UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Vorlesung 10 - Verbände

Diskrete Strukturen (WS 2024-25)

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

Wo sind wir im Modul?

- Gemacht:
  - Logik
  - Mengenlehre
  - Insbesondere: Relationen, Äquivalenzrelationen, Funktionen, Ordnungsrelationen, Kardinalität
- Ab jetzt: Verschiedene Strukturen die in Anwendungen in Mathematik und Informatik wichtig sind.

1. Verbände

2. Charakterisierung von Verbänden durch die Operationen $\vee$ und $\wedge$

- Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
- Das Supremum $\sup X$ von X ist die kleinste obere Schranke für X, also das kleinste Element von $\uparrow X$.
- Das Infimum $\inf X$ von X ist die größte untere Schranke für X, also das größte Element von $\downarrow X$.
- Suprema/Infima existieren nicht immer. Als Beispiel betrachten wir $\mathbb{R}$ mit der üblichen Ordnungsrelation. Dann $\mathbb{R}$ selbst hat kein Supremum und kein Infimum.
- Noch ein Beispiel: Die Menge M von allen endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, mit der Teilmengerelation $\subseteq$. Dann hat M kein Supremum in M.
- Sei M eine Menge, und sei $X \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$. Dann X hat Supremum und Infimum in $\mathcal{P}(\mathcal{M})$, und es gilt $\sup X = \bigcup X$, $\inf X = \bigcap X$.
- Dieser Satz motiviert die folgende Notation: Sei $(M, \subseteq)$ eine geordnete Menge, und $x, y \in M$. Dann schreiben wir $x \vee y := \sup(\{x, y\})$, $x \wedge y := \inf(\{x, y\})$.

- $(M, \subseteq)$ heißt Verband gdw. für alle $x, y \in M$ gilt dass $x \vee y$ und $x \wedge y$ existieren.
- $(M, \subseteq)$ heißt vollständiger Verband gdw. für alle $X \subseteq M$ gilt dass $\sup X$ und $\inf X$ existieren.

Beispiele

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ und $(\mathbb{R}, \leq)$ sind alle Verbände. Sie sind alle nicht vollständig.
- Für jede Menge M gilt dass $(\mathcal{P}(\mathcal{M}), \subseteq)$ ist ein vollständiger Verband.
- Sei $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ die Menge von allen endlichen Mengen. Dann $\mathcal{Q}$ is ein Verband. $\mathcal{Q}$ ist vollstandig gdw. M ist eine endliche Menge.
- Jeder vollständiger Verband $\mathcal{M}$ hat das kleinste und das grosste Element. Sie sind jeweils $\inf \mathcal{M}$ und $\sup \mathcal{M}$.

Satz. Jeder endliche Verband ist vollständig.

Beweis.

- Sei $(M, \preceq)$ ein Verband. Wir beweisen durch Induktion über $n = |X|$: Für jede endliche nicht-leere Teilmenge $X \subseteq M$ existiert $\sup X$.
- (Ähnlich mit $\inf X$).
- **Induktionsanfang:** Sei $n = 1 = |X|$ und $x \in X$. Dann ist $x \preceq x$ und für alle oberen Schranken z von X gilt $x \preceq z$. Deswegen ist x die kleinste obere Schranke, also $x = \sup X$.
- Sei $n \in \mathbb{N}_+$ beliebig.
  - **Induktionshypothese:** Für jedes $X \subseteq M$ mit $|X| = n$ existiert $\sup X$.
  - **Induktionsbehauptung:** Für jedes $X \subseteq M$ mit $|X| = n + 1$ existiert $\sup X$.

Satz. Jeder endliche Verband ist vollständig.

Beweis. (Fortzetzung)

- Sei $X \subseteq M$ mit $|X| = n+1$ und $z \in X$.
- Gemäß Induktionshypothese existiert ein $y = \sup(X \setminus \{z\})$.
- Wir zeigen jetzt, dass $z \vee y = \sup X$.
  - Für alle $x \in X$ gilt $x \preceq z \vee y$. Deswegen ist $z \vee y$ eine obere Schranke für X.
  - Sei $m \in M$ eine obere Schranke für X, so dass für alle $x \in X$ gilt $x \preceq m$. Also auch $z \preceq m$ und $y \preceq m$. Damit folgt auch $z \vee y \preceq m$, also ist $z \vee y$ die kleinste obere Schranke.
  - Dies zeigt dass $z \vee y = \sup X$. $\square$

1. Verbände

2. Charakterisierung von Verbänden durch die Operationen $\vee$ und $\wedge$

Satz. Für jeden Verband $(M, \geq)$ und alle $x, y, z \in M$ gelten die folgende Eigenschaften.

- $x \vee y = y \vee x$ und $x \wedge y = y \wedge x$ — Kommutativität
- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ und $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ — Assoziativität
- $x \vee (x \wedge y) = x$ und $x \wedge (x \vee y) = x$ — Absorption

Beweis. Als Beispiel, beweisen wir dass $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

- $x \wedge (y \wedge z) \geq x$ und $x \wedge (y \wedge z) \geq y \wedge z$. Also $x \wedge (y \wedge z) \geq x$ und $x \wedge (y \wedge z) \geq y$ und $x \wedge (y \wedge z) \geq z$.
- Damit sehen wir $x \wedge (y \wedge z) \geq x \wedge y$, und deswegen

$$x \wedge (y \wedge z) \geq (x \wedge y) \wedge z.$$

- Ähnlich zeigen wir $(x \wedge y) \wedge z \geq x \wedge (y \wedge z)$. Deswegen $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$, Ein Verband $(M, \subseteq)$ ist distributiv gdw. für alle $x, y, z \in M$ gilt

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

und

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

Satz. Jede total geordnete Menge $(M, \preceq)$ ist ein distributiver Verband.

Beweis.

- Wir müssen zeigen dass $\vee$ und $\wedge$ existieren, und dass die Distributivität gilt
- **Supremum:** Für alle $x, y \in M$ gilt $x \preceq y$ oder $y \preceq x$.
- Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (oBdA) sei $x \preceq y$. Dann ist y eine obere Schranke für $\{x, y\}$. Sei z eine beliebige obere Schranke für $\{x, y\}$. Dann gilt $y \preceq z$ und damit ist y die kleinste obere Schranke für $\{x, y\}$. D.h. $y = x \vee y$.
- **Infimum:** Ähnlich.

Satz. Jede total geordnete Menge $(M, \preceq)$ ist ein distributiver Verband.

Beweis. (Fortzetzung.)

- **Distributivität:** Seien $x, y, z \in M$. Wir zeigen z.B. dass $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Ordnung	$x \wedge (y \vee z)$	$(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
$x \preceq y \preceq z$	x	x
$x \preceq z \preceq y$	x	x
$y \preceq x \preceq z$	x	x
$y \preceq z \preceq x$	z	z
$z \preceq x \preceq y$	x	x
$z \preceq y \preceq x$	y	y

$\square$

- Wir betrachten jetzt die folgende Frage: Inwieweit erlauben die Operationen $\vee$ und $\wedge$ die Wiederherstellung der Ordnungsrelation?
- Wir betrachten also eine Menge M zusammen mit zwei Funktionen $\vee, \wedge\colon M \times M \to M$.
- Der nächste Satz sagt, dass, wenn wir annehmen, dass diese Operationen sind kommutativ, assoziativ und abssorptiv, dann stammen sie aus einer Ordnungsrelation stammen.

Satz. Sei $(M, \sqcup, \sqcap)$ eine Menge zusammen mit zwei Funktionen $\sqcup, \sqcap \colon M \times M \to M$. Wir nehmen an, dass für alle $x, y, z \in M$ das Folgende gilt:

- $x \sqcup y = y \sqcup x$ und $x \sqcap y = y \sqcap x$ (Kommutativität)
- $x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z$ und $x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$ (Assoziativität)
- $x \sqcup (x \sqcap y) = x$ und $x \sqcap (x \sqcup y) = x$ (Absorption)

Dann ist $(M, \preceq)$ ein Verband, wobei

$$\preceq \; = \big\{(x, y) \in M \times M \mid x = x \sqcap y\big\} \; .$$

Beweis. Für alle $x, y \in M$ definieren wir $x \preceq y$ gdw. $x = x \sqcap y$. Wir beweisen zunächst die Eigenschaften einer Ordnungsrelation.

- **Reflexivität:** Für jedes $x \in M$ gilt nach zweimaligem Anwenden der Absorption

$$x = x \sqcap \big(x \sqcup (x \sqcap x)\big) = x \sqcap x \quad ,$$

  also $x \preceq x$.

- **Antisymmetrie:** Seien $x \preceq y$ und $y \preceq x$. Es gelten $x = x \sqcap y$ und $y = y \sqcap x$.

  Mit Hilfe der Kommutativität gilt dann

$$x = x \sqcap y = y \sqcap x = y \quad .$$

Beweis. (Fortsetzung)

- **Transitivität:** Seien $x \preceq y$ und $y \preceq z$. Es gelten $x = x \sqcap y$ und $y = y \sqcap z$. Unter Nutzung der Assoziativität erhalten wir

$$x = x \sqcap y = x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap z$$

und damit $x \preceq z$.

Wir beweisen nun noch die Existenz der Suprema (Infima ähnlich). Seien $x, y \in M$. Wir zeigen, dass $x \sqcup y$ das Supremum von $\{x, y\}$ ist.

- **Obere Schranke:** Es gilt $x = x \sqcap (x \sqcup y)$ und damit $x \preceq x \sqcup y$. Ebenso gilt $y = y \sqcap (y \sqcup x)$ und damit $y \preceq x \sqcup y$,

Beweis. (Fortsetzung)

- **Kleinste obere Schranke:** Sei $z \in M$ mit $x \preceq z$ und $y \preceq z$, also $x = x \sqcap z$ und $y = y \sqcap z$. Wir folgern zunächst mit Absorption und Kommutativität

$$x \sqcup z = (x \sqcap z) \sqcup z = z \quad \text{und}$$
$$y \sqcup z = (y \sqcap z) \sqcup z = z \quad .$$

Damit ergibt sich nun

$$\begin{aligned}(x \sqcup y) \sqcap z &= (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z) \\ &= (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup (y \sqcup z)) \\ &= (x \sqcup y) \sqcap ((x \sqcup y) \sqcup z) = (x \sqcup y)\end{aligned}$$

und damit $(x \sqcup y) \preceq z$. $\square$

UNIVERSITÄT LEIPZIG

VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT!

Łukasz Grabowski
Mathematisches Institut

grabowski@math.uni-leipzig.de