UNIVERSITÄT LEIPZIG

Vorlesung 6 - Relationen und Funktionen

Diskrete Strukturen (WS 2023-24)

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

- Seien M und N zwei Mengen

- Seien M und N zwei Mengen (möglicherweise mit $M = N$).

- Seien M und N zwei Mengen (möglicherweise mit $M = N$). Eine Relation R von M nach N ist

- Seien M und N zwei Mengen (möglicherweise mit $M = N$). Eine Relation R von M nach N ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$.

- Seien M und N zwei Mengen (möglicherweise mit $M = N$). Eine Relation R von M nach N ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$.
- Ist $M = N$, so heißt R auch Relation auf M.

- Seien M und N zwei Mengen (möglicherweise mit $M = N$). Eine Relation R von M nach N ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$.
- Ist $M = N$, so heißt R auch Relation auf M.
- Statt $(m, n) \in R$

- Seien M und N zwei Mengen (möglicherweise mit $M = N$). Eine Relation R von M nach N ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$.
- Ist $M = N$, so heißt R auch Relation auf M.
- Statt $(m, n) \in R$ schreiben wir auch

- Seien M und N zwei Mengen (möglicherweise mit $M = N$). Eine Relation R von M nach N ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$.
- Ist $M = N$, so heißt R auch Relation auf M.
- Statt $(m, n) \in R$ schreiben wir auch $m\ R\ n$

- Seien M und N zwei Mengen (möglicherweise mit $M = N$). Eine Relation R von M nach N ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$.
- Ist $M = N$, so heißt R auch Relation auf M.
- Statt $(m, n) \in R$ schreiben wir auch $m\ R\ n$ oder $R(m, n)$

- Seien M und N zwei Mengen (möglicherweise mit $M = N$). Eine Relation R von M nach N ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$.
- Ist $M = N$, so heißt R auch Relation auf M.
- Statt $(m, n) \in R$ schreiben wir auch $m \; R \; n$ oder $R(m, n)$ oder $m \sim_R n$.

- Seien M und N zwei Mengen (möglicherweise mit $M = N$). Eine Relation R von M nach N ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$.
- Ist $M = N$, so heißt R auch Relation auf M.
- Statt $(m, n) \in R$ schreiben wir auch $m \; R \; n$ oder $R(m, n)$ oder $m \sim_R n$. Analog $m \not R \; n$.

- Seien M und N zwei Mengen (möglicherweise mit $M = N$). Eine Relation R von M nach N ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$.
- Ist $M = N$, so heißt R auch Relation auf M.
- Statt $(m, n) \in R$ schreiben wir auch $m\ R\ n$ oder $R(m, n)$ oder $m \sim_R n$. Analog $m \not R\ n$.
- Beispiel: die Menge

- Seien M und N zwei Mengen (möglicherweise mit $M = N$). Eine Relation R von M nach N ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$.
- Ist $M = N$, so heißt R auch Relation auf M.
- Statt $(m, n) \in R$ schreiben wir auch $m \; R \; n$ oder $R(m, n)$ oder $m \sim_R n$. Analog $m \not R \; n$.
- Beispiel: die Menge $\{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$

- Seien M und N zwei Mengen (möglicherweise mit $M = N$). Eine Relation R von M nach N ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$.
- Ist $M = N$, so heißt R auch Relation auf M.
- Statt $(m, n) \in R$ schreiben wir auch $m \, R \, n$ oder $R(m, n)$ oder $m \sim_R n$. Analog $m \not R \, n$.
- Beispiel: die Menge $\{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$.

- Seien M und N zwei Mengen (möglicherweise mit $M = N$). Eine Relation R von M nach N ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$.
- Ist $M = N$, so heißt R auch Relation auf M.
- Statt $(m, n) \in R$ schreiben wir auch $m \; R \; n$ oder $R(m, n)$ oder $m \sim_R n$. Analog $m \not R \; n$.
- Beispiel: die Menge $\{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$.
- Beispiel: die Freund-Relation auf der Menge F der Facebook-Nutzer

- Seien M und N zwei Mengen (möglicherweise mit $M = N$). Eine Relation R von M nach N ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$.
- Ist $M = N$, so heißt R auch Relation auf M.
- Statt $(m, n) \in R$ schreiben wir auch $m \; R \; n$ oder $R(m, n)$ oder $m \sim_R n$. Analog $m \not R \; n$.
- Beispiel: die Menge $\{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$.
- Beispiel: die Freund-Relation auf der Menge F der Facebook-Nutzer

$$\{(x, y) \in F \times F \mid x \text{ ist Facebook-Freund von } y\}$$

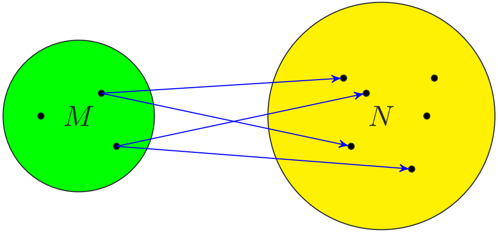
- Seien M und N zwei Mengen (möglicherweise mit $M = N$). Eine Relation R von M nach N ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$.
- Ist $M = N$, so heißt R auch Relation auf M.
- Statt $(m, n) \in R$ schreiben wir auch $m \; R \; n$ oder $R(m, n)$ oder $m \sim_R n$. Analog $m \not R \; n$.
- Beispiel: die Menge $\{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$.
- Beispiel: die Freund-Relation auf der Menge F der Facebook-Nutzer

$$\{(x, y) \in F \times F \mid x \text{ ist Facebook-Freund von } y\}$$

  ist eine Relation.

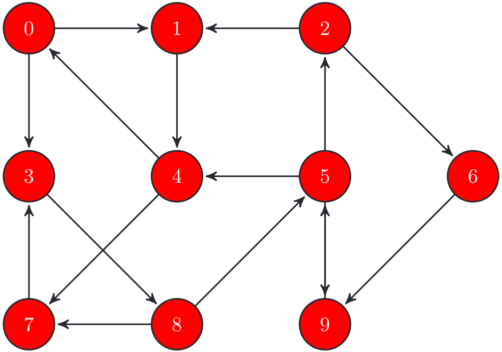
Relation von M nach N

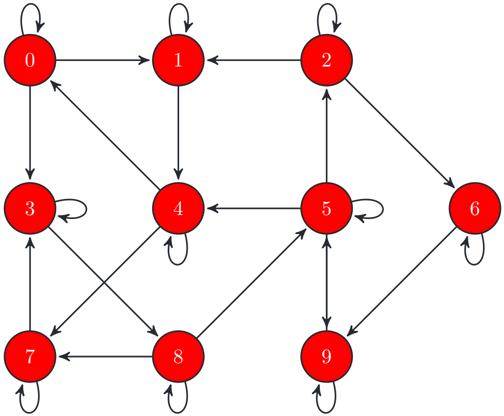
Relation von M nach N

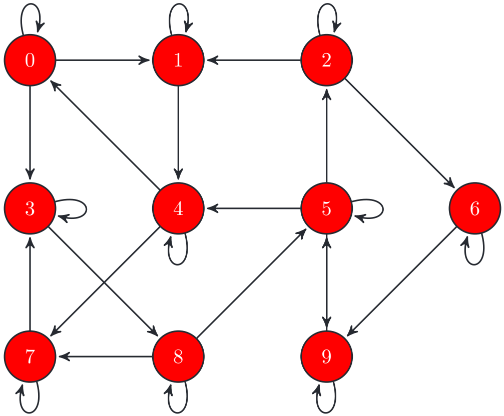


Relation auf $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

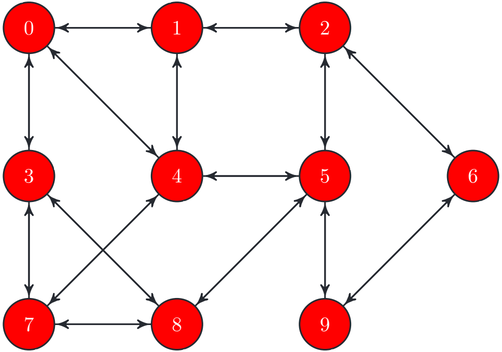
Relation auf $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

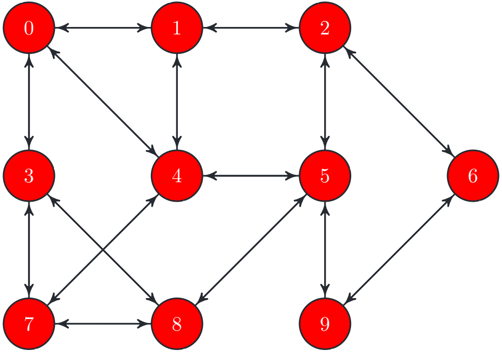



0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

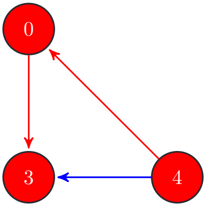


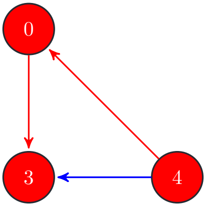
Reflexivität: Alle Elemente haben Schleifen.


0
1
2
3
4
5
6
7
8
9



Symmetrie: Jeder Pfeil ist beidseitig.

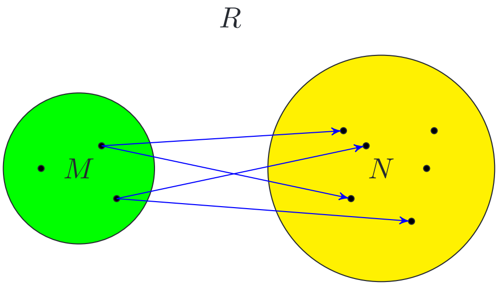

0
3
4



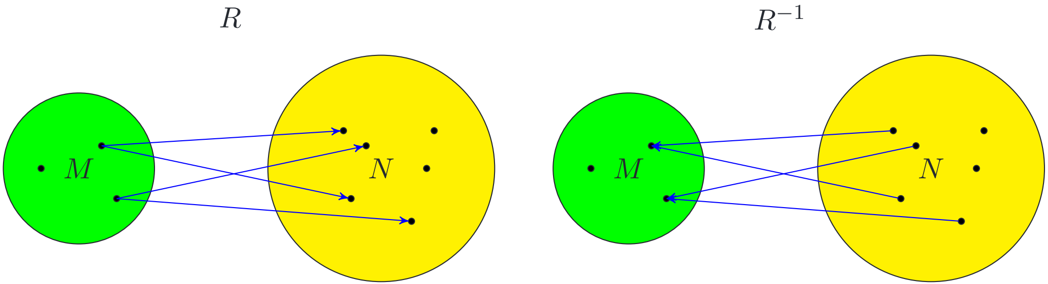
Transitivität: Für jeden Weg existiert auch der direkte Weg.

Operation: Inversion R^{-1} von einer Relation R.

Operation: Inversion R^{-1} von einer Relation R.



Operation: Inversion R^{-1} von einer Relation R.



Operation:

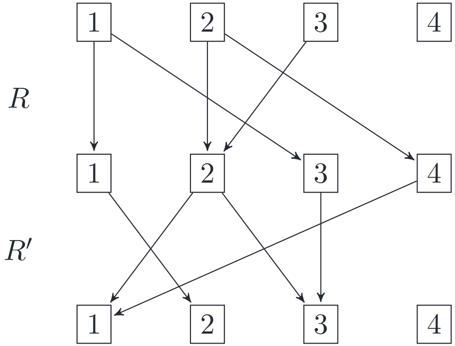
Operation: Komposition von R

Operation: Komposition von R gefolgt von R', Operation: Komposition von R gefolgt von R', wobei $R \subseteq M \times N$

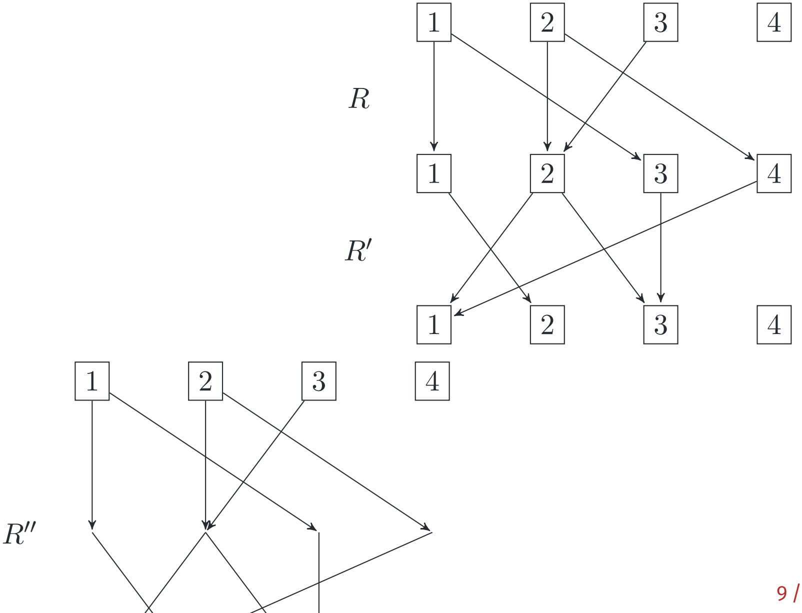
Operation: Komposition von R gefolgt von R', wobei $R \subseteq M \times N$ und

Operation: Komposition von R gefolgt von R', wobei $R \subseteq M \times N$ und $R' \subseteq N \times P$.

Operation: Komposition von R gefolgt von R', wobei $R \subseteq M \times N$ und $R' \subseteq N \times P$.



Operation: Komposition von R gefolgt von R', wobei $R \subseteq M \times N$ und $R' \subseteq N \times P$.



- Eine Relation $\equiv$ auf M

- Eine Relation $\equiv$ auf M ist eine Äquivalenzrelation,

- Eine Relation $\equiv$ auf M ist eine Äquivalenzrelation, falls sie

- Eine Relation $\equiv$ auf M ist eine Äquivalenzrelation, falls sie reflexiv,

- Eine Relation $\equiv$ auf M ist eine Äquivalenzrelation, falls sie reflexiv, symmetrisch und

- Eine Relation $\equiv$ auf M ist eine Äquivalenzrelation, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

- Eine Relation $\equiv$ auf M ist eine Äquivalenzrelation, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
- Für $m \in M$, die Äquivalenzklasse von m

- Eine Relation $\equiv$ auf M ist eine Äquivalenzrelation, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
- Für $m \in M$, die Äquivalenzklasse von m ist die Menge:

$$[m]_{\equiv} :=$$

- Eine Relation $\equiv$ auf M ist eine Äquivalenzrelation, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
- Für $m \in M$, die Äquivalenzklasse von m ist die Menge:

$$[m]_{\equiv} := \{x \in M \mid m \equiv x\}$$

- Eine Relation $\equiv$ auf M ist eine Äquivalenzrelation, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
- Für $m \in M$, die Äquivalenzklasse von m ist die Menge:

$$[m]_\equiv := \{x \in M \mid m \equiv x\}$$

- Wir definieren

- Eine Relation $\equiv$ auf M ist eine Äquivalenzrelation, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
- Für $m \in M$, die Äquivalenzklasse von m ist die Menge:

$$[m]_{\equiv} := \{x \in M \mid m \equiv x\}$$

- Wir definieren

$$(M/\equiv) :=$$

- Eine Relation $\equiv$ auf M ist eine Äquivalenzrelation, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
- Für $m \in M$, die Äquivalenzklasse von m ist die Menge:

$$[m]_\equiv := \{x \in M \mid m \equiv x\}$$

- Wir definieren

$$(M/\equiv) := \{[m]_\equiv \mid m \in M\}$$

- Eine Relation $\equiv$ auf M ist eine Äquivalenzrelation, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
- Für $m \in M$, die Äquivalenzklasse von m ist die Menge:

$$[m]_\equiv := \{x \in M \mid m \equiv x\}$$

- Wir definieren

$$(M/\equiv) := \{[m]_\equiv \mid m \in M\}$$

“Quotient von M durch $\equiv$”.

- Eine Relation $\equiv$ auf M ist eine Äquivalenzrelation, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
- Für $m \in M$, die Äquivalenzklasse von m ist die Menge:

$$[m]_{\equiv} := \{x \in M \mid m \equiv x\}$$

- Wir definieren

$$(M/\equiv) := \{[m]_{\equiv} \mid m \in M\}$$

  "Quotient von M durch $\equiv$".
- Beispiel:

- Eine Relation $\equiv$ auf M ist eine Äquivalenzrelation, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
- Für $m \in M$, die Äquivalenzklasse von m ist die Menge:

$$[m]_{\equiv} := \{x \in M \mid m \equiv x\}$$

- Wir definieren

$$(M/{\equiv}) := \{[m]_{\equiv} \mid m \in M\}$$

  "Quotient von M durch $\equiv$".
- Beispiel: $(\mathbb{N}/R_2) =$

- Eine Relation $\equiv$ auf M ist eine Äquivalenzrelation, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
- Für $m \in M$, die Äquivalenzklasse von m ist die Menge:

$$[m]_{\equiv} := \{x \in M \mid m \equiv x\}$$

- Wir definieren

$$(M/\equiv) := \{[m]_{\equiv} \mid m \in M\}$$

  "Quotient von M durch $\equiv$".
- Beispiel: $(\mathbb{N}/R_2) = \{\{0, 2, 4, 6, \ldots\}, \{1, 3, 5, 7, \ldots\}\}$

- In der letzter Vorlesung

- In der letzter Vorlesung haben wir den folgenden Satz bewiesen.

- In der letzter Vorlesung haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Theorem

- In der letzter Vorlesung haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge

- In der letzter Vorlesung haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge und sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M.

- In der letzter Vorlesung haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge und sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann ist $(M/\equiv)$ eine Zerlegung von M.

- In der letzter Vorlesung haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge und sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann ist $(M/\equiv)$ eine Zerlegung von M.

- Jetzt werden wir sehen,

- In der letzter Vorlesung haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge und sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann ist $(M/\equiv)$ eine Zerlegung von M.

- Jetzt werden wir sehen, dass für jede Zerlegung

- In der letzter Vorlesung haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge und sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann ist $(M/\equiv)$ eine Zerlegung von M.

- Jetzt werden wir sehen, dass für jede Zerlegung kann man eine Äquivalenzrelation definieren,

- In der letzter Vorlesung haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge und sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann ist $(M/\equiv)$ eine Zerlegung von M.

- Jetzt werden wir sehen, dass für jede Zerlegung kann man eine Äquivalenzrelation definieren, deren Äquivalenzklassen geben uns

- In der letzter Vorlesung haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge und sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann ist $(M/\equiv)$ eine Zerlegung von M.

- Jetzt werden wir sehen, dass für jede Zerlegung kann man eine Äquivalenzrelation definieren, deren Äquivalenzklassen geben uns die ursprüngliche Zerlegung.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge,

- In der letzter Vorlesung haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge und sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann ist $(M/\equiv)$ eine Zerlegung von M.

- Jetzt werden wir sehen, dass für jede Zerlegung kann man eine Äquivalenzrelation definieren, deren Äquivalenzklassen geben uns die ursprüngliche Zerlegung.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

- In der letzter Vorlesung haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge und sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann ist $(M/\equiv)$ eine Zerlegung von M.

- Jetzt werden wir sehen, dass für jede Zerlegung kann man eine Äquivalenzrelation definieren, deren Äquivalenzklassen geben uns die ursprüngliche Zerlegung.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation

- In der letzter Vorlesung haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge und sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann ist $(M/\equiv)$ eine Zerlegung von M.

- Jetzt werden wir sehen, dass für jede Zerlegung kann man eine Äquivalenzrelation definieren, deren Äquivalenzklassen geben uns die ursprüngliche Zerlegung.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

- In der letzter Vorlesung haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge und sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann ist $(M/\equiv)$ eine Zerlegung von M.

- Jetzt werden wir sehen, dass für jede Zerlegung kann man eine Äquivalenzrelation definieren, deren Äquivalenzklassen geben uns die ursprüngliche Zerlegung.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

$$x \equiv y \iff \exists N \in \mathcal{K} \colon x, y \in N$$

- In der letzter Vorlesung haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge und sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann ist $(M/\equiv)$ eine Zerlegung von M.

- Jetzt werden wir sehen, dass für jede Zerlegung kann man eine Äquivalenzrelation definieren, deren Äquivalenzklassen geben uns die ursprüngliche Zerlegung.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

$$x \equiv y \iff \exists N \in \mathcal{K} \colon x, y \in N$$

Anders geschrieben:

$$\equiv$$

- In der letzter Vorlesung haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge und sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann ist $(M/\equiv)$ eine Zerlegung von M.

- Jetzt werden wir sehen, dass für jede Zerlegung kann man eine Äquivalenzrelation definieren, deren Äquivalenzklassen geben uns die ursprüngliche Zerlegung.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

$$x \equiv y \iff \exists N \in \mathcal{K} \colon x, y \in N$$

Anders geschrieben:

$$\equiv := \left\{(x, y) \in M \times M \colon \exists N \in \mathcal{K} \text{ mit } x, y \in N\right\}$$

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge,

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

$$x \equiv y \iff \exists N \in \mathcal{K} \colon x, y \in N$$

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

$$x \equiv y \iff \exists N \in \mathcal{K} \colon x, y \in N$$

Beweis.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

$$x \equiv y \iff \exists N \in \mathcal{K} \colon x, y \in N$$

Beweis. Offensichtlich ist $\equiv$ eine Relation auf M.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

$$x \equiv y \iff \exists N \in \mathcal{K} \colon x, y \in N$$

Beweis. Offensichtlich ist $\equiv$ eine Relation auf M.

- Reflexivität:

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

$$x \equiv y \iff \exists N \in \mathcal{K} \colon x, y \in N$$

Beweis. Offensichtlich ist $\equiv$ eine Relation auf M.

- Reflexivität: Sei $x \in M$.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

$$x \equiv y \iff \exists N \in \mathcal{K} \colon x, y \in N$$

Beweis. Offensichtlich ist $\equiv$ eine Relation auf M.

- Reflexivität: Sei $x \in M$. Da $M = \bigcup \mathcal{K}$

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

$$x \equiv y \iff \exists N \in \mathcal{K}\colon x, y \in N$$

Beweis. Offensichtlich ist $\equiv$ eine Relation auf M.

- Reflexivität: Sei $x \in M$. Da $M = \bigcup \mathcal{K}$ gibt es eine Menge $N \in \mathcal{N}$

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

$$x \equiv y \iff \exists N \in \mathcal{K} \colon x, y \in N$$

Beweis. Offensichtlich ist $\equiv$ eine Relation auf M.

- Reflexivität: Sei $x \in M$. Da $M = \bigcup \mathcal{K}$ gibt es eine Menge $N \in \mathcal{N}$ mit $x \in N$.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

$$x \equiv y \iff \exists N \in \mathcal{K} \colon x, y \in N$$

Beweis. Offensichtlich ist $\equiv$ eine Relation auf M.

- Reflexivität: Sei $x \in M$. Da $M = \bigcup \mathcal{K}$ gibt es eine Menge $N \in \mathcal{N}$ mit $x \in N$. Also $x \equiv x$.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

$$x \equiv y \iff \exists N \in \mathcal{K} \colon x, y \in N$$

Beweis. Offensichtlich ist $\equiv$ eine Relation auf M.

- Reflexivität: Sei $x \in M$. Da $M = \bigcup \mathcal{K}$ gibt es eine Menge $N \in \mathcal{N}$ mit $x \in N$. Also $x \equiv x$.
- Symmetrie:

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

$$x \equiv y \iff \exists N \in \mathcal{K} \colon x, y \in N$$

Beweis. Offensichtlich ist $\equiv$ eine Relation auf M.

- Reflexivität: Sei $x \in M$. Da $M = \bigcup \mathcal{K}$ gibt es eine Menge $N \in \mathcal{N}$ mit $x \in N$. Also $x \equiv x$.
- Symmetrie: Sei $x \equiv y$.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

$$x \equiv y \iff \exists N \in \mathcal{K} \colon x, y \in N$$

Beweis. Offensichtlich ist $\equiv$ eine Relation auf M.

- Reflexivität: Sei $x \in M$. Da $M = \bigcup \mathcal{K}$ gibt es eine Menge $N \in \mathcal{N}$ mit $x \in N$. Also $x \equiv x$.
- Symmetrie: Sei $x \equiv y$. Dann existiert $N \in \mathcal{K}$

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

$$x \equiv y \iff \exists N \in \mathcal{K} \colon x, y \in N$$

Beweis. Offensichtlich ist $\equiv$ eine Relation auf M.

- Reflexivität: Sei $x \in M$. Da $M = \bigcup \mathcal{K}$ gibt es eine Menge $N \in \mathcal{N}$ mit $x \in N$. Also $x \equiv x$.
- Symmetrie: Sei $x \equiv y$. Dann existiert $N \in \mathcal{K}$ mit $\{x, y\} \subseteq N$.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

$$x \equiv y \iff \exists N \in \mathcal{K} \colon x, y \in N$$

Beweis. Offensichtlich ist $\equiv$ eine Relation auf M.

- Reflexivität: Sei $x \in M$. Da $M = \bigcup \mathcal{K}$ gibt es eine Menge $N \in \mathcal{N}$ mit $x \in N$. Also $x \equiv x$.
- Symmetrie: Sei $x \equiv y$. Dann existiert $N \in \mathcal{K}$ mit $\{x, y\} \subseteq N$. Folglich auch $y \equiv x$.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

$$x \equiv y \iff \exists N \in \mathcal{K} \colon x, y \in N$$

Beweis. Offensichtlich ist $\equiv$ eine Relation auf M.

- Reflexivität: Sei $x \in M$. Da $M = \bigcup \mathcal{K}$ gibt es eine Menge $N \in \mathcal{N}$ mit $x \in N$. Also $x \equiv x$.
- Symmetrie: Sei $x \equiv y$. Dann existiert $N \in \mathcal{K}$ mit $\{x, y\} \subseteq N$. Folglich auch $y \equiv x$.
- Transitivität:

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

$$x \equiv y \iff \exists N \in \mathcal{K} \colon x, y \in N$$

Beweis. Offensichtlich ist $\equiv$ eine Relation auf M.

- Reflexivität: Sei $x \in M$. Da $M = \bigcup \mathcal{K}$ gibt es eine Menge $N \in \mathcal{N}$ mit $x \in N$. Also $x \equiv x$.
- Symmetrie: Sei $x \equiv y$. Dann existiert $N \in \mathcal{K}$ mit $\{x, y\} \subseteq N$. Folglich auch $y \equiv x$.
- Transitivität: Seien $x \equiv y$ und $y \equiv z$.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

$$x \equiv y \iff \exists N \in \mathcal{K} \colon x, y \in N$$

Beweis. Offensichtlich ist $\equiv$ eine Relation auf M.

- Reflexivität: Sei $x \in M$. Da $M = \bigcup \mathcal{K}$ gibt es eine Menge $N \in \mathcal{N}$ mit $x \in N$. Also $x \equiv x$.
- Symmetrie: Sei $x \equiv y$. Dann existiert $N \in \mathcal{K}$ mit $\{x, y\} \subseteq N$. Folglich auch $y \equiv x$.
- Transitivität: Seien $x \equiv y$ und $y \equiv z$. Also existieren $N, N' \in \mathcal{K}$ mit $\{x, y\} \subseteq N$ und $\{y, z\} \subseteq N'$.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

$$x \equiv y \iff \exists N \in \mathcal{K} \colon x, y \in N$$

Beweis. Offensichtlich ist $\equiv$ eine Relation auf M.

- Reflexivität: Sei $x \in M$. Da $M = \bigcup \mathcal{K}$ gibt es eine Menge $N \in \mathcal{N}$ mit $x \in N$. Also $x \equiv x$.
- Symmetrie: Sei $x \equiv y$. Dann existiert $N \in \mathcal{K}$ mit $\{x, y\} \subseteq N$. Folglich auch $y \equiv x$.
- Transitivität: Seien $x \equiv y$ und $y \equiv z$. Also existieren $N, N' \in \mathcal{K}$ mit $\{x, y\} \subseteq N$ und $\{y, z\} \subseteq N'$. Da $y \in N \cap N'$,

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

$$x \equiv y \iff \exists N \in \mathcal{K}\colon x, y \in N$$

Beweis. Offensichtlich ist $\equiv$ eine Relation auf M.

- Reflexivität: Sei $x \in M$. Da $M = \bigcup \mathcal{K}$ gibt es eine Menge $N \in \mathcal{N}$ mit $x \in N$. Also $x \equiv x$.
- Symmetrie: Sei $x \equiv y$. Dann existiert $N \in \mathcal{K}$ mit $\{x, y\} \subseteq N$. Folglich auch $y \equiv x$.
- Transitivität: Seien $x \equiv y$ und $y \equiv z$. Also existieren $N, N' \in \mathcal{K}$ mit $\{x, y\} \subseteq N$ und $\{y, z\} \subseteq N'$. Da $y \in N \cap N'$, sind N und N' nicht disjunkt,

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

$$x \equiv y \iff \exists N \in \mathcal{K}\colon x, y \in N$$

Beweis. Offensichtlich ist $\equiv$ eine Relation auf M.

- Reflexivität: Sei $x \in M$. Da $M = \bigcup \mathcal{K}$ gibt es eine Menge $N \in \mathcal{N}$ mit $x \in N$. Also $x \equiv x$.
- Symmetrie: Sei $x \equiv y$. Dann existiert $N \in \mathcal{K}$ mit $\{x, y\} \subseteq N$. Folglich auch $y \equiv x$.
- Transitivität: Seien $x \equiv y$ und $y \equiv z$. Also existieren $N, N' \in \mathcal{K}$ mit $\{x, y\} \subseteq N$ und $\{y, z\} \subseteq N'$. Da $y \in N \cap N'$, sind N und N' nicht disjunkt, und so gilt $N = N'$.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

$$x \equiv y \iff \exists N \in \mathcal{K} \colon x, y \in N$$

Beweis. Offensichtlich ist $\equiv$ eine Relation auf M.

- Reflexivität: Sei $x \in M$. Da $M = \bigcup \mathcal{K}$ gibt es eine Menge $N \in \mathcal{N}$ mit $x \in N$. Also $x \equiv x$.
- Symmetrie: Sei $x \equiv y$. Dann existiert $N \in \mathcal{K}$ mit $\{x, y\} \subseteq N$. Folglich auch $y \equiv x$.
- Transitivität: Seien $x \equiv y$ und $y \equiv z$. Also existieren $N, N' \in \mathcal{K}$ mit $\{x, y\} \subseteq N$ und $\{y, z\} \subseteq N'$. Da $y \in N \cap N'$, sind N und N' nicht disjunkt, und so gilt $N = N'$. Folglich $\{x, z\} \subseteq N$ und damit

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

$$x \equiv y \iff \exists N \in \mathcal{K} \colon x, y \in N$$

Beweis. Offensichtlich ist $\equiv$ eine Relation auf M.

- Reflexivität: Sei $x \in M$. Da $M = \bigcup \mathcal{K}$ gibt es eine Menge $N \in \mathcal{N}$ mit $x \in N$. Also $x \equiv x$.
- Symmetrie: Sei $x \equiv y$. Dann existiert $N \in \mathcal{K}$ mit $\{x, y\} \subseteq N$. Folglich auch $y \equiv x$.
- Transitivität: Seien $x \equiv y$ und $y \equiv z$. Also existieren $N, N' \in \mathcal{K}$ mit $\{x, y\} \subseteq N$ und $\{y, z\} \subseteq N'$. Da $y \in N \cap N'$, sind N und N' nicht disjunkt, und so gilt $N = N'$. Folglich $\{x, z\} \subseteq N$ und damit $x \equiv z$.

Theorem

Sei M eine nicht leere Menge, und sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M. Dann die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M:

$$x \equiv y \iff \exists N \in \mathcal{K} \colon x, y \in N$$

Beweis. Offensichtlich ist $\equiv$ eine Relation auf M.

- Reflexivität: Sei $x \in M$. Da $M = \bigcup \mathcal{K}$ gibt es eine Menge $N \in \mathcal{N}$ mit $x \in N$. Also $x \equiv x$.
- Symmetrie: Sei $x \equiv y$. Dann existiert $N \in \mathcal{K}$ mit $\{x, y\} \subseteq N$. Folglich auch $y \equiv x$.
- Transitivität: Seien $x \equiv y$ und $y \equiv z$. Also existieren $N, N' \in \mathcal{K}$ mit $\{x, y\} \subseteq N$ und $\{y, z\} \subseteq N'$. Da $y \in N \cap N'$, sind N und N' nicht disjunkt, und so gilt $N = N'$. Folglich $\{x, z\} \subseteq N$ und damit $x \equiv z$. $\square$

- Seien M und N Mengen.

- Seien M und N Mengen. Eine Funktion

- Seien M und N Mengen. Eine **Funktion** (oder eine **Abbildung**)

- Seien M und N Mengen. Eine Funktion (oder eine Abbildung) ist eine Relation $R \subseteq M \times N$ mit der Eigenschaft dass

- Seien M und N Mengen. Eine Funktion (oder eine Abbildung) ist eine Relation $R \subseteq M \times N$ mit der Eigenschaft dass für jedes $m \in M$

- Seien M und N Mengen. Eine Funktion (oder eine Abbildung) ist eine Relation $R \subseteq M \times N$ mit der Eigenschaft dass für jedes $m \in M$ genau ein $n \in N$ existiert,

- Seien M und N Mengen. Eine Funktion (oder eine Abbildung) ist eine Relation $R \subseteq M \times N$ mit der Eigenschaft dass für jedes $m \in M$ genau ein $n \in N$ existiert, so dass $(m, n) \in R$.

- Seien M und N Mengen. Eine Funktion (oder eine Abbildung) ist eine Relation $R \subseteq M \times N$ mit der Eigenschaft dass für jedes $m \in M$ genau ein $n \in N$ existiert, so dass $(m, n) \in R$.
- Anders gesagt:

- Seien M und N Mengen. Eine Funktion (oder eine Abbildung) ist eine Relation $R \subseteq M \times N$ mit der Eigenschaft dass für jedes $m \in M$ genau ein $n \in N$ existiert, so dass $(m, n) \in R$.
- Anders gesagt: Für jedes $m \in M$

- Seien M und N Mengen. Eine Funktion (oder eine Abbildung) ist eine Relation $R \subseteq M \times N$ mit der Eigenschaft dass für jedes $m \in M$ genau ein $n \in N$ existiert, so dass $(m, n) \in R$.
- Anders gesagt: Für jedes $m \in M$ gibt es mindestens ein $n \in N$

- Seien M und N Mengen. Eine Funktion (oder eine Abbildung) ist eine Relation $R \subseteq M \times N$ mit der Eigenschaft dass für jedes $m \in M$ genau ein $n \in N$ existiert, so dass $(m, n) \in R$.
- Anders gesagt: Für jedes $m \in M$ gibt es mindestens ein $n \in N$ (Totalität)

- Seien M und N Mengen. Eine Funktion (oder eine Abbildung) ist eine Relation $R \subseteq M \times N$ mit der Eigenschaft dass für jedes $m \in M$ genau ein $n \in N$ existiert, so dass $(m, n) \in R$.
- Anders gesagt: Für jedes $m \in M$ gibt es mindestens ein $n \in N$ (Totalität) und höchstens ein $n \in N$ mit $m \; R \; n$

- Seien M und N Mengen. Eine Funktion (oder eine Abbildung) ist eine Relation $R \subseteq M \times N$ mit der Eigenschaft dass für jedes $m \in M$ genau ein $n \in N$ existiert, so dass $(m, n) \in R$.
- Anders gesagt: Für jedes $m \in M$ gibt es mindestens ein $n \in N$ (Totalität) und höchstens ein $n \in N$ mit $m\ R\ n$ (Eindeutigkeit)

- Seien M und N Mengen. Eine Funktion (oder eine Abbildung) ist eine Relation $R \subseteq M \times N$ mit der Eigenschaft dass für jedes $m \in M$ genau ein $n \in N$ existiert, so dass $(m, n) \in R$.
- Anders gesagt: Für jedes $m \in M$ gibt es mindestens ein $n \in N$ (Totalität) und höchstens ein $n \in N$ mit $m \; R \; n$ (Eindeutigkeit)
  - Totalität:

- Seien M und N Mengen. Eine Funktion (oder eine Abbildung) ist eine Relation $R \subseteq M \times N$ mit der Eigenschaft dass für jedes $m \in M$ genau ein $n \in N$ existiert, so dass $(m, n) \in R$.
- Anders gesagt: Für jedes $m \in M$ gibt es mindestens ein $n \in N$ (Totalität) und höchstens ein $n \in N$ mit $m\ R\ n$ (Eindeutigkeit)
    - Totalität:

$$\forall m \in M$$

- Seien M und N Mengen. Eine Funktion (oder eine Abbildung) ist eine Relation $R \subseteq M \times N$ mit der Eigenschaft dass für jedes $m \in M$ genau ein $n \in N$ existiert, so dass $(m, n) \in R$.
- Anders gesagt: Für jedes $m \in M$ gibt es mindestens ein $n \in N$ (Totalität) und höchstens ein $n \in N$ mit $m \; R \; n$ (Eindeutigkeit)
  - Totalität:

$$\forall m \in M \, \exists n \in N$$

- Seien M und N Mengen. Eine Funktion (oder eine Abbildung) ist eine Relation $R \subseteq M \times N$ mit der Eigenschaft dass für jedes $m \in M$ genau ein $n \in N$ existiert, so dass $(m, n) \in R$.
- Anders gesagt: Für jedes $m \in M$ gibt es mindestens ein $n \in N$ (Totalität) und höchstens ein $n \in N$ mit $m \; R \; n$ (Eindeutigkeit)
  - Totalität:

$$\forall m \in M \, \exists n \in N \; R(m, n)$$

- Seien M und N Mengen. Eine Funktion (oder eine Abbildung) ist eine Relation $R \subseteq M \times N$ mit der Eigenschaft dass für jedes $m \in M$ genau ein $n \in N$ existiert, so dass $(m, n) \in R$.
- Anders gesagt: Für jedes $m \in M$ gibt es mindestens ein $n \in N$ (Totalität) und höchstens ein $n \in N$ mit $m\ R\ n$ (Eindeutigkeit)
  - Totalität:
$$\forall m \in M\ \exists n \in N\ R(m, n)$$
  - Eindeutigkeit:

- Seien M und N Mengen. Eine Funktion (oder eine Abbildung) ist eine Relation $R \subseteq M \times N$ mit der Eigenschaft dass für jedes $m \in M$ genau ein $n \in N$ existiert, so dass $(m, n) \in R$.
- Anders gesagt: Für jedes $m \in M$ gibt es mindestens ein $n \in N$ (Totalität) und höchstens ein $n \in N$ mit $m \; R \; n$ (Eindeutigkeit)
  - Totalität:
$$\forall m \in M \, \exists n \in N \; R(m, n)$$
  - Eindeutigkeit:
$$\forall m \in M,$$

- Seien M und N Mengen. Eine Funktion (oder eine Abbildung) ist eine Relation $R \subseteq M \times N$ mit der Eigenschaft dass für jedes $m \in M$ genau ein $n \in N$ existiert, so dass $(m, n) \in R$.
- Anders gesagt: Für jedes $m \in M$ gibt es mindestens ein $n \in N$ (Totalität) und höchstens ein $n \in N$ mit $m \; R \; n$ (Eindeutigkeit)
  - Totalität:
    $$\forall m \in M \, \exists n \in N \; R(m, n)$$
  - Eindeutigkeit:
    $$\forall m \in M, x, y \in N :$$

- Seien M und N Mengen. Eine Funktion (oder eine Abbildung) ist eine Relation $R \subseteq M \times N$ mit der Eigenschaft dass für jedes $m \in M$ genau ein $n \in N$ existiert, so dass $(m, n) \in R$.
- Anders gesagt: Für jedes $m \in M$ gibt es mindestens ein $n \in N$ (Totalität) und höchstens ein $n \in N$ mit $m \, R \, n$ (Eindeutigkeit)
   - Totalität:
  $$\forall m \in M \, \exists n \in N \, R(m, n)$$
   - Eindeutigkeit:
  $$\forall m \in M, x, y \in N : \quad R(m, x)$$

- Seien M und N Mengen. Eine Funktion (oder eine Abbildung) ist eine Relation $R \subseteq M \times N$ mit der Eigenschaft dass für jedes $m \in M$ genau ein $n \in N$ existiert, so dass $(m, n) \in R$.
- Anders gesagt: Für jedes $m \in M$ gibt es mindestens ein $n \in N$ (Totalität) und höchstens ein $n \in N$ mit $m\ R\ n$ (Eindeutigkeit)
  - Totalität:
$$\forall m \in M\, \exists n \in N\, R(m, n)$$
  - Eindeutigkeit:
$$\forall m \in M, x, y \in N: \quad R(m, x) \wedge$$

- Seien M und N Mengen. Eine Funktion (oder eine Abbildung) ist eine Relation $R \subseteq M \times N$ mit der Eigenschaft dass für jedes $m \in M$ genau ein $n \in N$ existiert, so dass $(m, n) \in R$.
- Anders gesagt: Für jedes $m \in M$ gibt es mindestens ein $n \in N$ (Totalität) und höchstens ein $n \in N$ mit $m\ R\ n$ (Eindeutigkeit)
  - Totalität:

$$\forall m \in M\, \exists n \in N\; R(m, n)$$

  - Eindeutigkeit:

$$\forall m \in M, x, y \in N: \quad R(m, x) \wedge R(m, y)$$

- Seien M und N Mengen. Eine Funktion (oder eine Abbildung) ist eine Relation $R \subseteq M \times N$ mit der Eigenschaft dass für jedes $m \in M$ genau ein $n \in N$ existiert, so dass $(m, n) \in R$.
- Anders gesagt: Für jedes $m \in M$ gibt es mindestens ein $n \in N$ (Totalität) und höchstens ein $n \in N$ mit $m\ R\ n$ (Eindeutigkeit)
  - Totalität:
$$\forall m \in M\, \exists n \in N\; R(m, n)$$
  - Eindeutigkeit:
$$\forall m \in M, x, y \in N: \quad R(m, x) \wedge R(m, y) \rightarrow$$

- Seien M und N Mengen. Eine Funktion (oder eine Abbildung) ist eine Relation $R \subseteq M \times N$ mit der Eigenschaft dass für jedes $m \in M$ genau ein $n \in N$ existiert, so dass $(m, n) \in R$.

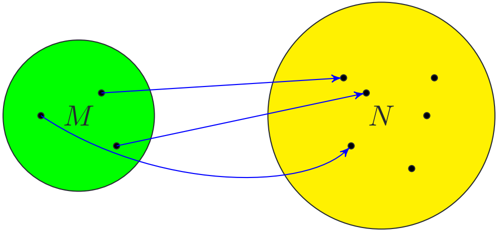
- Anders gesagt: Für jedes $m \in M$ gibt es mindestens ein $n \in N$ (Totalität) und höchstens ein $n \in N$ mit $m \; R \; n$ (Eindeutigkeit)

  - Totalität:

$$\forall m \in M \, \exists n \in N \, R(m, n)$$

  - Eindeutigkeit:

$$\forall m \in M, x, y \in N : \quad R(m, x) \wedge R(m, y) \rightarrow x = y$$


M
N

Beispiele.

Beispiele.

- Sei B die Menge der Bundesbürger.

Beispiele.

- Sei B die Menge der Bundesbürger. Wir haben die Relation

Beispiele.

- Sei B die Menge der Bundesbürger. Wir haben die Relation

$$\{(p, n) \in B \times \mathbb{N} \mid p \text{ hat Identifikationsnummer } n\}$$

Beispiele.

- Sei B die Menge der Bundesbürger. Wir haben die Relation

$$\{(p, n) \in B \times \mathbb{N} \mid p \text{ hat Identifikationsnummer } n\}$$

  von B nach $\mathbb{N}$.

Beispiele.

- Sei B die Menge der Bundesbürger. Wir haben die Relation

$$\{(p,n) \in B \times \mathbb{N} \mid p \text{ hat Identifikationsnummer } n\}$$

von B nach $\mathbb{N}$. Das ist eine Funktion.

Beispiele.

- Sei B die Menge der Bundesbürger. Wir haben die Relation

$$\{(p, n) \in B \times \mathbb{N} \mid p \text{ hat Identifikationsnummer } n\}$$

von B nach $\mathbb{N}$. Das ist eine Funktion.

- Keine Funktion:

Beispiele.

- Sei B die Menge der Bundesbürger. Wir haben die Relation

$$\{(p, n) \in B \times \mathbb{N} \mid p \text{ hat Identifikationsnummer } n\}$$

von B nach $\mathbb{N}$. Das ist eine Funktion.

- Keine Funktion: die Freund-Relation

$$\{(x, y) \in F \times F \mid x \text{ ist Facebook-Freund von } y\}$$

Beispiele.

- Sei B die Menge der Bundesbürger. Wir haben die Relation

$$\{(p, n) \in B \times \mathbb{N} \mid p \text{ hat Identifikationsnummer } n\}$$

von B nach $\mathbb{N}$. Das ist eine Funktion.

- Keine Funktion: die Freund-Relation

$$\{(x, y) \in F \times F \mid x \text{ ist Facebook-Freund von } y\}$$

auf der Menge der Facebook-Nutzer F.

Beispiele.

- Sei B die Menge der Bundesbürger. Wir haben die Relation

$$\{(p,n) \in B \times \mathbb{N} \mid p \text{ hat Identifikationsnummer } n\}$$

von B nach $\mathbb{N}$. Das ist eine Funktion.

- Keine Funktion: die Freund-Relation

$$\{(x,y) \in F \times F \mid x \text{ ist Facebook-Freund von } y\}$$

auf der Menge der Facebook-Nutzer F. Es wäre eine Funktion nur wenn jeder Facebook-Benutzer genau einen Freund hätte.

Beispiele.

- Sei B die Menge der Bundesbürger. Wir haben die Relation

$$\{(p, n) \in B \times \mathbb{N} \mid p \text{ hat Identifikationsnummer } n\}$$

von B nach $\mathbb{N}$. Das ist eine Funktion.

- Keine Funktion: die Freund-Relation

$$\{(x, y) \in F \times F \mid x \text{ ist Facebook-Freund von } y\}$$

auf der Menge der Facebook-Nutzer F. Es wäre eine Funktion nur wenn jeder Facebook-Benutzer genau einen Freund hätte.

- Die Relation

Beispiele.

- Sei B die Menge der Bundesbürger. Wir haben die Relation

$$\{(p,n) \in B \times \mathbb{N} \mid p \text{ hat Identifikationsnummer } n\}$$

von B nach $\mathbb{N}$. Das ist eine Funktion.

- Keine Funktion: die Freund-Relation

$$\{(x,y) \in F \times F \mid x \text{ ist Facebook-Freund von } y\}$$

auf der Menge der Facebook-Nutzer F. Es wäre eine Funktion nur wenn jeder Facebook-Benutzer genau einen Freund hätte.

- Die Relation $R = \{(n, n') \mid n \in \mathbb{N},\ n' = 2n\}$

Beispiele.

- Sei B die Menge der Bundesbürger. Wir haben die Relation

$$\{(p,n) \in B \times \mathbb{N} \mid p \text{ hat Identifikationsnummer } n\}$$

von B nach $\mathbb{N}$. Das ist eine Funktion.

- Keine Funktion: die Freund-Relation

$$\{(x,y) \in F \times F \mid x \text{ ist Facebook-Freund von } y\}$$

auf der Menge der Facebook-Nutzer F. Es wäre eine Funktion nur wenn jeder Facebook-Benutzer genau einen Freund hätte.

- Die Relation $R = \{(n,n') \mid n \in \mathbb{N},\, n' = 2n\}$ ist eine Funktion.

Beispiele.

- Sei B die Menge der Bundesbürger. Wir haben die Relation

$$\{(p, n) \in B \times \mathbb{N} \mid p \text{ hat Identifikationsnummer } n\}$$

von B nach $\mathbb{N}$. Das ist eine Funktion.

- Keine Funktion: die Freund-Relation

$$\{(x, y) \in F \times F \mid x \text{ ist Facebook-Freund von } y\}$$

auf der Menge der Facebook-Nutzer F. Es wäre eine Funktion nur wenn jeder Facebook-Benutzer genau einen Freund hätte.

- Die Relation $R = \{(n, n') \mid n \in \mathbb{N},\ n' = 2n\}$ ist eine Funktion. $f(x) = 2x$.

Beispiele.

- Sei B die Menge der Bundesbürger. Wir haben die Relation

$$\{(p,n) \in B \times \mathbb{N} \mid p \text{ hat Identifikationsnummer } n\}$$

von B nach $\mathbb{N}$. Das ist eine Funktion.

- Keine Funktion: die Freund-Relation

$$\{(x,y) \in F \times F \mid x \text{ ist Facebook-Freund von } y\}$$

auf der Menge der Facebook-Nutzer F. Es wäre eine Funktion nur wenn jeder Facebook-Benutzer genau einen Freund hätte.

- Die Relation $R = \{(n,n') \mid n \in \mathbb{N},\ n' = 2n\}$ ist eine Funktion. $f(x) = 2x$.

- Die Identität id_M ist eine Funktion.

Notation/Wortschatz.

Notation/Wortschatz.

- $f \subseteq M \times N$ eine Funktion,

Notation/Wortschatz.

- $f \subseteq M \times N$ eine Funktion, dann schreiben wir $f : M \to N$.

Notation/Wortschatz.

- $f \subseteq M \times N$ eine Funktion, dann schreiben wir $f : M \to N$.
- Für $(m, n) \in f$ schreiben wir entweder $n = f(m)$

Notation/Wortschatz.

- $f \subseteq M \times N$ eine Funktion, dann schreiben wir $f : M \to N$.
- Für $(m, n) \in f$ schreiben wir entweder $n = f(m)$ oder $m \overset{f}{\mapsto} n$.

Notation/Wortschatz.

- $f \subseteq M \times N$ eine Funktion, dann schreiben wir $f : M \to N$.
- Für $(m, n) \in f$ schreiben wir entweder $n = f(m)$ oder $m \stackrel{f}{\mapsto} n$.
  - n ist dann das Bild von m

Notation/Wortschatz.

- $f \subseteq M \times N$ eine Funktion, dann schreiben wir $f: M \to N$.
- Für $(m, n) \in f$ schreiben wir entweder $n = f(m)$ oder $m \overset{f}{\mapsto} n$.
  - n ist dann das Bild von m
  - m ist ein Urbild von n.

Notation/Wortschatz.

- $f \subseteq M \times N$ eine Funktion, dann schreiben wir $f\colon M \to N$.
- Für $(m, n) \in f$ schreiben wir entweder $n = f(m)$ oder $m \overset{f}{\mapsto} n$.
    - n ist dann das Bild von m
    - m ist ein Urbild von n.
- Die Menge M heißt Definitionsbereich

Notation/Wortschatz.

- $f \subseteq M \times N$ eine Funktion, dann schreiben wir $f\colon M \to N$.
- Für $(m, n) \in f$ schreiben wir entweder $n = f(m)$ oder $m \overset{f}{\mapsto} n$.
  - ▶ n ist dann das Bild von m
  - ▶ m ist ein Urbild von n.
- Die Menge M heißt Definitionsbereich und die Menge N Bildbereich oder Wertebereich von f.

- Für eine Teilmenge

- Für eine Teilmenge $M' \subset M$

- Für eine Teilmenge $M' \subset M$ definieren wir

- Für eine Teilmenge $M' \subset M$ definieren wir

$$f(M') := \{f(m) \mid m \in M'\}.$$

- Für eine Teilmenge $M' \subset M$ definieren wir

$$f(M') := \{f(m) \mid m \in M'\}.$$

  Das ist die Menge

- Für eine Teilmenge $M' \subset M$ definieren wir

$$f(M') := \{f(m) \mid m \in M'\}.$$

Das ist die Menge aller Bilder

- Für eine Teilmenge $M' \subset M$ definieren wir

$$f(M') := \{f(m) \mid m \in M'\}.$$

Das ist die Menge aller Bilder von Elementen aus M',

- Für eine Teilmenge $M' \subset M$ definieren wir

$$f(M') := \{f(m) \mid m \in M'\}.$$

Das ist die Menge aller Bilder von Elementen aus M', Bild von M' unter f.

- Für eine Teilmenge $M' \subset M$ definieren wir

$$f(M') := \{f(m) \mid m \in M'\}.$$

Das ist die Menge aller Bilder von Elementen aus M', Bild von M' unter f.

- Für eine Teilmenge

- Für eine Teilmenge $M' \subset M$ definieren wir

$$f(M') := \{f(m) \mid m \in M'\}.$$

  Das ist die Menge aller Bilder von Elementen aus M', Bild von M' unter f.

- Für eine Teilmenge $N' \subset N$

- Für eine Teilmenge $M' \subset M$ definieren wir

$$f(M') := \{f(m) \mid m \in M'\}.$$

Das ist die Menge aller Bilder von Elementen aus M', Bild von M' unter f.

- Für eine Teilmenge $N' \subset N$ definieren wir

- Für eine Teilmenge $M' \subset M$ definieren wir

$$f(M') := \{f(m) \mid m \in M'\}.$$

Das ist die Menge aller Bilder von Elementen aus M', Bild von M' unter f.

- Für eine Teilmenge $N' \subset N$ definieren wir

$$f^{-1}(N') := \{m \in M \mid f(m) \in N'\}$$

- Für eine Teilmenge $M' \subset M$ definieren wir

$$f(M') := \{f(m) \mid m \in M'\}.$$

  Das ist die Menge aller Bilder von Elementen aus M', Bild von M' unter f.

- Für eine Teilmenge $N' \subset N$ definieren wir

$$f^{-1}(N') := \{m \in M \mid f(m) \in N'\}$$

  die Menge aller Urbilder

- Für eine Teilmenge $M' \subset M$ definieren wir

$$f(M') := \{f(m) \mid m \in M'\}.$$

Das ist die Menge aller Bilder von Elementen aus M', Bild von M' unter f.

- Für eine Teilmenge $N' \subset N$ definieren wir

$$f^{-1}(N') := \{m \in M \mid f(m) \in N'\}$$

die Menge aller Urbilder von Elementen aus N',

- Für eine Teilmenge $M' \subset M$ definieren wir

$$f(M') := \{f(m) \mid m \in M'\}.$$

Das ist die Menge aller Bilder von Elementen aus M', Bild von M' unter f.

- Für eine Teilmenge $N' \subset N$ definieren wir

$$f^{-1}(N') := \{m \in M \mid f(m) \in N'\}$$

die Menge aller Urbilder von Elementen aus N', Urbild von N' unter f.

Beispiele.

Beispiele.

- Betrachten wir $\mathrm{id}_M\colon M \to M$.

Beispiele.

- Betrachten wir $\mathrm{id}_M : M \to M$. Diese Funktion könnte man auch so definieren:

Beispiele.

- Betrachten wir $\mathrm{id}_M : M \to M$. Diese Funktion könnte man auch so definieren:

$$\mathrm{id}_M(m) := m.$$

Beispiele.

- Betrachten wir $\mathrm{id}_M : M \to M$. Diese Funktion könnte man auch so definieren:

$$\mathrm{id}_M(m) := m.$$

  Für alle $M' \subseteq M$ gilt

Beispiele.

- Betrachten wir $\mathrm{id}_M : M \to M$. Diese Funktion könnte man auch so definieren:

$$\mathrm{id}_M(m) := m.$$

  Für alle $M' \subseteq M$ gilt $\mathrm{id}_M(M') = M'$ und

Beispiele.

- Betrachten wir $\mathrm{id}_M : M \to M$. Diese Funktion könnte man auch so definieren:

$$\mathrm{id}_M(m) := m.$$

  Für alle $M' \subseteq M$ gilt $\mathrm{id}_M(M') = M'$ und $\mathrm{id}_M^{-1}(M') = M'$

Beispiele.

- Betrachten wir $\mathrm{id}_M : M \to M$. Diese Funktion könnte man auch so definieren:

$$\mathrm{id}_M(m) := m.$$

  Für alle $M' \subseteq M$ gilt $\mathrm{id}_M(M') = M'$ und $\mathrm{id}_M^{-1}(M') = M'$

- Sei verdoppeln : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Funktion

Beispiele.

- Betrachten wir $\mathrm{id}_M \colon M \to M$. Diese Funktion könnte man auch so definieren:

$$\mathrm{id}_M(m) := m.$$

  Für alle $M' \subseteq M$ gilt $\mathrm{id}_M(M') = M'$ und $\mathrm{id}_M^{-1}(M') = M'$

- Sei verdoppeln: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Funktion

$$\text{verdoppeln}(n) := 2n$$

  für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiele.

- Betrachten wir $\mathrm{id}_M \colon M \to M$. Diese Funktion könnte man auch so definieren:

$$\mathrm{id}_M(m) := m.$$

  Für alle $M' \subseteq M$ gilt $\mathrm{id}_M(M') = M'$ und $\mathrm{id}_M^{-1}(M') = M'$

- Sei verdoppeln: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Funktion

$$\text{verdoppeln}(n) := 2n$$

  für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt verdoppeln$(\mathbb{N}) =$

Beispiele.

- Betrachten wir $\mathrm{id}_M : M \to M$. Diese Funktion könnte man auch so definieren:

$$\mathrm{id}_M(m) := m.$$

  Für alle $M' \subseteq M$ gilt $\mathrm{id}_M(M') = M'$ und $\mathrm{id}_M^{-1}(M') = M'$

- Sei verdoppeln: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Funktion

$$\text{verdoppeln}(n) := 2n$$

  für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt verdoppeln$(\mathbb{N}) = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$

Beispiele.

- Betrachten wir $\mathrm{id}_M : M \to M$. Diese Funktion könnte man auch so definieren:

$$\mathrm{id}_M(m) := m.$$

  Für alle $M' \subseteq M$ gilt $\mathrm{id}_M(M') = M'$ und $\mathrm{id}_M^{-1}(M') = M'$

- Sei verdoppeln: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Funktion

$$\text{verdoppeln}(n) := 2n$$

  für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt verdoppeln$(\mathbb{N}) = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$ und verdoppeln$^{-1}\big(\{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}\big) =$

Beispiele.

- Betrachten wir $\mathrm{id}_M \colon M \to M$. Diese Funktion könnte man auch so definieren:

$$\mathrm{id}_M(m) := m.$$

  Für alle $M' \subseteq M$ gilt $\mathrm{id}_M(M') = M'$ und $\mathrm{id}_M^{-1}(M') = M'$

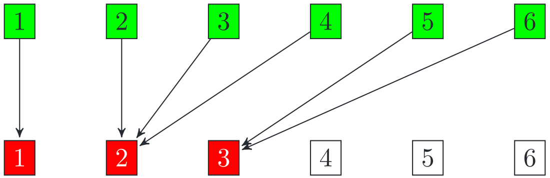
- Sei verdoppeln$\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Funktion

$$\text{verdoppeln}(n) := 2n$$

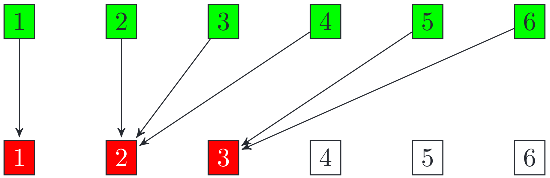
  für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt verdoppeln$(\mathbb{N}) = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$ und verdoppeln$^{-1}\big(\{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}\big) = \emptyset$.

- Sei $M := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Wir definieren $f\colon M \to M$ durch

- Sei $M := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Wir definieren $f\colon M \to M$ durch $m \mapsto \lceil \sqrt{m} \rceil$ für alle $m \in M$.

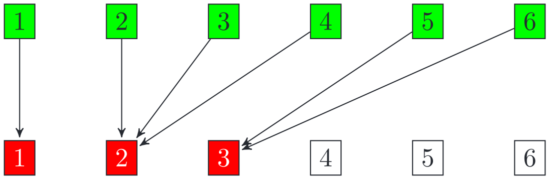


- Sei $M := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Wir definieren $f\colon M \to M$ durch $m \mapsto \lceil \sqrt{m} \rceil$ für alle $m \in M$.



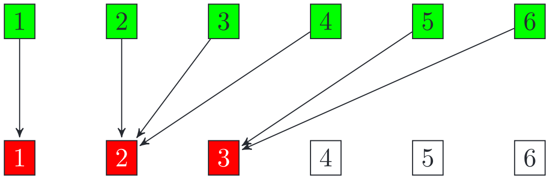
Es gilt $f(M) =$

- Sei $M := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Wir definieren $f\colon M \to M$ durch $m \mapsto \lceil \sqrt{m}\, \rceil$ für alle $m \in M$.



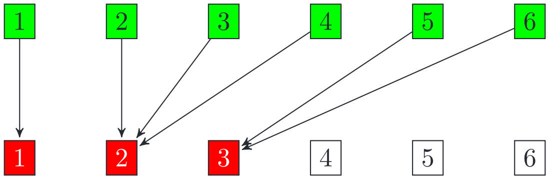
Es gilt $f(M) = \{1, 2, 3\}$

- Sei $M := \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$. Wir definieren $f\colon\ M \to M$ durch $m \mapsto \lceil \sqrt{m}\,\rceil$ für alle $m \in M$.



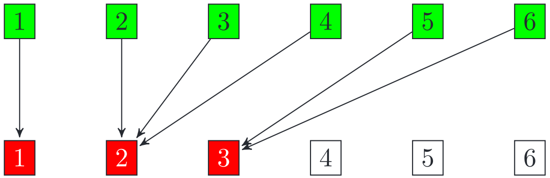
Es gilt $f(M) = \{1,\ 2,\ 3\}$ $f(\{1,2\}) =$

- Sei $M := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Wir definieren $f\colon M \to M$ durch $m \mapsto \lceil \sqrt{m}\, \rceil$ für alle $m \in M$.



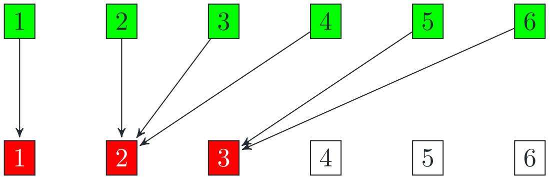
Es gilt $f(M) = \{1, 2, 3\}$ $f(\{1,2\}) = \{1, 2\}$,

- Sei $M := \{1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6\}$. Wir definieren $f\colon\, M \to M$ durch $m \mapsto \lceil \sqrt{m}\, \rceil$ für alle $m \in M$.



Es gilt $f(M) = \{1,\, 2,\, 3\}$ $f(\{1,2\}) = \{1,\, 2\}$, $f^{-1}(2) = f^{-1}(\{2\}) =$

- Sei $M := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Wir definieren $f\colon M \to M$ durch $m \mapsto \lceil \sqrt{m}\, \rceil$ für alle $m \in M$.



Es gilt $f(M) = \{1, 2, 3\}$ $f(\{1,2\}) = \{1, 2\}$, $f^{-1}(2) = f^{-1}(\{2\}) = \{2, 3, 4\}$,

- $f: M \to N$ heißt injektiv

- $f : M \to N$ heißt injektiv gdw.

- $f : M \to N$ heißt injektiv gdw. alle verschiedenen Elemente von M

- $f: M \to N$ heißt injektiv gdw. alle verschiedenen Elemente von M auch verschiedene Bilder unter f haben.

- $f : M \to N$ heißt injektiv gdw. alle verschiedenen Elemente von M auch verschiedene Bilder unter f haben.

$$\forall x, y \in M\colon\ x \neq y \to f(x) \neq f(y)$$

- $f\colon M \to N$ heißt injektiv gdw. alle verschiedenen Elemente von M auch verschiedene Bilder unter f haben.

$$\forall x, y \in M\colon\ x \neq y \to f(x) \neq f(y)$$

Manchmal schreibt man $f\colon M \hookrightarrow N$.

- $f\colon M \to N$ heißt injektiv gdw. alle verschiedenen Elemente von M auch verschiedene Bilder unter f haben.
  $$\forall x, y \in M\colon\ x \neq y \to f(x) \neq f(y)$$
  Manchmal schreibt man $f\colon M \hookrightarrow N$.
- f heißt surjektiv

- $f\colon M \to N$ heißt injektiv gdw. alle verschiedenen Elemente von M auch verschiedene Bilder unter f haben.

$$\forall x, y \in M\colon\ x \neq y \to f(x) \neq f(y)$$

  Manchmal schreibt man $f\colon M \hookrightarrow N$.

- f heißt surjektiv gdw. $f(M) = N$.

- $f\colon M \to N$ heißt injektiv gdw. alle verschiedenen Elemente von M auch verschiedene Bilder unter f haben.

$$\forall x, y \in M\colon \; x \neq y \to f(x) \neq f(y)$$

  Manchmal schreibt man $f\colon M \hookrightarrow N$.

- f heißt surjektiv gdw. $f(M) = N$. (Jedes Element von N ist ein Bild eines Elements von M).

- $f\colon M \to N$ heißt **injektiv** gdw. alle verschiedenen Elemente von M auch verschiedene Bilder unter f haben.

$$\forall x, y \in M\colon\; x \neq y \to f(x) \neq f(y)$$

  Manchmal schreibt man $f\colon M \hookrightarrow N$.

- f heißt **surjektiv** gdw. $f(M) = N$. (Jedes Element von N ist ein Bild eines Elements von M).

$$\forall n \in N \exists m \in M\colon\; f(m) = n$$

- $f\colon M \to N$ heißt injektiv gdw. alle verschiedenen Elemente von M auch verschiedene Bilder unter f haben.

$$\forall x, y \in M\colon\ \ x \neq y \to f(x) \neq f(y)$$

  Manchmal schreibt man $f\colon M \hookrightarrow N$.

- f heißt surjektiv gdw. $f(M) = N$. (Jedes Element von N ist ein Bild eines Elements von M).

$$\forall n \in N \exists m \in M\colon\ \ f(m) = n$$

  Manchman schreibt man $f\colon M \twoheadrightarrow N$.

- Sind beide Eigenschaften erfüllt,

- Sind beide Eigenschaften erfüllt, so heißt f bijektiv.

- Sind beide Eigenschaften erfüllt, so heißt f bijektiv.
- Man sagt auch dass f eine

- Sind beide Eigenschaften erfüllt, so heißt f bijektiv.
- Man sagt auch dass f eine Injektion,

- Sind beide Eigenschaften erfüllt, so heißt f bijektiv.
- Man sagt auch dass f eine Injektion, Surjektion,

- Sind beide Eigenschaften erfüllt, so heißt f bijektiv.
- Man sagt auch dass f eine Injektion, Surjektion, oder Bijektion ist.

- Sind beide Eigenschaften erfüllt, so heißt f bijektiv.
- Man sagt auch dass f eine Injektion, Surjektion, oder Bijektion ist. Eine Bijektion auf einer Menge M

- Sind beide Eigenschaften erfüllt, so heißt f bijektiv.
- Man sagt auch dass f eine Injektion, Surjektion, oder Bijektion ist. Eine Bijektion auf einer Menge M wird auch Permutation von M genannt.

- Sind beide Eigenschaften erfüllt, so heißt f bijektiv.
- Man sagt auch dass f eine Injektion, Surjektion, oder Bijektion ist. Eine Bijektion auf einer Menge M wird auch Permutation von M genannt.
- Beispiele:

- Sind beide Eigenschaften erfüllt, so heißt f bijektiv.
- Man sagt auch dass f eine Injektion, Surjektion, oder Bijektion ist. Eine Bijektion auf einer Menge M wird auch Permutation von M genannt.
- Beispiele:
  - $\mathrm{id}_M : M \to M$ ist eine Bijektion.

- Sind beide Eigenschaften erfüllt, so heißt f bijektiv.
- Man sagt auch dass f eine Injektion, Surjektion, oder Bijektion ist. Eine Bijektion auf einer Menge M wird auch Permutation von M genannt.
- Beispiele:
  - $\mathrm{id}_M : M \to M$ ist eine Bijektion.
  - Die Funktion verdoppeln : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.

- Sind beide Eigenschaften erfüllt, so heißt f bijektiv.
- Man sagt auch dass f eine Injektion, Surjektion, oder Bijektion ist. Eine Bijektion auf einer Menge M wird auch Permutation von M genannt.
- Beispiele:
  - $\mathrm{id}_M : M \to M$ ist eine Bijektion.
  - Die Funktion verdoppeln $: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.
  - Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = \lceil \sqrt{n} \rceil$ ist surjektiv, aber nicht injektiv,

- Sind beide Eigenschaften erfüllt, so heißt f bijektiv.
- Man sagt auch dass f eine Injektion, Surjektion, oder Bijektion ist. Eine Bijektion auf einer Menge M wird auch Permutation von M genannt.
- Beispiele:
  - $\mathrm{id}_M : M \to M$ ist eine Bijektion.
  - Die Funktion verdoppeln $: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.
  - Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = \lceil \sqrt{n} \rceil$ ist surjektiv, aber nicht injektiv, denn es gilt $f(2) = f(3)$.

- Sind beide Eigenschaften erfüllt, so heißt f bijektiv.
- Man sagt auch dass f eine Injektion, Surjektion, oder Bijektion ist. Eine Bijektion auf einer Menge M wird auch Permutation von M genannt.
- Beispiele:
  - $\mathrm{id}_M : M \to M$ ist eine Bijektion.
  - Die Funktion verdoppeln$: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.
  - Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = \lceil \sqrt{n} \rceil$ ist surjektiv, aber nicht injektiv, denn es gilt $f(2) = f(3)$.
  - Die Funktion $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $q(x) := x^2$ definiert, ist weder injektiv noch surjektiv.

Funktionen sind Relationen,

Funktionen sind Relationen, also können wir Funktionen komponieren. Wir schreiben auch $g \circ f(m)$ oder $g(f(m))$ statt $f; g(m)$.

Funktionen sind Relationen, also können wir Funktionen komponieren. Wir schreiben auch $g \circ f(m)$ oder $g(f(m))$ statt $f;g(m)$.

Theorem

Die Komposition zweier Funktionen ist wieder eine Funktion.

Funktionen sind Relationen, also können wir Funktionen komponieren. Wir schreiben auch $g \circ f(m)$ oder $g(f(m))$ statt $f;g(m)$.

Theorem

Die Komposition zweier Funktionen ist wieder eine Funktion.

Beweis. Seien $f \colon M \to N$ und $g \colon N \to P$.

Funktionen sind Relationen, also können wir Funktionen komponieren. Wir schreiben auch $g \circ f(m)$ oder $g(f(m))$ statt $f;g(m)$.

Theorem

Die Komposition zweier Funktionen ist wieder eine Funktion.

Beweis. Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to P$.

- Eindeutigkeit.

Funktionen sind Relationen, also können wir Funktionen komponieren. Wir schreiben auch $g \circ f(m)$ oder $g(f(m))$ statt $f;g(m)$.

Theorem

Die Komposition zweier Funktionen ist wieder eine Funktion.

Beweis. Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to P$.

- Eindeutigkeit. Falls $(a,b) \in f;g$ und $(a,c) \in f;g$ dann $\exists x,y \in N$ mit $(a,x) \in f$, $(x,b) \in g$, $(a,y) \in f$, $(y,c) \in g$. Da f ist eindeutig, haben wir $x = y$. Aber da g ist auch eindeutig, haben wir $b = c$.

Funktionen sind Relationen, also können wir Funktionen komponieren. Wir schreiben auch $g \circ f(m)$ oder $g(f(m))$ statt $f;g(m)$.

Theorem

Die Komposition zweier Funktionen ist wieder eine Funktion.

Beweis. Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to P$.

- Eindeutigkeit. Falls $(a,b) \in f;g$ und $(a,c) \in f;g$ dann $\exists x, y \in N$ mit $(a,x) \in f$, $(x,b) \in g$, $(a,y) \in f$, $(y,c) \in g$. Da f ist eindeutig, haben wir $x = y$. Aber da g ist auch eindeutig, haben wir $b = c$.
- Totalität.

Funktionen sind Relationen, also können wir Funktionen komponieren. Wir schreiben auch $g \circ f(m)$ oder $g(f(m))$ statt $f;g(m)$.

Theorem

Die Komposition zweier Funktionen ist wieder eine Funktion.

Beweis. Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to P$.

- Eindeutigkeit. Falls $(a,b) \in f;g$ und $(a,c) \in f;g$ dann $\exists x, y \in N$ mit $(a,x) \in f$, $(x,b) \in g$, $(a,y) \in f$, $(y,c) \in g$. Da f ist eindeutig, haben wir $x = y$. Aber da g ist auch eindeutig, haben wir $b = c$.
- Totalität. Sei $a \in M$. Da f ist total, existiert $b \in N$ mit $(a,b) \in f$. Da g ist total, existiert $c \in P$ mit $(b,c) \in g$. Es folgt dass $(a,c) \in f;g$.

Komposition ist assoziativ

Komposition ist assoziativ (auch gilt für dir Komposition von Relationen)

Theorem

Für Abbildungen $f : M \to N$*,*

Komposition ist assoziativ (auch gilt für dir Komposition von Relationen)

Theorem

Für Abbildungen $f\colon M \to N$, $g\colon N \to P$

Komposition ist assoziativ (auch gilt für dir Komposition von Relationen)

Theorem

Für Abbildungen $f\colon M \to N$, $g\colon N \to P$ *und* $h\colon P \to Q$ *gilt*

Komposition ist assoziativ (auch gilt für dir Komposition von Relationen)

Theorem

Für Abbildungen $f\colon M \to N$, $g\colon N \to P$ *und* $h\colon P \to Q$ *gilt*

$$(f\,;g)\,;h =$$

Komposition ist assoziativ (auch gilt für dir Komposition von Relationen)

Theorem

Für Abbildungen $f\colon M \to N$, $g\colon N \to P$ *und* $h\colon P \to Q$ *gilt*

$$(f \,;\, g) \,;\, h = f \,;\, (g \,;\, h)$$

Beweis.

Komposition ist assoziativ (auch gilt für dir Komposition von Relationen)

Theorem

Für Abbildungen $f\colon M \to N$*,* $g\colon N \to P$ *und* $h\colon P \to Q$ *gilt*

$$(f\,;g)\,;h = f\,;(g\,;h)$$

Beweis.

- Sei $y := (f;g);h(x)$. Zu zeigen ist dass $y = f;(g;h)(x)$.

Komposition ist assoziativ (auch gilt für dir Komposition von Relationen)

Theorem

Für Abbildungen $f\colon M \to N$, $g\colon N \to P$ und $h\colon P \to Q$ gilt

$$(f\,;g)\,;h = f\,;(g\,;h)$$

Beweis.

- Sei $y := (f;g);h(x)$. Zu zeigen ist dass $y = f;(g;h)(x)$.
- Dann existiert a mit $(a, y) \in h$, $(x, a) \in f;g$. Deswegen existiert auch b mit $(x, b) \in f$ und $(b, a) \in g$.

Komposition ist assoziativ (auch gilt für dir Komposition von Relationen)

Theorem

Für Abbildungen $f\colon M \to N$, $g\colon N \to P$ und $h\colon P \to Q$ gilt

$$(f\,;g)\,;h = f\,;(g\,;h)$$

Beweis.

- Sei $y := (f;g);h(x)$. Zu zeigen ist dass $y = f;(g;h)(x)$.
- Dann existiert a mit $(a,y) \in h$, $(x,a) \in f;g$. Deswegen existiert auch b mit $(x,b) \in f$ und $(b,a) \in g$.
- Es folgf $(b,y) \in g;h$, und deswegen auch $(x,y) \in f;(g;h)$.

Komposition ist assoziativ (auch gilt für dir Komposition von Relationen)

Theorem

Für Abbildungen $f: M \to N$, $g: N \to P$ *und* $h: P \to Q$ *gilt*

$$(f\,;g)\,;h = f\,;(g\,;h)$$

Beweis.

- Sei $y := (f;g);h(x)$. Zu zeigen ist dass $y = f;(g;h)(x)$.
- Dann existiert a mit $(a, y) \in h$, $(x, a) \in f; g$. Deswegen existiert auch b mit $(x, b) \in f$ und $(b, a) \in g$.
- Es folgf $(b, y) \in g; h$, und deswegen auch $(x, y) \in f; (g; h)$. $\square$

Theorem

Seien $f\colon M \to N$ *und* $g\colon N \to P$.

Theorem

Seien $f\colon M \to N$ *und* $g\colon N \to P$.

- *Wenn* f *und* g *injektiv sind,*

Theorem

Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to P$.

- *Wenn f und g injektiv sind, dann ist $f \mathbin{;} g$ injektiv.*

Theorem

Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to P$.

- *Wenn f und g injektiv sind, dann ist $f\,;g$ injektiv.*
- *Wenn f und g surjektiv sind,*

Theorem

Seien $f\colon M \to N$ *und* $g\colon N \to P$.

- *Wenn* f *und* g *injektiv sind, dann ist* $f\,;g$ *injektiv.*
- *Wenn* f *und* g *surjektiv sind, dann ist* $f\,;g$ *surjektiv.*

Theorem

Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to P$.

- *Wenn f und g injektiv sind, dann ist $f\,;g$ injektiv.*
- *Wenn f und g surjektiv sind, dann ist $f\,;g$ surjektiv.*
- *Wenn f und g bijektiv sind,*

Theorem

Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to P$.

- *Wenn f und g injektiv sind, dann ist $f\,;g$ injektiv.*
- *Wenn f und g surjektiv sind, dann ist $f\,;g$ surjektiv.*
- *Wenn f und g bijektiv sind, dann ist $f\,;g$ bijektiv.*

Beweis.

Theorem

Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to P$.

- *Wenn f und g injektiv sind, dann ist $f \,;\, g$ injektiv.*
- *Wenn f und g surjektiv sind, dann ist $f \,;\, g$ surjektiv.*
- *Wenn f und g bijektiv sind, dann ist $f \,;\, g$ bijektiv.*

Beweis.

- Seien $m, m' \in M$ mit $m \neq m'$.

Theorem

Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to P$.

- *Wenn f und g injektiv sind, dann ist $f\,;g$ injektiv.*
- *Wenn f und g surjektiv sind, dann ist $f\,;g$ surjektiv.*
- *Wenn f und g bijektiv sind, dann ist $f\,;g$ bijektiv.*

Beweis.

- Seien $m, m' \in M$ mit $m \neq m'$. Da f injektiv ist,

Theorem

Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to P$.

- *Wenn f und g injektiv sind, dann ist $f\,;g$ injektiv.*
- *Wenn f und g surjektiv sind, dann ist $f\,;g$ surjektiv.*
- *Wenn f und g bijektiv sind, dann ist $f\,;g$ bijektiv.*

Beweis.

- Seien $m, m' \in M$ mit $m \neq m'$. Da f injektiv ist, gilt $f(m) \neq f(m')$.

Theorem

Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to P$.

- *Wenn f und g injektiv sind, dann ist $f \,;\, g$ injektiv.*
- *Wenn f und g surjektiv sind, dann ist $f \,;\, g$ surjektiv.*
- *Wenn f und g bijektiv sind, dann ist $f \,;\, g$ bijektiv.*

Beweis.

- Seien $m, m' \in M$ mit $m \neq m'$. Da f injektiv ist, gilt $f(m) \neq f(m')$. Da auch g injektiv ist,

Theorem

Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to P$.

- *Wenn f und g injektiv sind, dann ist $f \,;\, g$ injektiv.*
- *Wenn f und g surjektiv sind, dann ist $f \,;\, g$ surjektiv.*
- *Wenn f und g bijektiv sind, dann ist $f \,;\, g$ bijektiv.*

Beweis.

- Seien $m, m' \in M$ mit $m \neq m'$. Da f injektiv ist, gilt $f(m) \neq f(m')$. Da auch g injektiv ist, gilt weiterhin

Theorem

Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to P$.

- *Wenn f und g injektiv sind, dann ist $f \,;\, g$ injektiv.*
- *Wenn f und g surjektiv sind, dann ist $f \,;\, g$ surjektiv.*
- *Wenn f und g bijektiv sind, dann ist $f \,;\, g$ bijektiv.*

Beweis.

- Seien $m, m' \in M$ mit $m \neq m'$. Da f injektiv ist, gilt $f(m) \neq f(m')$. Da auch g injektiv ist, gilt weiterhin $g(f(m)) \neq g(f(m'))$. Also ist $f \,;\, g$ injektiv.

- (Surjektivität)

- (Surjektivität) Sei $p \in P$ beliebig.

- (Surjektivität) Sei $p \in P$ beliebig. Da g surjektiv ist,

- (Surjektivität) Sei $p \in P$ beliebig. Da g surjektiv ist, existiert $n \in N$,

- (Surjektivität) Sei $p \in P$ beliebig. Da g surjektiv ist, existiert $n \in N$, so dass $g(n) = p$.

- (Surjektivität) Sei $p \in P$ beliebig. Da g surjektiv ist, existiert $n \in N$, so dass $g(n) = p$. Weiterhin ist auch f surjektiv,

- (Surjektivität) Sei $p \in P$ beliebig. Da g surjektiv ist, existiert $n \in N$, so dass $g(n) = p$. Weiterhin ist auch f surjektiv, wodurch $m \in M$ existiert,

- (Surjektivität) Sei $p \in P$ beliebig. Da g surjektiv ist, existiert $n \in N$, so dass $g(n) = p$. Weiterhin ist auch f surjektiv, wodurch $m \in M$ existiert, so dass $f(m) = n$.

- (Surjektivität) Sei $p \in P$ beliebig. Da g surjektiv ist, existiert $n \in N$, so dass $g(n) = p$. Weiterhin ist auch f surjektiv, wodurch $m \in M$ existiert, so dass $f(m) = n$. Also ist

- (Surjektivität) Sei $p \in P$ beliebig. Da g surjektiv ist, existiert $n \in N$, so dass $g(n) = p$. Weiterhin ist auch f surjektiv, wodurch $m \in M$ existiert, so dass $f(m) = n$. Also ist

$$(f \mathbin{;} g)(m)$$

- (Surjektivität) Sei $p \in P$ beliebig. Da g surjektiv ist, existiert $n \in N$, so dass $g(n) = p$. Weiterhin ist auch f surjektiv, wodurch $m \in M$ existiert, so dass $f(m) = n$. Also ist

$$(f\,;g)(m) = g(f(m))$$

- (Surjektivität) Sei $p \in P$ beliebig. Da g surjektiv ist, existiert $n \in N$, so dass $g(n) = p$. Weiterhin ist auch f surjektiv, wodurch $m \in M$ existiert, so dass $f(m) = n$. Also ist

$$(f \,;\, g)(m) = g(f(m)) = g(n)$$

- (Surjektivität) Sei $p \in P$ beliebig. Da g surjektiv ist, existiert $n \in N$, so dass $g(n) = p$. Weiterhin ist auch f surjektiv, wodurch $m \in M$ existiert, so dass $f(m) = n$. Also ist

$$(f\,;g)(m) = g(f(m)) = g(n) = p.$$

- (Surjektivität) Sei $p \in P$ beliebig. Da g surjektiv ist, existiert $n \in N$, so dass $g(n) = p$. Weiterhin ist auch f surjektiv, wodurch $m \in M$ existiert, so dass $f(m) = n$. Also ist

$$(f\,;g)(m) = g(f(m)) = g(n) = p.$$

  Also ist $f\,;g$ auch surjektiv.

- (Surjektivität) Sei $p \in P$ beliebig. Da g surjektiv ist, existiert $n \in N$, so dass $g(n) = p$. Weiterhin ist auch f surjektiv, wodurch $m \in M$ existiert, so dass $f(m) = n$. Also ist

  $$(f\,;g)(m) = g(f(m)) = g(n) = p.$$

  Also ist $f\,;g$ auch surjektiv.
- (Bijektivität)

- (Surjektivität) Sei $p \in P$ beliebig. Da g surjektiv ist, existiert $n \in N$, so dass $g(n) = p$. Weiterhin ist auch f surjektiv, wodurch $m \in M$ existiert, so dass $f(m) = n$. Also ist

$$(f\,;g)(m) = g(f(m)) = g(n) = p.$$

  Also ist $f\,;g$ auch surjektiv.

- (Bijektivität) Das ist eine Folgerung aus den zwei ersten Punkte.

- (Surjektivität) Sei $p \in P$ beliebig. Da g surjektiv ist, existiert $n \in N$, so dass $g(n) = p$. Weiterhin ist auch f surjektiv, wodurch $m \in M$ existiert, so dass $f(m) = n$. Also ist

  $$(f\ ;g)(m) = g(f(m)) = g(n) = p.$$

  Also ist $f\ ;g$ auch surjektiv.
- (Bijektivität) Das ist eine Folgerung aus den zwei ersten Punkte. $\square$

- Manchmal möchte man eine Funktionsanwendung rückgängig machen können,

- Manchmal möchte man eine Funktionsanwendung rückgängig machen können, zum Beispiel bei der Verschlüsselung und Kompression von Daten.

- Manchmal möchte man eine Funktionsanwendung rückgängig machen können, zum Beispiel bei der Verschlüsselung und Kompression von Daten.
- Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist

- Manchmal möchte man eine Funktionsanwendung rückgängig machen können, zum Beispiel bei der Verschlüsselung und Kompression von Daten.
- Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar

- Manchmal möchte man eine Funktionsanwendung rückgängig machen können, zum Beispiel bei der Verschlüsselung und Kompression von Daten.
- Eine Funktion $f: M \to N$ ist invertierbar gdw.

- Manchmal möchte man eine Funktionsanwendung rückgängig machen können, zum Beispiel bei der Verschlüsselung und Kompression von Daten.
- Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw. eine Funktion $g\colon N \to M$ existiert,

- Manchmal möchte man eine Funktionsanwendung rückgängig machen können, zum Beispiel bei der Verschlüsselung und Kompression von Daten.
- Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw. eine Funktion $g\colon N \to M$ existiert, so dass

$$f \,;\, g$$

- Manchmal möchte man eine Funktionsanwendung rückgängig machen können, zum Beispiel bei der Verschlüsselung und Kompression von Daten.
- Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw. eine Funktion $g\colon N \to M$ existiert, so dass

$$f \mathbin{;} g = \mathrm{id}_M$$

und

- Manchmal möchte man eine Funktionsanwendung rückgängig machen können, zum Beispiel bei der Verschlüsselung und Kompression von Daten.
- Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw. eine Funktion $g\colon N \to M$ existiert, so dass

  $$f \mathbin{;} g = \mathrm{id}_M$$

  und

  $$g \mathbin{;} f = \mathrm{id}_N.$$

- Manchmal möchte man eine Funktionsanwendung rückgängig machen können, zum Beispiel bei der Verschlüsselung und Kompression von Daten.
- Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw. eine Funktion $g\colon N \to M$ existiert, so dass

$$f\,;g = \mathrm{id}_M$$

und

$$g\,;f = \mathrm{id}_N.$$

- Äquivalent gesagt:

- Manchmal möchte man eine Funktionsanwendung rückgängig machen können, zum Beispiel bei der Verschlüsselung und Kompression von Daten.
- Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw. eine Funktion $g\colon N \to M$ existiert, so dass
$$f \mathbin{;} g = \mathrm{id}_M$$
und
$$g \mathbin{;} f = \mathrm{id}_N.$$
- Äquivalent gesagt: für alle $m \in M$ gilt

- Manchmal möchte man eine Funktionsanwendung rückgängig machen können, zum Beispiel bei der Verschlüsselung und Kompression von Daten.
- Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw. eine Funktion $g\colon N \to M$ existiert, so dass
$$f \,;\, g = \mathrm{id}_M$$
und
$$g \,;\, f = \mathrm{id}_N.$$
- Äquivalent gesagt: für alle $m \in M$ gilt $g(f(m)) = m$

- Manchmal möchte man eine Funktionsanwendung rückgängig machen können, zum Beispiel bei der Verschlüsselung und Kompression von Daten.
- Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw. eine Funktion $g\colon N \to M$ existiert, so dass
$$f \mathbin{;} g = \mathrm{id}_M$$
und
$$g \mathbin{;} f = \mathrm{id}_N.$$
- Äquivalent gesagt: für alle $m \in M$ gilt $g(f(m)) = m$ und für alle $n \in N$ gilt

- Manchmal möchte man eine Funktionsanwendung rückgängig machen können, zum Beispiel bei der Verschlüsselung und Kompression von Daten.
- Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw. eine Funktion $g\colon N \to M$ existiert, so dass
$$f \mathbin{;} g = \mathrm{id}_M$$
und
$$g \mathbin{;} f = \mathrm{id}_N.$$
- Äquivalent gesagt: für alle $m \in M$ gilt $g(f(m)) = m$ und für alle $n \in N$ gilt $f(g(n)) = n$.

Beispiele

Beispiele

- Die Identität id_M ist offensichtlich invertierbar.

Beispiele

- Die Identität id_M ist offensichtlich invertierbar. $\mathrm{id}_M ; \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_M$.

Beispiele

- Die Identität id_M ist offensichtlich invertierbar. $\mathrm{id}_M ; \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_M$.
- Die Funktion verdoppeln ist nicht invertierbar.

Beispiele

- Die Identität id_M ist offensichtlich invertierbar. $\mathrm{id}_M ; \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_M$.
- Die Funktion verdoppeln ist nicht invertierbar. Welchen Wert

Beispiele

- Die Identität id_M ist offensichtlich invertierbar. $\mathrm{id}_M ; \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_M$.
- Die Funktion verdoppeln ist nicht invertierbar. Welchen Wert soll die inverse Funktion

Beispiele

- Die Identität id_M ist offensichtlich invertierbar. $\mathrm{id}_M ; \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_M$.
- Die Funktion verdoppeln ist nicht invertierbar. Welchen Wert soll die inverse Funktion der Zahl 3 zuweisen?

Beispiele

- Die Identität id_M ist offensichtlich invertierbar. $\mathrm{id}_M ; \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_M$.
- Die Funktion verdoppeln ist nicht invertierbar. Welchen Wert soll die inverse Funktion der Zahl 3 zuweisen?
- Die Funktion f mit $f(n) = \lceil \sqrt{n} \rceil$ ist nicht invertierbar.

Beispiele

- Die Identität id_M ist offensichtlich invertierbar. $\mathrm{id}_M ; \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_M$.
- Die Funktion verdoppeln ist nicht invertierbar. Welchen Wert soll die inverse Funktion der Zahl 3 zuweisen?
- Die Funktion f mit $f(n) = \lceil \sqrt{n} \rceil$ ist nicht invertierbar. Welchen Wert

Beispiele

- Die Identität id_M ist offensichtlich invertierbar. $\mathrm{id}_M ; \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_M$.
- Die Funktion verdoppeln ist nicht invertierbar. Welchen Wert soll die inverse Funktion der Zahl 3 zuweisen?
- Die Funktion f mit $f(n) = \lceil \sqrt{n} \rceil$ ist nicht invertierbar. Welchen Wert soll die inverse Funktion

Beispiele

- Die Identität id_M ist offensichtlich invertierbar. $\mathrm{id}_M ; \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_M$.
- Die Funktion verdoppeln ist nicht invertierbar. Welchen Wert soll die inverse Funktion der Zahl 3 zuweisen?
- Die Funktion f mit $f(n) = \lceil \sqrt{n} \rceil$ ist nicht invertierbar. Welchen Wert soll die inverse Funktion der Zahl 2 zuweisen?

UNIVERSITÄT
LEIPZIG

VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT!

Łukasz Grabowski
Mathematisches Institut

grabowski@math.uni-leipzig.de