Wahrscheinlichkeitstheorie Übung 2

Lennox Heimann, Merlin Hofmann, Nikita Emanuel John Fehér, Nataliia Kotsiuba

November 18, 2024

16/16

Matrikelnummer Lennox: 3776050
Matrikelnummer Merlin: 3792248
Matrikelnummer Nikita: 3793479
Matrikelnummer Nataliia: 3738575

4/4

1.
$$\frac{\mathbb{P}(A|B)\cdot\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \overset{Def2.2}{=} \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}\cdot\frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} \overset{Def2.2}{=} \mathbb{P}(B|A)$$

✓

$$\frac{\mathbb{P}(A|B)\cdot\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \overset{Satz2.3b)}{=} \frac{\mathbb{P}(A|B)\cdot\mathbb{P}(A)}{\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A|B_i)\cdot\mathbb{P}(B_i)}$$

✓

□

2. Der Kandidat wählt zunächst Tür 1. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Auto hinter Tür 1 befindet, beträgt:

4/4

$$P(\text{Auto hinter Tür 1}) = \frac{1}{3}$$

Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Auto hinter einer der beiden anderen Türen (Tür 2 oder Tür 3) befindet:

$$P(\text{Auto hinter Tür 2 oder 3}) = \frac{2}{3}$$

Nachdem der Showmaster gezeigt hat, dass sich hinter Tür 3 eine Ziege befindet, steigt die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Auto hinter Tür 2 befindet, auf $\frac{2}{3}$ (anfänglich war die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Auto hinter einer der beiden verbleibenden Türen befindet, $\frac{2}{3}$, aber jetzt wissen wir, dass hinter Tür 3 definitiv kein Auto ist). Gleichzeitig bleibt die Wahrscheinlichkeit für Tür 1 bei $\frac{1}{3}$. Daraus folgt, dass es für den Spieler vorteilhaft ist, die Tür zu wechseln.

4/4

3. (a) $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)|$ Werte einsetzen
$0.08 = 0.2 - \mathbb{P}(A \cap B)| + (A \cap B)| - 0.08$
$\mathbb{P}(A \cap B) = 0.12$
$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = 0.2 \cdot 0.6 = 0.12$
Es folgt, dass A und B stochastisch unabhängig sind.

(b) $\mathbb{P}(A \cap B \cap C\} = \mathbb{P}(A \cap B) \cdot \mathbb{P}(C)|$ Werte einsetzen
$\frac{3}{50} = \frac{3}{25} \cdot \mathbb{P}(C)| \cdot \frac{25}{3}$
$\underline{\frac{1}{2} = \mathbb{P}(C)}$

(c)

$$(A \cap B): \ 0.12 = 0.2 \cdot 0.6 \checkmark$$
$$(B \cap C): \ 0.3 = 0.5 \cdot 0.5 \checkmark$$
$$(A \cap C): \ 0.1 = 0.2 \cdot 0.5 \checkmark$$
$$(A \cap B \cap C): \ 0.06 = 0.2 \cdot 0.6 \cdot 0.5 \checkmark$$

Es folgt, dass A, B und C stochstisch unabhängig sind.

(d) C und D sind stochastisch unabhängig gdw. $\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}(C) \cdot \mathbb{P}(D)$
Damit: $\mathbb{P}(C \cap D) = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(D)$
C und D sind disjunkt, also: $C \cap D = \varnothing$
$\because \mathbb{P}(\varnothing) = 0 \therefore \mathbb{P}(C \cap D) = 0$
Wir erhalten: $0 = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(D) \therefore \underline{\mathbb{P}(D) = 0}$

4/4

4. (a) $\Omega = \{(x, y) : x, y \in \{1, 2, .., 6\}\}$
$$p : \Omega \to [0, 1], \forall \omega \in \Omega p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{36}$$

(b) $A = \{(x, y) \in \Omega : 2|x\}$
$B = \{(x, y) \in \Omega : 2|(x + y)\}$
$C = \{(x, y) \in \Omega : y \in \mathbb{P}\}$

Etwas irreführend, die Primzahlen mit $\mathbb{P}$ zu bezeichnen, wenn $\mathbb{P}$ sonst die ganze Zeit Wahrscheinlichkeiten beschreibt

(c)
- $|A| = |\{2, 4, 6\}| \cdot |\{1, 2, .., 6\}| = 18 = \frac{1}{2}|\Omega| \therefore \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$
- $2|(x + y)$ gdw. $(2|x \iff 2|y)$
$\therefore |B| = |\{2, 4, 6\}|^2 + |\{1, 3, 5\}|^2 = 18 = \frac{1}{2}|\Omega| \therefore \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$
- $|C| = |\{1, 2, .., 6\}| \cdot |\{2, 3, 5\}| = 18 = \frac{1}{2}|\Omega| \therefore \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$
- $|(A \cap B)| = |\{2, 4, 6\}|^2 = 9 = \frac{1}{4}\Omega \therefore \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$
- $|(A \cap C)| = |\{2, 4, 6\}| \cdot |\{2, 3, 5\}| = 9 = \frac{1}{4}\Omega \therefore \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4}$
- $|(B \cap C)| = |\{2, 4, 6\}| \cdot |\{2\}| + |\{1, 3, 5\}| \cdot |\{3, 5\}| = 9 = \frac{1}{4}\Omega$
$\therefore \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4}$
- $|(A \cap B \cap C)| = |\{2, 4, 6\}| \cdot |\{2\}| = 3 = \frac{1}{12}\Omega$
$\therefore \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{12}$

Es folgt:
$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$
$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$
$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$
$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$
Somit ergibt sich, dass die Ergebnismengen paarweise stochastisch unabhängig, aber nicht stochastisch unabhängig sind.