

Diskrete Strukturen

Pflichtserie 8

Nikita Emanuel John Fehér, 3793479

16. Dezember 2024

09:15-10:45 Dietzschold, Johannes

8.1

Geben Sie für die folgenden Abbildungen f_1, f_2, f_3 alle Fixpunkte an.

(a) $f_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, z \mapsto z^2 + z - 1$

$$\begin{aligned} f_1(z) &= z \\ z^2 + z - 1 &= z & | - z \\ z^2 - 1 &= 0 & | + 1 \\ z^2 &= 1 & | \sqrt{} \\ z &= \pm 1 \\ z_1 &= 1 \\ z_2 &= -1 \end{aligned}$$

(b) $f_2 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto (2x - y, y + x \cdot y)$

$$\begin{aligned} f_2((x, y)) &= (x, y) \\ (2x - y, y + xy) &= (x, y) \\ x = 2x - y, y &= y + xy \\ x &= 2x - y & | + y | - x \\ y &= x \\ y &= y + xy \\ y &= y + (y)y & | - y \\ 0 &= yy \\ 0 &= y = x \\ (x, y) &= (0, 0) \end{aligned}$$

(c) $f_3 : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}), X \mapsto \{n \in \mathbb{N} \mid \exists x \in X (n \geq x)\}$

$$f_3(X) = X$$

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \exists x \in X (n \geq x)\} = X$$

Fall 1: $X = \emptyset$: $\implies \nexists x \in X (n \geq x)$

$X = \emptyset$ ist ein Fixpunkt

Fall 2: $X \neq \emptyset$ Dann existiert ein $x \in X$. Für jedes $n \geq x \implies n \in f_3(X)$

$$f_3(X) = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists x \in X (n \geq x)\} = [\min(X), \infty) \cap \mathbb{N}.$$

Annahme: $X = f_3(X)$ ist ein Fixpunkt. Daraus folgt:

$$X = [\min(X), \infty) \cap \mathbb{N}.$$

Da X keine obere Schranke hat, müsste $X = [\min(X), \infty)$. Dies ist jedoch nur möglich, wenn X genau die Form $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\}$ für ein $k \in \mathbb{N}$ hat. Andererseits enthält $f_3(X)$ stets alle natürlichen Zahlen $n \geq \min(X)$, unabhängig von der ursprünglichen Struktur von X . Also:

$$f_3(X) \neq X.$$

Schlussfolgerung: Für $X \neq \emptyset$ ist X kein Fixpunkt von f_3 .