UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Vorlesung 9 - Mächtigkeit von Mengen

Diskrete Strukturen (WS 2023-24)

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.
  - Z.B. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$
  - $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, $|\mathcal{P}(X)| \neq |\mathcal{X}|$ Andere Notation: $\mathcal{P}(X) = 2^X$.
- Sei $\mathcal{U}$ ein Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.
- Die Äquivalenzklassen heißen Kardinalitäten.
- (Cantor -Schröder-Bernstein) Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to A$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $h\colon A \to B$.
  - Wir definieren $|M| \leq |N|$ genau dann wenn es gibt eine Injektion $f\colon M \to N$. Das ist eine Ornungsrelation.

- $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
  - Nach CBS, wir brauchen Injektionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ und $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ zu konstruieren.
  - $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$; Z.B. $f(x) := (x, 0)$,
  - $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$: $g(n, m) := 1 n_k m_k n_{k-1} m_{k-1} \ldots n_0 m_0$, wobei $k+1$ ist das Maximum der Längen der Dezimaldarstellungen von n und m, und $n = \sum_{i=0}^{k} n_i \cdot 10^i$ und $m = \sum_{i=0}^{k} m_i \cdot 10^i$ mit $n_i, m_i \in \{0, \ldots, 9\}$ für alle $i \in \{0, \ldots, k\}$.

- $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
  - $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$. Nach CBS reicht die Injektionen $f\colon (0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (0,1)$ zu konstruieren.
  - Jede reelle Zahl $x \in (0,1)$ lässt sich eindeutig als $x = [0, d_1 d_2 d_3 d_4 \cdots]_{10}$ darstelen, mit den Ziffern $d_1, d_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, so dass kein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $d_i = 9$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \geq n$.
  - Dann sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathcal{P}((0,1)) \to \mathbb{R}$ so definiert: $f(x) := \{[d_1]_{10},\ [d_1 d_2]_{10},\ [d_1 d_2 d_3]_{10}, \ldots\}$

. Diese Funktion f ist injektiv.

▶ Sei $X \subseteq \mathbb{N}$. Wir defiinieren die reelle Zahl $g(X) := [0,1b_0b_1b_2\cdots]_{10}$ mit $b_i \in \{0,5\}$, so dass $b_i = 5$ gdw. $i \in X$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Offenbar ist auch diese Funktion g injektiv.

- $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}|$
- Wir wissen $|\mathbb{Q}| \geq |\mathbb{Z}|$, also es reicht zu zeigen dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z}|$.
- Wir wissen auch $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2|$, also es reicht zu zeigen dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}^2|$.
- Die positiven rationalen Zahlen entsprechen den nicht weiter kürzbaren Brüchen $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}_+$. Also wir haben eine Injektion $f\colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$, mit $f(\frac{m}{n}) = (m, n)$.
- Jetzt bauen wir die Injektion $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
  - $g(\frac{m}{n}) := (m, n)$ wenn $ggt(m, n) = 1$, $m, n > 0$,
  - $g(\frac{-m}{n}) := (-m, n)$ $ggt(m, n) = 1$, $m, n > 0$
  - $g(0) := (0, 0)$.

Satz

Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar. Dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist auch abzählbar.

Beweis.

- Wir müssen eine Injektion $\bigcup_i A_i \to \mathbb{N}$ definieren.
- Erst, wir finden disjunkte Teilmenge $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $|B_i| = |\mathbb{N}|$ und $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$.
  - $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ \ldots$
- Wir haben Bijektionen $\beta_i \colon \mathbb{N} \to B_i$. Wir haben auch Injektionen $\alpha_i \colon A_i \to \mathbb{N}$.
- Wir definieren $s \colon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}$, so dass $s(x)$ ist die kleinste i mit $x \in A_i$.
- Schließlich können wir die Injektion $F \colon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}$ definieren, wie folgt: $F(x) := \beta_{s(x)}(\alpha_{s(x)}(x))$.
  - Falls $F(x) = F(y)$, dann $s(x) = s(y)$, weil die Bilde von verschiedenEN β_i's disjunkt sind. Dann die Injektivität folgt da $\alpha_{s(x)}$ and $\beta_{s(x)}$ sind beide injektiv. $\square$

Sei X eine Menge. Dann definieren wir $\mathcal{P}_{<\infty}(X) := \{A \subset X : |A| < \infty\}$.

Satz

$\mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{N})$ *ist abzählbar.*

Beweis.

- Es reicht zu zeigen dass $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt dass $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ ist abzählbar.
- Wir haben eine Surjektion $\mathbb{N}^k \to \mathcal{P}_k(\mathbb{N})$: $(a_1, a_2, \dots, a_k) \mapsto \{a_1, \dots, a_k\}$. Also es reicht zu zeigen, dass $\mathbb{N}^k$ ist abzählbar.
- Wir beweisen mit Induktion $|\mathbb{N}^k| = |\mathbb{N}|$.
  - IA: $k = 2$ Wir wissen $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$.
  - IH: $|\mathbb{N}^k| = |\mathbb{N}|$ wenn $k \geq 1$.
  - IB: zu zeigen ist $|\mathbb{N}^{k+1}| = |\mathbb{N}|$. Es gilt $|\mathbb{N}^{k+1}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}^k|$. Aus dem Übungsblatt und aus IH folgt $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}^k| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$. Also auch $|\mathbb{N}^{k+1}| = |\mathbb{N}|$. □

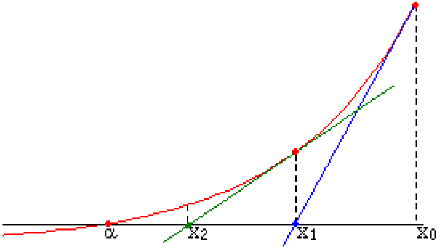
Die Iteration ist ein wesentliches Prinzip in Rainer Mathematik und in der Programmierung. Ein wichtiger Aspekt der Iteration sind die sogenannte Fixpunkte. Sei $f : M \to M$ eine Funktion auf einer Menge M. Ein Fixpunkt von f ist ein Element $m \in M$, so dass $f(m) = m$.

Beispiele

- Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) := x + 1$ hat keine Fixpunkte.
- Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $n \mapsto \lceil \sqrt{n} \rceil$ hat die Fixpunkte 0, 1 und 2.

Beispiel - Die Methode von Newton

- Gegeben: eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Ziel: $x \in \mathbb{R}$ zu finden, mit $f(x) = 0$.
- Algorithmus von Newton: wir nehmen $x_0 \in \mathbb{R}$, dann definieren wir $x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ und allgemein $x_k := x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$
  - ▶ Fixpunkte sind die gesuchte Lösungen. Sehr häufig konvergieren Iterationen zu einem Fixpunkt.



- Wir möchten Fixpunkte benutzen, um einen alternativen Beweis von CBS zu geben
  Wir beginnen mit der Erinnerung an das folgende Lemma.

Lemma. Sei M eine Menge. Wir betrachten die teilweise geordnete Menge $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$. Sei $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(M)$. Dann $\bigcup \mathcal{X}$ ist die kleinste obere Schranke von $\mathcal{X}$. D.h.

$$\bigcup \mathcal{X} \subseteq U$$

für alle $U \in {\uparrow}\mathcal{X}$

Satz. (Lemma von Knaster-Tarski) Sei $f\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$. Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis. Seien

$$\mathcal{Q} := \{X \in \mathcal{P}(M) \mid X \subseteq f(X)\}$$

und $N := \bigcup \mathcal{Q}$.

- Wir zeigen jetzt dass $f(N) = N$, d.h. N is ein Fixpunkt von f.
- Für jede Menge $X \in \mathcal{Q}$ gilt $X \subseteq N$. Deswegen gilt $X \subseteq f(X) \subseteq f(N)$.
- Es folgt dass $f(N)$ ist eine obere Schranke von $\mathcal{Q}$. Deswegen $N = \bigcup \mathcal{Q} \subseteq f(N)$.
- Auch gilt: $f(N) \subseteq f(f(N))$, wodurch $f(N) \in \mathcal{Q}$. Es folgt also $f(N) \subseteq \bigcup Q = N$, und deswegen auch $N = f(N)$, $\square$

Beispiele

- Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) := x + 1$. Wir betrachten jetzt f als eine Funktion auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- Für welche Teilmengen $X \subseteq \mathbb{N}$ gilt $f(X) = X$? Für $X = \emptyset$
- Sei $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ wie folgt definiert:

$$g(X) := X \cup f(X).$$

Fixpunkte: $\emptyset$, $\mathbb{N}$, $X_k := \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\}$ mit $k \in \mathbb{N}$.

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis.

- Wir definieren die Funktion $h\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$:

$$h(X) := M \setminus g\big(N \setminus f(X)\big) \ .$$

- Für alle $X \subseteq Y \subseteq M$ gilt $f(X) \subseteq f(Y)$ also auch $N \setminus f(Y) \subseteq N \setminus f(X)$, und deswegen auch

$$g\big(N \setminus f(Y)\big) \subseteq g\big(N \setminus f(X)\big).$$

  D.h. $h(X) \subseteq h(Y)$.

- Nach dem Lemma von Knaster-Tarski existiert also ein Fixpunkt $F \subseteq M$ für h. Es gilt

$$M \setminus F = M \setminus h(F) = M \setminus \Big(M \setminus g\big(N \setminus f(F)\big)\Big) = g\big(N \setminus f(F)\big) \ .$$

- Wir definieren eine Funktion $B\colon M \to N$ durch

$$B(m) := f(m) \text{ wenn } m \in F$$

$$B(m) := g^{-1}(m) \text{ wenn } m \in M \setminus F$$

  Wir möchten zeigen dass B ist bijektiv.

- **Surjektivität:** Sei $n \in N$. Falls $n \in f(F)$, dann existiert $m \in F$, so dass $f(m) = n$. Damit gilt $B(m) = n$. Sonst ist $n \in N \setminus f(F)$ und damit

$$g(n) \in g\big(N \setminus f(F)\big) = M \setminus F.$$

  Also $B\big(g(n)\big) = n$.

Injektivität: Seien $x, y \in M$ mit $B(x) = B(y)$.

- Sei $B(x) \in f(F)$. Erst zeigen wir dass $x, y \in F$. Sonst wenn z.b. $x \in M \setminus F$, dann deswegen dass $M \setminus F = g\big(N \setminus f(F)\big)$, würden wir $B(x) = g^{-1}(x) \in N \setminus f(F)$ haben , was jedoch $B(x) \in f(F)$ widerspricht. Also gilt $x, y \in F$. Damit gilt auch $x = y$, da f injektiv ist.

- Sei $B(x) \notin f(F)$. Dann gilt $x, y \in M \setminus F$, also $x = g(B(x)) = g(B(y)) = y$. $\square$

- Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
- Das Supremum $\sup X$ von X ist das kleinste Element von $\uparrow X$, also die kleinste obere Schranke für X.
- Das Infimum $\inf X$ von X ist das größte Element von $\downarrow X$, also die größte untere Schranke für X.
- Suprema/Infima existieren nicht immer. Als Beispiel betrachten wir $\mathbb{R}$ mit üblicher Ordnungsrelation. Dann $\mathbb{R}$ selbst hat kein Supremum und kein Infimum.
- Noch ein Beispiel: Die Menge M von allen endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, mit der Teilmengerelation $\subseteq$. Dann hat M kein Supremum.
- Sei M eine Menge, und sei $X \subset \mathcal{P}(M)$. Dann $\mathcal{M}$ hat Supremum und Infimum in $\mathcal{P}$, und es gilt $\sup X = \bigcup X$, $\inf X = \bigcap X$.
- Dieser Satz motiviert folgende Notation: Sei $(M, \subseteq)$ eine geordnete Menge, und $x, y \in M$. Dann schreiben wir $x \vee y := \sup(\{x, y\})$, $x \wedge y := \inf(\{x, y\})$.

- $(M, \subseteq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ wir haben dass $x \vee y$ und $x \wedge y$ existieren.
- $(M, \subseteq)$ heißt vollständiger Verband gdw. für alle $X \subseteq M$ wir habe dass $\sup X$ und $\inf X$ existieren.

Beispiele

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ und $(\mathbb{R}, \leq)$ sind alle Verbände. Sie sind alle nicht vollständig.
- Wir haben gesehen dass für jede Menge M gilt dass $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ist ein vollständiger Verband.
- Sei $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(M)$ die Menge von allen endlichen Mengen. Dann $\mathcal{Q}$ is ein Verband. $\mathcal{Q}$ ist vollstandig gdw. M ist eine endliche Menge.
- Jeder vollständiger Verband $\mathcal{M}$ hat das kleinste und das grosste Element. Sie sind, bzw., $\inf \mathcal{M}$ und $\sup \mathcal{M}$.

Satz. Jeder endliche Verband ist vollständig.

Beweis. Sei $(M, \preceq)$ ein Verband. Wir beweisen durch Induktion über $n = |X|$: Für jede endliche nicht-leere Teilmenge $X \subseteq M$ existiert $\sup X$. (Der Beweis bezüglich $\inf X$ ist ähnlich.)

- **Induktionsanfang:** Sei $n = 1 = |X|$ und $x \in X$. Dann ist $x \preceq x$ und für alle oberen Schranken z von X gilt offenbar $x \preceq z$. Also ist $x = \sup X$.
- Sei $n \in \mathbb{N}_+$ beliebig.
  - **Induktionshypothese:** Für jedes $X \subseteq M$ mit $|X| = n$ existiert $\sup X$.
  - **Induktionsbehauptung:** Für jedes $X \subseteq M$ mit $|X| = n + 1$ existiert $\sup X$.

Satz. Jeder endliche Verband ist vollständig.

Beweis. (Fortzetzung)

- Sei $X \subseteq M$ mit $|X| = n + 1$ und $z \in X$. Gemäß Induktionshypothese existiert ein $y = \sup(X \setminus \{z\})$. Wir zeigen, dass $z \vee y = \sup X$.
- Es gilt $x \preceq z \vee y$ für alle $x \in X$. Sei $m \in M$, so dass $x \preceq m$ für alle $x \in X$. Also auch $z \preceq m$ und $y \preceq m$. Damit allerdings auch $z \vee y \preceq m$. $\square$

Satz. Für jeden Verband $(M, \preceq)$ und alle $x, y, z \in M$ gelten

- $x \vee y = y \vee x$ und $x \wedge y = y \wedge x$ — Kommutativität
- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ und $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ — Assoziativität
- $x \vee (x \wedge y) = x$ und $x \wedge (x \vee y) = x$ — Absorption

Beweis. Z.B. beweisen wir dass $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

$x \wedge (y \wedge z) \geq x$ und $x \wedge (y \wedge z) \geq y \wedge z$. Also $x \wedge (y \wedge z) \geq x$ und $x \wedge (y \wedge z) \geq y$ und $x \wedge (y \wedge z) \geq z$.

Damit sehen wir $x \wedge (y \wedge z) \geq x \wedge y$, und deswegen

$$x \wedge (y \wedge z) \geq (x \wedge y) \wedge z.$$

Ähnlich zeigen wir $(x \wedge y) \wedge z \geq x \wedge (y \wedge z)$, also $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$,

UNIVERSITÄT
LEIPZIG

VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT!

Łukasz Grabowski
Mathematisches Institut

grabowski@math.uni-leipzig.de