

Übungen zur Vorlesung „Logik“ 1. Übungsblatt

H 1-1. Mengenlehre

- a) Sei $M = \{a, b, c\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche nicht? Ohne Begründung. (3 Pkt.)

- i) $a \in M$ *Wahr* ii) $\emptyset \subseteq M$ *Wahr* iii) $\{a, c\} \notin 2^M$ *Falsch*
iv) $\{\emptyset\} \notin 2^M$ *Falsch* v) $\{\{a\}, \{b, c\}\} \in 2^{2^M}$ *Wahr* vi) $|2^{2^M}| = 256$ *Wahr*

- b) Beweisen Sie nachfolgende Aussage. Für beliebige Mengen S und T gilt: (2 Pkt.)

$$(S \cup T = S \quad \text{gdw.} \quad T \subseteq S)$$

H 1-2. Vollständige Induktion

(5 Pkt.)

Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$n^3 - n$ ist durch 3 teilbar *1 n=0
2 es gilt für n
3 Schritt für n+1*

H 1-3. Syntaktische Eigenschaften

- a) Definieren Sie rekursiv die Funktion $j : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N}$, die die Anzahl der Junktoren einer Formel zählt. Beispielsweise sollte $j((\neg A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3))) = 3$ ergeben. (2 Pkt.)
b) Sei $\varphi = \neg(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))$. Bestimmen Sie: (3 Pkt.)
i) den Rang $r(\varphi)$,
ii) die Menge der Teilformeln $t(\varphi)$,
iii) den Syntaxbaum $b(\varphi)$.

H 1-4. Induktion über den Formelaufbau

(5 Pkt.)

Zeigen Sie per Induktion über den Formelaufbau, dass für alle Formeln $\varphi \in \mathcal{F}$ gilt:

$$|t(\varphi)| \leq 2^{r(\varphi)+1} - 1.$$

Termine:

- Abgabe der Aufgaben bis spätestens 20.04.2025 via moodle.
- Besprechung der Aufgaben ab Dienstag, dem 22.04.2025 (A-Woche). 21.04. ist Feiertag.

H 1-2. Vollständige Induktion

(5 Pkt)

Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$n^3 - n$ ist durch 3 teilbar

- 1 $n=0$
- 2 es gilt für n
- 3 Schritt für $n+1$

H 1-3. Syntaktische Eigenschaften

$\supset A: \quad n=0$

$$3 \mid (n^3 - n)$$

$$3 \mid (0^3 - 0)$$

$$3 \mid 0 \quad \checkmark$$

$\supset V: \quad$ es gilt

$$3 \mid (n^3 - n)$$

$\supset S: \quad n+1$

$$3 \mid (n+1)^3 - (n+1)$$

$$3 \mid (n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1)$$

$$3 \mid (n^3 - n + (3n^2 + 3n) + 1 - 1)$$

$$3 \mid (n^3 - n + 3 \cdot (n^2 + n))$$

$$3 \mid (n^3 - n) + 3 \mid (3(n^2 + n))$$

$$\begin{aligned} (n+1)^3 &= (n+1) \cdot (n+1) \cdot (n+1) \\ &= (n^2 + 2n + 1) \cdot (n+1) \\ &= n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n + n + 1 \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

H 1-3. Syntaktische Eigenschaften

3 Schritte für $n+1$

- a) Definieren Sie rekursiv die Funktion $j: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N}$, die die Anzahl der Junktoren einer Formel zählt. Beispielsweise sollte $j((\neg A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3))) = 3$ ergeben. (2 Pkt.)
- b) Sei $\varphi = \neg(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))$. Bestimmen Sie: (3 Pkt.)

- i) den Rang $r(\varphi)$,
 ii) die Menge der Teilformeln $t(\varphi)$,
 iii) den Syntaxbaum $b(\varphi)$.

a)

$$j(\phi) = 0$$

$$j(\neg \phi) = j(\phi) + 1$$

$$j(\phi \circ \psi) = j(\phi) + j(\psi) + 1$$

$$j((\neg A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3))) =$$

$$= j(\neg A_1) + j(A_2 \wedge A_3) + 1$$

$$= j(A_1) + 1 + j(A_2) + j(A_3) + 1 + 1$$

$$= 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1$$

$$= 3$$

b) i) Rang $r(\neg(A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3)))$

$$= r((A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3))) + 1$$

$$= \max\{r(A_1), r(\neg(\neg A_2 \wedge A_3))\} + 1$$

$$= \max\{0, r(\neg A_2 \wedge A_3) + 1\} + 1$$

$$= \max\{0, \max\{r(\neg A_2), r(A_3)\} + 1 + 1\} + 1$$

$$= \max\{0, \max\{r(A_2) + 1, 0\} + 1 + 1\} + 1$$

$$= \max\{0, \max\{0 + 1, 0\} + 1 + 1\} + 1$$

$$= \max\{0, 1 + 1 + 1\} + 1$$

$$= 3 + 1$$

$$= 4$$

$$ii) \vdash ((A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3)))$$

$$\vdash (A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3)) \vee \{A_1 \vee \neg(A_2 \wedge A_3)\}$$

$$= \vdash(A_1) \vee \vdash(\neg(\neg A_2 \wedge A_3)) \vee \{A_1 \vee \neg(\neg A_2 \wedge A_3)\} \vee \{A_1 \vee \neg(A_2 \wedge A_3)\}$$

$$= \{A_1\} \vee \vdash(\neg A_2 \wedge A_3) \vee \{\neg A_2 \wedge A_3\} \vee$$

=