WEIHNACHTS VORLESUNG

MIT PROF. SCHWARZ

WIE IRRATIONAL DARF ES SEIN?
VON HIMMLISCHER SPHÄRENMUSIK UND
CHAOS IM DREIKÖRPERPROBLEM

11. DEZEMBER 2024

19:15 UHR, HÖRSAAL 3

Der Glühwein- und Punschverkauf startet 18:30 Uhr vor dem Ziegenledersaal (Innenhof). Dort wird es auch weihnachtliches Gebäck geben.

FSR MATHE
Universität Leipzig

Bringt euch gern einen eigenen Becher mit :)

Diskrete Strukturen (WS 2024-25) - Halbserie 7

7.1 **[3]**

Seien A und B Mengen mit $|A| = |B|$. Zeigen Sie dass $|A^2| = |B^2|$.

Solution. Da $|A| = |B|$, haben wir eine Bijektion $f\colon A \to B$. Definieren wir $g\colon A \times A \to B \times B$ mit $g(x, y) := (f(x), f(y))$.

Wir wollen zeigen, dass g bijektiv ist. Sei $(a, b) \in B^2$. Da f surjektiv ist, haben wir $f(x) = a, f(y) = b$ für einige $x, y \in A$. Daher ist $g(x, y) = (f(x), f(y)) = (a, b)$.

Wir wollen nun zeigen, dass g injektiv ist. Nehmen wir an, dass $(a, b), (c, d) \in A^2$ so sind, dass $g(a, b) = g(c, d)$. Dann ist $(f(a), f(b) = (f(c), f(d))$. Durch die Schlüsseleigenschaft des geordneten Paares haben wir $f(a) = f(c)$ und $f(b) = f(d)$. Da f injektiv ist, folgern wir $a = c$ und $b = d$, was zeigt, dass $(a, b) = (c, d)$.

7.2 **[4]**

Für eine Menge M und $k \in \mathbb{N}$, definieren wir $\mathcal{P}_k(M) := \{X \subset M\colon |X| = k\}$. Seien A und B Mengen mit $|A| = |B|$.

(a) Zeigen Sie, dass $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$.

(b) Zeigen Sie, dass für jede $k \in \mathbb{N}$ gilt $|\mathcal{P}_k(A)| = |\mathcal{P}_k(B)|$

Solution.

(a) Da $|A| = |B|$, haben wir eine Bijektion $f\colon A \to B$. Wir definieren $p\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ durch die Formel $p(X) := f(X)$, wobei $X \subset A$. Wir wollen zeigen, dass p bijektiv ist.

Sei $g := f^{-1}$ die inverse Funktion zu g. Da $f(g(X)) = X$, wenn $X \subset B$, haben wir auch $p(g(X)) = X$. Dies zeigt, dass p surjektiv ist.

Für die Injektivität seien X und Y Teilmengen von X so, dass $p(X) = p(Y)$. Dies bedeutet, dass $f(X) = f(Y)$, und somit $X = g(f(X)) = g(f(Y)) = Y$.

(b) Da f bijektiv ist, stellen wir fest, dass $|f(A)| = |A|$. Dies impliziert, dass $p(\mathcal{P}_k(A)) = \mathcal{P}_k(B)$, und somit definiert p die erforderliche Bijektion.'

7.3 **[3]**

Sei A eine unendliche abzählbare Menge. Zeigen Sie dass $|\mathcal{P}_2(A)| = \aleph_0$. (Hinweise: Sie können die Resultate der vorherigen Übungen auf diesem oder einem vorherigen Blatt verwenden.)

Solution.

Da gilt $|A| = |\mathbb{N}|$, aus der letzten Übung haben wir $|\mathcal{P}_2(A)| = |\mathcal{P}_2(\mathbb{N})|$. Deswegen reicht es zu zeigen dass $|\mathcal{P}_2(\mathbb{N})| = |\mathbb{N}|$. Nach CSB es reicht zewi Injektionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}_2(\mathbb{N})$ und $g\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ zu definieren.

Um f zu definieren, setzen wir $f(x) := \{x\}$.

Um g zu definieren, benutzen wir eine Übung aus vorherigen Blatt, die sagt, dass $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2|$, also es gibt eine Bijektion $b\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$.

Deswegen definieren wir erst eine Injektion $h\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}^2$ mit $h(\{x, y\}) := (x, y)$, wobei wir nehmen an, dass $x < y$. Dann ist $h; b\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ eine Injektion.

7.4 Gegeben sei eine injektive Funktion $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, definiert durch $h(x_1, x_2, x_3) = g(g(x_1, x_2), x_3)$ für alle $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$ ebenfalls injektiv ist.

Solution. Seien $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N}$ und gelte $h(x_1, x_2, x_3) = h(y_1, y_2, y_3)$.
Das heißt es gilt $g(g(x_1, x_2), x_3) = g(g(y_1, y_2), y_3)$. Da g injektiv ist, folgt daraus $(g(x_1, x_2), x_3) = (g(y_1, y_2), y_3)$. Und mit der selben Begründung folgt aus $g(x_1, x_2) = g(y_1, y_2)$, dass $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ gilt. Damit gilt also $(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$ und h ist injektiv.

7.5 Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Cantor-Schröder-Bernstein, dass

$$|\{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 1\}| = |[0, 1] \cap \mathbb{Q}|$$

gilt. Dabei bezeichnet $[0, 1]$ das geschlossene Intervall reeller Zahlen von 0 bis 1.

Solution. Zwei Mengen sind gleichmächtig, wenn es eine Bijektion zwischen ihnen, also in unserem Fall eine bijektive Funktion $h : \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 1\} \to [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ gibt.
Nach CSB-Satz existiert eine solche Bijektion h, wenn es zwei injektive Funktionen $f : \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 1\} \to [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ und $g : [0, 1] \cap \mathbb{Q} \to \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 1\}$ gibt.
Wir defier Tarski, Fixpunkte

7.6 Betrachten Sie die Funktion $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, die wie folgt definiert ist: für alle $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sei $f(X)$ die Menge, die aus X entsteht, indem jede gerade Zahl $x \in X$ durch $x + 1$ ersetzt wird, und jede ungerade Zahl $x \in X$ durch $x + 3$ ersetzt wird. So ist beispielsweise $f(\{0, 8, 17, 23\}) = \{1, 9, 20, 26\}$.

1. Zeigen Sie, dass für alle $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gilt: Wenn $X \subseteq Y$, dann $f(X) \subseteq f(Y)$.
2. Besitzt f einen Fixpunkt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Solution.

1. Angenommen $X \subseteq Y$ und sei $x \in f(X)$. Wir machen eine Fallunterscheidung:
   (i) Gelte x ungerade. Dann ist $x-1 \in X$ und wegen $X \subseteq Y$ ist auch $x-1 \in Y$. Also $x \in f(Y)$.
   (ii) Gelte x gerade. Dann ist $x-3 \in X$ und wegen $X \subseteq Y$ ist auch $x-3 \in Y$. Also auch $x \in f(Y)$.
2. Ja. Es gilt $f(\emptyset) = \emptyset$, d.h. $\emptyset$ ist ein Fixpunkt von f.
   Alternativ kann man aus Lemma von Knaster und Tarski schliessen, dass f einen Fixpunkt besitzen muss.

nieren $f : \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 1\} \to [0,1] \cap \mathbb{Q}$ durch $x \mapsto x^{-1}$, und $g : [0,1] \cap \mathbb{Q} \to \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 1\}$ durch $x \mapsto x+1$. Beide Funktionen sind injektiv. Damit existiert eine Bijektion h und die beiden Mengen sind gleichmächtig.

7.7 Betrachten Sie die Funktion $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, die wie folgt definiert ist: für alle $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sei $f(X)$ die Menge, die aus X entsteht, indem jede gerade Zahl $x \in X$ durch $x+1$ ersetzt wird, und jede ungerade Zahl $x \in X$ durch $x+3$ ersetzt wird. So ist beispielsweise $f(\{0, 8, 17, 23\}) = \{1, 9, 20, 26\}$.

1. Zeigen Sie, dass für alle $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gilt: Wenn $X \subseteq Y$, dann $f(X) \subseteq f(Y)$.
2. Besitzt f einen Fixpunkt? Begründen Sie Ihre Antwort.

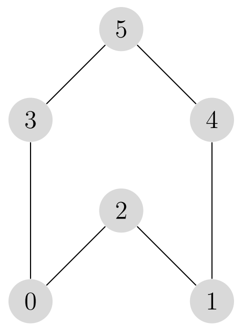
Solution.

1. Angenommen $X \subseteq Y$ und sei $x \in f(X)$. Wir machen eine Fallunterscheidung:
   (i) Gelte x ungerade. Dann ist $x-1 \in X$ und wegen $X \subseteq Y$ ist auch $x-1 \in Y$. Also $x \in f(Y)$.
   (ii) Gelte x gerade. Dann ist $x-3 \in X$ und wegen $X \subseteq Y$ ist auch $x-3 \in Y$. Also auch $x \in f(Y)$.
2. Ja. Es gilt $f(\emptyset) = \emptyset$, d.h. $\emptyset$ ist ein Fixpunkt von f.
   Alternativ kann man aus Lemma von Knaster und Tarski schliessen, dass f einen Fixpunkt besitzen muss.

7.8 **[5]**

Gegeben sei die Menge $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ und die **Ordnungsrelation** $R \subseteq M \times M$, dargestellt als **Hasse-Diagramm**:

1. Geben Sie R explizit als eine Telimenge von $M \times M$ an.
2. Geben Sie für R



(a) <u>alle</u> minimalen Elemente,

(b) <u>alle</u> oberen Schranken für $\{1,\ 3\}$,

(c) <u>alle</u> unteren Schranken für $\{0,\ 1\}$,

(d) das größte Element von $\{0,\ 3\}$ an.

Solution.

1. $R = \{(m, m) \mid m \in M\} \cup \{(0, 2), (1, 2), (0, 3), (0, 5), (3, 5), (1, 4), (1, 5), (4, 5)\}$ alternativ $R = \{(x, y) \in M \times M \mid x \leq y\} \setminus \{(1, 3), (2, 3), (0, 4), (2, 4), (3, 4), (2, 5)\}$

2. (a) 0 und 1 sind minimale Elemente (es gibt kein Element m in M mit $(m, 0) \in R$ oder $(m, 1) \in R$)

   (b) $\{5\}$, denn (nur) für 5 gilt $(1, 5) \in R$ und $(3, 5) \in R$

   (c) es gibt keine unteren Schranken für $\{0, 1\}$ (0 selber ist keine untere Schranke von $\{0, 1\}$, da dazu $(0, 1) \in R$ gelten müsste)

   (d) 3 ist das grösste Element von $\{0, 3\}$, denn $(0, 3) \in R$, $(3, 3) \in R$ (also 3 ist obere Schranke von $\{0, 3\}$ und $3 \in \{0, 3\}$.

7.9 **[2]**

Gegeben sei die Relation $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definiert durch

$$(a, b) \in R \text{ genau dann, wenn } a \text{ ist Teiler von } b.$$

Ist $(\mathbb{N}, R)$ eine **total geordnete Menge**? Begründen Sie Ihre Antwort.

Solution. Nein. Sie ist nämlich nicht vollständig. Gegenbeispiel: Es gilt für $2, 3 \in \mathbb{N}$ weder $(2, 3) \in R$ noch $(3, 2) \in R$.