Aufgabe:

Sei V ein K-V.R mit Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Sei $w_i := v_1 + \dots + v_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

Zeigen Sie, dass $\{w_1, \dots, w_n\}$ eine Basis von V ist.

Lösung:

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ und gelte $\lambda_1 \cdot w_1 + \dots + \lambda_n \cdot w_n = 0$. Dann gilt:

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot (v_1 + v_2) + \dots + \lambda_n \cdot (v_1 + \dots + v_n) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \cdot v_1 + (\lambda_2 + \dots + \lambda_n) \cdot v_2 + \dots + \lambda_n \cdot v_n = 0$$

$$\overset{v_1, \dots, v_n}{\underset{\text{sind l.u}}{\Rightarrow}} \quad \begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n &= 0 \\ \lambda_2 + \dots + \lambda_n &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_{n-1} + \lambda_n &= 0 \\ \lambda_n &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_n = 0, \dots, \lambda_1 = 0$$

$$\Rightarrow \{w_1, \dots, w_n\} \text{ ist l.u.}$$

Wegen $\dim(V) = n$, folgt bereits, dass $\{w_1, \dots, w_n\}$ eine Basis von V ist. $\square$

Aufgabe:

Sei V ein K-V.R. und sei $f: V \to V$ lin.

Sei $v \in V$ und gelte $f(v) \neq 0$, $f^2(v) \neq 0$, $f^3(v) = 0$.

Zeigen Sie: $\{v, f(v), f^2(v)\}$ ist l.u.

Lösung:

$f(v) \neq 0 \Rightarrow v \neq 0.$

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K$ und gelte

$$\lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot f(v) + \lambda_3 \cdot f^2(v) = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \cdot f(v) + \lambda_2 \cdot f^2(v) + \lambda_3 \cdot \underbrace{f^3(v)}_{=0} = f(\lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot f(v) + \lambda_3 \cdot f^2(v)) = f(0) = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \cdot f^2(v) + \lambda_2 \cdot \underbrace{f^3(v)}_{=0} = f(\lambda_1 \cdot f(v) + \lambda_2 \cdot f^2(v)) = f(0) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \cdot \underbrace{f^2(v)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \lambda_2 \cdot \underbrace{f^2(v)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \lambda_3 \cdot \underbrace{f^2(v)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0$$

$\square$

Aufgabe Sei K ein Körper, V ein endlich erzeugter K-Vektorraum, und $U, W \subseteq V$ Unteräume. Beweise die *Dimensionsformel*

$$\dim_K(U+W) = \dim_K(U) + \dim_K(W) - \dim_K(U \cap W).$$

Hinweis: Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von $U \cap W$. Mit Hilfe des Basisergänzungssatzes kann man dies zu einer Basis von U und auch zu einer Basis von W fortsetzen.

Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von $U \cap W$.

Nach dem Basisergänzungssatz lässt sich $(v_1, \ldots, v_n)$ zu einer Basis $(v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m)$ von U und zu einer Basis $(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_k)$ von W ergänzen.

Wir zeigen, dass $(v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_k)$ eine Basis von $U+W$ ist.

Dann gilt: $\dim(U+W) = n+m+k = (n+m)+(n+k)-n = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

- $(v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_k)$ ist ein Erz. Syst. von $U+W$:

  Sei $u+w \in U+W$ mit $u \in U$, $w \in W$.

  $u \in U = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m\} \subseteq \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_k\}$

  $w \in W = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_k\} \subseteq \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_k\}$

  $\Rightarrow u+w \in \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_k\}$ ✓

- $(v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_k)$ ist l.u.:

  $\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n + \mu_1 \cdot u_1 + \ldots + \mu_m \cdot u_m + \mu_1' \cdot w_1 + \ldots + \mu_k' \cdot w_k = 0 \qquad (*)$

  Setze $v := \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n + \mu_1 \cdot u_1 + \ldots + \mu_m \cdot u_m$

  Dann ist $v \in U$ und $-v = \mu_1' \cdot w_1 + \ldots + \mu_k' \cdot w_k \in W \quad \Rightarrow \quad v \in U \cap W$.

  $\Rightarrow \quad v = \lambda_1' \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n' \cdot v_n$ mit $\lambda_1', \ldots, \lambda_n' \in K$.

  Aus der Eindeutigkeit der Linearkombinationen folgt: $\mu_1 = 0, \ldots, \mu_m = 0$.

  $\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n + \mu_1' \cdot w_1 + \ldots + \mu_k' \cdot w_k = 0$

  Da $(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_k)$ eine Basis von W und damit l.u. ist folgt: $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$, $\mu_1' = 0, \ldots, \mu_k' = 0$.

$\square$

Aufgabe Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einer K-Basis $v_1, \dots, v_n$. Es sei $k \subseteq K$ ein Unterkörper[1], und es sei $a_1, \dots, a_m$ eine k-Basis von K.

a) Zeige, dass die Produkte $a_i v_j$ (für $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$) eine Basis von V als k-Vektorraum bilden.

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\dim_K(V)$, $\dim_k(V)$ und $\dim_k(K)$?

(a) · $\{a_i \cdot v_j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ ist ein Erz. Syst. von V als k-V.R.

Sei $v \in V$. Da $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V als K-V.R. bilden gilt:

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K: \quad v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$

Da $a_1, \dots, a_m$ eine k-Basis von K ist, gilt:

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} \cdot a_i \quad \text{mit } \lambda_{ij} \in k, \quad 1 \leq j \leq n, \quad 1 \leq i \leq m$$

$$\Rightarrow \quad v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot v_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\lambda_{ij}}_{\in k} \cdot (a_i \cdot v_j) \in \operatorname{span}_k\{a_i \cdot v_j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

· $\{a_i \cdot v_j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ ist l.u. in V als k-V.R.

Seien $\lambda_{ij} \in k$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ und gelte:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} \cdot a_i \cdot v_j = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} \cdot a_i}_{\in K} \Big) \cdot v_j = 0$$

Da $v_1, \dots, v_n$ eine K-Basis von V ist, gilt:

$$\sum_{i=1}^{m} \underbrace{\lambda_{ij}}_{\in k} \cdot a_i = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Da $a_1, \dots, a_m$ eine k-Basis von K ist, gilt

$$\lambda_{ij} = 0 \quad \forall 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m.$$

$\square$

(b) Nach (a) gilt: $\dim_k(V) = n \cdot m = \dim_K(V) \cdot \dim_k(K)$

Aufgabe Seien $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_i \neq a_j$ für alle $i \neq j$. Wir definieren $V_n := \{f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f \leq n\}$. Dies ist ein $(n+1)$-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis x^i für $i = 0, ..., n$.

In dieser Aufgabe dürfen Sie folgende Aussage nutzen: Falls $f \in V_n$ $(n+1)$ verschiedene reelle Nullstellen hat, dann $f = 0$.

a) Sei

$$E_i(x) := \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j} \qquad (0 \leq i \leq n).$$

Zeige: $\forall f \in V_n$ gilt $f = \sum_{i=0}^n f(a_i) E_i$.

b) Zeige: $E_0, ..., E_n$ ist eine Basis von V_n.

c) Zeige: Für alle $b_0, ..., b_n \in \mathbb{R}$ existiert es eindeutiges $f \in V_n$ mit $f(a_i) = b_i$ für alle $0 \leq i \leq n$.

$V_n = \{ f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(f) \leq n \} = \{ a_n \cdot X^n + a_{n-1} \cdot X^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot X + a_0 \mid a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \}$

$E_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j} \quad (0 \leq i \leq n)$

Es gilt:

(1) $\deg(E_i) \leq n \Rightarrow E_i \in V_n$

$(j \in \{0, \ldots, n\} \setminus \{i\} \Rightarrow n+1-1 = n$ Faktoren $)$

(2) $E_i(a_i) = \prod_{j \neq i} \underbrace{\frac{a_i - a_j}{a_i - a_j}}_{=1} = 1$

$E_i(a_K) = \prod_{j \neq i} \frac{a_K - a_j}{a_i - a_j} = 0 \,, \; K \neq i \quad ($ Für $j = K \neq i$ ist $\frac{a_K - a_K}{a_i - a_K} = 0 \,)$

Insgesamt: $E_i(a_K) = \delta_{iK} = \begin{cases} 1 \,, & i = K \\ 0 \,, & i \neq K \end{cases}$

(a) z.z.: $\forall f \in V_n: \quad f = \sum_{i=0}^n f(a_i) \cdot E_i$

Sei $f \in V_n$. Sei $g := f - \sum_{i=0}^n f(a_i) \cdot E_i \in V_n$. Dann gilt:

$g(a_K) = f(a_K) - \sum_{i=0}^n f(a_i) \cdot \underbrace{E_i(a_K)}_{= \delta_{iK}} = f(a_K) - f(a_K) \cdot \underbrace{\delta_{KK}}_{=1} = 0 \,, \quad K = 0, \ldots, n$

$\Rightarrow g \in V_n$ hat $n+1$ Nullstellen $\Rightarrow g = 0 \Rightarrow f = \sum_{i=0}^n f(a_i) \cdot E_i$ $\square$

(b) z.z.: $E_0, \ldots, E_n$ ist eine Basis von V_n.

Nach (a) gilt: $\forall f \in V_n: \quad f = \sum_{i=0}^n \underbrace{f(a_i)}_{=: \lambda_i \in K} \cdot E_i \in \operatorname{span}\{E_0, \ldots, E_n\}$

$\Rightarrow$ $E_0, \ldots, E_n$ ist ein Erzeugendensystem von V_n.

Wegen $|\{E_0, \ldots, E_n\}| = n+1 = \dim V_n$, folgt bereits, dass $E_0, \ldots, E_n$ eine Basis von V_n ist. $\square$

(c) Seien $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. z.z.: $\exists!\, f \in V_n\ \forall i = 0, \dots, n:\ f(a_i) = b_i$

Existenz:

Setze $f := \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot E_i \in V_n$. Dann gilt:

$$f(a_K) = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot \underbrace{E_i(a_K)}_{=\delta_{iK}} = b_K \cdot \underbrace{\delta_{KK}}_{=1} = b_K, \quad K = 0, \dots, n \quad ✓$$

Eindeutigkeit:

Sei $f \in V_n$ mit $f(a_i) = b_i\ \forall i = 0, \dots, n$. Dann gilt:

$$f \overset{(a)}{=} \sum_{i=0}^{n} f(a_i) \cdot E_i = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot E_i$$

$\Rightarrow$ f ist eindeutig bestimmt. $\square$