Satz und Def.:

Sei V ein K-Vektorraum und sei $U \leq V$ ein Unterraum.

Für alle $a, b \in V$ def. wir: $a \sim b :\Leftrightarrow a - b \in U$

Dann gilt:

$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf V und für alle $a \in V$ gilt $[a] = a + U = \{a + u \mid u \in U\}$

$V/U := \{[a] \mid a \in V\}$

Bew.:

Seien $a, b, c \in V$. Dann gilt:

(i) $a \sim a \Leftrightarrow a - a \in U \Leftrightarrow 0 \in U$ (w) da U ein Unterraum ist.

$\Rightarrow \sim$ ist reflexiv.

(ii) $a \sim b \Rightarrow a - b \in U \overset{U \text{ Unterraum}}{\Rightarrow} -(a-b) \in U \Rightarrow b - a \in U \Rightarrow b \sim a$

$\Rightarrow \sim$ ist symmetrisch

(iii) $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a - b \in U \wedge b - c \in U \overset{U \text{ Unterraum}}{\Rightarrow} (a-b) + (b-c) \in U$

$\Rightarrow a - c \in U \Rightarrow a \sim c$

$\Rightarrow \sim$ ist transitiv.

(i) - (iii) $\Rightarrow \sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf V

$[a] = \{b \in V \mid b \sim a\} = \{b \in V \mid b - a \in U\} = \{b \in V \mid \exists u \in U : b - a = u\}$

$= \{b \in V \mid \exists u \in U : b = a + u\} = \{a + u \mid u \in U\} = a + U.$ $\square$

Satz und Def.:

Sei V ein K-Vektorraum und sei $U \leq V$ ein Unterraum.

V/U ist mit den Verknüpfungen

$+ : V/U \times V/U \to V/U, \quad [a] + [b] := [a + b]$

$\cdot : K \times V/U \to V/U, \quad \lambda \cdot [a] := [\lambda \cdot a]$

ein K-Vektorraum. V/U heißt Quotientenvektorraum. $[0] = 0 + U = U$ ist das Nullelement.

Die Abb.: $\pi: V \to V/U$, $\pi(v) = [v]$ ist linear und surjektiv und es gilt $\mathrm{Kern}(\pi) = U$.

Insbes. gilt: $\dim(V) = \dim(U) + \dim(V/U)$

Bew (für den letzten Teil)

- π ist linear (klar) ✓
- π ist surjektiv:

  Sei $[v] \in V/U$. Dann gilt $\pi(v) = [v]$ ✓
- $\mathrm{Kern}(\pi) = \{v \in V \mid \pi(v) = 0\} = \{v \in V \mid [v] = [0]\} = \{v \in V \mid v \sim 0\}$

  $= \{v \in V \mid v - 0 \in U\} = U$ ✓
- Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen gilt:

  $\dim(V) = \dim \mathrm{Kern}(\pi) + \dim(\mathrm{Bild}(\pi)) = \dim(U) + \dim(V/U)$ ✓

Satz (Homomorphiesatz)

Seien V und W K-Vektorräume sei $U \leq V$ ein Unterraum und sei $\overline{V} = V/U$.

Sei $\pi : V \to \overline{V}$ def. durch $\pi(v) = [v]$.

Sei $f : V \to W$ linear mit $U \leq \mathrm{Kern}(f)$.

Dann gilt:

Es ex. eine eindeutig bestimmte lineare Abb. $\overline{f} : \overline{V} \to W$ mit $f = \overline{f} \circ \pi$.

Für diese Abb. gilt:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & W \\ & \overline{V} \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

(1) $\overline{f}$ ist injektiv $\Leftrightarrow U = \mathrm{Kern}(f)$

(2) $\mathrm{Bild}(\overline{f}) = \mathrm{Bild}(f)$

Kor. (Isomorphiesatz)

Seien V und W K-Vektorräume und sei $f : V \to W$ linear.

Dann gilt:

Es ex. ein Isomorphismus $\overline{f} : V/\mathrm{Kern}(f) \to \mathrm{Bild}(f)$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & W \\ & V/\mathrm{Kern}(f) \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Insbes. gilt:

Ist f surjektiv, so ex. ein Isomorphismus $\overline{f} : V/\mathrm{Kern}(f) \to W$.