Aufgabe

Gegeben sind die zwei Polynome $p = 2 - 3x$ und $q = x$ aus dem Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]_1$ aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich 1. Weiterhin ist das Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}\,,\ \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x) \mathrm{d}x$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass p und q orthogonal zueinander sind bzgl. des gegebenen Skalarproduktes.

(b) Begründen Sie, warum $B = \{p, q\}$ eine Basis von V ist.

(c) Bestimmen Sie die Norm (= Länge) des Vektors $p \in \mathbb{R}[x]_1$.

(a)

$$\begin{aligned}
\langle p, q \rangle &= \int_0^1 p(x) \cdot q(x)\, dx \\
&= \int_0^1 (2-3x) \cdot x\, dx \\
&= \int_0^1 (2x - 3x^2)\, dx \\
&= [x^2 - x^3]_0^1 \\
&= (1^2 - 1^3) - (0^2 - 0^3) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$$

$\Rightarrow p \perp q.$

(b) $B = \{p, q\}$ ist linear unabhängig, da p, q orthogonal sind.

Wegen $|B| = 2 = \dim \mathbb{R}[x]_1$ folgt bereits, dass B eine Basis von V ist.

$\mathbb{R}[x]_n = \{ a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \mid a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \}$

$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[x]_n \Rightarrow \dim(\mathbb{R}[x]_n) = n+1$

(c)

$$\begin{aligned}
\langle p, p \rangle &= \int_0^1 p(x) \cdot p(x) dx \\
&= \int_0^1 (2-3x) \cdot (2-3x) dx \\
&= \int_0^1 (4 - 12x + 9x^2)\, dx \\
&= [4x - 6x^2 + 3x^3]_0^1 \\
&= 4 - 6 + 3 - 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle} = \sqrt{1} = 1$$

Aufgabe Zu einem Vektor $a \in \mathbb{R}^3$ mit $\|a\| = 1$ betrachten wir die Matrix $H = E_3 - 2\,a\,a^\top$ und damit die lineare Abbildung

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ v & \mapsto H\,v \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: $f(a) = -a$.

(b) Zeigen Sie: Falls $v \perp a$, so gilt $f(v) = v$.

(c) Zeigen Sie, dass H symmetrisch ist, $H^\top = H$.

(d) Zeigen Sie, dass $H^2 = E_3$.

$\langle x | y \rangle = x^T \cdot y$

$\langle a, a \rangle = a^T \cdot a$

$\| a \| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$

(a) $f(a) = H \cdot a = (E_3 - 2 \cdot a \cdot a^T) \cdot a = E_3 \cdot a - 2 \cdot a \cdot \underbrace{(a^T \cdot a)}_{= \|a\|^2 = 1} = a - 2a = -a$

(b) $f(v) = H \cdot v = (E_3 - 2 \cdot a \cdot a^T) \cdot v = E_3 \cdot v - 2 \cdot a \cdot \underbrace{(a^T \cdot v)}_{= \langle a, v \rangle = 0} = E_3 \cdot v = v$

(c)
$$\begin{aligned}
H^T &= (E_3 - 2 \cdot a \cdot a^T)^T \\
&= E_3^T - (2 \cdot (a \cdot a^T))^T && ((A+B)^T = A^T + B^T) \\
&= E_3 - 2 \cdot (a \cdot a^T)^T && ((\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T) \\
&= E_3 - 2 \cdot ((a^T)^T \cdot a^T) && ((A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T) \\
&= E_3 - 2 \cdot a \cdot a^T && ((A^T)^T = A) \\
&= H
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ H ist symmetrisch.

(d)
$$\begin{aligned}
H^2 &= H \cdot H \\
&= (E_3 - 2 \cdot a \cdot a^T) \cdot (E_3 - 2 \cdot a \cdot a^T) \\
&= E_3 \cdot E_3 - E_3 \cdot 2 \cdot a \cdot a^T - 2 \cdot a \cdot a^T \cdot E_3 + 4 \cdot a \cdot \underbrace{(a^T \cdot a)}_{= \|a\|^2 = 1} \cdot a^T \\
&= E_3 - 4 \cdot a \cdot a^T + 4 \cdot a \cdot a^T \\
&= E_3
\end{aligned}$$

$(\langle v, w \rangle = v^T \cdot w)$

Aufgabe

Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ als euklidischen Vektorraum mit dem Standard-Skalarprodukt ($\langle u, v\rangle = u^T v$ für $u, v \in \mathbb{R}^3$). Gibt es zwei normierte, linear unabhängige Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, die sich nicht durch einen dritten Vektor $v_3 \in \mathbb{R}^3$ zu einer Orthonormalbasis v_1, v_2, v_3 ergänzen lassen? Wenn ja, geben Sie solche Vektoren v_1, v_2 an und begründen Sie, dass sie sich nicht zu einer Orthonormalbasis ergänzen lassen. Wenn nein, begründen Sie.

Ja!

$v_1 := (1,0,0)$

$v_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1,1,0)$

v_1, v_2 sind normiert und linear unabhängig.

Aber: v_1, v_2 sind nicht orthogonal!

$\Rightarrow$ v_1, v_2 lässt sich nicht zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ergänzen.

Aufgabe

Gibt es ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ und drei Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, so dass $\langle v_1, v_2\rangle = 0$, $\langle v_1, v_3\rangle = 0$ und $\langle v_2, v_3\rangle = 0$? Wenn ja, geben Sie ein solches Skalarprodukt und solche Vektoren an (keine weitere Begründung notwendig). Wenn nein, begründen Sie.

Nein!

Denn dann wären v_1, v_2, v_3 orthogonal und damit l.u. $\lightning$ da $\dim \mathbb{R}^2 = 2 < 3$.

Aufgabe:

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit SKP $\langle \cdot , \cdot \rangle$ und sei $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ die zugehörige Norm.

Zeigen Sie die Parallelogramm-Gleichung:

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2 \cdot \|v\|^2 + 2 \cdot \|w\|^2$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 &= \langle v+w, v+w\rangle + \langle v-w, v-w\rangle \\
&= \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle \\
&\quad + \langle v,v\rangle + \langle v,-w\rangle + \langle -w,v\rangle + \langle -w,-w\rangle \\
&= \|v\|^2 + \cancel{\langle v,w\rangle} + \cancel{\langle w,v\rangle} + \|w\|^2 \\
&\quad + \|v\|^2 - \cancel{\langle v,w\rangle} - \cancel{\langle w,v\rangle} + \underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{=1} \cdot \underbrace{\langle w,w\rangle}_{=\|w\|^2} \\
&= 2 \cdot \|v\|^2 + 2 \cdot \|w\|^2
\end{aligned}$$

Aufgabe

Welche der Axiome (Bilinearität, Symmetrie, positive Definitheit) eines Skalarproduktes erfüllt die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \left(\left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} w_1 \\ w_2 \end{smallmatrix}\right)\right) \mapsto \det\left(\begin{smallmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{smallmatrix}\right)?$$

$\langle v, w \rangle = \det\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} = \det(v, w)$

(i) $\langle v + v', w \rangle = \det(v+v', w) = \det(v,w) + \det(v', w) = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$

(ii) $\langle \lambda \cdot v, w \rangle = \det(\lambda \cdot v, w) = \lambda \cdot \det(v, w) = \lambda \cdot \langle v, w \rangle$

(iii) $\langle v, w + w' \rangle = \det(v, w+w') = \det(v,w) + \det(v, w') = \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle$

(iv) $\langle v, \lambda \cdot w \rangle = \det(v, \lambda \cdot w) = \lambda \cdot \det(v, w) = \lambda \cdot \langle v, w \rangle$

(det ist linear in jeder Zeile und jeder Spalte)

$\Rightarrow$ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist Bilinear

(v) $\langle w, v \rangle = \det(w, v) = -\det(v, w) = -\langle v, w \rangle$

$\Rightarrow$ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist nicht symmetrisch.

(vi) $\langle v, v \rangle = \det(v, v) = 0$

Auch für $v \neq 0$ ist $\langle v, v \rangle = 0$

$\Rightarrow$ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist nicht positiv definit.