Dr. M. Tautenhahn
Dr. S. Kliem, A. Weiß

Hausaufgabenblatt 1

Abgabe bis 4.11.2024 (Mo) um 15.00 auf moodle (vermutlich Gruppenabgabe - Details folgen)

Aufgabe 1. Für die Ereignisse A und B seien folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt:

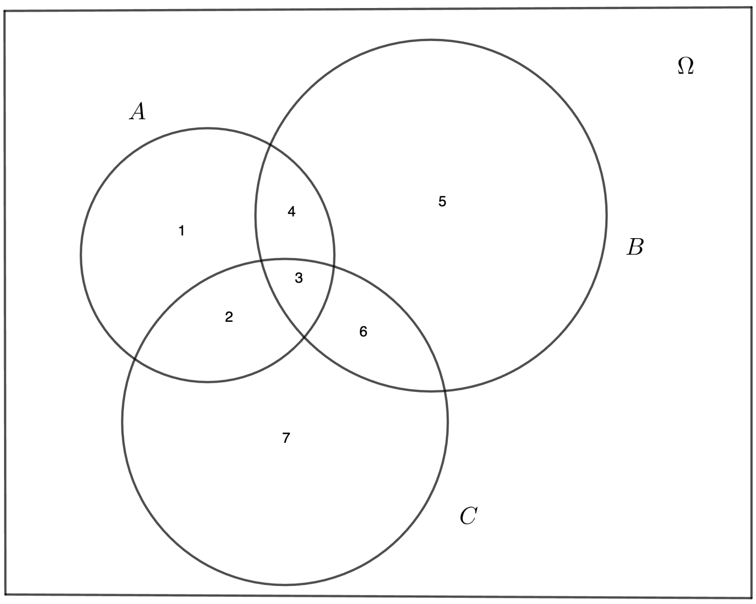
$$P(A) = 0.25,\ P(B) = 0.45,\ P(A \cup B) = 0.5.$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$P(A \cap B^c) \text{ und } P\left((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)\right).$$

Aufgabe 2.

(a) Im Folgenden veranschaulichen wir uns die Formel von Sylvester für den Fall $n = 3$ wie in der Hörsaalübung, Aufgabe 5 für $n = 2$.



(a1) Drücken Sie die Mengen $1 - 7$ jeweils als Schnittmenge dreier Mengen aus.

(a2) Vervollständigen Sie folgende Tabelle.

Sylvester:	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbb{P}(A)$							
$\mathbb{P}(B)$							
$\mathbb{P}(C)$							
$-\mathbb{P}(A \cap B)$							
$-\mathbb{P}(A \cap C)$							
$-\mathbb{P}(B \cap C)$							
$\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$							
Σ :							
$\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$							

(b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die *Formel von Sylvester* gilt: Sei (Ω, p) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Für alle $n \geq 2$ und $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \,.$$

Aufgabe 3. Aus dem Wort „WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE" wird zufällig ein Buchstabe ausgewählt.

(a) Beschreiben Sie dieses Zufallsexperiment mit einem geeigneten diskreten Wahrscheinlichkeitsraum. Geben Sie dazu einen geeigneten Ereignisraum Ω und die zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion $p : \Omega \to [0, 1]$ an.

(b) Handelt es sich um einen Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsraum? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Wir betrachten die Ereignisse

$$\begin{aligned} A_1 &: \text{Es handelt sich um ein „E"}, \\ A_2 &: \text{Es handelt sich um einen Konsonanten}, \\ A_3 &: \text{Es handelt sich um einen Vokal}. \end{aligned}$$

Definieren Sie die Ereignisse A_1, A_2 und A_3 als Teilmengen von Ω und berechnen Sie deren Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 4. Eine Urne enthält drei Kugeln mit den Nummern $1, 2$ und 3. Der Urne werden nacheinander 3 Kugeln wie folgt entnommen.

(I) Nach jedem Zug wird die Kugel zurück gelegt (mit ZL). Die Ziehungsreihenfolge wird auch notiert (mit B(erücksichtigung)dZRF).

(II) Nach jedem Zug wird die Kugel **nicht** zurück gelegt (ohne ZL). Die Ziehungsreihenfolge wird auch notiert (mit BdZRF).

(III) Nach jedem Zug wird die Kugel **nicht** zurück gelegt (ohne ZL). Die Ziehungsreihenfolge wird **nicht** notiert (ohne BdZRF).

(IV) Nach jedem Zug wird die Kugel zurück gelegt (mit ZL). Die Ziehungsreihenfolge wird **nicht** notiert (ohne BdZRF).

Aufgabe:

(a) Beschreiben Sie jedes der vier Zufallsexperimente mit einem geeigneten diskreten Wahrscheinlichkeitsraum. Geben Sie dazu einen geeigneten Ereignisraum $\Omega \subset \{1, 2, 3\}^3$ durch Aufzählung seiner Elemente und die zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion $p : \Omega \to [0, 1]$ an.

(b) Wie groß ist jeweils die Mächtigkeit von Ω?

(c) Handelt es sich jeweils um einen Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsraum oder nicht? Begründen Sie Ihre Antworten.