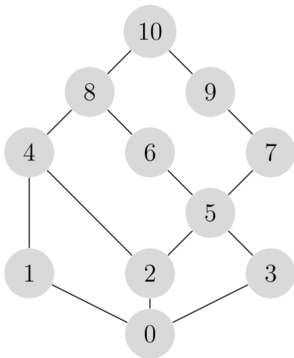
# Diskrete Strukturen (WS 2024-25) - Halbserie 10

---

**10.1** **[4]**

Gegeben sei der folgende **Verband** $(P_4, \preceq_4)$, dargestellt als Hasse-Diagramm:

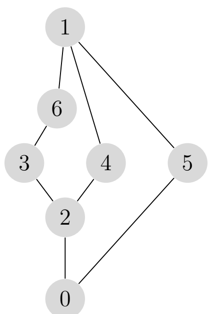
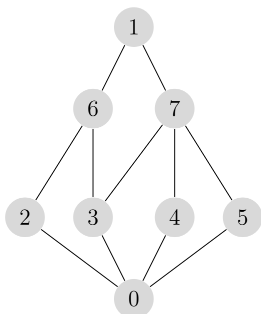
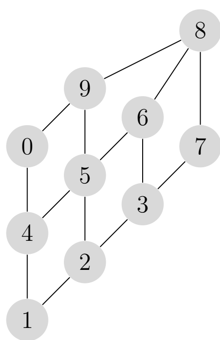


1. Geben Sie die Menge aller **Komplemente**
   (a) von 1,
   (b) von 4,
   (c) von 7 an.
2. Ist $(P_4, \preceq_4)$ eine **Boolesche Algebra**? Begründen Sie Ihre Antwort.

---

**10.2** **[3]**

Gegeben seien die folgenden **Verbände**, dargestellt als Hasse-Diagramm:

$(P_1, \preceq_1)$:  $(P_2, \preceq_2)$:  $(P_3, \preceq_3)$: 

Zeigen Sie mit Hilfe von Theorem 9.3.3, dass sie nicht distributiv sind. Geben Sie dafür jeweils eine Unterstruktur an, die zu $M_3$ oder $N_5$ isomorph ist.

---

**10.3** **[3]**

Wir definieren für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Teiler von $n$

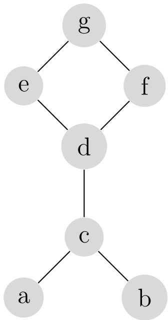
$$T_n = \{t \in \mathbb{N} \colon t \mid n\}.$$

Geben Sie für die Menge $M = \{1, 2, 3\}$ einen **Isomorphismus** $\varphi$ von $(T_{2023}, |)$ nach $(\mathcal{P}(M) \setminus \{\{3\}, \{1, 3\}\}, \subseteq)$ an.

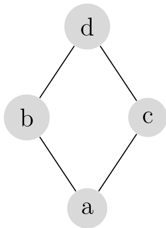
---

**10.4** Gegeben seien die folgenden Ordnungsrelationen, dargestellt als Hasse-Diagramm:

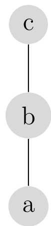
$R_5$ :



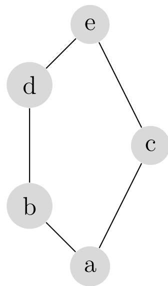

$R_6$ :




$R_7$ :




$R_8$ :




Sind die entsprechenden teilweise geordneten Mengen $(M_5, R_5), (M_6, R_6), (M_7, R_7)$ und $(M_8, R_8)$ **Boolesche Algebren**? Begründen Sie Ihre Antwort.

---

**10.5** Sei $(M, \preceq)$ eine **Boolesche Algebra** und $x, y \in M$.
Beweisen Sie:

$$\text{Wenn } x \preceq y, \text{ dann } y^c \preceq x^c.$$

---

**10.6** Sei $(M, \preceq)$ eine Boolesche Algebra und $x, y \in M$.
Zeigen Sie dass es gilt $(x \wedge y)^c = x^c \vee y^c$.