Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

1. Organisatorisches und Einführung

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

10. April 2025
Leipzig

Organisatorisches

Vorlesung

Prof. Dr. Ringo Baumann
Paulinum, Raum P819
baumann@informatik.uni-leipzig.de

donnerstags, 13:00 c.t., Hs 9
12 Termine: 10.04., 17.04., 24.04., ~~01.05.~~ Feiertag, 08.05., 15.05., 22.05., ~~29.05.~~ Feiertag, 05.06., 12.06., 19.06., 26.06., 03.07., 10.07.

Folien verfügbar in moodle
Beispiele / Beweise teilweise als Tafelanschrieb

Organisatorisches

Übungen

Moritz Schönherr
schoenherr@informatik.uni-leipzig.de

Jamie Keitsch
keitsch@studserv.uni-leipzig.de

8 Übungsgruppen, jeweils 6 Termine (modulo Feiertage)

Gruppe a: montags (B-Woche), 09:00 c.t., SG 3-12
28.04., 12.05., 26.05., ~~09.06.~~ Feiertag, 23.06., 07.07.

Gruppe b: montags (A-Woche), 09:00 c.t., SG 3-12
~~21.04.~~ Feiertag, 05.05., 19.05., 02.06., 16.06., 30.06.

Organisatorisches

Übungen

Gruppe c: dienstags (B-Woche), 11:00 c.t., SG 2-14
29.04., 13.05., 27.05., 10.06., 24.06., 08.07.

Gruppe d: dienstags (A-Woche), 11:00 c.t., SG 2-14
22.04., 06.05., 20.05., 03.06., 17.06., 01.07.

Gruppe e: mittwochs (B-Woche), 09:00 c.t., SG 3-14
30.04., 14.05., 28.05., 11.06., 25.06., 09.07.

Gruppe f: mittwochs (A-Woche), 09:00 c.t., SG 3-14
23.04., 07.05., 21.05., 04.06., 18.06., 02.07.

Gruppe g: mittwochs (B-Woche), 15:00 c.t., SG 3-12
30.04., 14.05., 28.05., 11.06., 25.06., 09.07.

Gruppe h: mittwochs (A-Woche), 15:00 c.t., SG 3-12
23.04., 07.05., 21.05., 04.06., 18.06., 02.07.

Organisatorisches

Übungsaufgaben

6 Übungsblätter via moodle
Ausgabe: 10.04., 24.04., 08.05., 22.05., 05.06., 19.06.
Bearbeitung: in festen 2er Gruppen oder alleine
Abgabe: via moodle, spätestens zum 20.04., 04.05., 18.05., 01.06., 15.06., 29.06.

Prüfungs(vor)leistung

1-stündige Klausur am Ende des Semesters
Klausurzulassung: 50% der Punkte der Übungsaufgaben

Fragen?

Vorwissen

VL "Diskrete Strukturen" ist eine sehr gute Grundlage

Menge ist Zusammenfassung einzelner Objekte, sog. Elemente

- $M = \{A_1, 4, v\}$ (extensional)
- $N = \{A_i \mid i = 1 \text{ oder } 4 \leq i \leq 6\}$ (intensional)
- $4 \in M, \quad 4 \notin N$ (Elementbeziehung)
- Falls jedes Element von S auch Element von T ist, schreiben wir $S \subseteq T$ (Teilmengenbeziehung)
- Es gilt: $S = T$ gdw. $S \subseteq T$ und $T \subseteq S$ (Gleichheit)

Grundlegende Operationen auf Mengen

- $S \cup T = \{a \mid a \in S \text{ oder } a \in T\}$ (Vereinigung)
- $S \cap T = \{a \mid a \in S \text{ und } a \in T\}$ (Schnitt)
- $S \setminus T = \{a \mid a \in S \text{ und } a \notin T\}$ (Differenz)
- $2^T = \{S \mid S \subseteq T\}$ (Potenzmenge)

Vorwissen

Menge ist Zusammenfassung einzelner Objekte, sog. Elemente

- $M = \{A_1, 4, v\}$ (extensional)
- $N = \{A_i \mid i = 1 \text{ oder } 4 \leq i \leq 6\}$ (intensional)
- $4 \in M, \quad 4 \notin N$ (Elementbeziehung)
- Falls jedes Element von S auch Element von T ist, schreiben wir $S \subseteq T$ (Teilmengenbeziehung)
- Es gilt: $S = T$ gdw. $S \subseteq T$ und $T \subseteq S$ (Gleichheit)

Grundlegende Operationen auf Mengen

- $M \cup N = \{A_1, 4, v, A_4, A_5, A_6\}$ (Vereinigung)
- $M \cap N = \{A_1\}$ (Schnitt)
- $M \setminus N = \{4, v\}$ (Differenz)
- $2^M = \{\emptyset, \{A_1\}, \{4\}, \{v\}, \{A_1, 4\}, \{A_1, v\}, \{4, v\}, M\}$ (Potenzmenge)

Vorwissen

Produkt, Relation, Funktion

- $S \times T = \{(s,t) \mid s \in S, t \in T\}$ (Produkt)
- $M \times N = \{(A_1, A_1), (A_1, A_4), (A_1, A_5), (A_1, A_6), \ldots, (v, A_6)\}$
- $(v, A_6) \neq (A_6, v)$ (geordnetes Paar)
- $R \subseteq S \times T$ (Relation)
- für jedes $s \in S$, gibt es genau ein $t \in T$ mit $(s,t) \in R$
  Notation: $R(s) = t$ (Nacheindeutigkeit)
- nacheindeutige Relation (Funktion)
- $M \times N$ ist Relation, aber keine Funktion
- $R = \{(A_1, A_1), (4, A_4), (v, A_6)\} \subseteq M \times N$ ist Funktion

$$R : M \to N, \quad m \mapsto R(m)$$

Ebbinghaus, H.-D. (2021).
Einführung in die Mengenlehre. Springer

(kurze) Einführung: Logik

- ist die Lehre vom vernünftigen Schließen
- untersucht die Bedingungen, unter denen das Ziehen einer Konklusion (Schlussfolgerung) aus gegebenen Prämissen (Voraussetzungen) gültig ist
- ist nicht eine, sondern viele

  Aussagenlogik, Prädikatenlogik, Modale Logiken,
  Mehrwertige Logiken, Nichtmonotone Logiken, . . .
- der ersten Stunde: Syllogistik (Aristoteles, 384 - 322 v.Chr.)

(kurze) Einführung

bekannter Syllogismus:

Alle Menschen sind sterblich.	(Prämisse)
Sokrates ist ein Mensch.	(Prämisse)
Sokrates ist sterblich.	(Konklusion)

allgemeine Form:

Alle A sind B.	(Prämisse)
c ist ein A.	(Prämisse)
Daher ist c ein B.	(Konklusion)

Gültiger Schluss aufgrund der Form!

(kurze) Einführung

gültiger Schluss vs. Sinnhaftigkeit der Aussagen

Alle *A*lthkthkalhog sind *B*adkhgldhd.	(Prämisse)
*c*ada ist ein *A*lthkthkalhog.	(Prämisse)
*c*ada ist ein *B*adkhgldhd.	(Konklusion)

gültiger Schluss vs. Wahrheit der Aussagen

Alle Menschen sind unsterblich.	(Prämisse)
Sokrates ist ein Mensch.	(Prämisse)
Sokrates ist unsterblich.	(Konklusion)

Aber, gültiger Schluss garantiert Wahrheit der Konklusion, sofern auch die Prämissen wahr sind.

Literaturhinweise

- Schöning, U. (2000).
  Logik für Informatiker. Spektrum Verlag.
  Kompaktes, leicht verständliches Buch. Behandelt Aussagenlogik, Prädikatenlogik und Logikprogrammierung.
- Rautenberg, W. (2008).
  Einführung in die mathematische Logik. Springer.
  Ein umfassendes Lehrbuch zur mathematischen Logik mit ausführlichen Beweisen und einer Behandlung der Gödelschen Unvollständigkeitssätze.
- Ebbinghaus, H.-D., Flum, J., & Thomas, W. (2018).
  Mathematische Logik. Vieweg und Teubner Verlag.
  Geht weit über die Vorlesungsinhalte hinaus. Behandelt vornehmlich zentrale und tiefgehende Resultate der Prädikatenlogik.

Aussagenlogik

- George Boole (1815 - 1864)
  algebraische Grundlagen der Logik
- Aussagen sind sprachliche Gebilde die entweder wahr oder falsch sind, z.B.

  A: Heute findet die Logikvorlesung statt.

  B: Ich wohne in Leipzig.
- Aussagen können durch Junktoren wie nicht, und und oder miteinander verknüpft werden
- Wahrheit bzw. Falschheit komplexer Aussagen ergibt sich aus den Wahrheitswerten der Teilaussagen (Wahrheitsfunktionalität)

Syntax

Sei $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ die Menge der atomaren Formeln.

Definition

Die Menge der aussagenlogischen Formeln $\mathcal{F}$ ist die $\subseteq$-kleinste Menge, die nachfolgende Eigenschaften erfüllt:

1. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$
2. Sofern $\phi \in \mathcal{F}$, dann auch $\neg\phi \in \mathcal{F}$.
3. Sofern $\phi, \psi \in \mathcal{F}$, dann auch $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi) \in \mathcal{F}$.

Sprechweisen:

- $\neg\phi$: nicht ϕ, Negation von ϕ
- $(\phi \vee \psi)$: ϕ oder ψ, Disjunktion von ϕ und ψ
- $(\phi \wedge \psi)$: ϕ und ψ, Konjunktion von ϕ und ψ

Syntax

Sei $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ die Menge der atomaren Formeln.

Definition

Die Menge der aussagenlogischen Formeln $\mathcal{F}$ ist die $\subseteq$-kleinste Menge, die nachfolgende Eigenschaften erfüllt:

1. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$
2. Sofern $\phi \in \mathcal{F}$, dann auch $\neg\phi \in \mathcal{F}$.
3. Sofern $\phi, \psi \in \mathcal{F}$, dann auch $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi) \in \mathcal{F}$.

Beispiele:

$$(\neg A_1 \wedge A_2)$$

$$\neg((A_1 \vee A_2) \wedge A_3)$$

$$((A_5 \wedge A_5) \wedge A_5) \neq (A_5 \wedge (A_5 \wedge A_5))$$

Strukturelle Induktion

- induktiv definierte Mengen legen ein Induktionsprinzip fest

Definition

Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist die $\subseteq$-kleinste Menge, die nachfolgende Eigenschaften erfüllt:

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. Sofern $n \in \mathbb{N}$, dann auch $n + 1 \in \mathbb{N}$.

Eine Aussage gilt für alle natürlichen Zahlen, sofern:

1. Die Aussage gilt für die Zahl 0. (Induktionsanfang)
2. Wenn die Aussage für $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann auch für $n + 1$. (Induktionsschritt)

Dies ist die sogenannte vollständige Induktion.

Strukturelle Induktion

- induktiv definierte Mengen legen ein Induktionsprinzip fest

Beispiel: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n^2 + n$ ist gerade Zahl (kurz: $E(n)$)

1. Die Aussage gilt für die Zahl 0 $(E(0))$

   $0^2 + 0 = 0 + 0 = 0$ ist gerade Zahl

2. Wenn die Aussage für $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann auch für $n + 1$.

   $(E(n) \Rightarrow E(n+1))$

   - Gelte $E(n)$, d.h. $n^2 + n = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung)
   - Zeige $E(n+1)$, d.h. $(n+1)^2 + (n+1)$ ist gerade Zahl (Induktionsbehauptung)

$$(n+1)^2 + (n+1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = \underbrace{(n^2 + n)}_{2k} + (2n+2) =$$

$$2k + 2(n+1) = 2(k + n + 1) \qquad \square$$

Strukturelle Induktion

Definition

Die Menge der aussagenlogischen Formeln $\mathcal{F}$ ist die $\subseteq$-kleinste Menge, die nachfolgende Eigenschaften erfüllt:

1. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$
2. Sofern $\phi \in \mathcal{F}$, dann auch $\neg\phi \in \mathcal{F}$.
3. Sofern $\phi, \psi \in \mathcal{F}$, dann auch $(\phi \vee \psi), (\phi \wedge \psi) \in \mathcal{F}$.

Eine Aussage gilt für alle aussagenlogischen Formeln, sofern:

1. Die Aussage gilt für alle $A \in \mathcal{A}$. (Induktionsanfang)
2. Wenn die Aussage für $\phi \in \mathcal{F}$ gilt, dann auch für $\neg\phi$.
3. Wenn die Aussage für $\phi, \psi \in \mathcal{F}$ gilt, dann auch für $(\phi \vee \psi)$ und $(\phi \wedge \psi)$. (Induktionsschritt)

Dies ist die sogenannte Induktion über den Formelaufbau.

Rekursive Funktionen

- induktiv definierte Mengen erlauben rekursive Definitionen

Gegeben eine Menge M (z.B. $M = \mathbb{N}$). Um eine totale Funktion

$$f : \mathcal{F} \to M$$

zu definieren, reicht es:

1. $f : \mathcal{A} \to M$ anzugeben
2. $f(\neg\phi)$ durch $f(\phi)$ zu erklären
   [formaler: Angabe von $H_\neg : M \to M$, sodass $f(\neg\phi) = H_\neg(f(\phi))$]
3. $f((\phi \vee \psi))$ und $f((\phi \wedge \psi))$ durch $f(\phi)$ und $f(\psi)$ zu erklären
   [formaler: Angabe von $H_\vee : M \times M \to M$ und $H_\wedge : M \times M \to M$, sodass $f((\phi \vee \psi)) = H_\vee(f(\phi), f(\psi))$, $f((\phi \wedge \psi)) = H_\wedge(f(\phi), f(\psi))$]

Rekursive Funktionen

- $l : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ (Länge einer Formel)

$$l(A) = 1$$
$$l(\neg\phi) = 1 + l(\phi)$$
$$l((\phi \circ \psi)) = 1 + l(\phi) + 1 + l(\psi) + 1 \quad \text{mit } \circ \in \{\wedge, \vee\}$$

$$l((\neg A_1 \vee A_2)) = 1 + l(\neg A_1) + 1 + l(A_2) + 1 =$$
$$1 + 1 + l(A_1) + 1 + l(A_2) + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$$

- $k : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ (Anzahl Klammern)

$$k(A) = 0$$
$$k(\neg\phi) = k(\phi)$$
$$k((\phi \circ \psi)) = 1 + k(\phi) + k(\psi) + 1 \quad \text{mit } \circ \in \{\wedge, \vee\}$$

$$k((\neg A_1 \vee A_2)) = 1 + k(\neg A_1) + k(A_2) + 1 = 1 + k(A_1) + k(A_2) + 1 = 2$$

- $r : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ (Rang einer Formel)

$$r(A) = 0$$
$$r(\neg\phi) = r(\phi) + 1$$
$$r((\phi \circ \psi)) = \max\{r(\phi), r(\psi)\} + 1 \quad \text{mit } \circ \in \{\wedge, \vee\}$$

$$r((\neg A_1 \vee A_2)) = \max\{r(\neg A_1), r(A_2)\} + 1 = \max\{r(A_1) + 1, 0\} + 1 = 2$$

Induktion über den Formelaufbau

Beispiel: Für alle $\phi \in \mathcal{F}$ gilt: $k(\phi)$ ist gerade Zahl (kurz: $E(\phi)$)

$$k(A) = 0$$
$$k(\neg\phi) = k(\phi)$$
$$k((\phi \circ \psi)) = 1 + k(\phi) + k(\psi) + 1 \quad \text{mit } \circ \in \{\wedge, \vee\}$$

Beweis:

1. Die Aussage gilt für atomare Aussagen $A \in \mathcal{A}$ ($E(A)$)

   $k(A) = 0$ ist gerade Zahl

2. Wenn $E(\phi)$, dann auch $E(\neg\phi)$.
   - Sei $k(\phi) = 2n$ mit $n \in \mathbb{N}$ (IV). Es gilt:

   $$k(\neg\phi) = k(\phi) = 2n$$

3. Wenn $E(\phi)$ und $E(\psi)$, dann auch $E((\phi \circ \psi))$ für $\circ \in \{\wedge, \vee\}$.
   - Sei $k(\phi) = 2n$, $k(\psi) = 2m$ mit $n, m \in \mathbb{N}$ (IV). Es gilt:

   $$k((\phi \circ \psi)) = 1 + k(\phi) + k(\psi) + 1 = 1 + 2n + 2m + 1 = 2(n + m + 1)$$

$\square$

Rekursive Funktionen

- $s : \mathcal{F} \to 2^{\mathcal{A}}$ (Signatur einer Formel)

$$s(A) = \{A\}$$
$$s(\neg\phi) = s(\phi)$$
$$s((\phi \circ \psi)) = s(\phi) \cup s(\psi) \quad \text{mit } \circ \in \{\wedge, \vee\}$$

$s((\neg A_1 \vee A_2)) = s(\neg A_1) \cup s(A_2) = s(A_1) \cup \{A_2\} = \{A_1, A_2\}$

- $t : \mathcal{F} \to 2^{\mathcal{F}}$ (Teilformeln einer Formel)

$$t(A) = \{A\}$$
$$t(\neg\phi) = t(\phi) \cup \{\neg\phi\}$$
$$t((\phi \circ \psi)) = t(\phi) \cup t(\psi) \cup \{(\phi \circ \psi)\} \quad \text{mit } \circ \in \{\wedge, \vee\}$$

$t((\neg A_1 \vee A_2)) = t(\neg A_1) \cup t(A_2) \cup \{(\neg A_1 \vee A_2)\} =$
$t(A_1) \cup \{\neg A_1\} \cup t(A_2) \cup \{(\neg A_1 \vee A_2)\} = \{(\neg A_1 \vee A_2), \neg A_1, A_1, A_2\}$

Rekursive Funktionen

- $s : \mathcal{F} \to 2^{\mathcal{A}}$ (Signatur einer Formel)

$$s(A) = \{A\}$$
$$s(\neg\phi) = s(\phi)$$
$$s((\phi \circ \psi)) = s(\phi) \cup s(\psi) \quad \text{mit } \circ \in \{\wedge, \vee\}$$

- $t : \mathcal{F} \to 2^{\mathcal{F}}$ (Teilformeln einer Formel)

$$t(A) = \{A\}$$
$$t(\neg\phi) = t(\phi) \cup \{\neg\phi\}$$
$$t((\phi \circ \psi)) = t(\phi) \cup t(\psi) \cup \{(\phi \circ \psi)\} \quad \text{mit } \circ \in \{\wedge, \vee\}$$

- $b : \mathcal{F} \to \mathcal{S}$ (Syntaxbaum einer Formel)

$$b(A) = \quad A$$

$$b(\neg\phi) = \quad \begin{tikzcd} \neg \arrow[d, dash] \\ b(\phi) \end{tikzcd}$$

$$b((\phi \circ \psi)) = \quad \begin{tikzcd} & \circ \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ b(\phi) & & b(\psi) \end{tikzcd}$$

Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

1. Organisatorisches und Einführung

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

10. April 2025
Leipzig

Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

2. Semantik

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

17. April 2025
Leipzig

In der letzten Vorlesung

Mengenlehre

Syllogismen

Syntax der Aussagenlogik

Rekursive Funktionen

Strukturelle Induktion

Fahrplan für diese Vorlesung

Interpretationen und Modelle
Wahrheitswertetabelle
Erfüllbarkeit, Falsifizierbarkeit und mehr
Koinzidenzlemma

Achtung: Ab heute folgende Klammerkonventionen

1. äußerste Klammern können weggelassen werden, d.h.

$$A_1 \wedge (A_2 \vee A_3) \text{ statt } (A_1 \wedge (A_2 \vee A_3))$$
$$A_1 \wedge A_2 \vee A_3 \text{ ist nicht zulässig}$$

2. innerer Klammerwegfall bei iterierter Konj./Disj., d.h.

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee A_4 \text{ statt } (A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3)) \vee A_4$$
$$(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee A_4 \text{ statt } ((A_1 \wedge A_2) \wedge A_3) \vee A_4$$

$\Rightarrow$ Nicht eindeutig, aber ...

Semantik (der Junktoren)

- Syntax beschreibt Gestalt der Formeln
- Aussagen sind sprachliche Gebilde die entweder wahr (1) oder falsch (0) sind (Zweiwertigkeit)
- Wahrheitswert von komplexen Formeln ergibt sich aus Wahrheitswerten der Teilformeln (Wahrheitsfunktionalität)
  - Negation (1-stellig) $f_\neg : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$ (Nicht)

	$f_\neg^1$	$f_\neg^2$	$f_\neg^3$	$f_\neg^4$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Welche Funktion sollte es sein?

Semantik (der Junktoren)

- Syntax beschreibt Gestalt der Formeln
- Aussagen sind sprachliche Gebilde die entweder wahr (1) oder falsch (0) sind (Zweiwertigkeit)
- Wahrheitswert von komplexen Formeln ergibt sich aus Wahrheitswerten der Teilformeln (Wahrheitsfunktionalität)
  - Negation (1-stellig) $f_\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$ (Nicht)

	$f_\neg^1$	$f_\neg^2$	$f_\neg^3$	$f_\neg^4$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

(Wahrheitswert von) $\neg\phi$ ist wahr gdw.
(Wahrheitswert von) ϕ ist falsch.

Semantik (der Junktoren)

- Syntax beschreibt Gestalt der Formeln
- Aussagen sind sprachliche Gebilde die entweder wahr (1) oder falsch (0) sind (Zweiwertigkeit)
- Wahrheitswert von komplexen Formeln ergibt sich aus Wahrheitswerten der Teilformeln (Wahrheitsfunktionalität)
  - Konjunktion (2-stellig) $f_\wedge : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ (Und)

		$f_\wedge^1$	$f_\wedge^2$	$f_\wedge^3$	$f_\wedge^4$	$f_\wedge^5$	$f_\wedge^6$	$f_\wedge^7$	$f_\wedge^8$	$f_\wedge^9$	$f_\wedge^{10}$	$f_\wedge^{11}$	$f_\wedge^{12}$	$f_\wedge^{13}$	$f_\wedge^{14}$	$f_\wedge^{15}$	$f_\wedge^{16}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Welche Funktion sollte es sein?

Semantik (der Junktoren)

- Syntax beschreibt Gestalt der Formeln
- Aussagen sind sprachliche Gebilde die entweder wahr (1) oder falsch (0) sind (Zweiwertigkeit)
- Wahrheitswert von komplexen Formeln ergibt sich aus Wahrheitswerten der Teilformeln (Wahrheitsfunktionalität)
  - Konjunktion (2-stellig) $f_\wedge : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ (Und)

		$f^1_\wedge$	$f^2_\wedge$	$f^3_\wedge$	$f^4_\wedge$	$f^5_\wedge$	$f^6_\wedge$	$f^7_\wedge$	$f^8_\wedge$	$f^9_\wedge$	$f^{10}_\wedge$	$f^{11}_\wedge$	$f^{12}_\wedge$	$f^{13}_\wedge$	$f^{14}_\wedge$	$f^{15}_\wedge$	$f^{16}_\wedge$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

(Der Wahrheitswert von) $\phi \wedge \psi$ ist wahr gdw.
(die Wahrheitswerte von) ϕ und ψ wahr sind.

Semantik (der Junktoren)

- Syntax beschreibt Gestalt der Formeln
- Aussagen sind sprachliche Gebilde die entweder wahr (1) oder falsch (0) sind (Zweiwertigkeit)
- Wahrheitswert von komplexen Formeln ergibt sich aus Wahrheitswerten der Teilformeln (Wahrheitsfunktionalität)
  - Disjunktion (2-stellig) $f_\vee : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ (Oder)

		$f^1_\vee$	$f^2_\vee$	$f^3_\vee$	$f^4_\vee$	$f^5_\vee$	$f^6_\vee$	$f^7_\vee$	$f^8_\vee$	$f^9_\vee$	$f^{10}_\vee$	$f^{11}_\vee$	$f^{12}_\vee$	$f^{13}_\vee$	$f^{14}_\vee$	$f^{15}_\vee$	$f^{16}_\vee$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Welche Funktion sollte es sein?

Semantik (der Junktoren)

- Syntax beschreibt Gestalt der Formeln
- Aussagen sind sprachliche Gebilde die entweder wahr (1) oder falsch (0) sind (Zweiwertigkeit)
- Wahrheitswert von komplexen Formeln ergibt sich aus Wahrheitswerten der Teilformeln (Wahrheitsfunktionalität)
  - Disjunktion (2-stellig) $f_\vee : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ (Oder)

		$f_\vee^1$	$f_\vee^2$	$f_\vee^3$	$f_\vee^4$	$f_\vee^5$	$f_\vee^6$	$f_\vee^7$	$f_\vee^8$	$f_\vee^9$	$f_\vee^{10}$	$f_\vee^{11}$	$f_\vee^{12}$	$f_\vee^{13}$	$f_\vee^{14}$	$f_\vee^{15}$	$f_\vee^{16}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

(Der Wahrheitswert von) $\phi \vee \psi$ ist falsch gdw.
(die Wahrheitswerte von) ϕ und ψ falsch sind.

Semantik (rekursiv)

Eine Abbildung $I : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ heißt Belegung/Interpretation.
(Wahrheitswerte für atomare Aussagen)

Wir setzen $\mathcal{B} = \{I \mid I : \mathcal{A} \to \{0, 1\}\}$ (Menge aller Interpretationen)

Definition

Für gegebene Interpretation $I : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ definieren wir

$I^* : \mathcal{F} \to \{0, 1\}$ (Wahrheitswerte für alle Formeln)

1. $I^* : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ mit $A \mapsto I^*(A) = I(A)$
2. $I^*(\neg\phi) = f_\neg(I^*(\phi))$, d.h.
$$I^*(\neg\phi) = 1 \text{ gdw. } I^*(\phi) = 0$$
3. $I^*(\phi \circ \psi) = f_\circ(I^*(\phi), I^*(\psi))$ für $\circ \in \{\wedge, \vee\}$, d.h.
$$I^*(\phi \wedge \psi) = 1 \text{ gdw. } I^*(\phi) = I^*(\psi) = 1,$$
$$I^*(\phi \vee \psi) = 1 \text{ gdw. } I^*(\phi) + I^*(\psi) \geq 1$$

Semantik (rekursiv)

Anmerkungen:

- meist schreiben wir I für I^*, d.h.

$$I(A_1 \wedge (A_2 \vee \neg A_3)) \text{ anstatt } I^*(A_1 \wedge (A_2 \vee \neg A_3))$$

- meist geben wir I nur partiell (nämlich für $s(\phi) \subseteq \mathcal{A}$) an, z.B.

$$I(A_1) = 1,\ I(A_2) = 0,\ I(A_3) = 0 \text{ für } \phi = A_1 \wedge (A_2 \vee \neg A_3)$$

(siehe Koinzidenzlemma)

- meist schreiben wir nicht

$$\begin{aligned}
I(A_1 \wedge (A_2 \vee \neg A_3)) &= f_\wedge(I(A_1), I(A_2 \vee \neg A_3)) \\
&= f_\wedge(I(A_1), f_\vee(I(A_2), I(\neg A_3))) \\
&= f_\wedge(I(A_1), f_\vee(I(A_2), f_\neg(I(A_3)))) \\
&= f_\wedge(1, f_\vee(0, f_\neg(0))) \\
&= f_\wedge(1, f_\vee(0, 1)) \\
&= f_\wedge(1, 1) \\
&= 1, \text{ sondern} \\
I(A_1 \wedge (A_2 \vee \neg A_3)) &= 1.
\end{aligned}$$

Wahrheitswertetabellen

Zur Darstellung “aller” Interpretation benutzen wir Wahrheitswertetabellen

A_1	A_2	A_3	$\neg A_3$	$A_2 \vee \neg A_3$	$A_1 \wedge (A_2 \vee \neg A_3)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

Hinweis:

- $|s(\phi)| = n$ ergibt 2^n Zeilen (relevante part. Interpretationen)
- Anordnung der Interpretation in aufsteigender Reihenfolge

Hörsaalaufgabe

Vervollständigen Sie die Wahrheitswertetabelle. Bei Fragen konsultieren Sie die Person rechts oder links von Ihnen. (2 min)

A_1	A_2	$\neg A_2$	$A_1 \vee \neg A_2$	$\neg(A_1 \vee \neg A_2)$
0	0	1	1	0
0	1	0	0	
1	0	1		
1	1			

Hörsaalaufgabe

Vervollständigen Sie die Wahrheitswertetabelle. Bei Fragen konsultieren Sie die Person rechts oder links von Ihnen. (2 min)

A_1	A_2	$\neg A_2$	$A_1 \vee \neg A_2$	$\neg(A_1 \vee \neg A_2)$
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0

Modellbegriff

Eine Interpretation I heißt Modell von ϕ, sofern $I(\phi) = 1$.

Wir setzen $Mod(\phi) = \{I \in \mathcal{B} \mid I \text{ ist Modell von } \phi\}$

(Menge der Modelle)

A_1	A_2	A_3	$\neg A_3$	$A_2 \vee \neg A_3$	$A_1 \wedge (A_2 \vee \neg A_3)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

Eine Interpretation I mit $I(A_1) = 1$, $I(A_2) = 0$ und $I(A_3) = 0$ ist Modell von $A_1 \wedge (A_2 \vee \neg A_3)$. Also, $I \in Mod(A_1 \wedge (A_2 \vee \neg A_3))$.

Modellbegriff

Eine Interpretation I heißt Modell von ϕ, sofern $I(\phi) = 1$.

Wir setzen $Mod(\phi) = \{I \in \mathcal{B} \mid I \text{ ist Modell von } \phi\}$

(Menge der Modelle)

A_1	A_2	A_3	$\neg A_3$	$A_2 \vee \neg A_3$	$A_1 \wedge (A_2 \vee \neg A_3)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

Modelle von $A_1 \wedge (A_2 \vee \neg A_3)$.

Entscheidungsprobleme

Definition (Auswertungsproblem)

Gegeben: Formel $\phi \in \mathcal{F}$, Interpretation $I \in \mathcal{B}$.

Frage: Gilt $I \in Mod(\phi)$?

Satz: Auswertungsproblem ist effizient lösbar - sogar in Linearzeit.

- Beweis siehe VL “Berechenbarkeit”
- Argumentationslinie:
  - jede Formel ϕ der Länge n besitzt maximal n Junktoren
  - jeder Junktor $(\wedge, \vee, \neg)$ wird durch die entsprechende Boolsche Funktion $(f_\wedge, f_\vee, f_\neg)$ in konstanter Zeit ausgewertet

Erfüllbarkeit, Tautologien und Co.

Eine Formel ϕ heißt

erfüllbar,	falls $Mod(\phi) \neq \varnothing$	(mind. 1 Modell)
unerfüllbar,	falls $Mod(\phi) = \varnothing$	(kein Modell)
falsifizierbar,	falls $Mod(\phi) \neq \mathcal{B}$	(nicht alles Modelle)
tautologisch,	falls $Mod(\phi) = \mathcal{B}$	(nur Modelle)
kontingent,	falls $\varnothing \subset Mod(\phi) \subset \mathcal{B}$	(erf. und fals.)

Beispiele:

1. $A_1 \wedge \neg A_2$
2. $A_1 \vee \neg A_1$

   Ausführlich. Für alle $I \in \mathcal{B}$ gilt:
   $I(A_1 \vee \neg A_1) = f_\vee(I(A_1), I(\neg A_1)) = f_\vee(I(A_1), f_\neg(I(A_1))) = 1$,
   da $I(A_1) \neq f_\neg(I(A_1))$ und somit entweder $f_\vee(0,1) = 1$ oder $f_\vee(1,0) = 1$

Entscheidungsprobleme

Definition (Erfüllbarkeitsproblem (SAT))

Gegeben: Eine Formel $\phi \in \mathcal{F}$.

Frage: Ist ϕ erfüllbar?

Definition (Tautologieproblem)

Gegeben: Eine Formel $\phi \in \mathcal{F}$.

Frage: Ist ϕ eine Tautologie?

Es gilt (Reduktionen):

- ϕ falsifizierbar gdw. $\neg\phi$ erfüllbar
- ϕ unerfüllbar gdw. $\neg\phi$ tautologisch

Koinzidenzlemma

- besagt: Auswertung einer Formel hängt nur von der Belegung ihrer atomaren Aussagen ab
- zentral für die Aussagenlogik
- rechtfertigt Wahrheitswertetabellen

Lemma

Gegeben Formel $\phi \in \mathcal{F}$. Für alle Interpretationen $I_1, I_2 \in \mathcal{B}$ gilt: Wenn $I_1(A) = I_2(A)$ für alle $A \in s(\phi)$, dann schon $I_1(\phi) = I_2(\phi)$.

Koinzidenzlemma

Lemma

Gegeben Formel $\phi \in \mathcal{F}$. Für alle Interpretationen $I_1, I_2 \in \mathcal{B}$ gilt: Wenn $I_1(A) = I_2(A)$ für alle $A \in s(\phi)$, dann schon $I_1(\phi) = I_2(\phi)$.

(Eigenschaft $E(\phi)$)

Beweis:

1. Sei $\phi = A$ atomar. Offensichtlich gilt $s(\phi) = \{A\}$. Somit $I_1(\phi) = I_1(A) = I_2(A) = I_2(\phi)$.
2. Gelte $E(\phi)$. Per Definition ist $s(\phi) = s(\neg\phi)$. Folglich:
$$I_1(\neg\phi) = f_\neg(I_1(\phi)) =^{E(\phi)} f_\neg(I_2(\phi)) = I_2(\neg\phi).$$
3. Gelte $E(\phi)$, $E(\psi)$. Für $\circ \in \{\vee, \wedge\}$ ist $s(\phi \circ \psi) = s(\phi) \cup s(\psi)$. Somit, wenn I_1 und I_2 auf $s(\phi \circ \psi)$ übereinstimmen, dann auch auf $s(\phi)$ und $s(\psi)$. Es gilt:
$$I_1(\phi \circ \psi) = f_\circ(I_1(\phi), I_1(\psi)) =^{IV} f_\circ(I_2(\phi), I_2(\psi)) = I_2(\phi \circ \psi)$$

$\square$

Abkürzungen

Wir schreiben:

$\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i$	für	$\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n$	(iterierte Konjunktion)
$\bigvee_{i=1}^{n} \phi_i$	für	$\phi_1 \vee \ldots \vee \phi_n$	(iterierte Disjunktion)
$\bot$	für	$A_1 \wedge \neg A_1$	(Falsum)
$\top$	für	$\neg\bot$	(Verum)
$\phi \to \psi$	für	$\neg\phi \vee \psi$	(Implikation)
$\phi \leftrightarrow \psi$	für	$(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$	(Biimplikation)

Abkürzungen: Induzierte Semantik

$\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i$ für $\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n$ (iterierte Konjunktion)

Es gilt: $I\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i\right) = 1$ gdw. $I(\phi_1) = \ldots = I(\phi_n) = 1$

$\bigvee_{i=1}^{n} \phi_i$ für $\phi_1 \vee \ldots \vee \phi_n$ (iterierte Disjunktion)

Es gilt: $I\left(\bigvee_{i=1}^{n} \phi_i\right) = 1$ gdw. $I(\phi_1) + \ldots + I(\phi_n) \geq 1$

$\bot$ für $A_1 \wedge \neg A_1$ (Falsum)

Für alle $I \in \mathcal{B}$ gilt: $I(\bot) = 0$ (immer falsch)

$\top$ für $\neg\bot$ (Verum)

Für alle $I \in \mathcal{B}$ gilt: $I(\top) = 1$ (immer wahr)

Abkürzungen: Induzierte Semantik

- Implikation: $\phi \rightarrow \psi$ für $\neg\phi \vee \psi$

$$f_{\rightarrow} : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

		f^1	$f_\wedge$	f^3	f^4	f^5	f^6	f^7	$f_\vee$	f^9	f^{10}	f^{11}	f^{12}	f^{13}	f^{14}	f^{15}	f^{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Welche Funktion ist es?

$I(\phi \rightarrow \psi) = I(\neg\phi \vee \psi) = f_\vee(I(\neg\phi), I(\psi)) = f_\vee(f_\neg(I(\phi)), I(\psi))$, d.h.
$I(\phi \rightarrow \psi) = 0$, falls $f_\neg(I(\phi)) = I(\psi) = 0$ bzw. $I(\phi) = 1$ und $I(\psi) = 0$

Abkürzungen: Induzierte Semantik

- Implikation: $\phi \rightarrow \psi$ für $\neg\phi \vee \psi$ (wenn, dann)

$$f_{\rightarrow} : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

		f^1	$f_\wedge$	f^3	f^4	f^5	f^6	f^7	$f_\vee$	f^9	f^{10}	f^{11}	f^{12}	f^{13}	$f_\rightarrow$	f^{15}	f^{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$\phi \rightarrow \psi$ ist falsch gdw. ϕ wahr ist und ψ falsch

Wichtig: Wahrheit von $\phi \rightarrow \psi$ garantiert nicht,

1. inhaltlichen oder kausalen Zusammenhang, z.B.
   "Die Erde ist rund." $\rightarrow$ "Prof. Obergfell ist Rektorin."

Abkürzungen: Induzierte Semantik

- Implikation: $\phi \to \psi$ für $\neg\phi \vee \psi$ (wenn, dann)

$$f_{\to} : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$$

		f^1	$f_\wedge$	f^3	f^4	f^5	f^6	f^7	$f_\vee$	f^9	f^{10}	f^{11}	f^{12}	f^{13}	$f_\to$	f^{15}	f^{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$\phi \to \psi$ ist falsch gdw. ϕ wahr ist und ψ falsch

Wichtig: Wahrheit von $\phi \to \psi$ garantiert nicht,

2. die Wahrheit von ϕ und ψ, z.B.
   "Die Erde ist eine Scheibe." → "Prof. Baumann ist Rektor."

Abkürzungen: Induzierte Semantik

- Biimplikation: $\phi \leftrightarrow \psi$ für $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$

$$f_{\leftrightarrow} : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

		f^1	$f_\wedge$	f^3	f^4	f^5	f^6	f^7	$f_\vee$	f^9	f^{10}	f^{11}	f^{12}	f^{13}	$f_\rightarrow$	f^{15}	f^{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Welche Funktion ist es?

Abkürzungen: Induzierte Semantik

- Biimplikation: $\phi \rightarrow \psi$ für $\neg\phi \vee \psi$ (genau dann, wenn)

$$f_{\leftrightarrow} : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

		f^1	$f_\wedge$	f^3	f^4	f^5	f^6	f^7	$f_\vee$	f^9	$f_\leftrightarrow$	f^{11}	f^{12}	f^{13}	$f_\rightarrow$	f^{15}	f^{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$\phi \leftrightarrow \psi$ ist wahr gdw. ϕ und ψ evaluieren gleich

Anwendung: Detektivarbeit

Anton, **B**ob und **C**lara spielen Fußball. Plötzlich durchfährt der Ball eine Fensterscheibe. Sie geht zu Bruch.

Die Kinder sagen folgendes aus:

Anton sagt: *Bob war es nicht.*
Bob sagt: *Clara war es.*
Clara sagt: *Ich war es.*

Wir wissen, daß genau ein Kind die Wahrheit sagt. Wer hat den Ball geschossen?

Stehe W_I für "I sagt die Wahrheit" und T_I für "I ist der Täter".
Wir modellieren:

Anwendung: Detektivarbeit

Anton, **B**ob und **C**lara spielen Fußball. Plötzlich durchfährt der Ball eine Fensterscheibe. Sie geht zu Bruch.

Die Kinder sagen folgendes aus:

Anton sagt: *Bob war es nicht.*
Bob sagt: *Clara war es.*
Clara sagt: *Ich war es.*

Wir wissen, daß genau ein Kind die Wahrheit sagt. Wer hat den Ball geschossen?

Stehe W_I für "I sagt die Wahrheit" und T_I für "I ist der Täter". Wir modellieren:

$$\phi_1 \;=\; (W_A \wedge \neg W_B \wedge \neg W_C) \vee (\neg W_A \wedge W_B \wedge \neg W_C) \vee (\neg W_A \wedge \neg W_B \wedge W_C)$$

Anwendung: Detektivarbeit

Anton, **B**ob und **C**lara spielen Fußball. Plötzlich durchfährt der Ball eine Fensterscheibe. Sie geht zu Bruch.

Die Kinder sagen folgendes aus:

Anton sagt: *Bob war es nicht.*
Bob sagt: *Clara war es.*
Clara sagt: *Ich war es.*

Wir wissen, daß genau ein Kind die Wahrheit sagt. Wer hat den Ball geschossen?

Stehe W_I für "I sagt die Wahrheit" und T_I für "I ist der Täter". Wir modellieren:

$$\phi_1 = (W_A \wedge \neg W_B \wedge \neg W_C) \vee (\neg W_A \wedge W_B \wedge \neg W_C) \vee (\neg W_A \wedge \neg W_B \wedge W_C)$$

$$\phi_2 = T_A \vee T_B \vee T_C$$

Anwendung: Detektivarbeit

Anton, **B**ob und **C**lara spielen Fußball. Plötzlich durchfährt der Ball eine Fensterscheibe. Sie geht zu Bruch.

Die Kinder sagen folgendes aus:

Anton sagt: *Bob war es nicht.*
Bob sagt: *Clara war es.*
Clara sagt: *Ich war es.*

Wir wissen, daß genau ein Kind die Wahrheit sagt. Wer hat den Ball geschossen?

Stehe W_I für "I sagt die Wahrheit" und T_I für "I ist der Täter". Wir modellieren:

$$\phi_1 = (W_A \wedge \neg W_B \wedge \neg W_C) \vee (\neg W_A \wedge W_B \wedge \neg W_C) \vee (\neg W_A \wedge \neg W_B \wedge W_C)$$
$$\phi_2 = T_A \vee T_B \vee T_C$$
$$\phi_3 = W_A \leftrightarrow \neg T_B$$

Anwendung: Detektivarbeit

Anton, **B**ob und **C**lara spielen Fußball. Plötzlich durchfährt der Ball eine Fensterscheibe. Sie geht zu Bruch.

Die Kinder sagen folgendes aus:

Anton sagt: *Bob war es nicht.*
Bob sagt: *Clara war es.*
Clara sagt: *Ich war es.*

Wir wissen, daß genau ein Kind die Wahrheit sagt. Wer hat den Ball geschossen?

Stehe W_I für "I sagt die Wahrheit" und T_I für "I ist der Täter". Wir modellieren:

$$\phi_1 = (W_A \wedge \neg W_B \wedge \neg W_C) \vee (\neg W_A \wedge W_B \wedge \neg W_C) \vee (\neg W_A \wedge \neg W_B \wedge W_C)$$

$$\phi_2 = T_A \vee T_B \vee T_C$$

$$\phi_3 = W_A \leftrightarrow \neg T_B \qquad \phi_4 = W_B \leftrightarrow T_C$$

Anwendung: Detektivarbeit

Anton, **B**ob und **C**lara spielen Fußball. Plötzlich durchfährt der Ball eine Fensterscheibe. Sie geht zu Bruch.

Die Kinder sagen folgendes aus:

Anton sagt: *Bob war es nicht.*
Bob sagt: *Clara war es.*
Clara sagt: *Ich war es.*

Wir wissen, daß genau ein Kind die Wahrheit sagt. Wer hat den Ball geschossen?

Stehe W_I für "I sagt die Wahrheit" und T_I für "I ist der Täter". Wir modellieren:

$$\phi_1 = (W_A \wedge \neg W_B \wedge \neg W_C) \vee (\neg W_A \wedge W_B \wedge \neg W_C) \vee (\neg W_A \wedge \neg W_B \wedge W_C)$$

$$\phi_2 = T_A \vee T_B \vee T_C$$

$$\phi_3 = W_A \leftrightarrow \neg T_B \qquad \phi_4 = W_B \leftrightarrow T_C \qquad \phi_5 = W_C \leftrightarrow T_C$$

Anwendung: Detektivarbeit

Anton, **B**ob und **C**lara spielen Fußball. Plötzlich durchfährt der Ball eine Fensterscheibe. Sie geht zu Bruch.

Die Kinder sagen folgendes aus:

Anton sagt: *Bob war es nicht.*
Bob sagt: *Clara war es.*
Clara sagt: *Ich war es.*

Wir wissen, daß genau ein Kind die Wahrheit sagt. Wer hat den Ball geschossen?
Wir modellieren:

$$\phi_1 = (W_A \wedge \neg W_B \wedge \neg W_C) \vee (\neg W_A \wedge W_B \wedge \neg W_C) \vee (\neg W_A \wedge \neg W_B \wedge W_C)$$

$$\phi_2 = T_A \vee T_B \vee T_C$$

$$\phi_3 = W_A \leftrightarrow \neg T_B \qquad \phi_4 = W_B \leftrightarrow T_C \qquad \phi_5 = W_C \leftrightarrow T_C$$

Es gilt: $I \in Mod\left(\bigwedge_{i=1}^{5} \phi_i\right)$ gdw. I löst das Rätsel

Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

2. Semantik

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

17. April 2025
Leipzig

Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

3. Folgerung und Äquivalenz

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

24. April 2025
Leipzig

In der letzten Vorlesung

Interpretationen und Modelle

Wahrheitswertetabelle

Erfüllbarkeit, Falsifizierbarkeit und mehr

Koinzidenzlemma

Modellierung (Detektivarbeit)

Fahrplan für diese Vorlesung

Folgerung

Deduktionstheorem

Semantische Äquivalenz

Ersetzungstheorem

DNF und KNF

Modellbegriff

Bis jetzt: Modellbegriff für Formeln
Eine Interpretation I heißt Modell von ϕ, sofern $I(\phi) = 1$.
$Mod(\phi) = \{I \in \mathcal{B} \mid I \text{ ist Modell von } \phi\}$

jetzt: Modellbegriff für Mengen von Formeln
Eine Interpretation I heißt Modell von T, sofern $I(\phi) = 1$ für alle $\phi \in T$. Demzufolge

$$Mod(T) = \bigcap_{\phi \in T} Mod(\phi)$$

Es gilt:

1. Falls T endlich, dann $Mod(T) = Mod(\bigwedge T)$. (Formel)
2. $Mod(\emptyset) = \mathcal{B}$ ("Tautologie")
3. $Mod(S \cup T) = Mod(S) \cap Mod(T)$ (Schnitteigenschaft)
4. Falls $S \subseteq T$, dann $Mod(T) \subseteq Mod(S)$. (Antimonotonie)

Modellbegriff

Eine Interpretation I heißt Modell von T, sofern $I(\phi) = 1$ für alle $\phi \in T$. Demzufolge

$$Mod(T) = \bigcap_{\phi \in T} Mod(\phi)$$

Es gilt:

1. Falls T endlich, dann $Mod(T) = Mod(\bigwedge T)$. (Formel)
2. $Mod(\emptyset) = \mathcal{B}$ ("Tautologie")

   Beweis:

$$\begin{aligned} Mod(\emptyset) &= \bigcap_{\psi \in \emptyset} Mod(\psi) \\ &= \{I \in \mathcal{B} \mid \text{für alle } \psi \in \emptyset : I \in Mod(\psi)\} \\ &= \mathcal{B} \end{aligned}$$

Modellbegriff

Eine Interpretation I heißt Modell von T, sofern $I(\phi) = 1$ für alle $\phi \in T$. Demzufolge

$$Mod(T) = \bigcap_{\phi \in T} Mod(\phi)$$

Es gilt:

1. Falls T endlich, dann $Mod(T) = Mod(\bigwedge T)$. (Formel)
2. $Mod(\varnothing) = \mathcal{B}$ (“Tautologie”)
3. $Mod(S \cup T) = Mod(S) \cap Mod(T)$ (Schnitteigenschaft)

   Beweis:

$$\begin{aligned} Mod(S \cup T) &= \bigcap_{\phi \in S \cup T} Mod(\phi) \\ &= \bigcap_{s \in S} Mod(s) \;\cap\; \bigcap_{t \in T} Mod(t) \\ &= Mod(S) \cap Mod(T) \end{aligned}$$

Modellbegriff

Eine Interpretation I heißt Modell von T, sofern $I(\phi) = 1$ für alle $\phi \in T$. Demzufolge

$$Mod(T) = \bigcap_{\phi \in T} Mod(\phi)$$

Es gilt:

1. Falls T endlich, dann $Mod(T) = Mod(\bigwedge T)$. (Formel)
2. $Mod(\emptyset) = \mathcal{B}$ ("Tautologie")
3. $Mod(S \cup T) = Mod(S) \cap Mod(T)$ (Schnitteigenschaft)
4. Falls $S \subseteq T$, dann $Mod(T) \subseteq Mod(S)$. (Antimonotonie)

   Beweis: Übungsblatt 2

Folgerung

Definition

Sei $T \subseteq \mathcal{F}$ und $\phi \in \mathcal{F}$. Wir sagen, ϕ folgt (logisch) aus T, falls $Mod(T) \subseteq Mod(\phi)$ und schreiben: $T \models \phi$

Anmerkungen/Konventionen:

- T ist Menge von Formeln, ϕ ist eine einzelne Formel
- T kann auch unendlich sein
- Wir schreiben:

$$\begin{array}{rcr} \phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi & \text{statt} & \{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \models \psi \\ T, \phi \models \psi & \text{statt} & T \cup \{\phi\} \models \psi \\ \models \psi & \text{statt} & \emptyset \models \psi \end{array}$$

Beispiele:

$$\begin{array}{lll} A_1 \wedge A_2 \models A_1 & A_1, A_1 \rightarrow A_2 \models A_2 & \models A_1 \vee \neg A_1 \\ A_1 \wedge A_2 \not\models A_3 & A_1, A_2 \rightarrow A_1 \not\models A_2 & \not\models A_1 \wedge \neg A_1 \end{array}$$

Folgerung

Definition

Sei $T \subseteq \mathcal{F}$ und $\phi \in \mathcal{F}$. Wir sagen, ϕ folgt (logisch) aus T, falls $Mod(T) \subseteq Mod(\phi)$ und schreiben: $T \models \phi$

Anmerkungen/Konventionen:

- T ist Menge von Formeln, ϕ ist eine einzelne Formel
- T kann auch unendlich sein
- Wir schreiben:

$$\begin{array}{rcr} \phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi & \text{statt} & \{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \models \psi \\ T, \phi \models \psi & \text{statt} & T \cup \{\phi\} \models \psi \\ \models \psi & \text{statt} & \emptyset \models \psi \end{array}$$

Beweis für $A_1, A_1 \to A_2 \models A_2$:

Z.z. $Mod(\{A_1, A_1 \to A_2\}) \subseteq Mod(\{A_2\})$. Sei dazu $I(\{A_1, A_1 \to A_2\}) = 1$. Somit $I(\{A_1\}) = 1$ und $I(\{A_1 \to A_2\}) = 1$. Somit muss per Wahrheitsbedingung der Implikation auch $I(A_2) = 1$, d.h. $I \in Mod(\{A_2\})$.

Deduktionstheorem

Theorem

Seien $T \subseteq \mathcal{F}$ und $\phi, \psi \in \mathcal{F}$. Es gilt:

$$T, \phi \vDash \psi \quad \textit{gdw.} \quad T \vDash \phi \to \psi$$

Beweis:

($\Rightarrow$) Gegeben $T, \phi \vDash \psi$. Zu zeigen: $T \vDash \phi \to \psi$. Sei $I \in \mathit{Mod}(T)$.
Fall 1: $I \notin \mathit{Mod}(\phi)$. Dann sofort $I \in \mathit{Mod}(\phi \to \psi)$.
Fall 2: $I \in \mathit{Mod}(\phi)$. Folglich $I \in \mathit{Mod}(T \cup \{\phi\})$. Nach Voraussetzung $I \in \mathit{Mod}(\psi)$ und somit wiederum $I \in \mathit{Mod}(\phi \to \psi)$.

($\Leftarrow$) Gegeben $T \vDash \phi \to \psi$. Zz: $T, \phi \vDash \psi$. Sei $I \in \mathit{Mod}(T \cup \{\phi\})$. Somit $I \in \mathit{Mod}(T)$ und $I \in \mathit{Mod}(\phi)$. Nach Voraussetzung $\mathit{Mod}(T) \subseteq \mathit{Mod}(\phi \to \psi)$. Also $I \in \mathit{Mod}(\phi \to \psi)$. Da schon $I \in \mathit{Mod}(\phi)$ bekannt, muss $I \in \mathit{Mod}(\psi)$. $\square$

Deduktionstheorem

Theorem

Seien $T \subseteq \mathcal{F}$ und $\phi, \psi \in \mathcal{F}$. Es gilt:

$$T, \phi \models \psi \quad \text{gdw.} \quad T \models \phi \to \psi$$

- insbesondere ergibt sich für $T = \emptyset$:

$$\phi \models \psi \quad \text{gdw.} \quad \models \phi \to \psi$$

$$\underbrace{\psi \text{ folgt aus } \phi}_{\textit{Metasprache}} \quad \text{gdw.} \quad \underbrace{\phi \to \psi}_{\textit{Objektsprache}} \quad \text{ist tautologisch}$$

- für $T = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ gilt $\mathit{Mod}(T) = \mathit{Mod}(\underbrace{\bigwedge_{i=1}^n \phi_i}_{\phi})$. Somit

$$T \models \psi \quad \text{gdw.} \quad \models \left(\bigwedge_{i=1}^n \phi_i\right) \to \psi$$

Semantische Äquivalenz

Aussagenlogische Formeln können syntaktisch verschieden sein, und dennoch genau die selben Modelle besitzen.

Definition

Zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathcal{F}$ heißen semantisch äquivalent, in Zeichen $\phi \equiv \psi$, sofern $\mathit{Mod}(\phi) = \mathit{Mod}(\psi)$.

Nützliche Äquivalenzen:

- $\phi \wedge \phi \equiv \phi$
  $\phi \vee \phi \equiv \phi$ (Idempotenz)
- $\phi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \phi$
  $\phi \vee \psi \equiv \psi \vee \phi$ (Kommutativität)
- $(\phi \wedge \psi) \wedge \xi \equiv \phi \wedge (\psi \wedge \xi)$
  $(\phi \vee \psi) \vee \xi \equiv \phi \vee (\psi \vee \xi)$ (Assoziativität)
- $\phi \wedge (\phi \vee \psi) \equiv \phi$
  $\phi \vee (\phi \wedge \psi) \equiv \phi$ (Absorption)

Semantische Äquivalenz

Aussagenlogische Formeln können syntaktisch verschieden sein, und dennoch genau die selben Modelle besitzen.

Definition

Zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathcal{F}$ heißen semantisch äquivalent, in Zeichen $\phi \equiv \psi$, sofern $\mathit{Mod}(\phi) = \mathit{Mod}(\psi)$.

Nützliche Äquivalenzen:

- $\neg\neg\phi \equiv \phi$ (Elimination der doppelten Negation)
- $\neg(\phi \wedge \psi) \equiv \neg\phi \vee \neg\psi$
  $\neg(\phi \vee \psi) \equiv \neg\phi \wedge \neg\psi$ (De Morgansche Gesetze)
- $\phi \wedge (\psi \vee \xi) \equiv (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \xi)$
  $\phi \vee (\psi \wedge \xi) \equiv (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \xi)$ (Distributivgesetze)
- $\phi \wedge \psi \equiv \psi$, falls ϕ tautologisch
  $\phi \vee \psi \equiv \phi$, falls ϕ tautologisch (Tautologieregel)
- $\phi \wedge \psi \equiv \phi$, falls ϕ unerfüllbar
  $\phi \vee \psi \equiv \psi$, falls ϕ unerfüllbar (Unerfüllbarkeitsregel)

Semantische Äquivalenz

Aussagenlogische Formeln können syntaktisch verschieden sein, und dennoch genau die selben Modelle besitzen.

Definition

Zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathcal{F}$ heißen semantisch äquivalent, in Zeichen $\phi \equiv \psi$, sofern $\mathit{Mod}(\phi) = \mathit{Mod}(\psi)$.

Beweis für $\neg\neg\phi \equiv \phi$. Sei dazu $I \in \mathcal{B}$ eine Interpretation. Es gilt:

$$\begin{aligned} I(\neg\neg\phi) = 1 \quad & \text{gdw.} \quad I(\neg\phi) = 0 \\ & \text{gdw.} \quad I(\phi) = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Also, } \mathit{Mod}(\neg\neg\phi) = \mathit{Mod}(\phi).$$

Semantische Äquivalenz

Aussagenlogische Formeln können syntaktisch verschieden sein, und dennoch genau die selben Modelle besitzen.

Definition

Zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathcal{F}$ heißen semantisch äquivalent, in Zeichen $\phi \equiv \psi$, sofern $\mathit{Mod}(\phi) = \mathit{Mod}(\psi)$.

Beweis für $\neg(\phi \wedge \psi) \equiv \neg\phi \vee \neg\psi$. Sei dazu $I \in \mathcal{B}$ eine Interpretation. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
I(\neg(\phi \wedge \psi)) = 1 \quad & \text{gdw.} \quad I(\phi \wedge \psi) = 0 \\
& \text{gdw.} \quad I(\phi) = 0 \ \text{ oder } \ I(\psi) = 0 \\
& \text{gdw.} \quad I(\neg\phi) = 1 \ \text{ oder } \ I(\neg\psi) = 1 \\
& \text{gdw.} \quad I(\neg\phi \vee \neg\psi) = 1
\end{aligned}
$$

Ersetzungstheorem

Mithilfe dieses Theorems können wir Formeln in bestimmte syntaktische Formen überführen, wobei die Menge ihrer Modelle unverändert bleibt.

Theorem

Gegeben zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathcal{F}$ mit $\phi \equiv \psi$. Sei $\xi \in \mathcal{F}$ mit $\phi \in t(\xi)$ und $\xi' \in \mathcal{F}$ eine Formel, die sich durch Ersetzung eines Vorkommens von ϕ in ξ durch ψ ergibt. Dann gilt: $\xi \equiv \xi'$.

Beispiel:

$$\phi = A_1 \wedge (A_1 \vee A_2) \qquad \psi = A_1 \qquad\qquad \phi \equiv \psi$$

$$\xi = (A_1 \wedge (A_1 \vee A_2)) \to A_3 \qquad\qquad \phi \in t(\xi)$$

$$\xi' = A_1 \to A_3 \qquad\qquad \xi \equiv \xi'$$

Ersetzungstheorem

Theorem

Gegeben zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathcal{F}$ mit $\phi \equiv \psi$. Sei $\xi \in \mathcal{F}$ mit $\phi \in t(\xi)$ und $\xi' \in \mathcal{F}$ eine Formel, die sich durch Ersetzung eines Vorkommens von ϕ in ξ durch ψ ergibt. Dann gilt: $\xi \equiv \xi'$.

Beweis (Induktion über den Formelaufbau von ξ):

- Sei ξ atomar. Dann muss $\phi = \xi$, da $t(\xi) = \{\xi\}$. Somit ist $\xi' = \psi$ und damit $\xi \equiv \xi'$ da $\phi \equiv \psi$ vorausgesetzt. (IA)
- Gelte die Ersetzungseigenschaft für ξ_1 (IV) und sei $\xi = \neg\xi_1$.
  1. Falls $\phi = \xi$, dann argumentiere wie oben (IV nicht nötig)
  2. Sei nun $\phi \neq \xi$. Dann muss $\xi' = \neg\xi_1'$ wobei ξ_1' durch ersetzen von ϕ in ξ_1 durch ψ entsteht. Da nach IV $\xi_1 \equiv \xi_1'$ gilt, muss per Definition der Negation $\neg\xi_1 \equiv \neg\xi_1'$. Also, $\xi \equiv \xi'$
- Gelte die Ersetzungseigs. für ξ_1, ξ_2 (IV) und sei $\xi = \xi_1 \circ \xi_2$.
  1. Falls $\phi = \xi$, dann argumentiere wie im IA (IV nicht nötig)
  2. Sei nun $\phi \neq \xi$. Dann entweder $\phi \in t(\xi_1)$ oder $\phi \in t(\xi_2)$.

Ersetzungstheorem

Theorem

Gegeben zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathcal{F}$ mit $\phi \equiv \psi$. Sei $\xi \in \mathcal{F}$ mit $\phi \in t(\xi)$ und $\xi' \in \mathcal{F}$ eine Formel, die sich durch Ersetzung eines Vorkommens von ϕ in ξ durch ψ ergibt. Dann gilt: $\xi \equiv \xi'$.

Beweis (Induktion über den Formelaufbau von ξ):

- Gelte die Ersetzungseigs. für ξ_1, ξ_2 (IV) und sei $\xi = \xi_1 \circ \xi_2$.
  1. Falls $\phi = \xi$, dann argumentiere wie im IA (IV nicht nötig)
  2. Sei nun $\phi \neq \xi$. Dann entweder $\phi \in t(\xi_1)$ oder $\phi \in t(\xi_2)$. Je nach Fall gilt dann $\xi' = \xi_1' \circ \xi_2$ oder $\xi' = \xi_1 \circ \xi_2'$ wobei ξ_1' (bzw. ξ_2') durch ersetzen von ϕ in ξ_1 (bzw. ξ_2) durch ψ entsteht. Nach IV gilt $\xi_1' \equiv \xi_1$ als auch $\xi_2' \equiv \xi_2$. Somit folgt per Definition der Semantik der Junkoren $\circ \in \{\vee, \wedge\}$, dass $\xi_1' \circ \xi_2 \equiv \xi_1 \circ \xi_2$ als auch $\xi_1 \circ \xi_2' \equiv \xi_1 \circ \xi_2$. Also, $\xi' \equiv \xi$. $\square$

Disjunktive und Konjunktive Normalform

- ein Literal ist eine atomare Formel $A \in \mathcal{A}$ (positives Literal) oder deren Negation $\neg A$ (negatives Literal)
- für atomare Formeln A setzen wir: $\overline{A} = \neg A$ und $\overline{\neg A} = A$.

Definition

Eine Formel ϕ ist in konjunktiver Normalform (KNF), sofern

$$\phi = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij} \right)$$

mit Literalen L_{ij}. (Konjunktion von Disjunktion von Literalen)

Bsp.: $\phi = (A_1 \vee \neg A_2) \wedge (\neg A_1 \vee A_2 \vee A_3)$ $\quad (n = 2,\ m_1 = 2,\ m_2 = 3)$

Disjunktive und Konjunktive Normalform

- ein Literal ist eine atomare Formel $A \in \mathcal{A}$ (positives Literal) oder deren Negation $\neg A$ (negatives Literal)
- für atomare Formeln A setzen wir: $\overline{A} = \neg A$ und $\overline{\neg A} = A$.

Definition

Eine Formel ϕ ist in disjunktiver Normalform (DNF), sofern

$$\phi = \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} L_{ij} \right)$$

mit Literalen L_{ij}. (Disjunktion von Konjunktionen von Literalen)

Bsp.: $\phi = (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3) \vee \neg A_2$ $(n = 2,\ m_1 = 3,\ m_2 = 1)$

Disjunktive und Konjunktive Normalform

Warum interessant?

- standardisierter Input für Algorithmen (z.B. SAT-solver)
- günstige Eigenschaften bzgl. Entscheidungsverfahren

Satz: Für Formeln in DNF ist das Erfüllbarkeitsproblem effizient lösbar – sogar in Linearzeit.

Begründung: DNF erfüllbar gdw. es ein Disjunkt gibt, welches nicht gleichzeitig eine atomare Formel A und $\neg A$ enthält.

Beispiel: $(A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3 \wedge \neg A_1) \vee (\neg A_2 \wedge A_3)$

Disjunktive und Konjunktive Normalform

Warum interessant?

- standardisierter Input für Algorithmen (z.B. SAT-solver)
- günstige Eigenschaften bzgl. Entscheidungsverfahren

Satz: Für Formeln in DNF ist das Erfüllbarkeitsproblem effizient lösbar – sogar in Linearzeit.

Begründung: DNF erfüllbar gdw. es ein Disjunkt gibt, welches nicht gleichzeitig eine atomare Formel A und $\neg A$ enthält.

Beispiel: $(A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3 \wedge \neg A_1) \vee (\neg A_2 \wedge A_3)$ erfüllbar

Disjunktive und Konjunktive Normalform

Warum interessant?

- standardisierter Input für Algorithmen (z.B. SAT-solver)
- günstige Eigenschaften bzgl. Entscheidungsverfahren

Satz: Für Formeln in KNF ist das Tautologieproblem effizient lösbar – sogar in Linearzeit.

Begründung: KNF tautologisch gdw. alle Konjunkte enthalten gleichzeitig eine atomare Formel A und $\neg A$.

Beispiel: $(A_1 \vee A_2 \vee \neg A_3 \vee \neg A_1) \wedge (\neg A_2 \vee A_2 \vee A_3)$

Disjunktive und Konjunktive Normalform

Warum interessant?

- standardisierter Input für Algorithmen (z.B. SAT-solver)
- günstige Eigenschaften bzgl. Entscheidungsverfahren

Satz: Für Formeln in KNF ist das Tautologieproblem effizient lösbar – sogar in Linearzeit.

Begründung: KNF tautologisch gdw. alle Konjunkte enthalten gleichzeitig eine atomare Formel A und $\neg A$.

Beispiel: $(A_1 \vee A_2 \vee \neg A_3 \vee \neg A_1) \wedge (\neg A_2 \vee A_2 \vee A_3)$ tautologisch

Disjunktive und Konjunktive Normalform

Theorem

Zu jeder Formel $\phi \in \mathcal{F}$ existieren semantisch äquivalente Formeln ϕ_D in DNF und ϕ_K in KNF. $(\phi \equiv \phi_D \equiv \phi_K)$

Beweis (Induktion über den Formelaufbau):

- Sei $\phi = A \in \mathcal{A}$ atomar, dann setze $\phi = \phi_D = \phi_K$. (IA)
- Gelte $E(\phi)$, d.h. es ex. $\phi_D = \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} L_{ij} \right)$ mit $\phi \equiv \phi_D$. Also:

$$\neg \phi_D \stackrel{1}{=} \neg \left(\bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} L_{ij} \right) \right) \stackrel{2}{\equiv} \bigwedge_{i=1}^{n} \neg \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} L_{ij} \right) \stackrel{3}{\equiv} \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} \neg L_{ij} \right) \stackrel{4}{\equiv} \underbrace{\bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} \overline{L_{ij}} \right)}_{\text{in KNF}}$$

(1) Definition von ϕ_D (2) De Morgan: Negation einer Disjunktion (3) De Morgan: Negation einer Konjunktion (4) $\neg L_{ij} \equiv \overline{L_{ij}}$

- Beweis für semantische äquivalente DNF analog
- Hinweis: Ersetzungstheorem wird oft stillschweigend benutzt

Erstellen einer KNF/DNF

Idee: Erstelle die Wahrheitstabelle. Modelliere nun für KNF exakt die Falschheitsfälle, für DNF genau die Wahrheitsfälle.

Bsp.: $\phi = (A_1 \vee A_2) \to A_3$

A_1	A_2	A_3	$(A_1 \vee A_2) \to A_3$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Erstellen einer KNF/DNF

Idee: Erstelle die Wahrheitstabelle. Modelliere nun für KNF exakt die Falschheitsfälle, für DNF genau die Wahrheitsfälle.

Bsp.: $\phi = (A_1 \vee A_2) \rightarrow A_3$

A_1	A_2	A_3	$(A_1 \vee A_2) \rightarrow A_3$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

ϕ_K

Erstellen einer KNF/DNF

Idee: Erstelle die Wahrheitstabelle. Modelliere nun für KNF exakt die Falschheitsfälle, für DNF genau die Wahrheitsfälle.

Bsp.: $\phi = (A_1 \vee A_2) \to A_3$

A_1	A_2	A_3	$(A_1 \vee A_2) \to A_3$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\phi_K = (A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3) \wedge$$

Erstellen einer KNF/DNF

Idee: Erstelle die Wahrheitstabelle. Modelliere nun für KNF exakt die Falschheitsfälle, für DNF genau die Wahrheitsfälle.

Bsp.: $\phi = (A_1 \vee A_2) \rightarrow A_3$

A_1	A_2	A_3	$(A_1 \vee A_2) \rightarrow A_3$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\phi_K = (A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3) \wedge (\neg A_1 \vee A_2 \vee A_3) \wedge$$

Erstellen einer KNF/DNF

Idee: Erstelle die Wahrheitstabelle. Modelliere nun für KNF exakt die Falschheitsfälle, für DNF genau die Wahrheitsfälle.

Bsp.: $\phi = (A_1 \vee A_2) \rightarrow A_3$

A_1	A_2	A_3	$(A_1 \vee A_2) \rightarrow A_3$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\phi_K = (A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3) \wedge (\neg A_1 \vee A_2 \vee A_3) \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3)$$

Erstellen einer KNF/DNF

Idee: Erstelle die Wahrheitstabelle. Modelliere nun für KNF exakt die Falschheitsfälle, für DNF genau die Wahrheitsfälle.

Bsp.: $\phi = (A_1 \vee A_2) \rightarrow A_3$

A_1	A_2	A_3	$(A_1 \vee A_2) \rightarrow A_3$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\begin{aligned}\phi_D = {} & (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \vee \\ & (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3)\end{aligned}$$

Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

3. Folgerung und Äquivalenz

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

24. April 2025
Leipzig

Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

4. Hornformeln und Resolution

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

08. Mai 2025
Leipzig

In der letzten Vorlesung

Folgerung

Deduktionstheorem

Semantische Äquivalenz

Ersetzungstheorem

DNF und KNF

Fahrplan für diese Vorlesung

Wiederholung: Erfüllbarkeit

Hornformeln

Resolution

Wiederholung - DNF

- Erfüllbarkeitsproblem für DNF effizient lösbar
- Aber! Konstruktion einer sem. äqu. DNF via Wahrheitstabelle im Zweifel exponentiell (2^n Zeilen/Disjunkte)

A_1	A_2	A_3	$(A_1 \vee A_2) \to A_3$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\phi_D = (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \vee (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3)$$

Wiederholung - DNF

- Erfüllbarkeitsproblem für DNF effizient lösbar
- Aber! Konstruktion einer sem. äqu. DNF via Wahrheitstabelle im Zweifel exponentiell (2^n Zeilen/Disjunkte)
- Gibt es eine effizientere Konstruktionsmethode?

  Anwort: Nein! (Håstad, 1986)

  Beweis über n-stellige Paritätsfunktion $A_1 \dot{\vee} \ldots \dot{\vee} A_n$

  (Verallg. ausschließendes Oder)

  Jede sem. äqu. DNF erfordert exp. Anzahl an Disjunkten.

  (gilt analog für KNF)
- Idee: Semantische Äquivalenz ist eine zu starke Forderung, sogenannte Erfüllbarkeitsäquivalenz reicht aus.

…dazu später mehr

Hornformeln

- benannt nach Alfred Horn (1918 – 2001)
- Teilklasse von Formeln für die Erfüllbarkeitsproblem effizient lösbar

Definition

Eine Formel $\phi \in \mathcal{F}$ ist eine Hornformel, sofern

1. $\phi = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij} \right)$, und (in KNF)
2. jedes Konjunkt $\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij}$ besitzt maximal ein positives Literal

Drei Fälle:

$\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee A_{n+1}$	(genau 1 positives Literal)
A_{n+1}	(nur 1 positives Literal)
$\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n$	(kein positives Literal)

Hornformeln

- benannt nach Alfred Horn (1918 – 2001)
- Teilklasse von Formeln, für die das Erfüllbarkeitsproblem effizient lösbar ist

Definition

Eine Formel $\phi \in \mathcal{F}$ ist eine Hornformel, sofern:

1. $\phi = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij} \right)$ (in KNF)
2. jedes Konjunkt $\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij}$ besitzt maximal ein positives Literal

In Implikationsform:

$$
\begin{aligned}
\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee A_{n+1} &\equiv A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to A_{n+1} \\
A_{n+1} &\equiv \top \to A_{n+1} \\
\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n &\equiv A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to \bot
\end{aligned}
$$

Hornformeln

- benannt nach Alfred Horn (1918 – 2001)
- Teilklasse von Formeln, für die das Erfüllbarkeitsproblem effizient lösbar ist

Definition

Eine Formel $\phi \in \mathcal{F}$ ist eine Hornformel, sofern:

1. $\phi = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij} \right)$ (in KNF)
2. jedes Konjunkt $\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij}$ besitzt maximal ein positives Literal

In Implikationsform (übliche Notation):

$$
\begin{aligned}
\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee A_{n+1} &\equiv A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to A_{n+1} \\
A_{n+1} &\equiv 1 \to A_{n+1} \\
\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n &\equiv A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to 0
\end{aligned}
$$

Hornformeln

Definition

Eine Formel $\phi \in \mathcal{F}$ ist eine Hornformel, sofern:

1. $\phi = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij} \right)$ (in KNF)
2. jedes Konjunkt $\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij}$ besitzt maximal ein positives Literal

Bemerkungen:

- Nicht alle Formeln sind Hornformeln. Welche sind keine?

$$A_1 \wedge A_2, \quad A_1 \vee A_2, \quad (\neg A_1 \wedge \neg A_2) \vee A_3$$

Hornformeln

Definition

Eine Formel $\phi \in \mathcal{F}$ ist eine Hornformel, sofern:

1. $\phi = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij} \right)$ (in KNF)
2. jedes Konjunkt $\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij}$ besitzt maximal ein positives Literal

Bemerkungen:

- Nicht alle Formeln sind Hornformeln. Welche sind keine?

$$A_1 \wedge A_2, \quad A_1 \vee A_2, \quad \cancel{(\neg A_1 \wedge \neg A_2) \vee A_3}$$

(nicht in KNF)

Hornformeln

Definition

Eine Formel $\phi \in \mathcal{F}$ ist eine Hornformel, sofern:

1. $\phi = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij} \right)$ (in KNF)
2. jedes Konjunkt $\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij}$ besitzt maximal ein positives Literal

Bemerkungen:

- Nicht alle Formeln sind Hornformeln. Welche sind keine?

$$A_1 \wedge A_2, \quad \cancel{A_1 \vee A_2}, \quad \cancel{(\neg A_1 \wedge \neg A_2) \vee A_3}$$

(2 pos. Lit.) (nicht in KNF)

Hornformeln

Definition

Eine Formel $\phi \in \mathcal{F}$ ist eine Hornformel, sofern:

1. $\phi = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij} \right)$ (in KNF)
2. jedes Konjunkt $\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij}$ besitzt maximal ein positives Literal

Bemerkungen:

- Nicht alle Formeln sind Hornformeln. Welche sind keine?

$$A_1 \wedge A_2, \quad \cancel{A_1 \vee A_2}, \quad \cancel{(\neg A_1 \wedge \neg A_2) \vee A_3}$$

- Aber! $(\neg A_1 \wedge \neg A_2) \vee A_3 \equiv (\neg A_1 \vee A_3) \wedge (\neg A_2 \vee A_3)$
(sem. äqu. zu Hornformel)

- Kann $A_1 \vee A_2$ auch transformiert werden?

Schnitteigenschaft der Modelle

Mengenschreibweise von Interpretationen:

Jede Interpretation $I : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ kann eindeutig mit einer Menge $M_I = \{A \in \mathcal{A} \mid I(A) = 1\}$ identifiziert werden.

Definition

Eine Formel $\phi \in \mathcal{F}$ besitzt die Schnitteigenschaft (der Modelle), sofern für alle $M, M' \in Mod(\phi)$ gilt: $M \cap M' \in Mod(\phi)$.

Proposition

Jede Hornformel ϕ besitzt die Schnitteigenschaft.

Beweis: Übung 3

Beispiel: $\phi = A_1 \vee A_2$ Was können wir folgern?

Da $\{A_1\} \cap \{A_2\} = \varnothing \notin Mod(\phi)$ kann ϕ nicht zu einer Hornformel semantisch äquivalent sein.

Schnitteigenschaft der Modelle

Mengenschreibweise von Interpretationen:

Jede Interpretation $I : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ kann eindeutig mit einer Menge $M_I = \{A \in \mathcal{A} \mid I(A) = 1\}$ identifiziert werden.

Definition

Eine Formel $\phi \in \mathcal{F}$ besitzt die Schnitteigenschaft (der Modelle), sofern für alle $M, M' \in Mod(\phi)$ gilt: $M \cap M' \in Mod(\phi)$.

Proposition

Jede Hornformel ϕ besitzt die Schnitteigenschaft.

Theorem (Horn, 1951)

Eine Formel ϕ ist semantisch äquivalent zu einer Hornformel genau dann, wenn ϕ die Schnitteigenschaft besitzt.

Markierungsalgorithmus

ist ein effizienter Erfüllbarkeitstest für Hornformeln.

Eingabe: Hornformel ϕ in Implikationsform

Ausgabe: $\subseteq$-kleinstes Modell von ϕ oder unerfüllbar

Ablauf:

1. Markiere jedes Vorkommen von A für Implikationen $1 \to A$
2. Wiederhole:
   - Markiere jedes Vorkommen von B für Implikationen $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ wobei $A_1, \ldots, A_n$ schon markiert
   - Falls ein $B = 0$ markiert, gib unerfüllbar aus und stoppe
3. Andernfalls: Gib $M = \{A \mid A \text{ wurde markiert}\}$ aus

Markierungsalgorithmus

1. Markiere jedes Vorkommen von A für Implikationen $1 \to A$
2. Wiederhole:
   - Markiere jedes Vorkommen von B für Implikationen $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ wobei $A_1, \ldots, A_n$ schon markiert
   - Falls ein $B = 0$ markiert, gib unerfüllbar aus und stoppe
3. Andernfalls: Gib $M = \{A \mid A \text{ wurde markiert}\}$ aus

Beispiel:

$$(A_1 \wedge A_2 \to A_3) \wedge (1 \to A_2) \wedge (A_2 \wedge A_3 \to 0) \wedge (A_3 \to A_4) \wedge (A_2 \to A_1)$$

Markierungsalgorithmus

1. Markiere jedes Vorkommen von A für Implikationen $1 \rightarrow A$
2. Wiederhole:
   - Markiere jedes Vorkommen von B für Implikationen $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$ wobei $A_1, \ldots, A_n$ schon markiert
   - Falls ein $B = 0$ markiert, gib unerfüllbar aus und stoppe
3. Andernfalls: Gib $M = \{A \mid A \text{ wurde markiert}\}$ aus

Beispiel:

$$(A_1 \wedge A_2 \rightarrow A_3) \wedge \underline{(1 \rightarrow A_2)} \wedge (A_2 \wedge A_3 \rightarrow 0) \wedge (A_3 \rightarrow A_4) \wedge (A_2 \rightarrow A_1)$$

Markierungsalgorithmus

1. Markiere jedes Vorkommen von A für Implikationen $1 \to A$
2. Wiederhole:
   - Markiere jedes Vorkommen von B für Implikationen $A_1 \land \ldots \land A_n \to B$ wobei $A_1, \ldots, A_n$ schon markiert
   - Falls ein $B = 0$ markiert, gib unerfüllbar aus und stoppe
3. Andernfalls: Gib $M = \{A \mid A \text{ wurde markiert}\}$ aus

Beispiel:

$$(A_1 \land A_2 \to A_3) \land (1 \to A_2) \land (A_2 \land A_3 \to 0) \land (A_3 \to A_4) \land \underline{(A_2 \to A_1)}$$

Markierungsalgorithmus

1. Markiere jedes Vorkommen von A für Implikationen $1 \to A$
2. Wiederhole:
   - Markiere jedes Vorkommen von B für Implikationen $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ wobei $A_1, \ldots, A_n$ schon markiert
   - Falls ein $B = 0$ markiert, gib unerfüllbar aus und stoppe
3. Andernfalls: Gib $M = \{A \mid A \text{ wurde markiert}\}$ aus

Beispiel:

$$(A_1 \wedge A_2 \to A_3) \wedge (1 \to A_2) \wedge (A_2 \wedge A_3 \to 0) \wedge (A_3 \to A_4) \wedge \underline{(A_2 \to A_1)}$$

Markierungsalgorithmus

1. Markiere jedes Vorkommen von A für Implikationen $1 \to A$
2. Wiederhole:
   - Markiere jedes Vorkommen von B für Implikationen $A_1 \land \ldots \land A_n \to B$ wobei $A_1, \ldots, A_n$ schon markiert
   - Falls ein $B = 0$ markiert, gib unerfüllbar aus und stoppe
3. Andernfalls: Gib $M = \{A \mid A \text{ wurde markiert}\}$ aus

Beispiel:

$$\underline{(A_1 \land A_2 \to A_3)} \land (1 \to A_2) \land (A_2 \land A_3 \to 0) \land (A_3 \to A_4) \land (A_2 \to A_1)$$

Markierungsalgorithmus

1. Markiere jedes Vorkommen von A für Implikationen $1 \to A$
2. Wiederhole:
   - Markiere jedes Vorkommen von B für Implikationen $A_1 \land \ldots \land A_n \to B$ wobei $A_1, \ldots, A_n$ schon markiert
   - Falls ein $B = 0$ markiert, gib unerfüllbar aus und stoppe
3. Andernfalls: Gib $M = \{A \mid A \text{ wurde markiert}\}$ aus

Beispiel:

$$\underline{(A_1 \land A_2 \to A_3)} \land (1 \to A_2) \land (A_2 \land A_3 \to 0) \land (A_3 \to A_4) \land (A_2 \to A_1)$$

Markierungsalgorithmus

1. Markiere jedes Vorkommen von A für Implikationen $1 \rightarrow A$
2. Wiederhole:
   - Markiere jedes Vorkommen von B für Implikationen $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$ wobei $A_1, \ldots, A_n$ schon markiert
   - Falls ein $B = 0$ markiert, gib unerfüllbar aus und stoppe
3. Andernfalls: Gib $M = \{A \mid A \text{ wurde markiert}\}$ aus

Beispiel:

$$(A_1 \wedge A_2 \rightarrow A_3) \wedge (1 \rightarrow A_2) \wedge \underline{(A_2 \wedge A_3 \rightarrow 0)} \wedge (A_3 \rightarrow A_4) \wedge (A_2 \rightarrow A_1)$$

Markierungsalgorithmus

1. Markiere jedes Vorkommen von A für Implikationen $1 \to A$
2. Wiederhole:
   - Markiere jedes Vorkommen von B für Implikationen $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ wobei $A_1, \ldots, A_n$ schon markiert
   - Falls ein $B = 0$ markiert, gib unerfüllbar aus und stoppe
3. Andernfalls: Gib $M = \{A \mid A \text{ wurde markiert}\}$ aus

Beispiel:

$$(A_1 \wedge A_2 \to A_3) \wedge (1 \to A_2) \wedge \underline{(A_2 \wedge A_3 \to 0)} \wedge (A_3 \to A_4) \wedge (A_2 \to A_1)$$

unerfüllbar

Hörsaalaufgabe

Überprüfen Sie mithilfe des Markierungsalgorithmus die Erfüllbarkeit der folgenden Hornormel. Bei Fragen konsultieren Sie die Person rechts oder links von Ihnen. (2 Min)

$$(A_1 \wedge A_2 \rightarrow A_3) \wedge (1 \rightarrow A_1) \wedge (A_2 \wedge A_3 \rightarrow 0) \wedge (A_4 \rightarrow A_3) \wedge (1 \rightarrow A_4)$$

1. Markiere jedes Vorkommen von A für Implikationen $1 \rightarrow A$
2. Wiederhole:
   - Markiere jedes Vorkommen von B für Implikationen $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$ wobei $A_1, \ldots, A_n$ schon markiert
   - Falls ein $B = 0$ markiert, gib unerfüllbar aus und stoppe
3. Andernfalls: Gib $M = \{A \mid A \text{ wurde markiert}\}$ aus

Hörsaalaufgabe

Überprüfen Sie mithilfe des Markierungsalgorithmus die Erfüllbarkeit der folgenden Hornformel. Bei Fragen konsultieren Sie die Person rechts oder links von Ihnen. (2 Min)

$$(A_1 \wedge A_2 \rightarrow A_3) \wedge (1 \rightarrow A_1) \wedge (A_2 \wedge A_3 \rightarrow 0) \wedge (A_4 \rightarrow A_3) \wedge (1 \rightarrow A_4)$$

$$\{A_1, A_3, A_4\}$$

1. Markiere jedes Vorkommen von A für Implikationen $1 \rightarrow A$
2. Wiederhole:
   - Markiere jedes Vorkommen von B für Implikationen $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$ wobei $A_1, \ldots, A_n$ schon markiert
   - Falls ein $B = 0$ markiert, gib unerfüllbar aus und stoppe
3. Andernfalls: Gib $M = \{A \mid A \text{ wurde markiert}\}$ aus

Eigenschaften

1. Markiere jedes Vorkommen von A für Implikationen $1 \to A$
2. Wiederhole:
   - Markiere jedes Vorkommen von B für Implikationen $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ wobei $A_1, \ldots, A_n$ schon markiert
   - Falls ein $B = 0$ markiert, gib unerfüllbar aus und stoppe
3. Andernfalls: Gib $M = \{A \mid A \text{ wurde markiert}\}$ aus

Theorem

Markierungsalgorithmus terminiert und ist korrekt.

Beweis:

- Nach spätestens $|s(\phi)|$-Schritten sind alle Atome markiert.
- Zeige, für jedes $M \in Mod(\phi)$: $A \in M$ für jedes markierte A. vollständige Induktion über Anzahl der Markierungsschritte
  - für 0 Schritte ist $A \in M$ für jedes markierte A erfüllt
  - für Schritte der Art 1 werden Atome A mit $1 \to A$ markiert. Da $M \in Mod(\phi)$ muß auch $M \in Mod(1 \to A)$, also insbesondere $A \in M$.

Eigenschaften

1. Markiere jedes Vorkommen von A für Implikationen $1 \to A$
2. Wiederhole:
   - Markiere jedes Vorkommen von B für Implikationen $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ wobei $A_1, \ldots, A_n$ schon markiert
   - Falls ein $B = 0$ markiert, gib unerfüllbar aus und stoppe
3. Andernfalls: Gib $M = \{A \mid A \text{ wurde markiert}\}$ aus

Theorem

Markierungsalgorithmus terminiert und ist korrekt.

Beweis:

- Nach spätestens $|s(\phi)|$-Schritten sind alle Atome markiert.
- Zeige, für jedes $M \in Mod(\phi)$: $A \in M$ für jedes markierte A. vollständige Induktion über Anzahl der Markierungsschritte
  - für 0 Schritte ist $A \in M$ für jedes markierte A erfüllt
  - für Schritte der Art 2 werden Atome B mit $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ markiert, wobei $A_1, \ldots, A_n$ schon markiert. Nach IV gilt $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq M$ für alle $M \in Mod(\phi)$. Somit nach Semantik der Implikation auch $B \in M$.

Eigenschaften

1. Markiere jedes Vorkommen von A für Implikationen $1 \to A$
2. Wiederhole:
   - Markiere jedes Vorkommen von B für Implikationen $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ wobei $A_1, \ldots, A_n$ schon markiert
   - Falls ein $B = 0$ markiert, gib unerfüllbar aus und stoppe
3. Andernfalls: Gib $M = \{A \mid A \text{ wurde markiert}\}$ aus

Theorem

Markierungsalgorithmus terminiert und ist korrekt.

Beweis:

- Nach spätestens $|s(\phi)|$-Schritten sind alle Atome markiert.
- Zeige, für jedes $M \in Mod(\phi)$: $A \in M$ für jedes markierte A.
- Falls Ausgabe unerfüllbar, dann $B = 0$ markiert, für $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ mit schon markierten $A_1, \ldots, A_n$. Aufgrund obigen Satzes wäre mit $M \in Mod(\phi)$ auch $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq M$ und somit aber $M \notin Mod(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B)$. W!

Eigenschaften

1. Markiere jedes Vorkommen von A für Implikationen $1 \rightarrow A$
2. Wiederhole:
   - Markiere jedes Vorkommen von B für Implikationen $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$ wobei $A_1, \ldots, A_n$ schon markiert
   - Falls ein $B = 0$ markiert, gib unerfüllbar aus und stoppe
3. Andernfalls: Gib $M = \{A \mid A \text{ wurde markiert}\}$ aus

Theorem

Markierungsalgorithmus terminiert und ist korrekt.

Beweis:

- Nach spätestens $|s(\phi)|$-Schritten sind alle Atome markiert.
- Zeige, für jedes $M \in Mod(\phi)$: $A \in M$ für jedes markierte A.
- Falls Ausgabe M, dann
  - für Vorkommen $1 \rightarrow A$ in ϕ ist nach 1,3 $A \in M$. Also, $M \in Mod(1 \rightarrow A)$
  - für $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow 0$ ist nach 2 mindestens ein A_i nicht markiert. Nach 3: $A_i \notin M$, d.h. $M \in Mod(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow 0)$

Eigenschaften

1. Markiere jedes Vorkommen von A für Implikationen $1 \to A$
2. Wiederhole:
   - Markiere jedes Vorkommen von B für Implikationen $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ wobei $A_1, \ldots, A_n$ schon markiert
   - Falls ein $B = 0$ markiert, gib unerfüllbar aus und stoppe
3. Andernfalls: Gib $M = \{A \mid A \text{ wurde markiert}\}$ aus

Theorem

Markierungsalgorithmus terminiert und ist korrekt.

Beweis:

- Nach spätestens $|s(\phi)|$-Schritten sind alle Atome markiert.
- Zeige, für jedes $M \in Mod(\phi)$: $A \in M$ für jedes markierte A.
- Falls Ausgabe M, dann
  - für Vorkommen $1 \to A$ in ϕ ist nach 1,3 $A \in M$. Also, $M \in Mod(1 \to A)$
  - für $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ mit $B \neq 0$. Falls $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq M$, dann nach 2,3 $B \in M$. Somit $M \in Mod(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B)$.
    Falls $\{A_1, \ldots, A_n\} \nsubseteq M$, dann trivialerweise Modell

Eigenschaften

1. Markiere jedes Vorkommen von A für Implikationen $1 \to A$
2. Wiederhole:
   - Markiere jedes Vorkommen von B für Implikationen $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ wobei $A_1, \ldots, A_n$ schon markiert
   - Falls ein $B = 0$ markiert, gib unerfüllbar aus und stoppe
3. Andernfalls: Gib $M = \{A \mid A \text{ wurde markiert}\}$ aus

Theorem

Markierungsalgorithmus terminiert und ist korrekt.

Anmerkungen:

- bei geeigneten Implementierung läuft Algorithmus in Linearzeit
- Ausgabe M ist sogar $\subseteq$-kleinstes Modell
- Programmiersprache Prolog basiert auf Hornformeln
- Expertensystem MYCIN zur Diagnose und Therapie von Infektionskrankheiten (70er Jahre)

Resolutionsverfahren

- eingeführt 1965 von John Alan Robinson
- Verfahren zum Testen auf Unerfüllbarkeit (bzw. Erfüllbarkeit)
- benötigt KNF als Eingabe
- Idee: Implementiere

$$(\phi \vee A) \wedge (\psi \vee \neg A) \vDash \phi \vee \psi$$

  als rein syntaktische Regel
- Ziel: Ableitung leerer Klausel zum Nachweis der Unerfüllbarkeit

Input KNF

- Herstellung einer semantisch äquivalenten KNF im Allgemeinen nicht effizient machbar (Paritätsfunktion)
- Aber! für Test reicht Erfüllbarkeitsäquivalenz aus

Definition

Zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathcal{F}$ sind erfüllbarkeitsäquivalent sofern:

$$\phi \text{ erfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad \psi \text{ erfüllbar}$$

Beispiele:

A_1 und $A_2 \wedge A_3$ sind erfüllbarkeitsäquivalent
A_1 und $A_2 \vee \neg A_2$ sind erfüllbarkeitsäquivalent
A_1 und $A_2 \wedge \neg A_2$ sind es nicht

- Frage: Wieviele Äquivalenzklassen gibt es in Bezug auf Semantische Äquivalenz bzw. Erfüllbarkeitsäquivalenz?

Input KNF

- Herstellung einer semantisch äquivalenten KNF i.A. nicht effizient machbar (Paritätsfunktion)
- Aber! für Test reicht Erfüllbarkeitsäquivalenz aus

Definition

Zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathcal{F}$ sind erfüllbarkeitsäquivalent sofern:

$$\phi \text{ erfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad \psi \text{ erfüllbar}$$

Beispiele:

A_1 und $A_2 \wedge A_3$ sind erfüllbarkeitsäquivalent
A_1 und $A_2 \vee \neg A_2$ sind erfüllbarkeitsäquivalent
A_1 und $A_2 \wedge \neg A_2$ sind es nicht

- zu jeder Formel existiert erfüllbarkeitsäquivalente KNF, die in polynomieller Zeit hergestellt werden kann (Tseitin-Transformation)

Repräsentation der KNF

Definition

- Eine Klausel ist eine endliche Menge von Literalen. Leere Klausel wird mit $\square$ bezeichnet
- Einer KNF $\phi = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij} \right)$ wird Klauselmenge $M(\phi) = \{C_1, \ldots, C_n\}$ zugeordnet, wobei $C_i = \{L_{i1}, \ldots, L_{im_i}\}$

Beispiele:

$$\phi = (A_1 \lor \neg A_2) \land (\neg A_1 \lor A_3) \land (\neg A_2 \lor \neg A_3 \lor A_4)$$

$$M(\phi) = \{\{A_1, \neg A_2\},\ \{\neg A_1, A_3\},\ \{\neg A_2, \neg A_3, A_4\}\}$$

$$\psi = (\neg A_1 \lor A_2 \lor A_4) \land (A_2 \lor \neg A_3) \land (\neg A_3 \lor A_2)$$

$$M(\psi) = \{\{\neg A_1, A_2, A_4\},\ \{A_2, \neg A_3\}\}$$

Repräsentation der KNF

Definition

- Eine Klausel ist eine endliche Menge von Literalen. Leere Klausel wird mit $\square$ bezeichnet
- Einer KNF $\phi = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij} \right)$ wird Klauselmenge $M(\phi) = \{C_1, \ldots, C_n\}$ zugeordnet, wobei $C_i = \{L_{i1}, \ldots, L_{im_i}\}$

Bestimmen Sie $M(\phi)$:

$$\phi = (A_1 \vee A_1) \wedge (\neg A_1 \vee A_3) \wedge (\neg A_1 \vee A_3 \vee A_4)$$

$$M(\phi) = \{\{A_1\},\ \{\neg A_1, A_3\},\ \{\neg A_1, A_3, A_4\}\}$$

Repräsentation der KNF

Definition

- Eine Klausel ist eine endliche Menge von Literalen. Leere Klausel wird mit $\square$ bezeichnet
- Einer KNF $\phi = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij} \right)$ wird Klauselmenge $M(\phi) = \{C_1, \ldots, C_n\}$ zugeordnet, wobei $C_i = \{L_{i1}, \ldots, L_{im_i}\}$

- Umgekehrt kann jede Klauselmenge $M = \{C_1, \ldots, C_n\}$ mit einer KNF $\bigwedge_{i=1}^{n} (\bigvee C_i)$ identifiziert werden, und somit übertragen sich semantische Begriffe wie Erfüllbarkeit

Wichtig Grenzfälle:

- leere Klausel $\square$ führt zur „leeren Disjunktion" und wird als unerfüllbar gesetzt (Warum sinnvoll?)
- Somit jede Klauselmenge M mit $\square \in M$ unerfüllbar
- (eher uninteressant, aber vollständigkeitshalber) führt $M = \varnothing$ zur „leeren Konjunktion" und ist tautologisch

Resolvente

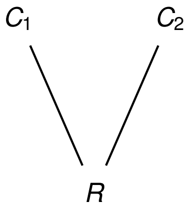
Definition

Seien C_1, C_2 Klauseln. Eine Klausel R heißt Resolvente von C_1 und C_2, falls es ein Literal L gibt, sodass:

$$L \in C_1, \quad \overline{L} \in C_2 \quad \text{und} \quad R = (C_1 \setminus \{L\}) \cup \left(C_2 \setminus \{\overline{L}\}\right)$$

(Resolution nach L)

Graphische Darstellung:



Resolvente

Definition

Seien C_1, C_2 Klauseln. Eine Klausel R heißt Resolvente von C_1 und C_2, falls es ein Literal L gibt, sodass:

$$L \in C_1, \quad \overline{L} \in C_2 \quad \text{und} \quad R = (C_1 \setminus \{L\}) \cup \left(C_2 \setminus \{\overline{L}\}\right)$$

(Resolution nach L)

Beispiele:

$$\begin{array}{ccc} \{A_1, \neg A_2\} & & \{A_2, A_3\} \\ & R & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C_1 & & C_2 \\ & R & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C_1 & & C_2 \\ & R & \end{array}$$

Resolvente

Definition

Seien C_1, C_2 Klauseln. Eine Klausel R heißt Resolvente von C_1 und C_2, falls es ein Literal L gibt, sodass:

$$L \in C_1, \quad \overline{L} \in C_2 \quad \text{und} \quad R = (C_1 \setminus \{L\}) \cup \left(C_2 \setminus \{\overline{L}\}\right)$$

(Resolution nach L)

Beispiele:

$\{A_1, \neg A_2\}$ $\{A_2, A_3\}$ $\quad$ C_1 C_2 $\quad$ C_1 C_2

$\{A_1, A_3\}$ $\quad$ R $\quad$ R

Resolution nach A_2

Resolvente

Definition

Seien C_1, C_2 Klauseln. Eine Klausel R heißt Resolvente von C_1 und C_2, falls es ein Literal L gibt, sodass:

$$L \in C_1, \quad \overline{L} \in C_2 \quad \text{und} \quad R = (C_1 \setminus \{L\}) \cup \left(C_2 \setminus \{\overline{L}\}\right)$$

(Resolution nach L)

Beispiele:

$$\{A_1, \neg A_2\} \quad \{A_2, A_3\} \qquad \{A_1, \neg A_2\} \quad \{A_2, \neg A_2, \neg A_3\} \qquad C_1 \quad C_2$$

$$\{A_1, A_3\} \qquad\qquad R \qquad\qquad R$$

Resolution nach A_2

Resolvente

Definition

Seien C_1, C_2 Klauseln. Eine Klausel R heißt Resolvente von C_1 und C_2, falls es ein Literal L gibt, sodass:

$$L \in C_1, \quad \overline{L} \in C_2 \quad \text{und} \quad R = (C_1 \setminus \{L\}) \cup \left(C_2 \setminus \{\overline{L}\}\right)$$

(Resolution nach L)

Beispiele:

$\{A_1, \neg A_2\}$ $\{A_2, A_3\}$

$\{A_1, A_3\}$

$\{A_1, \neg A_2\}$ $\{A_2, \neg A_2, \neg A_3\}$

$\{A_1, \neg A_2, \neg A_3\}$

C_1 C_2

R

Resolution nach A_2

Resolvente

Definition

Seien C_1, C_2 Klauseln. Eine Klausel R heißt Resolvente von C_1 und C_2, falls es ein Literal L gibt, sodass:

$$L \in C_1, \quad \overline{L} \in C_2 \quad \text{und} \quad R = (C_1 \setminus \{L\}) \cup \left(C_2 \setminus \{\overline{L}\}\right)$$

(Resolution nach L)

Beispiele:

$\{A_1, \neg A_2\}$ $\{A_2, A_3\}$ → $\{A_1, A_3\}$

$\{A_1, \neg A_2\}$ $\{A_2, \neg A_2, \neg A_3\}$ → $\{A_1, \neg A_2, \neg A_3\}$

$\{A_1\}$ $\{\neg A_1\}$ → $\square$

Resolution nach A_1

Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

4. Hornformeln und Resolution

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

08. Mai 2025
Leipzig

Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

5. Kompaktheit und Interpolation

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

15. Mai 2025
Leipzig

In der letzten Vorlesung

Wiederholung: Erfüllbarkeit DNF

Hornformeln

Resolution (bis einschließlich Resolvente)

Fahrplan für diese Vorlesung

Resolution

Kompaktheitssatz

Interpolationstheorem

Abschluß AL

Resolvente

Definition

Seien C_1, C_2 Klauseln. Eine Klausel R heißt Resolvente von C_1 und C_2, falls es ein Literal L gibt, sodass:

$$L \in C_1, \quad \overline{L} \in C_2 \quad \text{und} \quad R = (C_1 \setminus \{L\}) \cup \left(C_2 \setminus \{\overline{L}\}\right)$$

(Resolution nach L)

Beispiele:

$\{A_1, \neg A_2\}$ $\{A_2, A_3\}$ ⟶ $\{A_1, A_3\}$

$\{A_1, \neg A_2\}$ $\{A_2, \neg A_2, \neg A_3\}$ ⟶ $\{A_1, \neg A_2, \neg A_3\}$

$\{A_1\}$ $\{\neg A_1\}$ ⟶ $\square$

Resolution nach A_1

Resolutionslemma

Lemma

Sei M Klauselmenge, Klauseln $C_1, C_2 \in M$ und R Resolvente von C_1 und C_2. Es gilt: $M \equiv M \cup \{R\}$.

Beweis: Wir wissen,

$$\underbrace{(\phi \vee A)}_{C_1} \wedge \underbrace{(\psi \vee \neg A)}_{C_2} \models \underbrace{\phi \vee \psi}_{R}$$

Somit folgt rein mengentheoretisch,

$$\underbrace{(\phi \vee A)}_{C_1} \wedge \underbrace{(\psi \vee \neg A)}_{C_2} \equiv \underbrace{(\phi \vee A)}_{C_1} \wedge \underbrace{(\psi \vee \neg A)}_{C_2} \wedge \underbrace{(\phi \vee \psi)}_{R}$$

Nach Ersetzungstheorem,

$$M \equiv M \cup \{R\}$$

Resolutionshülle

Definition

Sei M eine Klauselmenge. Wir definieren:

$$\mathrm{Res}(M) = M \cup \{R \mid R \text{ ist Resolvente zweier Klauseln aus } M\}$$

Außerdem setzen wir:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}^0(M) &= M \\
\mathrm{Res}^{i+1}(M) &= \mathrm{Res}(\mathrm{Res}^i(M)) \\
\mathrm{Res}^*(M) &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Res}^i(M)
\end{aligned}$$

wobei $\mathrm{Res}^*(M)$ die Resolutionshülle von M genannt wird.

Beispiel: Sei $M = \{\{A_1, A_2\},\ \{\neg A_1, A_3\},\ \{\neg A_2, \neg A_3\}\} = \mathrm{Res}^0(M)$

Resolutionshülle

Definition

Sei M eine Klauselmenge. Wir definieren:

$$\mathrm{Res}(M) = M \cup \{R \mid R \text{ ist Resolvente zweier Klauseln aus } M\}$$

Außerdem setzen wir:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^0(M) &= M\\ \mathrm{Res}^{i+1}(M) &= \mathrm{Res}(\mathrm{Res}^i(M))\\ \mathrm{Res}^*(M) &= \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Res}^i(M)\end{aligned}$$

Beispiel: Sei $M = \{\{A_1, A_2\},\ \{\neg A_1, A_3\},\ \{\neg A_2, \neg A_3\}\} = \mathrm{Res}^0(M)$

$$\mathrm{Res}^1(M) = \mathrm{Res}^0(M)\ \cup\ \{\{A_2, A_3\},\ \{A_1, \neg A_3\},\ \{\neg A_1, \neg A_2\}\}$$

$$\mathrm{Res}^2(M) = \mathrm{Res}^1(M) \cup \{\{A_1, \neg A_1\},\ \{A_2, \neg A_2\},\ \{A_3, \neg A_3\}\}$$

$$\mathrm{Res}^3(M) = \mathrm{Res}^2(M) = \mathrm{Res}^*(M)$$

Resolutionshülle

Definition

Sei M eine Klauselmenge. Wir definieren:

$$\mathrm{Res}(M) = M \cup \{R \mid R \text{ ist Resolvente zweier Klauseln aus } M\}$$

Außerdem setzen wir:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}^0(M) &= M \\
\mathrm{Res}^{i+1}(M) &= \mathrm{Res}(\mathrm{Res}^i(M)) \\
\mathrm{Res}^*(M) &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Res}^i(M)
\end{aligned}$$

Einfache Eigenschaften:

- $\mathrm{Res}^i(M) \subseteq \mathrm{Res}^{i+1}(M)$ für $i \geq 0$
- Wenn $M' \subseteq M$, dann $\mathrm{Res}^*(M') \subseteq \mathrm{Res}^*(M)$
- $M \equiv \mathrm{Res}^1(M) \equiv \mathrm{Res}^2(M) \equiv \ldots \equiv \mathrm{Res}^*(M)$
- $|\mathrm{Res}^*(M)| \leq 2^{2n} = 4^n$ falls $|s(M)| = n$

Resolutionssatz

Theorem (Robinson, 1965)

Sei M eine endliche Klauselmenge. Es gilt:

$$M \text{ unerfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad \Box \in \mathrm{Res}^*(M)$$

Beweis:
($\Leftarrow$) Wenn $\Box \in \mathrm{Res}^*(M)$, dann $\mathrm{Res}^*(M)$ unerfüllbar. Wegen Resolutionslemma folgt M unerfüllbar. (Korrektheit)
($\Rightarrow$) Sei M unerfüllbar, dann $M \neq \emptyset$. Wir beweisen $\Box \in \mathrm{Res}^*(M)$ über Anzahl Atome in M, d.h. $|s(M)|$.

- Sei $|s(M)| = 0$. Dann $M = \{\Box\}$ und somit unerfüllbar. (IA)
- Sei $|s(M)| = n + 1$. Wähle ein $A \in s(M)$ und setze

  $$M^0 = \{C \setminus A \mid \neg A \notin C, C \in M\}, \; M^1 = \{C \setminus \neg A \mid A \notin C, C \in M\}$$

  Da M unerfüllbar, sind auch M^0 und M^1 unerfüllbar, denn sei z.B. $I(M^0) = 1$, dann $I'(M) = 1$ mit $I'(A_i) = 0$, falls $A_i = A$; und $I'(A_i) = I(A_i)$ sonst. Fall $I(M^1) = 1$ analog. Nach (IV) $\Box \in \mathrm{Res}^*(M^0)$ und $\Box \in \mathrm{Res}^*(M^1)$.

Resolutionssatz

Theorem (Robinson, 1965)

Sei M eine endliche Klauselmenge. Es gilt:

$$M \text{ unerfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad \square \in \mathrm{Res}^*(M)$$

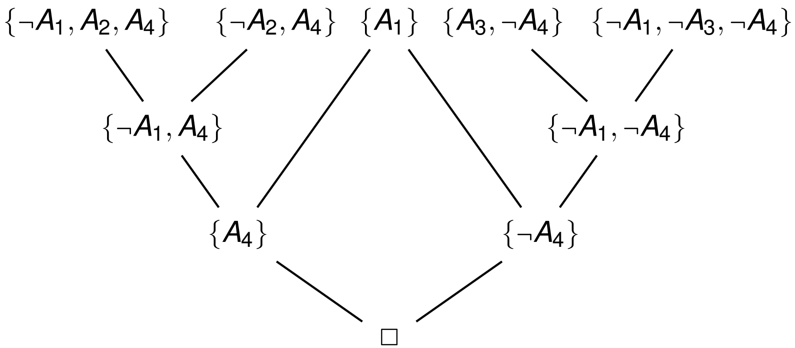
Beweis:
$(\Rightarrow)$ $M^0 = \{C \setminus A \mid \neg A \notin C, C \in M\}$, $\square \in \mathrm{Res}^*(M^0)$. Somit existiert Folge $C_1, \ldots, C_m$ mit 1. $C_m = \square$, und 2. $C_i \in M^0$, oder C_i Resolvente von C_k und C_l mit $k, l < i$. Definiere Folge $C'_1, \ldots, C'_m$ mit

- Falls $C_i \in M^0$ und $C_i \in M$, dann setze $C'_i = C_i$ ($C'_i \in M$)
- Falls $C_i \in M^0$ und $C_i \notin M$, dann setze $C'_i = C_i \cup \{A\}$ ($C'_i \in M$)
- Falls $C_i \notin M^0$, dann C_i Resolvente von C_k und C_l nach L. Setze C'_i Resolvente von C'_k und C'_l nach L ($C'_i \in \mathrm{Res}^*(M)$)

Somit: $C'_m = \square$ od. $C'_m = \{A\}$ ($\square \in \mathrm{Res}^*(M)$ od. $\{A\} \in \mathrm{Res}^*(M)$)
Analog für Folge aus M^1. ($\square \in \mathrm{Res}^*(M)$ od. $\{\neg A\} \in \mathrm{Res}^*(M)$)
Für alle Kombinationen $\square \in \mathrm{Res}^*(M)$. (Korrektheit)

Graphische $\square$-Deduktion

$$M = \{\{A_1\}, \{\neg A_2, A_4\}, \{\neg A_1, A_2, A_4\}, \{A_3, \neg A_4\}, \{\neg A_1, \neg A_3, \neg A_4\}\}$$



- $\square$-Deduktion enthält nicht alle möglichen Resolventen. Hier zum Beispiel $\{\neg A_2, A_3\} \in \mathrm{Res}^*(M)$ nicht verwendet
- Aber! Es gibt unerfüllbare Mengen M, für die jede $\square$-Deduktion exponentiell lang ist. (Satz von Haken, 1985)

Kompaktheitssatz

- zentraler Satz der AL
- Werkzeug um semantische Eigenschaften unendlicher Mengen mithilfe von endlichen Teilmengen zu beweisen

Proposition

Gegeben eine Formelmenge $T \subseteq \mathcal{F}$. Es gilt:

$$T \text{ erfüllbar gdw. jede endliche TM } T' \subseteq T \text{ ist erfüllbar}$$

Beweis:
($\Rightarrow$) Sei T erfüllbar, d.h. $Mod(T) \neq \emptyset$. Aufgrund der Antimonotonie folgt mit $T' \subseteq T$, sofort $Mod(T) \subseteq Mod(T')$.

($\Leftarrow$) Definiere $T_n = \{\phi \in T \mid s(\phi) \subseteq \{A_1, \ldots, A_n\}\}$. Es existieren endliche TM $T'_n \subseteq T_n$ mit:

- für jedes $\phi \in T_n$, existiert $\phi' \in T'_n$ mit $\phi \equiv \phi'$
- $|T'_n| \leq 2^{2^n}$ (Warum?)

Kompaktheitssatz

Proposition

Gegeben eine Formelmenge $T \subseteq \mathcal{F}$. Es gilt:

$$T \text{ erfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad \text{jede endliche TM } T' \subseteq T \text{ ist erfüllbar}$$

($\Leftarrow$) Definiere $T'_n \subseteq T_n = \{\phi \in T \mid s(\phi) \subseteq \{A_1, \dots, A_n\}\}$ mit:

- für jedes $\phi \in T_n$, existiert $\phi' \in T'_n$ mit $\phi \equiv \phi'$
- $|T'_n| \leq 2^{2^n}$

Per Definition $Mod(T_n) = Mod(T'_n)$ und nach Annahme (da T'_n endlich) existiert $I_n \in Mod(T_n)$. Konstruiere nun ein $I \in Mod(T)$: Setze $J_0 = \mathbb{N}$ und definiere schrittweise $I(A_1)$, $I(A_2)$, ... wie folgt

- $I(A_n) = 1$, falls unendlich viele $j \in J_{n-1}$ mit $I_j(A_n) = 1$ existieren; setze $J_n = \{j \in J_{n-1} \mid I_j(A_n) = 1\}$
- Andernfalls, $I(A_n) = 0$; und setze $J_n = \{j \in J_{n-1} \mid I_j(A_n) = 0\}$

Kompaktheitssatz

Proposition

Gegeben eine Formelmenge $T \subseteq \mathcal{F}$. Es gilt:

$$T \text{ erfüllbar gdw. jede endliche TM } T' \subseteq T \text{ ist erfüllbar}$$

Es gilt:

1. $J_0 \supseteq J_1 \supseteq J_2 \supseteq \dots$ (absteigende Kette)
2. $|J_n| = |\mathbb{N}|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (unendl. viele Indizes)
3. für alle $n \in \mathbb{N}$ und $j \in J_n$ gilt: (evaluieren gleich)
   $$I_j(A_1) = I(A_1), \quad I_j(A_2) = I(A_2), \quad \dots \quad , I_j(A_n) = I(A_n)$$
4. $I(T) = 1$. (Konstruktion ist Modell)
   Beweis: Sei $\phi \in T$, dann ex. $n \in \mathbb{N}$: $\phi \in T_i$ für alle $i \geq n$. Also, ist $I_i(\phi) = 1$ für alle $i \geq n$. Da J_n unendlich, ex. ein Index $j \geq n$ mit $j \in J_n$. Für dieses j gilt: $I_j(A_1) = I(A_1), \dots, I_j(A_n) = I(A_n)$. Da $j \geq n$ ist $I_j(\phi) = 1$ somit $I(\phi) = 1$ und schließlich, $I(T) = 1$. $\square$

Anwendungen des Kompaktheitssatz

Theorem (Resolutionssatz für unendliche Mengen)

Sei M eine Klauselmenge. Es gilt:

$$M \text{ unerfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad \square \in \mathrm{Res}^*(M)$$

Beweis:
($\Leftarrow$) analog zum endlichen Fall
($\Rightarrow$) Sei M unerfüllbar, dann ex. endl. TM $M' \subseteq M$ unerfüllbar.
Somit nach Resolutionssatz endlicher Fall $\square \in \mathrm{Res}^*(M')$.
Schließlich wegen $\subseteq$-Monotonie von Res^* folgt $\square \in \mathrm{Res}^*(M)$.

Theorem (Färbbarkeit für unendliche Graphen)

Sei G ein ungerichteter Graph. Es gilt:

G ist $k-$färbbar gdw. jeder endl. Untergraph von G ist $k-$färbbar

Beweis/Erklärungen: Tafel

Interpolationstheorem

Theorem (Craig, 1957)

Gegeben zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathcal{F}$ mit der Eigenschaft $\phi \models \psi$.
Dann existiert eine Interpolante $\xi \in \mathcal{F}$ mit:

1. $s(\xi) \subseteq s(\phi) \cap s(\psi)$ *(Schnittsprache)*
2. $\phi \models \xi$ *und* $\xi \models \psi$ *(Vermittlerin)*

Bsp.: Für $\phi = A_1 \wedge A_2$, $\psi = A_1 \vee A_3$ wäre $\xi = A_1$ eine Interpolante.

- Substitution $[\xi/A_i] : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ mit $\phi \mapsto \phi[\xi/A_i]$ $\quad (A_i \in \mathcal{A}, \xi \in \mathcal{F})$

$$A_j[\xi/A_i] = \begin{cases} \xi & , i = j \\ A_j & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$(\neg\phi)[\xi/A_i] = \neg\,(\phi[\xi/A_i])$$

$$(\phi \circ \psi)[\xi/A_i] = \phi[\xi/A_i] \circ \psi[\xi/A_i] \quad \text{mit } \circ \in \{\wedge, \vee\}$$

(ersetze in ϕ jedes Vorkommen von A_i durch ξ)

Interpolationstheorem

Theorem (Craig, 1957)

Gegeben zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathcal{F}$ mit der Eigenschaft $\phi \models \psi$.
Dann existiert eine Interpolante $\xi \in \mathcal{F}$ mit:

1. $s(\xi) \subseteq s(\phi) \cap s(\psi)$ *(Schnittsprache)*
2. $\phi \models \xi$ *und* $\xi \models \psi$ *(Vermittlerin)*

Bsp.: Für $\phi = A_1 \wedge A_2$, $\psi = A_1 \vee A_3$ wäre $\xi = A_1$ eine Interpolante.

- Gegeben Interpretation $I \in \mathcal{B}$. Definiere

$$I_{[A_i \mapsto 1]}(A_j) = \begin{cases} 1 & , i = j \\ I(A_j) & , \text{sonst} \end{cases}$$

(punktuelle Änderung von I)

- Für jedes $\phi \in \mathcal{F}$ gilt: (Übung 4)

$$I_{[A \mapsto 1]}(\phi) = I(\phi[\top/A]) \qquad I_{[A \mapsto 0]}(\phi) = I(\phi[\bot/A])$$

Interpolationstheorem

Theorem (Craig, 1957)

Gegeben zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathcal{F}$ mit der Eigenschaft $\phi \vDash \psi$. Dann existiert eine Interpolante $\xi \in \mathcal{F}$ mit:

1. $s(\xi) \subseteq s(\phi) \cap s(\psi)$ *(Schnittsprache)*
2. $\phi \vDash \xi$ *und* $\xi \vDash \psi$ *(Vermittlerin)*

Beweis: vollständige Induktion über $|s(\phi) \setminus s(\psi)|$

- $n = 0$, d.h. $s(\phi) \subseteq s(\psi)$. Somit $s(\phi) \cap s(\psi) = s(\phi)$. Setze $\xi = \phi$. Offensichtlich, $\phi \vDash \xi$ und $\xi \vDash \psi$. (IA)
- Existenz einer Interpolante für $|s(\phi) \setminus s(\psi)| = n$. (IV)
- Sei $|s(\phi) \setminus s(\psi)| = n + 1$ und $A \in s(\phi) \setminus s(\psi)$. Betrachte $\phi_1 = \phi[\top/A]$ und $\phi_2 = \phi[\bot/A]$. Für jedes $I \in \mathcal{B}$ gilt: $I = I_{[A \mapsto 1]}$ oder $I = I_{[A \mapsto 0]}$. Somit $\phi \vDash \phi_1 \vee \phi_2$. Des Weiteren ist mit $I(\phi_1) = 1$ auch $I_{[A \mapsto 1]}(\phi) = 1$ und somit $I_{[A \mapsto 1]}(\psi) = 1$. Da $A \notin s(\psi)$ folgt mit Koinzidenzsatz $I(\psi) = 1$. Folglich $\phi_1 \vDash \psi$ und analog $\phi_2 \vDash \psi$.

Interpolationstheorem

Theorem (Craig, 1957)

Gegeben zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathcal{F}$ mit der Eigenschaft $\phi \vDash \psi$. Dann existiert eine Interpolante $\xi \in \mathcal{F}$ mit:

1. $s(\xi) \subseteq s(\phi) \cap s(\psi)$ *(Schnittsprache)*
2. $\phi \vDash \xi$ *und* $\xi \vDash \psi$ *(Vermittlerin)*

Beweis: vollständige Induktion über $|s(\phi) \setminus s(\psi)|$

- $n = 0$, d.h. $s(\phi) \subseteq s(\psi)$. Somit $s(\phi) \cap s(\psi) = s(\phi)$. Setze $\xi = \phi$. Offensichtlich, $\phi \vDash \xi$ und $\xi \vDash \psi$. (IA)
- Existenz einer Interpolante für $|s(\phi) \setminus s(\psi)| = n$. (IV)
- Folglich $\phi_1 \vDash \psi$ und $\phi_2 \vDash \psi$. Da $|s(\phi_1) \setminus s(\psi)| = n$ und $|s(\phi_2) \setminus s(\psi)| = n$ existieren nach IV Interpolanten ξ_1, ξ_2 mit:

$$\phi_1 \vDash \xi_1, \; \xi_1 \vDash \psi \quad \text{und} \quad \phi_2 \vDash \xi_2, \; \xi_2 \vDash \psi$$

Daraus folgt $\phi_1 \vee \phi_2 \vDash \xi_1 \vee \xi_2$ und $\xi_1 \vee \xi_2 \vDash \psi$. Schließlich gilt mit $\phi \vDash \phi_1 \vee \phi_2$ auch $\phi \vDash \xi_1 \vee \xi_2$. $\square$

Interpolationstheorem

Theorem (Craig, 1957)

Gegeben zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathcal{F}$ *mit der Eigenschaft* $\phi \vDash \psi$.
Dann existiert eine Interpolante $\xi \in \mathcal{F}$ *mit:*

1. $s(\xi) \subseteq s(\phi) \cap s(\psi)$ *(Schnittsprache)*
2. $\phi \vDash \xi$ *und* $\xi \vDash \psi$ *(Vermittlerin)*

Beweis: vollständige Induktion über $|s(\phi) \setminus s(\psi)|$

- $n = 0$, d.h. $s(\phi) \subseteq s(\psi)$. Somit $s(\phi) \cap s(\psi) = s(\phi)$. Setze $\xi = \phi$. Offensichtlich, $\phi \vDash \xi$ und $\xi \vDash \psi$. (IA)
- Existenz einer Interpolante für $|s(\phi) \setminus s(\psi)| = n$. (IV)
- Folglich $\phi_1 \vDash \psi$ und $\phi_2 \vDash \psi$. Da $|s(\phi_1) \setminus s(\psi)| = n$ und $|s(\phi_2) \setminus s(\psi)| = n$ existieren nach IV Interpolanten ξ_1, ξ_2 mit:

$$\phi_1 \vDash \xi_1,\ \xi_1 \vDash \psi \quad \text{und} \quad \phi_2 \vDash \xi_2,\ \xi_2 \vDash \psi$$

Daraus folgt $\phi_1 \vee \phi_2 \vDash \xi_1 \vee \xi_2$ und $\xi_1 \vee \xi_2 \vDash \psi$. Schließlich gilt mit $\phi \vDash \phi_1 \vee \phi_2$ auch $\phi \vDash \xi_1 \vee \xi_2$. $\square$

Abschlußbemerkungen zur AL

Eindeutige Rekonstruierbarkeit

Funktionale Vollständigkeit

Lineare, Input, Unit Resolution ...

Kalküle

Intuitionistische Logik

Mehrwertige Logiken

Infinitäre Logik

Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

5. Kompaktheit und Interpolation

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

15. Mai 2025
Leipzig

Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

6. Prädikatenlogik 1. Stufe – Syntax und Semantik

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

22. Mai 2025
Leipzig

In der letzten Vorlesung

Resolution

Kompaktheitssatz

Interpolationstheorem

Abschluß AL

Fahrplan für diese Vorlesung

Terme

Formeln

Strukturen

Semantik

Prädikatenlogik (1. Stufe)

- Gottlob Frege (1879, *Begriffsschrift*), Alfred Tarski (1933, *Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*)
- FOL erfasst die innere Struktur von Aussagen, z.B. "Alle Menschen sind sterblich."

  AL: A_1 FOL: $\forall x\,(\mathit{Mensch}(x) \to \mathit{Sterblich}(x))$
- neben den bekannten Junktoren haben wir zusätzlich:

  Prädikatensymbole (für Relationen)

  Funktions- und Konstantensymbole

  Variablen für Individuen

  Quantorensymbole
- Wahrheit oder Falschheit ergibt sich erst durch:

  Festlegen eines Grundbereichs (Diskursuniversum)

  Interpretation der Prädikaten- und Funktionssymbole

$$\exists x\,(x < 0) \quad \exists y\,\forall x\,(y + x = y) \quad \forall x \forall y (P(x, y) \to P(y, x))$$

Syntax

- Individuenvariablen $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ $(x, y, z, \ldots)$
- Prädikatensymbole $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$ $(P, Q, R, \ldots)$
- Funktionssymbole $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3, \ldots\}$ $(f, g, h \ldots)$

Prädikaten- und Funktionssymbole besitzen eine Stelligkeit, die Arität $ar \colon \mathcal{P} \cup \mathcal{F} \to \mathbb{N}$

- P heißt n-stellig, falls $ar(P) = n$ (kurz P^n)
- f heißt n-stellig, falls $ar(f) = n$ (kurz f^n)
- Konstantensymbole $\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{F} \mid ar(f) = 0\}$ $(a, b, c, \ldots)$

Definition

Die Menge der Terme $\mathcal{T}$ ist induktiv definiert durch:

1. $\mathcal{V} \cup \mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ (Primterme)
2. Falls $f^n \in \mathcal{F}$ mit $n \geq 1$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$, dann $f^n(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}$

Bsp.: x, c, $f(y)$, $g(x, y)$, $g(x, f(c))$, $g(g(c, x), y), \ldots$

Syntax

- Individuenvariablen $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ $(x, y, z, \ldots)$
- Prädikatensymbole $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$ $(P, Q, R, \ldots)$
- Funktionssymbole $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3, \ldots\}$ $(f, g, h \ldots)$

$\mathcal{T} = (P_1, P_2, P_3, \ldots, f_1, f_2, f_3, \ldots)$ heißt auch Signatur

Prädikaten- und Funktionssymbole besitzen eine Stelligkeit, die Arität $ar : \mathcal{P} \cup \mathcal{F} \to \mathbb{N}$

- P heißt n-stellig, falls $ar(P) = n$ (kurz P^n)
- f heißt n-stellig, falls $ar(f) = n$ (kurz f^n)
- Konstantensymbole $\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{F} \mid ar(f) = 0\}$ $(a, b, c, \ldots)$

Definition

Die Menge der Terme $\mathcal{T}$ ist induktiv definiert durch:

1. $\mathcal{V} \cup \mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ (Primterme)
2. Falls $f^n \in \mathcal{F}$ mit $n \geq 1$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$, dann $f^n(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}$

Bsp.: x, c, $f(y)$, $g(x, y)$, $g(x, f(c))$, $g(g(c, x), y)$, ...

Terme

Definition

Die Menge der Terme $\mathcal{T}$ ist induktiv definiert durch:

1. $\mathcal{V} \cup \mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ (Primterme)
2. Falls $f^n \in \mathcal{F}$ mit $n \geq 1$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$, dann $f^n(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}$

- in bestimmten Fällen Infixnotation statt Präfixnotation, z.B:

$$\begin{aligned} x + y &\quad \text{statt} \quad +(x, y) \\ (x \cdot y) + z &\quad \text{statt} \quad +(\cdot(x, y), z) \end{aligned}$$

- Induktion über den Termaufbau (Induktionsprinzip)
- Rekursion über den Termaufbau (Rekursionssprinzip)

  $var : \mathcal{T} \to 2^{\mathcal{V}}$ mit $t \mapsto var(t)$ (Variablen in t)

$$\begin{aligned} var(x) &= \{x\} \quad \text{für } x \in \mathcal{V} \\ var(c) &= \emptyset \quad \text{für } c \in \mathcal{C} \\ var(f(t_1, \ldots, t_n)) &= var(t_1) \cup \ldots \cup var(t_n) \quad \text{für } f^n \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

$$var(g(g(c, x), y)) = var(g(c, x)) \cup var(y) = var(c) \cup var(x) \cup var(y) = \emptyset \cup \{x\} \cup \{y\} = \{x, y\}$$

Formeln

Definition

Die Menge der prädikatenlogischen Formeln $\mathcal{F}_{PL}$ ist induktiv definiert durch:

1. Falls $P^n \in \mathcal{P}$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$, dann $P^n(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{F}_{PL}$ (Atomare Formeln)
2. Sofern $\phi \in \mathcal{F}_{PL}$, dann auch $\neg\phi \in \mathcal{F}_{PL}$
3. Sofern $\phi, \psi \in \mathcal{F}_{PL}$, dann auch $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi) \in \mathcal{F}_{PL}$
4. Falls $x \in \mathcal{V}$ und $\phi \in \mathcal{F}_{PL}$, dann $\exists x\, \phi, \forall x\, \phi \in \mathcal{F}_{PL}$

- $\exists$ heißt Existenzquantor, $\forall$ heißt Allquantor
- Konventionen:

  $\neg, \exists, \forall$ binden stärker als $\wedge, \vee$

  $\rightarrow, \leftrightarrow$ weiterhin Makros

  binäre Relation "=" ist immer in $\mathcal{P}$ (PL mit Gleichheit)
- Bsp.: $P(x, f(c))$ $\quad \forall x\,(x = c)$ $\quad \forall x\,(\exists y\, P(x, f(y)) \wedge \neg Q(y))$

Teilformeln

Definition

Die Menge der prädikatenlogischen Formeln $\mathcal{F}_{PL}$ ist induktiv definiert durch:

1. Falls $P^n \in \mathcal{P}$ und $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$, dann $P^n(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{F}_{PL}$
2. Sofern $\phi \in \mathcal{F}_{PL}$, dann auch $\neg\phi \in \mathcal{F}_{PL}$
3. Sofern $\phi, \psi \in \mathcal{F}_{PL}$, dann auch $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi) \in \mathcal{F}_{PL}$
4. Falls $x \in \mathcal{V}$ und $\phi \in \mathcal{F}_{PL}$, dann $\exists x\, \phi, \forall x\, \phi \in \mathcal{F}_{PL}$

- Induktion/Rekursion über den Formelaufbau

$t \colon \mathcal{F}_{PL} \to 2^{\mathcal{F}_{PL}}$ mit $\phi \mapsto t(\phi)$ (Teilformeln von ϕ)

$$
\begin{aligned}
t(P^n(t_1, \dots, t_n)) &= \{P^n(t_1, \dots, t_n)\} && \text{(atomar!)} \\
t(\neg\phi) &= t(\phi) \cup \{\neg\phi\} \\
t((\phi \circ \psi)) &= t(\phi) \cup t(\psi) \cup \{\phi \circ \psi\} && \text{mit } \circ \in \{\vee, \wedge\} \\
t(Qx\,\phi) &= t(\phi) \cup \{Qx\,\phi\} && \text{mit } Q \in \{\exists, \forall\}
\end{aligned}
$$

ϕ heißt Wirkungsbereich des Quantors $Qx\,t\,(\forall x\ (\exists y\, P(x, f(y)) \wedge \neg Q(y$

Freie und Gebundene Variablen

Definition

Die Menge der prädikatenlogischen Formeln $\mathcal{F}_{PL}$ ist induktiv definiert durch:

1. Falls $P^n \in \mathcal{P}$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$, dann $P^n(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{F}_{PL}$
2. Sofern $\phi \in \mathcal{F}_{PL}$, dann auch $\neg\phi \in \mathcal{F}_{PL}$
3. Sofern $\phi, \psi \in \mathcal{F}_{PL}$, dann auch $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi) \in \mathcal{F}_{PL}$
4. Falls $x \in \mathcal{V}$ und $\phi \in \mathcal{F}_{PL}$, dann $\exists x\, \phi, \forall x\, \phi \in \mathcal{F}_{PL}$

$geb\colon \mathcal{F}_{PL} \to 2^{\mathcal{V}}$ mit $\phi \mapsto geb(\phi)$ (Gebundene Variablen)

$$
\begin{aligned}
geb(P^n(t_1, \ldots, t_n)) &= \emptyset \\
geb(\neg\phi) &= geb(\phi) \\
geb((\phi \circ \psi)) &= geb(\phi) \cup geb(\psi) \quad \text{mit } \circ \in \{\vee, \wedge\} \\
geb(Q x\, \phi) &= geb(\phi) \cup \{x\} \quad \text{mit } Q \in \{\exists, \forall\}
\end{aligned}
$$

$$geb(\forall x\, P(x) \wedge P(x, y)) = \{x\}$$

Freie und Gebundene Variablen

Definition

Die Menge der prädikatenlogischen Formeln $\mathcal{F}_{PL}$ ist induktiv definiert durch:

1. Falls $P^n \in \mathcal{P}$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$, dann $P^n(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{F}_{PL}$
2. Sofern $\phi \in \mathcal{F}_{PL}$, dann auch $\neg\phi \in \mathcal{F}_{PL}$
3. Sofern $\phi, \psi \in \mathcal{F}_{PL}$, dann auch $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi) \in \mathcal{F}_{PL}$
4. Falls $x \in \mathcal{V}$ und $\phi \in \mathcal{F}_{PL}$, dann $\exists x\, \phi, \forall x\, \phi \in \mathcal{F}_{PL}$

$$\mathit{frei}\colon \mathcal{F}_{PL} \to 2^{\mathcal{V}} \text{ mit } \phi \mapsto \mathit{frei}(\phi) \qquad \text{(Freie Variablen)}$$

$$\begin{aligned}
&\mathit{frei}(P^n(t_1, \ldots, t_n)) = \mathit{var}(t_1) \cup \ldots \cup \mathit{var}(t_n)\\
&\mathit{frei}(\neg\phi) = \mathit{frei}(\phi)\\
&\mathit{frei}((\phi \circ \psi)) = \mathit{frei}(\phi) \cup \mathit{frei}(\psi) \quad \text{mit } \circ \in \{\vee, \wedge\}\\
&\mathit{frei}(Q x\, \phi) = \mathit{frei}(\phi) \setminus \{x\} \quad \text{mit } Q \in \{\exists, \forall\}
\end{aligned}$$

$$\mathit{frei}(\forall x\, P(x) \wedge P(x, y)) = \{x, y\}$$

Freie und Gebundene Variablen

Definition

Die Menge der prädikatenlogischen Formeln $\mathcal{F}_{PL}$ ist induktiv definiert durch:

1. Falls $P^n \in \mathcal{P}$ und $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$, dann $P^n(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{F}_{PL}$
2. Sofern $\phi \in \mathcal{F}_{PL}$, dann auch $\neg\phi \in \mathcal{F}_{PL}$
3. Sofern $\phi, \psi \in \mathcal{F}_{PL}$, dann auch $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi) \in \mathcal{F}_{PL}$
4. Falls $x \in \mathcal{V}$ und $\phi \in \mathcal{F}_{PL}$, dann $\exists x\, \phi, \forall x\, \phi \in \mathcal{F}_{PL}$

$frei : \mathcal{F}_{PL} \to 2^{\mathcal{V}}$ mit $\phi \mapsto frei(\phi)$ (Freie Variablen)

$$
\begin{aligned}
frei(P^n(t_1, \dots, t_n)) &= var(t_1) \cup \dots \cup var(t_n) \\
frei(\neg\phi) &= frei(\phi) \\
frei((\phi \circ \psi)) &= frei(\phi) \cup frei(\psi) \quad \text{mit } \circ \in \{\vee, \wedge\} \\
frei(Qx\, \phi) &= frei(\phi) \setminus \{x\} \quad \text{mit } Q \in \{\exists, \forall\}
\end{aligned}
$$

Eine Formel ohne freie Variablen heißt Satz (auch Aussage oder geschlossene Formel).

Auswertung von Formeln

$$\text{Ist} \quad \forall x \, (P(x, c) \wedge \exists y \, f(y) = x) \quad \text{wahr?}$$

Um dies zu beurteilen, müssen wir wissen:

- Über welchen Grundbereich U betrachten wir die Formel?
  Menschen, Studierende, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, Getränke, ...
- Was ist die Konstante c in U?
  Prof. Obergfell, Tino Farne, 4, π, Vita Cola
- Was ist die 2-stellige Relation P über U?
  Liebesrelation, Kennt-Relation, Größergleich-Relation, Abstand-kleiner-1-Relation, Vom-selben-Hersteller-Relation
- Was ist die 1-stellige Funktion f in U?
  $f(u)$ ist: regierender US-Präsident zur Geburt von u, Lieblingskommilitone von u, direkter Nachfolger von u, Sinus von u, koffeinfreies Pendant zu u

Auswertung von Formeln

Ist $\forall x\,(P(x,c) \wedge \exists y\, f(y) = x)$ wahr?

Um dies zu beurteilen, müssen wir wissen:

- Über welchen Grundbereich U betrachten wir die Formel?
  Menschen, Studierende, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, Getränke, ...
- Was ist die Konstante c in U?
  Prof. Obergfell, Tino Farne, 4, π, Vita Cola
- Was ist die 2-stellige Relation P über U?
  Liebesrelation, Kennt-Relation, Größergleich-Relation, Abstand-kleiner-1-Relation, Vom-selben-Hersteller-Relation
- Was ist die 1-stellige Funktion f in U?
  $f(u)$ ist: regierender US-Präsident zur Geburt von u, Lieblingskommilitone von u, direkter Nachfolger von u, Sinus von u, koffeinfreies Pendant zu u

τ-Strukturen

Definition

Sei $\tau = (\mathcal{P}, \mathcal{F})$ eine Signatur. Eine τ-Struktur $\mathfrak{A} = (U, I)$ besteht aus:

- einer nichtleeren Menge U, (Grundbereich/Universum)
- einer Interpretationsfunktion I, sodaß:
  1. für jedes $P^n \in \mathcal{P}$ ist $I(P^n) \subseteq U^n$ (n-stell. Relation über U)
  2. für jedes $f^n \in \mathcal{F}$ ist $I(f^n) : U^n \to U$ (n-stell. Funktion auf U)

Bemerkungen:

- Struktur $\mathfrak{A}$ interpretiert Prädikaten- und Funktionssymbole
- wir schreiben auch: $P^{\mathfrak{A}}$ für $I(P)$ bzw. $f^{\mathfrak{A}}$ für $I(f)$
- jedes $f^{\mathfrak{A}}$ ist <u>totale</u> Funktion
- <u>keine</u> Restriktionen für Relationen $P^{\mathfrak{A}}$
- ähnlich nutzen wir $U^{\mathfrak{A}}$ und $I^{\mathfrak{A}}$ für das Universum bzw. für die Interpretationsfunktion von $\mathfrak{A}$

τ-Strukturen

Definition

Sei $\tau = (\mathcal{P}, \mathcal{F})$ eine Signatur. Eine τ-Struktur $\mathfrak{A} = (U, I)$ besteht aus:

- einer nichtleeren Menge U, (Grundbereich/Universum)
- einer Interpretationsfunktion I, sodaß:
  1. für jedes $P^n \in \mathcal{P}$ ist $I(P^n) \subseteq U^n$ (n-stell. Relation über U)
  2. für jedes $f^n \in \mathcal{F}$ ist $I(f^n) : U^n \to U$ (n-stell. Funktion auf U)

Beispiel: Sei $\tau = (P^2, f^1, c^0)$. Wir definieren eine τ-Struktur $\mathfrak{A}$ mit

$$(\forall x\, (P(x, c) \wedge \exists y\, f(y) = x))$$

- $U^{\mathfrak{A}} = \mathbb{N}$
- $P^{\mathfrak{A}} = \geq_{\mathbb{N}} = \{(0, 0), (1, 0), \ldots, (1, 1), (2, 1), \ldots\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$
- $f^{\mathfrak{A}} : \mathbb{N}^1 \to \mathbb{N}$ mit $n \mapsto f^{\mathfrak{A}}(n) = n + 1$
- $c^{\mathfrak{A}} : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$ mit $\underbrace{()}_{\text{leere Tupel}} \mapsto c^{\mathfrak{A}}(()) = 4$

Belegung und Interpretation

Definition

Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur. Eine Belegung in $\mathfrak{A}$ ist eine Abbildung $\beta : \mathcal{V} \to U^{\mathfrak{A}}$. Wir erweitern rekursiv zu $\beta' : \mathcal{T} \to U^{\mathfrak{A}}$ mit:

1. $\beta'(x) = \beta(x)$ für $x \in \mathcal{V}$
2. $\beta'(c) = c^{\mathfrak{A}}$ für $c \in \mathcal{C}$
3. $\beta'(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\mathfrak{A}}(\beta'(t_1), \ldots, \beta'(t_n))$ für $f \in \mathcal{F}$, $ar(f) = n \geq 1$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$

Ein Paar $(\mathfrak{A}, \beta)$ heißt Interpretation.

Bemerkungen:

- β' bildet Terme auf Objekte im Universum ab
- wie üblich identifizieren wir die Erweiterung β' mit β
- ähnlich wie im aussagenlogischen Fall setzen wir:

$$\beta_{[x \mapsto a]}(y) = \begin{cases} a & , x = y \\ \beta(y) & , \text{sonst} \end{cases}$$

Belegung und Interpretation

Definition

Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur. Eine Belegung in $\mathfrak{A}$ ist eine Abbildung $\beta : \mathcal{V} \to U^{\mathfrak{A}}$. Wir erweitern rekursiv zu $\beta' : \mathcal{T} \to U^{\mathfrak{A}}$ mit:

1. $\beta'(x) = \beta(x)$ für $x \in \mathcal{V}$
2. $\beta'(c) = c^{\mathfrak{A}}$ für $c \in \mathcal{C}$
3. $\beta'(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\mathfrak{A}}(\beta'(t_1), \ldots, \beta'(t_n))$ für $f \in \mathcal{F}$, $ar(f) = n \geq 1$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$

Ein Paar $(\mathfrak{A}, \beta)$ heißt Interpretation.

Beispiel: Gegeben $(\mathfrak{A}, \beta)$ mit

- $U^{\mathfrak{A}} = \mathbb{N}$
- $f^{\mathfrak{A}} : \mathbb{N}^1 \to \mathbb{N}$ mit $n \mapsto f^{\mathfrak{A}}(n) = n + 1$
- $c^{\mathfrak{A}} : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$ mit $\underbrace{()}_{\text{leere Tupel}} \mapsto c^{\mathfrak{A}}(()) = 4$

Was ist $\beta(f(f(f(c))))$ und $\beta(f(f(x)))$?

Belegung und Interpretation

Definition

Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur. Eine Belegung in $\mathfrak{A}$ ist eine Abbildung $\beta : \mathcal{V} \to U^{\mathfrak{A}}$. Wir erweitern rekursiv zu $\beta' : \mathcal{T} \to U^{\mathfrak{A}}$ mit:

1. $\beta'(x) = \beta(x)$ für $x \in \mathcal{V}$
2. $\beta'(c) = c^{\mathfrak{A}}$ für $c \in \mathcal{C}$
3. $\beta'(f(t_1, \dots, t_n)) = f^{\mathfrak{A}}(\beta'(t_1), \dots, \beta'(t_n))$ für $f \in \mathcal{F}$, $ar(f) = n \geq 1$ und $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$

Ein Paar $(\mathfrak{A}, \beta)$ heißt Interpretation.

Beispiel: Gegeben $(\mathfrak{A}, \beta)$ mit

- $U^{\mathfrak{A}} = \mathbb{Z}$
- $g^{\mathfrak{A}} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ mit $(n, m) \mapsto g^{\mathfrak{A}}(n, m) = n - m$
- $c^{\mathfrak{A}} : \mathbb{Z}^0 \to \mathbb{Z}$ mit $\underbrace{()}_{\text{leere Tupel}} \mapsto c^{\mathfrak{A}}(()) = -2$

Was ist $\beta(g(x, g(x, c)))$?

Semantik (rekursiv)

Gegeben eine Interpretation $(\mathfrak{A}, \beta)$. Wir definieren:

- $(\mathfrak{A}, \beta)(P(t_1, \ldots, t_n)) = 1$ gdw. $(\beta(t_1), \ldots, \beta(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}$
- $(\mathfrak{A}, \beta)(t_1 = t_2) = 1$ gdw. $\beta(t_1) = \beta(t_2)$
- $(\mathfrak{A}, \beta)(\neg\phi) = 1$ gdw. $(\mathfrak{A}, \beta)(\phi) = 0$
- $(\mathfrak{A}, \beta)(\phi \wedge \psi) = 1$ gdw. $(\mathfrak{A}, \beta)(\phi) = 1$ und $(\mathfrak{A}, \beta)(\psi) = 1$
- $(\mathfrak{A}, \beta)(\phi \vee \psi) = 1$ gdw. $(\mathfrak{A}, \beta)(\phi) = 1$ oder $(\mathfrak{A}, \beta)(\psi) = 1$
- $(\mathfrak{A}, \beta)(\exists x\phi) = 1$ gdw. existiert $a \in U^{\mathfrak{A}}$ mit $(\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto a]})(\phi) = 1$
- $(\mathfrak{A}, \beta)(\forall x\phi) = 1$ gdw. für alle $a \in U^{\mathfrak{A}}$ gilt: $(\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto a]})(\phi) = 1$

Auswertung der Atomaren Formeln.
Achtung! Gleichheitssymbol hat eine <u>feste</u> Interpretation.
Analog zur Aussagenlogik. Quantorenfälle. Interpretation $(\mathfrak{A}, \beta)$ heißt Modell von ϕ, falls $(\mathfrak{A}, \beta)(\phi) = 1$

Semantik (rekursiv)

Gegeben eine Interpretation $(\mathfrak{A}, \beta)$. Wir definieren:

- $(\mathfrak{A}, \beta)(P(t_1, \dots, t_n)) = 1$ gdw. $(\beta(t_1), \dots, \beta(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}$
- $(\mathfrak{A}, \beta)(\phi \wedge \psi) = 1$ gdw. $(\mathfrak{A}, \beta)(\phi) = 1$ und $(\mathfrak{A}, \beta)(\psi) = 1$
- $(\mathfrak{A}, \beta)(\exists x \phi) = 1$ gdw. existiert $a \in U^{\mathfrak{A}}$ mit $(\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto a]})(\phi) = 1$
- $(\mathfrak{A}, \beta)(\forall x \phi) = 1$ gdw. für alle $a \in U^{\mathfrak{A}}$ gilt: $(\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto a]})(\phi) = 1$

Bsp.: Ist $(\mathfrak{A}, \beta)$ Modell von $\phi = \forall x\,(P(x, c) \wedge \exists y\, f(y) = x)$ wobei $U^{\mathfrak{A}} = \mathbb{N}$, $P^{\mathfrak{A}} = \geq_{\mathbb{N}}$, $f^{\mathfrak{A}}(n) = n + 1$, $c^{\mathfrak{A}} = 4$? Es gilt:

$(\mathfrak{A}, \beta)\,(\phi) = 1$ gdw. $(\mathfrak{A}, \beta)\,(\forall x\,(P(x, c) \wedge \exists y\, f(y) = x)) = 1$ gdw.
für alle $a \in \mathbb{N} : (\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto a]})(P(x, c) \wedge \exists y\, f(y) = x) = 1$ gdw.
für alle $a \in \mathbb{N} : (\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto a]})(P(x, c)) = 1$ und $(\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto a]})(\exists y\, f(y) = x) = 1$
Für $a = 2$. $(\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto 2]})(P(x, c)) = 1$ gdw. $(\beta_{[x \mapsto 2]}(x), \beta_{[x \mapsto 2]}(c)) \in P^{\mathfrak{A}}$
gdw. $(2, 4) \in \geq_{\mathbb{N}}$

Da $2 \not\geq 4$ folgt $(\mathfrak{A}, \beta)\,(\phi) = 0$.

Semantik (rekursiv)

Gegeben eine Interpretation $(\mathfrak{A}, \beta)$. Wir definieren:

- $(\mathfrak{A}, \beta)(P(t_1, \ldots, t_n)) = 1$ gdw. $(\beta(t_1), \ldots, \beta(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}$
- $(\mathfrak{A}, \beta)(\phi \wedge \psi) = 1$ gdw. $(\mathfrak{A}, \beta)(\phi) = 1$ und $(\mathfrak{A}, \beta)(\psi) = 1$
- $(\mathfrak{A}, \beta)(\exists x \phi) = 1$ gdw. existiert $a \in U^{\mathfrak{A}}$ mit $(\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto a]})(\phi) = 1$
- $(\mathfrak{A}, \beta)(\forall x \phi) = 1$ gdw. für alle $a \in U^{\mathfrak{A}}$ gilt: $(\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto a]})(\phi) = 1$

Bsp.: Ist $(\mathfrak{A}, \beta)$ Modell von $\phi = \forall x \, \exists y \, P(y, x)$
wobei $U^{\mathfrak{A}} = \mathbb{N}$ und $P^{\mathfrak{A}} = \geq_{\mathbb{N}}$? Es gilt:

$(\mathfrak{A}, \beta)\,(\phi) = 1$ gdw. $(\mathfrak{A}, \beta)\,(\forall x \, \exists y \, P(y, x)) = 1$ gdw.

für alle $a \in \mathbb{N} : (\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto a]})(\exists y \, P(y, x)) = 1$ gdw.

für alle $a \in \mathbb{N}$, existiert ein $b \in \mathbb{N} : \left(\mathfrak{A}, \left(\beta_{[x \mapsto a]}\right)_{[y \mapsto b]}\right) P(y, x) = 1$ gdw.

für alle $a \in \mathbb{N}$, existiert ein $b \in \mathbb{N}$:
$\left(\left(\beta_{[x \mapsto a]}\right)_{[y \mapsto b]}(y), \left(\beta_{[x \mapsto a]}\right)_{[y \mapsto b]}(x)\right) \in P^{\mathfrak{A}}$ gdw.

für alle $a \in \mathbb{N}$, existiert ein $b \in \mathbb{N} : (b, a) \in \geq_{\mathbb{N}}$. Ja, setze $b = a + 1$.

Somit $(\mathfrak{A}, \beta)\,(\phi) = 1$

Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

6. Prädikatenlogik 1. Stufe – Syntax und Semantik

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

22. Mai 2025
Leipzig

Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

7. PL1 – Semantische Eigenschaften

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

05. Juni 2025
Leipzig

In der letzten Vorlesung

Terme

Formeln

Strukturen

Semantik

Fahrplan für diese Vorlesung

Koinzidenzlemma

Erfüllbarkeit, Tautologien und Co.

Semantische Äquivalenz

Ersetzungstheorem

Folgerung

Wiederholung

- τ-Struktur $\mathfrak{A} = (U^{\mathfrak{A}}, I^{\mathfrak{A}})$ mit $\tau = (P_1, P_2, \ldots, f_1, f_2, \ldots)$
- Belgung $\beta : \mathcal{V} \to U^{\mathfrak{A}}$ zu $\beta' : \mathcal{T} \to U^{\mathfrak{A}}$ mit:
  1. $\beta'(x) = \beta(x)$ für $x \in \mathcal{V}$
  2. $\beta'(c) = c^{\mathfrak{A}}$ für $c \in \mathcal{C}$
  3. $\beta'(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\mathfrak{A}}(\beta'(t_1), \ldots, \beta'(t_n))$ für $f \in \mathcal{F}$, $ar(f) = n \geq 1$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$
- freies und gebundenes Vorkommen (nicht bzw. im Wirkungsbereich eines Quantors)
- Gegeben eine Interpretation $(\mathfrak{A}, \beta)$. Wir definieren:
  - $(\mathfrak{A}, \beta)(P(t_1, \ldots, t_n)) = 1$ gdw. $(\beta(t_1), \ldots, \beta(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}$
  - aussagenlogische Fälle $(\neg, \wedge, \vee)$
  - $(\mathfrak{A}, \beta)(\exists x \phi) = 1$ gdw. existiert $a \in U^{\mathfrak{A}}$ mit $(\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto a]})(\phi) = 1$
  - $(\mathfrak{A}, \beta)(\forall x \phi) = 1$ gdw. für alle $a \in U^{\mathfrak{A}}$ gilt: $(\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto a]})(\phi) = 1$

Koinzidenzlemma

- analog zur AL
- sei $s(\phi)$ die Menge der in ϕ vorkommenden Prädikaten- und Funktionssymbole (Signatur von ϕ)

Lemma

Gegeben eine Formel ϕ. Seien $(\mathfrak{A}, \beta)$ und $(\mathfrak{B}, \gamma)$ Interpretationen. Sofern $U^{\mathfrak{A}} = U^{\mathfrak{B}}$, $S^{\mathfrak{A}} = S^{\mathfrak{B}}$ für alle $S \in s(\phi)$, und $\beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in frei(\phi)$, dann $(\mathfrak{A}, \beta)(\phi) = (\mathfrak{B}, \gamma)(\phi)$.

Beweis per struktureller Induktion.

1. Zeige zuerst per Terminduktion: Falls $\beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in var(t)$, dann $\beta(t) = \gamma(t)$. (Übung 5)
2. Sei $\phi = P(t_1, \ldots, t_n)$ atomar. Da $\beta|_{frei(\phi)} = \gamma|_{frei(\phi)}$ und für alle $1 \le i \le n$: $var(t_i) \subseteq frei(\phi)$ folgern wir mit 1 $\beta(t_i) = \gamma(t_i)$.
Somit: $(\mathfrak{A}, \beta)(\phi) = 1$ gdw. $(\beta(t_1), \ldots, \beta(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}$ gdw. $(\gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_n)) \in P^{\mathfrak{B}}$ gdw. $(\mathfrak{B}, \gamma)(\phi) = 1$

Koinzidenzlemma

Lemma

Gegeben eine Formel ϕ. Seien $(\mathfrak{A}, \beta)$ und $(\mathfrak{B}, \gamma)$ Interpretationen. Sofern $U^{\mathfrak{A}} = U^{\mathfrak{B}}$, $S^{\mathfrak{A}} = S^{\mathfrak{B}}$ für alle $S \in s(\phi)$, und $\beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in frei(\phi)$, dann $(\mathfrak{A}, \beta)(\phi) = (\mathfrak{B}, \gamma)(\phi)$.

Beweis per struktureller Induktion.

3. aussagenlogischen Fälle:
   - Sei $\phi = \psi \wedge \xi$ und gelte für ψ und ξ die Koinzidenzeigenschaft. Da $\beta|_{frei(\phi)} = \gamma|_{frei(\phi)}$ und $frei(\psi) \cup frei(\xi) = frei(\phi)$ gilt $\beta|_{frei(\psi)} = \gamma|_{frei(\psi)}$ und $\beta|_{frei(\xi)} = \gamma|_{frei(\xi)}$. Somit schließen wir:

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{A}, \beta)(\phi \wedge \psi) = 1 \quad \text{gdw.} \quad & (\mathfrak{A}, \beta)(\phi) = 1 \ \underline{\text{und}} \ (\mathfrak{A}, \beta)(\psi) = 1 \\
\text{gdw.} \quad & (\mathfrak{B}, \gamma)(\phi) = 1 \ \underline{\text{und}} \ (\mathfrak{B}, \gamma)(\psi) = 1 \\
\text{gdw.} \quad & (\mathfrak{B}, \gamma)(\phi \wedge \psi) = 1
\end{aligned}$$

   - Disjunktion und Negation analog.

Koinzidenzlemma

Lemma

Gegeben eine Formel ϕ. Seien $(\mathfrak{A}, \beta)$ und $(\mathfrak{B}, \gamma)$ Interpretationen. Sofern $U^{\mathfrak{A}} = U^{\mathfrak{B}}$, $S^{\mathfrak{A}} = S^{\mathfrak{B}}$ für alle $S \in s(\phi)$, und $\beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in frei(\phi)$, dann $(\mathfrak{A}, \beta)(\phi) = (\mathfrak{B}, \gamma)(\phi)$.

Beweis per struktureller Induktion.

4. Quantorenfälle:
   - Sei $\phi = \exists y\, \psi$ und gelte für ψ die Koinzidenzeigenschaft. Da $\beta|_{frei(\phi)} = \gamma|_{frei(\phi)}$ gilt für beliebiges $a \in U^{\mathfrak{A}}$, daß $\beta_{[y\mapsto a]}\big|_{frei(\psi)} = \gamma_{[y\mapsto a]}\big|_{frei(\psi)}$(Anm.: Es kann durchaus $\beta(y) \neq \gamma(y)$). Folglich $(\mathfrak{A}, \beta_{[y\mapsto a]})(\psi) = (\mathfrak{B}, \gamma_{[y\mapsto a]})(\psi)$. Wir schließen:

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{A}, \beta)(\exists y\, \psi) = 1 \quad &\text{gdw.} \quad \text{existiert } a \in U^{\mathfrak{A}} \text{ mit } (\mathfrak{A}, \beta_{[y\mapsto a]})(\psi) = 1 \\
&\text{gdw.} \quad \text{existiert } a \in U^{\mathfrak{B}} \text{ mit } (\mathfrak{B}, \gamma_{[y\mapsto a]})(\psi) = 1 \\
&\text{gdw.} \quad (\mathfrak{B}, \gamma)(\exists y\, \psi) = 1
\end{aligned}
$$

   - $\phi = \forall y\, \psi$ analog

Koinzidenzlemma - Bemerkungen

Im Hintergrund ist immer eine Signatur τ fixiert, d.h. alle betrachteten Strukturen sind implizit τ-Strukturen, interpretieren also alle Prädikaten- und Funktionssymbole aus τ.

Koinzidenzlemma rechtfertigt, daß zur Wahrheitswertbestimmung von ϕ es ausreicht:

1. nur vorkommende Symbole in ϕ zu interpretieren
2. nur freie Variablen in ϕ zu belegen

Für geschlossene Formeln ergibt sich sogar die Unabhängigkeit von Belegungen

Corollary

Sei $\mathfrak{A}$ eine Struktur. Für Belegungen β, γ und Sätze ϕ gilt:

$$(\mathfrak{A}, \beta)(\phi) = 1 \quad \textit{gdw.} \quad (\mathfrak{A}, \gamma)(\phi) = 1$$

Dies rechtfertigt die Notation $\mathfrak{A}(\phi) = 1$.

Erfüllbarkeit, Tautologien und Co.

Eine Interpretation $(\mathfrak{A}, \beta)$ heißt Modell von ϕ, falls $(\mathfrak{A}, \beta)(\phi) = 1$. Andernfalls, Widerlegung von ϕ.

Eine Formel ϕ heißt

erfüllbar,	falls ein Modell von ϕ existiert
unerfüllbar,	falls kein Modell von ϕ existiert
falsifizierbar,	falls eine Widerlegung von ϕ existiert
tautologisch,	falls keine Widerlegung von ϕ existiert
kontingent,	falls erfüllbar und falsifizierbar

Beispiele:

$P(x)$	kontingent	$\exists x \neg P(x) \vee P(a)$	erfüllbar, tautologisch
		$\forall x \forall y \, (x \neq y \vee f(x) \neq f(y))$	falsifizierbar, unerfüllbar

Erfüllbarkeit, Tautologien und Co.

Eine Formel ϕ heißt

erfüllbar,	falls ein Modell von ϕ existiert
tautologisch,	falls keine Widerlegung von ϕ existiert

Anmerkungen:

- assoziierte Entscheidungsprobleme sind im Vergleich zur AL ungleich schwieriger – sie sind algorithmisch nicht lösbar, d.h. unentscheidbar (Church, 1936)
- Koinzidenzsatz erlaubt zwar Einschränkung auf Signatur von ϕ, dennoch existieren unendlich viele Interpretationen
- Darüber hinaus: Erfüllbarkeit impliziert nicht Erfüllbarkeit durch eine endliche Struktur (siehe Tafel)
- Mehr noch: auch endliche Erfüllbarkeit/Gültigkeit ist unentscheidbar (Trakhtenbrot, 1950)

Existentieller und Universeller Abschluß

Definition

Sei ϕ Formel mit *frei*$(\phi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Die Sätze $\exists x_1 \ldots \exists x_n \, \phi$, $\forall x_1 \ldots \forall x_n \, \phi$ heißen existenzieller bzw. universeller Abschluß.

Lemma

Eine Formel ϕ ist genau dann

1. *erfüllbar, wenn ihr existentieller Abschluß erfüllbar ist.*
2. *tautologisch, wenn ihr universeller Abschluß tautologisch ist.*

Beweis: ($\Rightarrow$) Sei ϕ erfüllbar. Somit existiert Interpretation $(\mathfrak{A}, \beta)$ mit $(\mathfrak{A}, \beta)(\phi) = 1$. Für freie Variablen x_i existieren $a_i \in U^{\mathfrak{A}}$ mit $\beta(x_i) = a_i$. Offensichtlich gilt $\beta_{[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n]} = \beta$. Folglich existieren $a_1, \ldots, a_n \in U^{\mathfrak{A}}$ mit $\left(\mathfrak{A}, \beta_{[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n]}\right)(\phi) = 1$, d.h. $(\mathfrak{A}, \beta)(\exists x_1 \ldots \exists x_n \, \phi) = 1$.

Existentieller und Universeller Abschluß

Definition

Sei ϕ Formel mit $frei(\phi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Die Sätze $\exists x_1 \ldots \exists x_n \, \phi$, $\forall x_1 \ldots \forall x_n \, \phi$ heißen existenzieller bzw. universeller Abschluß.

Lemma

Eine Formel ϕ ist genau dann

1. *erfüllbar, wenn ihr existentieller Abschluß erfüllbar ist.*
2. *tautologisch, wenn ihr universeller Abschluß tautologisch ist.*

Beweis: ($\Leftarrow$) Sei $\exists x_1 \ldots \exists x_n \, \phi$ erfüllbar, d.h. es existiert Interpretation $(\mathfrak{A}, \beta)$ mit $(\mathfrak{A}, \beta)(\exists x_1 \ldots \exists x_n \, \phi) = 1$. Nach Semantikdefinition existieren $a_1, \ldots, a_n \in U^{\mathfrak{A}}$ mit $\left(\mathfrak{A}, \beta_{[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n]}\right)(\phi) = 1$. Die Interpretation $\left(\mathfrak{A}, \beta_{[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n]}\right)$ bezeugt die Erfüllbarkeit von ϕ.

Semantische Äquivalenz

Sei wieder $Mod(\phi) = \{(\mathfrak{A}, \beta) \mid (\mathfrak{A}, \beta) \text{ ist Modell von } \phi\}$.

Definition

Zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathcal{F}_{PL}$ heißen semantisch äquivalent, in Zeichen $\phi \equiv \psi$, sofern $Mod(\phi) = Mod(\psi)$.

Es gelten die bekannten aussagenlogischen Äquivalenzen:

- $\neg\neg\phi \equiv \phi$ (Elimination der doppelten Negation)
- $\neg(\phi \wedge \psi) \equiv \neg\phi \vee \neg\psi$
  $\neg(\phi \vee \psi) \equiv \neg\phi \wedge \neg\psi$ (De Morgansche Gesetze)
- $\phi \wedge (\psi \vee \xi) \equiv (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \xi)$
  $\phi \vee (\psi \wedge \xi) \equiv (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \xi)$ (Distributivgesetze)
- $\phi \wedge \psi \equiv \psi$, falls ϕ tautologisch
  $\phi \vee \psi \equiv \phi$, falls ϕ tautologisch (Tautologieregel)
- $\phi \wedge \psi \equiv \phi$, falls ϕ unerfüllbar
  $\phi \vee \psi \equiv \psi$, falls ϕ unerfüllbar (Unerfüllbarkeitsregel)

Semantische Äquivalenz

Sei wieder $Mod(\phi) = \{(\mathfrak{A}, \beta) \mid (\mathfrak{A}, \beta) \text{ ist Modell von } \phi\}$.

Definition

Zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathcal{F}_{PL}$ heißen semantisch äquivalent, in Zeichen $\phi \equiv \psi$, sofern $Mod(\phi) = Mod(\psi)$.

- $\neg \forall x\, \phi \equiv \exists x\, \neg \phi$
  $\neg \exists x\, \phi \equiv \forall x\, \neg \phi$ (De Morgansche Gesetze)
- $\forall x\, (\phi \wedge \psi) \equiv \forall x\, \phi \wedge \forall x\, \psi$
  $\exists x\, (\phi \vee \psi) \equiv \exists x\, \phi \vee \exists x\, \psi$ (Distributivgesetze)
- $\forall x\, \forall y \phi \equiv \forall y \forall x \phi$
  $\exists x\, \exists y \phi \equiv \exists y \exists x \phi$ (Kommutativität)
- Falls $x \notin frei(\psi)$, dann
  $\forall x\, (\phi \wedge \psi) \equiv \forall x\, \phi \wedge \psi$
  $\forall x\, (\phi \vee \psi) \equiv \forall x\, \phi \vee \psi$
  $\exists x\, (\phi \wedge \psi) \equiv \exists x\, \phi \wedge \psi$
  $\exists x\, (\phi \vee \psi) \equiv \exists x\, \phi \vee \psi$ (Scopusverschiebung)

Semantische Äquivalenz

Sei wieder $\mathit{Mod}(\phi) = \{(\mathfrak{A}, \beta) \mid (\mathfrak{A}, \beta) \text{ ist Modell von } \phi\}$.

Definition

Zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathcal{F}_{PL}$ heißen semantisch äquivalent, in Zeichen $\phi \equiv \psi$, sofern $\mathit{Mod}(\phi) = \mathit{Mod}(\psi)$.

- $\neg \forall x\, \phi \equiv \exists x\, \neg \phi$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{A}, \beta)(\neg \forall x\, \phi) = 1 \text{ gdw. } & (\mathfrak{A}, \beta)(\forall x\, \phi) = 0 \\
\text{gdw. } & \text{es gilt \underline{nicht} für alle } a \in U^{\mathfrak{A}} : (\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto a]})(\phi) = 1 \\
\text{gdw. } & \text{es existiert ein } a \in U^{\mathfrak{A}} \text{ mit } (\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto a]})(\phi) = 0 \\
\text{gdw. } & \text{es existiert ein } a \in U^{\mathfrak{A}} \text{ mit } (\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto a]})(\neg \phi) = 1 \\
\text{gdw. } & (\mathfrak{A}, \beta)(\exists x\, \neg \phi) = 1 \qquad \square
\end{aligned}
$$

Semantische Äquivalenz

Sei wieder $Mod(\phi) = \{(\mathfrak{A}, \beta) \mid (\mathfrak{A}, \beta) \text{ ist Modell von } \phi\}$.

Definition

Zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathcal{F}_{PL}$ heißen semantisch äquivalent, in Zeichen $\phi \equiv \psi$, sofern $Mod(\phi) = Mod(\psi)$.

- Falls $x \notin frei(\psi)$, dann $\exists x\,(\phi \wedge \psi) \equiv \exists x\,\phi \wedge \psi$

Beweis:

$(\mathfrak{A}, \beta)(\exists x\,(\phi \wedge \psi)) = 1$ gdw.
es existiert ein $a \in A$ mit $(\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto a]})(\phi \wedge \psi) = 1$ gdw.
es existiert ein $a \in A$ mit $(\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto a]})(\phi) = 1$ und $(\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto a]})(\psi) = 1$ gdw.
es existiert ein $a \in A$ mit $(\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto a]})(\phi) = 1$ und $\underbrace{(\mathfrak{A}, \beta)(\psi) = 1}_{\text{Koinzidenzlemma}}$ gdw.

$(\mathfrak{A}, \beta)(\exists x\,\phi) = 1$ und $(\mathfrak{A}, \beta)(\psi) = 1$ gdw.
$(\mathfrak{A}, \beta)(\exists x\,\phi \wedge \psi) = 1$ $\square$

Ersetzungstheorem

Analog zur AL.

Theorem

Gegeben zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathcal{F}_{PL}$ mit $\phi \equiv \psi$. Sei $\xi \in \mathcal{F}_{PL}$ mit $\phi \in t(\xi)$ und $\xi' \in \mathcal{F}_{PL}$ eine Formel, die sich durch Ersetzung eines Vorkommens von ϕ in ξ durch ψ ergibt. Dann gilt: $\xi \equiv \xi'$.

Beweis (Induktion über den Formelaufbau von ξ):

- IA: Sei $\xi = P(t_1, \ldots, t_n)$ atomar. Somit $\phi = \xi$, da $t(\xi) = \{\xi\}$ per Def. Folglich $\xi' = \psi$ und $\xi \equiv \xi'$ da $\phi \equiv \psi$ vorausgesetzt.
- Fälle $\neg$, $\wedge$, $\vee$ analog zur AL
- Gelte die Ersetzungseigs. für ξ_1 (IV) und sei $\xi = \forall x\, \xi_1$.
  1. Falls $\phi = \xi$, dann argumentiere wie im IA (IV nicht nötig)
  2. Sei nun $\phi \neq \xi$. Dann muss $\xi' = \forall x \xi_1'$ wobei ξ_1' durch ersetzen von ϕ in ξ_1 durch ψ entsteht. Da nach IV $\xi_1 \equiv \xi_1'$ gilt, muss per Definition Allquantor $\forall x\, \xi_1 \equiv \forall x\, \xi_1'$. Somit, $\xi \equiv \xi'$.
- Fall $\xi = \exists x\, \xi_1$ analog. $\square$

Generierung/Identifizierung von Äquivalenzen

Ersetzungstheorem

- wird oft ohne explizite Erwähnung verwendet
- rechtfertigt neue Äquivalenzen

  Zum Beispiel: $\neg\exists x\,\neg\phi \equiv \forall x\,\phi$

$$
\begin{aligned}
\neg\exists x\,\neg\phi &\equiv \neg\neg\forall x\,\phi && (\text{De Morgan}, \exists x\,\neg\phi \equiv \neg\forall x\,\phi)\\
&\equiv \forall x\,\phi && (\text{Doppelnegation})
\end{aligned}
$$

Aussagenlogische Form

- erlaubt erkennen von prädikatenlogischen Tautologien

  Zum Beispiel: Folgende Formel ist tautologisch

$$\forall x\,P(x) \to \big(\exists y\,Q\big(y, f(y)\big) \to \forall x\,P(x)\big)$$

da $p \to (q \to p) \equiv \top$

Folgerung

Wie in der AL erweitern wir den Modellbegriff auf Mengen von Formeln und setzen:

$$Mod(T) = \bigcap_{\phi \in T} Mod(\phi)$$

Die Definition der Folgerung bleibt auch unverändert, d.h.

Definition

Sei $T \subseteq \mathcal{F}_{PL}$ und $\phi \in \mathcal{F}_{PL}$. Wir sagen, ϕ folgt (logisch) aus T, falls $Mod(T) \subseteq Mod(\phi)$ und schreiben: $T \vDash \phi$

- Konventionen aus AL übertragen sich
- Beweise für Schnitteigenschaft, Antimonotonie von *Mod* und Deduktionstheorem für $\vDash$ übertragen sich
- Endlichkeitssatz/Kompaktheitssatz sowie Interpolationstheorem gelten auch (Beweise komplizierter)

Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

7. PL1 – Semantische Eigenschaften

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

05. Juni 2025
Leipzig

Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

8. PL1 – Normalformen

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

12. Juni 2025
Leipzig

In der letzten Vorlesung

Koinzidenzlemma
Erfüllbarkeit, Tautologien und Co.
Semantische Äquivalenz
Ersetzungstheorem
Folgerung

Fahrplan für diese Vorlesung

Substitution und Überführung
Gebundene Umbenennung
Negationsnormalform
Pränexnormalform
Skolemnormalform

Negationsnormalform

Definition

Eine Formel ϕ ist in Negationsnormalform (NNF), sofern Negationen nur vor atomaren Formeln stehen.

$$\forall x\, \neg\exists y\, (\neg R(f(x), c) \vee \neg(P(x) \wedge \neg Q(d))) \qquad \times$$
$$\forall x\, \exists y\, (\neg R(f(x), c) \vee (P(x) \wedge \neg Q(d))) \qquad \checkmark$$

Proposition

Zu jeder Formel ϕ existiert eine Formel ψ, sodass:

1. $\phi \equiv \psi$, *und*
2. ψ *ist in Negationsnormalform.*

Beweis: Benutze

$$\begin{aligned} \neg\neg\phi &\equiv \phi \\ \neg(\phi \wedge \psi) &\equiv \neg\phi \vee \neg\psi \\ \neg(\phi \vee \psi) &\equiv \neg\phi \wedge \neg\psi \\ \neg\forall x\, \phi &\equiv \exists x\, \neg\phi \\ \neg\exists x\, \phi &\equiv \forall x\, \neg\phi \end{aligned}$$

Substitution

- ersetzen einer freien Variable durch einen Term

Definition (für Terme)

Sei $x \in \mathcal{V}$ und $t \in \mathcal{T}$. Wie definieren die Substitution $[x/t]$, $[x/t] : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ mit $s \mapsto s[x/t]$ rekursiv durch:

1. für $y \in \mathcal{V}$:
$$y[x/t] = \begin{cases} t & \text{falls } y = x \\ y & \text{sonst} \end{cases}$$
2. für $c \in \mathcal{C} : c[x/t] = c$
3. für $f \in \mathcal{F}$, $ar(f) = n \geq 1$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$:
$$f(t_1, \ldots, t_n)[x/t] = f\,(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$$

$$f(x, y, g(x))[x/h(z)] = f(h(z), y, g(h(z)))$$

(rein syntaktisches ersetzen)

Substitution

Definition (für Formeln)

Sei $x \in \mathcal{V}$ und $t \in \mathcal{T}$. Wir definieren die Substitution $[x/t]$, $[x/t] : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ mit $\phi \mapsto \phi[x/t]$ rekursiv durch:

1. Für atomare Formeln $P(t_1, \dots, t_n)$:
$$P(t_1, \dots, t_n)[x/t] = P(t_1[x/t], \dots, t_n[x/t])$$
2. für klassische Junktoren:
$$(\varphi \circ \psi)[x/t] = \varphi[x/t] \circ \psi[x/t] \quad \text{wobei } \circ \in \{\wedge, \vee\}$$
$$(\neg\varphi)[x/t] = \neg(\varphi[x/t])$$
3. Für Quantoren $Q \in \{\forall, \exists\}$:
$$(Qy\,\varphi)[x/t] = \begin{cases} Qy\,\varphi & \text{falls } y = x \\ Qy\,\varphi[x/t] & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(\forall y\,(P(x,y) \vee R(h(x))) \wedge \forall x\,(P(h(x),c)))\,[x/h(z)]$$
$$= \forall y\,(P(h(z),y) \vee R(h(h(z)))) \wedge \forall x\,(P(h(x),c))$$

Überführungslemma

- syntaktische Ersetzung innerhalb der Formeln vs. punktuelle Änderung der Belegung

Lemma

Sei $\mathfrak{A}$ eine Struktur, β eine Belegung, x eine Variable, t ein Term und ϕ eine Formel. Sofern $var(t) \cap geb(\phi) = \varnothing$, dann:

$$(\mathfrak{A}, \beta)\,(\phi[x/t]) = \left(\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto \beta(t)]}\right)(\phi)$$

Warum darf t keine Variablen enthalten, die in ϕ gebunden sind?

- betrachte $U^{\mathfrak{A}} = \mathbb{N}$, $P^{\mathfrak{A}} = \{(n, m) \mid n < m\}$, $\beta(x) = 2$, $\beta(y) = 0$
- für $\phi = \exists y\, P(x, y)$ ist $\phi[x/y] = \exists y\, P(y, y)$
- offensichtlich gilt: $(\mathfrak{A}, \beta)\,(\phi[x/y]) = (\mathfrak{A}, \beta)\,(\exists y\, P(y, y)) = 0$, da keine natürliche Zahl echt kleiner als sich selbst
- aber: $\left(\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto \beta(y)]}\right)(\phi) = \left(\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto 0]}\right)(\exists y\, P(x, y)) = 1$, da beispielsweise 0 echt kleiner als 2

Gebundene Umbennung

Lemma (Gebundene Umbennung)

Sei ϕ ein Formel und $y \notin var(\phi)$. Dann gilt:

$$\forall x\, \phi \equiv \forall y\, \phi[x/y] \quad \textit{und} \quad \exists x\, \phi \equiv \exists y\, \phi[x/y]$$

- Variable darf weder gebunden, noch frei vorkommen
- Beispiele:

$$\forall x\, \underbrace{P(x,z)}_{\phi} \equiv \forall y\, P(y,z) = \forall y\, P(x,z)[x/y] \ \checkmark \qquad (y \notin var(\phi))$$

$$\forall x\, \underbrace{P(x,y)}_{\phi} \not\equiv \forall y\, P(y,y) = \forall y\, P(x,y)[x/y] \ \times \qquad (y \in frei(\phi))$$

$$\forall x\, \underbrace{\exists y\, P(x,y)}_{\phi} \not\equiv \underbrace{\forall y\, \exists y\, P(y,y)}_{\equiv \exists y\, P(y,y)} = \forall y\, (\exists y\, P(x,y))\, [x/y] \ \times$$

$$(y \in geb(\phi))$$

- mit Hilfe des Lemmas können wir erreichen, daß keine Variable gleichzeitig gebunden und frei vorkommt

Gebundene Umbennung

Lemma (Gebundene Umbennung)

Sei ϕ ein Formel und $y \notin var(\phi)$. Dann gilt:

$$\forall x\, \phi \equiv \forall y\, \phi[x/y] \quad \textit{und} \quad \exists x\, \phi \equiv \exists y\, \phi[x/y]$$

Beweis: Gegeben Interpretation $(\mathfrak{A}, \beta)$. Es gilt $(\mathfrak{A}, \beta)\,(\forall x\, \phi) = 1$

gdw. für alle $a \in U^{\mathfrak{A}}$ gilt $\left(\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto a]}\right)(\phi) = 1$ (Semantik)

gdw. für alle $a \in U^{\mathfrak{A}}$ gilt $\left(\mathfrak{A}, \left(\beta_{[y \mapsto a]}\right)_{[x \mapsto a]}\right)(\phi) = 1$ (Koinz.-lemma)

gdw. für alle $a \in U^{\mathfrak{A}}$ gilt $\left(\mathfrak{A}, \left(\beta_{[y \mapsto a]}\right)_{[x \mapsto \beta_{[y \mapsto a]}(y)]}\right)(\phi) = 1$

$(a = \beta_{[y \mapsto a]}(y))$

gdw. für alle $a \in U^{\mathfrak{A}}$ gilt $\left(\mathfrak{A}, \beta_{[y \mapsto a]}\right)(\phi[x/y]) = 1$ (Überf.-lemma)

gdw. $(\mathfrak{A}, \beta)\,(\forall y\, \phi[x/y]) = 1$ (Semantik)

□

Bereinigte Form

Definition

Eine Formel ϕ heißt bereinigt, sofern $\mathit{frei}(\phi) \cap \mathit{geb}(\phi) = \varnothing$, und alle Quantoren binden verschiedene Variablen.

$$\forall x\, (R(x,c) \wedge P(y)) \vee \exists y\, \forall x\, (P(x) \wedge \neg Q(y)) \qquad \times$$
$$\forall x\, (\neg R(f(x),z) \vee \exists y\, (P(x) \wedge \neg Q(y))) \qquad \checkmark$$

Proposition

Zu jeder Formel ϕ existiert eine Formel ψ, sodass:

1. $\phi \equiv \psi$, *und*
2. ψ *ist bereinigt.*

Beweis: Systematisches Umbenennen gebundener Variablen.

$$\begin{aligned} & \forall x\, (R(x,c) \wedge P(y)) \vee \exists y\, \forall x\, (P(x) \wedge \neg Q(y)) \\ \equiv\ & \forall z\, (R(z,c) \wedge P(y)) \vee \exists y\, \forall x\, (P(x) \wedge \neg Q(y)) \\ \equiv\ & \forall z\, (R(z,c) \wedge P(y)) \vee \exists v\, \forall x\, (P(x) \wedge \neg Q(v)) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Pränexnormalform

Definition

Eine Formel ϕ ist in Pränexnormalform (PNF), sofern sie bereinigt ist und von der Form:

$$Q_1 x_1 \ \ldots \ Q_n x_n \, \xi$$

mit Quantorenblock $(Q_1, \ldots, Q_n) \in \{\forall, \exists\}^n$ und quantorenfreier Formel ξ, die sogenannte Matrix von ϕ.

$$\forall x \, \neg \exists y \, \neg R(f(x), y) \lor \neg \forall x (P(x) \land \neg Q(y)) \qquad \times$$
$$\forall x \, \exists y \, (\neg R(f(x), c) \lor (P(x) \land \neg Q(z))) \qquad \checkmark$$

Proposition

Zu jeder Formel ϕ existiert eine Formel ψ, sodass:

1. $\phi \equiv \psi$, *und*
2. ψ *ist in Pränexnormalform.*

Pränexnormalform

Beweis: Induktion über den Formelaufbau

- Sei $\phi = P(t_1, \dots, t_n)$ atomar. Dann liegt ϕ bereits in PNF vor (bereinigt, da Quantorenblock leer und Matrix ist ϕ selbst)
- Sei $\phi = \neg\phi_1$ und existiere PNF $\psi_1 = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \, \xi_1$ mit $\phi_1 \equiv \psi_1$. Sei $\overline{\forall} = \exists$ und $\overline{\exists} = \forall$. Verwende wiederholt ($n$-mal) $\neg Qx \, \xi \equiv \overline{Q}x \, \neg\xi$ für

$$
\begin{aligned}
\phi &= \neg\phi_1 \\
&\equiv \neg\psi_1 \\
&= \neg Q_1 x_1 \, Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \, \xi_1 \\
&\equiv \overline{Q_1} x_1 \, \neg Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \, \xi_1 \\
&\vdots \\
&\equiv \overline{Q_1} x_1 \, \overline{Q_2} x_2 \dots \overline{Q_n} x_n \, \neg\xi_1
\end{aligned}
$$

Pränexnormalform

Beweis: Induktion über den Formelaufbau

- Sei $\phi = \phi_1 \circ \phi_2$ mit $\circ \in \{\wedge, \vee\}$ und existiere PNFs ψ_1, ψ_2 mit $\phi_1 \equiv \psi_1$ und $\phi_2 \equiv \psi_2$. Durch Umbenennung der gebundenen Variablen erreichen wir:

$$\psi_1 \equiv Q_1 x_1 \ \ldots \ Q_n x_n \, \xi_1 \qquad \psi_2 \equiv Q'_1 y_1 \ \ldots \ Q'_m y_m \, \xi_2$$

mit $\{x_1, \ldots, x_n\} \cap \{y_1, \ldots, y_m\} = \emptyset$. Verwende wiederholt (genauer $(n+m)$-mal) $Qx\xi \circ \xi' \equiv Qx\,(\xi \circ \xi')$ für $x \notin \mathit{frei}(\xi')$

$$\begin{aligned}
\phi = \phi_1 \circ \phi_2 &\equiv \psi_1 \circ \psi_2 \\
&\equiv Q_1 x_1 \ \ldots \ Q_n x_n \, \xi_1 \circ Q'_1 y_1 \ \ldots \ Q'_m y_m \, \xi_2 \\
&\equiv Q_1 x_1 \ \big(Q_2 x_2 \ \ldots \ Q_n x_n \, \xi_1 \circ Q'_1 y_1 \ \ldots \ Q'_m y_m \, \xi_2\big) \\
&\equiv Q_1 x_1 \ \ldots \ Q_n x_n \ \big(\xi_1 \circ Q'_1 y_1 \ \ldots \ Q'_m y_m \, \xi_2\big) \\
&\equiv Q_1 x_1 \ \ldots \ Q_n x_n \ \big(Q'_1 y_1 \ \big(\xi_1 \circ Q'_2 y_2 \ \ldots \ Q'_m y_m \, \xi_2\big)\big) \\
&\equiv Q_1 x_1 \ \ldots \ Q_n x_n \ \big(Q'_1 y_1 \ \ldots \ Q'_m y_m \ (\xi_1 \circ \xi_2)\big) \\
&\equiv Q_1 x_1 \ \ldots \ Q_n x_n \, Q'_1 y_1 \ \ldots \ Q'_m y_m \ (\xi_1 \circ \xi_2)
\end{aligned}$$

Pränexnormalform

Beweis: Induktion über den Formelaufbau

- Sei $\phi = Qx\,\phi_1$ und existiere PNF $\psi_1 = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n\,\xi_1$ mit $\phi_1 \equiv \psi_1$. Falls für ein Index i, $x = x_i$, dann benenne x_i zu y um. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\phi &= Qx\,\phi_1 \\
&\equiv Qx\,\psi_1 \\
&\equiv Qx\,Q_1 x_1 \dots Q_{i-1} x_{i-1}\,Q_i x_i\,Q_{i+1} x_{i+1} \dots Q_n x_n\,\xi_1 \\
&\equiv Qx\,Q_1 x_1 \dots Q_{i-1} x_{i-1}\,Q_i y\,Q_{i+1} x_{i+1} \dots Q_n x_n\,\xi_1
\end{aligned}$$

$\square$

Pränexnormalform

- für die Umwandlung in PNF benutze Umformungsschritte aus vorherigen Beweis
- Beispiel:

$$
\begin{aligned}
&\forall x\, \neg\exists y\, \neg R(f(x), y) \vee \neg\forall x (P(x) \wedge \neg Q(y)) \\
\equiv\ &\forall x\, \neg\exists y\, \neg R(f(x), y) \vee \exists x \neg(P(x) \wedge \neg Q(y)) \\
\equiv\ &\forall x\, \forall y\, \neg\neg R(f(x), y) \vee \exists x \neg(P(x) \wedge \neg Q(y)) \\
\equiv\ &\forall x\ (\forall y\, \neg\neg R(f(x), y) \vee \exists x \neg(P(x) \wedge \neg Q(y))) \\
\equiv\ &\forall x\ (\forall u\, \neg\neg R(f(x), u) \vee \exists x \neg(P(x) \wedge \neg Q(y))) \\
\equiv\ &\forall x\, \forall u\ (\neg\neg R(f(x), u) \vee \exists x \neg(P(x) \wedge \neg Q(y))) \\
\equiv\ &\forall x\, \forall u\ (\neg\neg R(f(x), u) \vee \exists v \neg(P(v) \wedge \neg Q(y))) \\
\equiv\ &\forall x\, \forall u\, \exists v\ (\neg\neg R(f(x), u) \vee \neg(P(v) \wedge \neg Q(y))) \quad \checkmark \\
\equiv\ &\forall x\, \forall u\, \exists v\ (R(f(x), u) \vee \neg P(v) \vee Q(y)) \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Hörsaalaufgabe

Stellen Sie eine semantisch äquivalente PNF zu nachfolgender Formel her. Bei Fragen konsultieren Sie die Person rechts oder links von Ihnen. (3 min)

$$\neg\left(\forall x\, P(x, y) \wedge \exists x\, Q(x)\right)$$

Skolemnormalform

Definition

Eine Formel ϕ ist in Skolemnormalform (SNF), wenn sie in PNF vorliegt und ihr Quantorenblock nur Allquantoren enthält.

- Thoralf Albert Skolem (1887 - 1963)
- Elimination der Existenzquantoren (durch Skolemisierung)

Definition (Skolemtransformation)

Sei $\phi = Q_1 x_1 \; \ldots \; Q_n x_n \, \xi$ in PNF und $n = |\{i \mid Q_i = \exists\}|$. Die Skolemnormalform von ϕ ergibt sich durch n-maliges Anwenden von:

Sei i kleinster Index mit $Q_i = \exists$, d.h.

$$\phi = \forall x_1 \; \ldots \; \forall x_{i-1} \, \exists x_i \; \xi'$$

dann transformiere mit Hilfe einer Skolemfunktion $f \notin s(\phi)$ zu:

$$\phi' = \forall x_1 \; \ldots \; \forall x_{i-1} \xi'[x_i / f(x_1, \ldots, x_{i-1})]$$

Skolemnormalform

Definition (Skolemtransformation)

Sei $\phi = Q_1 x_1 \ \ldots \ Q_n x_n \, \xi$ in PNF und $n = |\{i \mid Q_i = \exists\}|$. Eine Skolemnormalform von ϕ ergibt sich durch n-maliges Anwenden von:

Sei i kleinster Index mit $Q_i = \exists$, d.h.

$$\phi = \forall x_1 \ \ldots \ \forall x_{i-1} \, \exists x_i \, \xi'$$

dann transformiere mit Hilfe einer Skolemfunktion $f \notin s(\phi)$ zu:

$$\phi' = \forall x_1 \ \ldots \ \forall x_{i-1} \xi'[x_i / f(x_1, \ldots, x_{i-1})]$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
& \forall x \, \forall y \, \exists z \, \forall u \, \exists v \; (R(u, g(x), z) \lor \neg P(v) \lor Q(y, z, c)) \\
\rightsquigarrow \; & \forall x \, \forall y \, \forall u \, \exists v \; (R(u, g(x), f(x, y)) \lor \neg P(v) \lor Q(y, f(x, y), c)) \\
\rightsquigarrow \; & \forall x \, \forall y \, \forall u \; (R(u, g(x), f(x, y)) \lor \neg P(h(x, y, u)) \lor Q(y, f(x, y), c))
\end{aligned}$$

Welche Beziehung zwischen ϕ und ihrer skolemisierten Form?

Skolemnormalform

Proposition

Sei ϕ in PNF und ψ eine Skolemnormalform von ϕ. Es gilt:

1. $\psi \vDash \phi$, *und*
2. ψ *und* ϕ *sind erfüllbarkeitsäquivalent*

Beweis: Wir zeigen, daß beide Eigenschaften für einzelne Skolemisierungsschritte gelten. Sei also $\phi = \forall x_1 \ldots \forall x_{i-1} \exists x_i\, \xi'$ *und* $\psi = \forall x_1 \ldots \forall x_{i-1} \xi'[x_i/f(x_1,\ldots,x_{i-1})]$ *mit* $f \notin s(\phi)$.
1. Sei $(\mathfrak{A},\beta)$ *Modell von* ψ *d.h. für alle* $a_1,\ldots,a_{i-1} \in U^{\mathfrak{A}}$ *gilt:*

$$\left(\mathfrak{A},\beta_{[x_1\mapsto a_1,\ldots,x_{i-1}\mapsto a_{i-1}]}\right)(\xi'[x_i/f(x_1,\ldots,x_{i-1})]) = 1$$

da $var(f(x_1,\ldots,x_{i-1})) \cap geb(\xi') = \emptyset$ *folgt mit Überführ.-lemma*

$$\left(\mathfrak{A},\beta_{[x_1\mapsto a_1,\ldots,x_{i-1}\mapsto a_{i-1},x_i\mapsto b]}\right)(\xi') = 1 \qquad (*)$$

mit $\beta_{[x_1\mapsto a_1,\ldots,x_{i-1}\mapsto a_{i-1}]}(f(x_1,\ldots,x_{i-1})) = f^{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_{i-1}) = b \in U^{\mathfrak{A}}$.
Demzufolge, für alle $a_1,\ldots,a_{i-1} \in U^{\mathfrak{A}}$ *existiert ein* $b \in U^{\mathfrak{A}}$ *mit* $(*)$,
d.h. $(\mathfrak{A},\beta)(\phi) = 1$. *Folglich,* $\psi \vDash \phi$.

Skolemnormalform

Proposition

Sei ϕ in PNF und ψ eine Skolemnormalform von ϕ. Es gilt:

1. $\psi \vDash \phi$, *und*
2. ψ *und* ϕ *sind erfüllbarkeitsäquivalent*

Beweis: Wir zeigen, daß beide Eigenschaften für einzelne Skolemisierungsschritte gelten. Sei also $\phi = \forall x_1 \ \ldots \ \forall x_{i-1} \ \exists x_i \ \xi'$ *und* $\psi = \forall x_1 \ \ldots \ \forall x_{i-1} \xi'[x_i/f(x_1, \ldots, x_{i-1})]$ *mit* $f \notin s(\phi)$.
2. Wegen 1. impliziert Erfüllbarkeit von ψ *die Erfüllbarkeit von* ϕ.
Sei ϕ *erfüllbar, dann ex.* $(\mathfrak{A}, \beta)$, *sodaß für alle* $a_1, \ldots, a_{i-1} \in U^{\mathfrak{A}}$ *ein (möglicherweise auch mehrere)* $b \in U^{\mathfrak{A}}$ *existiert mit:*

$$\left(\mathfrak{A}, \beta_{[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_{i-1} \mapsto a_{i-1}, x_i \mapsto b]}\right)(\xi') = 1$$

Definiere entsprechend eine Auswahlfunktion $u : \left(U^{\mathfrak{A}}\right)^{i-1} \to U^{\mathfrak{A}}$ *und erweitere* $\mathfrak{A}$ *zu* $\mathfrak{A}'$ *mit* $f^{\mathfrak{A}'} = u$. *Für alle* $a_1, \ldots, a_{i-1} \in U^{\mathfrak{A}'}$ *gilt*

$$\left(\mathfrak{A}', \beta_{[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_{i-1} \mapsto a_{i-1}, x_i \mapsto f^{\mathfrak{A}'}(a_1, \ldots, a_{i-1})]}\right)(\xi') = 1$$

Skolemnormalform

Proposition

Sei ϕ in PNF und ψ eine Skolemnormalform von ϕ. Es gilt:

1. $\psi \vDash \phi$, *und*
2. ψ *und* ϕ *sind erfüllbarkeitsäquivalent*

Beweis: Wir zeigen, daß beide Eigenschaften für einzelne Skolemisierungsschritte gelten. Sei also $\phi = \forall x_1 \ldots \forall x_{i-1} \exists x_i\ \xi'$ *und* $\psi = \forall x_1 \ldots \forall x_{i-1} \xi'[x_i/f(x_1, \ldots, x_{i-1})]$ *mit* $f \notin s(\phi)$.
2. Da $f^{\mathfrak{A}'}(a_1, \ldots, a_{i-1}) = \beta_{[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_{i-1} \mapsto a_{i-1}]}(f(x_1, \ldots, x_{i-1}))$ *folgt mit Überführungslemma*

$$\left(\mathfrak{A}', \beta_{[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_{i-1} \mapsto a_{i-1}]}\right)(\xi'[x_i/f(x_1, \ldots, x_{i-1})]) = 1$$

Somit $(\mathfrak{A}', \beta)(\psi) = 1$, *d.h.* ψ *ist erfüllbar.* $\square$

Skolemnormalform

Fazit: Zu jeder Formel ϕ existiert eine Formel ψ, sodass:

1. ϕ und ψ erfüllbarkeitsäquivalent, und
2. ψ ist in Skolemnormalform.

Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

8. PL1 – Normalformen

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

12. Juni 2025
Leipzig

Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

9. PL1 – Herbrandtheorie

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

19. Juni 2025
Leipzig

In der letzten Vorlesung

Substitution und Überführung
Gebundene Umbenennung
Negationsnormalform
Pränexnormalform
Skolemnormalform

Fahrplan für diese Vorlesung

Herbrand-Modellsatz

Satz von Löwenheim-Skolem

Satz von Herbrand

Algorithmus von Gilmore

Herbrand-Theorie

- Jacques Herbrand (1908 - 1931)
- Schon bekannt: Erfüllbarkeitsproblem unentscheidbar
- Aber: im Falle der Erfüllbarkeit existieren kanonische Modelle, sog. Herbrand-Modelle

Definition

Sei ϕ ein Satz in SNF. Das Herbrand-Universum $D(\phi)$ ist induktiv definiert durch:

1. $D(\phi) = \begin{cases} s(\phi) \cap \mathcal{C}, & \text{falls } s(\phi) \cap \mathcal{C} \neq \varnothing \\ \{c\}, & \text{sonst} \end{cases}$ (Konstanten)
2. für jedes $f^n \in s(\phi) \cap \mathcal{F}$ und $t_1, \dots, t_n \in D(\phi)$ sei auch $f(t_1, \dots, t_n) \in D(\phi)$ (variablenfreie Terme)

Beispiel:

$$\phi = \forall x \, \forall y \, (P(h(y), x) \vee R(f(y, y)))$$

$$D(\phi) = \{c, h(c), f(c, c), h(h(c)), h(f(c, c)), f(c, h(c)), \dots\}$$

Herbrand-Theorie

- Jacques Herbrand (1908 - 1931)
- Schon bekannt: Erfüllbarkeitsproblem unentscheidbar
- Aber: im Falle der Erfüllbarkeit existieren kanonische Modelle, sog. Herbrand-Modelle

Definition

Sei ϕ ein Satz in SNF. Das Herbrand-Universum $D(\phi)$ ist induktiv definiert durch:

1. $D(\phi) = \begin{cases} s(\phi) \cap \mathcal{C}, & \text{falls } s(\phi) \cap \mathcal{C} \neq \varnothing \\ \{c\}, & \text{sonst} \end{cases}$ (Konstanten)
2. für jedes $f^n \in s(\phi) \cap \mathcal{F}$ mit $n \geq 1$ und $t_1, \ldots, t_n \in D(\phi)$ sei auch $f(t_1, \ldots, t_n) \in D(\phi)$ (variablenfreie Terme)

Frage: Was ist $|D(\phi)|$?

Abzählbarkeit des Herbrand-Universums

Sei ϕ eine Formel mit Signatur

$$s(\phi) = \{c_1, \ldots, c_m, f_1, \ldots, f_n, P_1, \ldots, P_l\}$$

Definiere die Menge der variablenfreien Terme induktiv nach ihrer Tiefe:

- setze $T_0 = \{c_1, \ldots, c_m\}$ (Tiefe 0)
- $T_{d+1} := T_d \cup \{f(t_1, \ldots, t_l) \mid f^l \in s(\phi) \cap \mathcal{F},\ t_1, \ldots, t_l \in T_d\}$ (Tiefe $d+1$)

Beobachtung:

- jede Menge T_d ist endlich
- abzählbare Vereinigung von endlich Mengen ist abzählbar
- $D(\phi) = \bigcup_{d \in \mathbb{N}} T_d$ ist abzählbar

Herbrand-Struktur

Definition

Sei ϕ ein Satz in SNF. Eine Struktur $\mathfrak{A}$ heißt Herbrand-Struktur für ϕ, falls:

1. $U^{\mathfrak{A}} = D(\phi)$, und
2. für $f \in s(\phi) \cap \mathcal{F}$ und $t_1, \ldots, t_n \in U^{\mathfrak{A}}$:

$$f^{\mathfrak{A}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$$

Bemerkungen:

- Interpretation der Prädikatensymbole in ϕ ist noch offen
- Belegung der Variablen ist ebenfalls offen, spielt aber keine Rolle da ϕ geschlossen (Koinzidenzsatz)
- variablenfreie Terme werden durch sich selber interpretiert

Herbrand-Struktur + Modell = Herbrand-Modell

Herbrand-Struktur

Definition

Sei ϕ ein Satz in SNF. Eine Struktur $\mathfrak{A}$ heißt Herbrand-Struktur für ϕ, falls:

1. $U^{\mathfrak{A}} = D(\phi)$, und
2. für $f \in s(\phi) \cap \mathcal{F}$ und $t_1, \ldots, t_n \in U^{\mathfrak{A}}$:
$$f^{\mathfrak{A}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$$

Beispiel:

$$\phi = \forall x \, \forall y \, (P(h(y), x) \vee R(f(y, y)))$$
$$U^{\mathfrak{A}} = \{c, h(c), f(c, c), h(h(c)), h(f(c, c)), f(c, h(c)), \ldots\}$$
$$h^{\mathfrak{A}} : U^{\mathfrak{A}} \to U^{\mathfrak{A}} \text{ mit } t_1 \mapsto h^{\mathfrak{A}}(t_1) = h(t_1)$$
$$f^{\mathfrak{A}} : U^{\mathfrak{A}} \times U^{\mathfrak{A}} \to U^{\mathfrak{A}} \text{ mit } (t_1, t_2) \mapsto f^{\mathfrak{A}}(t_1, t_2) = f(t_1, t_2)$$
$$P^{\mathfrak{A}} = U^{\mathfrak{A}} \times U^{\mathfrak{A}} \text{ und } R^{\mathfrak{A}} = \emptyset$$

$(\mathfrak{A}, \beta)$ ist Herbrand-Modell von ϕ da für alle $t_1, t_2 \in U^{\mathfrak{A}} : (\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto t_1, y \mapsto t_2]})(P(h(y), x)) = 1$

Herbrand-Struktur

Definition

Sei ϕ ein Satz in SNF. Eine Struktur $\mathfrak{A}$ heißt Herbrand-Struktur für ϕ, falls:

1. $U^{\mathfrak{A}} = D(\phi)$, und
2. für $f \in s(\phi) \cap \mathcal{F}$ und $t_1, \ldots, t_n \in U^{\mathfrak{A}}$:

$$f^{\mathfrak{A}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$$

Lemma (Überführungslemma)

Sei $\mathfrak{A}$ eine Struktur, β eine Belegung, x eine Variable, t ein Term und ϕ eine Formel. Sofern $var(t) \cap geb(\phi) = \varnothing$, dann:

$$(\mathfrak{A}, \beta)(\phi[x/t]) = \left(\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto \beta(t)]}\right)(\phi)$$

für Herbrandstruktur $\mathfrak{A}$, Belegung β und $t \in U^{\mathfrak{A}}$:

- $var(t) \cap geb(\phi) = \varnothing$ da variablenfrei
- $\beta(t) = t^{\mathfrak{A}} = t$

Herbrand-Struktur

Definition

Sei ϕ ein Satz in SNF. Eine Struktur $\mathfrak{A}$ heißt Herbrand-Struktur für ϕ, falls:

1. $U^{\mathfrak{A}} = D(\phi)$, und
2. für $f \in s(\phi) \cap \mathcal{F}$ und $t_1, \ldots, t_n \in U^{\mathfrak{A}}$:

$$f^{\mathfrak{A}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$$

Lemma (Überführungslemma)

Sei $\mathfrak{A}$ eine Herbrand-Struktur für eine Formel ϕ, β eine Belegung, x eine Variable, $t \in U^{\mathfrak{A}}$ ein (variablenfreier) Term. Es gilt:

$$(\mathfrak{A}, \beta)\,(\phi[x/t]) = \left(\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto t]}\right)(\phi)$$

syntaktischer Ersetzung entspricht punktueller Änderung

Herbrand-Modellsatz

Proposition

Sei ϕ ein gleichheitsfreier Satz in SNF. Es gilt:

$$\phi \text{ erfüllbar gdw. } \phi \text{ besitzt Herbrand-Modell}$$

- Fundamentalsatz der PL1
- Suche nach Modellen, kann auf Herbrand-Strukturen eingeschränkt werden (festes abzählbares Universum)
- Einschränkung gleichheitsfrei ist wichtig (betrachte $\phi = \forall x\,(f(x) = x)$)
- aber: für jede Formel ϕ existiert erfüllbarkeitsäquivalente und gleichheitsfreie Formel ψ (ohne Beweis)

Herbrand-Modellsatz

Proposition

Sei ϕ ein gleichheitsfreier Satz in SNF. Es gilt:

$$\phi \text{ erfüllbar gdw. } \phi \text{ besitzt Herbrand-Modell}$$

Beweis:

($\Leftarrow$) Klar.

($\Rightarrow$) Sei ϕ erfüllbar, d.h. es ex. Modell $(\mathfrak{A}, \beta)$ von ϕ. Ausgehend davon definieren ein Herbrand-Modell $(\mathfrak{B}, \gamma)$ von ϕ. Für $P^n \in s(\phi) \cap \mathcal{P}$ und $t_1, \dots, t_n \in D(\phi) = U^{\mathfrak{B}}$ setzen wir:

$$(t_1, \dots, t_n) \in P^{\mathfrak{B}} \text{ gdw. } (\beta(t_1), \dots, \beta(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}$$

Falls $s(\phi) \cap \mathcal{C} = \varnothing$ setzen wir für die eingeführte Konstante $c \in D(\phi) : c^{\mathfrak{A}} \in U^{\mathfrak{A}}$ beliebig (Modelleigenschaft von $(\mathfrak{A}, \beta)$ bleibt erhalten, Koinzidenzsatz). Wir zeigen nun, daß für alle Sätze ψ in SNF mit $s(\psi) \subseteq s(\phi) \cup \{c\}$ gilt:

$$\text{Falls } (\mathfrak{A}, \beta) \text{ Modell von } \psi, \text{ dann } (\mathfrak{B}, \gamma) \text{ Modell von } \psi.$$

Herbrand-Modellsatz

Proposition

Sei ϕ ein gleichheitsfreier Satz in SNF. Es gilt:

$$\phi \text{ erfüllbar gdw. } \phi \text{ besitzt Herbrand-Modell}$$

($\Rightarrow$) Sei ψ Satz in SNF mit $s(\psi) \subseteq s(\phi) \cup \{c\}$. Zeigen: Wenn $(\mathfrak{A}, \beta)$ Modell von ψ, dann auch $(\mathfrak{B}, \gamma)$ Modell von ψ. Beweis per vollst. Ind. über die Anzahl der (All)quantoren.

- Sei $n = 0$. Wir zeigen $(\mathfrak{A}, \beta)(\psi) = (\mathfrak{B}, \gamma)(\psi)$ per struk. Ind.:
  - Sei ψ atomar. Da ψ Satz gilt $\psi = P(t_1, \ldots, t_n)$ für variablenfreie Terme $t_1, \ldots, t_n$. Es gilt:
  $$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \beta)(\psi) = 1 \quad &\text{gdw.} \quad (\beta(t_1), \ldots, \beta(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}} && \text{(Semantik)}\\ &\text{gdw.} \quad (t_1, \ldots, t_n) \in P^{\mathfrak{B}} && (\text{Def. } P^{\mathfrak{B}})\\ &\text{gdw.} \quad (\gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_n)) \in P^{\mathfrak{B}} && (\text{Def. } \mathfrak{B})\\ &\text{gdw.} \quad (\mathfrak{B}, \gamma)(\psi) = 1 && \text{(Semantik)}\end{aligned}$$
  - Für $\psi = \neg\xi$ gilt: $(\mathfrak{A}, \beta)(\psi) = 1$ gdw. $(\mathfrak{A}, \beta)(\xi) = 0$ gdw. $(\mathfrak{B}, \gamma)(\xi) = 0$ gdw. $(\mathfrak{B}, \gamma)(\psi) = 1$.
  - Für $\psi = \xi_1 \circ \xi_2$ analog.

Herbrand-Modellsatz

Proposition

Sei ϕ ein gleichheitsfreier Satz in SNF. Es gilt:

$$\phi \text{ erfüllbar gdw. } \phi \text{ besitzt Herbrand-Modell}$$

($\Rightarrow$) Sei ψ Satz in SNF mit $s(\psi) \subseteq s(\phi) \cup \{c\}$. Zeigen: Wenn $(\mathfrak{A}, \beta)$ Modell von ψ, dann auch $(\mathfrak{B}, \gamma)$ Modell von ψ. Beweis per vollst. Ind. über die Anzahl der Allquantoren.

- Betrachte $n + 1$. Somit ist $\psi = \forall x \xi$ wobei ξ n Quantoren aufweist. Beachte: ξ nicht notwendigerweise Satz da $x \in \mathit{frei}(\xi)$ möglich. Sei $(\mathfrak{A}, \beta)(\psi) = 1$. Folglich, für alle $a \in U^{\mathfrak{A}} : (\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto a]})(\xi) = 1$. Da $\{t^{\mathfrak{A}} \mid t \in D(\psi)\} \subseteq U^{\mathfrak{A}}$ gilt für $t \in D(\psi) : 1 = (\mathfrak{A}, \beta_{[x \mapsto t^{\mathfrak{A}}]})(\xi) = (\mathfrak{A}, \beta)(\xi[x/t])$ (Überführungslemma). Formel $\xi[x/t]$ ist Satz in SNF mit n Quantoren. Also gilt nach IV: für alle $t \in D(\psi)$: $(\mathfrak{B}, \gamma)(\xi[x/t]) = 1$.Mit Überführungslemma für Herbrand-strukturen folgern wir für alle $t \in D(\psi) = U^{\mathfrak{B}}$: $(\mathfrak{B}, \gamma_{[x \mapsto t]})(\xi) = 1$. Dies bedeutet $(\mathfrak{B}, \gamma)(\forall x \xi) = 1$. $\square$

Herbrand-Modellsatz

Bemerkungen:

- gilt auch für beliebige Formelmengen
- falls keine Funktionssymbole auftauchen, ist Herbrand-Universum endlich $\Rightarrow$ nur endlich viele Herbrand-Strukturen

  Beispiel: Ausgangsformel
  $$\phi = \forall x\, \forall y\, (P(z) \to Q(x,y))$$
  Existenzieller Abschluß:
  $$\psi = \exists z\, \forall x\, \forall y\, (P(z) \to Q(x,y))$$
  Skolemnormalform:
  $$\xi = \forall x\, \forall y\, (P(c) \to Q(x,y))$$
  Herbrand-Universum:
  $$D(\xi) = \{c\}$$
  4 mögliche Herbrand-Strukturen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ mit:
  $$P^{\mathfrak{A}} = \varnothing,\ Q^{\mathfrak{A}} = \varnothing \qquad P^{\mathfrak{B}} = \{c\},\ Q^{\mathfrak{B}} = \varnothing$$
  $$P^{\mathfrak{C}} = \varnothing,\ Q^{\mathfrak{C}} = \{(c,c)\} \qquad P^{\mathfrak{D}} = \{c\},\ Q^{\mathfrak{D}} = \{(c,c)\}$$

Satz von Löwenheim-Skolem

Proposition

Falls ϕ erfüllbar, dann existiert bereits ein abzählbares Modell.

Beweisidee (für gleichheitsfreies ϕ):

- sei ψ_1 existenzieller Abschluß von ϕ, d. h. ψ_1 ist Satz und erfüllbarkeitsäquivalent zu ϕ (VL7)
- sei ψ_2 eine semantisch äquivalente Pränexnormalform von ψ_1
- sei ψ_3 eine Skolemnormalform von ψ_2, d.h. $\psi_3 \models \psi_2$ und ψ_3 erfüllbarkeitsäquivalent ψ_2 (VL8)
- da ϕ erfüllbar ist, folgt: ψ_1, ψ_2 und somit auch ψ_3 erfüllbar
- ψ_3 besitzt Herbrand-Modell $\mathfrak{A}$ (Herbrand-Modellsatz)
- wegen $\psi_3 \models \psi_2$ ist $\mathfrak{A}$ Modell von ψ_2
- wegen $\psi_2 \equiv \psi_1$ ist $\mathfrak{A}$ Modell von ψ_1
- da ψ_1 existenzieller Abschluß von ϕ, existiert Belegung β, sodaß $(\mathfrak{A}, \beta)(\phi) = 1$ (belege freie Variablen entsprechend)
- $U^{\mathfrak{A}}$ ist abzählbar $\square$

Herbrand-Expansion

Definition

Sei $\phi = \forall x_1 \ \ldots \ \forall x_n \, \xi$ Satz in SNF. Die Herbrand-Expansion $E(\phi)$ ist definiert durch:

$$E(\phi) = \{\xi[x_1/t_1]\ldots[x_n/t_n] \mid t_1,\ldots,t_n \in D(\phi)\}$$

Beispiel:

$$\phi = \forall x \, \forall y \left(P(h(y),x) \vee R(f(y,y))\right)$$

$$D(\phi) = \{c,\ h(c),\ f(c,c),\ h(h(c)),\ h(f(c,c)),\ f(c,h(c)),\ \ldots\}$$

$$E(\phi) = \{\underbrace{P(h(c),c) \vee R(f(c,c))}_{\xi[x/c][y/c]},\ \underbrace{P(h(h(c)),c) \vee R(f(h(c),h(c)))}_{\xi[x/c][y/h(c)]},\ \ldots\}$$

Formeln der Herbrand-Expansion sind quantoren- und variablenfrei $\Rightarrow$ in AL interpretierbar

$$E(\phi) = \{\ \underbrace{A_1}_{P(h(c),c)} \vee \underbrace{A_2}_{R(f(c,c))},\ \underbrace{A_3}_{P(h(h(c)),c)} \vee \underbrace{A_4}_{R(f(h(c),h(c)))},\ \ldots\}$$

Herbrand-Expansion

Definition

Sei $\phi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \, \xi$ Satz in SNF. Die Herbrand-Expansion $E(\phi)$ ist definiert durch:

$$E(\phi) = \{\xi[x_1/t_1]\ldots[x_n/t_n] \mid t_1, \ldots, t_n \in D(\phi)\}$$

Formeln der Herbrand-Expansion sind quantoren- und variablenfrei $\Rightarrow$ in AL interpretierbar

$$E(\phi) = \{ \underbrace{A_1}_{P(h(c),c)} \vee \underbrace{A_2}_{R(f(c,c))} , \underbrace{A_3}_{P(h(h(c)),c)} \vee \underbrace{A_4}_{R(f(h(c),h(c)))} , \ldots\}$$

Jede Interpretation $I : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ korrespondiert zu einer Herbrandstruktur $\mathfrak{I}$. Sofern $A = P(t_1, \ldots, t_n)$ setzen wir:

$$I(A) = 1 \quad \text{gdw.} \quad (t_1, \ldots, t_n) \in P^{\mathfrak{I}} \qquad (*)$$

Satz von Herbrand

- Erfüllbarkeit in PL1 läßt sich auf Erfüllbarkeit in AL zurückführen
- Aber: einzelne prädikatenlogische Formel entspricht einer (ggf. unendlichen) Menge von aussagenlogischen Formeln

Proposition (Herbrand, 1930)

Sei $\phi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \xi$ gleichheitsfreier Satz in SNF. Es gilt:

$$\phi \text{ erfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad E(\phi) \text{ im aussagenlogischen Sinne erfüllbar}$$

Beweisidee: ϕ erfüllbar

gdw. ϕ besitzt ein Herbrand-Modell $(\mathfrak{A}, \beta)$ (Herbrand-Modellsatz)

gdw. für alle $t_1, \ldots, t_n \in D(\phi)$: $(\mathfrak{A}, \beta_{[x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n]})(\xi) = 1$ (Semantik)

gdw. für alle $t_1, \ldots, t_n \in D(\phi)$: $(\mathfrak{A}, \beta)(\xi[x_1/t_1] \ldots [x_n/t_n]) = 1$ (Ü.lemma)

gdw. $(\mathfrak{A}, \beta)(E(\phi)) = 1$ (Definition $E(\phi)$)

gdw. $E(\phi)$ ist erfüllbar im aussagenlogischen Sinne $(*)$

Satz von Herbrand

Proposition (Herbrand, 1930)

Sei $\phi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \xi$ *gleichheitsfreier Satz in SNF. Es gilt:*

ϕ *erfüllbar gdw.* $E(\phi)$ *im aussagenlogischen Sinne erfüllbar*

- Einschränkung gleichheitsfrei ist wichtig
  (betrachte $f(c) = c \wedge \neg(f(f(c)) = c)$)
- Erfüllbarkeit in PL1 läßt sich auf Erfüllbarkeit in AL zurückführen
- Aber: einzelne prädikatenlogische Formel entspricht einer (ggf. unendlichen) Menge von aussagenlogischen Formeln

Kombiniert mit dem Kompaktheitssatz der AL:

Corollary

Sei $\phi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \xi$ *gleichheitsfreier Satz in SNF. Es gilt:*

ϕ *unerfüllbar gdw. es existiert endliches unerfüllbares* $E \subseteq E(\phi)$

Algorithmus von Gilmore

- Paul Gilmore (1906 – 1978)
- Algorithmus testet auf Unerfüllbarkeit
- in der Praxis kaum anwendbar

Algorithmus von Gilmore

Sei ϕ gleichheitsfreier Satz in SNF und sei $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots\}$ eine Aufzählung von $E(\phi)$. Für i = 1,2,3,... teste:

- *Ist $\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_i$ aussagenlogisch unerfüllbar?*
- *Falls ja, halte an mit Ausgabe "ϕ unerfüllbar"*

- Algorithmus ist korrekt, d.h. wenn Ausgabe "ϕ unerfüllbar", dann ist ϕ auch unerfüllbar
- Algorithmus ist vollständig, d.h. wenn ϕ unerfüllbar, dann terminiert Algorithmus mit Ausgabe "ϕ unerfüllbar"

$\Rightarrow$ Unerfüllbarkeit ist semi-entscheidbar

Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

9. PL1 – Herbrandtheorie

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

19. Juni 2025
Leipzig

Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

10. PL1 – Grundresolution und Unifikation

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

26. Juni 2025
Leipzig

In der letzten Vorlesung

Herbrand-Modellsatz
Satz von Löwenheim-Skolem
Satz von Herbrand
Algorithmus von Gilmore

Fahrplan für diese Vorlesung

Grundresolution

Allgemeine Substitution

Unifikation

Prädikatenlogische Resolution

Grundresolution

- Idee: verwende aussagenlogische Resolution zum Nachweis der Unerfüllbarkeit
- dies ist möglich aufgrund des Satzes von Herbrand und des Algorithmus von Gilmore

Proposition (Herbrand, 1930)

Sei $\phi = \forall x_1 \dots \forall x_n \xi$ gleichheitsfreier Satz in SNF. Es gilt:

$$\phi \text{ erfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad E(\phi) \text{ im aussagenlogischen Sinne erfüllbar}$$

Algorithmus von Gilmore

Sei ϕ gleichheitsfreier Satz in SNF und sei $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots\}$ eine Aufzählung von $E(\phi)$. Für i = 1,2,3,... teste:

- *Ist $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_i$ aussagenlogisch unerfüllbar?*
- *Falls ja, halte an mit Ausgabe "ϕ unerfüllbar"*

Grundresolutionsalgorithmus

Grundresolutionsalgorithmus

Sei ϕ gleichheitsfreier Satz in SNF mit Matrix in KNF und $\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ eine Aufzählung von $E(\phi)$. Für $i = 1, 2, \ldots$ teste:

- $\Box \in \mathrm{Res}^*(M(\phi_1) \cup \ldots \cup M(\phi_i))$?
- *Falls ja, halte an mit Ausgabe "ϕ unerfüllbar"*

$$
\begin{aligned}
\phi &= \forall x\,(P(x) \wedge \neg P(f(f(x)))) \\
D(\phi) &= \{c, f(c), f(f(c)), f(f(f(c))), \ldots\} \\
E(\phi) &= \{\underbrace{P(c) \wedge \neg P(f(f(c))),}_{\phi_1} \quad \underbrace{P(f(c)) \wedge \neg P(f(f(f(c)))),}_{\phi_2} \ldots\} \\
M(\phi_1) &= \{\{P(c)\},\ \{\neg P(f(f(c)))\}\} \\
\cup_{i=1}^{2} M(\phi_i) &= \{\{P(c)\},\ \{\neg P(f(f(c)))\},\ \{P(f(c))\},\ \{\neg P(f(f(f(c))))\}\} \\
\cup_{i=1}^{3} M(\phi_i) &= \{\{P(c)\},\ \{\neg P(f(f(c)))\},\ \{P(f(c))\},\ \{\neg P(f(f(f(c))))\}, \\
&\qquad \{P(f(f(c)))\},\ \{\neg P(f(f(f(f(c)))))\}\}
\end{aligned}
$$

$$\Box \in \mathrm{Res}^*(M(\phi_1) \cup M(\phi_2) \cup M(\phi_3))$$

Grundresolutionsalgorithmus

Grundresolutionsalgorithmus

Sei ϕ gleichheitsfreier Satz in SNF mit Matrix in KNF und $\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ eine Aufzählung von $E(\phi)$. Für $i = 1, 2, \ldots$ teste:

- $\Box \in \mathrm{Res}^*(M(\phi_1) \cup \ldots \cup M(\phi_i))$?
- *Falls ja, halte an mit Ausgabe "ϕ unerfüllbar"*

- Algorithmus ist korrekt und vollständig bzgl. Unerfüllbarkeit
- Aber! extrem ineffizient, da alle Grundinstanzen betrachtet werden

Zum Beispiel:

für $\xi = P(x) \wedge \neg P(f(f(x)))$ reicht $[x/c]$ und $[x/f(f(c))]$ aus

$\Rightarrow$ zielgerichtete Instantiierung

Allgemeine Substitution

- Substitution [x/t] (VL8) ist ein Spezialfall – ersetzen einer Variablen durch einen Term
- jetzt: mehrfache gleichzeitige Variablenersetzung

Definition

Sei $V \subseteq \mathcal{V}$ und $\sigma : V \to \mathcal{T}$. Wir definieren die Substitution σ, $\sigma : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ mit $t \mapsto t\sigma$ rekursiv durch:

- für $x \in \mathcal{V}$: $x\sigma = \begin{cases} \sigma(x), & \text{falls } x \in V \\ x, & \text{sonst} \end{cases}$
- für $c \in \mathcal{C}$: $c\sigma = c$
- für $f \in \mathcal{F}$ mit $ar(f) = n \geq 1$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$

$$f(t_1, \ldots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$$

$$\text{sei } V = \{x, y\}, \quad \sigma(x) = h(y), \quad \sigma(y) = g(y, x)$$

$$f(h(x), y)\sigma = f(h(h(y)), g(y, x))$$

Notation und Eigenschaften

- für Substitution $\sigma : V \to \mathcal{T}$ mit $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ endlich und $x_i\sigma = t_i$ für $1 \le i \le n$, schreiben wir auch $[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n]$
- Simultane vs. Sequentielle Ersetzung:

$$f(h(x), y)[x/h(y)][y/g(y,x)] = f(h(h(g(y,x))), g(y,x))$$

$$f(h(x), y)[x/h(y),\ y/g(y,x)] = f(h(h(y)), g(y,x))$$

- für zwei Substitution σ und τ und eine Variable x sei:

$$x(\sigma\tau) = (x\sigma)\tau \qquad \text{(Komposition)}$$

- via Terminduktion folgt $t(\sigma\tau) = (t\sigma)\tau$ für beliebige Terme t
- Komposition ist assoziativ, d. h. $(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3 = \sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$
  Beweis:

$$\begin{aligned} t((\sigma_1\sigma_2)\sigma_3) &= (t(\sigma_1\sigma_2))\sigma_3 \\ &= ((t\sigma_1)\sigma_2)\sigma_3 \\ &= (t\sigma_1)(\sigma_2\sigma_3) \\ &= t(\sigma_1(\sigma_2\sigma_3)) \end{aligned}$$

Kommutativität

- Vertauschung in bestimmten Fällen möglich

Proposition

Gegeben Substitution $\sigma : V \to \mathcal{T}$ *mit* $x \notin V$ *und* $x \notin var(y\sigma)$ *für alle* $y \in V$. *Für jeden Term* $t \in \mathcal{T}$ *gilt:* $[x/t]\sigma = \sigma[x/t\sigma]$

- Einschränkungen wichtig

1. $f(x)[x/c]\underbrace{[x/d]}_{\sigma} = f(c) \neq f(d) = f(x)\underbrace{[x/d]}_{\sigma}\underbrace{[x/c]}_{[x/c\sigma]} \qquad (x \in V)$
2. $g(x,y)[x/c]\underbrace{[y/x]}_{\sigma} = g(c,x) \neq g(c,c) = g(x,y)\underbrace{[y/x]}_{\sigma}\underbrace{[x/c]}_{[x/c\sigma]}$
   $(x \in var(y\sigma))$

Kommutativität

Proposition

Gegeben Substitution $\sigma : V \to \mathcal{T}$ und $x \notin V$ als auch $x \notin var(y\sigma)$ für alle $y \in V$. Für jeden Term $t \in \mathcal{T}$ gilt: $[x/t]\sigma = \sigma[x/t\sigma]$

Beweis: Zeige $u[x/t]\sigma = u\sigma[x/t\sigma]$ für Terme u mittels Termind.

- Sei u eine Variable. Zwei Fälle: 1. $u = x$. Es gilt: $x[x/t]\sigma = t\sigma$. Da $x \notin V$ folgt $x\sigma[x/t\sigma] = x[x/t\sigma] = t\sigma$.
  2. $u = z \neq x$. Es gilt: $z[x/t]\sigma = z\sigma$ und ebenso, $z\sigma[x/t\sigma] = z\sigma$ da $x \notin var(z\sigma)$.
- Sei $u = c$ Konstante. Folglich, $c[x/t]\sigma = c\sigma = c\sigma[x/t\sigma]$
- Sei $u = f(t_1, \ldots, t_n)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
f(t_1, \ldots, t_n)[x/t]\sigma &= f(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])\sigma \\
&= f(t_1[x/t]\sigma, \ldots, t_n[x/t]\sigma) \\
&= f(t_1\sigma[x/t\sigma], \ldots, t_n\sigma[x/t\sigma]) \qquad \text{(IV)} \\
&= f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)[x/t\sigma] \\
&= (f(t_1, \ldots, t_n)\sigma)[x/t\sigma]
\end{aligned}$$

Unifikation

- Ziel: Literale durch Substitution in gleiche (bzw. komplementäre) Gestalt überführen
- Sei σ eine Substitution und $P(t_1, \ldots, t_n)$ eine atomare Aussage. Wir setzen:

$$P(t_1, \ldots, t_n)\sigma = P(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$$
$$(\neg P(t_1, \ldots, t_n))\sigma = \neg P(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$$

Definition

Sei $S = \{L_1, \ldots, L_n\}$ eine Menge von Literalen und σ eine Substitution. σ heißt Unifikator für S, falls $L_1\sigma = \ldots = L_n\sigma$.

$[x/g(c),\ y/f(g(c))]$ ist Unifikator für $S = \{P(x, y),\ P(g(c), f(x))\}$ da

$$P(x, y)[x/g(c),\ y/f(g(c))] = P(g(c),\ f(g(c))), \text{ und}$$
$$P(g(c), f(x))[x/g(c),\ y/f(g(c))] = P(g(c),\ f(g(c))).$$

- nicht jede Menge S ist unifizierbar (kein Unifikator für S)
- falls unifizierbar, dann Unifikator nicht eindeutig bestimmt

Hörsaalübung

Definition

Sei $S = \{L_1, \ldots, L_n\}$ eine Menge von Literalen und σ eine Substitution. σ heißt Unifikator für S, falls $L_1\sigma = \ldots = L_n\sigma$.

Vervollständigen Sie nachfolgende Tabelle. Bei Fragen konsultieren Sie die Person rechts oder links von Ihnen. (3 min)

Literal 1	Literal 2	Unifizierbar	Unifikator
$P(x, y)$	$P(g(c), f(x))$	Ja	$[x/g(c),\ y/f(g(c))]$
$Q(x, f(y))$	$P(g(c), f(x))$	Nein	Q vs. P
$\neg R(x)$	$\neg R(f(x))$	Nein	für jede $[x/t]$: $t \neq f(t)$
$\neg Q(g(x), a)$	$\neg Q(f(y), a)$	Nein	g vs. f
$P(x, g(y))$	$P(f(y), g(z))$	Ja	$[x/f(y),\ z/y]$
$Q(x, f(z))$	$Q(f(z), x)$	Ja	$[x/f(z)]$

Allgemeinster Unifikator

Definition

Seien σ_1 und σ_2 Substitutionen. σ_1 ist allgemeiner als σ_2 ($\sigma_1 \leq \sigma_2$), falls eine Substitution τ existiert, so daß: $\sigma_1 \tau = \sigma_2$.

Beispiel: $S = \{P(x), P(y)\}$, $\sigma_1 = [x/y]$, $\sigma_2 = [x/c,\ y/c]$

Es gilt: $\sigma_1 \leq \sigma_2$, da $[x/y][y/c] = [x/c,\ y/c]$

Proposition

Die Relation $\leq$ ist transitiv.

Beweis: Seien $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_1, \tau_2$ Substitutionen mit $\sigma_1 \tau_1 = \sigma_2$ und $\sigma_2 \tau_2 = \sigma_3$. Folglich $\sigma_3 = \sigma_2 \tau_2 = (\sigma_1 \tau_1)\tau_2 \underbrace{=}_{\text{Assoziativität}} \sigma_1(\tau_1 \tau_2) = \sigma_3$. $\square$

Proposition

Falls σ_1 Unifikator einer Literalmenge S und gilt $\sigma_1 \leq \sigma_2$, dann auch σ_2 Unifikator der Menge S.

Allgemeinster Unifikator

Proposition

Falls σ_1 Unifikator einer Literalmenge S und gilt $\sigma_1 \leq \sigma_2$, dann auch σ_2 Unifikator der Menge S.

Beweis: Da σ_1 Unifikator von S gilt $L_i\sigma_1 = L_j\sigma_1$ für alle $L_i, L_j \in S$. Sei also $t = L\sigma_1$ für alle $L \in S$. Da $\sigma_1 \leq \sigma_2$ existiert ein τ mit $\sigma_1\tau = \sigma_2$. Somit gilt für jedes $L \in S$: $L\sigma_2 = L(\sigma_1\tau) = (L\sigma_1)\tau = t\tau$.

Definition

Sei $S = \{L_1, \ldots, L_n\}$ eine Menge von Literalen und σ eine Substitution. σ heißt allgemeinster Unifikator (mgu) für S, falls:

1. σ ist Unifikator für S, und
2. falls τ Unifikator für S, dann $\sigma \leq \tau$.

Achtung! Obwohl Name allgemeinster Unifikator kann es mehrere geben: $S = \{P(x), P(y)\}$, $\sigma_1 = [x/y]$, $\sigma_2 = [y/x]$

Unifikationsalgorithmus

- Ziel: Auffinden eines allgemeinsten Unifikators im Falle der Unifizierbarkeit

Unifikationsalgorithmus

Eingabe: endliche, nichtleere Menge S von Literalen

1. *setze* $\sigma = []$ *(leere Substitution)*
2. *solange* $|\{L\sigma \mid L \in S\}| > 1$, *(noch nicht unifiziert)*
   finde erste Position, an der sich $L_1\sigma$ *und* $L_2\sigma$ *mit* $L_1, L_2 \in S$ *unterscheiden*
   - *falls, an dieser Position weder* $L_1\sigma$ *noch* $L_2\sigma$ *eine Variable aufweist, gib "nicht unifizierbar" aus und stoppe* *(Clash)*
   - *sonst, d.h. ein Zeichen Variable* x *und andere Term* t
     - *falls,* $x \in var(t)$, *gib "nicht unifizierbar" aus und stoppe (Cycle)*
     - *andernfalls, erweitere Substitution:* $\sigma := \sigma[x/t]$
3. *gib "unifizierbar mit mgu* σ*" aus und stoppe*

...terminiert, korrekt und vollständig

Unifikationsalgorithmus

Gegeben die folgenden beiden Literale:

$$L_1 = P(f(z, g(a, y)),\ h(z)), \quad L_2 = P(f(f(u, v), w),\ h(f(a, b)))$$

Substitution σ	Unterscheidungsstelle
$\sigma = []$	$L_1\sigma = P(f(z,\ g(a, y)),\ h(z))$ $L_2\sigma = P(f(f(u, v),\ w),\ h(f(a, b)))$
$\sigma = [z/f(u, v)]$	$L_1\sigma = P(f(f(u, v),\ g(a, y)),\ h(f(u, v)))$ $L_2\sigma = P(f(f(u, v),\ w),\ h(f(a, b)))$
$\sigma = [z/f(u, v)][w/g(a, y)]$	$L_1\sigma = P(f(f(u, v),\ g(a, y)),\ h(f(u, v)))$ $L_2\sigma = P(f(f(u, v),\ g(a, y)),\ h(f(a, b)))$
$\sigma = [z/f(u, v)][w/g(a, y)][u/a]$	$L_1\sigma = P(f(f(a, v),\ g(a, y)),\ h(f(a, v)))$ $L_2\sigma = P(f(f(a, v),\ g(a, y)),\ h(f(a, b)))$
$\sigma = [z/f(a, b)][w/g(a, y)]$ $[u/a][v/b]$	$L_1\sigma = P(f(f(a, b),\ g(a, y)),\ h(f(a, b)))$ $L_2\sigma = P(f(f(a, b),\ g(a, y)),\ h(f(a, b)))$

Unifikationsalgorithmus

Theorem (Robinson, 1965)

Für jede nichtleere, endliche Menge S von Literalen gilt:

(A) *Der Unifikationsalgorithmus terminiert.*

(B) *Falls S nicht unifizierbar, so terminiert der Algorithmus mit Ausgabe "nicht unifizierbar".*

(C) *Falls S unifizierbar, so terminiert der Algorithmus und liefert einen allgemeinsten Unifikator von S.*

(A) Die Anzahl der Variablen in S ist endlich. Eine nichtterminierende Schleifenbegehung erfordert eine Variable x und Term t mit $x \notin var(t)$ (die Unterscheidungsstelle) und setzt $\sigma := \sigma[x/t]$. Dadurch verschwindet die Variable x aus allen Literalen $L\sigma[x/t]$ mit $L \in S$. Folglich wird die Anzahl der Variablen in jedem Durchlauf echt kleiner. Daraus folgt, dass die Schleife entweder innerhalb eines Durchlaufs abbricht oder regulär verlassen wird, d.h. $|\{L\sigma \mid L \in S\}| = 1$, woraufhin der Algorithmus gemäß Schritt 3 terminiert.

Unifikationsalgorithmus

Theorem (Robinson, 1965)

Für jede nichtleere, endliche Menge S von Literalen gilt:

(A) *Der Unifikationsalgorithmus terminiert.*

(B) *Falls S nicht unifizierbar, so terminiert der Algorithmus mit Ausgabe "nicht unifizierbar".*

(C) *Falls S unifizierbar, so terminiert der Algorithmus und liefert einen allgemeinsten Unifikator von S.*

(B) Sei S nicht unifizierbar. Somit kann die Schleife nicht regulär verlassen werden, denn andernfalls wäre $|\{L\sigma \mid L \in S\}| = 1$ und damit S doch unifizierbar. Da nach (A) der Algorithmus terminiert, muß innerhalb einer Schleifenbegehung abgebrochen werden. Dies ist nur durch die Ausgabe "nicht unifizierbar" möglich.

Unifikationsalgorithmus

Theorem (Robinson, 1965)

Für jede nichtleere, endliche Menge S von Literalen gilt:

(A) *Der Unifikationsalgorithmus terminiert.*

(B) *Falls S nicht unifizierbar, so terminiert der Algorithmus mit Ausgabe "nicht unifizierbar".*

(C) *Falls S unifizierbar, so terminiert der Algorithmus und liefert einen allgemeinsten Unifikator von S.*

(C) Ohne Beweis (siehe z.B. Schöning).

Aus (C) folgt, dass jede unifizierbare Menge einen mgu besitzt.

Prädikatenlogische Resolution

Definition

Substitution $\sigma : V \to \mathcal{T}$ heißt Variablenumbenennung falls: $\sigma(x) \in \mathcal{V} \setminus V$ für alle $v \in V$, und σ ist injektiv.

Definition

Sei $\phi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \xi$ gleichheitsfreier Satz in SNF mit Matrix ξ in KNF und $M(\xi) = \{D_1, \ldots, D_m\}$. Eine Klausel R heißt (prädikatenlogische) Resolvente von D_i und D_j (bzw. von ϕ), falls:

1. es existieren Variablenumbenennungen σ_1,σ_2, so daß:
$$\mathit{frei}(D_i\sigma_1) \cap \mathit{frei}(D_j\sigma_2) = \varnothing$$
2. es existieren nichtleere $D_i' \subseteq D_i$ und $D_j' \subseteq D_j$ mit σ ist mgu von $\overline{D_i'}\sigma_1 \cup D_j'\sigma_2$, wobei $\overline{D_i'} = \{\overline{L} \mid L \in D_i'\}$ und
3. $R = \Big((D_i\sigma_1 \setminus D_i'\sigma_1) \cup (D_j\sigma_2 \setminus D_j'\sigma_2)\Big)\sigma$

Prädikatenlogische Resolution

Beispiele:

1. Sei $\phi = \forall x\ \underbrace{(P(x) \wedge \neg P(f(f(x))))}_{\xi}$
   - $M(\xi) = \{\underbrace{\{P(x)\}}_{D_1}, \underbrace{\{\neg P(f(f(x)))\}}_{D_2}\}$
   - Variablenumbennung $\sigma_1 = [x/y]$ und $\sigma_2 = []$ liefert

     $$D_1\sigma_1 = \{P(y)\} \text{ und } D_2\sigma_2 = \{\neg P(f(f(x)))\}$$

   - für $D_1' = D_1$ und $D_2' = D_2$ ist $\sigma = [y/f(f(x))]$ mgu von

     $$\overline{D_1'}\sigma_1 \cup D_2'\sigma_2 = \{\neg P(y), \neg P(f(f(x)))\}$$

   - $R = \big((D_i\sigma_1 \setminus D_i'\sigma_1) \cup (D_j\sigma_2 \setminus D_j'\sigma_2)\big)\sigma = (\emptyset \cup \emptyset)\sigma = \emptyset = \square$

Prädikatenlogische Resolution

Beispiele:

2. $\phi = \forall x\, \forall z\, \underbrace{((P(f(x)) \vee P(z) \vee \neg Q(z)) \wedge (\neg P(x) \vee R(g(x), a)))}_{\xi}$

   - $M(\xi) = \{\underbrace{\{P(f(x)),\ P(z),\ \neg Q(z)\}}_{D_1},\ \underbrace{\{\neg P(x),\ R(g(x), a)\}}_{D_2}\}$
   - Variablenumbenennung: $\sigma_1 = []$, $\sigma_2 = [x/y]$ ergibt

     $$D_1\sigma_1 = \{P(f(x)),\ P(z),\ \neg Q(z)\}, \quad D_2\sigma_2 = \{\neg P(y),\ R(g(y), a)\}$$

   - für $D_1' = \{P(f(x)), P(z)\}$ und $D_2' = \{\neg P(y)\}$ ist $\sigma = [z/f(x)][y/f(x)]$ mgu von

     $$\overline{D_1'}\sigma_1 \cup D_2'\sigma_2 = \{\neg P(f(x)), \neg P(z), \neg P(y)\}$$

   - Resolvente $R = ((D_1\sigma_1 \setminus D_1'\sigma_1) \cup (D_2\sigma_2 \setminus D_2'\sigma_2))\,\sigma$

     $$= (\{\neg Q(z)\} \cup \{R(g(y), a)\})\sigma$$
     $$= \{\neg Q(f(x)),\ R(g(f(x)), a)\}$$

Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

10. PL1 – Grundresolution und Unifikation

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

26. Juni 2025
Leipzig

Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

11. PL1 – Prädikatenlogische Resolution

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

03. Juli 2025
Leipzig

In der letzten Vorlesung

Grundresolution

Allgemeine Substitution

Unifikation

Einführung Prädikatenlogische Resolvente

Fahrplan für diese Vorlesung

Prädikatenlogische Resolvente

Lifting-Lemma

Resolutionssatz

Prädikatenlogische Resolution

Definition

Substitution $\sigma : V \to \mathcal{T}$ heißt Variablenumbenennung falls: $\sigma(x) \in \mathcal{V} \setminus V$ für alle $v \in V$, und σ ist injektiv.

Definition

Sei $\phi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \xi$ gleichheitsfreier Satz in SNF mit Matrix ξ in KNF und $M(\xi) = \{D_1, \ldots, D_m\}$. Eine Klausel R heißt (prädikatenlogische) Resolvente von D_i und D_j (bzw. von ϕ), falls:

1. es existieren Variablenumbenennungen σ_1,σ_2, so daß:
$$\mathit{frei}(D_i\sigma_1) \cap \mathit{frei}(D_j\sigma_2) = \varnothing$$
2. es existieren nichtleere $D_i' \subseteq D_i$ und $D_j' \subseteq D_j$ mit σ ist mgu von $\overline{D_i'}\sigma_1 \cup D_j'\sigma_2$, wobei $\overline{D_i'} = \{\overline{L} \mid L \in D_i'\}$ und
3. $R = \Big((D_i\sigma_1 \setminus D_i'\sigma_1) \cup (D_j\sigma_2 \setminus D_j'\sigma_2)\Big)\sigma$

Prädikatenlogische Resolution

Beispiele:

1. Sei $\phi = \forall x \ \underbrace{(P(x) \wedge \neg P(f(f(x))))}_{\xi}$
   - $M(\xi) = \{\underbrace{\{P(x)\}}_{D_1}, \underbrace{\{\neg P(f(f(x)))\}}_{D_2}\}$
   - Variablenumbennung $\sigma_1 = [x/y]$ und $\sigma_2 = []$ liefert
   $$D_1\sigma_1 = \{P(y)\} \text{ und } D_2\sigma_2 = \{\neg P(f(f(x)))\}$$
   - für $D_1' = D_1$ und $D_2' = D_2$ ist $\sigma = [y/f(f(x))]$ mgu von
   $$\overline{D_1'}\sigma_1 \cup D_2'\sigma_2 = \{\neg P(y), \neg P(f(f(x)))\}$$
   - $R = \big((D_i\sigma_1 \setminus D_i'\sigma_1) \cup (D_j\sigma_2 \setminus D_j'\sigma_2)\big)\sigma = (\emptyset \cup \emptyset)\sigma = \emptyset = \square$

Prädikatenlogische Resolution

Beispiele:

2. $\phi = \forall x\, \forall z\, \underbrace{((P(f(x)) \lor P(z) \lor \neg Q(z)) \land (\neg P(x) \lor R(g(x), a)))}_{\xi}$
   - $M(\xi) = \{\underbrace{\{P(f(x)),\ P(z),\ \neg Q(z)\}}_{D_1},\ \underbrace{\{\neg P(x),\ R(g(x), a)\}}_{D_2}\}$
   - Variablenumbenennung: $\sigma_1 = [\,]$, $\sigma_2 = [x/y]$ ergibt
     $$D_1\sigma_1 = \underbrace{\{P(f(x)),\ P(z)\}}_{D_1'} \cup \{\neg Q(z)\},$$
     $$D_2\sigma_2 = \underbrace{\{\neg P(y)\}}_{D_2'} \cup \{R(g(y), a)\}$$
   - $\sigma = [z/f(x)][y/f(x)]$ ist mgu von
     $$\overline{D_1'}\sigma_1 \cup D_2'\sigma_2 = \{\neg P(f(x)), \neg P(z), \neg P(y)\}$$
   - Resolvente $R = ((D_1\sigma_1 \setminus D_1'\sigma_1) \cup (D_2\sigma_2 \setminus D_2'\sigma_2))\,\sigma$
     $$= (\{\neg Q(z)\} \cup \{R(g(y), a)\})\sigma$$
     $$= \{\neg Q(f(x)),\ R(g(f(x)), a)\}$$

Prädikatenlogische Resolution

- wir übernehmen die Notation aus der AL und schreiben Res für den Resolutionoperator und Res* für die Resolutions-hülle, d.h. für prädikatenlogische Klauselmenge M

$$\mathrm{Res}(M) = M \cup \{R \mid R \text{ ist Resolvente zweier Klauseln aus } M\}$$

$$\mathrm{Res}^0(M) = M, \mathrm{Res}^{i+1}(M) = \mathrm{Res}(\mathrm{Res}^i(M)), \mathrm{Res}^*(M) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Res}^i(M)$$

- für eine bessere Übersicht eignet sich wieder die graphische Darstellung – diesmal mit Angabe der Variablenumbennung und des Unifikators
- Ziel ist es, den Resolutionssatz für die Prädikatenlogik zu beweisen, das heißt: Klauselmenge M ist unerfüllbar genau dann, wenn $\square \in \mathrm{Res}^*(M)$

Resolvente – Graphische Darstellung

$$D_1 = \{\, \underline{P(f(x))},\ \underline{P(z)},\ \neg Q(z) \,\} \qquad\qquad D_2 = \{\, \underline{\neg P(x)},\ R(g(x), a) \,\}$$

$$\sigma_1 = [\,] \qquad\qquad \sigma_2 = [x/y]$$

$$\{\, P(f(x)),\ P(z),\ \neg Q(z) \,\} \qquad\qquad \{\, \neg P(y),\ R(g(y), a) \,\}$$

$$\sigma = [z/f(x)][y/f(x)]$$

$$\{\, \neg Q(f(x)),\ R(g(f(x)), a) \,\}$$

Anmerkung:

- ohne Variablenumbenennung wäre $\overline{P(f(x))}$ und $\neg P(x)$ nicht unifizierbar, und somit z.B. für

$$\forall x \left(P(f(x)) \wedge \neg P(x) \right) \text{ keine } \square \text{ resolvierbar}$$

Resolvente – Graphische Darstellung

$$
\begin{tikzcd}
D_1 = \{\, \underline{P(x)},\ Q(x) \} \arrow[d, dash, "\sigma_1 = {[\,]}"] & D_2 = \{\, \underline{\neg P(f(y))} \} \arrow[d, dash, "\sigma_2 = {[\,]}"] & D_3 = \{\, \neg Q(a) \} \\
\{\, {\color{cyan}P(x)},\ Q(x) \} \arrow[d, dash] & \{\, {\color{cyan}\neg P(f(y))} \} \arrow[dl, dash, "{\color{cyan}\sigma = [x/f(y)]}"] & \\
\{\, Q(f(y)) \} & &
\end{tikzcd}
$$

Anmerkung:

- ohne Anwendung des Unifikators wäre $R = \{Q(x)\}$, und somit im nächsten Schritt mit Hilfe von Klausel D_3 die $\Box$ ableitbar, aber

$$\forall x\, \forall y \big((P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg P(f(y)) \wedge \neg Q(a) \big) \text{ erfüllbar}$$

Grundinstanzen

Definition

Ein Literal L' ist Grundinstanz eines Literals L, falls eine Substitution σ existiert mit: $L' = L\sigma$ und L' variablenfrei.

Beispiel: Gegeben Literal $L = P(x, f(x), g(a, y))$, dann

$$L' = P(a, f(a), g(a, b)) \quad \text{und} \quad L'' = P(f(c), f(f(c)), g(a, d))$$

Grundinstanzen via $\sigma' = [x/a, y/b]$ und $\sigma'' = [x/f(c), y/d]$.

Definition

Eine Klausel M' ist Grundinstanz einer Klausel M, falls eine Substitution σ existiert mit: $M' = M\sigma$ und M' variablenfrei.

Beispiel: Gegeben $M = \{P(x, f(x), g(a, y)),\ \neg Q(y, z)\}$, dann

Klausel $M' = \{P(a, f(a), g(a, b)),\ \neg Q(b, c)\}$, und

Klausel $M'' = \{P(f(c), f(f(c)), g(a, d)),\ \neg Q(d, e)\}$

Grundinstanzen via $\sigma' = [x/a, y/b, z/c]$, $\sigma'' = [x/f(c), y/d, z/e]$.

Lifting-Lemma

Proposition (Lifting-Lemma)

Seien K_1 und K_2 prädikatenlogische Klauseln und K_1' sowie K_2' entsprechende Grundinstanzen. Falls R' aussagenlogische Resolvente von $\{K_1', K_2'\}$, dann existiert prädikatenlogische Resolvente R von $\{K_1, K_2\}$ mit R' ist Grundinstanz von R .

$$\begin{tikzcd}
K_1 \arrow[d, "\sigma_1"'] \arrow[dr, dash] & & K_2 \arrow[d, "\sigma_2"] \arrow[dl, dash] \\
K_1' \arrow[dr, dash] & R \arrow[d, "\sigma"] & K_2' \arrow[dl, dash] \\
& R' &
\end{tikzcd}$$

– Resolution

→ Grundinstanziierung

Lifting-Lemma – Beispiel

$$
\begin{tikzcd}
\{P(x,f(x),g(a,y)),\neg Q(y,z)\} \arrow[dr, dash] \arrow[dd, "\sigma_1 = {[x/b,y/b,z/c]}"'] & & \{\neg P(y,f(y),z)\} \arrow[dl, dash] \arrow[dd, "\sigma_2 = {[y/b,z/g(a,b)]}"] \\
& \{\neg Q(y,z)\} \arrow[dd, "\sigma = {[y/b,z/c]}"] & \\
\{P(b,f(b),g(a,b)),\neg Q(b,c)\} \arrow[dr, dash] & & \{\neg P(b,f(b),g(a,b))\} \arrow[dl, dash] \\
& \{\neg Q(b,c)\} &
\end{tikzcd}
$$

Lifting-Lemma

Beweis: Seien K_1 und K_2 prädikatenlogische Klauseln und $K_1' = K_1\sigma_1$ sowie $K_2' = K_2\sigma_2$ entsprechende Grundinstanzen. Offensichtlich existieren Variablenumbennungen u_1 und u_2, so daß $frei(K_1 u_1) \cap frei(K_2 u_2) = \varnothing$. Es gilt, daß auch K_1' und K_2' Grundinstanzen von $K_1 u_1$ bzw. $K_2 u_2$ sind. Setze dazu $\sigma_1' = u_1^{-1}\sigma_1$ und $\sigma_2' = u_2^{-1}\sigma_2$, d.h.

$$K_1' = (K_1 u_1)\sigma_1' \quad \text{und} \quad K_2' = (K_2 u_2)\sigma_2'.$$

Da $K_1 u_1$ und $K_2 u_2$ variablendisjunkt gilt mit $\sigma' = \sigma_1'\sigma_2'$ auch:

$$K_1' = (K_1 u_1)\sigma' \quad \text{und} \quad K_2' = (K_2 u_2)\sigma'.$$

Nach Voraussetzung ist R' aussagenlogische Resolvente von K_1' und K_2'. Somit existiert Literal L mit $L \in K_1'$ und $\overline{L} \in K_2'$, so daß:

$$R' = \left(K_1' \setminus \{L\}\right) \cup \left(K_2' \setminus \{\overline{L}\}\right).$$

Nach Definition existiert mindestens ein $Lit \in K_1 u_1$ mit $Lit\sigma' = L$. Sammle alle auf via $\{L_1, \ldots, L_m\} = \{Lit \in K_1 u_1 \mid Lit\sigma' = L\}$ und analog für $\overline{L}$ mittels $\{L_1', \ldots, L_n'\} = \{Lit' \in K_2 u_2 \mid Lit'\sigma' = \overline{L}\}$.

Lifting-Lemma

Folglich ist σ' Unifikator für $M = \{L_1, \ldots, L_m, \overline{L'_1}, \ldots, \overline{L'_n}\}$. Sei σ mgu von M. Dann ist

$$R = \big((K_1 u_1 \smallsetminus \{L_1, \ldots, L_m\}) \cup \big(K_2 u_2 \smallsetminus \{L'_1, \ldots, L'_n\}\big)\big)\sigma$$

prädikatenlogische Resolvente von K_1 und K_2. Da σ mgu existiert Substitution τ mit $\sigma\tau = \sigma'$. Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
R' &= \big(K'_1 \smallsetminus \{L\}\big) \cup \big(K'_2 \smallsetminus \{\overline{L}\}\big) \\
&= \big((K_1 u_1)\sigma' \smallsetminus \{L\}\big) \cup \big((K_2 u_2)\sigma' \smallsetminus \{\overline{L}\}\big) \\
&= \big((K_1 u_1)\sigma' \smallsetminus \{L_1\sigma', \ldots, L_m\sigma'\}\big) \cup \big((K_2 u_2)\sigma' \smallsetminus \{L'_1\sigma', \ldots, L'_n\sigma'\}\big) \\
&= \big((K_1 u_1 \smallsetminus \{L_1, \ldots, L_m\}) \cup \big(K_2 u_2 \smallsetminus \{L'_1, \ldots, L'_n\}\big)\big)\sigma' \qquad \text{(alle Lit!)} \\
&= \big((K_1 u_1 \smallsetminus \{L_1, \ldots, L_m\}) \cup \big(K_2 u_2 \smallsetminus \{L'_1, \ldots, L'_n\}\big)\big)\sigma\tau \\
&= \big(\big((K_1 u_1 \smallsetminus \{L_1, \ldots, L_m\}) \cup \big(K_2 u_2 \smallsetminus \{L'_1, \ldots, L'_n\}\big)\big)\sigma\big)\tau \\
&= R\tau
\end{aligned}$$

Daraus folgt, daß R' Grundinstanz (via τ) von R ist. $\square$

Resolutionssatz

Theorem (Robinson, 1965)

Sei $\phi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \xi$ gleichheitsfreier Satz in SNF mit Matrix ξ in KNF und $M(\xi) = \{D_1, \ldots, D_l\}$. Es gilt:

$$\phi \textit{ unerfüllbar} \quad \textit{gdw.} \quad \Box \in \mathrm{Res}^*(M(\xi))$$

Beweis: ($\Leftarrow$) Korrektheit. Für ψ sei $\forall\psi$ der universelle Abschluß von ψ. Aufgrund der Distributivität gilt $\phi \equiv \bigwedge_{k=1}^{l} \forall D_k$. Wir zeigen zuerst: Falls R Resolvente zweier Klauseln D_i und D_j, dann $\forall D_i \wedge \forall D_j \models \forall R$ (prädikatenlogisches Resolutionslemma).

Sei $(\mathfrak{A}, \beta)$ Interpretation mit $(\mathfrak{A}, \beta)(\forall D_i) = (\mathfrak{A}, \beta)(\forall D_j) = 1$. Sei

$$R = \Big((D_i\sigma_1 \setminus \{L_1, \ldots, L_m\}) \cup \big(D_j\sigma_2 \setminus \{L'_1, \ldots, L'_n\}\big) \Big) \sigma$$

$$\supseteq ((D_i\sigma_1)\sigma \setminus \{L_1\sigma, \ldots, L_m\sigma\}) \cup \big((D_j\sigma_2)\sigma \setminus \{L'_1\sigma, \ldots, L'_n\sigma\}\big)$$

(nicht zwangsweise ausschöpfend)

$$= (D_i\sigma_1\sigma \setminus \{L\}) \cup \big(D_j\sigma_2\sigma \setminus \{\overline{L}\}\big)$$

mit σ_1, σ_2 Variablenumb. und σ mgu für $\{L_1, \ldots, L_m, \overline{L'_1}, \ldots, \overline{L'_n}\}$ und $L = L_1\sigma = \ldots = L_m\sigma = \overline{L'_1}\sigma = \ldots = \overline{L'_n}\sigma$.

Resolutionssatz

Theorem (Robinson, 1965)

Sei $\phi = \forall x_1 \, \ldots \forall x_n \, \xi$ gleichheitsfreier Satz in SNF mit Matrix ξ in KNF und $M(\xi) = \{D_1, \ldots, D_l\}$. Es gilt:

$$\phi \text{ unerfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad \square \in \mathrm{Res}^*(M(\xi))$$

Beweis: ($\Leftarrow$) Korrektheit. Zz. Falls R Resolvente von D_i und D_j, dann $\forall D_i \wedge \forall D_j \vDash \forall R$. Angenommen $(\mathfrak{A}, \beta)(\forall R) = 0$, d.h. es existieren $u_1, \ldots, u_n \in U^{\mathfrak{A}}$ mit $(\mathfrak{A}, \underbrace{\beta_{[x_1 \mapsto u_1, \ldots, x_n \mapsto u_n]}}_{\beta'})(R) = 0$ wobei $\{x_1, \ldots, x_n\} = \mathit{frei}(R)$ (Semantik). Somit $(\mathfrak{A}, \beta')(D_i \sigma_1 \sigma \setminus \{L\}) = 0$ und auch $(\mathfrak{A}, \beta')(D_j \sigma_2 \sigma \setminus \{\overline{L}\}) = 0$ (Disjunktion). Aus Annahme $(\mathfrak{A}, \beta)(\forall D_i) = (\mathfrak{A}, \beta)(\forall D_j) = 1$ folgt $(\mathfrak{A}, \beta')(D_i \sigma_1 \sigma) = 1$ und $(\mathfrak{A}, \beta')(D_j \sigma_2 \sigma\}) = 1$. Folglich müßte $(\mathfrak{A}, \beta')(L) = (\mathfrak{A}, \beta')(\overline{L}) = 1$. Widerspruch.

Resolutionssatz

Theorem (Robinson, 1965)

Sei $\phi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \xi$ gleichheitsfreier Satz in SNF mit Matrix ξ in KNF und $M(\xi) = \{D_1, \ldots, D_l\}$. Es gilt:

$$\phi \textit{ unerfüllbar} \quad \textit{gdw.} \quad \Box \in \mathrm{Res}^*(M(\xi))$$

Beweis: $(\Leftarrow)$ Korrektheit. Es gilt: Falls R Resolvente zweier Klauseln D_i und D_j, dann $\forall D_i \wedge \forall D_j \models \forall R$.
Sei $\Box \in \mathrm{Res}^*(M(\xi))$. Somit existiert eine endliche $\Box$-Deduktion basierend auf den Anfangsklauseln $D_1, \ldots, D_l$. Folglich ergibt das obige prädikatenlogische Resolutionslemma

$$\bigwedge_{k=1}^{l} \forall D_k \models \forall \Box$$

Da $\phi \equiv \bigwedge_{k=1}^{l} \forall D_k$ und $\forall \Box = \Box$ da $\mathit{frei}(\Box) = \emptyset$ folgt

$$\phi \models \Box$$

und somit ϕ unerfüllbar.

Resolutionssatz

Theorem (Robinson, 1965)

Sei $\phi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \xi$ gleichheitsfreier Satz in SNF mit Matrix ξ in KNF und $M(\xi) = \{D_1, \ldots, D_l\}$. Es gilt:

$$\phi \text{ unerfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad \Box \in \mathrm{Res}^*(M(\xi))$$

Beweis: ($\Rightarrow$) Vollständigkeit. Sei ϕ unerfüllbar. Aufgrund der Vollständigkeit des Grundresolutionsalgorithmus existiert eine Folge von Klauseln $K'_1, \ldots, K'_k$ mit $K'_k = \Box$ und für $1 \leq i \leq k$ gilt:

- K'_i ist Grundinstanz einer Klausel $D \in M(\xi)$, d.h.

$$K'_i = D[x_1/t_1] \ldots [x_n/t_n] \text{ mit } t_1, \ldots, t_n \in D(\phi), \text{ oder}$$

- K'_i ist aussagenlogische Resolvente zweier Klauseln K'_a und K'_b mit $a, b < i$

Wir konstruieren prädikatenlogische Klauseln K_i, so daß K'_i Grundinstanz von K_i und die korrespondierende Folge $K_1, \ldots, K_k$ prädikatenlogische $\Box$-Deduktion ist.

Resolutionssatz

Theorem (Robinson, 1965)

Sei $\phi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \xi$ gleichheitsfreier Satz in SNF mit Matrix ξ in KNF und $M(\xi) = \{D_1, \ldots, D_l\}$. Es gilt:

$$\phi \textit{ unerfüllbar} \quad \textit{gdw.} \quad \Box \in \mathrm{Res}^*(M(\xi))$$

Beweis: ($\Rightarrow$) Vollständigkeit.
Seien $K_1, \ldots, K_{i-1}$ schon konstruiert. Zwei Fälle:

- Falls K_i' Grundinstanz von Klausel $D \in M(\xi)$, dann $K_i := D$
- Falls nicht, dann ist K_i' aussagenlogische Resolvente zweier Klauseln K_a' und K_b' mit $a, b < i$. Da $K_1, \ldots, K_{i-1}$ schon konstruiert, existieren prädikatenlogische Klauseln K_a und K_b mit $a, b < i$, so daß K_a' und K_b' Grundinstanzen von K_a bzw. K_b. Nach Lifting-Lemma existiert prädikatenlogische Resolvente K_i von K_a und K_b mit K_i' ist Grundinstanz von K_i. $\Box$

Resolution – Schlußbemerkungen

Praktische Probleme bei der Resolventenbildung:

- zu viele Wahlmöglichkeiten (Disjunktionsglieder, Literale)
- zu viele nutzlose Klauseln (Redundanz, Sackgassen)
- kombinatorische Explosion des Suchraums (unendlich viele Resolventen bildbar)

Strategien und Heuristiken zur Effizienzsteigerung:

- Verbot bestimmter Schritte (P/N-restriktion)
- Priorisierung bestimmter Schritte (Einheitsklauseln)
- Achtung! Vollständigkeit darf nicht verloren gehen

Vorlesung “Logik”

10-201-2108-1

11. PL1 – Prädikatenlogische Resolution

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

03. Juli 2025
Leipzig