Prof. Dr. Ringo Baumann
Moritz Schönherr
Jamie Keitsch

SoSe 2025
Übungsblatt 5
Ausgabe: 05.06.2025

Übungen zur Vorlesung „Logik“
5. Übungsblatt

H 5-1. Terminduktion (2 Pkt.)

Gegeben eine Struktur $\mathfrak{A}$ und zwei Belegungen β und γ. Zeigen Sie per Terminduktion, daß für alle Terme $t \in \mathcal{T}$: Falls $\beta|_{var(t)} = \gamma|_{var(t)}$, dann $\beta(t) = \gamma(t)$.

H 5-2. Erfüllbarkeit und Co. (3 Pkt.)

Kreuzen Sie in der Tabelle an, ob die betreffende Formel erfüllbar, falsifizierbar, unerfüllbar oder tautologisch ist.

Formel	Erfüllbar	Falsifizierbar	Unerfüllbar	Tautologisch
$\forall x\, P(x) \to \exists y\, P(y)$				
$\forall x\, Q(x,x) \to \exists y\, \forall z\, Q(z,y)$				
$\forall x\, \neg P(x) \wedge \exists y\, P(f(y,y))$				

H 5-3. Modell und Widerlegung (5 Pkt.)

Kreuzen Sie in der Tabelle an, ob die betreffende Struktur $\mathfrak{A}$ ein Modell der Formel φ ist. Geben Sie im Falle einer Widerlegung eine falsifizierende Instanz an. Es gilt:

- $U^{\mathfrak{A}_1} = U^{\mathfrak{A}_2} = U^{\mathfrak{A}_3} = \mathbb{N},\ \ c^{\mathfrak{A}_1} = c^{\mathfrak{A}_2} = c^{\mathfrak{A}_3} = 0,\ \ d^{\mathfrak{A}_1} = d^{\mathfrak{A}_2} = d^{\mathfrak{A}_3} = 1$
- $f^{\mathfrak{A}_1}(n,m) = \max(m,n),\ \ f^{\mathfrak{A}_2}(n,m) = n \cdot m,\ \ f^{\mathfrak{A}_3}(n,m) = n+1$

Formel	$\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{A}_2$	$\mathfrak{A}_3$
$\forall x\, (f(x,x) = x \to (x = c \vee x = d))$			
$\forall x\, \exists y\, \exists z\, f(y,z) = x$			

H 5-4. 3-elementige Universen (5 Pkt.)

a) Gegeben nachfolgende Folgerungsaussagen:

$$\forall x\, \exists y\, R(x,y) \models \exists y\, \forall x\, R(x,y) \quad \text{und} \quad \exists y\, \forall x\, R(x,y) \models \forall x\, \exists y\, R(x,y)$$

Geben Sie jeweils an, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Begründen Sie im Falschheitsfalle Ihre Antwort mit einer Struktur $\mathfrak{A}$ wobei $\left|U^{\mathfrak{A}}\right| = 3$ gilt.

b) Gegeben die folgenden beiden Formeln

$$\varphi := \forall x\, (f(x) \neq x \wedge f(f(f(x))) = x) \quad \text{und} \quad \psi := \forall x\, (f(x) \neq x \wedge f(f(x)) = x)$$

Welche der Formeln ist durch eine Struktur $\mathfrak{A}$ mit $\left|U^{\mathfrak{A}}\right| = 3$ erfüllbar? Geben Sie im Erfüllbarkeitsfalle eine bezeugende Interpretation $f^{\mathfrak{A}}$ an bzw. begründen Sie kurz, warum eine solche Interpretation nicht existiert.

c) Geben Sie eine erfüllbare Formel ξ mit $s(\xi) = \{P^1, Q^1\}$ (ohne Verwendung des Gleichheitssymbols) an, sodaß für jedes Modell $(\mathfrak{A}, \beta)$ von ξ gilt: $\left|U^{\mathfrak{A}}\right| \geq 3$. Ohne Begründung!

H 5-5. Semantische Äquivalenz (5 Pkt.)

Gegeben seien die folgenden drei Äquivalenzaussagen:

1. $\forall x\,(P(x) \lor Q(x)) \;\equiv\; \forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x)$
2. $\exists x\, \varphi \to \psi \;\equiv\; \forall x\,(\varphi \to \psi)$ mit $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_{PL}$ und $x \notin \mathrm{frei}(\psi)$
3. $\forall x\, \exists x\, \varphi \;\equiv\; \exists x\, \varphi$ mit $\varphi \in \mathcal{F}_{PL}$

Geben Sie im Äquivalenzfalle einen Beweis unter Verwendung der in VL7 angegebenen semantischen Äquivalenzen an. Falls die Äquivalenzaussage nicht gilt, geben Sie eine bezeugende Interpretation $(\mathfrak{A}, \beta)$ an.

Termine:

- Abgabe der Aufgaben bis spätestens 15.06.2025 via moodle.
- Besprechung der Aufgaben ab Montag, dem 16.06.2025 (A-Woche).