Logik

Nikita Emanuel John Fehér 3793479, Lennox Heimann 3776050
Übungsleiter: Maurice Funk

17. Mai 2024

Hausaufgabe 4

Gegeben ist die aussagenlogische Formel

$$(x \land y) \land (x \land y \to \neg x).$$

Geben Sie eine erfüllbarkeitsäquivalente aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform an. Nutzen Sie dazu die Tseitintransformation aus der Vorlesung. Geben Sie alle Zwischenschritte an.

1) x_1 für $(x \land y)$
   x_2 für $\neg x$
   x_3 für $x \land y \to \neg x$
   x_4 für $(x \land y) \land (x \land y \to \neg x)$
2) $x_1 \leftrightarrow (x \land y)$
   $x_2 \leftrightarrow \neg x$
   $x_3 \leftrightarrow x_1 \to x_2$
   $x_4 \leftrightarrow x_1 \land x_3$
3) $x_4 \land (x_1 \leftrightarrow (x \land y)) \land (x_2 \leftrightarrow \neg x) \land (x_3 \leftrightarrow x_1 \to x_2) \land (x_4 \leftrightarrow x_1 \land x_3)$
4) $x_4 \land ((x \lor y \lor \neg x_1) \land (x \lor \neg y \lor \neg z) \land (\neg x \lor y \lor \neg x_1) \land (\neg x \lor \neg y \lor x_1)) \land ((x_2 \lor \neg\neg x) \land (\neg x_2 \lor \neg x)) \land ((x_1 \lor x_2 \lor x_3) \land (x_1 \lor \neg x_2 \lor x_3) \land (\neg x_1 \lor x_2 \lor \neg x_3) \land (\neg x_1 \lor \neg x_2 \lor x_3)) \land ((x_1 \lor x_3 \lor \neg x_4) \land (x_1 \lor \neg x_3 \lor \neg x_4) \land (\neg x_1 \lor x_3 \lor \neg x_4) \land (\neg x_1 \lor \neg x_3 \lor x_4))$

Hausaufgabe 5

Gegeben sind folgende Horn-Formeln:
$\varphi_1 = (\neg x_1 \lor \neg x_2 \lor x_3) \land (\neg x_3 \lor x_4 \lor \neg x_1) \land (x_1 \lor \neg x_2) \land (\neg x_4 \lor \neg x_5) \land x_2$,
$\varphi_2 = (\neg x_3 \lor \neg x_1 \lor \neg x_2) \land x_1 \land (\neg x_1 \lor x_4 \lor \neg x_2) \land (\neg x_4 \lor \neg x_5 \lor x_3) \land (x_5 \lor \neg x_1 \lor \neg x_4) \land x_2$.
Bestimmen Sie, ob die Formeln φ_1, φ_2 erfüllbar sind. Nutzen Sie dazu den Markierungsalgorithmus aus der Vorlesung. Geben Sie alle Zwischenschritte und (falls möglich) ein minimales Modell an.

φ_1:

$(\neg x_1 \lor \neg x_2 \lor x_3) \land (\neg x_3 \lor x_4 \lor \neg x_1) \land (x_1 \lor \neg x_2) \land (\neg x_4 \lor \neg x_5) \land x_2$
$(\neg x_1 \lor \neg x_2 \lor x_3) \land (\neg x_3 \lor x_4 \lor \neg x_1) \land (x_1 \lor \neg x_2) \land (\neg x_4 \lor \neg x_5) \land \underline{x_2}$
$(\neg x_1 \lor \neg \underline{x_2} \lor x_3) \land (\neg x_3 \lor x_4 \lor \neg x_1) \land (x_1 \lor \neg \underline{x_2}) \land (\neg x_4 \lor \neg x_5) \land \underline{x_2}$
$(\neg x_1 \lor \neg \underline{x_2} \lor x_3) \land (\neg x_3 \lor x_4 \lor \neg x_1) \land (\underline{x_1} \lor \neg \underline{x_2}) \land (\neg x_4 \lor \neg x_5) \land \underline{x_2}$
$(\neg \underline{x_1} \lor \neg \underline{x_2} \lor x_3) \land (\neg x_3 \lor x_4 \lor \neg \underline{x_1}) \land (\underline{x_1} \lor \neg \underline{x_2}) \land (\neg x_4 \lor \neg x_5) \land \underline{x_2}$
$(\neg \underline{x_1} \lor \neg \underline{x_2} \lor \underline{x_3}) \land (\neg x_3 \lor x_4 \lor \neg \underline{x_1}) \land (\underline{x_1} \lor \neg \underline{x_2}) \land (\neg x_4 \lor \neg x_5) \land \underline{x_2}$
$(\neg \underline{x_1} \lor \neg \underline{x_2} \lor \underline{x_3}) \land (\neg \underline{x_3} \lor x_4 \lor \neg \underline{x_1}) \land (\underline{x_1} \lor \neg \underline{x_2}) \land (\neg x_4 \lor \neg x_5) \land \underline{x_2}$
$(\neg \underline{x_1} \lor \neg \underline{x_2} \lor \underline{x_3}) \land (\neg \underline{x_3} \lor \underline{x_4} \lor \neg \underline{x_1}) \land (\underline{x_1} \lor \neg \underline{x_2}) \land (\neg x_4 \lor \neg x_5) \land \underline{x_2}$
$(\neg \underline{x_1} \lor \neg \underline{x_2} \lor \underline{x_3}) \land (\neg \underline{x_3} \lor \underline{x_4} \lor \neg \underline{x_1}) \land (\underline{x_1} \lor \neg \underline{x_2}) \land (\neg \underline{x_4} \lor \neg x_5) \land \underline{x_2}$
. ✓

Damit ist das minimale Modell $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

φ_2:

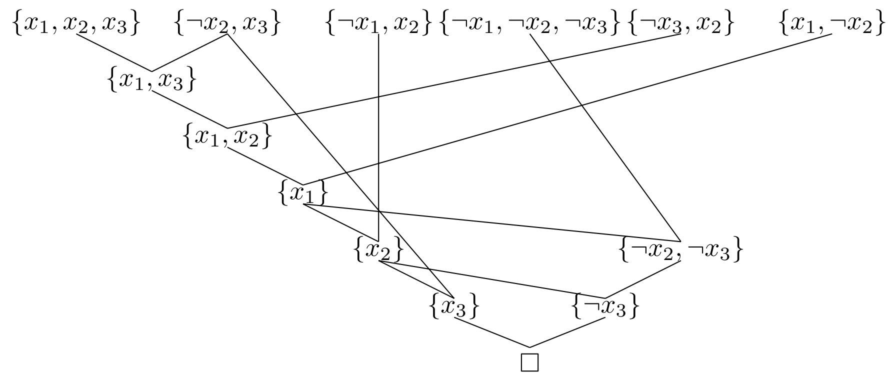
$(\neg x_3 \lor \neg x_1 \lor \neg x_2) \land x_1 \land (\neg x_1 \lor x_4 \lor \neg x_2) \land (\neg x_4 \lor \neg x_5 \lor x_3) \land (x_5 \lor \neg x_1 \lor \neg x_4) \land \underline{x_2}$
$(\neg x_3 \lor \neg x_1 \lor \neg \underline{x_2}) \land x_1 \land (\neg x_1 \lor x_4 \lor \neg \underline{x_2}) \land (\neg x_4 \lor \neg x_5 \lor x_3) \land (x_5 \lor \neg x_1 \lor \neg x_4) \land \underline{x_2}$
$(\neg x_3 \lor \neg x_1 \lor \neg \underline{x_2}) \land \underline{x_1} \land (\neg x_1 \lor x_4 \lor \neg \underline{x_2}) \land (\neg x_4 \lor \neg x_5 \lor x_3) \land (x_5 \lor \neg x_1 \lor \neg x_4) \land \underline{x_2}$
$(\neg x_3 \lor \neg \underline{x_1} \lor \neg \underline{x_2}) \land \underline{x_1} \land (\neg \underline{x_1} \lor x_4 \lor \neg \underline{x_2}) \land (\neg x_4 \lor \neg x_5 \lor x_3) \land (x_5 \lor \neg \underline{x_1} \lor \neg x_4) \land \underline{x_2}$
$(\neg x_3 \lor \neg \underline{x_1} \lor \neg \underline{x_2}) \land \underline{x_1} \land (\neg \underline{x_1} \lor \underline{x_4} \lor \neg \underline{x_2}) \land (\neg x_4 \lor \neg x_5 \lor x_3) \land (x_5 \lor \neg \underline{x_1} \lor \neg x_4) \land \underline{x_2}$
$(\neg x_3 \lor \neg \underline{x_1} \lor \neg \underline{x_2}) \land \underline{x_1} \land (\neg \underline{x_1} \lor \underline{x_4} \lor \neg \underline{x_2}) \land (\neg \underline{x_4} \lor \neg x_5 \lor x_3) \land (x_5 \lor \neg \underline{x_1} \lor \neg \underline{x_4}) \land \underline{x_2}$
$(\neg x_3 \lor \neg \underline{x_1} \lor \neg \underline{x_2}) \land \underline{x_1} \land (\neg \underline{x_1} \lor \underline{x_4} \lor \neg \underline{x_2}) \land (\neg \underline{x_4} \lor \neg \underline{x_5} \lor x_3) \land (x_5 \lor \neg \underline{x_1} \lor \neg \underline{x_4}) \land \underline{x_2}$
$(\neg x_3 \lor \neg \underline{x_1} \lor \neg \underline{x_2}) \land \underline{x_1} \land (\neg \underline{x_1} \lor \underline{x_4} \lor \neg \underline{x_2}) \land (\neg \underline{x_4} \lor \neg \underline{x_5} \lor x_3) \land (\underline{x_5} \lor \neg \underline{x_1} \lor \neg \underline{x_4}) \land \underline{x_2}$
$(\neg x_3 \lor \neg \underline{x_1} \lor \neg \underline{x_2}) \land \underline{x_1} \land (\neg \underline{x_1} \lor \underline{x_4} \lor \neg \underline{x_2}) \land (\neg \underline{x_4} \lor \neg \underline{x_5} \lor \underline{x_3}) \land (\underline{x_5} \lor \neg \underline{x_1} \lor \neg \underline{x_4}) \land \underline{x_2}$
$(\neg \underline{x_3} \lor \neg \underline{x_1} \lor \neg \underline{x_2}) \land \underline{x_1} \land (\neg \underline{x_1} \lor \underline{x_4} \lor \neg \underline{x_2}) \land (\neg \underline{x_4} \lor \neg \underline{x_5} \lor \underline{x_3}) \land (\underline{x_5} \lor \neg \underline{x_1} \lor \neg \underline{x_4}) \land \underline{x_2}$
✓

Da alle Variablen in einem Constraint markiert sind $(\neg \underline{x_3} \lor \neg \underline{x_1} \lor \neg \underline{x_2})$ ist die Formel nicht erfüllbar.

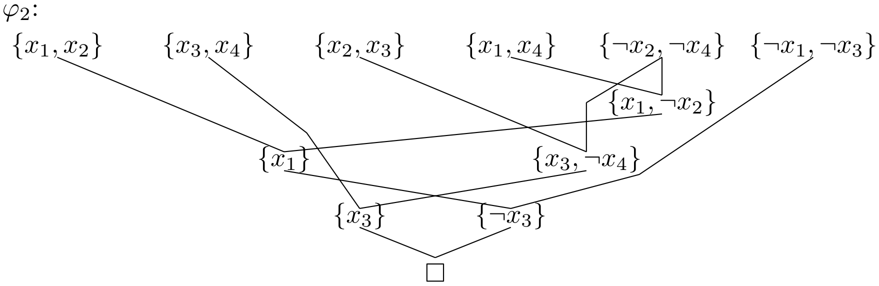
Hausaufgabe 6

Gegeben sind folgende aussagenlogische Formeln:
$\varphi_1 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_3 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2)$,
$\varphi_2 = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3)$.
Beweisen Sie, dass die aussagenlogischen Formeln φ_1, φ_2 unerfüllbar sind. Geben Sie dazu jeweils einen Resolutionsbeweis in grafischer Form (wie auf Folie 99 im ersten Foliensatz) an, der die leere Klausel $\Box$ ableitet.

φ_2:



φ_2:



Hausaufgabe 7

Geben Sie an welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie ihre Antworten in je einem Satz.
Für alle Belegungen V_1, V_2, V_3 (dargestellt als Mengen von Variablen) und Horn-Formeln φ_1, φ_2 gilt:

(a) Falls V_1 minimales Modell von φ_1 und φ_2 ist, so ist V_1 minimales Modell von $\varphi_1 \wedge \varphi_2$.

(b) Falls V_1 minimales Modell von φ_1 ist und $V_2 \subsetneq V_1$, so gilt $V_2| = \neg\varphi_1$.

(c) Falls $V_1| = \varphi_1, V_3| = \varphi_1$ und $V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3$, so gilt $V_2| = \varphi_1$.

(a) Wahr. Die Belegung V_1 erfüllt φ_1 und φ_2 jeweils, damit ist auch die Konjunktion $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ erfüllt, V_1 ist also ein Modell von $\varphi_1 \wedge \varphi_2$. Weiterhin ist V_1 ein minimales Modell von φ_1, wenn wir also eine Variable aus V_1 entfernen ist φ_1 nicht mehr erfüllt, damit ist auch die Konjunktion nicht mehr erfüllt, damit ist gezeigt, dass V_1 ein minimales Modell von $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ ist.

(b) Wahr. V_2 ist als echte Teilmenge eines minimalen Modells von φ_1 gerade kein Modell von φ_1. Somit wertet φ_1 mit der Belegung V_2 zu 0 aus, damit wertet $\neg\varphi_1$, also $\neg 0$ zu 1 aus. Entsprechend ist V_2 ein Modell von $\neg\varphi_1$.

(c) Wahr. V_2 ist eine Obermenge von V_1, daher besitzt es alle Variablen eines minimalen Modells. Weiterhin sind V_1 und V_2 Untermengen von V_3, da V_3 ein Modell ist, kann es keine Variablen enthaelten, die V_1 kein Modell machen würden, selbiges geht nach gleicher Argumentation auch für V_2. Somit ist V_2 ein Modell von φ_1.