Wahrscheinlichkeitstheorie - Hausaufgabe 1
Erik Thum 3794446
Paula Ewald 3706225
Tim Schlensteadt 3797524

14/16

(1.) $P(A)=0{,}25;\ P(B)=0{,}45;\ P(A\cup B)=0{,}5$

4/4

ges.: $P(A\cap B^c)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \quad |+P(A\cap B)$

$\Leftrightarrow P(A\cup B)+P(A\cap B)=P(A)+P(B) \quad |-P(A\cup B)$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=0{,}25+0{,}45-0{,}5$ ✓

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=0{,}2$

$P(A\cap B^c)=P(A\setminus B)\overset{\text{nach Lemma 1.5 }\alpha.)}{=}P(A)-P(A\cap B)$

$\Leftrightarrow P(A\cap B^c)=0{,}25-0{,}2$ ✓

$\Leftrightarrow \underline{P(A\cap B^c)=0{,}05}$

ges.: $P((A\cap B^c)\cup(A^c\cap B))$

$P(A^c\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$

$\Leftrightarrow P(A^c\cap B)=0{,}45-0{,}2$

$\Leftrightarrow P(A^c\cap B)=0{,}25$ ✓

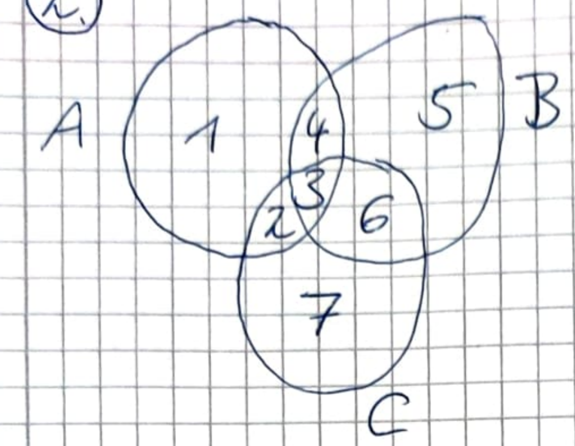
$P((A\cap B^c)\dot\cup(A^c\cap B))=P(A\cap B^c)+P(A\cap B^c)$

$\Leftrightarrow P((A\cap B^c)\dot\cup(A^c\cap B))=0{,}05+0{,}25$

$\Leftrightarrow \underline{P((A\cap B^c)\dot\cup(A^c\cap B))=0{,}3}$ ✓

BRUNNEN

2.



(a1)

- 1: $(A \cap B^c \cap C^c)$
- 2: $(A \cap B^c \cap C)$
- 3: $(A \cap B \cap C)$
- 4: $(A \cap B \cap C^c)$
- 5: $(A^c \cap B \cap C^c)$
- 6: $(A^c \cap B \cap C)$
- 7: $(A^c \cap B^c \cap C)$

(a2) Sylvester:

	1	2	3	4	5	6	7
$P(A)$	+1	+1	+1	+1			
$P(B)$			+1	+1	+1	+1	
$P(C)$		+1	+1			+1	+1
$-P(A\cap B)$			-1	-1			
$-P(A\cap C)$		-1	-1				
$-P(B\cap C)$			-1			-1	
$P(A\cap B\cap C)$			+1				
Σ:	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
$P(A\cup B\cup C)$	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

(b)

IA: $n=2$

$$\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k-1}\Big(\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le 2}\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k})\Big)$$
$$=(-1)^{1-1}(\mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(A_2))+(-1)^{2-1}\cdot(\mathbb{P}(A_1\cap A_2))$$
$$=1\cdot(\mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(A_2))-1\cdot\mathbb{P}(A_1\cap A_2)\overset{\text{Lemma 1.5e)}}{=}\mathbb{P}(A_1\cup A_2)$$
$$=\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{2}A_i\Big)$$

IV: Sei $n\in\mathbb{N}$ mit $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k})$
$=\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Big)$

uv.

③ 4/4

(a) $\Omega = \{W, A, H, R, S, C, E, I, N, L, K, T, O\}$

$p(W) = \frac{1}{26}, p(A) = \frac{1}{26}, p(H) = \frac{4}{26}, p(R) = \frac{2}{26}, p(S) = \frac{2}{26}, p(C) = \frac{2}{26}, p(E) = \frac{4}{26}, p(I) = \frac{4}{26}, p(N) = \frac{1}{26}, p(L) = \frac{1}{26}, p(K) = \frac{1}{26}, p(T) = \frac{2}{26}, p(O) = \frac{1}{26}$

(b) Nein, es handelt sich hier um keinen Laplaceschen WR, da die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse nicht alle gleich sind z.B. $P(O) = \frac{1}{26}$ und $P(R) = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}$

(c) Seien $A_1, A_2, A_3 \subseteq \Omega$:

$A_1 = \{E\}$; $P(A_1) = \frac{4}{26} = \frac{2}{13}$

$A_2 = \{W, H, R, S, C, N, L, K, T\}$; $P(A_2) = \frac{16}{26} = \frac{8}{13}$

$A_3 = \{A, E, I, O\}$; $P(A_3) = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$

④ 4/4

(a) $\Omega_I = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,2,2), (1,2,3), (1,2,1), (1,3,3), (1,3,2), (1,3,1), (2,1,1), (2,1,2), (2,1,3), (2,2,2), (2,2,3), (2,2,1), (2,3,3), (2,3,2), (2,3,1), (3,1,1), (3,1,2), (3,1,3), (3,2,2), (3,2,3), (3,2,1), (3,3,3), (3,3,1), (3,3,2)\}$

$p(\omega_I) = \frac{1}{27}$

$\Omega_{II} = \{(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)\}$

$p(\omega_{II}) = \frac{1}{6}$

$\Omega_{III} = \{(1,2,3)\}$

$p(\omega_{III}) = 1$ ✓

$\Omega_{IV} = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,2,2),(1,2,3)$
$(1,3,3),(2,2,2),(2,2,3),(2,3,3),(3,3,3)\}$

$p(\omega_{IV}) = \frac{3!}{a! \cdot b! \cdot c! \cdot 27}$, wobei a = Anzahl 1en in ω
b = Anzahl 2en in ω ✓
c = Anzahl 3en in ω

(b) $|\Omega_I| = 27$
$|\Omega_{II}| = 6$
$|\Omega_{III}| = 1$ ✓
$|\Omega_{IV}| = 10$

(c) Ω_I ist ein Laplacescher WR, da jedes Ereignis nur durch genau eine Zeichenfolge erreicht werden kann und somit jedes Ereignis die gleiche Wahrscheinlichkeit hat.

Ω_{II} — " — ✓

Ω_{III} ist ebenfalls ein Laplacescher WR, da es nur ein Ergebnis gibt und somit alle ~~Ergeb~~ Ereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

Ω_{IV} ist kein Laplacescher WR, da es hier Ereignisse mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten gibt. z.B. $P((1,1,1)) = \cancel{\frac{6}{27}}\ \cancel{\frac{2}{9}}$ x_1 und ✓

$P((1,1,2)) = \frac{6}{56} = \frac{3}{27}$

$x_1 = \frac{6}{162} = \frac{1}{27}$