Logik
Serie 2

Nikita Emanuel John Fehér, 3793479
Erik Thun, 3794446

25. April 2025
Mittwoch 09:15-10:45 Keitsch, Jamie; Gruppe e

H 2-1. Erfüllbarkeit un Co.

a) Kreuzen Sie in der Tabelle an, ob die betreffende Formel erfüllbar, falsifizierbar, unerfüllbar oder tautologisch ist.

Formel	Erfüllbar	Falsifizierbar	Unerfüllbar	Tautologisch
$(A_1 \to A_2) \vee (A_2 \to A_1)$	X			X
$(A_1 \vee A_2) \to A_1$	X	X		
$\neg((A_1 \leftrightarrow A_2) \vee (A_1 \leftrightarrow A_3) \vee (A_2 \leftrightarrow A_3))$		X	X	

b) In welcher der beiden möglichen Teilmengenbeziehungen stehen die Mengen M und N zueinander? Kurze Begründung.

$$M = \{\varphi | \varphi \text{ ist tautologisch}\} \qquad N = \{\neg\psi | \psi \text{ ist unerfüllbar}\}$$

Es gilt $N \subseteq M$, da jedes $\neg\psi \in N$ auch eine Tautologie also $\neg\psi \in M$, nicht jede Tautologie hat $\neg\psi$ als Form.
Bsp. $((a \to b) \vee (b \to a)) \in M$, aber $\notin N$

H 2-2. Boolsche Funktionen

a) Nachfolgende Tabelle zeigt alle 2-stelligen Boolschen Funktionen

$$f : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$$

$I(\varphi)$	$I(\psi)$	f^1	$f_\wedge$	f^3	f^4	f^5	f^6	f^7	$f_\vee$	f^9	$f_\leftrightarrow$	f^{11}	f^{12}	f^{13}	$f_\to$	f^{15}	f^{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Definieren Sie Formeln ξ_1, ξ_2, und ξ_3 unter Verwendung der Formeln φ und ψ sowie der Junktoren $\wedge, \vee, \neg$, sodass für alle $I \in \mathcal{B}$ gilt:

i) $I(\xi_1) = f^6(I(\varphi, I(\psi))$

$$\text{Für } \xi_1 = \psi \text{ ergibt sich } I(\xi_1) = f^6((I(\varphi), I(\psi))$$

ii) $I(\xi_2) = f^9(I(\varphi), I(\psi))$

$$\text{Für } \xi_2 = \neg(\varphi \vee \psi) \text{ ergibt sich } I(\xi_2) = f^9((I(\varphi), I(\psi))$$

iii) $I(\xi_3) = f^{12}(I(\varphi), I(\psi))$

$$\text{Für } \xi_3 = \varphi \wedge \neg\psi \text{ ergibt sich } I(\xi_3) = f^{12}((I(\varphi), I(\psi))$$

Bsp.: Für $\xi = \neg(\varphi \wedge \psi)$ ergibt sich $I(xi) = f^{15}(I(\varphi), I(\psi))$

H 2-3. Wahrheitswertetabelle

a) Vervollständigen Sie nachfolgende Wahrheitswertetabelle.

A_1	A_2	A_3	$\neg A_2 \vee A_3$	$A_1 \rightarrow (\neg A_2 \vee A_3)$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

b) Ist die Formel $A_1 \rightarrow (\neg A_2 \vee A_3)$ falsifizierbar? Falls ja, geben Sie eine entsprechende Belegung an.

Ja die Formel ist falsifizierbar mit $A_1 = 1, A_2 = 1, A_3 = 0$

H 2-4. Modelle und Folgerung

a) Seien $S, T \subseteq F$ Formelmengen. Beweisen Sie die Antimonotonie des Modelloperators:

$$\text{Falls } S \subseteq T, \text{ dann } \mathrm{Mod}(T) \subseteq \mathrm{Mod}(S).$$

Gehen wir von $S \subseteq T$ aus und sei $I \in \mathrm{Mod}(T)$, heißt das I erfüllt alle Formeln aus T.
Desweiteren wissen wir jede Formel in S liegt auch in T (durch $S \subseteq T$), also liegt I auch in S, da wir von T bereits wissen das I dort alle Formeln erfüllt und in S eine Teilmenge von T ist erfüllt I auch für S alle Formeln. Also $I \in \mathrm{Mod}(S)$.
$\implies \mathrm{Mod}(T) \subseteq \mathrm{Mod}(S)$

b) Seien $\varphi, \psi, \xi \in F$ Formeln mit $\mathrm{Mod}(\varphi) = \{I_1, I_2\}, \mathrm{Mod}(\psi) = \{I_2, I_3\}$ und $\mathrm{Mod}(\xi) = \{I_1, I_2, I_3, I_4\}$. Bestimmen Sie die nachfolgenden Mengen bzw. begründen Sie kurz, ob aufgeführte Folgerungsrelationen gelten:

i) $\mathrm{Mod}(\xi \wedge \neg\psi)$

$$\{I_1, I_4\}$$

ii) $\varphi \models \psi$

$$\begin{aligned}
\varphi \models \psi &\implies \mathrm{Mod}(\varphi) \subseteq \mathrm{Mod}(\psi) \\
&\implies \{I_1, I_2\} \subseteq \{I_2, I_3\} \\
&\implies I_1 \in \{I_2, I_3\} \\
&\implies \lightning
\end{aligned}$$

iii) $\xi \models \psi \to \varphi$

$$\begin{aligned}
\xi \models \psi \to \varphi &\implies \mathrm{Mod}(\xi) \subseteq \mathrm{Mod}(\psi \to \varphi) \\
&\implies \{I_1, I_2, I_3 I_4\} \subseteq \mathrm{Mod}(\neg\psi \vee \varphi) \\
&\implies \{I_1, I_2, I_3 I_4\} \subseteq \{I_1, I_2, I_3, I_4\}
\end{aligned}$$

H 2-5. Semantische Äquivalenz und Normalformen

a) Gegeben die Wahrheitstabelle einer Formel φ mit $s(\psi) = \{A_1, A_2\}$.

A_1	A_2	φ
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

i) Bestimmen Sie eine zu φ semantisch äquivalente Formel φ_K in KNF.

$$(\neg A_1 \vee A_2) \wedge (A_1 \vee \neg A_2) \wedge (A_1 \vee A_2)$$

$$\varphi_K = A_1 \vee A_2$$

ii) Bestimmen Sie eine zu φ semantisch äquivalente Formel φ_D in DNF.

$$\varphi_D = (\neg A_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge \neg A_2) \vee (A_1 \wedge A_2)$$

b) Welche der nachfolgenden Formeln sind semantisch äquivalent? Ohne Beweis.

$$\varphi_1 = A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_1) \qquad \varphi_2 = A_1 \rightarrow A_1 \qquad \varphi_3 = A_2 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_1)$$

$$\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv \varphi_3$$

c) Beweisen Sie, dass: $A_1 \rightarrow A_2 \equiv \neg(A_1 \wedge \neg A_2)$

$$\begin{aligned} A_1 \rightarrow A_2 &\equiv_{\text{Implikation}} \neg A_1 \vee A_2 \\ &\equiv_{\text{doppelte Negation}} \neg\neg(\neg A_1 \vee A_2) \\ &\equiv_{\text{de Morgan}} \neg(\neg\neg A_1 \wedge \neg A_2) \\ &\equiv_{\text{Elimination doppelter Negation}} \neg(A_1 \wedge \neg A_2) \end{aligned}$$