Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R}$ und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 & b \\ b & 0 & 1 & a \\ 0 & a & b & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

Man berechne $\operatorname{rang}(A)$ in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$.

Man fasse die Ergebnisse in einer Tabelle wie folgt zusammen:
In der ersten Spalte die auftretenden Zahlenwerte des Ranges, in der zweiten die zugehörigen Bedingungen für deren Auftreten in Form eines logischen Ausdruckes in a und b.

Lösung:

Wir verwenden, daß elementare Zeilenumformungen den Rang einer Matrix nicht ändern und führen A durch solche in Zeilenstufenform über:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 & b \\ b & 0 & 1 & a \\ 0 & a & b & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[III-b\cdot I]{II-a\cdot I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & a-b \\ 0 & a & b & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV-b\cdot III]{IV-a\cdot II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & -a\cdot(b-a)-b\cdot(a-b) \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{ausklammern}}{\overset{a-b}{=}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & (a-b)^2 \end{pmatrix}$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

$\boldsymbol{a = b}$: Dann ist die Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und der Rang der Matrix ist gleich der Anzahl der Stufen , d.h. $\operatorname{rang}(A) = 3$.

$\boldsymbol{a \neq b}$: Dann ist die Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & (a-b)^2 \end{pmatrix}$$

und der Rang der Matrix ist wieder gleich der Anzahl der Stufen , d.h. $\operatorname{rang}(A) = 4$.

Nun die Tabelle:

Rang	**Bedingung an *a* und *b***
4	$a \neq b$
3	$a = b$

Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R}$ und

$$A := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ a & 1 & 1 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

Man berechne $\operatorname{rang}(A)$ in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Wir erzeugen die Zeilenstufenform von A.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ a & 1 & 1 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-I} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[IV-b\cdot II]{III-a\cdot II} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{IV+III} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dies gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$. Nun gilt es, Fälle zu unterscheiden:

- **Falls $a = 0$:** Dann ist $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  - **Falls $b = 0$:** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{vertauschen}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

    Dies ist die Zeilenstufenform mit einer Stufe, also $\operatorname{rang}(A) = 1$ in diesem Falle.

  - **Falls $b \neq 0$:**

    $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{vertauschen}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

    Hier hat die Zeilenstufenform 3 Stufen, also folgt $\operatorname{rang}(A) = 3$.

- **Falls $a \neq 0$:**

$$A \xrightarrow{\frac{1}{a}\cdot I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  - **Falls $b = a$:**

  $$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Die Zeilenstufenform hat 2 Stufen, also $\operatorname{rang}(A) = 2$.

  - **Falls $b \neq a$:**

  $$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Hier hat die Zeilenstufenform 3 Stufen, also $\operatorname{rang}(A) = 3$.

Ergebnis:

$$\operatorname{rang}(A) = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \text{für} & a = 0 = b \\ 2 & \text{für} & a = b \neq 0 \\ 3 & \text{für} & b \neq a \end{array} \right\}$$

Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R}$ und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 1 & 1 & b & a \\ a & b & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

Man berechne $\operatorname{rang}(A)$ in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Wir wissen, daß elementare Zeilen- und/oder Spaltenumformungen den Rang einer Matrix nicht ändern und der Rang einer Matrix an ihrer Zeilenstufenform ablesbar ist.
Also führen wir A durch elementare Zeilenumformungen in eine Zeilenstufenform über:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 1 & 1 & b & a \\ a & b & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[III-a\cdot I]{II-I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & b-a & a-b \\ 0 & b-a & 1-a^2 & 1-ab \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{vertauschen}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & b-a & 1-a^2 & 1-ab \\ 0 & 0 & b-a & a-b \end{pmatrix} =: A_S$$

Um die Lage der Stufen festzustellen, müssen wir die Diagonalelemente untersuchen:

Falls $\boldsymbol{a \neq b}$:

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & b-a & 1-a^2 & 1-ab \\ 0 & 0 & b-a & a-b \end{pmatrix} \quad \text{hat 3 Stufen} \implies \operatorname{rang}(A) = 3\,.$$

Falls $\boldsymbol{a = b}$:

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Falls $\boldsymbol{a = b \notin \{\pm 1\}}$:

Dann ist $1 - a^2 \neq 0$ und somit:

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{hat 2 Stufen} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rang}(A) = 2$$

Falls $\boldsymbol{a = b \in \{\pm 1\}}$:

Dann ist $1 - a^2 = 0$ und es folgt

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{hat 1 Stufe} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rang}(A) = 1$$

<u>Ergebnis:</u>

$$\operatorname{rang}(A) = \left\{ \begin{array}{lll} 3 & \textbf{falls} & a \neq b \\ 2 & \textbf{falls} & a = b \notin \{\pm 1\} \\ 1 & \textbf{falls} & a = b \in \{\pm 1\} \end{array} \right\}$$

Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R}$ und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & b & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(a) Man berechne $\det(A)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Man berechne $\operatorname{rang}(A)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Beweis:

Ad (a):

1. Möglichkeit: Man erkennt die Blockmatrix-Struktur von A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & b & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & a & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & b & 1 \end{array}\right)$$

Dann folgt mit Vorlesung / Lemma (5.9) :

$$\det(A) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}\right) \quad = \quad (1-ab)^2$$

2.Möglichkeit: Durch elementare Umformungen (die den Wert der Determinante unverändert lassen)

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & b & 1 \end{pmatrix}\right) \underset{IV-b\cdot III}{\overset{II-b\cdot I}{=}} \det\left(\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-ab & -b & -b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1-ab \end{pmatrix}\right) = 1\cdot(1-ab)\cdot 1\cdot(1-ab) = (1-ab)^2 \quad (\star)$$

da die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix gleich dem Produkt ihrer Diagonalelemente ist.

Ad (b):

- **Falls $ab \neq 1$:** Dann ist $\det(A) = (1-ab)^2 \neq 0 \iff \underline{\underline{\operatorname{rang}(A) = 4}}$.
- **Falls $ab = 1$:** Wir fahren mit den Umformungen in $(\star)$ fort und erhalten:

$$A \xrightarrow[(\star)]{ab=1} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -b & -b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[II\leftrightarrow III]{II+b\cdot III} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & ab-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{ab=1}{=} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  - **falls $b \neq 1$:**

$$A \xrightarrow{\text{siehe oben}} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{1-b}\cdot III} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\text{ZSF für } b \neq 1)$$

  Damit folgt für den Rang: $\operatorname{rang}(A) = \text{Anzahl der Stufen} = 3$.

– **falls $b = 1$:** Dann folgt aus $ab = 1$ auch $a = 1$, d.h.

$$A \xrightarrow{\text{siehe oben}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\text{ZSF für } b = 1)$$

Damit folgt für den Rang: rang(A)= Anzahl der Stufen = 2 .

Insgesamt also:

$$\operatorname{rang}(A) = \begin{cases} 4 & \text{falls} \quad ab \neq 1 \\ 3 & \text{falls} \quad ab = 1 \ \wedge \ b \neq 1 \\ 2 & \text{falls} \quad a = 1 = b \end{cases}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte):

Existieren Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{3\times3}$ mit $A \left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right) B = I_3$?

(Zur Erinnerung: I_3 ist die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{3\times3}$.)

$$\operatorname{rang}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=:C}\cdot B\Big) \leq \min\{\underbrace{\operatorname{rang}(C)}_{=2}, \operatorname{rang}(B)\} \leq 2$$

$$\operatorname{rang}(A\cdot C\cdot B) = \operatorname{rang}(A\cdot(C\cdot B)) \leq \min\{\operatorname{rang}(A), \underbrace{\operatorname{rang}(C\cdot B)}_{\leq 2}\} \leq 2 < 3 = \operatorname{rang}(I_3)$$

$\Rightarrow$ Nein!

Satz:

Seien $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times r}$. Dann gilt:

$$\operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B) - n \leq \operatorname{rang}(A\cdot B) \leq \min\{\operatorname{rang}(A), \operatorname{rang}(B)\}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte):

Existiert eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$, sodass die zum Produkt $\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right) A \left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)$ zugeordnete lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Nullabbildung ist?

$$B := \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rang}(A\cdot B) \geq \underbrace{\operatorname{rang}(A)}_{=3} + \underbrace{\operatorname{rang}(B)}_{=2} - 3 \geq 2$$

$$\Rightarrow \operatorname{rang}(B\cdot A\cdot B) = \operatorname{rang}(B\cdot(A\cdot B)) \geq \underbrace{\operatorname{rang}(B)}_{=2} + \underbrace{\operatorname{rang}(A\cdot B)}_{\geq 2} - 3 \geq 1 > 0 = \operatorname{rang}(0)$$

$\Rightarrow$ Nein!