Kreis nichts anderes als die Menge

$$K_R := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\right\}.$$

Um den Inhalt A_R der von K_R umschlossenen Fläche zu bestimmen, genügt es aus Symmetriegründen den Inhalt der Fläche zu bestimmen, welche von

$$M_R := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x^2 + y^2 = R^2\right\}$$

und der x-Achse eingeschlossen wird (obere Hälfte des Kreises). Dieser Flächeninhalt heiße B_R. Dann ist $A_R = 2B_R$.

Nun gilt aber

$$M_R := \Big\{(x, \sqrt{R^2 - x^2}) : x \in [-R, R]\Big\},$$

d. h. M_R ist gerade der Graph der Funktion $f : [-R, R] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \sqrt{R^2 - x^2}$ und somit $B_R = \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x$. Es folgt

$$B_R = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2(t)}R\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

(Substitutionsformel mit $g(t) := R\sin(t)$). Wegen $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ folgt

$$B_R = R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t = R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t$$

(beachte $\cos(t) \geq 0$ für $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, so dass $\sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$ gilt).

Nun ist $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1$ (siehe Satz V.4.3), also

$$\begin{aligned} B_R &= \frac{R^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos(2t) + 1)\,\mathrm{d}t = \frac{R^2}{2}\left[\frac{\sin(2t)}{2} + t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{R^2}{2}\left(\frac{\sin(\pi)}{2} + \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\sin(-\pi)}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \pi\frac{R^2}{2}. \end{aligned}$$

Also ist $A_R = 2B_R = \pi R^2$.

VII.4 Uneigentliche Integrale

In diesem Abschnitt betrachten wir sogenannte uneigentliche Integrale, d. h. Integrale deren zugrundeliegendes Intervall nicht von der Form $[a, b]$ ist. Zuerst betrachten wir die Intervalltypen $[a, b)$ und $(a, b]$.

Definition VII.4.1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.
1) Ist $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ stetig, so definieren wir das *uneigentliche Integral* von f über $[a, b)$ als

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{y \to b} \int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x,$$

falls dieser Limes existiert.
2) Ist $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so definiert man das uneigentliche Integral entsprechend als

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{y \to a} \int_y^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

falls der Grenzwert existiert.

Beispiele:
1) Sei $r > 0$ mit $r \neq 1$. Für alle $y \in (0, 1]$ gilt

$$\int_y^1 \frac{1}{x^r}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{1-r}}{1-r}\right]_y^1 = \frac{1}{1-r} - \frac{y^{1-r}}{1-r}.$$

(a) Ist $r < 1$, also $1 - r > 0$, so gilt $\lim_{y \to 0} y^{1-r} = 0$, also ist

$$\int_0^1 \frac{1}{x^r}\,\mathrm{d}x = \lim_{y \to 0} \int_y^1 \frac{1}{x^r}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-r}.$$

(b) Ist $r > 1$, so gilt dagegen $\lim_{y \to 0} y^{1-r} = \lim_{y \to 0} 1/y^{r-1} = \infty$, also existiert in diesem Fall das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{x^r}\,\mathrm{d}x$ *nicht*.
2) Für jedes $y \in (0, 1]$ gilt

$$\int_y^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\log(x)]_y^1 = \log(1) - \log(y) = -\log(y).$$

Es gilt $\lim_{y \to 0} \log(y) = -\infty$, also existiert auch in diesem Fall das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ *nicht*.

Als Nächstes betrachten wir Integrale auf Intervallen, die entweder nach oben oder nach unten unbeschränkt sind.

Definition VII.4.2. Sei $a \in \mathbb{R}$.
1) Ist $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig, so definieren wir das *uneigentliche Integral* von f über $[a, \infty)$ als

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{y \to \infty} \int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x,$$

falls dieser Limes existiert.
2) Ist $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ stetig, so definiert man das uneigentliche Integral entsprechend als

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{y \to -\infty} \int_y^a f(x)\,\mathrm{d}x,$$

falls der Grenzwert existiert.

Beispiele:
1) Sei $r > 0$ mit $r \neq 1$. Für alle $y \geq 1$ gilt

$$\int_1^y \frac{1}{x^r}\,\mathrm{d}x = \frac{y^{1-r}}{1-r} - \frac{1}{1-r}.$$

(a) Für $r > 1$ gilt $\lim_{y\to\infty} y^{1-r} = \lim_{y\to\infty} 1/y^{r-1} = 0$, also ist in diesem Fall

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^r}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{1-r} = \frac{1}{r-1}.$$

(b) Für $r < 1$ gilt $\lim_{y\to\infty} y^{1-r} = \infty$, also existiert in diesem Fall das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^r}\,\mathrm{d}x$ nicht.
2) Es ist

$$\int_1^y \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log(y) \quad \text{für alle } y \geq 1$$

und $\lim_{y\to\infty}\log(y) = \infty$, also existiert das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ nicht.
3) Für alle $y \geq 0$ gilt

$$\int_0^y e^{-x}\,\mathrm{d}x = [-e^{-x}]_0^y = 1 - e^{-y}.$$

Wegen $\lim_{y\to\infty} e^{-y} = 0$ folgt

$$\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Als eine Anwendung uneigentlicher Integrale betrachten wir das folgende Konvergenzkriterium für Reihen.

Satz VII.4.3 (Integralvergleichskriterium)**.** *Sei $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}^+$ eine stetige, monoton fallende Funktion. Dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ konvergent genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$ existiert.*

Beweis. Wir definieren zunächst zwei Funktionen $\varphi, \psi : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(x) := f(k+1) \quad \text{und} \quad \psi(x) := f(k) \quad \text{für alle } x \in [k, k+1) \text{ und alle } k \in \mathbb{N}.$$

Da f monoton fallend ist, gilt $\varphi \leq f \leq \psi$.
Sei nun $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ beliebig. φ und ψ eingeschränkt auf das Intervall $[1, n]$ sind Treppenfunktionen. Nach Definition des Integrals gilt also

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) = \int_1^n \varphi(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_1^n \psi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1} f(k). \tag{VII.2}$$

Sei $F(y) := \int_1^y f(x)\,\mathrm{d}x$ für alle $y \geq 1$. Wegen $f \geq 0$ folgt aus der Intervalladditivität, dass F monoton steigend ist (Übung).
1) Nehmen wir nun an, dass das uneigentliche Integral $S := \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert. Da F monoton steigend ist, gilt $F(y) \leq S$ für alle $y \geq 1$ und aus (VII.2) folgt

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leq f(1) + F(n) \leq f(1) + S$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist die Partialsummenfolge $(\sum_{k=1}^{n} f(k))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Da es sich um eine Reihe mit positiven Gliedern handelt, folgt die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$.
2) Sei nun umgekehrt $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergent. Ist $y \geq 1$, so wähle ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq y$. Dann gilt $F(y) \leq F(n)$ und aus (VII.2) folgt

$$F(y) \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Da die Partialsummenfolge $(\sum_{k=1}^{n} f(k))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, ist also die Funktion F nach oben beschränkt. Weil F monoton steigend ist, folgt daraus die Existenz des Grenzwerts $\lim_{y\to\infty} F(y)$ (das zeigt man analog wie für Folgen (Details als Übung)). $\square$

Als eine Anwendung des Integralvergleichskriteriums können wir nun Beispiel IV.2.5 komplettieren.

Beispiel VII.4.4. Sei $p > 0$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^p$ ist konvergent für $p > 1$ und divergent für $p \leq 1$.

Beweis. Wir hatten oben schon nachgewiesen, dass für $p > 1$ das uneigentliche Integral $\int_1^\infty 1/x^p \, \mathrm{d}x$ existiert, für $0 < p \leq 1$ dagegen nicht. Damit folgt die Behauptung direkt aus dem Integralvergleichskriterium. $\square$

VIII Weitere Themen

In diesem letzten Kapitel wollen wir noch einige weitere, ergänzende und fortgeschrittenere Themen diskutieren.

VIII.1 Arcus-Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen, die sogenannten Arcus-Funktionen. Wir beginnen mit folgendem Lemma.

Lemma VIII.1.1. *Die Sinus-Funktion ist auf* $[-\pi/2, \pi/2]$ *streng monoton steigend und es gilt* $\{\sin(x) : x \in [-\pi/2, \pi/2]\} = [-1, 1]$.

Die Kosinus-Funktion ist auf $[0, \pi]$ *streng monoton fallend und es gilt* $\{\cos(x) : x \in [0, \pi]\} = [-1, 1]$.

Die Tangens-Funktion ist auf $(-\pi/2, \pi/2)$ *streng monoton steigend und es gilt* $\{\tan(x) : x \in (-\pi/2, \pi/2)\} = \mathbb{R}$.

Beweis. Es gilt $\sin'(x) = \cos(x) > 0$ für alle $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, also ist sin auf $[-\pi/2, \pi/2]$ streng monoton steigend. Ferner wissen wir schon, dass stets $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ gilt. Wegen $\sin(\pi/2) = 1$ und $\sin(-\pi/2) = -1$ folgt aus Stetigkeitsgründen (Zwischenwertsatz) $\{\sin(x) : x \in [-\pi/2, \pi/2]\} = [-1, 1]$.
Die Aussage für den Kosinus können Sie in analoger Weise selbst beweisen.
Weiter gilt $\tan'(x) = 1/\cos^2(x) > 0$ für alle $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, also ist tan auf $(-\pi/2, \pi/2)$ streng monoton steigend.
Zudem ist $\lim_{x\to\pi/2} \tan(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\pi/2} \tan(x) = -\infty$ (Beweis?), so dass aufgrund der Stetigkeit des Tangens aus dem Zwischenwertsatz $\{\tan(x) : x \in (-\pi/2, \pi/2)\} = \mathbb{R}$ folgt. □

Aufgrund des obigen Lemmas sind die Funktionen

$$\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1],\ \cos : [0, \pi] \to [-1, 1],\ \tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$$

bijektiv. Ihre Umkehrabbildungen nennt man *Arcussinus, Arcuskosinus* bzw. *Arcustangens* und bezeichnet sie mit arcsin, arccos bzw. arctan.

Nach dem Satz über die Stetigkeit von Umkehrfunktionen sind arcsin, arccos und arctan stetig. Über ihre Differenzierbarkeit gibt das folgende Lemma Auskunft.

Lemma VIII.1.2.
1) An jeder Stelle $x \in (-1,1)$ sind arcsin *und* arccos *differenzierbar mit*

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \textit{und} \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2) Die Funktion arctan *ist differenzierbar mit*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. 1) Aus der Regel zur Ableitung der Umkehrfunktion folgt für $x \in (-1,1)$ unter Verwendung des trigonometrischen Pythagoras

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Der Beweis für arccos ist analog und sei Ihnen daher zur Übung überlassen.
2) Wiederum aus der Regel zur Ableitung der Umkehrfunktion zusammen mit der Formel $\tan' = 1/\cos^2 = 1 + \tan^2$ folgt

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. □

Als eine Anwendung dieses Lemmas erhält man z. B.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

(denn $\tan(0) = 0$ und $\tan(\pi/4) = 1$).

VIII.2 Die l'Hospitalschen Regeln

In diesem Abschnitt wollen wir die sogenannten l'Hospitalschen Regeln[1] kennenlernen, die häufig bei der Berechnung komplizierterer Grenzwerte von Nutzen sind. Es gibt verschiedene Versionen dieser Regeln. Wir beginnen mit der folgenden.

[1]Benannt sind sie nach dem französischen Mathematiker Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hospital (1661–1704, auch l'Hôpital geschrieben), da sie durch sein Lehrbuch zur Differentialrechnung bekannt geworden sind. Die Regeln stammen aber eigentlich vom Schweizer Mathematiker Johann Bernoulli (1667–1748, Bruder von Jakob Bernoulli (siehe Fußnote zur Bernoulli-Ungleichung)).

Satz VIII.2.1 (0/0-Regel von l'Hospital)**.** *Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Es gelte $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ und $g(x) \neq 0 \neq g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$. Ferner sei*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt auch

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Eine analoge Aussage gilt auch für linksseitige Grenzwerte $x \to b^-$ und für Grenzwerte mit $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$.

Beweis. Wir definieren Funktionen $\tilde{f}, \tilde{g} : [a, b) \to \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in (a, b) \\ 0 & \text{für } x = a. \end{cases}$$

und

$$\tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x) & \text{für } x \in (a, b) \\ 0 & \text{für } x = a. \end{cases}$$

Wegen $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ sind die Funktionen $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ an der Stelle a stetig und auf (a, b) sind sie sogar differenzierbar (denn f und g sind dort differenzierbar). Nach dem erweiterten Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz VI.2.8) existiert also zu jedem $x \in (a, b)$ ein $\xi_x \in (a, x)$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)} = \frac{\tilde{f}'(\xi_x)}{\tilde{g}'(\xi_x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$

Ist nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in (a, b) mit $x_n \to a$, so folgt wegen $a < \xi_{x_n} < x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $\xi_{x_n} \to a$.
Wegen $\lim_{x\to a^+} f'(x)/g'(x) = c$ folgt daraus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(\xi_{x_n})}{g'(\xi_{x_n})} = c.$$

Damit ist $\lim_{x\to a^+} f(x)/g(x) = c$ gezeigt.
Die entsprechende Aussage für linksseitige Grenzwerte wird analog bewiesen.
Sind f und g stattdessen auf (a, ∞) definiert ($a > 0$) und gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, sowie $\lim_{x\to\infty} f'(x)/g'(x) = c$, so betrachten wir die Funktionen φ und ψ, die auf $(0, 1/a)$ definiert sind durch $\varphi(x) := f(1/x)$ und $\psi(x) := g(1/x)$. Wegen $1/x \to \infty$ für $x \to 0^+$ folgt $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim_{x\to 0^+} \psi(x) = 0$, sowie

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(1/x)(-1/x^2)}{g\prime(1/x)(-1/x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)} = c.$$

Nach der schon bewiesenen l'Hospitalschen Regel für rechtsseitige Grenzwerte folgt daraus $\lim_{x\to 0^+} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = c$, was wiederum $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$ impliziert. $\square$

Beispiel: Sei $f(x) := \sin(x)$ und $g(x) := \sqrt{x}$. Dann gilt $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$ und

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{1/(2\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x}\cos(x) = 0,$$

denn $\sqrt{x} \to 0$ für $x \to 0^+$ und $|\cos(x)| \leq 1$. Also gilt nach der obigen l'Hospitalschen Regel auch

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = 0.$$

Eine zweite Version der l'Hospitalschen Regel betrifft Grenzwerte der Form "∞/∞".

Satz VIII.2.2 (∞/∞-Regel von l'Hospital)**.** *Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen mit $g(x) \neq 0 \neq g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$ und $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$. Ferner sei*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt auch

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Eine analoge Aussage gilt auch für linksseitige Grenzwerte $x \to b^-$ und für Grenzwerte mit $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$.

Der Beweis dieses Satzes ist etwas schwieriger als bei Satz VIII.2.1 und wir werden ihn hier nicht führen. Als Anwendung beweisen wir aber noch das folgende Ergebnis.

Satz VIII.2.3. *Für alle Polynomfunktionen p gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0.$$

Grob gesprochen besagt dieser Satz, dass die Exponentialfunktion schneller wächst als jedes Polynom.

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion nach dem Grad von p. Hat p den Grad 0, ist also konstant, so ist die Aussage klar.
Angenommen nun die Aussage gilt für alle Polynome vom Grad$\leq n$ und p sei ein Polynom vom Grad $n + 1$. Ohne Einschränkung sei der $(n + 1)$-te Koeffizient von p positiv. Dann gilt $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$ (Beweis?). Ferner gilt auch $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.
Zudem ist p' ein Polynom vom Grad$\leq n$, also gilt nach Voraussetzung $\lim_{x\to\infty} p'(x)/e^x = 0$. Nach Satz VIII.2.2 gilt dann auch $\lim_{x\to\infty} p(x)/e^x = 0$. $\square$

VIII.3 Konvergenz von Funktionenfolgen

In diesem Abschnitt betrachten wir Folgen von Funktionen und deren Konvergenz. Wir beginnen mit der (naheliegenden) Definition der punktweisen Konvergenz.

Definition VIII.3.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *punktweise konvergent* gegen f, falls $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

Beispiele:
1) Sei $f_n(x) := x/n$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergent gegen 0.
2) Sei $f_n(x) := (1 + 1/n)x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $f(x) := x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergent gegen f.
3) Sei $f_n(x) := x^n$ für alle $x \in [0, 1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $f(x) := 0$ für $x \in [0, 1)$ und $f(1) := 1$. Dann ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergent gegen f.

In Beispiel 3) tritt folgendes Phänomen auf: Alle Funktionen f_n sind stetig, die Grenzfunktion f aber ist unstetig. Stetigkeit bleibt also bei punktweiser Konvergenz nicht unbedingt erhalten. Wir werden als Nächstes einen stärkeren Konvergenzbegriff für Funktionenfolgen einführen, bei dem, wie sich zeigen wird, ein solches Phänomen nicht auftreten kann.

Definition VIII.3.2. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *gleichmäßig konvergent* gegen f, falls folgendes gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists N \in \mathbb{N} \;\forall n \geq N \;\forall x \in D \;|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Man mache sich den Unterschied zur punktweisen Konvergenz klar. Diese bedeutet

$$\forall x \in D \;\forall \varepsilon > 0 \;\exists N \in \mathbb{N} \;\forall n \geq N \;|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Der Index N darf hier nicht nur von ε sondern auch von der Stelle x abhängen. Für gleichmäßige Konvergenz muss man N unabhängig von x wählen können. Somit impliziert gleichmäßige Konvergenz natürlich die punktweise Konvergenz. Die Umkehrung gilt aber im Allgemeinen nicht, wie wir gleich sehen werden.

Beispiele:
1) Sei $f_n(x) := x/n^2$ für $x \in [-1, 1]$. Offensichtlich konvergiert (f_n) punktweise gegen 0. Wir wollen sehen, dass die Konvergenz sogar gleichmäßig ist.

Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen ein $N \in \mathbb{N}$ mit $1/n^2 \leq \varepsilon$ für $n \geq N$. Für alle diese n und alle $x \in [-1,1]$ gilt dann

$$|f_n(x)| = \frac{|x|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \leq \varepsilon.$$

Also konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen 0.
2) Sei $f_n(x) := \sin(x + 1/n)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Folge (f_n) offenbar punktweise gegen die Sinus-Funktion. Auch hier ist die Konvergenz sogar gleichmäßig, was man wie folgt sieht: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $1/N \leq \varepsilon$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \geq N$ ein $\xi_{x,n} \in (x, x + 1/n)$ mit

$$\left| \frac{\sin(x + 1/n) - \sin(x)}{x + 1/n - x} \right| = |\sin'(\xi_{x,n})| = |\cos(\xi_{x,n})| \leq 1.$$

Es folgt

$$|\sin(x + 1/n) - \sin(x)| \leq 1/n \leq 1/N \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ und alle $x \in \mathbb{R}$.
3) Wir betrachten erneut die Funktionen $f_n(x) := x^n$ auf $[0,1]$. Wir hatten oben schon gesehen, dass die punktweise Grenzfunktion gegeben ist durch $f(x) := 0$ für $x \in [0,1)$ und $f(1) := 1$. In diesem Fall ist die Konvergenz aber nicht gleichmäßig. Anderenfalls gäbe es nämlich ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x^n - f(x)| \leq 1/2$ für alle $x \in [0,1]$ und alle $n \geq N$. Insbesondere wäre $x \leq \sqrt[N]{1/2} < 1$ für alle $x \in [0,1)$, was natürlich ein Widerspruch ist.

Wir kommen nun zu dem schon angedeuteten Satz über die Stetigkeit der Grenzfunktion bei gleichmäßiger Konvergenz.

Satz VIII.3.3. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann ist auch f stetig.*

Beweis. Sei $a \in D$ beliebig. Wir wollen die Stetigkeit von f an der Stelle a beweisen und geben uns dazu ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vor. Wegen der vorausgesetzten gleichmäßigen Konvergenz existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in D, \forall n \geq N. \tag{VIII.1}$$

Da f_N an der Stelle a stetig ist (nach Voraussetzung), existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|f_N(x) - f_N(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in D \cap (a - \delta, a + \delta). \tag{VIII.2}$$

Aus (VIII.1) und (VIII.2) folgt für alle $x \in D \cap (a - \delta, a + \delta)$:

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + |f_N(x) - f(a)|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Das zeigt die Stetigkeit von f an der Stelle a. □

Der nächste Satz zeigt, dass gleichmäßige Konvergenz auch mit der Integration verträglich ist.

Satz VIII.3.4. *Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann ist f stetig und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Beweis. Das f stetig ist folgt aus Satz VIII.3.3. Um die Konvergenz der Integrale nachzuweisen sei wieder $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (f_n) gegen f existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/(b-a)$ für alle $n \geq N$ und alle $x \in [a,b]$. Dann folgt aber

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}x = \varepsilon$$

für alle $n \geq N$, was den Beweis abschließt. □

Ist die Folge nur punktweise konvergent, so gilt die Aussage dieses Satzes im Allgemeinen nicht, wie das folgende Beispiel zeigt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 4n^2 x \quad \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n}, \\ -4n^2 x + 4n \quad \text{für } \frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n}, \\ 0 \quad \text{für } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Dann ist f_n stetig (Beweis als Übung (machen Sie sich zuerst eine Skizze, um zu sehen, was f_n eigentlich tut)). Ferner gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$ (das ist klar für $x = 0$ und für alle $x \in (0,1]$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $1/n \leq x$ für $n \geq N$, so dass $f_n(x) = 0$ für $n \geq N$ gilt). Für die Integrale gilt jedoch

$$\begin{aligned} &\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/(2n)} 4n^2 x\,\mathrm{d}x + \int_{1/(2n)}^{1/n} (4n - 4n^2 x)\,\mathrm{d}x \\ &= 4n^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/(2n)} + 4n\left[x - n\frac{x^2}{2}\right]_{1/(2n)}^{1/n} \\ &= 4n^2 \frac{1}{8n^2} + 4n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Schließlich betrachten wir noch die Differentiation der Grenzfunktion.

Satz VIII.3.5. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : I \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Ferner seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, so dass folgendes gilt:*
1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen f.
2) $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen g.
Dann ist f stetig differenzierbar mit $f' = g$.

Beweis. Da nach Voraussetzung die Funktionen f_n' alle stetig sind, ist nach Satz VIII.3.3 auch g stetig. Es genügt also die Differenzierbarkeit von f und $f' = g$ nachzuweisen.
Sei dazu a ein fester Punkt aus I. Für alle $x \in I$ folgt aus Satz VIII.3.4

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

Nun ist aber

$$\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t = f_n(x) - f_n(a) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Wegen 1) folgt also

$$f(a) + \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = f(x).$$

Eine erneute Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung liefert nun: f ist differenzierbar mit $f'(x) = g(x)$ für alle $x \in I$. $\square$

VIII.4 Potenzreihen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit sogenannten Potenzreihen. Grob gesprochen handelt es sich dabei um Grenzwerte gewisser Polynome. Sie spielen in der Analysis eine wichtige Rolle, weil sich viele Funktionen, zumindest in einem gewissen Teilgebiet ihres Definitionsbereiches, in solche Reihen entwickeln lassen. Die genaue Definition lautet wie folgt.

Definition VIII.4.1. Unter einer *Potenzreihe* versteht man eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k,$$

wobei der *Entwicklungspunkt* a und die *Koeffizienten* a_k vorgegebene reelle Zahlen sind, während $x \in \mathbb{R}$ variieren darf.

In der obigen Definition ist zunächst nur von einer formalen Reihe die Rede, nicht von Konvergenz. Wir wollen untersuchen, für welche Werte von x eine Potenzreihe tatsächlich konvergiert. Zumindest im Entwicklungspunkt $x = a$ liegt trivialerweise Konvergenz vor. Für die weitere Diskussion führen wir nun den folgenden Begriff ein.

Definition VIII.4.2. Den Wert

$$R := \sup\left\{ |x-a| : \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k \text{ ist konvergent} \right\}$$

nennt man den *Konvergenzradius* der Potenzreihe.

Falls die obige Menge unbeschränkt ist, so ist die Definition als $R = \infty$ zu verstehen. Die Bezeichnung Konvergenzradius erklärt sich aus den Teilen 1) und 2) des folgenden Satzes.

Satz VIII.4.3. *Sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$. Wir setzen $R > 0$ voraus. Dann gilt:*
1) Für alle $x \in (a-R, a+R)$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ absolut konvergent.
2) Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus [a-R, a+R]$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ divergent.
3) Für alle $x \in (a-R, a+R)$ ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-a)^{k-1}$ absolut konvergent.

Über die Konvergenz der Potenzreihe an den Randpunkten $a-R$ und $a+R$ sind keine allgemeinen Aussagen möglich. Im Falle $R = \infty$ ist das Intervall $(a-R, a+R)$ als ganz $\mathbb{R}$ zu verstehen. In diesem Fall ist die Potenzreihe also an jeder Stelle x absolut konvergent. Dagegen bedeutet der Sonderfall $R = 0$, dass die Potenzreihe nur in ihrem Entwicklungspunkt und sonst nirgends konvergiert (solche Fälle kommen tatsächlich vor, siehe die Beispiele unten). Die in Teil 3) auftretende Reihe nennt man auch die *gliedweise Ableitung* der Potenzreihe (siehe auch Satz VIII.4.6 weiter unten). Die durch $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ auf $(a-R, a+R)$ definierte Funktion nennt man die *durch die Potenzreihe dargestellte Funktion.*

Beweis. 1) Sei $x \in (a-R, a+R)$. Dann ist $|x-a| < R$ und daher existiert, nach Definition von R, ein $y \in \mathbb{R}$ mit $|y-a| > |x-a|$, so dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(y-a)^k$ konvergiert. Daher gilt insbesondere $a_k(y-a)^k \to 0$ und folglich existiert ein $K > 0$ mit $|a_k(y-a)^k| \le K$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$|a_k(x-a)^k| = |a_k(y-a)^k| \frac{|x-a|^k}{|y-a|^k} \le K \frac{|x-a|^k}{|y-a|^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Wegen $|x-a|/|y-a| < 1$ ist die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(|x-a|/|y-a|)^k$ konvergent. Folglich ist nach dem Majorantenkriterium auch $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(x-a)^k|$ konvergent.
2) Für $x \in \mathbb{R} \setminus [a-R, a+R]$ ist $|x-a| > R$ und folglich kann die Potenzreihe im Punkt x nicht konvergieren (das widerspräche der Definition von R).
3) Sei wieder $x \in (a-R, a+R)$. Wie in 1) finden wir ein $y \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| < |y-a|$ und ein $K > 0$ mit $|a_k(y-a)^k| \le K$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$|k a_k(x-a)^{k-1}| = |k a_k(y-a)^{k-1}| \frac{|x-a|^{k-1}}{|y-a|^{k-1}} \le k \frac{K}{|y-a|} \frac{|x-a|^{k-1}}{|y-a|^{k-1}} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{VIII.3}$$

Ferner gilt

$$(k+1)\frac{|x-a|^k}{|y-a|^k}\frac{1}{k}\frac{|y-a|^{k-1}}{|x-a|^{k-1}} = \left(1+\frac{1}{k}\right)\frac{|x-a|}{|y-a|} \to \frac{|x-a|}{|y-a|} < 1,$$

also ist nach dem Quotientenkriterium die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k(|x-a|/|y-a|)^{k-1}$ konvergent. Wegen (VIII.3) ist dann aber nach dem Majorantenkriterium auch $\sum_{k=1}^{\infty} |ka_k(x-a)^{k-1}|$ konvergent. $\square$

Wir haben tatsächlich schon mehrere wichtige Beispiele für Potenzreihen kennengelernt, auch wenn wir sie seinerzeit noch nicht so genannt haben, nämlich:
1) Die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

ist eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 1. Die durch diese Reihe dargestellte Funktion auf $(-1,1)$ ist gegeben durch $f(x) = 1/(1-x)$.
2) Die Exponentialreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

ist eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ∞. Die dargestellte Funktion ist, definitionsgemäß, die Exponentialfunktion.
3) Die Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

sind ebenfalls Potenzreihen (bei der ersten Reihe sind alle geraden Koeffizienten gleich 0, bei der zweiten sind alle ungeraden Koeffizienten gleich 0). Die Konvergenzradien sind jeweils ∞ und die dargestellten Funktionen sind, wiederum per definitionem, die Sinus- bzw. die Kosinus-Funktion.

Als Nächstes beweisen wir zwei Formeln für den Konvergenzradius einer Potenzreihe.

Satz VIII.4.4. *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R.*
1) Ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und existiert der Limes $\lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$ (im uneigentlichen Sinne, d. h. ∞ als Grenzwert ist zugelassen), so gilt

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

2) Falls der Limes $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *im uneigentlichen Sinne existiert, so gilt*

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

wobei hier die Konvention $1/0 := \infty$ *und* $1/\infty := 0$ *verwendet wird.*

Beweis. 1) Sei $q := \lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$. Wir setzen zunächst $0 < q < \infty$ voraus und wollen $R = q$ zeigen. Sei dazu zuerst $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| < q$ beliebig. Dann gilt

$$\frac{|a_{n+1}||x-a|^{n+1}}{|a_n||x-a|^n} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x-a| \to \frac{1}{q}|x-a| < 1.$$

Nach dem Quotientenkriterium ist also $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ absolut konvergent. Damit ist $R \geq q$ gezeigt.
Sei nun $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| > q$ beliebig. Dann folgt wie eben

$$\frac{|a_{n+1}||x-a|^{n+1}}{|a_n||x-a|^n} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x-a| \to \frac{1}{q}|x-a| > 1,$$

also folgt aus dem Quotientenkriterium, dass $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(x-a)^k|$ divergiert. Unter Beachtung von Satz VIII.4.3 folgt daraus $R \leq q$. Also ist $R = q$.
Die Sonderfälle $q = 0$ und $q = \infty$ überlasse ich Ihnen zur Übung.
Der Beweis für 2) ist ähnlich wie der für 1), aber verwendet das Wurzelanstelle des Quotientenkriteriums. Auch hier seien Ihnen die Details zur Übung überlassen. □

In der Formel 2) kann man übrigens sogar den Limes durch den lim sup ersetzen. In dieser Version ist die Formel dann immer anwendbar. Man nennt sie auch die *Cauchy-Hadamard-Formel*.[2]

Beispiele:
1) Wir betrachten die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$ und wollen ihren Konvergenzradius R bestimmen. Hier ist also $a_k = k$ und daher $a_k/a_{k+1} = 1/(1+1/k) \to 1$. Nach dem obigen Satz ist also $R = 1$.
2) Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} k^k x^k$ hat den Konvergenzradius 0, konvergiert also nur für $x = 0$.
Beweis: Es ist $a_k = k^k$ und daher $\sqrt[k]{a_k} = k \to \infty$, also folgt die Behauptung aus der Cauchy-Hadamard-Formel.

Als Nächstes wollen wir zeigen, dass Potenzreihen auf jedem abgeschlossenen Teilintervall ihres offenen Konvergenzintervalls sogar gleichmäßig konvergieren. Die genaue Formulierung lautet wie folgt.

[2] Benannt nach Augustin-Louis Cauchy (siehe Fußnote zur Definition der Cauchy-Folgen) und Jacques Hadamard (französischer Mathematiker (1865–1963), der bedeutende Beiträge zu verschiedenen Teilgebieten der Mathematik lieferte, u. a. zu partiellen Differentialgleichungen, zur komplexen Analysis und zur mathematischen Physik).

Satz VIII.4.5. *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $0 < R \leq \infty$ und sei $0 < r < R$. Sei f die durch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ dargestellte Funktion auf $(a-R, a+R)$ und sei $f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$. Dann konvergiert (f_n) auf $[a-r, a+r]$ gleichmäßig gegen f.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(a+r-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ absolut konvergiert (Satz VIII.4.3), existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k \leq \varepsilon$ für $n \geq N$.
Für alle $x \in [a-r, a+r]$ und alle $n \geq N$ gilt daher

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x-a)^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k||x-a|^k \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

was den Beweis abschließt. □

Als Konsequenz erhalten wir den folgenden wichtigen Satz über die gliedweise Differenzierbarkeit von Potenzreihen.

Satz VIII.4.6. *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $0 < R \leq \infty$ und sei f die durch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ dargestellte Funktion auf $(a-R, a+R)$. Dann ist f differenzierbar und es gilt*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-a)^{k-1} \quad \forall x \in (a-R, a+R).$$

Beweis. Wir wissen schon, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-a)^{k-1}$ für alle $x \in (a-R, a+R)$ absolut konvergiert (Satz VIII.4.3). Wir bezeichnen die Grenzfunktion provisorisch mit g. Weiter sei $g_n(x) := \sum_{k=1}^{n} k a_k (x-a)^{k-1}$ und $f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$.
Nun sei $x_0 \in (a-R, a+R)$ beliebig. Wir wollen $f'(x_0) = g(x_0)$ nachweisen.
Dazu wählen wir ein $r \in (0, R)$ mit $x_0 \in (a-r, a+r)$. Da auch $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-a)^{k-1}$ eine Potenzreihe ist, konvergiert nach dem vorigen Satz die Folge (g_n) auf $[a-r, a+r]$ sogar gleichmäßig gegen g.
Ferner konvergiert (f_n) punktweise gegen f und es ist $f_n' = g_n$. Aus Satz VIII.3.5 folgt daher, dass die auf $[a-r, a+r]$ eingeschränkte Funktion f differenzierbar ist und dort g als Ableitung besitzt.
Da x_0 ein innerer Punkt von $[a-r, a+r]$ ist, ist nicht nur die Einschränkung von f auf $[a-r, a+r]$ sondern auch f selbst an der Stelle x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) = g(x_0)$. □

Als kleine Übung können Sie mit Hilfe dieses Satzes erneut die Ableitungen von exp, sin und cos bestimmen.

Als Korollar halten wir folgendes fest.

Korollar VIII.4.7. *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $0 < R \leq \infty$ *und sei* f *die durch* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ *dargestellte Funktion auf* $(a-R, a+R)$. *Dann ist* f *beliebig häufig differenzierbar und für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und alle* $x \in (a-R, a+R)$ *gilt*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} n! \binom{k}{n} a_k (x-a)^{k-n}.$$

Insbesondere ist

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Das folgt leicht durch vollständige Induktion nach n mit Hilfe des vorigen Satzes (Übung). Den Zusatz erhält man, indem man $x = a$ setzt. $\square$

Für eine auf einem Intervall I definierte, beliebig häufig differenzierbare Funktion f, welche sich um den Punkt $a \in I$ in eine Potenzreihe entwickeln lässt, gilt also

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad \text{für } x \in I \cap (a-R, a+R),$$

wobei R der Konvergenzradius der Potenzreihe ist. Bezeichnet man wie in Kapitel VI mit $T_{n,a}^f$ das n-te Taylor-Polynom von f mit Entwicklungspunkt a, so bedeutet die obige Darstellung gerade $\lim_{n\to\infty} T_{n,a}^f(x) = f(x)$ für $x \in I \cap (a-R, a+R)$. Man spricht daher auch von der *Taylor-Reihe* der Funktion f.

Ob sich eine gegebene Funktion in eine Taylor-Reihe entwickeln lässt oder nicht, lässt sich nicht pauschal beantworten. Es gibt Fälle in denen sich die Funktion auf ihrem gesamten Definitionsbereich in eine Taylor-Reihe entwickeln lässt (z. B. exp, sin und cos). In vielen Fällen konvergiert die Taylor-Reihe aber nur auf einem Teilgebiet des Definitionsbereiches gegen f (siehe zum Beispiel die auf $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ durch $f(x) := 1/(1-x)$ definierte Funktion, deren Taylor-Reihe um 0 (die geometrische Reihe) aber nur auf $(-1, 1)$ konvergiert). Des Weiteren kann es sogar vorkommen, dass die Taylor-Reihe einer Funktion überhaupt nur im Entwicklungspunkt und sonst nirgends konvergiert. Selbst wenn die Taylor-Reihe von f in einem gewissen Bereich konvergiert, so muss ihr Grenzwert dort nicht zwangsweise mit der ursprünglichen Funktion f übereinstimmen.

Als weitere Beispiele für Taylor-Entwicklungen betrachten wir nun noch die Logarithmus- und die Arcustangens-Reihe.

Satz VIII.4.8. *Für alle* $x \in (-1, 1]$ *gilt*

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

Für $x > 1$ *oder* $x \leq -1$ *ist die Reihe divergent.*

Beweis. Mit Hilfe von Satz VIII.4.4 weist man leicht nach, dass die obige Potenzreihe den Konvergenzradius 1 hat (Übung). Für $x = -1$ ist die Reihe divergent (harmonische Reihe), für $x = 1$ ist sie dagegen konvergent (alternierende harmonische Reihe, Leibniz-Kriterium).
Wir setzen provisorisch $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}x^k/k$ für $x \in (-1, 1]$. Nach Satz VIII.4.6 ist f auf $(-1, 1)$ differenzierbar mit

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k = \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in (-1, 1)$$

(geometrische Reihe).
Setzt man $g(x) := \log(1 + x)$, so gilt auch $g'(x) = 1/(1 + x)$. Folglich existiert eine Konstante C mit $f(x) = C + g(x)$ für alle $x \in (-1, 1)$. Wegen $f(0) = 0 = g(0)$ folgt $C = 0$. Also ist $f(x) = g(x) = \log(1 + x)$ für alle $x \in (-1, 1)$.
Etwas schwieriger wird es mit dem Randpunkt $x = 1$. Man benötigt hier den sogenannten *Abelschen Grenzwertsatz*, der die Stetigkeit der Funktion f an der Stelle 1 garantiert (wir verzichten auf den Beweis). Da aber f und g bei 1 stetig sind und auf $(-1, 1)$ übereinstimmen, folgt auch (wie?) $f(1) = g(1) = \log(2)$. □

Satz VIII.4.9. *Für alle $x \in [-1, 1]$ gilt*

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Für $|x| > 1$ ist die Reihe divergent.

Beweis. Wiederum zeigt man mit Hilfe von Satz VIII.4.4, dass der Konvergenzradius der obigen Potenzreihe gleich 1 ist. Ferner konvergiert die Reihe auch in den beiden Randpunkten -1 und 1 (Nachweis mit dem Leibniz-Kriterium). Sei nun $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ für alle $x \in [-1, 1]$. Aus Satz VIII.4.6 folgt

$$f'(x) := \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in (-1, 1)$$

(geometrische Reihe). Da auch $\arctan'(x) = 1/(1 + x^2)$ gilt, folgt: Es existiert ein $C \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = \arctan(x) + C$ für alle $x \in (-1, 1)$. Es ist aber $f(0) = 0 = \arctan(0)$, also muss $C = 0$ sein.
Für die Randpunkte -1 und 1 gilt wieder nach dem oben erwähnten Abelschen Grenzwertsatz, dass f an diesen Stellen stetig ist und es folgt wiederum, dass auch $f(1) = \arctan(1)$ und $f(-1) = \arctan(-1)$ gelten muss. □

Der obige Satz liefert insbesondere eine Reihendarstellung für π, denn

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

VIII.5 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Unter einer gewöhnlichen Differentialgleichung versteht man, grob gesprochen, eine Gleichung in der eine unbekannte Funktion y und ihre Ableitungen y', y'', usw. auftreten. Die höchste auftretende Ableitungsordnung nennt man die Ordnung der Differentialgleichung. Der Zusatz "gewöhnlich" bezieht sich darauf, dass in der Gleichung nur Funktionen von einer Variablen und ihre Ableitungen auftreten. Im Unterschied dazu gibt es auch sogenannte partielle Differentialgleichungen, in denen Funktionen mehrerer Veränderlicher und ihre partiellen Ableitungen (siehe Abschnitt VIII.12) auftreten. Wir wollen uns hier aber ausschließlich mit gewöhnlichen Differentialgleichungen befassen und uns zudem im Wesentlichen auf Gleichungen erster Ordnung beschränken.

Differentialgleichungen haben zahlreiche Anwendungen in den Naturwissenschaften, vor allem in der Physik (und natürlich auch in den darauf aufbauenden Ingenieurswissenschaften), aber z. B. auch in der Biologie (etwa zur Beschreibung des Wachstums von Tierpopulationen).

Eine allgemeine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung hat die Form

$$y'(t) = f(t, y(t)),$$

wobei f eine (vorgegebene) Funktion von zwei Variablen ist. Gesucht ist die Funktion y. Da Lösungen solcher Gleichungen in der Regel, wenn überhaupt, nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt sind, gibt man zusätzlich noch den Wert der Funktion an einer bestimmten Stelle t_0 vor, etwa $y(t_0) = y_0$ (die sogenannte *Anfangsbedingung*).

Die Variable von y bezeichnet man in diesem Zusammenhang übrigens häufig mit t, abgeleitet vom englischen Wort "time", da es sich bei vielen—wenn auch bei weitem nicht allen—Anwendungsproblemen um eine Zeitkoordinate handelt.

Leider gibt es keine allgemeinen Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen, aber für gewisse spezielle Typen von Gleichungen lässt sich eine Lösung explizit bestimmen. Einige solcher Resultate wollen wir in diesem Abschnitt kennenlernen. Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel.

Beispiel VIII.5.1. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Ferner seien $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'(t) = \varphi(t) \quad \text{für } t \in I$$

zusammen mit der Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$.

Gesucht sind also alle differenzierbaren Funktionen y auf I, deren Ableitung mit φ übereinstimmt und die an der Stelle t_0 den Wert y_0 annehmen.

Die Lösung einer solchen Differentialgleichung ist vergleichsweise einfach, da die Funktion y nicht explizit auftaucht (nur ihre Ableitung). Nimmt man an, dass y die obige Differentialgleichung nebst Anfangsbedingung erfüllt, so folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$y(t) - y_0 = y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} y'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\,\mathrm{d}s,$$

also

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\,\mathrm{d}s \quad \forall t \in I.$$

Umgekehrt bestätigt man leicht durch Ableiten, dass es sich hierbei tatsächlich um eine Lösung handelt.

Die obige Formel für y ist allerdings nur semi-explizit. Es kann durchaus vorkommen, dass sich das auftretende Integral nicht in geschlossener Form mittels elementarer Funktionen darstellen lässt.

Als konkretes Anwendungsbeispiel betrachten wir nun eine eindimensionale Bewegung eines Massenpunktes[3] mit konstanter Beschleunigung: Die Bewegung erfolge entlang der x-Achse und die Position des Massenpunktes zum Zeitpunkt t sei $x(t)$. Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t ist dann gerade die Ableitung $x'(t)$ und die Beschleunigung (zeitliche Änderung der Geschwindigkeit) zur Zeit t ist $x''(t)$.[4] Wir nehmen wie gesagt an, dass die Beschleunigung konstant ist, sagen wir gleich a. Ferner sei die Geschwindigkeit zum Anfangszeitpunkt t_0 gleich v_0 und die Position zur Zeit t_0 sei x_0, also

$$x''(t) = a \;\text{ für } t \geq t_0,\; x'(t_0) = v_0,\; x(t_0) = x_0.$$

Das ist eigentlich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Wir können diese aber zunächst als eine Differentialgleichung erster Ordnung für x' auffassen. Mit der obigen Lösungsformel erhalten wir dann

$$x'(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\,\mathrm{d}s = v_0 + a(t - t_0).$$

Eine weitere Anwendung dieser Lösungsformel liefert

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} (v_0 + a(s - t_0))\,\mathrm{d}s = x_0 + v_0(t - t_0) + \left[\frac{1}{2}a(s - t_0)^2\right]_{t_0}^{t} \\ &= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2. \end{aligned}$$

[3] Das heißt für die Praxis nicht unbedingt, dass es sich um ein kleines, näherungsweise punktförmiges Objekt handeln muss. Auch ein Auto oder sogar ein ganzer Planet können je nach Kontext als Punktmassen aufgefasst werden, indem man sie mit ihrem Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) identifiziert.

[4] Das kann man sich folgendermaßen klar machen: Im Zeitintervall zwischen t und $t + \varepsilon$ wird die Strecke $x(t + \varepsilon) - x(t)$ zurückgelegt. Die Durchschnittsgeschwindigkeit in diesem Zeitintervall beträgt also $(x(t + \varepsilon) - x(t))/\varepsilon$. Die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t ist dann der Grenzwert dieser Durchschnittsgeschwindigkeit für $\varepsilon \to 0$, also gerade $x'(t)$. Analoges gilt für die Beschleunigung als zeitliche Änderung der Geschwindigkeit. In der Physik schreibt man übrigens häufig $\dot{x}$ anstelle von x' für Ableitungen nach der Zeit. Wir bleiben hier aber bei der in der Mathematik üblichen Schreibweise für Ableitungen.

Als Spezialfall betrachten wir den freien Fall im homogenen Schwerefeld der Erde. Wählt man die Aufwärtsrichtung positiv, so beträgt die Beschleunigung $a = -g$, wobei $g \approx 9,81\, m/s^2$ (Erdbeschleunigung).[5] Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ befinde sich das Objekt in einer Höhe $x_0 = h$ über dem Erdboden und die Anfangsgeschwindigkeit sei $v_0 = 0$. Für die Position (Höhe über dem Erdboden) zur Zeit t ergibt sich damit

$$x(t) = h - \frac{1}{2}gt^2.$$

Für die Fallzeit t_F, also die Zeit bis zum Auftreffen auf den Boden, gilt $x(t_F) = 0$ und somit $t_F = \sqrt{2h/g}$.

Wir kommen nun zu einem etwas schwierigeren Typus von Differentialgleichungen. Als Beispiel betrachten wir zunächst das Wachstum einer Bakterienkultur. Es bezeichne $N(t)$ die Anzahl der Bakterien zur Zeit t. N_0 sei die Anfangszahl der Bakterien zum Zeitpunkt 0. Ein gängiges Wachstumsmodel besagt, dass die Wachstumsrate, also die Ableitung $N'(t)$, proportional zur Anzahl der bereits vorhandenen Bakterien $N(t)$ ist. Wir haben also die Differentialgleichung

$$N'(t) = \lambda N(t) \quad \text{für } t \geq 0$$

mit der Anfangsbedingung $N(0) = N_0$ zu lösen, wobei λ eine positive Konstante ist.

Erinnert man sich daran, dass die Ableitung der Exponentialfunktion wieder die Exponentialfunktion ist, so ist es nicht schwierig eine Lösung zu erraten, nämlich $N(t) = Ce^{\lambda t}$. Dabei ist C eine Konstante, die so gewählt werden muss, dass $N(0) = N_0$ gilt. Es folgt $C = N_0$ und damit $N(t) = N_0 e^{\lambda t}$.

Nun erhebt sich aber die Frage, ob es neben dieser Lösung nicht vielleicht noch weitere Lösungen der Differentialgleichung mit der selben Anfangsbedingung gibt. Der folgende Satz beantwortet diese Frage negativ.

Satz VIII.5.2. *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$ und $y_0, \alpha \in \mathbb{R}$. Sei $y : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*
1) y ist differenzierbar mit

$$y'(t) = \alpha y(t) \quad \forall t \in I \quad \textit{und} \quad y(t_0) = y_0.$$

2) $y(t) = y_0 e^{\alpha(t-t_0)}$ für alle $t \in I$.

Beweis. "2) $\Rightarrow$ 1)" bestätigt man leicht durch direktes Nachrechnen.
"1) $\Rightarrow$ 2)": Es gelte 1). Wir definieren eine Hilfsfunktion g durch $g(t) := y(t)e^{-\alpha(t-t_0)}$ für $t \in I$. Dann gilt

$$g'(t) = y'(t)e^{-\alpha(t-t_0)} - \alpha y(t)e^{-\alpha(t-t_0)} \quad \forall t \in I.$$

[5] In der Standardnotation physikalischer Einheiten steht m für Meter und s für Sekunde, die Beschleunigung beträgt also etwa 9,81 Meter pro Sekunde pro Sekunde.

Da nach Voraussetzung $y'(t) = \alpha y(t)$ gilt, folgt $g' = 0$. Nach Korollar VI.2.5 muss also g konstant sein, etwa gleich C. Es folgt $y(t) = g(t)e^{\alpha(t-t_0)} = Ce^{\alpha(t-t_0)}$ für alle $t \in I$. Insbesondere folgt $y_0 = y(t_0) = C$. Damit ist der Beweis abgeschlossen. $\square$

In Bezug auf das obige Problem $N' = \lambda N$, $N(0) = N_0$, besagt dieser Satz also, dass $N(t) = N_0 e^{\lambda t}$ die einzige Lösung ist. Man erhält also ein exponentielles Wachstum der Bakterienkultur.[6]

Betrachtet man stattdessen das Problem $N' = -\lambda N$, $N(0) = N_0$ (wobei immer noch $\lambda > 0$ gelten soll), so beschreibt diese Differentialgleichung keinen Wachstums-, sondern einen Zerfallsprozess, etwa den radioaktiven Zerfall eines Elements.[7] Aufgrund des obigen Satzes erhält man die eindeutig bestimmte Lösung $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

Satz VIII.5.2 lässt sich wie folgt verallgemeinern.

Satz VIII.5.3. *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ und $a : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Setze $A(t) := \int_{t_0}^t a(s)\, ds$ für alle $t \in I$.*

Sei $y : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
1) y ist differenzierbar mit

$$y'(t) = a(t)y(t) \quad \forall t \in I \quad \textit{und} \quad y(t_0) = y_0.$$

2) $y(t) = y_0 e^{A(t)}$ für alle $t \in I$.

Beweis. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt $A'(t) = a(t)$ für alle $t \in I$.
Gilt nun 2), so folgt $y'(t) = y_0 e^{A(t)} A'(t) = a(t)y(t)$ für alle $t \in I$ und (wegen $A(t_0) = 0$) auch $y(t_0) = y_0$.
Gelte nun umgekehrt 1). Analog zum Beweis von Satz VIII.5.2 definieren wir eine Hilfsfunktion g durch $g(t) := y(t)e^{-A(t)}$ für alle $t \in I$. Dann gilt

$$g'(t) = y'(t)e^{-A(t)} - A'(t)y(t)e^{-A(t)} = e^{-A(t)}(y'(t) - a(t)y(t)) \quad \forall t \in I.$$

Nach Voraussetzung 1) gilt $y' = ay$, also ist $g' = 0$ und folglich (Korollar VI.2.5) g konstant, sagen wir wieder mit Wert C. Es folgt $y(t) = Ce^{A(t)}$ für alle $t \in I$ und wegen $A(t_0) = 0$ muss $C = y(t_0) = y_0$ gelten. $\square$

Beispiel: Wir betrachten die Differentialgleichung $y'(t) = ty(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = y_0$. Hier ist also $t_0 = 0$ und $a(t) = t$, folglich $A(t) = \int_0^t s \,\mathrm{d}s = t^2/2$. Die Lösung der Differentialgleichung lautet nach dem obigen Satz also $y(t) = y_0 e^{t^2/2}$.

[6] Das ist eigentlich nicht realistisch, da das Populationswachstum in der Praxis meist durch die Beschränktheit der Resourcen (z. B. ein begrenzter Nährboden für die Bakterienkultur) eingeschränkt ist. Realistischere Wachstumsmodelle wollen wir hier aber nicht diskutieren.

[7] $N(t)$ ist die Anzahl der zum Zeitpunkt t noch nicht zerfallenen Atomkerne, N_0 ist die Anzahl der ursprünglich vorhandenen Atomkerne.

Eine weitere Verallgemeinerung stellt der folgende Satz dar, der auch eine mögliche, sogenannte Inhomogenität b in der Differentialgleichung mit berücksichtigt.

Satz VIII.5.4. *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ und $a, b : I \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Setze $A(t) := \int_{t_0}^t a(s)\,ds$ und $B(t) := e^{A(t)} \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)}\,ds$ für alle $t \in I$.*

Sei $y : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
1) y ist differenzierbar mit

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \quad \forall t \in I \quad \textit{und} \quad y(t_0) = y_0.$$

2) $y(t) = y_0 e^{A(t)} + B(t)$ für alle $t \in I$.

Beweis. Vorüberlegung: Wie oben ist $A'(t) = a(t)$ für alle $t \in I$ (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Für die Ableitung von B ergibt sich aus dem Hauptsatz, sowie aus der Produkt- und der Kettenregel:

$$\begin{aligned} B'(t) &= A'(t)e^{A(t)} \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)}\,\mathrm{d}s + e^{A(t)}b(t)e^{-A(t)} \\ &= a(t)B(t) + b(t), \end{aligned}$$

also ist B eine Lösung der Differentialgleichung. Allerdings gilt für den Anfangswert $B(t_0) = 0$.
"2) $\Rightarrow$ 1)": Sei $y(t) = y_0 e^{A(t)} + B(t)$ für alle $t \in I$. Dann folgt

$$y'(t) = y_0 A'(t)e^{A(t)} + B'(t) = y_0 a(t)e^{A(t)} + a(t)B(t) + b(t) = a(t)y(t) + b(t).$$

Ferner ist $y(t_0) = y_0 e^0 + B(t_0) = y_0$, also gilt 1).
"1) $\Rightarrow$ 2)": Es gelte $y' = ay + b$ und $y(t_0) = y_0$. Sei $g := y - B$. Dann gilt

$$g'(t) = y'(t) - B'(t) = a(t)y(t) + b(t) - a(t)B(t) - b(t) = a(t)g(t)$$

für alle $t \in I$. Außerdem ist $g(t_0) = y(t_0) - B(t_0) = y_0$. Nach Satz VIII.5.3 gilt daher $g(t) = y_0 e^{A(t)}$ und folglich $y(t) = y_0 e^{A(t)} + B(t)$ für alle $t \in I$. □

Als konkretes Anwendungsbeispiel aus der Physik diskutieren wir nun das Aufladen eines Kondensators.[8] Wir betrachten einen Schaltkreis bestehend

[8] Ein Kondensator ist ein Bauelement in elektrischen Schaltkreisen, das zur Speicherung elektrischer Ladung dient. Ein Kondensator besteht aus zwei dünnen Leiterplatten, die durch ein isolierendes Medium (z. B. einfach Luft oder Keramik) voneinander getrennt sind (beim Plattenkondensator sind die Leiterplatten als parallele Ebenen angeordnet, beim Zylinderkondensator sind sie zu einem inneren und einem äußeren Zylindermantel aufgerollt). Wird eine elektrische Spannung an den Kondensator angelegt, so wird die eine Seite positiv und die andere in gleichem Maße negativ aufgeladen. Die auf dem Kondensator gespeicherte Ladung Q ist proportional zur angelegten Spannung U, d. h. es ist $Q = CU$, wobei C eine Konstante ist, die sogenannte Kapazität des Kondensators.

aus einem Kondensator der Kapazität C und einem Widerstand R, die in Reihe geschaltet und an eine Spannungsquelle angeschlossen sind. Diese liefere eine konstante Spannung U_0. Es sei $Q(t)$ die zum Zeitpunkt t auf dem Kondensator gespeicherte Ladung. Zum Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$ (wenn die Spannungsquelle eingeschaltet wird) sei der Kondensator ungeladen, also $Q(0) = 0$.

Die Stromstärke im Schaltkreis ist $I(t) = Q'(t)$. Die über dem Widerstand R abfallende Spannung zum Zeitpunkt t ist $RI(t)$ und die über dem Kondensator abfallende Spannung ist $Q(t)/C$. Also gilt

$$U_0 = RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = RQ'(t) + \frac{Q(t)}{C} \quad \text{für } t \geq 0.$$

Wir haben also die Differentialgleichung

$$Q'(t) = -\frac{Q(t)}{RC} + \frac{U_0}{R} \quad \text{für } t \geq 0$$

mit der Anfangsbedingung $Q(0) = 0$ zu lösen.

Nach Satz VIII.5.4 lautet die eindeutig bestimmte Lösung

$$Q(t) = e^{A(t)} \int_0^t \frac{U_0}{R} e^{-A(s)} \, \mathrm{d}s,$$

wobei $A(t) = -\int_0^t (RC)^{-1} \, \mathrm{d}s = -t/(RC)$ ist. Es folgt

$$\begin{aligned} Q(t) &= \frac{U_0}{R} e^{-t/(RC)} \int_0^t e^{s/(RC)} \, \mathrm{d}s = \frac{U_0}{R} e^{-t/(RC)} \Big[RC e^{s/(RC)} \Big]_0^t \\ &= \frac{U_0}{R} e^{-t/(RC)} RC (e^{t/(RC)} - 1) = U_0 C (1 - e^{-t/(RC)}). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\lim_{t\to\infty} Q(t) = U_0 C$. Für die Stromstärke ergibt sich

$$I(t) = Q'(t) = \frac{U_0}{R} e^{-t/(RC)}.$$

Als Nächstes betrachten wir Differentialgleichungen mit getrennten Variablen (d. h. die rechte Seite lässt sich darstellen als Produkt zweier Terme, von denen einer nur von t abhängt, während der andere zwar von y, aber nicht direkt von t abhängig ist).

Satz VIII.5.5. *Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und seien $g : J \to \mathbb{R}$, $h : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Es gelte $g(z) \neq 0$ für alle $z \in J$. Weiter sei $t_0 \in I$ und y_0 sei ein innerer Punkt von J.*

Dann existiert ein $\delta > 0$ mit folgenden Eigenschaften:
1) Es gibt genau eine differenzierbare Funktion $y : I \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to J$ mit

$$y'(t) = g(y(t))h(t) \quad \text{für } t \in I \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \quad \text{und } y(t_0) = y_0.$$

2) Für die Funktion y aus 1) gilt

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(z)}\, dz = \int_{t_0}^{t} h(s)\, ds \quad \textit{für alle } t \in I \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta).$$

Beweis. Wir setzen

$$G(u) := \int_{y_0}^{u} \frac{1}{g(z)}\, \mathrm{d}z \quad \text{für } u \in J$$

und

$$H(t) := \int_{t_0}^{t} h(s)\, \mathrm{d}s \quad \text{für } t \in I.$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist $G'(u) = 1/g(u)$ für alle $u \in J$ und $H'(t) = h(t)$ für alle $t \in I$.
Da g stetig ist und keine Nullstellen besitzt, ist $g(u) > 0$ für alle $u \in J$ oder $g(u) < 0$ für alle $u \in J$ (Zwischenwertsatz), also ist G' strikt positiv oder strikt negativ. Folglich ist G streng monoton (siehe Satz VI.2.6).
Wegen der Stetigkeit von G ist $M := \mathrm{Im}(G)$ ein Intervall (Zwischenwertsatz). Da y_0 ein innerer Punkt von J ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \subseteq J$. Nehmen wir an, dass G streng monoton steigend ist, so ist $G(y_0 - \varepsilon) < G(y_0) = 0 < G(y_0 + \varepsilon)$. Sei $\varepsilon_1 := -G(y_0 - \varepsilon)$ und $\varepsilon_2 := G(y_0 + \varepsilon)$. Da M ein Intervall ist, folgt $[-\varepsilon_1, \varepsilon_2] \subseteq M$, also erst recht $[-\tau, \tau] \subseteq M$, wobei $\tau := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ ist.
Analog findet man auch im Fall, dass G streng monoton fällt ein Intervall $[-\tau, \tau] \subseteq M$.
Da H insbesondere stetig ist mit $H(t_0) = 0$, existiert ein $\delta > 0$ mit $|H(t)| \leq \tau$, also $H(t) \in M$ für $t \in I \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.
Fasst man G auf als Abbildung von J nach M, so ist G streng monoton und surjektiv. Insbesondere existiert die Umkehrabbildung $G^{-1} : M \to J$. Wir definieren nun $y(t) := G^{-1}(H(t))$ für $t \in I \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.
Mit Hilfe der Kettenregel und der Regel zur Ableitung der Umkehrfunktion folgt (beachte $G' = 1/g$ und $H' = h$)

$$\begin{aligned} y'(t) &= (G^{-1})'(H(t))H'(t) = \frac{1}{G'(G^{-1}(H(t)))} h(t) \\ &= g(G^{-1}(H(t)))h(t) = g(y(t))h(t) \end{aligned}$$

für alle $t \in I \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Außerdem ist $y(t_0) = G^{-1}(H(t_0)) = G^{-1}(0) = y_0$.
Damit ist die Existenzaussage in 1) bewiesen. Nun zeigen wir noch simultan die Eindeutigkeit und 2). Sei $\tilde{y} : I \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to J$ irgendeine differenzierbare Funktion mit $\tilde{y}'(t) = g(\tilde{y}(t))h(t)$ für alle $t \in I \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ und $\tilde{y}(t_0) = y_0$. Dann gilt für alle $t \in I \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ nach der Substitutionsregel:

$$\int_{t_0}^{t} h(s)\, \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \frac{\tilde{y}'(s)}{g(\tilde{y}(s))}\, \mathrm{d}s = \int_{y_0}^{\tilde{y}(t)} \frac{1}{g(z)}\, \mathrm{d}z$$

(das ist gerade die Formel unter 2) für $\tilde{y}$).
Es folgt $H(t) = G(\tilde{y}(t))$ und somit $\tilde{y}(t) = G^{-1}(H(t)) = y(t)$ für alle $t \in I \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, womit auch die Eindeutigkeitsaussage in 1) gezeigt ist. $\square$

Man beachte, dass der obige Satz von lokaler Natur ist. Die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage beziehen sich jeweils nur auf eine (unter Umständen sehr kleine) Umgebung der Stelle t_0, nicht auf das gesamte Intervall I.

Als erstes Anwendungsbeispiel betrachten wir ein mit einer Flüssigkeit gefülltes Fass. Die Flüssigkeit sei inkompressibel (d. h. ihre Dichte sei unveränderlich). Am unteren Ende des Fasses befinde sich ein kleines Loch, aus dem die Flüssigkeit austritt, so dass sich die Füllhöhe des Fasses mit der Zeit verringert. Die Füllhöhe zur Zeit t sei $y(t)$. Die Füllhöhe zum Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$ sei $y_0 > 0$. Nach dem Gesetz von Torricelli[9] gilt

$$y'(t) = -c\sqrt{y(t)}, \tag{VIII.4}$$

wobei c eine positive Konstante ist.[10]

Diese Gleichung ist von der Form $y'(t) = g(y(t))h(t)$, wobei $h(t) := -c$ und $g(z) := \sqrt{z}$. Für alle $u > 0$ gilt

$$G(u) := \int_{y_0}^{u} \frac{1}{g(z)}\,\mathrm{d}z = \int_{y_0}^{u} \frac{1}{\sqrt{z}}\,\mathrm{d}z = 2(\sqrt{u} - \sqrt{y_0}).$$

Außerdem ist $H(t) := \int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s = -ct$ für alle $t \geq 0$.

Das Bild von G ist $\mathrm{Im}(G) = (-2\sqrt{y_0}, \infty)$. Es ist also $H(t) \in \mathrm{Im}(G)$ genau dann, wenn $t < 2\sqrt{y_0}/c =: T$. Nach dem Beweis des obigen Satzes besitzt die Differentialgleichung (VIII.4) mit der Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ genau eine Lösung auf $[0, T)$ und für diese gilt $G(y(t)) = H(t)$ für alle $t \in [0, T)$.

Es folgt $2(\sqrt{y(t)} - \sqrt{y_0}) = -ct$, also $y(t) = (\sqrt{y_0} - ct/2)^2$ für $t \in [0, T)$. Es ist $y(t) > 0$ für alle $t \in [0, T)$ und $\lim_{t \to T} y(t) = 0$. $T = 2\sqrt{y_0}/c$ ist also die Zeit, die verstreicht, bis das Fass vollständig geleert ist.

Als zweites Anwendungsbeispiel betrachten wir erneut den senkrechten Fall eines Objektes im homogenen Schwerefeld der Erde, wobei wir diesmal aber auch den Luftwiderstand berücksichtigen wollen. Das Objekt habe die Masse m und es bezeichne wieder g die Erdbeschleunigung. Wählt man wieder die Aufwärtsrichtung positiv, so ist die auf den Körper wirkende Gravitationskraft gleich $-mg$. Bezeichnet man mit $v(t)$ die Geschwindigkeit des Körpers zur Zeit t, so ist die durch den Luftwiderstand auf den Körper aus-

[9] Evangelista Torricelli (1608–1647): italienischer Physiker und Mathematiker. Neben dem obigen Ausflussgesetz ist z. B. auch die (veraltete) Maßeinheit Torr für den Druck nach ihm benannt.

[10] Es ist $c = (A_2/A_1)\sqrt{2g}$, wobei g die Erdbeschleunigung, A_1 die Grundfläche des Fasses und A_2 die (sehr viel kleinere) Fläche des Austrittsloches ist.

geübte Kraft von der Form $cv^2(t)$, wobei c eine positive Konstante ist.[11] Nach dem zweiten Newtonschen Axiom ("Kraft gleich Masse mal Beschleunigung") gilt also

$$v'(t) = -g + \frac{c}{m} v^2(t). \tag{VIII.5}$$

Die Anfangsbedingung sei $v(0) = 0$.

Die rechte Seite dieser Differentialgleichung ist von der Form $h(t)f(v(t))$, wobei $f(y) := (c/m)y^2 - g$ und h die konstante Funktion mit Wert 1 ist. Für alle $u \in J := (-\sqrt{mg/c}, \sqrt{mg/c})$ ist

$$\begin{aligned}
G(u) &:= \int_0^u \frac{1}{f(y)}\,\mathrm{d}y = \frac{m}{c}\int_0^u \frac{1}{y^2 - gm/c}\,\mathrm{d}y\\
&= \frac{m}{c}\int_0^u \frac{1}{(y+\sqrt{gm/c})(y-\sqrt{gm/c})}\,\mathrm{d}y\\
&= \frac{m}{c}\int_0^u \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{gm}}\left(\frac{1}{y-\sqrt{gm/c}} - \frac{1}{y+\sqrt{gm/c}}\right)\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gc}}\int_0^u \left(\frac{1}{y-\sqrt{gm/c}} - \frac{1}{y+\sqrt{gm/c}}\right)\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gc}}\Big[\log(\sqrt{gm/c}-y) - \log(y+\sqrt{gm/c})\Big]_0^u\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gc}}\left[\log\left(\frac{\sqrt{gm/c}-y}{\sqrt{gm/c}+y}\right)\right]_0^u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gc}}\log\left(\frac{\sqrt{gm/c}-u}{\sqrt{gm/c}+u}\right).
\end{aligned}$$

Weiter ist $H(t) := \int_0^t h(s)\mathrm{d}s = t$ für alle $t \geq 0$. Es ist also $H(t) \in \mathrm{Im}(G)$ genau dann, wenn es ein $u \in J$ mit

$$2t\sqrt{\frac{cg}{m}} = \log\left(\frac{\sqrt{gm/c}-u}{\sqrt{gm/c}+u}\right)$$

gibt. Diese Gleichung lässt sich äquivalent umformen zu

$$u = \sqrt{\frac{gm}{c}}\left(\frac{1-e^{2t\sqrt{cg/m}}}{1+e^{2t\sqrt{cg/m}}}\right)$$

[11] Es ist $c = \rho A c_w/2$, wobei A die Querschnittsfläche des fallenden Körpers, ρ die Dichte der Luft und c_w der sogenannte Luftwiderstandsbeiwert ist. Dieser stellt ein Maß dafür dar, wie "stromlinienförmig" der fallende Körper ist (je "stromlinienförmiger" der Körper, desto geringer ist der c_w-Wert und folglich der Luftwiderstand). Die Annahme der Abhängigkeit des Luftwiderstands von v^2 entspricht dem Fall der sogenannten Newtonschen Reibung, die eigentlich erst bei höheren Geschwindigkeiten auftritt. Die Annahme ist also eigentlich nicht so ganz kompatibel mit unserer nachfolgend betrachteten Anfangsbedingung $v(0) = 0$. Inwieweit die folgenden Resultate also tatsächlich realistisch sind, sei dahingestellt. Uns geht es vorrangig um die zugrundeliegende Mathematik.

(Übung). Man beachte, dass die rechte Seite für alle $t \geq 0$ in J liegt.

Es folgt, dass die Differentialgleichung (VIII.5) genau eine Lösung $v : [0, \infty) \to J$ mit $v(0) = 0$ besitzt und für diese gilt $H(t) = G(v(t))$ für alle $t \geq 0$. Die obige Rechnung liefert

$$v(t) = \sqrt{\frac{gm}{c}} \left(\frac{1 - e^{2t\sqrt{cg/m}}}{1 + e^{2t\sqrt{cg/m}}} \right) \quad \forall t \geq 0.$$

Mit Hilfe der Tangens hyperbolicus Funktion tanh, die definiert ist durch $\tanh(x) := (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$, kann man das Ergebnis auch kürzer schreiben als $v(t) = -\sqrt{gm/c}\tanh(t\sqrt{cg/m})$.

Zum Schluß dieses Abschnitts betrachten wir noch kurz eines der wichtigsten physikalischen Grundmodelle, den sogenannten *harmonischen Oszillator*: Eine Masse m sei an einer horizontal liegenden Sprungfeder angebracht und liege auf einer reibungsfreien Oberfläche. Die Ruhelage der Feder befinde sich im Koordinatenursprung. Die Auslenkung der Feder zum Zeitpunkt t sei $x(t)$. Für die auf die Masse m wirkende Rückstellkraft gilt nach dem Hookeschen Gesetz[12] $F(t) = -Dx(t)$, wobei D eine positive Konstante (die sogenannte Federkonstante) ist. Nach dem zweiten Newtonschen Axiom ("Kraft gleich Masse mal Beschleunigung") gilt also

$$x''(t) = -\frac{D}{m}x(t) = -\omega^2 x(t),$$

wobei $\omega := \sqrt{D/m}$.

Das ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Setzt man $x_1(t) := \sin(\omega t)$ und $x_2(t) := \cos(\omega t)$, so ist leicht zu sehen, dass x_1 und x_2 beide Lösungen dieser Differentialgleichung sind. Dann ist aber auch $c_1 x_1 + c_2 x_2$ eine Lösung, wobei c_1 und c_2 beliebige Konstanten sind. Ohne Beweis merken wir an, dass es keine weiteren Lösungen gibt.

Es muss also $x(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)$ für geeignete Konstanten c_1 und c_2 gelten. Diese Konstanten kann man aus den Anfangsbedingungen bestimmen. Wir betrachten hier die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ (d. h. die Auslenkung zum Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$ ist x_0) und $x'(0) = 0$ (d. h. die Masse befindet sich zu Anfang in Ruhe).

Wegen $x(0) = c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0) = c_2$ folgt sofort $c_2 = x_0$. Ferner ist $x'(t) = c_1\omega\cos(\omega t) - x_0\omega\sin(\omega t)$, also $x'(0) = c_1\omega$. Es folgt $c_1 = 0$. Also ist

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t).$$

Die Masse an der Feder vollführt also eine periodische Bewegung (Schwingung). Da cos die Periode 2π hat, ist die Periode T von x (die Schwingungsdauer) gegeben durch $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/D}$.

[12]Benannt nach dem englischen Universalgelehrten Robert Hooke (1635–1703).

VIII.6 Konvexe Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir eine spezielle Klasse von Funktionen, deren Graph ein einheitliches Krümmungsverhalten aufweist. Die formale Definition lautet wie folgt.

Definition VIII.6.1. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, falls folgendes gilt:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in [0,1].$$

f heißt *konkav*, falls die entsprechende Ungleichung mit $\geq$ gilt.

Geometrisch bedeutet Konvexität/Konkavität von f, dass der Graph von f auf jedem Teilintervall $[x, y]$ komplett unterhalb/oberhalb der Sekante durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$ verläuft. Noch etwas anders ausgedrückt: Ist f konvex, so ist der Garph von f linksgekrümmt, d. h. durchläuft man den Graphen von f in positiver x-Richtung, so beschreibt dieser eine Linkskurve. Bei konkaven Funktionen ist der Graph entsprechend rechtsgekrümmt.

Wir beweisen nun zunächst folgende Charakterisierung konvexer Funktionen (mit deren Hilfe können wir dann leicht Beispiele angeben).

Satz VIII.6.2. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gilt: f ist konvex $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

Entsprechend gilt: f ist konkav $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. (a) Sei $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f' monoton steigend.
Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und sei $\lambda \in (0,1)$. Ohne Einschränkung sei $x < y$. Wir setzen $z := \lambda x + (1-\lambda)y$. Dann ist $x < z < y$.
Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existieren $s \in (x, z)$ und $t \in (z, y)$ mit

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(s) \quad \text{und} \quad \frac{f(y) - f(z)}{y - z} = f'(t).$$

Es folgt $s < t$ und somit $f'(s) \leq f'(t)$. Es folgt

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$

Nun ist $z - x = (1-\lambda)(y - x)$ und $y - z = \lambda(y - x)$. Damit ergibt sich

$$\lambda(f(z) - f(x)) \leq (1-\lambda)(f(y) - f(z)).$$

Daraus folgt aber $-\lambda f(x) \leq (1-\lambda) f(y) - f(z)$ und somit auch $f(z) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. Damit ist die Konvexität von f bewiesen.
(b) Sei nun umgekehrt f konvex. Angenommen es gibt ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f''(x_0) < 0$.

Wir definieren eine Hilfsfunktion h durch $h(x) := f(x) - f'(x_0)(x - x_0)$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $h'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ und $h''(x) = f''(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es folgt $h'(x_0) = 0$ und $h''(x_0) = f''(x_0) < 0$. Daher hat h an der Stelle x_0 ein lokales Maximum und zwar sogar ein striktes, d. h. es gibt ein gewisses $\delta > 0$ mit $h(x) < h(x_0)$ für alle $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$ (vgl. den Beweis von Satz VI.2.7.).
Sei $a := x_0 - \delta$ und $b := x_0 + \delta$. Es folgt

$$h(x_0) = \frac{1}{2}h(x_0) + \frac{1}{2}h(x_0) > \frac{h(a) + h(b)}{2}.$$

Andererseits ist wegen der Konvexität von f

$$h(x_0) = f(x_0) = f(a/2 + b/2) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

und es gilt $h(a) + h(b) = f(a) + f(b) - f'(x_0)(a - x_0) - f'(x_0)(b - x_0) = f(a) + f(b) - f'(x_0)(a + b - 2x_0) = f(a) + f(b)$.
Somit erhalten wir den Widerspruch $(h(a) + h(b))/2 < h(x_0) \leq (h(a) + h(b))/2$.
Es muss also $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten.
Die Aussage über konkave Funktionen führt man einfach durch Multiplikation mit -1 auf den konvexen Fall zurück. $\square$

Beispiele:
1) Jede lineare Funktion $f(x) = ax + b$ ist sowohl konvex als auch konkav. Das folgt natürlich sofort aus dem obigen Satz, denn $f'' = 0$. Man kann diese Aussage aber auch leicht direkt anhand der Definition beweisen (tun Sie dies zur Übung).
2) Ein quadratisches Polynom $f(x) = ax^2 + bx + c$ ist konvex für $a > 0$ und konkav für $a < 0$ (denn $f'' = 2a$).
3) Die Exponentialfunktion ist konvex, denn $\exp''(x) = e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Für konvexe Funktionen gilt folgende nützliche Ungleichung (das ist die Verallgemeinerung der die Konvexität definierenden Ungleichung auf n Summanden).

Satz VIII.6.3 (Jensen-Ungleichung)**.** *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ und alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$*

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Beweis. Wir argumentieren induktiv nach n. Der Induktionsanfang ($n = 1$) ist klar.

Angenommen nun die Behauptung gilt für ein $n \in \mathbb{N}$ und es seien $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}^+$ mit $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.
Wir setzen $\mu := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Dann ist $\mu > 0$ und $\mu < \mu + \lambda_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.
Zudem gilt $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu^{-1} = \mu^{-1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.
Nach unserer Induktionsvoraussetzung gilt also

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu^{-1} x_i\right) \leq \mu^{-1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Wegen der Konvexität von f gilt aber auch

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\mu \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu^{-1} x_i + (1-\mu) x_{n+1}\right) \\ &\leq \mu f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu^{-1} x_i\right) + (1-\mu) f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Kombiniert man beide Ungleichungen, so folgt

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) + (1-\mu) f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$

□

Als eine Anwendung beweisen wir nun noch die allgemeine Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel: Für reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n > 0$ nennen wir

$$A(x_1, \ldots, x_n) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

das *arithmetische Mittel* und

$$G(x_1, \ldots, x_n) := \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}$$

das *geometrische Mittel* von $x_1, \ldots, x_n$.

Speziell für zwei positive Zahlen x und y ist also $A(x, y) = (x+y)/2$ und $G(x, y) = \sqrt{xy}$. Man zeigt hier leicht $G(x, y) \leq A(x, y)$ (Übung). Dies gilt auch allgemein für n Zahlen, wie der folgende Satz zeigt.

Satz VIII.6.4. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_1, \ldots, x_n > 0$ gilt $G(x_1, \ldots, x_n) \leq A(x_1, \ldots, x_n)$.*

Beweis. Wir setzen $y_i := \log(x_i)$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Da die Exponentialfunktion konvex ist (siehe oben), folgt aus der Jensen-Ungleichung

$$\exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \exp(y_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Es ist aber

$$\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \left(\exp\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\right)^{1/n} = \left(\prod_{i=1}^{n} \exp(y_i)\right)^{1/n} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}.$$

Also gilt

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

□

VIII.7 Komplexe Zahlen

In diesem Abschnitt wollen wir den Körper der komplexen Zahlen kennenlernen. Formal handelt es sich bei komplexen Zahlen um Paare von reellen Zahlen, also um Elemente von $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Auf der Menge $\mathbb{R}^2$ führen wir zunächst die folgende, naheliegende Addition ein:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \quad \forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$$

Man zeigt leicht, dass für diese Addition das Assoziativ- und das Kommutativgesetz gilt. Ferner ist offensichtlich $(0, 0)$ das neutrale Element der Addition und das additive Inverse zu $z = (a, b)$ ist $-z = (-a, -b)$.

Als Nächstes wollen wir auch eine Multiplikation auf $\mathbb{R}^2$ erklären und zwar derart, dass ein Körper entsteht (die Definition hierzu mag zunächst etwas seltsam wirken, wir werden aber später sehen, was der Sinn dahinter ist). Für alle $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ setzen wir

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Nun kann man nachrechnen, dass für diese Multiplikation ebenfalls das Assoziativ- und Kommutativgesetz gilt, dass $(1, 0)$ neutrales Element der Multiplikation ist und das Addition und Multiplikation durch das Distributivgesetz verknüpft sind (all das überlasse ich Ihnen zur Übung). Zu einem Körper fehlen uns damit nur noch die multiplikativen Inversen. Sei also $z = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Dann gilt

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) = \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} - \frac{-b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab}{a^2 + b^2} + \frac{ab}{a^2 + b^2}\right) = (1, 0).$$

Also ist

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right).$$

Somit bildet $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ einen Körper. Er wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet und *Körper der komplexen Zahlen* genannt.

Als Nächstes setzen wir noch $i := (0, 1)$. Diese komplexe Zahl wird *imaginäre Einheit* genannt.

Entscheidend ist nun die Beobachtung $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$. Ferner beachte man, dass $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$ und $(a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt. Indem man also eine reelle Zahl a mit der komplexen Zahl $(a, 0)$ identifiziert, kann man $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen. In diesem Sinne gilt dann also $i^2 = -1$.

Das ist die wesentliche Motivation für die Einführung der komplexen Zahlen, denn im Bereich der reellen Zahlen hat die Gleichung $x^2 = -1$ keine Lösung.

Nun können wir komplexe Zahlen auch etwas anders darstellen, es gilt nämlich $(a, b) = a + ib$, wie man leicht nachrechnet. Die Multiplikation kann man dann mit Hilfe des Distributivgesetzes und der Beziehung $i^2 = -1$ ganz einfach ausführen: Es ist

$$(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = ac - bd + i(ad + bc).$$

Zum Beispiel ist $(1 + i)(2 + i) = 2 + 2i + i + i^2 = 1 + 3i$.

Auch den Quotienten zweier komplexer Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ mit $w \neq 0$ kann man wie im reellen Fall einfach als $z/w := zw^{-1}$ definieren und es gelten die von den reellen Zahlen bekannten Bruchrechenregeln (mit völlig analogen Beweisen). Ebenso definiert man Potenzen z^n (mit $n \in \mathbb{N}_0$ bzw. sogar $n \in \mathbb{Z}$, falls $z \neq 0$) genau wie im reellen Fall und es gelten dann die bekannten Potenzgesetze.

Als Nächstes führen wir noch die folgenden Begriffe ein.

Definition VIII.7.1. Sei $z = a + ib$ eine komplexe Zahl. Dann heißt $\mathrm{Re}(z) := a$ der *Realteil* und $\mathrm{Im}(z) := b$ der *Imaginärteil* von z. Ferner heißt $\bar{z} := a - ib$ die *komplex konjugierte Zahl* von z.

Stellt man sich die komplexen Zahlen geometrisch als Punkte in der Ebene vor, so ist der Realteil gerade die Koordinate auf der horizontalen Achse und der Imaginärteil die Koordinate auf der vertikalen Achse. Die Operation der komlexen Konjugation bedeutet geometrisch eine Spiegelung an der horizontalen Achse. Mit ihrer Hilfe lassen sich auch Brüche komplexer Zahlen leicht berechnen, indem man nämlich mit dem komplex Konjugierten des Nenners erweitert: Seien $z = a + ib$ und $w = c + id$ zwei komplexe Zahlen, wobei $w \neq 0$ sei. Dann gilt

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{(c + id)(c - id)} = \frac{z\bar{w}}{c^2 + d^2},$$

Der Witz hierbei ist, dass nun im Nenner nur noch eine reelle Zahl steht und den Zähler $z\bar{w}$ kann man leicht ausrechnen.
Beispiel: Es ist

$$\frac{1 + i}{3 + 2i} = \frac{(1 + i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \frac{3 - 2i + 3i - 2i^2}{9 + 4} = \frac{5}{13} + \frac{1}{13}i.$$

Nun definieren wir noch den Betrag einer komplexen Zahl.

Definition VIII.7.2. Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$ (wobei $a, b \in \mathbb{R}$). Wir setzen $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$.

Aus dem Satz des Pythagoras ergibt sich, dass $|z|$ gerade der Abstand des Punktes (a, b) vom Koordinatenursprung $(0, 0)$ ist. Ferner gelten folgende Rechenregeln.

Lemma VIII.7.3. *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:*

(i) $|z|^2 = z\bar{z}$

(ii) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

(iii) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$

(iv) $|zw| = |z||w|$

(v) $|z + w| \leq |z| + |w|$ *(Dreiecksungleichung)*

Beweis. (i), (ii) und (iii) können Sie zur Übung selbst beweisen. (iv) ergibt sich daraus wie folgt: $|zw|^2 = (zw)\overline{zw} = (zw)(\bar{z}\bar{w}) = (z\bar{z})(w\bar{w}) = |z|^2|w|^2$.
(v) Mit dem schon Bewiesenen erhält man

$$\begin{aligned}|z + w|^2 &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{w} + \bar{z}w \\ &= |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} = |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}(z\bar{w}) \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\bar{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||\bar{w}| \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2,\end{aligned}$$

wobei wir noch die Ungleichung $\mathrm{Re}(u) \leq |\mathrm{Re}(u)| \leq \sqrt{\mathrm{Re}(u)^2 + \mathrm{Im}(u)^2} = |u|$ ausgenutzt haben. □

Mit Hilfe des Betrages kann man nun auch analog wie im reellen Fall die Konvergenz einer Folge komplexer Zahlen erklären.

Definition VIII.7.4. Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ heißt konvergent gegen $z \in \mathbb{C}$ (in Zeichen: $z_n \to z$), falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0\, |z_n - z| \leq \varepsilon.$$

Die Konvergenz einer komplexen Zahlenfolge kann man wie folgt auf die Konvergenz von Real- und Imaginärteil zurückführen.

Lemma VIII.7.5. *Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und sei $z \in \mathbb{C}$. Sei $a_n := \mathrm{Re}(z_n)$ und $b_n := \mathrm{Im}(z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner sei $a := \mathrm{Re}(z)$ und $b := \mathrm{Im}(z)$. Dann gilt:*

$$z_n \to z \quad \Leftrightarrow \quad a_n \to a \text{ und } b_n \to b.$$

Beweis. 1) Es gelte $z_n \to z$ und es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|z_n - z| \le \varepsilon$ für $n \ge n_0$. Für diese n gilt dann auch

$$|a_n - a| = \sqrt{(a_n - a)^2} \le \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} = |z_n - z| \le \varepsilon.$$

Also gilt $a_n \to a$ und analog zeigt man auch $b_n \to b$.
2) Es gelte $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \le \varepsilon/\sqrt{2}$ für $n \ge n_1$ und $|b_n - b| \le \varepsilon/\sqrt{2}$ für $n \ge n_2$.
Sei $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Dann gilt für alle $n \ge n_0$

$$|z_n - z| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} \le \sqrt{\varepsilon^2/2 + \varepsilon^2/2} = \varepsilon.$$

Also gilt $z_n \to z$. □

Damit ist auch klar, dass eine Folge komplexer Zahlen höchstens einen Grenzwert besitzen kann. Diesen bezeichnen wir ggf. wieder mit $\lim_{n\to\infty} z_n$.

Beispiel: Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{(n+1)i}{n} \right) = i,$$

denn $1/n^2 \to 0$ und $(n+1)/n = 1 + 1/n \to 1$.

Mit Hilfe des obigen Konvergenzkriteriums und der bekannten Grenzwertsätze für Folgen in $\mathbb{R}$ zeigt man auch leicht die folgenden Aussagen (Übung).

Lemma VIII.7.6. *Seien $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen in $\mathbb{C}$ mit Grenzwert z bzw. w. Dann gilt:*

(i) $z_n + w_n \to z + w$

(ii) $z_n w_n \to zw$

(iii) *Falls $w_n \ne 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $w \ne 0$, so gilt auch $z_n/w_n \to z/w$.*

Den Begriff einer Cauchy-Folge komplexer Zahlen kann man ebenfalls analog zum reellen Fall definieren.

Definition VIII.7.7. Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ heißt *Cauchy-Folge*, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n, m \ge n_0\, |z_n - z_m| \le \varepsilon.$$

Dies kann man wiederum wie folgt auf Real- und Imaginärteil zurückführen.

Lemma VIII.7.8. *Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Sei $a_n := \mathrm{Re}(z_n)$ und $b_n := \mathrm{Im}(z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge genau dann, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen sind.*

Der Beweis ist analog zum Beweis von Lemma VIII.7.5 und sei Ihnen daher zur Übung überlassen.

Wir wissen bereits, dass für reelle Zahlenfolgen die Konvergenz äquivalent zur Cauchy-Eigenschaft ist. Wegen der Lemmata VIII.7.5 und VIII.7.8 überträgt sich diese Aussage auf komplexe Zahlenfolgen.

Satz VIII.7.9. *Eine Folge komplexer Zahlen ist konvergent genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Ebenfalls wie im reellen Fall kann man auch Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ mit komplexen Gliedern z_k definieren und auf ihre Konvergenz untersuchen. Wegen Satz VIII.7.9 gelten z. B. das Cauchy-Kriterium (Satz IV.2.1) und Korollar IV.2.2 auch für komplexe Reihen. Auch der Begriff der absoluten Konvergenz wird wie im reellen Fall definiert.

Definition VIII.7.10. Eine komplexe Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ heißt *absolut konvergent*, falls die reelle Zahlenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ konvergiert.

Wie im reellen Fall zeigt man dann mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums, dass jede absolut konvergente Reihe komplexer Zahlen auch konvergent sein muss.

Zum Beispiel wissen wir schon, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

absolut konvergieren (ihre Grenzwerte sind definitionsgemäß $\exp(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$).

Es folgt, dass die entsprechenden Reihen sogar für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergieren (man setze dazu $x = |z|$). Wir können also die Funktionen exp sin und cos folgendermaßen von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ ausdehnen:

$$\begin{aligned} e^z := \exp(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \\ \sin(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ \cos(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}. \end{aligned}$$

Es gilt dann wieder die für die Exponentialfunktion charakteristische Gleichung

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w) \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}$$

(der Beweis dazu ist analog zum reellen Fall (Satz IV.4.3 und der binomische Satz gelten entsprechend auch im Bereich der komplexen Zahlen)).

Die folgende *Eulersche Formel* stellt nun einen Zusammenhang zwischen Sinus, Kosinus und Exponentialfunktion her.

Satz VIII.7.11 (Eulersche Formel). *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:*

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$$

Beweis. Für $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(iz)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n}\frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(iz)^k}{k!}$$

(zur Begründung des letzten Schritts spaltet man die rechte Summe in Summanden mit geradem und ungeradem Index auf).
Die linke Seite der obigen Gleichung konvergiert für $n \to \infty$ gegen $\cos(z) + i\sin(z)$, die rechte Seite gegen $\exp(iz)$, also folgt die Behauptung. □

Wegen $\cos(\pi) = -1$ und $\sin(\pi) = 0$ erhält man insbesondere die Formel

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Diese wird häufig als schönste aller Formeln bezeichnet, weil sie einen einfachen Zusammenhang zwischen den fünf wichtigsten Zahlen e, π, i, 1 und 0 herstellt.

VIII.8 Quadraturformeln

In diesem Abschnitt befassen wir uns näher mit einigen sogenannten Quadraturformeln: Hat man eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben, so ist es nicht immer möglich, das Integral $\int_a^b f$ exakt auszurechnen (die Bestimmung einer Stammfunktion kann äußerst schwierig sein, in manchen Fällen ist es sogar beweisbar unmöglich, eine solche explizit anzugeben). Man muss sich daher häufig mit numerischen Methoden zur näherungsweisen Berechnung des Integrals behelfen. Statt von numerischer Integration spricht man dabei auch von *numerischer Quadratur*.

Ein typisches Beipsiel für ein solches Verfahren ist die *Sehnentrapezregel*. Als eine erste Approximation an das Integral von f verwendet man hier den Flächeninhalt $T(f)$ des Trapezes mit den Eckpunkten $(a, 0)$, $(a, f(a))$, $(b, 0)$ und $(b, f(b))$. Dieser ist

$$T(f) = \frac{1}{2}(b - a)(f(a) + f(b)).$$

Wir wollen den Fehler $|T(f) - \int_a^b f|$ abschätzen. Dazu zeigen wir zunächst folgendes Lemma.

Lemma VIII.8.1. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Für $t \in \mathbb{R}$ sei*

$$s(t) := f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a)$$

(s ist also gerade die Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$).

Sei $x \in [a, b]$. Dann existiert ein (von x abhängiges) $\xi \in (a, b)$ mit

$$f(x) - s(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b).$$

Beweis. Das ist klar für $x = a$ oder $x = b$, wir können also $x \in (a, b)$ annehmen. Wir setzen $g(t) := (t-a)(t-b) = t^2 - (a+b)t + ab$ und

$$h(t) := f(t) - s(t) - (f(x) - s(x))\frac{g(t)}{g(x)}$$

für $t \in [a, b]$.
Die Funktion h ist zweimal differenzierbar mit

$$h''(t) = f''(t) - 2(f(x) - s(x))/g(x)$$

(denn $s'' = 0$ und $g'' = 2$).
Zudem gilt $h(a) = h(x) = h(b) = 0$, wie man leicht sieht. Nach dem Satz von Rolle (Satz VI.2.3) existieren also Zahlen $\alpha \in (a, x)$ und $\beta \in (x, b)$ mit $h'(\alpha) = 0 = h'(\beta)$.
Wendet man nun nochmals den Satz von Rolle auf h' an, so folgt: Es existiert ein $\xi \in (\alpha, \beta)$ mit

$$0 = h''(\xi) = f''(\xi) - 2(f(x) - s(x))/g(x).$$

Daraus folgt

$$f(x) - s(x) = f''(\xi)\frac{g(x)}{2} = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b).$$

□

Damit kann man nun die folgende Fehlerabschätzung für die Sehnentrapezregel zeigen.

Satz VIII.8.2 (Sehnentrapezregel)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und sei*

$$M := \max\bigl\{|f''(x)| : x \in [a, b]\bigr\}.$$

Dann gilt

$$\left|T(f) - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{M}{12}(b-a)^3.$$

Beweis. Es sei wieder s definiert wie in Lemma VIII.8.1. Dann gilt

$$T(f) = \frac{1}{2}(b-a)(f(a) + f(b)) = \int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x,$$

wie man leicht nachrechnet. Es folgt

$$\left|T(f) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b (s(x) - f(x))\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |s(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Nach Lemma VIII.8.1 existiert zu jedem $x \in [a, b]$ ein $\xi_x \in (a, b)$ mit

$$|s(x) - f(x)| = \frac{|f''(\xi_x)|}{2}|x - a||x - b| \le \frac{M}{2}(x - a)(b - x).$$

Damit folgt

$$\left|T(f) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{M}{2}\int_a^b (x - a)(b - x)\,\mathrm{d}x.$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (x - a)(b - x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (-x^2 + (a + b)x - ab)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{(a + b)x^2}{2} - abx\right]_a^b \\
&= -\frac{b^3}{3} + \frac{(a + b)b^2}{2} - ab^2 + \frac{a^3}{3} - \frac{(a + b)a^2}{2} + a^2 b \\
&= \frac{b^3}{6} - \frac{ab^2}{2} - \frac{a^3}{6} + \frac{a^2 b}{2} = \frac{1}{6}(b^3 - 3ab^2 - a^3 + 3a^2 b) \\
&= \frac{1}{6}(b^2 + a^2 - 2ab)(b - a) = \frac{1}{6}(b - a)^3.
\end{aligned}$$

Zusammen folgt daraus die Behauptung. □

Um die Genauigkeit der Approximation zu verbessern, teilt man als Nächstes das Intervall $[a, b]$ in n gleich lange Teilintervalle auf, wendet auf jedem dieser Teilintervalle die Sehnentrapezregel für f an und summiert anschließend die Ergebnisse. Das führt auf die folgende Approximation (wobei $x_{k,n} = a + k(b - a)/n$)

$$\begin{aligned}
T_n(f) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{b - a}{2n}(f(x_{k-1,n}) + f(x_{k,n})) \\
&= \frac{b - a}{2n}\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1,n}) + \sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n})\right) \\
&= \frac{b - a}{2n}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{k,n})\right).
\end{aligned}$$

Für diese gilt die folgende Fehlerabschätzung.

Satz VIII.8.3 (Summierte Sehnentrapezregel)**.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und sei*

$$M := \max\bigl\{|f''(x)| : x \in [a,b]\bigr\}.$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left|T_n(f) - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}.$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{n\to\infty} T_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Beweis. Wegen der Intervalladditivität des Integrals gilt

$$\begin{aligned}
&\left|T_n(f) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^n \frac{b-a}{2n}(f(x_{k-1,n}) + f(x_{k,n})) - \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1,n}}^{x_{k,n}} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^n \left|\frac{b-a}{2n}(f(x_{k-1,n}) + f(x_{k,n})) - \int_{x_{k-1,n}}^{x_{k,n}} f(x)\,\mathrm{d}x\right|.
\end{aligned}$$

Wendet man nun Satz VIII.8.2 für jedes Teilintervall $[x_{k-1,n}, x_{k,n}]$ an, so folgt

$$\left|T_n(f) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{M_k}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3,$$

wobei $M_k := \max\{|f''(x)| : x \in [x_{k-1,n}, x_{k,n}]\} \leq M$ ist.
Es folgt

$$\left|T_n(f) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{M}{12}(b-a)^3 \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^3} = \frac{M(b-a)^3}{12n^2}.$$

□

Übrigens kann man beweisen, dass die Konvergenzaussage in Satz VIII.8.3 sogar für alle stetigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt (allerdings hat man in diesem allgemeineren Fall keine explizite Fehlerabschätzung mehr).

Als Nächstes betrachten wir noch die sogenannte *Mittelpunktsregel* (oder *Tangententrapezregel*): Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so approximieren wir das Integral $\int_a^b f$ durch den Flächeninhalt $M(f)$ des Rechtecks mit Grundlinie $[a,b]$ und Höhe $f((a+b)/2)$, also

$$M(f) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a).$$

Ist f sogar differenzierbar, so ist $M(f)$ gerade gleich dem Flächeninhalt des Trapezes, dass von der horizontalen Koordinatenachse, den beiden vertikalen Geraden durch $(a, 0)$ und $(a, f(a))$ bzw. $(b, 0)$ und $(b, f(b))$ und der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $(a + b)/2$ begrenzt wird.

Nun teilt man wieder das Intervall in n gleich lange Teilintervalle $[x_{k-1,n}, x_{k,n}]$ wie oben, wendet auf jedem dieser Teilintervalle die obige Approximation an und summiert anschließend. Man erhält:

$$M_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(y_{k,n}),$$

wobei

$$y_{k,n} = \frac{x_{k-1,n} + x_{k,n}}{2} = a + (2k-1)\frac{b-a}{2n}.$$

Es gilt dann der folgende Satz, dessen Beweis wir aus Zeitgründen weglassen wollen.

Satz VIII.8.4 (Summierte Mittelpunktsregel)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und sei*

$$M := \max\big\{|f''(x)| : x \in [a, b]\big\}.$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left| M_n(f) - \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{24n^2}.$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{n\to\infty} M_n(f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Auch hier kann man zeigen, dass die Konvergenzaussage sogar für alle stetigen Funktionen gilt.

Zum Schluss betrachten wir noch die *Simpson-Regel* (auch *Keplersche Fassregel* genannt). Hier konstruiert man ein Polynom vom Grad ≤ 2, dessen Wert an den Stellen a, b und $(a+b)/2$ exakt mit dem jeweiligen Funktionswert von f übereinstimmt (der Graph von f wird also durch einen Parabelbogen angenähert). Das Integral $S(f)$ dieses Polynoms verwendet man dann als Approximation an das Integral von f. Ich erspare mir die Details und gebe nur das Ergebnis an:

$$S(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right).$$

Als Nächstes teilt man wieder das Intervall $[a, b]$ in die n gleich langen Teilintervalle $[x_{k-1,n}, x_{k,n}]$ $(k = 1, \dots, n)$ auf, wendet die Simpsonsche Formel für jedes dieser Teilintervalle an und summiert die Ergebnisse zu

$$S_n(f) = \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{k,n}) + 4\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1,n} + x_{k,n}}{2}\right)\right).$$

Es gilt dann der folgende Satz, den wir ohne Beweis angeben.

Satz VIII.8.5 (Summierte Simpson-Regel). *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ viermal stetig differenzierbar und sei*

$$M := \max\Big\{|f^{(4)}(x)| : x \in [a,b]\Big\}.$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left| S_n(f) - \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \frac{M(b-a)^5}{2880 n^4}.$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Wiederum kann man zeigen, dass die Konvergenzaussage sogar für alle stetigen Funktionen gilt.

Da für Polynome vom Grad ≤ 3 die vierte Ableitung konstant Null ist, folgt aus dem obigen Satz auch

$$\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x = S(p) = \frac{b-a}{6}\bigg(p(a) + p(b) + 4p\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\bigg)$$

für alle Polynome p vom Grad ≤ 3, d. h. solche Funktionen werden durch die Simpson-Regel exakt integriert.

VIII.9 Volumen von Rotationskörpern

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Berechnung des Volumens spezieller Körper, nämlich solcher, welche um eine Achse rotationssymmetrisch sind. Wir betrachten dazu eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$. Lässt man die von der x-Achse und dem Graphen von f eingeschlossene Fläche einmal komplett um die x-Achse rotieren, so entsteht ein zu dieser Achse rotationssymmetrischer Körper K_f. Formal ist

$$K_f = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a,b] \text{ und } y^2 + z^2 \leq f(x)^2\big\}.$$

Wir wollen das Volumen V_f des Körpers K_f bestimmen. Dazu stellen wir folgende heuristische Überlegung an: Wir teilen zunächst das Intervall $[a,b]$ in n gleich lange Teilintervalle auf, setzen also wie schon zuvor

$$x_{k,n} := a + k\frac{b-a}{n} \quad \text{für } k = 0, \ldots, n.$$

Nun betrachten wir die n Scheiben (Zylinder) mit Radius $f(x_{k,n})$ und Höhe $x_{k,n} - x_{k-1,n} = (b-a)/n$. Die k-te Scheibe hat dann das Volumen $\pi(f(x_{k,n}))^2(b-a)/n$ und ihr Gesamtvolumen ist

$$V_{f,n} = \sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k,n}))^2 \frac{(b-a)}{n} = \pi \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} (f(x_{k,n}))^2.$$

Dieses Volumen ist für hinreichend großes n eine gute Approximation an V_f. Den exakten Wert sollte man durch den Grenzübergang $n \to \infty$ erhalten. Nach Satz VII.1.10. konvergiert die Folge $(V_{f,n})$ für $n \to \infty$ gegen $\pi \int_a^b f^2$, also

$$V_f = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x.$$

Beispiele:
1) Es seien $R > 0$ und $h > 0$. Wir betrachten die Funktion $f : [0,h] \to \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) := Rx/h$ für $x \in [0,h]$. Der entsprechende Rotationskörper K_f ist dann ein Kegel der Höhe h mit kreisförmiger Grundfläche vom Radius R (die Spitze des Kegels liegt im Koordinatenursprung). Für dessen Volumen ergibt sich

$$V_f = \pi \int_0^h (f(x))^2 \, \mathrm{d}x = \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h x^2 \, \mathrm{d}x = \pi \frac{R^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \pi \frac{R^2}{h^2} \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

2) Für $R > 0$ und $h > 0$ sei $f(x) := R\sqrt{x/h}$ für $x \in [0,h]$. Der zugehörige Rotationskörper K_f ist ein sogenanntes Rotationsparaboloid der Höhe h mit Öffnungsradius R. Für dessen Volumen erhält man

$$V_f = \pi \int_0^h (f(x))^2 \, \mathrm{d}x = \pi \frac{R^2}{h} \int_0^h x \, \mathrm{d}x = \pi \frac{R^2}{h} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^h = \pi \frac{R^2}{h} \frac{h^2}{2} = \frac{1}{2} \pi R^2 h.$$

3) Wieder sei $R > 0$ und es sei $f(x) := \sqrt{R^2 - x^2}$ für $x \in [-R, R]$. Der Graph von f ist ein Halbkreis mit Radius R und Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Entsprechend ist K_f eine Kugel mit Radius R. Für das Kugelvolumen gilt

$$\begin{aligned} V_f &= \pi \int_{-R}^{R} (f(x))^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) \, \mathrm{d}x = \pi \big[R^2 x - x^3/3 \big]_{-R}^{R} \\ &= \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

VIII.10 Bogenlänge von Funktionsgraphen

In diesem Abschnitt geht es um die Berechnung der Länge eines Funktionsgraphen. Sei also $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine (zunächst noch ganz beliebige) Funktion.

Es sei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine (nicht notwendig äquidistante) Unterteilung des Intervalls $[a, b]$. Auf dem k-ten Teilintervall betrachten wir die Sekante an den Graphen von f durch die Punkte $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ und $(x_k, f(x_k))$. Dieses Sekantenstück hat nach dem Satz des Pythagoras die Länge $L(f, x_{k-1}, x_k) = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$.

Heuristisch stellt die Gesamtlänge $\sum_{k=1}^{n} L(f, x_{k-1}, x_k)$ dieser Sekantenstücke eine untere Schranke für die Länge des Funktionsgraphen dar. Das führt zu folgender Definition.

Definition VIII.10.1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Länge des Funktionsgraphen von f wird definiert als

$$L_f := \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} L(f, x_{k-1}, x_k) : n \in \mathbb{N},\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\right\},$$

falls dieses Supremum endlich ist (d. h. falls die obige Menge nach oben beschränkt ist).

Ausgehend von dieser Definition ist die Berechnung der Bogenlänge eher schwierig. Für stetig differenzierbares f gilt aber die folgende Integralformel, die wir ohne Beweis angeben wollen.

Satz VIII.10.2. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$L_f = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x.$$

Auch dieses Integral ist wegen der auftretenden Wurzel in konkreten Fällen meist schwierig (bis gar nicht) explizit zu berechnen. Wir betrachten einige einfache Beispiele.

Beispiele:
1) Sei $f(x) = (2/3)x^{3/2}$ für $x \in [0, 1]$. Dann gilt

$$L_f = \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1 + x}\, \mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}(1 + x)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(2^{3/2} - 1).$$

2) Sei $f(x) = (1/3)(x^2 - 2)^{3/2}$ für $x \in [2, 3]$. Dann ist $f'(x) = x\sqrt{x^2 - 2}$ und somit

$$\begin{aligned} L_f &= \int_2^3 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x = \int_2^3 \sqrt{1 + x^2(x^2 - 2)}\, \mathrm{d}x \\ &= \int_2^3 \sqrt{1 + x^4 - 2x^2}\, \mathrm{d}x = \int_2^3 \sqrt{(x^2 - 1)^2}\, \mathrm{d}x = \int_2^3 (x^2 - 1)\, \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_2^3 = 9 - 3 - (8/3 - 2) = 16/3. \end{aligned}$$

3) Es sei $R > 0$ und $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ für $x \in [-R, R]$. Der Graph von f ist ein Halbkreis mit Radius R. Dessen Länge über dem Intervall $[0, a]$ ist

$$\int_0^a \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^a \sqrt{1 + x^2/(R^2 - x^2)}\,\mathrm{d}x$$
$$= R \int_0^a \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = R \int_0^a \frac{1}{R\sqrt{1 - (x/R)^2}}\,\mathrm{d}x = R[\arcsin(x/R)]_0^a$$
$$= R \arcsin(a/R).$$

Insbesondere folgt für den Gesamtumfang U_R des Kreises: $U_R = 4R \arcsin(1) = 2\pi R$.

4) Die durch

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen heißen *Sinus hyperbolicus* bzw. *Kosinus hyperbolicus*. Für ihre Ableitungen gilt

$$\sinh'(x) = \cosh(x) \quad \text{und} \quad \cosh'(x) = \sinh(x).$$

Ferner zeigt man leicht die Formel

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Der Graph des Kosinus hyperbolicus entspricht der Form einer an ihren Enden befestigten, frei durchhängenden Kette und wird daher auch *Kettenlinie* (oder *Katenoide*) genannt. Die Länge dieses Graphen über dem Intervall $[-a, a]$ ergibt sich zu

$$\int_{-a}^a \sqrt{1 + (\cosh'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^a \sqrt{1 + \sinh^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^a \sqrt{\cosh^2(x)}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-a}^a \cosh(x)\,\mathrm{d}x = [\sinh(x)]_{-a}^a = \sinh(a) - \sinh(-a) = 2\sinh(a) = e^a - e^{-a}.$$

VIII.11 Das Newton-Verfahren

Hat man eine auf einem Intervall I definierte Funktion f gegeben, so interessiert man sich häufig für die Nullstellen von f. Allerdings ist es oftmals nicht möglich, diese explizit zu bestimmen. Stattdessen muss man sich mit numerischen Methoden behelfen, um eine Nullstelle zumindest näherungsweise zu berechnen. Ein solches Näherungsverfahren ist das sogenannte Newton-Verfahren, das wir im Folgenden kurz betrachten wollen.

Sei dazu f als differenzierbar vorausgesetzt. Angenommen wir wissen schon, dass f im Intervall I eine Nullstelle besitzt und wir haben für diese bereits eine erste Näherung x_0. Dann setzen wir

$$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

anschließend

$$x_2 := x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

dann

$$x_3 := x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

usw. Die allgemeine Rekursionsvorschrift lautet also

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Das kommt etwas ad hoc daher, hat aber eine anschauliche geometrische Interpretation: Betrachtet man die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_n, f(x_n))$, so ist x_{n+1} gerade der Schnittpunkt dieser Tangente mit der x-Achse. Man hofft, dass x_{n+1} eine bessere Approximation an die Nullstelle darstellt als x_n und dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar gegen diese konvergiert.

Im Allgemeinen funktioniert dieses Verfahren allerdings nicht, z. B. kann man Probleme bei stark oszillierenden Funktionen f bekommen. Des Weiteren ist es natürlich möglich, dass man im Laufe der Iteration auf einen Punkt x_n mit $f'(x_n) = 0$ oder $x_n \notin I$ stößt, so dass x_{n+1} gar nicht mehr definiert ist.

Unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen an f kann man aber die Konvergenz des Verfahrens beweisen. Dies würde hier jedoch zu weit führen. Wir betrachten lediglich einen konkreten Spezialfall, nämlich die Funktion $f(x) = x^2 - a$ (wobei $a > 0$). Wir starten mit einer beliebigen Stelle $x_0 > 0$. Wegen $f'(x) = 2x$ gilt dann

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right). \tag{VIII.6}$$

Wir wollen zeigen, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tatsächlich gegen $\sqrt{a}$ (die positive Nullstelle von f) konvergiert. Zunächst gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$: Es ist $0 \leq (x_n^2 - a)^2 = x_n^4 - 2x_n^2 a + a^2$, also $x_n^2 + a^2/x_n^2 \geq 2a$ und somit $x_{n+1}^2 = (1/4)(x_n^2 + 2a + a^2/x_n^2) \geq a$, also $x_{n+1} \geq \sqrt{a}$.

Somit gilt also $x_n \geq \sqrt{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist aber auch $a/x_n \leq x_n$ und somit $x_{n+1} = (1/2)(x_n + a/x_n) \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Also ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt und folglich konvergent. Es bezeichne b den Grenzwert. Wegen $x_n \geq \sqrt{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ muss auch $b \geq \sqrt{a} > 0$ gelten. Durch Grenzübergang $n \to \infty$ in (VIII.6) erhält man $b = (b + a/b)/2$ und daher $b = \sqrt{a}$.

Das soeben beschriebene Verfahren zur Wurzelberechnung nennt man übrigens auch Heron-Verfahren, nach Heron von Alexandria.[13]

[13] Griechischer Mathematiker und Ingenieur, lebte vermutlich im 1.Jahrhundert n. Chr. Das Verfahren war allerdings schon um 1750 v. Chr. in Babylonien bekannt und wird daher auch als babylonisches Wurzelziehen bezeichnet.

VIII.12 Partielle Ableitungen

In diesem Abschnitt wollen wir einen kurzen Abstecher in die mehrdimensionale Analysis unternehmen. Wir betrachten die Menge $\mathbb{R}^n$ aller n-Tupel reeller Zahlen, versehen mit ihrer üblichen, aus der linearen Algebra bekannten Vektorraumstruktur, d. h. wir setzen

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

und

$$t(x_1, \ldots, x_n) := (tx_1, \ldots, tx_n)$$

für alle $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ und alle $t \in \mathbb{R}$.

Weiter setzen wir wie üblich $e_i := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, wobei die 1 an der i-ten Stelle sitzt.

Wir wollen nun Funktionen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ untersuchen, also Funktionen deren Wert nicht nur von einer sondern von n reellen Variablen abhängt. Insbesondere wollen wir einen Ableitungsbegriff für solche Funktionen einführen. Die naheliegende Vorgehensweise ist, zunächst alle Variablen bis auf eine festzuhalten und nach dieser ausgezeichneten Variable zu differenzieren. Die genaue Definition lautet wie folgt.

Definition VIII.12.1. Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, sowie $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann heißt

$$\partial_i F(a) := \frac{\partial F}{\partial x_i}(a) := \lim_{h \to 0} \frac{F(a + he_i) - F(a)}{h}$$

die *partielle Ableitung* von F an der Stelle a in Richtung der i-ten Koordinate, vorausgesetzt natürlich, dass der obige Grenzwert existiert.

Eine äquivalente Formulierung lautet wie folgt: Definiert man eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g(t) := F(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so ist g an der Stelle a_i differenzierbar genau dann, wenn $\partial_i F(a)$ existiert und ggf. gilt $\partial_i F(a) = g'(a_i)$. Das liegt einfach daran, dass

$$\frac{g(a_i + h) - g(a_i)}{h} = \frac{F(a + he_i) - F(a)}{h}$$

für alle $h \neq 0$ gilt.

Wie gesagt läuft also die Berechnung der partiellen Ableitung $\partial_i F$ einfach darauf hinaus, alle Variablen außer x_i als Konstanten zu behandeln und den entstehenden Ausdruck mit Hilfe der gewöhnlichen Regeln zur Ableitung von Funktionen einer Veränderlichen nach x_i zu differenzieren.

Beispiele:
1) Sei $F(x_1, x_2) := x_1^2 x_2$. Dann ist $\partial_1 F(x_1, x_2) = 2x_1 x_2$ und $\partial_2 F(x_1, x_2) = x_1^2$.

2) Sei $F(x_1, x_2) := x_1^3 \sin(x_2)$. Dann ist $\partial_1 F(x_1, x_2) = 3x_1^2 \sin(x_2)$ und $\partial_2 F(x_1, x_2) = x_1^3 \cos(x_2)$.
3) Sei $F(x_1, x_2, x_3) := x_1 e^{x_2} + \cos(x_1 x_3) + x_2^5$. Dann gilt $\partial_1 F(x_1, x_2, x_3) = e^{x_2} - x_3 \sin(x_1 x_3)$, sowie $\partial_2 F(x_1, x_2, x_3) = x_1 e^{x_2} + 5x_2^4$ und $\partial_3 F(x_1, x_2, x_3) = -x_1 \sin(x_1 x_3)$.

Eine Anwendung der partiellen Ableitungen liegt wieder in der Formulierung einer notwendigen Bedingung für lokale Extrema. Man sagt, eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ habe an der Stelle $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ein lokales Maximum/Minimum, falls es ein $\varepsilon > 0$ mit der folgenden Eigenschaft gibt: Für alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $|x_i - a_i| \leq \varepsilon$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt $F(x) \leq F(a)$ (bzw. $F(x) \geq F(a)$).

Die notwendige Bedingung lautet dann wie folgt.

Satz VIII.12.2. *Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die an der Stelle $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ein lokales Extremum besitzt. Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$. Falls $\partial_i F(a)$ existiert, so muss $\partial_i F(a) = 0$ gelten.*

Beweis. Es existiere $\partial_i F(a)$. Sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(t) := F(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann ist g differenzierbar bei a_i mit $g'(a_i) = \partial_i F(a)$ (siehe oben). Ferner hat g an der Stelle a_i ein lokales Extremum (warum?). Nach der bekannten notwendigen Bedingung für lokale Extrema einer Funktion einer Veränderlichen muss also $\partial_i F(a) = g'(a_i) = 0$ gelten. □

Die Formulierung hinreichender Bedingungen für lokale Extrema bei Funktionen mehrerer Veränderlicher ist schwieriger. Man müsste hier zunächst den Begriff der totalen Differenzierbarkeit, sowie zweite partielle Ableitungen und die sogenannte Hesse-Matrix einführen, um dann deren Definitheitsverhalten zu untersuchen. So etwas ist Standardmaterial in einem Analysis 2 Kurs. Wir verzichten hier darauf.

A Anhang

A.1 Logiksymbole

Wir wollen hier kurz die am häufigsten verwendeten Logiksymbole zusammenstellen und ihre Bedeutung klären. Dabei sollen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ stets zwei mathematische Aussagen bezeichnen. Wir verwenden dann folgende Schreibweisen:

(i) $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ steht für die Aussage "$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$".

(ii) $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ steht für die Aussage "$\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$" (im Sinne eines einschließenden oders, d. h. es gilt mindestens eine der beiden Aussagen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, eventuell auch beide).

(iii) $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ steht für die Aussage "aus $\mathcal{A}$ folgt $\mathcal{B}$".

(iv) $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ steht für die Aussage "$\mathcal{A}$ ist äquivalent zu $\mathcal{B}$" (auch gelesen als "$\mathcal{A}$ genau dann, wenn $\mathcal{B}$"). Das bedeutet definitionsgemäß "$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$".

(v) $\neg\, \mathcal{A}$ steht für die Verneinung von $\mathcal{A}$ (gelesen als "nicht $\mathcal{A}$").

Die Symbole $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ werden auch *Junktoren* genannt. Hinzu kommen noch die sogenannten *Quantoren* $\forall$ und $\exists$, die wie folgt erklärt sind:

(vi) $\forall x\ \mathcal{A}$ bedeutet "für alle x gilt $\mathcal{A}$".

(vii) $\exists x\ \mathcal{A}$ bedeutet "es existiert (mindestens) ein x, für das $\mathcal{A}$ gilt".

Das Symbol $\forall$ heißt *Allquantor*, das Symbol $\exists$ wird *Existenzquantor* genannt. Häufig verwendet man diese Symbole auch in folgender Weise (wobei M eine vorgegebene Menge ist): $\forall x \in M\ \mathcal{A}$ bedeutet "für alle Elemente x der Menge M gilt $\mathcal{A}$" und $\exists x \in M\ \mathcal{A}$ steht für "es existiert (mindestens) ein Element $x \in M$, für welches $\mathcal{A}$ gilt".

Die Symbole $\wedge, \vee$ und $\neg$ werden wir in dieser Vorlesung eher selten oder gar nicht gebrauchen (stattdessen schreiben wir "und", "oder", "nicht" einfach aus), die Zeichen $\Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall$ und $\exists$ werden wir dagegen des Öfteren zur Abkürzung verwenden.

Zum Abschluss ein paar konkrete Beispiele für den Gebrauch der Logiksymbole:

(i) $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$ bedeutet "$a > 0$ ist äquivalent zu $-a < 0$".

(ii) $((a < b) \wedge (b < c)) \Rightarrow (a < c)$ bedeutet "aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$".

(iii) $x \neq 0 \Rightarrow (x > 0 \vee x < 0)$ bedeutet "aus $x \neq 0$ folgt $x > 0$ oder $x < 0$".

(iv) $\forall x \in \mathbb{R}\ x^2 \geq 0$ bedeutet "für alle reellen Zahlen x ist $x^2 \geq 0$".

(v) $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{N}\ n > x$ bedeutet "für alle reellen Zahlen x existiert eine natürliche Zahl n mit $n > x$".

(vi) $\neg(\exists x \in \mathbb{Q}\ x^2 = 2)$ bedeutet "es existiert keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$".

A.2 Das griechische Alphabet

In der Mathematik (und auch in der Physik) werden häufig neben den lateinischen auch griechische Buchstaben zur Bezeichnung mathematischer (physikalischer) Größen verwendet. Das griechische Alphabet lautet wie folgt:

Name	Großbuchstabe	Kleinbuchstabe
Alpha	A	α
Beta	B	β
Gamma	Γ	γ
Delta	Δ	δ
Epsilon	E	ε oder ϵ
Zeta	Z	ζ
Eta	H	η
Theta	Θ	θ oder ϑ
Iota	I	ι
Kappa	K	κ
Lambda	Λ	λ
My	M	μ
Ny	N	ν
Xi	Ξ	ξ
Omikron	O	o
Pi	Π	π
Rho	P	ρ
Sigma	Σ	σ
Tau	T	τ
Ypsilon	Υ	υ
Phi	Φ	φ oder ϕ
Chi	X	χ
Psi	Ψ	ψ
Omega	Ω	ω

Literaturhinweise

Es gibt diverse einführende Lehrbücher zur Analysis. Hier eine kleine Auswahl:

[1] M. Barner und F. Flohr, *Analysis I*, Walter de Gruyter, Berlin, 1991. (4.Auflage).

[2] E. Behrends, *Analysis. Band 1*, Springer Spektrum, Heidelberg, 2015. (6.Auflage).

[3] O. Deiser, *Analysis 1*, Mathematik für das Lehramt, Springer Spektrum, Heidelberg, 2013. (2.Auflage).

[4] G. M. Fichtenholz, *Differential- und Integralrechnung I*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1989. (13.Auflage).

[5] O. Forster, *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, Springer Spektrum, Heidelberg, 2016. (12.Auflage).

[6] K. Fritzsche, *Grundkurs Analysis 1. Differentiation und Integration in einer Veränderlichen. Für Bachelor und Diplom*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2008. (2.Auflage).

[7] D. Grieser, *Analysis I. Eine Einführung in die Mathematik des Kontinuums*, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2015.

[8] E. Hairer und G. Wanner, *Analysis in historischer Entwicklung*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2011.

[9] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis. Teil 1*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009. (17.Auflage).

[10] S. Hildebrandt, *Analysis 1*, Springer, Berlin, 2006. (2.Auflage).

[11] H. Junek, *Analysis. Funktionen–Folgen–Reihen*, Mathematik-ABC für das Lehramt, Teubner, Stuttgart, 1998.

[12] G. Köhler, *Analysis*, Mit Aufgaben von J. Grahl, Heldermann Verlag, Berlin, 2006.

[13] K. Königsberger, *Analysis 1*, Springer, Berlin, 2004. (6.Auflage).

[14] W. Walter, *Analysis 1*, Springer, Berlin, 2004. (7.Auflage).

Das Buch [8] behandelt die Themen der Analysis nicht in der heute üblichen Reihenfolge, sondern, wie es der Titel schon sagt, in der Reihenfolge ihrer historischen Entwicklung. Die Geschichte der Analysis von der Antike bis in die heutige Zeit wird z. B. auch beschrieben in:

[15] T. Sonar, *3000 Jahre Analysis. Geschichte, Kulturen, Menschen*, Springer, Berlin, 2011.

Zusätzlich gibt es verschiedene Tutorien zur Analysis, zum Beispiel:

[16] O. Deiser, *Erste Hilfe in Analysis. Überblick und Grundwissen mit vielen Abbildungen und Beispielen*, Springer Spektrum, Berlin, 2012.

[17] K. Fritzsche, *Trainingsbuch zur Analysis 1. Tutorium, Aufgaben und Lösungen*, Springer Spektrum, Heidelberg, 2013.

[18] F. Modler und M. Kreh, *Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1*, Springer Spektrum, Berlin–Heidelberg, 2014. (3.Auflage).

Zum Aufbau der Zahlenbereiche siehe etwa:

[19] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel, R. Remmert, *Zahlen*, Springer, Berlin–Heidelberg, 1992. (3.Auflage).

Eine kleine Auswahl an Literatur zu gewöhnlichen Differentialgleichungen:

[20] B. Aulbach, *Gewöhnliche Differenzialgleichungen*, Springer–Spektrum, 2004. (2.Auflage).

[21] H. Heuser, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009. (6.Auflage).

[22] W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2000. (7.Auflage).