**Def.:**

Sei $V$ ein $K$-Vektorraum und sei $U \subseteq V$.

$U$ heißt Unterraum von $V$, falls gilt:

(i) $0 \in U$

(ii) $\forall u_1, u_2 \in U: \ u_1 + u_2 \in U$

(iii) $\forall \lambda \in K \ \forall u \in U: \ \lambda \cdot u \in U$

**Satz:**

Sei $V$ ein $K$-Vektorraum und sei $U \subseteq V$.

Dann ist äquivalent:

(i) $U$ ist ein Unterraum von $V$

(ii) $(U, +|_{U \times U}, \cdot|_{K \times U})$ ist ein $K$-Vektorraum.

**Satz: (Wichtige Beispiele für Unterräume)**

(i) Sei $V$ ein $K$-Vektorraum und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dann gilt:

$\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\} = \{\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K\}$ ist ein Unterraum von $V$.

(ii) Seien $V$ und $W$ $K$-Vektorräume und sei $f: V \to W$ linear. Dann gilt:

(1) $\operatorname{Kern}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ ist ein Unterraum von $V$.

(2) $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Bild}(f) = \{w \in W \mid \exists v \in V: \ w = f(v)\}$ ist ein Unterraum von $W$.

(iii) Sei $A \in K^{m \times n}$. Dann gilt:

$\operatorname{Kern}(A) = \{x \in K^n \mid A \cdot x = 0\} = \text{Lös}(A, 0)$ ist ein Unterraum von $K^n$.

**Satz:**

Sei $V$ ein endlich dimensionaler $K$-Vektorraum und sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Dann gilt:

(i) $U$ ist endlich dimensional und $\dim(U) \leq \dim(V)$.

(ii) $U = V \iff \dim(U) = \dim(V)$.

## Satz und Def.:

Sei $V$ ein $K$-Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume von $V$. Dann gilt:

(i) $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ ist ein Unterraum von $V$.

(ii) $U_1 \cap U_2 := \{u \mid u \in U_1 \wedge u \in U_2\}$ ist ein Unterraum von $V$.

## Satz:

Sei $V$ ein $K$-Vektorraum und seien $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m \in V$.

Sei $U := \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ und $W := \operatorname{span}\{w_1, \dots, w_m\}$. Dann gilt:

$$U + W = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$$

## Satz (Dimensionsformel für Unterräume)

Sei $V$ ein endlich dimensionaler $K$-Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume von $V$.

Dann gilt:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$

## Def.:

Sei $V$ ein endlich dimensionaler $K$-Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume von $V$.

$$V = U_1 \oplus U_2 \quad :\Leftrightarrow \quad V = U_1 + U_2 \wedge U_1 \cap U_2 = \{0\}$$

In diesem Fall heißt $V$ direkte Summe von $U_1$ und $U_2$.

## Satz:

Sei $V$ ein endlich dimensionaler $K$-Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume von $V$.

Dann ist äquivalent:

(i) $V = U_1 \oplus U_2$

(ii) $V = U_1 + U_2 \wedge U_1 \cap U_2 = \{0\}$

(iii) $V = U_1 + U_2 \wedge \dim V = \dim U_1 + \dim U_2$.