Prof. Carsten Lutz
Maurice Funk, Gustav Grabolle

Universität Leipzig SoSe 24

Logik
Übungsblatt 4

Übungsaufgaben werden in den Übungen besprochen. Übungszeitraum: 27.05. – 07.06.
Hausaufgaben werden bewertet. Abgabe über Moodle bis: 9:00 Uhr am 10.06.2024

Übungsaufgabe 1 Betrachten Sie das 3×3 Tic-Tac-Toe Spiel:

○	×	
	○	

(a) Geben Sie eine Formelmenge M_{3t} an, sodass die Modelle von M_{3t} genau den unentschiedenen aber beendeten Partien des 3×3 Tic-Tac-Toe Spiels entsprechen.

(b) Wie müssen Sie ihre Formelmenge für beliebige $n \times n$ Tic-Tac-Toe Spiele modifizieren?

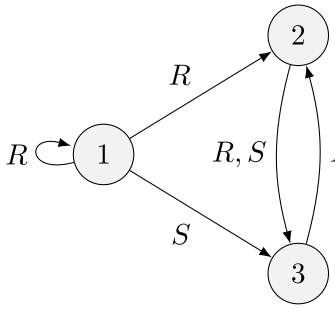
Übungsaufgabe 2 (a) Kreuzen Sie in folgender Tabelle Zutreffendes an.

	Signatur	Term	Atom	Formel	Satz
$\exists x\, (\forall y\, (x + y > z))$					
$+$					
$\forall x\, (x = x)$					
$1 + c = 2$					
$f(1 + c) + 1$					
$\exists x\, (\neg \forall y\, (y < x))$					
$\forall x\, (x = 1 \exists y\, (\neg y = x))$					
$\{+, \cdot, 0, c\}$					
$R(x, 1 + 0)$					
$\forall x\, \forall y\, (x = 1)$					
$R(y, x) \wedge 1 = c$					

(b) Markieren Sie in folgender Formel welcher Quantor welche Variablenvorkommen bindet. Geben Sie die Menge der freien Variablen an.

$$\forall x\, (\exists y\, (x \cdot y = x \wedge \forall x\, (x \leq y \rightarrow x = z \vee x = y)))$$

Übungsaufgabe 3 Seien S, R binäre Relationssymbole. Gegeben ist die $\{R, S\}$-Struktur $\mathfrak{A} = (A = \{1, 2, 3\}, R^{\mathfrak{A}}, S^{\mathfrak{A}})$ mit $R^{\mathfrak{A}}, S^{\mathfrak{A}}$ wie in folgendem Diagramm:



(a) Geben Sie für die Sätze $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ an, ob $\mathfrak{A} \models \varphi_i$ gilt. Begründen Sie Ihre Antwort jeweils in einem Satz.

$$\varphi_1 = \forall x \Big(\exists y\, R(x, y) \wedge \exists y\, S(x, y)\Big)$$

$$\varphi_2 = \forall x\, \exists y \Big(R(x, y) \wedge S(x, y)\Big)$$

$$\varphi_3 = \exists x\, \exists y\, \exists z\, \exists u \Big(R(x, y) \wedge R(y, z) \wedge R(z, u) \wedge R(u, x)\Big)$$

$$\varphi_4 = \forall x\, \forall y\, \forall z \Big(\big(R(x, y) \wedge R(y, z)\big) \rightarrow x = z\Big)$$

(b) Für eine Formel φ mit einer freien Variablen ist $ans(\mathfrak{A}, \varphi) = \{a \in A \mid \mathfrak{A} \models \varphi[a]\}$. Geben Sie Formeln φ_1, φ_2, φ_3 an, sodass

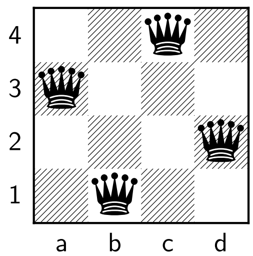
(i) $ans(\mathfrak{A}, \varphi_1) = \{1\}$,

(ii) $ans(\mathfrak{A}, \varphi_2) = \{2, 3\}$ und

(iii) $ans(\mathfrak{A}, \varphi_3) = \{3\}$.

Hausaufgabe 4 (7)

Im n-Damenproblem sollen n Damen so auf einem $n \times n$ Schachbrett angeordnet werden, dass sich keine zwei Damen nach den Schachregeln schlagen können. Eine Dame kann eine andere Dame schlagen, wenn sie sich in der gleichen Spalte, Zeile oder Diagonalen befinden. Beispielsweise ist die folgende Anordnung eine Lösung für das 4-Damenproblem.



Geben Sie, abhängig von n, eine Menge M_n von aussagenlogischen Formeln an, sodass die Modelle von M_n genau den Lösungen des n-Damenproblems entsprechen. Begründen Sie kurz die Korrektheit Ihrer Formelmenge.

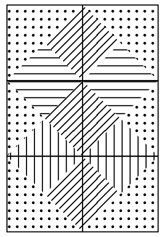
Hausaufgabe 5 (4 + 9 + 2)

A B C D E F

Zur Verfügung stehen die *Fliesen* $Z = \{A, \ldots, F\}$, wobei folgende Relationen angeben, welche Fliesen horizontal (H) und vertikal (V) zusammen passen.

$$H = \{A, C, D\} \times \{B, E, F\} \cup \{B, E, F\} \times \{A, C, D\} \text{ und}$$
$$V = \{A, E\} \times \{C, F\} \cup \{C, F\} \times \{B, D\} \cup \{B, D\} \times \{A, E\}$$

Jede Fliese steht beliebig oft zur Verfügung, kann aber nicht gespiegelt oder rotiert werden. Wir platzieren Fliesen auf Zellen $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, wobei benachbarte Zellen durch passende Fliesen belegt sein müssen. Ein vollständig belegtes $m \times n$ Rechteck, heißt $m \times n$ *Mosaik*. Wenn alle Zellen passend belegt sind, nennen wir das ein $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *Mosaik*.
Mithilfe der Aussagenvariablen $\{X_{i,j} \mid X \in Z \text{ und } i, j \in \mathbb{N}\}$ definieren wir:



2×3 Mosaik

$$\texttt{bel}(i, j) = \bigvee_{X \in Z} X_{i,j} \qquad \texttt{ein}(i, j) = \bigwedge_{\substack{X,Y \in Z,\\ X \neq Y}} \neg(X_{i,j} \wedge Y_{i,j})$$

$$\texttt{hor}(i, j) = \bigvee_{(X,Y) \in H} X_{i,j} \wedge Y_{i+1,j} \qquad \texttt{ver}(i, j) = \bigvee_{(X,Y) \in V} X_{i,j} \wedge Y_{i,j+1}$$

Für $I, J \subseteq \mathbb{N}$ sei
$$\begin{aligned} M_{I \times J} = {} & \{\texttt{bel}(i, j) \wedge \texttt{ein}(i, j) \mid (i, j) \in I \times J\} \cup \\ & \{\texttt{hor}(i, j) \mid (i, j) \in I \times J \text{ und } (i + 1, j) \in I \times J\} \cup \\ & \{\texttt{ver}(i, j) \mid (i, j) \in I \times J \text{ und } (i, j + 1) \in I \times J\}. \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass folgende Aussage gilt (überzeugen Sie sich selbst).

B1 Ein $m \times n$ Mosaik existiert genau dann, wenn $M_{\{0,\ldots,m-1\} \times \{0,\ldots,n-1\}}$ erfüllbar ist.

Ein $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ Mosaik existiert genau dann, wenn $M_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ erfüllbar ist.

(a) Geben Sie ein Modell (als Menge von Aussagenvariablen) von $M_{\{0,1\} \times \{0,1,2\}}$ an, welches dem obigen 2×3 Mosaik entspricht.

(b) **B2** Es existiert ein $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ Mosaik.

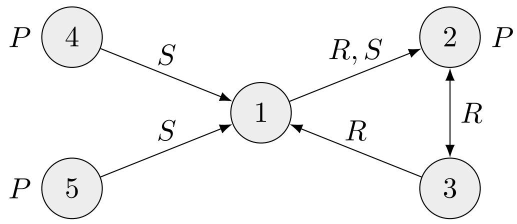
Beweisen Sie B2. Nutzen Sie dazu B1 und den Kompaktheitssatz der Aussagenlogik.

(c) **B3** Wenn beliebig große $n \times n$ Mosaike existieren, dann existiert ein $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ Mosaik.

Begründen Sie in einem Satz, warum diese Aussage für beliebige *endliche* Mengen an Fliesen gilt (also nicht nur für die oben gegebene Menge).

Hausaufgabe 6 $(6 + 6 + 2)$

Sei P unäres Relationssymbol und R, S binäre Relationssymbole. Gegeben ist die Struktur $\mathfrak{A} = (A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, P^{\mathfrak{A}}, R^{\mathfrak{A}}, S^{\mathfrak{A}})$, mit $P^{\mathfrak{A}}, R^{\mathfrak{A}}, S^{\mathfrak{A}}$ wie in folgendem Diagramm:



Für eine Formel φ mit einer freien Variablen ist $ans(\mathfrak{A}, \varphi) = \{a \in A \mid \mathfrak{A} \models \varphi[a]\}$.

(a) Geben Sie für φ_1, φ_2 jeweils $ans(\mathfrak{A}, \varphi_i)$ an. Begründen Sie Ihre Antwort jeweils in einem Satz.

$\varphi_1(x) = \exists y \; (R(x, y) \vee S(y, x))$

$\varphi_2(x) = \forall y \; (R(x, y) \vee S(x, y) \to R(x, y)) \wedge \forall y \forall x \; (S(x, y) \to P(x))$

(b) Geben Sie für M_1, M_2 jeweils eine Formel $\varphi_i(x)$ mit $ans(\mathfrak{A}, \varphi_i) = M_i$ an. Begründen Sie Ihre Antwort jeweils in einem Satz.

$M_1 = \{1, 2\}$ $\qquad\qquad$ $M_2 = \{4, 5, 3\}$

(c) **B4** Für jede Menge $M \subseteq A$ existiert eine Formel $\varphi_M(x)$ mit $ans(\mathfrak{A}, \varphi_M) = M$.

Geben Sie an, ob diese Aussage wahr oder falsch ist. Begründen Sie Ihre Antwort in einem Satz.

Hausaufgabe 7 $(3 + 3 + 4 + 4)$

Sei P ein unäres Relationssymbol, R ein binäres Relationssymbol und $+$ ein zweistelliges Funktionssymbol.

(a) Geben Sie eine $\{R\}$-Struktur $\mathfrak{A}$ an, sodass $\mathfrak{A} \models \forall x \, \exists y \, R(x, y)$.

(b) Geben Sie eine $\{R\}$-Struktur $\mathfrak{B}$ an, sodass

$$\mathfrak{B} \models \exists x \, \exists y \, R(x, y) \wedge \forall x \, \forall y \, (R(x, y) \to \exists z \, R(y, z)).$$

(c) Geben Sie eine $\{R\}$-Struktur $\mathfrak{C}$ mit Universum $\mathbb{N}$ an, sodass

$$\mathfrak{C} \models \forall x \, \exists y \; (R(y, x) \wedge \forall z \; (R(z, y) \to z = y)) \, .$$

(d) Geben Sie eine $\{+\}$-Struktur $\mathfrak{D}$ mit Universum $\mathbb{N}$ an, sodass

$$\mathfrak{D} \models \forall x \, \forall y \; ((x \neq y) \to (x + y \neq y + x)) \, .$$

Begründen Sie jeweils kurz warum die Struktur die Bedingung erfüllt.

Benötigt ihr Hilfe? Kommt vorbei!

Offener Matheraum Informatik:	Mo	11–13 und 15–17 Uhr	P401
	Di–Do	11–17 Uhr	P412
	Fr	11–15 Uhr	P412