**Hausaufgabe 4.4 (Ackermann & Co)**

Nikita E. J. Fehér
379 3479
Tim Schlenstedt
379 7524

Wir definieren eine Funktion $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ wie folgt:

$$h(n,a,b) = \begin{cases} b+1 & \text{falls } n = 0 \\ a & \text{falls } n = 1 \text{ und } b = 0 \\ 0 & \text{falls } n = 2 \text{ und } b = 0 \\ 1 & \text{falls } n \geq 3 \text{ und } b = 0 \\ h(n-1, a, h(n,a,b-1)) & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $n, a, b \in \mathbb{N}$. (Hinweis: $h$ ist als *Hyper-Operator* bekannt.)

(a) Zeigen Sie, dass $h(1,a,b) = a + b$, für alle $a, b \in \mathbb{N}$. (4)

(b) Zeigen Sie, dass $h(2,a,b) = a \cdot b$, für alle $a, b \in \mathbb{N}$. (4)

a) $\supset A_1$: $a = 0$

$h(1,0,b)$ $\supset A_2$: $b = 0$

$h(1,0,0) = 0 = 0+0 = a+b$

$\supset V_2$: $h(1,0,b) = 0+b = b$

$\supset S_2$: $b = b+1$

$h(1,0,b+1) = h(1-1, 0, h(1,0,b))$

$\underset{\supset V_2}{=} h(0,0,b)$

$= b+1$

$= 0 + (b+1)$

$\supset V_1$ $h(1,a,b) = a+b$

$\supset S_1$ $a = a+1$

$\supset A_3$: $b = 0$

$h(1,a+1,0) = a+1 = a+1+0$

$\supset V_3$ $h(1,a+1,b) = a+1+b$

$\supset S_3$ $b = b+1$

$h(1,a+1,b+1) = h(1-1, a+1, h(1,a+1,b))$

$=_{\supset V_3} h(0, a+1, a+1+b)$

$= a+1+b+1$

$\square$

**Hausaufgabe 4.4 (Ackermann & Co)**
Wir definieren eine Funktion $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ wie folgt:

$$h(n,a,b) = \begin{cases} b+1 & \text{falls } n = 0 \\ a & \text{falls } n = 1 \text{ und } b = 0 \\ 0 & \text{falls } n = 2 \text{ und } b = 0 \\ 1 & \text{falls } n \geq 3 \text{ und } b = 0 \\ h(n-1, a, h(n,a,b-1)) & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $n, a, b \in \mathbb{N}$. (Hinweis: $h$ ist als *Hyper-Operator* bekannt.)

(a) Zeigen Sie, dass $h(1,a,b) = a + b$, für alle $a, b \in \mathbb{N}$. (4)

(b) Zeigen Sie, dass $h(2,a,b) = a \cdot b$, für alle $a, b \in \mathbb{N}$. (4)

$IA_1 \quad a=0$

$h(2,0,b) \quad IA_2 \quad b=0$

$h(2,0,0) = 0 = 0 \cdot 0$

$IV_2 \quad h(2,0,b) = 0 \cdot b = 0$

$IS_2 \quad b = b+1$

$h(2,0,b+1) = h(2-1, 0, h(2,0,b))$

$=_{IV_2} h(1,0,0)$

$= 0 = 0 \cdot b$

$IV_1 \quad h(2,a,b) = a \cdot b$

$IS_1 \quad a = a+1$

$h(2,a+1,b) \quad IA_3 \quad b=0$

$h(2,a+1,0) = 0 = (a+1) \cdot 0$

$IV_3 \quad h(2,a+1,b) = (a+1) \cdot b$

$IS_3 \quad b = b+1$

$h(2,a+1,b+1) = h(2-1, a+1, h(2,a+1,b))$

$=_{IV_3} h(1, a+1, (a+1) \cdot b)$

$=_{a)} a+1 + (a+1) \cdot b$

$= a+1+ab+b$

$= ab+a+b+1$

$= (a+1) \cdot (b+1)$

**Hausaufgabe 4.5 (WHILE-Programme)**

(a) Geben Sie ein WHILE Programm $P$ in *strikter Syntax* an, welches die Funktion $f : \mathbb{N}^2 \dashrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(m,n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } m > n \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

berechnet. (4)

(b) Sei $T = \{3^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion $\chi_T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ von $T$ WHILE-berechenbar ist. (4)

a)

```
x1 = m + 0;
x2 = n + 1;
WHILE (x1 ≠ 0) {
    x2 = x2 - 1;
    x1 = x1 - 1
};
WHILE (x2 ≠ 0) {
    x1 = x1 + 1
};
x1 = x3 + 1
```

b) $\chi_T(m) = \begin{cases} 1 & \exists n \in \mathbb{N} : 3^n = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

```
x1 = m
if(x1 = 1){x4 = 1}
x2 = 1
x3 = x1
WHILE(x3 ≠ 0){
    x2 = x2 · 3
    if(x2 = x1){x4 = 1}
    x3 = x3 - 1
}
x1 = 0
if(x4 = 1){x1 = 1}
```

**Hausaufgabe 4.6 (Berechenbarkeit)** (8)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Funktion $f$ aus Hausaufgabe 4.5 (a) ist LOOP-berechenbar.

(b) Die Funktion $f$ aus Hausaufgabe 4.5 (a) ist WHILE-berechenbar.

(c) Die Funktion $\chi_T$ aus Hausaufgabe 4.5 (b) ist LOOP-berechenbar.

(d) Die Funktion $h$ aus Hausaufgabe 4.4 ist LOOP-berechenbar.

a) Nein die Funktion ist nicht LOOP-berechenbar, da nicht Total.

b) Ja, siehe angegebenes Programm.

c) Ja,

```
x1=m
if(x1=1){x4=1}
x2=1
x3=x1
LOOP(x3){
    x2=x2·3
    if(x2=x1){x4=1}
}
x1=0
if(x4=1){x1=1}
```

d) Ja, jede Primitiv-Rekursive Funktion ist LOOP-Berechenbar.

$$h(n,a,b) = \begin{cases} b+1 \quad \text{Nachfolger-Funktion} & \text{falls } n = 0 \\ a \quad \text{Projektion} & \text{falls } n = 1 \text{ und } b = 0 \\ 0 \quad \text{Konstante-Null-Funktion} & \text{falls } n = 2 \text{ und } b = 0 \\ 1 \quad \text{Konstante-Eins-Funktion} & \text{falls } n \geq 3 \text{ und } b = 0 \\ h(n-1, a, h(n, a, b-1)) & \text{sonst} \end{cases}$$

Primitiv-Rekursiver-Aufruf (Vorgänger-Funktion $\geq 0$, Projektion, P-R-A(Projekt, Projekt, Vor-Funktion $\geq 0$))

P - R - A

$h(n,a,b)$ ist Primitiv Rekursiv