WEIHNACHTS VORLESUNG

MIT PROF. SCHWARZ

WIE IRRATIONAL DARF ES SEIN?
VON HIMMLISCHER SPHÄRENMUSIK UND CHAOS IM DREIKÖRPERPROBLEM

11. DEZEMBER 2024

19:15 UHR, HÖRSAAL 3

Der Glühwein- und Punschverkauf startet 18:30 Uhr vor dem Ziegenledersaal (Innenhof). Dort wird es auch weihnachtliches Gebäck geben.

FSR MATHE
Universität Leipzig

Bringt euch gern einen eigenen Becher mit :)

Diskrete Strukturen (WS 2024-25) - Halbserie 8

8.1 **[4]**

Geben Sie für die folgenden Abbildungen f_1, f_2, f_3 alle Fixpunkte an.

(a) $f_1\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, z \mapsto z^2 + z - 1$

(b) $f_2\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto (2x - y, y + x \cdot y)$

(c) $f_3\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}), X \mapsto \{n \in \mathbb{N} \mid \exists x \in X\ n \geq x)\}$

Solution.

(a) $\{-1, 1\}$

(b) $\{(0, 0)\}$ $f_2\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto (x + y, x \cdot y)$

(c) Die Mengen $X_n := \{k \in \mathbb{N} \colon k \geq n\}$, sowie $\emptyset$.

8.2 **[3]**

Sei M eine Menge. Für zwei Teilmengen $X, Y \subseteq M$ definieren wir die *symmetrische Differenz* von X und Y durch

$$X \triangle Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y).$$

Weiter definieren wir für jede Teilmenge $Y \subseteq M$ eine Funktion f_Y durch

$$\begin{aligned} f_Y\colon \mathcal{P}(M) &\to \mathcal{P}(M), \\ X &\mapsto X \triangle Y. \end{aligned}$$

Sei $Y \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass f_Y hat keine Fixpunkte.

Solution. Sei also $Y \subseteq M$ mit $Y \neq \emptyset$ und $X \subseteq M$, wir zeigen $f_Y(X) \neq X$. Da $Y \neq \emptyset$ können wir $y \in Y$ wählen.

Falls $y \in X$, dann ist $y \in X \cap Y$, also sicher $y \notin (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) = f_Y(X)$, damit $X \neq f_Y(X)$.

Falls $y \notin X$, dann ist zwar $y \in X \cup Y$, aber $y \notin X \cap Y$, d.h. $y \in (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) = f_Y(X)$, damit wieder $X \neq f_Y(X)$.

8.3 **[3]**

Sei X die Menge von allen funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Mit anderen Worten: X ist die Menge aller Sequenzen $a_0, a_1, \ldots$, so dass $a_i \in \mathbb{N}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie dass $|X| = \mathfrak{c}$. (Hinweis: es kann hilfreich sein, die Zerlegung $\mathbb{N} = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$ zu verwenden, wobei S_i unendliche disjunkte Mengen sind).

Solution. Wir benutzen dass $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$. Erst konstruieren wir eine Injektion $A\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to X$. Sei $X \subset \mathbb{N}$, dann $f(X)(a) = 1$ wenn $a \in X$ und 0 sonst. f ist eine Injektion da $X = \{a \in \mathbb{N} \colon f(X)(a) = 1\}$.

Um die Injketion $B\colon X \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ zu konstruieren, benutzen wir die Zerlegung $\mathbb{N} = \bigcup_{i=0} S_i$, wobe S_i disjunkte unendliche Mengen sind. Sei $\sigma_i \colon \mathbb{N} \to S_i$ eine Bijektion. Jetzt definieren wir $B(f) := \{\sigma_0(f(0)), \sigma_1(f(1), \ldots\}$

Wir zeigen jetzt dass B injektiv ist. Seien $f, g \in X$ mit $B(f) = B(g)$. Dann auch $B(f) \cap S_i = B(g) \cap S_i$ für $i \in \mathbb{N}$. Aber $B(f) \cap S_i = \sigma_i(f(i))$, da S_i sind eine Zerlegung. Deswegen $\sigma_i(f(i)) = \sigma_i(g(i))$, und da σ_i injektiv ist, folgt dass $f(i) = g(i)$ für alle i.

8.4 *Diese Aufgabe ist wesentlich schwieriger als andere Aufgaben und auch schwieriger als die Aufgaben, die in der Prüfung vorkommen werden. Sie ist für Studierende gedacht, die herausgefordert werden wollen. Sie sollte nur von den Studierenden bearbeitet werden, die bereits ein gutes Verständnis von stetigen Funktionen aus anderen Kursen mitbringen.*

Sei $C(\mathbb{R})$ die Menge von allen stetigen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Entscheiden Sie, was ist die Kardinalität von $C(\mathbb{R})$ (d.h. ob $|C(\mathbb{R})| = \aleph_0$, oder $|C(\mathbb{R})| = \mathfrak{c}$, oder $|C(\mathbb{R})| > \mathfrak{c}$).

Solution.

8.5 Gegeben sei $M = \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n_1 + n_2 = n_3)\}$.
Beweisen Sie mithilfe des Satzes von Cantor-Schröder-Bernstein, dass

$$|M| = |\mathbb{N}|\,.$$

Solution. Nach CSB reicht es die Injektionen von M nach $\mathbb{N}$ und umgekehrt zu definieren

(a) $f\colon \mathbb{N} \to M$:, z.B. $f(n) := (n, 0, n)$.

(b) Erst definieren wir eine Injektion $g\colon M \to \mathbb{N}^2$, z.B. $g(a, b, c) = a, b$. Falls $g(a, b, c) = g(x, y, z)$ dann $a = x, b = y$, aber dann auch $c = a + b = x + y = z$, also $(a, b, c) = (x, y, z)$. Dies zeigt dass g eine Injektion ist.

    Als nächstes benutzen wir dass es eine Injektion $i\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ gibt. Deswegen ist $g; i\colon M \to \mathbb{N}$ eine Injektion.

8.6 Zeigen Sie dass $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$.

Solution. Nach CBS reicht es zwein Injektionen zu konstruirern. Für die Injektion $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ können wir z.B. $x \mapsto (x, 0)$ nehmen.

Für die Injektion $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ können wir z.B. wie folgt vorgehen. Erst nehmen wir die Bijektion $\alpha \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben als $\alpha(x, y) := (\frac{2}{\pi} \arctan(x), \frac{2}{\pi} \arctan(y))$

Als nächtese konstruieren wir eine Injektion $\beta \colon (0,1) \times (0,1) \to \mathbb{R}$ als $\beta(0, a_0 a_1 \ldots, 0, b_0 b_1 b_2 \ldots) = 0.5a_0 5b_0 5a_1 5b_1 5a_2 \ldots$.

Es ist klar dass die Zahl $\beta(x, y)$ hat genau eine dezimale Darstellung. Deswegen können wir x and y aus $\beta(x, y)$ wiederherstellen, was zeigt dass β eine Injektion ist. Tatsätzlich können wir a_i als die $3i+2$-te dezimale Stelle von $\beta(x, y)$ definieren, und b_i als die $3i+3$-te dezimale Stelle von $\beta(x, y)$ definieren.

Die Funktion $\alpha \circ \beta$ ist eine Injektion $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.