Prof. Dr. Rainer Sinn
Wintersemester 2023/24
Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut

UNIVERSITÄT LEIPZIG

LINEARE ALGEBRA I

Übungsblatt 14
22. Januar 2024

Bitte geben Sie Ihre Lösungen am **Montag, 29. Januar** in der Vorlesung, vor Beginn der Vorlesung, in der Mappe Ihrer Übungsgruppe ab. In Ausnahmefällen können Sie Ihre Lösung auch als eine PDF Datei im Moodlekurs abgeben (bis 13:15).
Dieses Übungsblatt ist das letzte des Semesters. Es gibt dieses Mal insgesamt 6 statt 4 Aufgaben und 30 statt 20 Punkte. Die 10 extra Punkte sind Bonuspunkte: Zur Klausurzulassung brauchen Sie in Summe über alle Übungsblätter gerechnet 140 Punkte. Wenn Sie sich unsicher sind, wie viele Punkte Sie aktuell haben und noch erreichen müssen, kontaktieren Sie bitte Ihren Übungsleiter oder Ihre Übungsleiterin.

1. Bestimmen Sie für die Spiegelung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ für die Basis $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ mit

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) durch direkte Rechnung;

(b) und mit Hilfe des Transformationssatzes für den Basiswechsel von der Standardbasis $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ nach $\mathcal{B}$.

2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 4 & 6 \\ -15 & 7 & -6 & -8 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 4}(\mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie $r = \mathrm{Rang}(A)$ und invertierbare Matrizen P und Q mit

$$PAQ = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also mit } (PAQ)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \leqslant r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

3. Es sei K ein Körper und sei

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y, z \in K \right\}$$

der Raum der symmetrischen 2×2-Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass V ein linearer Unterraum des Vektorraums $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(K)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die drei Elemente

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von V bilden.

(c) Für

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in V$$

definiere

$$\varphi\colon V \longrightarrow V,\; X \longmapsto AXA.$$

Zeigen Sie, dass φ eine lineare Abbildung ist.

(d) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ für die Basis $\mathcal{B} = (S_1, S_2, S_3)$.

4. Sei $d \in \mathbb{N}$ und betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$ aller Polynome in x mit reellen Koeffizienten vom Grad höchstens d. Zeigen Sie, dass die Bernstein-Polynome

$$b_{i,d} = \binom{d}{i} x^i (1-x)^{d-i} \text{ für } i = 0, 1, \ldots, d$$

eine Basis von $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$ bilden.

5. Berechnen Sie für $d = 4$ die darstellende Matrix des Differentialoperators

$$\Delta\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4} & \longrightarrow & \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4} \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right.$$

bezüglich der Bernstein-Basis $b_{i,4}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ (siehe vorige Aufgabe).

6. (Nur für die **Diplom**studiengänge) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge H der oberen Dreiecksmatrizen (siehe Beispiel 19.2(3)) eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$ bildet.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge U der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen (siehe wieder Beispiel 19.2(3)) eine Untergruppe von H bildet.

7. (Nur für das **Lehramt**)

(a) Begründen Sie: Der Quotient zweier komplexer Zahlen ist eine komplexe Zahl.

(b) Ist z eine komplexe Zahl, dann heißt $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$ der Betrag von z.
Es seien z_1 und z_2 zwei komplexe Zahlen. Zeigen Sie:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \;\text{ und }\; |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|\,.$$

(c) Zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 sind genau dann gleich, wenn $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ und $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$. Bestimmen Sie ausgehend von dieser Bemerkung $z \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $z^2 = -1 + i$.

(d) Es seien $a,\ b \in \mathbb{R}$ mit $a > b$. Dann gilt:

$$\sqrt{a-b} = \sqrt{(-1)(b-a)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{b-a} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{(-1)(a-b)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{a-b}$$

Daraus folgt:

$$1 = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = i^2,\ \text{also}\ 1 = i^2.$$

Nehmen Sie zur obigen Rechnung Stellung und begründen Sie Ihre Antwort.