Aufgabe:

(a) Zeigen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus, dass $\mathrm{ggT}(50,13)=1$ ist.

(b) Finden Sie $a,b\in\mathbb{Z}$, so dass $1=50\cdot a+13\cdot b$ gilt.

(c) Berechnen Sie $13^{-1}\in\mathbb{Z}/50\mathbb{Z}$

Lösung:

(a)
$$
\begin{aligned}
50 &= 3\cdot 13 + 11 &&(1)\\
13 &= 1\cdot 11 + 2 &&(2)\\
11 &= 5\cdot 2 + 1 &&(3)\\
2 &= 2\cdot 1 + 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \mathrm{ggT}(50,13)=1$ (der letzte von 0 verschiedene Rest)

(b)
$$
\begin{aligned}
1 &= 11-5\cdot 2 && (\text{nach } (3))\\
&= 11-5\cdot(13-1\cdot 11) && (\text{nach } (2))\\
&= 6\cdot 11-5\cdot 13 && (\text{Zusammenfassen})\\
&= 6\cdot(50-3\cdot 13)-5\cdot 13 && (\text{nach } (1))\\
&= \underbrace{6}_{=:a}\cdot 50+\underbrace{(-23)}_{=:b}\cdot 13 && (\text{Zusammenfassen})
\end{aligned}
$$

(c) Nach (b) gilt:

$$1 = 6\cdot\underbrace{50}_{=0 \text{ in } \mathbb{Z}/50\mathbb{Z}}+(-23)\cdot 13 = (-23+1\cdot 50)\cdot 13 = 27\cdot 13$$

$\Rightarrow 13^{-1}=27\in\mathbb{Z}/50\mathbb{Z}.$

Probe:

$$13\cdot 27 = 13\cdot 20+13\cdot 7 = 260+91 = 351 = 351+(-7)\cdot 50 = 1 \checkmark$$

Aufgabe

(a) Beweisen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus, dass der ggT von 72 und 13 gleich 1 ist.

(b) Finden Sie $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $72x + 13y = \mathrm{ggT}(72, 13)$.

(c) Geben Sie ein Element $b \in \{1, 2, \ldots, 71\}$ an, für das $13 \cdot b = 1$ in $\mathbb{Z}_{72}^*$ gilt.

Lösung

(a) Wir wenden den euklidischen Algorithmus auf die Zahlen 72 und 13 an:

$$
\begin{aligned}
72 &= 5 \cdot 13 + 7 && (1)\\
13 &= 1 \cdot 7 \;\; + 6 && (2)\\
7 &= 1 \cdot 6 \;\; + 1 && (3)\\
6 &= 6 \cdot 1 \;\; + 0 && (4)
\end{aligned}
$$

Es gilt also $\mathrm{ggT}(72, 13) = 1$.

(b)

$$
\begin{aligned}
1 &\overset{(3)}{=} 7 - 1 \cdot 6\\
&\overset{(2)}{=} 7 - 1 \cdot (13 - 1 \cdot 7) = -1 \cdot 13 + 2 \cdot 7\\
&\overset{(1)}{=} -1 \cdot 13 + 2 \cdot (72 - 5 \cdot 13) = 2 \cdot 72 - 11 \cdot 13
\end{aligned}
$$

(c) Nach (b) gilt $\mathrm{Rest}_{72}(13 \cdot (-11)) = 1$. Wegen $-11 + 72 = 61$ gilt auch $\mathrm{Rest}_{72}(13 \cdot 61) = 1$ und $b = 61$ ist die gesuchte Lösung.

Aufgabe

(a) Verwenden Sie den euklidischen Algorithmus, um den größten gemeinsamen Teiler von 132 und 55 zu bestimmen.

(b) Finden Sie $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $132x + 55y = \mathrm{ggT}(132, 55)$.

(c) Bestimmen Sie ein Element $z \in \mathbb{Z}_{132}$, für das $z \cdot_{132} 55 = 77$ erfüllt ist.

Lösung:

(a) Wir wenden den euklidischen Algorithmus auf die Zahlen 132 und 55 an:

$$
\begin{aligned}
132 &= 2 \cdot 55 + 22 \qquad (2.1)\\
55 &= 2 \cdot 22 + 11 \qquad (2.2)\\
22 &= 2 \cdot 11 + 0.
\end{aligned}
$$

Somit folgt

$$\mathrm{ggT}(132, 55) = 11.$$

(b) Mit Hilfe von (a) erhalten wir

$$\mathrm{ggT}(132, 55) = 11 \overset{(2.2)}{=} 55 - 2 \cdot 22 \overset{(2.1)}{=} 55 - 2 \cdot (132 - 2 \cdot 55) = (-2) \cdot 132 + 5 \cdot 55.$$

Somit können wir $x = -2$ und $y = 5$ wählen.

Bemerkung: Die Koeffizienten sind nicht eindeutig.

(c) Mit Hilfe von (b) erhalten wir

$$77 = 7 \cdot 11 \overset{(b)}{=} 7 \cdot ((-2) \cdot 132 + 5 \cdot 55) = (-14) \cdot 132 + 35 \cdot 55.$$

Daraus folgt

$$35 \cdot_{132} 55 = 77.$$

Also ist $z = 35 \in \mathbb{Z}_{132}$ eine Lösung.

Bemerkung: Die Lösungsgesamtheit ist gegeben durch

$$\{z \in \mathbb{Z}_{132} \mid z \cdot_{132} 55 = 77\} = \{11, 23, 35, 47, 59, 71, 83, 95, 107, 119, 131\}.$$

Aufgabe

(a) Verwenden Sie den euklidischen Algorithmus um den größten gemeinsamen Teiler von 66 und 39 zu bestimmen.

(b) Ermitteln Sie $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $66x + 39y = \operatorname{ggT}(66, 39)$.

(c) Bestimmen Sie ein Element $z \in \mathbb{Z}_{66}$, für das $z \cdot_{66} 39 = 15$ erfüllt ist.

(a)
$$\begin{aligned}
&(1) \quad 66 = 1 \cdot 39 + 27 \\
&(2) \quad 39 = 1 \cdot 27 + 12 \\
&(3) \quad 27 = 2 \cdot 12 + \boxed{3} \\
&(4) \quad 12 = 4 \cdot 3 + 0
\end{aligned}$$
Also ist $\operatorname{ggT}(66, 39) = 3$.

(b) Es gilt
$$\begin{aligned}
\operatorname{ggT}(66, 39) = 3 &\overset{(3)}{=} 27 - 2 \cdot 12 \overset{(2)}{=} 27 - 2(39 - 1 \cdot 27) = -2 \cdot 39 + 3 \cdot 27 \\
&\overset{(1)}{=} -2 \cdot 39 + 3 \cdot (66 - 1 \cdot 39) = 3 \cdot 66 - 5 \cdot 39
\end{aligned}$$
Also $x = 3, y = -5$.

(c) Nach (b) gilt $(-5) \bullet_{66} 39 = 3$ und damit $(-25) \bullet_{66} 39 = 15$. Wähle also $z = -25 = 41 \in \mathbb{Z}_{66}$.