10-201-2108-1.VL01 Logik – Übungsblatt 6

Lovis Rentsch

2025-06-28

in Zusammenarbeit mit: Karl Zschiebsch

Problem 1:

1.1

	NNF	BF	PNF	SNF
$\neg\forall x\exists y(P(x,y) \land \forall z\neg R(z,y))$		✓		
$\forall x\neg P(x) \lor (\exists x R(x,y) \land \forall z\neg R(z,y))$	✓	✓		✓
$\exists y\forall x\neg(P(x,y) \lor \neg Q(y))$		✓	✓	
$\forall x\forall y(\neg P(x,y) \lor \neg Q(y))$	✓	✓	✓	✓

1.2

$$\begin{aligned}\forall x\exists y\neg\forall z P(f(x,y),z) \land \neg\forall x\exists z Q(x,z,y) &\equiv \forall x\exists y\exists z\neg P(f(x,y),z) \land \exists x\exists z\neg Q(x,z,y)\\ &\equiv \forall x\exists y\exists z\neg P(f(x,y),z) \land \exists u\exists v\neg Q(u,v,w)\\ &\equiv \forall x\exists y\exists z\exists u\exists v\neg P(f(x,y),z) \land \neg Q(u,v,w)\end{aligned}$$

1.3

$$\begin{aligned}\exists x\forall y\forall z\exists u\exists v(P(y,z,u) \land Q(x,u,v)) &\equiv \forall y\forall z\exists u\exists v(P(y,z,u) \land Q(c,u,v))\\ &\equiv \forall y\forall z\exists v(P(y,z,g(y,z)) \land Q(c,g(y,z),v))\\ &\equiv \forall y\forall z(P(y,z,g(y,z)) \land Q(c,g(y,z),h(y,z)))\end{aligned}$$

Problem 2:

2.1

$$\varphi_1 = P(f(x),z) \land Q(g(z,x))$$
$$\{c, f(c), g(c,c), f(f(c)), g(f(c),c), g(c,f(c))\} \in D(\varphi_1)$$

2.2

$$\varphi_2 = \forall x\forall y\forall z(P(x,c) \land (Q(d) \to P(y,z)))$$

2.2.a

Es gibt die Herbrand-Strukturen P,Q,P.

2.2.b

Konstanten c und d $\Rightarrow U^{\mathfrak{A}} = \{c,d\}$

$$P^{\mathfrak{A}} = \{(c,c)\}$$

$$Q^{\mathfrak{A}} = \{d\}$$

2.2.c

$$P^{\mathfrak{B}} = \{(c,c),(d,c)\}$$
$$Q^{\mathfrak{B}} = \{c\}$$

2.3

Für $t \in D(\varphi_3)$ ist $P(t, f(t))$ $(t_1 = t, t_2 = f(t))$ und es gilt $f^{\mathfrak{C}} = f(t)$ also auch $f^{\mathfrak{C}}(t) = f(t) = t_2$. Wir sehen dass $(t, f(t)) \in P^{\mathfrak{C}}$ also ist C ein Herbrand-Modell.

2.4

Problem 3:

3.1

$$\varphi = \forall x \forall y (\neg R(x, y) \land R(c, f(c)))$$

3.1.a

$$D(\varphi) = \{c, f(c), f(f(c)), ...\}$$

$$\begin{gathered} \{ \\ (\neg R(c, c) \land R(c, f(c))), \\ (\neg R(c, f(c)) \land R(c, f(c))), \\ (\neg R(f(c), c) \land R(c, f(c))), \\ (\neg R(f(c), f(c)) \land R(c, f(c))), \\ \} \in E(\varphi) \end{gathered}$$

3.1.b

Ja er terminiert mit “φ unerfüllbar”.

3.2

Wir wissen, dass φ erfüllbar ist genau dann wenn φ ein Herbrand-Modell hat. Wenn wir nun die Allgemeingültigkeit zeigen wollen, riecht es zu zeigen, dass $\neg\varphi$ unerfüllbar ist, also kein Herbrand-Modell hat.