Aufgabe Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $U, W \subseteq V$ Untervektorräume. Zeige:

(a) Es gibt einen Isomorphismus $U/(U \cap W) \to (U+W)/W$.
(b) Ist $U \subseteq W$, so lässt sich W/U als Untervektorraum von V/U auffassen, und es ist $(V/U)/(W/U) \cong V/W$.

(a) Sei $\pi : U+W \to (U+W)/W$, $\pi(v) = [v]_W = v + W$

Setze $f := \pi_{|U}$. Es ist $\mathrm{Kern}(f) = U \cap \mathrm{Kern}(\pi) = U \cap W \supseteq U \cap W$

$\overset{\text{Homomorphie-}}{\underset{\text{Satz}}{\Rightarrow}}$ $\exists!\ \bar{f} : U/(U \cap W) \to (U+W)/W$ linear

Wegen $\mathrm{Kern}(\bar{f}) = \mathrm{Kern}(f) / U \cap W = U \cap W / U \cap W = \{0\}$, ist $\bar{f}$ injektiv.

f ist surjektiv:

Sei $y \in (U+W)/W$. Dann ex. $u \in U$, $w \in W$ mit $y = (u+w)+W \overset{w \in W}{=} u + W = f(u)$ ✓

Wegen $\mathrm{Bild}(\bar{f}) = \mathrm{Bild}(f)$, ist auch $\bar{f}$ surjektiv. Also ist $\bar{f}$ ein Isom.

$\square$

(b) Sei $f : V \to V/W$, $f(v) = [v]_W = v + W$,

$\pi : V \to V/U$, $\pi(v) = [v]_U = v + U$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & V/W \\ V/U \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Es ist $\mathrm{Kern}(f) = W \supseteq U$

$\overset{\text{Homomorphie-}}{\underset{\text{Satz}}{\Rightarrow}}$ $\exists!\ \bar{f} : V/U \to V/W$ linear

Es ist $\mathrm{Kern}(\bar{f}) = \mathrm{Kern}(f)/U = W/U$

$\Rightarrow$ W/U ist ein Unterraum von V/U.

Nach dem 1. Isomorphiesatz gilt:

$(V/U) / \mathrm{Kern}(\bar{f}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bild}(f)$

Wegen $\mathrm{Bild}(f) = V/W$ und $\mathrm{Kern}(\bar{f}) = W/U$ folgt:

$(V/U)/(W/U) \xrightarrow{\sim} V/W$

$\square$

Aufgabe

Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Weiterhin sei $u_1, \ldots, u_m$ eine Basis von U.
Dann gibt es nach dem Basisergänzungssatz ein $n \in \mathbb{N}_0$ und Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$, so dass $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist.
Zeigen Sie, dass in dieser Situation die Elemente $v_1 + U, \ldots, v_n + U$ eine Basis von V/U bilden.

Lösung:

- Es sei $v + U$ ein beliebiges Element aus V/U. Dann ist $v \in V$ und da $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist, gibt es Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ mit

  $$v = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_m u_m + \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n \,.$$

  Wegen $v - (\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n) = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_m u_m \in U$ folgt

  $$v + U = (\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n) + U = \mu_1(v_1 + U) + \ldots + \mu_n(v_n + U) \,.$$

  D.h. die Vektoren $v_1 + U, \ldots, v_n + U$ erzeugen V/U.

- Seien nun $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ mit

  $$0 + U = \mu_1(v_1 + U) + \ldots + \mu_n(v_n + U) = (\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n) + U \,.$$

  Insbesondere gilt also $0 \in (\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n) + U$. D.h. es existiert ein $u \in U$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ mit

  $$0 = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n + u = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n + \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_m u_m \,.$$

  Da $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, folgt daraus

  $$\mu_1 = \ldots = \mu_n = 0 \,.$$

  D.h. die Vektoren $v_1 + U, \ldots, v_n + U$ sind linear unabhängig.

Insgesamt folgt, dass die Vektoren $v_1 + U, \ldots, v_n + U$ eine Basis von V/U bilden.