# Vorlesung “Logik”

## 10-201-2108-1

## 11. PL1 – Prädikatenlogische Resolution

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

03. Juli 2025
Leipzig

# In der letzten Vorlesung

Grundresolution

Allgemeine Substitution

Unifikation

Einführung Prädikatenlogische Resolvente

# Fahrplan für diese Vorlesung

Prädikatenlogische Resolvente

Lifting-Lemma

Resolutionssatz

# Prädikatenlogische Resolution

## Definition

Substitution $\sigma : V \to \mathcal{T}$ heißt Variablenumbenennung falls: $\sigma(x) \in \mathcal{V} \setminus V$ für alle $v \in V$, und $\sigma$ ist injektiv.

## Definition

Sei $\phi = \forall x_1 \dots \forall x_n \xi$ gleichheitsfreier Satz in SNF mit Matrix $\xi$ in KNF und $M(\xi) = \{D_1, \dots, D_m\}$. Eine Klausel $R$ heißt (prädikatenlogische) Resolvente von $D_i$ und $D_j$ (bzw. von $\phi$), falls:

1. es existieren Variablenumbenennungen $\sigma_1$,$\sigma_2$, so daß:
$$\mathit{frei}(D_i\sigma_1) \cap \mathit{frei}(D_j\sigma_2) = \varnothing$$
2. es existieren nichtleere $D_i' \subseteq D_i$ und $D_j' \subseteq D_j$ mit $\sigma$ ist mgu von $\overline{D_i'}\sigma_1 \cup D_j'\sigma_2$, wobei $\overline{D_i'} = \{\overline{L} \mid L \in D_i'\}$ und
3. $R = \Big((D_i\sigma_1 \setminus D_i'\sigma_1) \cup (D_j\sigma_2 \setminus D_j'\sigma_2)\Big)\sigma$

# Prädikatenlogische Resolution

Beispiele:

1. Sei $\phi = \forall x \; \underbrace{(P(x) \wedge \neg P(f(f(x))))}_{\xi}$
   - $M(\xi) = \{\underbrace{\{P(x)\}}_{D_1}, \underbrace{\{\neg P(f(f(x)))\}}_{D_2}\}$
   - Variablenumbennung $\sigma_1 = [x/y]$ und $\sigma_2 = []$ liefert
     $$D_1\sigma_1 = \{P(y)\} \text{ und } D_2\sigma_2 = \{\neg P(f(f(x)))\}$$
   - für $D_1' = D_1$ und $D_2' = D_2$ ist $\sigma = [y/f(f(x))]$ mgu von
     $$\overline{D_1'}\sigma_1 \cup D_2'\sigma_2 = \{\neg P(y), \neg P(f(f(x)))\}$$
   - $R = \big((D_i\sigma_1 \setminus D_i'\sigma_1) \cup (D_j\sigma_2 \setminus D_j'\sigma_2)\big)\sigma = (\emptyset \cup \emptyset)\sigma = \emptyset = \Box$

# Prädikatenlogische Resolution

Beispiele:

2. $\phi = \forall x \, \forall z \, \underbrace{((P(f(x)) \vee P(z) \vee \neg Q(z)) \wedge (\neg P(x) \vee R(g(x), a)))}_{\xi}$

- $M(\xi) = \{\underbrace{\{P(f(x)),\ P(z),\ \neg Q(z)\}}_{D_1},\ \underbrace{\{\neg P(x),\ R(g(x), a)\}}_{D_2}\}$
- Variablenumbenennung: $\sigma_1 = []$, $\sigma_2 = [x/y]$ ergibt

$$D_1\sigma_1 = \underbrace{\{P(f(x)),\ P(z)\}}_{D_1'} \cup \{\neg Q(z)\},$$

$$D_2\sigma_2 = \underbrace{\{\neg P(y)\}}_{D_2'} \cup \{R(g(y), a)\}$$

- $\sigma = [z/f(x)][y/f(x)]$ ist mgu von

$$\overline{D_1'}\sigma_1 \cup D_2'\sigma_2 = \{\neg P(f(x)), \neg P(z), \neg P(y)\}$$

- Resolvente $R = ((D_1\sigma_1 \setminus D_1'\sigma_1) \cup (D_2\sigma_2 \setminus D_2'\sigma_2))\,\sigma$

$$= (\{\neg Q(z)\} \cup \{R(g(y), a)\})\sigma$$

$$= \{\neg Q(f(x)),\ R(g(f(x)), a)\}$$

# Prädikatenlogische Resolution

- wir übernehmen die Notation aus der AL und schreiben Res für den Resolutionoperator und $\mathrm{Res}^*$ für die Resolutions-hülle, d.h. für prädikatenlogische Klauselmenge $M$

$$\mathrm{Res}(M) = M \cup \{R \mid R \text{ ist Resolvente zweier Klauseln aus } M\}$$

$$\mathrm{Res}^0(M) = M, \mathrm{Res}^{i+1}(M) = \mathrm{Res}(\mathrm{Res}^i(M)), \mathrm{Res}^*(M) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Res}^i(M)$$

- für eine bessere Übersicht eignet sich wieder die graphische Darstellung – diesmal mit Angabe der Variablenumbennung und des Unifikators
- Ziel ist es, den Resolutionssatz für die Prädikatenlogik zu beweisen, das heißt: Klauselmenge $M$ ist unerfüllbar genau dann, wenn $\square \in \mathrm{Res}^*(M)$

# Resolvente – Graphische Darstellung

$$D_1 = \{\, \underline{P(f(x))},\ \underline{P(z)},\ \neg Q(z) \,\} \qquad\qquad D_2 = \{\, \underline{\neg P(x)},\ R(g(x), a) \,\}$$

$$\sigma_1 = [\,] \qquad\qquad \sigma_2 = [x/y]$$

$$\{\, P(f(x)),\ P(z),\ \neg Q(z) \,\} \qquad\qquad \{\, \neg P(y),\ R(g(y), a) \,\}$$

$$\sigma = [z/f(x)][y/f(x)]$$

$$\{\, \neg Q(f(x)),\ R(g(f(x)), a) \,\}$$

Anmerkung:

- ohne Variablenumbenennung wäre $\overline{P(f(x))}$ und $\neg P(x)$ nicht unifizierbar, und somit z.B. für

$$\forall x \left( P(f(x)) \wedge \neg P(x) \right) \text{ keine } \square \text{ resolvierbar}$$

# Resolvente – Graphische Darstellung

$$\begin{tikzcd}
D_1 = \{\, \underline{P(x)},\ Q(x) \} \arrow[d, dash, "\sigma_1 = {[\,]}"] & D_2 = \{\, \underline{\neg P(f(y))} \} \arrow[d, dash, "\sigma_2 = {[\,]}"] & D_3 = \{\, \neg Q(a) \} \\
\{\, P(x),\ Q(x) \} \arrow[d, dash] & \{\, \neg P(f(y)) \} \arrow[dl, dash, "\sigma = {[x/f(y)]}"] & \\
\{\, Q(f(y)) \} & &
\end{tikzcd}$$

Anmerkung:

- ohne Anwendung des Unifikators wäre $R = \{Q(x)\}$, und somit im nächsten Schritt mit Hilfe von Klausel $D_3$ die $\Box$ ableitbar, aber

$$\forall x \,\forall y \,\big((P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg P(f(y)) \wedge \neg Q(a)\big) \text{ erfüllbar}$$

# Grundinstanzen

## Definition

Ein Literal $L'$ ist Grundinstanz eines Literals $L$, falls eine Substitution $\sigma$ existiert mit: $L' = L\sigma$ und $L'$ variablenfrei.

Beispiel: Gegeben Literal $L = P(x, f(x), g(a, y))$, dann

$$L' = P(a, f(a), g(a, b)) \quad \text{und} \quad L'' = P(f(c), f(f(c)), g(a, d))$$

Grundinstanzen via $\sigma' = [x/a, y/b]$ und $\sigma'' = [x/f(c), y/d]$.

## Definition

Eine Klausel $M'$ ist Grundinstanz einer Klausel $M$, falls eine Substitution $\sigma$ existiert mit: $M' = M\sigma$ und $M'$ variablenfrei.

Beispiel: Gegeben $M = \{P(x, f(x), g(a, y)),\ \neg Q(y, z)\}$, dann

Klausel $M' = \{P(a, f(a), g(a, b)),\ \neg Q(b, c)\}$, und

Klausel $M'' = \{P(f(c), f(f(c)), g(a, d)),\ \neg Q(d, e)\}$

Grundinstanzen via $\sigma' = [x/a, y/b, z/c]$, $\sigma'' = [x/f(c), y/d, z/e]$.

# Lifting-Lemma

## Proposition (Lifting-Lemma)

*Seien $K_1$ und $K_2$ prädikatenlogische Klauseln und $K_1'$ sowie $K_2'$ entsprechende Grundinstanzen. Falls $R'$ aussagenlogische Resolvente von $\{K_1', K_2'\}$, dann existiert prädikatenlogische Resolvente $R$ von $\{K_1, K_2\}$ mit $R'$ ist Grundinstanz von $R$ .*

$$\begin{tikzcd}
K_1 \arrow[d, "\sigma_1"'] \arrow[drr, dash] & & & & K_2 \arrow[d, "\sigma_2"] \arrow[dll, dash] \\
K_1' \arrow[drr, dash] & & R \arrow[d, "\sigma"] & & K_2' \arrow[dll, dash] \\
& & R' & &
\end{tikzcd}$$

– Resolution
→ Grundinstanziierung

# Lifting-Lemma – Beispiel

$$
\begin{tikzcd}
\{P(x, f(x), g(a, y)), \neg Q(y, z)\} \arrow[dr, dash] \arrow[dd, "{\sigma_1 = [x/b, y/b, z/c]}"'] & & \{\neg P(y, f(y), z)\} \arrow[dl, dash] \arrow[dd, "{\sigma_2 = [y/b, z/g(a, b)]}"] \\
& \{\neg Q(y, z)\} \arrow[dd, "{\sigma = [y/b, z/c]}"] & \\
\{P(b, f(b), g(a, b)), \neg Q(b, c)\} \arrow[dr, dash] & & \{\neg P(b, f(b), g(a, b))\} \arrow[dl, dash] \\
& \{\neg Q(b, c)\} &
\end{tikzcd}
$$

# Lifting-Lemma

Beweis: Seien $K_1$ und $K_2$ prädikatenlogische Klauseln und $K_1' = K_1\sigma_1$ sowie $K_2' = K_2\sigma_2$ entsprechende Grundinstanzen. Offensichtlich existieren Variablenumbennungen $u_1$ und $u_2$, so daß $\mathit{frei}(K_1 u_1) \cap \mathit{frei}(K_2 u_2) = \varnothing$. Es gilt, daß auch $K_1'$ und $K_2'$ Grundinstanzen von $K_1 u_1$ bzw. $K_2 u_2$ sind. Setze dazu $\sigma_1' = u_1^{-1}\sigma_1$ und $\sigma_2' = u_2^{-1}\sigma_2$, d.h.

$$K_1' = (K_1 u_1)\sigma_1' \quad \text{und} \quad K_2' = (K_2 u_2)\sigma_2'.$$

Da $K_1 u_1$ und $K_2 u_2$ variablendisjunkt gilt mit $\sigma' = \sigma_1'\sigma_2'$ auch:

$$K_1' = (K_1 u_1)\sigma' \quad \text{und} \quad K_2' = (K_2 u_2)\sigma'.$$

Nach Voraussetzung ist $R'$ aussagenlogische Resolvente von $K_1'$ und $K_2'$. Somit existiert Literal $L$ mit $L \in K_1'$ und $\overline{L} \in K_2'$, so daß:

$$R' = \left(K_1' \setminus \{L\}\right) \cup \left(K_2' \setminus \{\overline{L}\}\right).$$

Nach Definition existiert mindestens ein $\mathit{Lit} \in K_1 u_1$ mit $\mathit{Lit}\sigma' = L$. Sammle alle auf via $\{L_1, \ldots, L_m\} = \{\mathit{Lit} \in K_1 u_1 \mid \mathit{Lit}\sigma' = L\}$ und analog für $\overline{L}$ mittels $\{L_1', \ldots, L_n'\} = \{\mathit{Lit}' \in K_2 u_2 \mid \mathit{Lit}'\sigma' = \overline{L}\}$.

# Lifting-Lemma

Folglich ist $\sigma'$ Unifikator für $M = \{L_1, \ldots, L_m, \overline{L_1'}, \ldots, \overline{L_n'}\}$. Sei $\sigma$ mgu von $M$. Dann ist

$$R = \Big( \big(K_1 u_1 \setminus \{L_1, \ldots, L_m\}\big) \cup \big(K_2 u_2 \setminus \{L_1', \ldots, L_n'\}\big) \Big) \sigma$$

prädikatenlogische Resolvente von $K_1$ und $K_2$. Da $\sigma$ mgu existiert Substitution $\tau$ mit $\sigma\tau = \sigma'$. Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
R' &= \big(K_1' \setminus \{L\}\big) \cup \big(K_2' \setminus \{\overline{L}\}\big) \\
&= \big((K_1 u_1)\sigma' \setminus \{L\}\big) \cup \big((K_2 u_2)\sigma' \setminus \{\overline{L}\}\big) \\
&= \big((K_1 u_1)\sigma' \setminus \{L_1\sigma', \ldots, L_m\sigma'\}\big) \cup \big((K_2 u_2)\sigma' \setminus \{L_1'\sigma', \ldots, L_n'\sigma'\}\big) \\
&= \Big( \big(K_1 u_1 \setminus \{L_1, \ldots, L_m\}\big) \cup \big(K_2 u_2 \setminus \{L_1', \ldots, L_n'\}\big) \Big) \sigma' \qquad \text{(alle Lit!)} \\
&= \Big( \big(K_1 u_1 \setminus \{L_1, \ldots, L_m\}\big) \cup \big(K_2 u_2 \setminus \{L_1', \ldots, L_n'\}\big) \Big) \sigma\tau \\
&= \Big( \Big( \big(K_1 u_1 \setminus \{L_1, \ldots, L_m\}\big) \cup \big(K_2 u_2 \setminus \{L_1', \ldots, L_n'\}\big) \Big) \sigma \Big) \tau \\
&= R\tau
\end{aligned}$$

Daraus folgt, daß $R'$ Grundinstanz (via $\tau$) von $R$ ist. $\square$

# Resolutionssatz

## Theorem (Robinson, 1965)

*Sei* $\phi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \xi$ *gleichheitsfreier Satz in SNF mit Matrix* $\xi$ *in KNF und* $M(\xi) = \{D_1, \ldots, D_l\}$*. Es gilt:*

$$\phi \textit{ unerfüllbar} \quad \textit{gdw.} \quad \Box \in \mathrm{Res}^*(M(\xi))$$

Beweis: ($\Leftarrow$) Korrektheit. Für $\psi$ sei $\forall\psi$ der universelle Abschluß von $\psi$. Aufgrund der Distributivität gilt $\phi \equiv \bigwedge_{k=1}^{l} \forall D_k$. Wir zeigen zuerst: Falls $R$ Resolvente zweier Klauseln $D_i$ und $D_j$, dann $\forall D_i \wedge \forall D_j \models \forall R$ (prädikatenlogisches Resolutionslemma).

Sei $(\mathfrak{A}, \beta)$ Interpretation mit $(\mathfrak{A}, \beta)(\forall D_i) = (\mathfrak{A}, \beta)(\forall D_j) = 1$. Sei

$$\begin{aligned} R &= \Big( (D_i\sigma_1 \setminus \{L_1, \ldots, L_m\}) \cup \big( D_j\sigma_2 \setminus \{L'_1, \ldots, L'_n\} \big) \Big) \sigma \\ &\supseteq ((D_i\sigma_1)\sigma \setminus \{L_1\sigma, \ldots, L_m\sigma\}) \cup \big((D_j\sigma_2)\sigma \setminus \{L'_1\sigma, \ldots, L'_n\sigma\}\big) \\ &\qquad \text{(nicht zwangsweise ausschöpfend)} \\ &= (D_i\sigma_1\sigma \setminus \{L\}) \cup \big(D_j\sigma_2\sigma \setminus \{\overline{L}\}\big) \end{aligned}$$

mit $\sigma_1$, $\sigma_2$ Variablenumb. und $\sigma$ mgu für $\{L_1, \ldots, L_m, \overline{L'_1}, \ldots, \overline{L'_n}\}$ und $L = L_1\sigma = \ldots = L_m\sigma = \overline{L'_1}\sigma = \ldots = \overline{L'_n}\sigma$.

# Resolutionssatz

## Theorem (Robinson, 1965)

*Sei $\phi = \forall x_1 \ \ldots \forall x_n \xi$ gleichheitsfreier Satz in SNF mit Matrix $\xi$ in KNF und $M(\xi) = \{D_1, \ldots, D_l\}$. Es gilt:*

$$\phi \textit{ unerfüllbar} \quad \textit{gdw.} \quad \square \in \mathrm{Res}^*(M(\xi))$$

Beweis: ($\Leftarrow$) Korrektheit. Zz. Falls $R$ Resolvente von $D_i$ und $D_j$, dann $\forall D_i \wedge \forall D_j \models \forall R$. Angenommen $(\mathfrak{A}, \beta)(\forall R) = 0$, d.h. es existieren $u_1, \ldots, u_n \in U^{\mathfrak{A}}$ mit $(\mathfrak{A}, \underbrace{\beta_{[x_1 \mapsto u_1, \ldots, x_n \mapsto u_n]}}_{\beta'})(R) = 0$ wobei $\{x_1, \ldots, x_n\} = \mathit{frei}(R)$ (Semantik). Somit $(\mathfrak{A}, \beta')(D_i\sigma_1\sigma \setminus \{L\}) = 0$ und auch $(\mathfrak{A}, \beta')(D_j\sigma_2\sigma \setminus \{\overline{L}\}) = 0$ (Disjunktion). Aus Annahme $(\mathfrak{A}, \beta)(\forall D_i) = (\mathfrak{A}, \beta)(\forall D_j) = 1$ folgt $(\mathfrak{A}, \beta')(D_i\sigma_1\sigma) = 1$ und $(\mathfrak{A}, \beta')(D_j\sigma_2\sigma\}) = 1$. Folglich müßte $(\mathfrak{A}, \beta')(L) = (\mathfrak{A}, \beta')(\overline{L}) = 1$. Widerspruch.

# Resolutionssatz

**Theorem (Robinson, 1965)**

*Sei $\phi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \xi$ gleichheitsfreier Satz in SNF mit Matrix $\xi$ in KNF und $M(\xi) = \{D_1, \ldots, D_l\}$. Es gilt:*

$$\phi \textit{ unerfüllbar} \quad \textit{gdw.} \quad \Box \in \mathrm{Res}^*(M(\xi))$$

Beweis: ($\Leftarrow$) Korrektheit. Es gilt: Falls $R$ Resolvente zweier Klauseln $D_i$ und $D_j$, dann $\forall D_i \wedge \forall D_j \models \forall R$.
Sei $\Box \in \mathrm{Res}^*(M(\xi))$. Somit existiert eine endliche $\Box$-Deduktion basierend auf den Anfangsklauseln $D_1, \ldots, D_l$. Folglich ergibt das obige prädikatenlogische Resolutionslemma

$$\bigwedge_{k=1}^{l} \forall D_k \models \forall \Box$$

Da $\phi \equiv \bigwedge_{k=1}^{l} \forall D_k$ und $\forall \Box = \Box$ da $\mathit{frei}(\Box) = \varnothing$ folgt

$$\phi \models \Box$$

und somit $\phi$ unerfüllbar.

# Resolutionssatz

**Theorem (Robinson, 1965)**

*Sei $\phi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \xi$ gleichheitsfreier Satz in SNF mit Matrix $\xi$ in KNF und $M(\xi) = \{D_1, \ldots, D_l\}$. Es gilt:*

$$\phi \text{ unerfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad \Box \in \mathrm{Res}^*(M(\xi))$$

Beweis: $(\Rightarrow)$ Vollständigkeit. Sei $\phi$ unerfüllbar. Aufgrund der Vollständigkeit des Grundresolutionsalgorithmus existiert eine Folge von Klauseln $K'_1, \ldots, K'_k$ mit $K'_k = \Box$ und für $1 \leq i \leq k$ gilt:

- $K'_i$ ist Grundinstanz einer Klausel $D \in M(\xi)$, d.h.

  $$K'_i = D[x_1/t_1] \ldots [x_n/t_n] \text{ mit } t_1, \ldots, t_n \in D(\phi), \text{ oder}$$

- $K'_i$ ist aussagenlogische Resolvente zweier Klauseln $K'_a$ und $K'_b$ mit $a, b < i$

Wir konstruieren prädikatenlogische Klauseln $K_i$, so daß $K'_i$ Grundinstanz von $K_i$ und die korrespondierende Folge $K_1, \ldots, K_k$ prädikatenlogische $\Box$-Deduktion ist.

# Resolutionssatz

**Theorem (Robinson, 1965)**

*Sei $\phi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \xi$ gleichheitsfreier Satz in SNF mit Matrix $\xi$ in KNF und $M(\xi) = \{D_1, \ldots, D_l\}$. Es gilt:*

$$\phi \text{ unerfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad \square \in \mathrm{Res}^*(M(\xi))$$

Beweis: $(\Rightarrow)$ Vollständigkeit.
Seien $K_1, \ldots, K_{i-1}$ schon konstruiert. Zwei Fälle:

- Falls $K_i'$ Grundinstanz von Klausel $D \in M(\xi)$, dann $K_i := D$
- Falls nicht, dann ist $K_i'$ aussagenlogische Resolvente zweier Klauseln $K_a'$ und $K_b'$ mit $a, b < i$. Da $K_1, \ldots, K_{i-1}$ schon konstruiert, existieren prädikatenlogische Klauseln $K_a$ und $K_b$ mit $a, b < i$, so daß $K_a'$ und $K_b'$ Grundinstanzen von $K_a$ bzw. $K_b$. Nach Lifting-Lemma existiert prädikatenlogische Resolvente $K_i$ von $K_a$ und $K_b$ mit $K_i'$ ist Grundinstanz von $K_i$. $\square$

# Resolution – Schlußbemerkungen

Praktische Probleme bei der Resolventenbildung:

- zu viele Wahlmöglichkeiten (Disjunktionsglieder, Literale)
- zu viele nutzlose Klauseln (Redundanz, Sackgassen)
- kombinatorische Explosion des Suchraums (unendlich viele Resolventen bildbar)

Strategien und Heuristiken zur Effizienzsteigerung:

- Verbot bestimmter Schritte (P/N-restriktion)
- Priorisierung bestimmter Schritte (Einheitsklauseln)
- Achtung! Vollständigkeit darf nicht verloren gehen

# Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

11. PL1 – Prädikatenlogische Resolution

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

03. Juli 2025
Leipzig