Grundlagen Lineare Algebra für Informatiker

Nikita Emanuel John Fehér, 3793479

16. Mai 2024
Montag 09:15-10:45 Valerie Christiana Sabrina Freund

Aufgabe 1 Berechnen Sie die folgenden Matrixprodukte.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2+4-3 & 4+10 & 3+12+24 \\ 6+2+3 & 12+5 & 9+6-24 \\ 4-2-4 & 8-5 & 6-6+32 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 14 & 39 \\ 11 & 17 & -9 \\ -2 & 3 & 32 \end{pmatrix}$$

(b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -2+4-6 & -1-3 \\ 5+12+8 & -3+4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 25 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 9+-2+-8+0 \\ -9+0+16+9 \\ 54+-1+-28+15 \\ 0+2+20+3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 16 \\ 40 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (dabei bezeichnet A^n das n-fache Produkt von A mit sich selbst).

- Induktionsanfang n = 1

$$\begin{aligned} A^1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1(1-1)}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Induktionsvoraussetzung $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Induktionsschritt

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{(n+1)(n+1-1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^n A^1 &= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+0+0 & 1+n+0 & 0+n+\frac{n(n-1)}{2} \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+1+n \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{2n+n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{(n)(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{(n+1)(n+1-1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 3 Wir betrachten die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die definiert ist durch

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y-z \\ 3x+y+2z \\ 2x+y+z \end{pmatrix}.$$

Ferner sei $A = (e1, e2, e3)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$. Zusätzlich betrachten wir noch die geordnete Basis

$$B = (b_1, b_2, b_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

.

1) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_A(F)$.

   -

     $M_A(F)$

$$\implies F(a_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \Phi_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$\implies F(a_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \Phi_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\implies F(a_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \Phi_A\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\implies \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix T_B^A.

- $A = BT$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} BT &= \begin{pmatrix} 1m_{11} + 0m_{21} + 1m_{31} & 1m_{12} + 0m_{22} + 1m_{32} & 1m_{13} + 0m_{23} + 1m_{33} \\ 1m_{11} + 1m_{21} + 0m_{31} & 1m_{12} + 1m_{22} + 0m_{32} & 1m_{13} + 1m_{23} + 0m_{33} \\ 0m_{11} + 1m_{21} + 1m_{31} & 0m_{12} + 1m_{22} + 1m_{32} & 0m_{13} + 1m_{23} + 1m_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1m_{11} + 1m_{31} & 1m_{12} + 1m_{32} & 1m_{13} + 1m_{33} \\ 1m_{11} + 1m_{21} & 1m_{12} + 1m_{22} & 1m_{13} + 1m_{23} \\ 1m_{21} + 1m_{31} & 1m_{22} + 1m_{32} & 1m_{23} + 1m_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

3) Bestimmen Sie gleichfalls T_A^B.

- $B = AT$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

$$AT = \begin{pmatrix} 1m_{11} + 0m_{21} + 0m_{31} & 1m_{12} + 0m_{22} + 0m_{32} & 1m_{13} + 0m_{23} + 0m_{33} \\ 0m_{11} + 1m_{21} + 0m_{31} & 0m_{12} + 1m_{22} + 0m_{32} & 0m_{13} + 1m_{23} + 0m_{33} \\ 0m_{11} + 0m_{21} + 1m_{31} & 0m_{12} + 0m_{22} + 1m_{32} & 0m_{13} + 0m_{23} + 1m_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1m_{11} & 1m_{12} & 1m_{13} \\ 1m_{21} & 1m_{22} & 1m_{23} \\ 1m_{31} & 1m_{32} & 1m_{33} \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_B(F)$.

- $M_B(F)$

$$\implies F(b_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 1.5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2.5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \Phi_B \left(\begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \right)$$

$$\implies F(b_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2.5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0.5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \Phi_B \left(\begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} \right)$$

$$\implies F(b_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \Phi_B \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\implies \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$