Universität Leipzig
Institut für Informatik
Sommersemester 2025

Prof. Dr. Andreas Maletti,
Dr. Meenakshi Paramasivan,
Dr. habil. Karin Quaas,
Fabian Sauer

Aufgaben zur Lehrveranstaltung

Berechenbarkeit

Serie 1

- Die Übungsaufgaben werden in den Übungen ab dem 14.4.2025 besprochen.
- Abgabeschluss für Hausaufgaben: **27.4.2025 um 22:00 Uhr** im Moodle-Kurs.
- Sie können gern in 2er-Gruppen abgeben. Bitte schreiben Sie dazu die Namen und Matrikelnummern beider Personen auf das Blatt und reichen Sie Ihre Lösungen über einen Account ein. Einen Bonuspunkt erhalten Sie in dieser Serie bei Erreichen von **14** Punkten.

Übungsaufgabe 1.1 (Grammatiken)

Gegeben sie die folgende Grammatik $G = (\{S\}, \Sigma, S, P)$ mit $\Sigma = \{x, +, -\}$ und Produktionen P

$$S \to x \qquad S \to S + S \qquad S \to S - S.$$

(a) Ist die Grammatik G kontextsensitiv, kontextfrei und/oder regulär? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Geben Sie eine Ableitung von $v = x + x - x + x$ in der Grammatik G an.

(c) Geben Sie die von G erzeugte Sprache $L(G)$ an.

(d) Geben Sie die Sprachklasse (Typ-3, Typ-2, Typ-1, oder Typ-0) an. Begründen Sie Ihre Antwort.

(e) Geben Sie die Codierung $c(G)$ von G als endliches Wort über $\mathbb{N}$ an; kodieren Sie dabei Terminale durch ungerade Zahlen ($x = 1, + = 3, - = 5$), Nichtterminale durch positive gerade Zahlen ($S = 2$), und verwenden Sie die 0 als Trennzeichen.

Übungsaufgabe 1.2 (Abzählbarkeit)

Beweisen Sie folgenden Satz aus Vorlesung 1.

§1.12 Jede unendliche Menge M ist abzählbar gdw. eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to M$ existiert.

Übungsaufgabe 1.3 (Abzählbarkeit)

Beweisen Sie folgenden Satz.

Die Menge $M = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ ist nicht abzählbar.

Hausaufgabe 1.4 (Grammatiken) (11)

Gegeben sie die folgende Grammatik $G = (\{S\}, \Sigma, S, P)$ mit $\Sigma = \{x, +, -, (,)\}$ und Produktionen P

$$S \to x \qquad S \to S + S \qquad S \to S - S \qquad S \to (S).$$

(a) Ist die Grammatik G kontextsensitiv, kontextfrei und/oder regulär? Begründen Sie Ihre Antwort. (3)

(b) Geben Sie eine Ableitung von $v = ((x - x) + x) - x$ in der Grammatik G an. (3)

(c) Geben Sie eine Definition für die Sprache $L(G) \cap \{(,), x\}^*$ an. (2)

(d) Beweisen Sie, dass $L(G)$ keine Typ-3-Sprache ist. (3)

Hausaufgabe 1.5 (Abzählbarkeit)

punkte11

(a) Beweisen Sie folgenden Satz:

Sei M abzählbar und $M' \subseteq M$. Dann ist M' abzählbar. (3)

(b) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

Sei Σ ein endliches Alphabet. Dann ist Σ^* abzählbar. (4)

(c) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

Die Menge $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ aller Teilmengen von Wörtern über $\mathbb{N}$ ist abzählbar. (4)

Hausaufgabe 1.6 (Abzählbarkeit) (5)

Beweisen Sie folgenden Satz.

Sei M eine unendliche Menge und $f : \mathbb{N} \to M$ eine surjektive Funktion. Dann ist M abzählbar.