

计量经济学I（研究生） (Econometrics I)

胡华平

西北农林科技大学

经济管理学院数量经济教研室

huhuaping01@hotmail.com

2019-10-18

西北农林科技大学

模块2：结构方程模型（SEM）

Chapter 18. 为什么要关心联立方程模型？

Chapter 19. 联立方程模型的识别问题

Chapter 20. 联立方程模型的估计方法

Chapter 18. 为什么要关心联立方程模型？

18.1 联立方程模型的本质

18.2 联立方程模型的表达和定义

18.3 OLS估计方法还合适么？

18.1 联立方程模型的本质

联立方程模型的形态

联立方程模型 (simultaneous equations model, SEM) : 由多个方程组成的、方程之间存在相互关联的、联合影响的**内生变量**的方程系统。其基本形式如下:

$$\begin{cases} Y_{1i} = \beta_{10} + \gamma_{12}Y_{2i} + \beta_{11}X_{1i} + u_{i1} \\ Y_{2i} = \beta_{20} + \gamma_{21}Y_{1i} + \beta_{21}X_{1i} + u_{i2} \end{cases}$$

常见的经济模型1: 需求-供给模型

需求-供给模型:

$$\text{Demand function: } Q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + u_{t1}, \quad \alpha_1 < 0$$

$$\text{supply function: } Q_t^s = \beta_0 + \beta_1 P_t + u_{t2}, \quad \beta_1 > 0$$

$$\text{Equilibrium condition: } Q_t^d = Q_t^s$$

常见的经济模型2：凯恩斯收入决定模型

凯恩斯收入决定模型 (Keynesian model of income determination) :

$$\begin{cases} C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \varepsilon_t & (\text{消费函数}) \\ Y_t = C_t + I_t & (\text{收入恒等式}) \end{cases}$$

常见的经济模型3: IS模型

投资储蓄的IS宏观经济模型:

$$\text{Consumption function: } C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{dt} \quad 0 < \beta_1 < 1$$

$$\text{Tax function: } T_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t \quad 0 < \alpha_1 < 1$$

$$\text{Investment function: } I_t = \gamma_0 + \gamma_1 r_t$$

$$\text{Definition: } \gamma_{dt} = Y_t - T_t$$

$$\text{Government expenditure: } G_t = \bar{G}$$

$$\text{National income identity: } Y_t = C_t + I_t + G_t$$

其中: Y 表示国民收入; Y_d 表示可支配收入; r 表示利率; \bar{G} 表示给定政府支出水平。

常见的经济模型4：LM模型

货币市场均衡的LM宏观经济模型：

Money demand function: $M_t^d = a + bY_t - cr_t$

Money supply function: $M_t^s = \bar{M}$

Equilibrium condition: $M_t^d = M_t^s$

其中： Y 表示收入； r 表示利率； \bar{M} 表示给定货币供给量。

常见的经济模型5：克莱因模型

克莱因模型 (Llein's model) :

$$\text{Consumption function: } C_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 (W + W')_t + \beta_3 P_{t-1} + u_{t1}$$

$$\text{Investment function: } I_t = \beta_4 + \beta_5 P_t + \beta_6 P_{t-1} + \beta_7 K_{t-1} + u_{t2}$$

$$\text{Demand for labor: } w_t = \beta_8 + \beta_9 (Y + T - W')_t + \beta_{10} (Y + T - W')_{t-1} + \beta_{11} t + u_{t3}$$

$$\text{Identity: } Y_t = C_t + I_t + C_t$$

$$\text{Identity: } Y_t = W'_t + W_t + P_t$$

$$\text{Identity: } K_t = K_{t-1} + I_t$$

其中： C 表示消费支出； Y 表示税后收入； P 表示利润； W 表示个人工资； W' 表示政府工资； K 表示资本存货； T 表示税收。

生活中的模型1：凶杀犯罪率模型

$$\begin{aligned} \text{murdpc} &= \alpha_1 \text{polpc} + \beta_{10} + \beta_{11} \text{incpc} + u_1 \\ \text{polpc} &= \alpha_2 \text{murdpc} + \beta_{20} + \text{other factors.} \end{aligned}$$

其中： *murdpc*表示人均凶杀犯罪数； *polpc*表示人均警员数； *incpc*表示人均收入。

生活中的模型2：住房支出-储蓄模型

$$\text{housing} = \alpha_1 \text{saving} + \beta_{10} + \beta_{11} \text{inc} + \beta_{12} \text{educ} + \beta_{13} \text{age} + u_1$$

$$\text{saving} = \alpha_2 \text{housing} + \beta_{20} + \beta_{21} \text{inc} + \beta_{22} \text{educ} + \beta_{23} \text{age} + u_2$$

其中：*housing*表示住房支出；*saving*表示家庭储蓄；*inc*表示家庭收入；*educ*表示教育水平；*age*表示年龄。

联立方程模型的特点

联立方程模型的本质是**内生变量**问题：

- 每一个方程都有其经济学因果关系（保持其他条件不变的）
- 样本数据只是各种变量的最终结果，但其中蕴含复杂相互因果互动关系
- 特定方程的参数估计，往往跟其他方程有联系
- 直接使用OLS方法估计参数将会不可靠

松露案例：变量说明

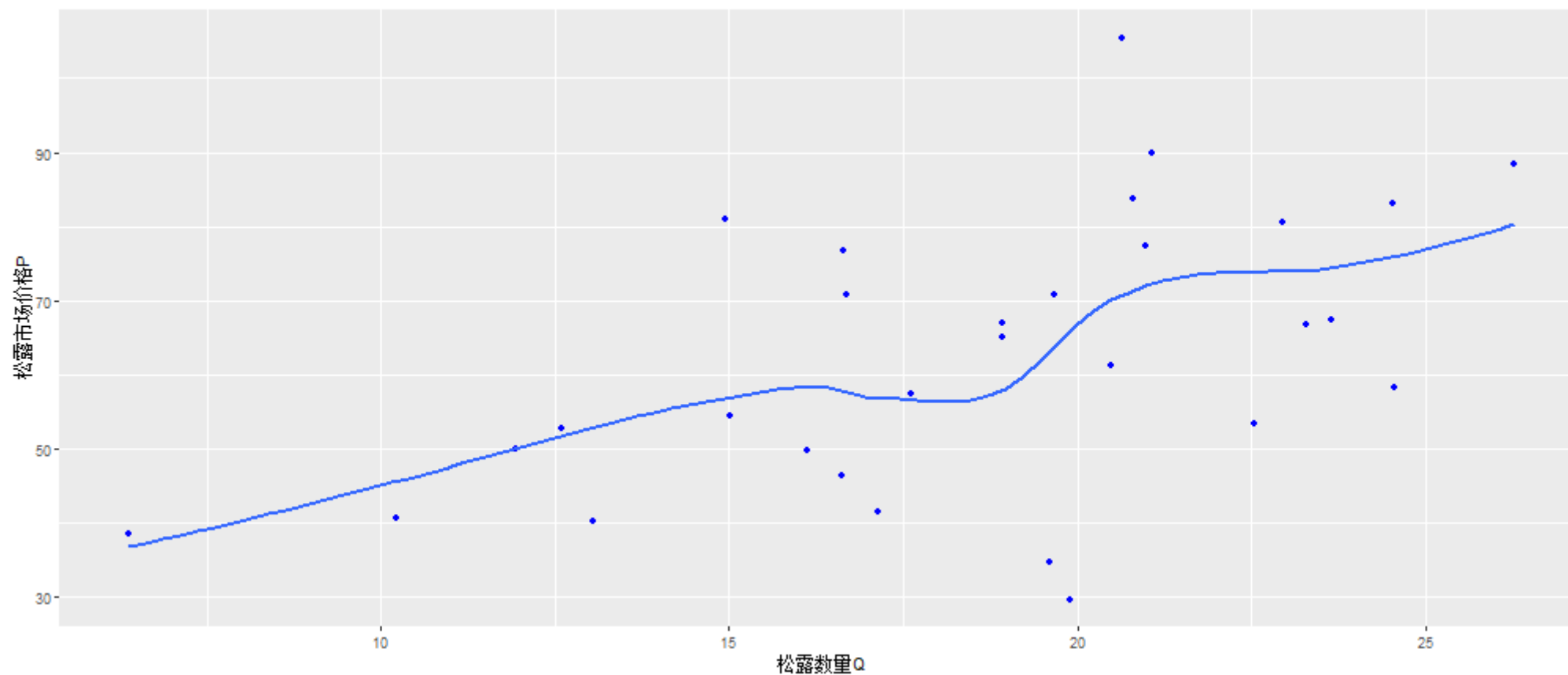
变量	含义	单位
P	松露市场价格	美元/盎司
Q	松露产量或需求量	盎司
PS	松露替代品的市场价格	美元/盎司
DI	当地居民可支配收入	美元/人
PF	生产成本(小猪的租金)	美元/小时

松露案例：数据表

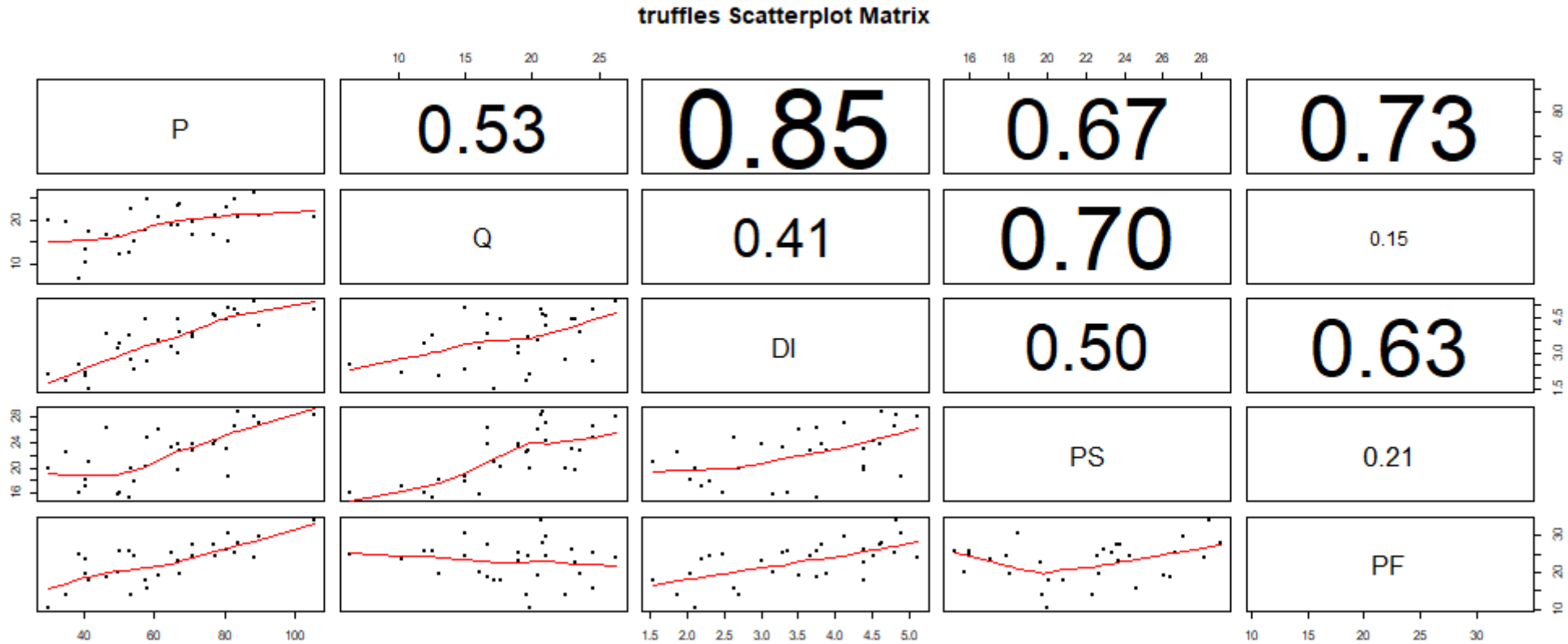
id	P	Q	PS	DI	PF
1	29.64	19.89	19.97	2.103	10.52
2	40.23	13.04	18.04	2.043	19.67
3	34.71	19.61	22.36	1.87	13.74
4	41.43	17.13	20.87	1.525	17.95
5	53.37	22.55	19.79	2.709	13.71
6	38.52	6.37	15.98	2.489	24.95
7	54.33	15.02	17.94	2.294	24.17
8	40.56	10.22	17.09	2.196	23.61

Showing 1 to 8 of 30 entries

松露案例：散点图(P VS Q)



松露案例：矩阵散点图



松露案例：简单线性回归

从最简单线性回归模型开始。通常我们会使用价格(P)和产量(Q)数据直接做简单线性回归建模：

$$P = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 Q + e_1 \quad (\text{simple P model})$$

$$Q = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 P + e_2 \quad (\text{simple Q model})$$

松露案例：简单线性回归

我们都知道，两个变量的线性回归是不对称的，因此有：

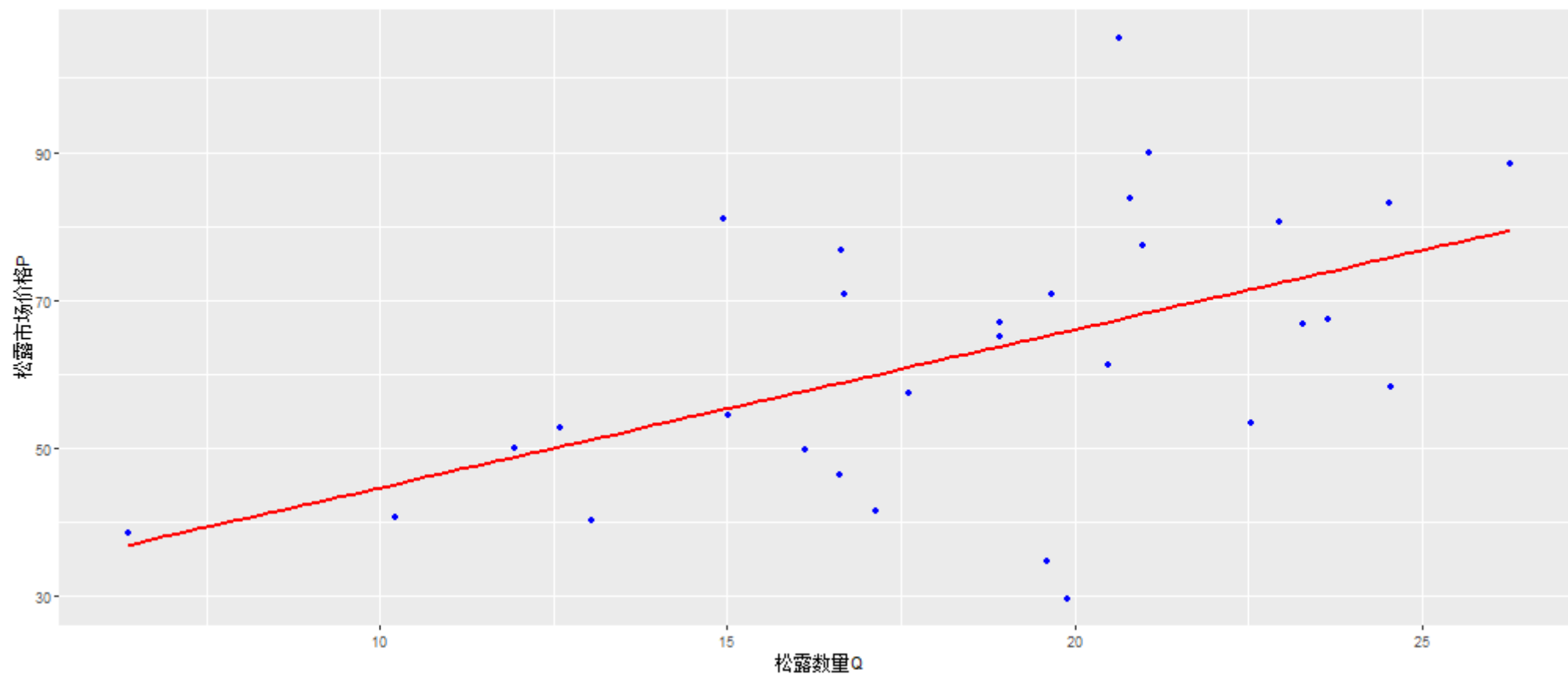
- 简单的价格(P)模型回归结果如下：

$$\begin{aligned}\hat{P} &= + 23.23 & + 2.14Q \\ (t) & (1.8748) & (3.2831) \\ (se) & (12.3885) & (0.6518) \\ (\text{fitness}) & R^2 = 0.2780; \bar{R}^2 = 0.2522 \\ & F^* = 10.78; p = 0.0028\end{aligned}$$

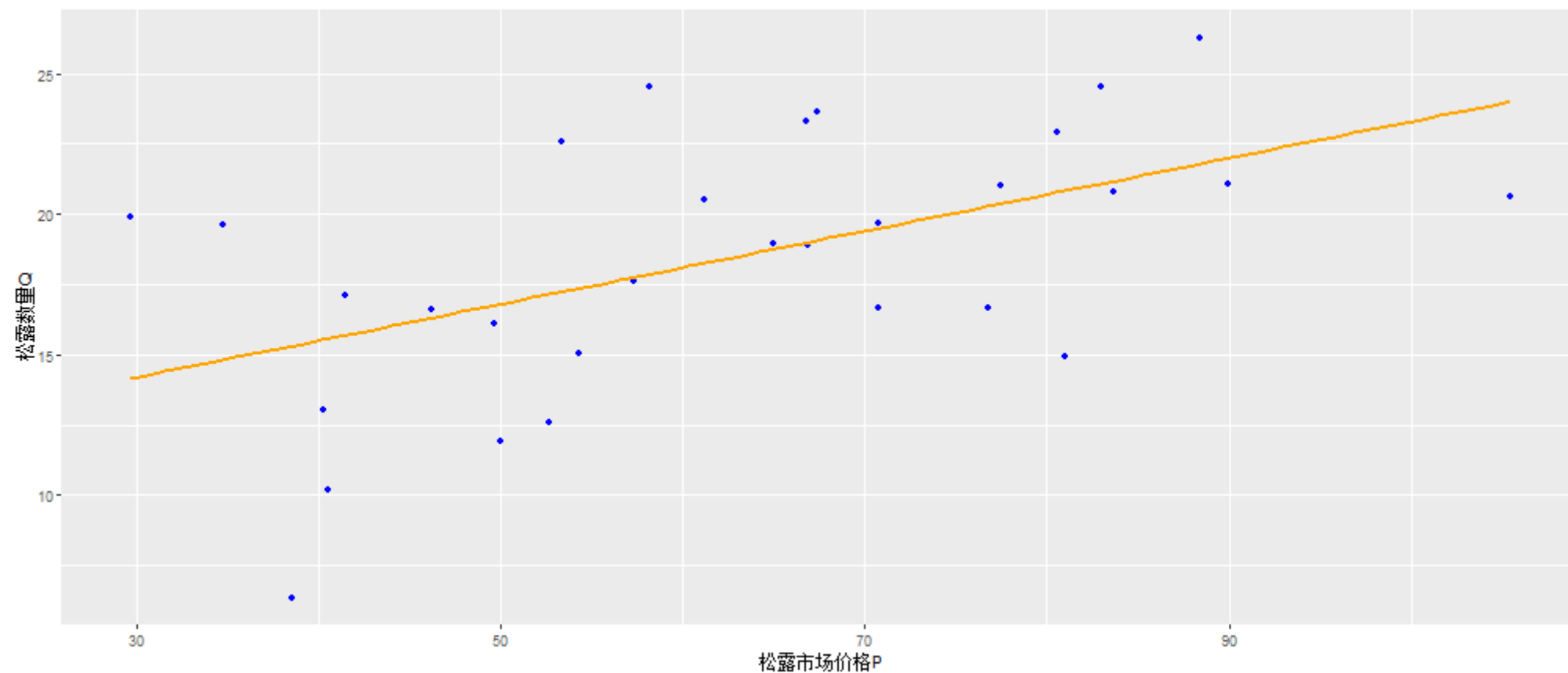
- 简单的数量(Q)模型回归结果如下：

$$\begin{aligned}\hat{Q} &= + 10.31 & + 0.13P \\ (t) & (3.9866) & (3.2831) \\ (se) & (2.5863) & (0.0396) \\ (\text{fitness}) & R^2 = 0.2780; \bar{R}^2 = 0.2522 \\ & F^* = 10.78; p = 0.0028\end{aligned}$$

松露案例：样本回归线1



松露案例：样本回归线2



松露案例：多元线性回归

当然，我们也可以继续使用更多的变量作为自变量X，构建如下的回归模型：

$$P = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 Q + \hat{\beta}_3 DI + \hat{\beta}_4 PS + e_1 \quad (\text{added P model})$$

$$Q = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 P + \hat{\beta}_3 PF + e_2 \quad (\text{added Q model})$$

- 我们努力地想让这些方程更加“合理”、“可信”。

松露案例：多元线性回归

- 增加变量的价格(P)模型回归结果如下：

$$\begin{aligned}\hat{P} &= -13.62 + 0.15Q + 12.36DI + 1.36PS \\ (t) & \quad (-1.4987) \quad (0.3032) \quad (6.7701) \quad (2.2909) \\ (se) & \quad (9.0872) \quad (0.4988) \quad (1.8254) \quad (0.5940) \\ (fitness) & R^2 = 0.8013; \bar{R}^2 = 0.7784 \\ & F^* = 34.95; p = 0.0000\end{aligned}$$

- 增加变量的数量(Q)模型回归结果如下：

$$\begin{aligned}\hat{Q} &= +20.03 + 0.34P - 1.00PF \\ (t) & \quad (16.3938) \quad (15.5436) \quad (-13.1028) \\ (se) & \quad (1.2220) \quad (0.0217) \quad (0.0764) \\ (fitness) & R^2 = 0.9019; \bar{R}^2 = 0.8946 \\ & F^* = 124.08; p = 0.0000\end{aligned}$$

18.2 联立方程模型的表达和定义

联立方程模型的一般表达：代数式1

联立方程模型形态1:

$$\begin{aligned} Y_{t1} &= \quad \quad \quad + \gamma_{21}Y_{t2} + \cdots + \gamma_{m1}Y_{tm} + \beta_{11}X_{t1} + \beta_{21}X_{t2} + \cdots + \beta_{k1}X_{tk} + \varepsilon_{t1} \\ Y_{t2} &= \gamma_{12}Y_{t1} + \quad \quad \quad \cdots + \gamma_{m2}Y_{tm} + \beta_{12}X_{t1} + \beta_{22}X_{t2} + \cdots + \beta_{k2}X_{tk} + \varepsilon_{t2} \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ Y_{tm} &= \gamma_{1m}Y_{t1} + \gamma_{2m}Y_{t2} + \cdots \quad \quad \quad + \beta_{1m}X_{t1} + \beta_{2m}X_{t2} + \cdots + \beta_{km}X_{tk} + \varepsilon_{tm} \end{aligned}$$

- **内生变量或联合应变量**(m个):
 Y_1, Y_2, \cdots, Y_m
- **前定变量**(K个): X_1, X_2, \cdots, X_k
- **结构随机干扰项**(m个): $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$

- **内生变量系数** γ
- **前定变量系数** β
- **观测个数** $t = 1, 2, \cdots, T$

联立方程模型的定义：内生变量和前定变量

内生变量 (endogenous variables) : 由模型决定的变量。

- 如 $Y_{t1}; Y_{t2}; \cdots; Y_{tm}$

前定变量 (predetermined variables) : 是**外生变量**和**滞后内生变量**的合称。

- **外生变量** (exogenous variables) : 不由模型决定的变量, 包括**当前期的**和**滞后期的**
 - 当前期的外生变量 $X_{t1}, X_{t2}, \cdots, X_{tk}$ 。
 - 滞后期的外生变量, 如 X_{t1} 的外生滞后变量: $X_{t-1,1}, X_{t-2,1}, \cdots, X_{t-(T-1),1}$; 以及 X_{tk} 的外生滞后变量: $X_{t-1,k}, X_{t-2,k}, \cdots, X_{t-(T-1),k}$ 等。
- **滞后内生变量** (lagged endogenous variables) : 当前时期下内生变量的滞后变量。
 - 如 Y_{t1} 的滞后内生变量: $Y_{t-1,1}, Y_{t-2,1}, \cdots, Y_{t-(T-1),1}$; 以及 Y_{tm} 的滞后内生变量: $Y_{t-1,m}, Y_{t-2,m}, \cdots, Y_{t-(T-1),m}$ 等

联立方程模型的定义：结构方程和结构参数

结构方程 (structural equations)：直接刻画经济结构或行为关系的方程系统。

- 见前述**代数式1**

结构参数 (structural parameters)：结构方程中代表经济结果或行为关系的参数。具体又包括**内生结构系数**和**外生结构系数**

- **内生结构系数**：如上述结构方程中的 $\gamma_{11}, \gamma_{21}, \dots, \gamma_{m1}; \dots; \gamma_{1m}, \gamma_{2m}, \dots, \gamma_{mm}$
- **外生结构系数**：如上述结构方程中的 $\beta_{11}, \beta_{21}, \dots, \beta_{m1}; \dots; \beta_{1m}, \beta_{2m}, \dots, \beta_{mm};$

联立方程模型的一般表达：代数式2

联立方程模型形态2：我们也将前述**代数式1**整理成如下**代数式2**：

$$\begin{array}{ccccccc} \gamma_{11}Y_{t1} + \gamma_{21}Y_{t2} + \cdots + \gamma_{m-1,1}Y_{t,m-1} + \gamma_{m1}Y_{tm} + \beta_{11}X_{t1} + \beta_{21}X_{t2} + \cdots + \beta_{k1}X_{tk} & = & \varepsilon_{t1} \\ \gamma_{12}Y_{t1} + \gamma_{22}Y_{t2} + \cdots + \gamma_{m-1,2}Y_{t,m-1} + \gamma_{m2}Y_{tm} + \beta_{12}X_{t1} + \beta_{22}X_{t2} + \cdots + \beta_{k2}X_{tk} & = & \varepsilon_{t2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{1m}Y_{t1} + \gamma_{2m}Y_{t2} + \cdots + \gamma_{m-1,m}Y_{t,m-1} + \gamma_{mm}Y_{tm} + \beta_{1m}X_{t1} + \beta_{2m}X_{t2} + \cdots + \beta_{km}X_{tk} & = & \varepsilon_{tm} \end{array}$$

联立方程模型的一般表达：矩阵式

联立方程模型形态3：**矩阵表达**。将上述**代数式2**的m个方程进一步表达为矩阵形式

$$\begin{aligned} & [Y_1 \quad Y_2 \quad \cdots \quad Y_m]_t \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1m} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mm} \end{bmatrix} + \\ & [X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_m]_t \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \cdots & \beta_{km} \end{bmatrix} \\ & = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \cdots \quad \varepsilon_m]_t \end{aligned}$$

联立方程模型的一般表达：矩阵式

进一步可以表达为：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{y}_t' \mathbf{\Gamma} & + \mathbf{x}_t' \mathbf{B} & = \boldsymbol{\varepsilon}_t' \\ (1 * m)(m * m) & (1 * k)(k * m) & (1 * m) \end{array}$$

复习本科知识：加粗大写表示**矩阵** (matrix)，加粗小写表示**向量** (vector)。其中**向量**默认情形下都是**列向量** (column vector)。对其**转置** (transpose) 即为**行向量** (row vector)。

思考提问：矩阵式与代数式是等价的么？

联立方程模型的一般表达：矩阵式

对于**内生结构参数矩阵** Γ ：

- 为确保每个方程中有一个**因变量**，则矩阵 Γ 每列中至少有一个元素为1
- 如果矩阵 Γ 表现为**上三角矩阵** (upper triangular matrix) ，那么联立方程模型就表现为**递归模型** (recursive model) 。

$$\begin{aligned} y_{1t} &= f_1(\mathbf{x}_t) + \varepsilon_{t1} \\ y_{2t} &= f_2(y_{t1}, \mathbf{x}_t) + \varepsilon_{t2} \\ &\vdots \\ y_{mt} &= f_m(y_{t1}, y_{t2}, \dots, y_{t,m-1}, \mathbf{x}_t) + \varepsilon_{mt} \end{aligned}$$

对于**外生结构参数矩阵** B ：

联立方程模型的定义：约简方程和约简系数（代数表达）

约简型方程 (reduced equations)：仅用**前定变量**和**随机干扰项**来表达一个内生变量的方程。

$$\begin{aligned} Y_{t1} &= \quad \quad \quad + \gamma_{21}Y_{t2} + \cdots + \gamma_{m1}Y_{tm} + \beta_{11}X_{t1} + \beta_{21}X_{t2} + \cdots + \beta_{k1}X_{tk} + \varepsilon_{t1} \\ Y_{t2} &= \gamma_{12}Y_{t1} + \quad \quad \quad \cdots + \gamma_{m2}Y_{tm} + \beta_{12}X_{t1} + \beta_{22}X_{t2} + \cdots + \beta_{k2}X_{tk} + \varepsilon_{t2} \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ Y_{tm} &= \gamma_{1m}Y_{t1} + \gamma_{2m}Y_{t2} + \cdots \quad \quad \quad + \beta_{1m}X_{t1} + \beta_{2m}X_{t2} + \cdots + \beta_{km}X_{tk} + \varepsilon_{tm} \end{aligned}$$

以上**结构方程**（代数式1）可以转化为如下**约简方程**：

$$\begin{aligned} Y_{t1} &= +\pi_{11}X_{t1} + \pi_{21}X_{t2} + \cdots + \pi_{k1}X_{tk} + v_{t1} \\ Y_{t2} &= +\pi_{12}X_{t1} + \pi_{22}X_{t2} + \cdots + \pi_{k2}X_{tk} + v_{t2} \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ Y_{tm} &= +\pi_{1m}X_{t1} + \pi_{2m}X_{t2} + \cdots + \pi_{km}X_{tk} + v_{tm} \end{aligned}$$

约简系数 (reduced coefficients)：约简方程中对应的系数。如 $\pi_{11}, \pi_{21}, \cdots, \pi_{k1}$ 和 $\pi_{1m}, \pi_{2m}, \cdots, \pi_{km}$ 等。**约简随机干扰项**：指约简方程中的 v_1, v_2, \cdots, v_m 。

联立方程模型的定义：约简方程和约简系数（矩阵表达）

$$\begin{aligned} Y_{t1} &= +\pi_{11}X_{t1} + \pi_{21}X_{t2} + \cdots + \pi_{k1}X_{tk} + v_{t1} \\ Y_{t2} &= +\pi_{12}X_{t1} + \pi_{22}X_{t2} + \cdots + \pi_{k2}X_{tk} + v_{t2} \\ &\vdots \\ Y_{tm} &= +\pi_{1m}X_{t1} + \pi_{2m}X_{t2} + \cdots + \pi_{km}X_{tk} + v_{tm} \end{aligned}$$

上述约简方程的代数形式，可以表达为如下矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_m \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \cdots & \pi_{1m} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \cdots & \pi_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \pi_{m1} & \pi_{m2} & \cdots & \pi_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_m \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix}_t$$

联立方程模型的定义：约简方程和约简系数（矩阵表达）

上述矩阵可以进一步表达为：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{y}'_t & = - \mathbf{x}'_t \mathbf{\Pi} & + \mathbf{v}'_t \\ (1 * m) & (1 * k)(k * m) & (1 * m) \end{array}$$

并进一步记为：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{y}'_t & = - \mathbf{x}'_t \mathbf{B} \mathbf{\Gamma}^{-1} & + \mathbf{\epsilon}'_t \mathbf{\Gamma}^{-1} \\ (1 * m) & (1 * k)(k * m)(m * m) & (1 * m)(m * m) \end{array}$$

从而结构方程系数（/随机干扰项）和约简方程系数（/随机干扰项）有如下对应关系：

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi} &= \mathbf{B} \mathbf{\Gamma}^{-1} \\ \mathbf{v}'_t &= \mathbf{\epsilon}'_t \mathbf{\Gamma}^{-1} \end{aligned}$$

思考提问：怎样把一个结构模型，表达为约简模型？

联立方程模型的定义：随机干扰项的方差协方差矩阵

结构方程随机干扰项 ϵ'_t :

$$\mathbf{y}'_t \Gamma + \mathbf{x}'_t \mathbf{B} = \epsilon'_t$$

约简方程随机干扰项 \mathbf{v}'_t :

$$\begin{aligned}\mathbf{y}'_t &= -\mathbf{x}'_t \Pi + \mathbf{v}'_t = -\mathbf{x}'_t \mathbf{B} \Gamma^{-1} + \epsilon'_t \Gamma^{-1} \\ \mathbf{y}'_t + \mathbf{x}'_t \Pi &= \mathbf{v}'_t\end{aligned}$$

假设**结构随机干扰项**期望为0，方差为常数。也即： $\mathbf{E}[\epsilon_t | \mathbf{x}_t] = \mathbf{0}$; $\mathbf{E}[\epsilon_t \epsilon'_t | \mathbf{x}_t] = \Sigma$

则容易证明**约简随机干扰项**的期望和方差分别为：

$$\begin{aligned}E[\mathbf{v}_t | \mathbf{x}_t] &= (\Gamma^{-1})' \mathbf{0} = \mathbf{0} \\ E[\mathbf{v}_t \mathbf{v}'_t | \mathbf{x}_t] &= (\Gamma^{-1})' \Sigma \Gamma^{-1} = \Omega \\ \Sigma &= \Gamma' \Omega \Gamma\end{aligned}$$

联立方程模型的定义：常用样本统计量

给定全部 T 个样本数据集：

$$[\mathbf{Y} \quad \mathbf{X} \quad \mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \mathbf{y}'_1 & \mathbf{x}'_1 & \boldsymbol{\varepsilon}'_1 \\ \mathbf{y}'_2 & \mathbf{x}'_2 & \boldsymbol{\varepsilon}'_2 \\ \vdots & & \\ \mathbf{y}'_T & \mathbf{x}'_T & \boldsymbol{\varepsilon}'_T \end{bmatrix}$$

则联立方程可以记为：

$$\mathbf{Y}\boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{E}$$

结构随机干扰项期望和方差可以记为：

$$\begin{aligned} E[\mathbf{E}|\mathbf{X}] &= \mathbf{0} \\ E[(1/T)\mathbf{E}'\mathbf{E}|\mathbf{X}] &= \boldsymbol{\Sigma} \end{aligned}$$

联立方程模型的定义：常用样本统计量

假设如下条件成立：

$$\begin{aligned}(1/T)\mathbf{X}'\mathbf{X} &\rightarrow \mathbf{Q} \\ (1/T)\mathbf{X}'\mathbf{E} &\rightarrow \mathbf{0}\end{aligned}$$

则约简方程可以记为：

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{\Pi} + \mathbf{V} \quad \leftarrow \mathbf{V} = \mathbf{E}\mathbf{\Gamma}^{-1}$$

从而可以得到如下常用统计量：

$$\frac{1}{T} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}' \\ \mathbf{X}' \\ \mathbf{V}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{X} & \mathbf{V} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{I}'\mathbf{Q}\mathbf{I} + \mathbf{\Omega} & \mathbf{\Pi}'\mathbf{Q} & \mathbf{\Omega} \\ \mathbf{Q}\mathbf{I} & \mathbf{Q} & \mathbf{0}' \\ \mathbf{\Omega} & \mathbf{0} & \mathbf{\Omega} \end{bmatrix}$$

案例1：凯恩斯收入决定模型（2方程模型）

以凯恩斯收入决定的联立方程为例（结构模型）：

$$\begin{cases} C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \varepsilon_t & \text{(消费函数)} \\ Y_t = C_t + I_t & \text{(收入恒等式)} \end{cases}$$

上述结构模型中：

内生变量有2个： $c_t; Y_t$

前定变量有1个，其中：

- **外生变量**有1个： I_t
- **滞后内生变量**有0个

思考提问：怎样把这个结构模型转变为约简模型？（考点）

案例1：凯恩斯收入决定模型（2方程模型）

上述**结构模型**，可以变换为如下**约简方程**：

$$\begin{cases} Y_t = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1} + \frac{1}{1 - \beta_1} I_t + \frac{\varepsilon_t}{1 - \beta_1} & (\text{变换方程1}) \\ C_t = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1} + \frac{\beta_1}{1 - \beta_1} I_t + \frac{\varepsilon_t}{1 - \beta_1} & (\text{变换方程2}) \end{cases}$$

进一步可记为如下约简方程形式：

$$\begin{cases} Y_t = \pi_{11} + \pi_{21} I_t + v_{t1} & (\text{约简方程1}) \\ C_t = \pi_{12} + \pi_{22} I_t + v_{t2} & (\text{约简方程2}) \end{cases}$$

易知：**结构系数**共有2个 $\beta_0; \beta_1$ ；而**约简系数**共有4个 $\pi_{11}, \pi_{21}; \pi_{12}, \pi_{22}$ （实际上只有3个！）

案例1：凯恩斯收入决定模型（2方程模型）

其中约简系数和结构系数的关系为：

$$\left\{ \begin{array}{ll} \pi_{11} = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1}; & \pi_{12} = \frac{1}{1 - \beta_1} \\ \pi_{21} = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1}; & \pi_{22} = \frac{\beta_1}{1 - \beta_1} \\ v_{t1} = \frac{\varepsilon_t}{1 - \beta_1}; & v_{t2} = \frac{\varepsilon_t}{1 - \beta_1} \end{array} \right.$$

案例2：小型宏观经济模型（3方程联立模型）

考虑如下的小型宏观经济模型（结构方程）：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{consumption: } c_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_t + \alpha_2 c_{t-1} + \varepsilon_{t,c} \\ \text{investment: } i_t = \beta_0 + \beta_1 r_t + \beta_2 (y_t - y_{t-1}) + \varepsilon_{t,j} \\ \text{demand: } y_t = c_t + i_t + g_t \end{array} \right.$$

其中： c_t 表示消费； y_t 表示产出； i_t 表示投资； r_t 表示利率； g_t 表示政府支出。

内生变量有3个： $c_t; i_t; Y_t$

前定变量有4个，其中：

- **外生变量**有2个： $r_t; g_t$
- **滞后内生变量**有2个： $y_{t-1}; c_{t-1}$

结构系数共有6个： $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2; \beta_0, \beta_1, \beta_2;$

案例2：小型宏观经济模型（3方程联立模型）

上述**结构方程**可以变换为如下**约简方程**：（HOW TO??）

$$\begin{cases} c_t = [\alpha_0(1 - \beta_2) + \beta_0\alpha_1 + \alpha_1\beta_1r_t + \alpha_1g_t + \alpha_2(1 - \beta_2)c_{t-1} - \alpha_1\beta_2y_{t-1} \\ \quad + (1 - \beta_2)\varepsilon_{t,c} + \alpha_1\varepsilon_{t,j}] / \Lambda \\ i_t = [\alpha_0\beta_2 + \beta_0(1 - \alpha_1) + \beta_1(1 - \alpha_1)r_t + \beta_2g_t + \alpha_2\beta_2c_{t-1} - \beta_2(1 - \alpha_1)y_{t-1} \\ \quad + \beta_2\varepsilon_{t,c} + (1 - \alpha_1)\varepsilon_{t,j}] / \Lambda \\ y_t = [\alpha_0 + \beta_0 + \beta_1r_t + g_t + \alpha_2c_{t-1} - \beta_2y_{t-1} + \varepsilon_{t,c} + \varepsilon_{t,j}] / \Lambda \end{cases}$$

其中： $\Lambda = 1 - \alpha_1 - \beta_2$ 。或者将上述**约简方程**记为：

$$\begin{cases} c_t = \pi_{11} + \pi_{21}r_t + \pi_{31}g_t + \pi_{41}c_{t-1} + \pi_{51}y_{t-1} + v_{t1} \\ i_t = \pi_{12} + \pi_{22}r_t + \pi_{32}g_t + \pi_{42}c_{t-1} + \pi_{52}y_{t-1} + v_{t2} \\ i_t = \pi_{13} + \pi_{23}r_t + \pi_{33}g_t + \pi_{43}c_{t-1} + \pi_{53}y_{t-1} + v_{t3} \end{cases}$$

易知**约简系数**共有15个！！

案例2：小型宏观经济模型（3方程联立模型）

思考：

- 结构方程和约简方程有什么用？
- （结构方程中的）消费函数，利率 i_t 不会对消费 c_t 产生影响？
 - 从约简方程中则可以很快得到答案 $\frac{\Delta c_t}{\Delta r_t} = \frac{\alpha_1 \beta_1}{\Lambda}$
- （结构方程中的）消费函数，收入 y_t 对消费 c_t 产生影响，具体是来自什么原因？
 - 进行中介变换也容易得到答案 $\frac{\Delta c_t}{\Delta y_t} = \frac{\Delta c_t / \Delta r_t}{\Delta y_t / \Delta r_t} = \frac{\alpha_1 \beta_1 / \Lambda}{\beta_1 / \Lambda} = \alpha_1$

案例2：小型宏观经济模型（3方程联立模型）

因为约简方程的矩阵形式可以表达为：

$$\mathbf{y}'_t = -\mathbf{x}'_t \mathbf{\Pi} + \mathbf{v}'_t = -\mathbf{x}'_t \mathbf{B} \mathbf{\Gamma}^{-1} + \mathbf{\varepsilon}'_t \mathbf{\Gamma}^{-1}$$

容易得到如下相关矩阵：

$$\mathbf{y}' = [c \quad i \quad y]$$

$$\mathbf{x}' = [1 \quad r \quad g \quad c_{-1} \quad y_{-1}]$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\alpha_0 & -\beta_0 & 0 \\ 0 & -\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -\alpha_1 & -\beta_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma}^{-1} = \frac{1}{\Lambda} \begin{bmatrix} 1 - \beta_2 & \beta_2 & 1 \\ \alpha_1 & 1 - \alpha_1 & 1 \\ \alpha_1 & \beta_2 & 1 \end{bmatrix}$$

案例2：小型宏观经济模型（3方程联立模型）

根据约简方程的矩阵表达式：

$$\mathbf{y}'_t = -\mathbf{x}'_t \mathbf{\Pi} + \mathbf{v}'_t = -\mathbf{x}'_t \mathbf{B} \mathbf{\Gamma}^{-1} + \mathbf{\varepsilon}'_t \mathbf{\Gamma}^{-1}$$

根据前述计算结果，则可以得到约简系数与结构系数的关系为：

$$\mathbf{\Pi}' = \frac{1}{\Lambda} \begin{bmatrix} \alpha_0(1 - \beta_2) + \beta_0\alpha_1 & \alpha_1\beta_1 & \alpha_1 & \alpha_2(1 - \beta_2) & -\beta_2\alpha_1 \\ \alpha_0\beta_2 + \beta_0(1 - \alpha_1) & \beta_1(1 - \alpha_1) & \beta_2 & \alpha_2\beta_2 & -\beta_2(1 - \alpha_1) \\ \alpha_0 + \beta_0 & \beta_1 & 1 & \alpha_2 & -\beta_2 \end{bmatrix}$$

其中： $\Lambda = 1 - \alpha_1 - \beta_2$ 。

难点：矩阵的逆的计算。

掌握了就是快刀一把，手起刀落，麻利干脆！

附录：逆矩阵求解方法和步骤

A.用初等行运算（高斯 - 若尔当）来求逆矩阵：

1. 构造**增广矩阵**
2. 对增广矩阵进行多次变换，直至达到目标。

B.用余子式、代数余子式和伴随来求逆矩阵

1. 计算**余子式矩阵**和**代数余子式矩阵**
2. 计算**伴随矩阵**：就是代数余子式矩阵的**转置**
3. 计算原矩阵**行列式**：原矩阵**顶行**的每个元素乘以其对应"代数余子式矩阵"**顶行**元素。
4. 计算得出逆矩阵： **$1/\text{行列式}$** X **伴随矩阵**

18.3 OLS估计方法还合适么？

内生变量问题

以凯恩斯收入决定模型为例，我们将可以证明 Y_t 和 u_t 将会出现相关，从而违背CLRM假设。

$$\begin{cases} C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + u_t & (0 < \beta_1 < 1) & \text{(消费函数)} \\ Y_t = C_t + I_t & & \text{(收入恒等式)} \end{cases}$$

将上述结构方程进行变换，得到：

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta_0 + \beta_1 Y_t + I_t + u_t \\ Y_t &= \frac{\beta_0}{1 - \beta_1} + \frac{1}{1 - \beta_1} I_t + \frac{1}{1 - \beta_1} u_t & \text{(式1: 约简方程)} \\ E(Y_t) &= \frac{\beta_0}{1 - \beta_1} + \frac{1}{1 - \beta_1} I_t & \text{(式2: 两边取期望)} \end{aligned}$$

内生变量问题

进一步地:

$$Y_t - E(Y_t) = \frac{u_t}{1 - \beta_1} \quad (\text{式1 - 式2})$$

$$u_t - E(u_t) = u_t \quad (\text{式3: 期望等于0})$$

$$\text{cov}(Y_t, u_t) = E([Y_t - E(Y_t)][u_t - E(u_t)]) \quad (\text{式4: 协方差定义式})$$

$$= \frac{E(u_t^2)}{1 - \beta_1} \quad (\text{式5: 方差定义式})$$

$$= \frac{\sigma^2}{1 - \beta_1} \neq 0 \quad (\text{式6: 方差不为0})$$

因此, 凯恩斯模型的需求方程, 将会不满足CLRM假设中 Y_t 与 u_t 不相关的假设。从而使用OLS方法对需求方程不能得到**最优线性无偏估计量** (BLUE)。

系数的OLS估计量是有偏的

下面将进一步证明，使用OLS方法估计 β_1 是有偏的，也即 $E(\hat{\beta}_1) \neq \beta_1$ 。证明过程如下：

$$\begin{cases} C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + u_t & (0 < \beta_1 < 1) & \text{(消费函数)} \\ Y_t = C_t + I_t & & \text{(收入恒等式)} \end{cases}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum c_t y_t}{\sum y_t^2} = \frac{\sum C_t y_t}{\sum y_t^2} = \frac{\sum [(\beta_0 + \beta_1 Y_t + u_t) y_t]}{\sum y_t^2} = \beta_1 + \frac{\sum u_t y_t}{\sum y_t^2} \quad (\text{式1})$$

对式1两边取期望，因此有：

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1 + E\left(\frac{\sum u_t y_t}{\sum y_t^2}\right)$$

问题是： $E\left(\frac{\sum u_t y_t}{\sum y_t^2}\right)$ 是否等于0？我们可以证明它将不等于0（证明过程见后）。

证明附录1

$$\begin{aligned}\frac{\sum c_t y_t}{\sum y_t^2} &= \frac{\sum (C_t - \bar{C})(Y_t - \bar{Y})}{\sum y_t^2} = \frac{\sum (C_t - \bar{C})y_t}{\sum y_t^2} \\&= \frac{\sum C_t y_t - \sum \bar{C} y_t}{\sum y_t^2} = \frac{\sum C_t y_t - \sum \bar{C}(Y_t - \bar{Y})}{\sum y_t^2} \\&= \frac{\sum C_t y_t - \bar{C} \sum Y_t - \sum \bar{C} \bar{Y}}{\sum y_t^2} = \frac{\sum C_t y_t - \bar{C} \sum Y_t - n \bar{C} \bar{Y}}{\sum y_t^2} = \frac{\sum C_t y_t}{\sum y_t^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum (\beta_0 + \beta_1 Y_t + u_t) y_t}{\sum y_t^2} = \frac{\sum \beta_0 y_t + \sum \beta_1 Y_t y_t + \sum u_t y_t}{\sum y_t^2} \\&= \frac{\beta_1 \sum (y_t + \bar{Y}) y_t + \sum u_t y_t}{\sum y_t^2} = \beta_1 + \frac{\sum y_t u_t}{\sum y_t^2}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sum y_t = 0; \quad \frac{\sum Y_t y_t}{\sum y_t^2} = 1$$

证明附录2

依概率取极限:

$$\begin{aligned}\text{plim}(\hat{\beta}_1) &= \text{plim}(\beta_1) + \text{plim}\left(\frac{\sum y_t u_t}{\sum y_t^2}\right) \\ &= \text{plim}(\beta_1) + \text{plim}\left(\frac{\sum y_t u_t / n}{\sum y_t^2 / n}\right) = \beta_1 + \frac{\text{plim}(\sum y_t u_t / n)}{\text{plim}(\sum y_t^2 / n)}\end{aligned}$$

而我们已经证明过:

$$\text{cov}(Y_t, u_t) = E([Y_t - E(Y_t)][u_t - E(u_t)]) = \frac{E(u_t^2)}{1 - \beta_1} = \frac{\sigma^2}{1 - \beta_1} \neq 0$$

因此, $E\left(\frac{\sum u_t y_t}{\sum y_t^2}\right) \neq 0$ 得证。

数值模拟：人为控制的总体

$$C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + u_t \quad (0 < \beta_1 < 1) \quad (\text{消费函数})$$

$$Y_t = C_t + I_t \quad (\text{收入恒等式})$$

$$C_t = 2 + 0.8Y_t + u_t \quad (0 < \beta_1 < 1) \quad (\text{消费函数})$$

$$Y_t = C_t + I_t \quad (\text{收入恒等式})$$

人为控制的总体被设置为：

- $\beta_0 = 2, \beta_1 = 0.8, I_t \leftarrow$ 给定值
- $E(u_t) = 0, \text{var}(u_t) = \sigma^2 = 0.04$
- $E(u_t u_{t+j}) = 0, j \neq 0$
- $\text{cov}(u_t, I_t) = 0$

数值模拟：模拟数据集

给定条件下的模拟数据为：

Y	C	I	u
18.1570	16.1570	2	-0.3686
19.5998	17.5998	2	-0.0800
21.9347	19.7347	2.2	0.1869
21.5514	19.3514	2.2	0.1103
21.8843	19.4843	2.4	-0.0231
22.4265	20.0265	2.4	0.0853
25.4094	22.8094	2.6	0.4819
22.6952	20.0952	2.6	-0.0610

Showing 1 to 8 of 20 entries

Previous 1 2 3 Next

数值模拟：手工计算

根据前述公式，可以计算得到回归系数：

容易计算出： $\sum u_t y_t = 3.8000$

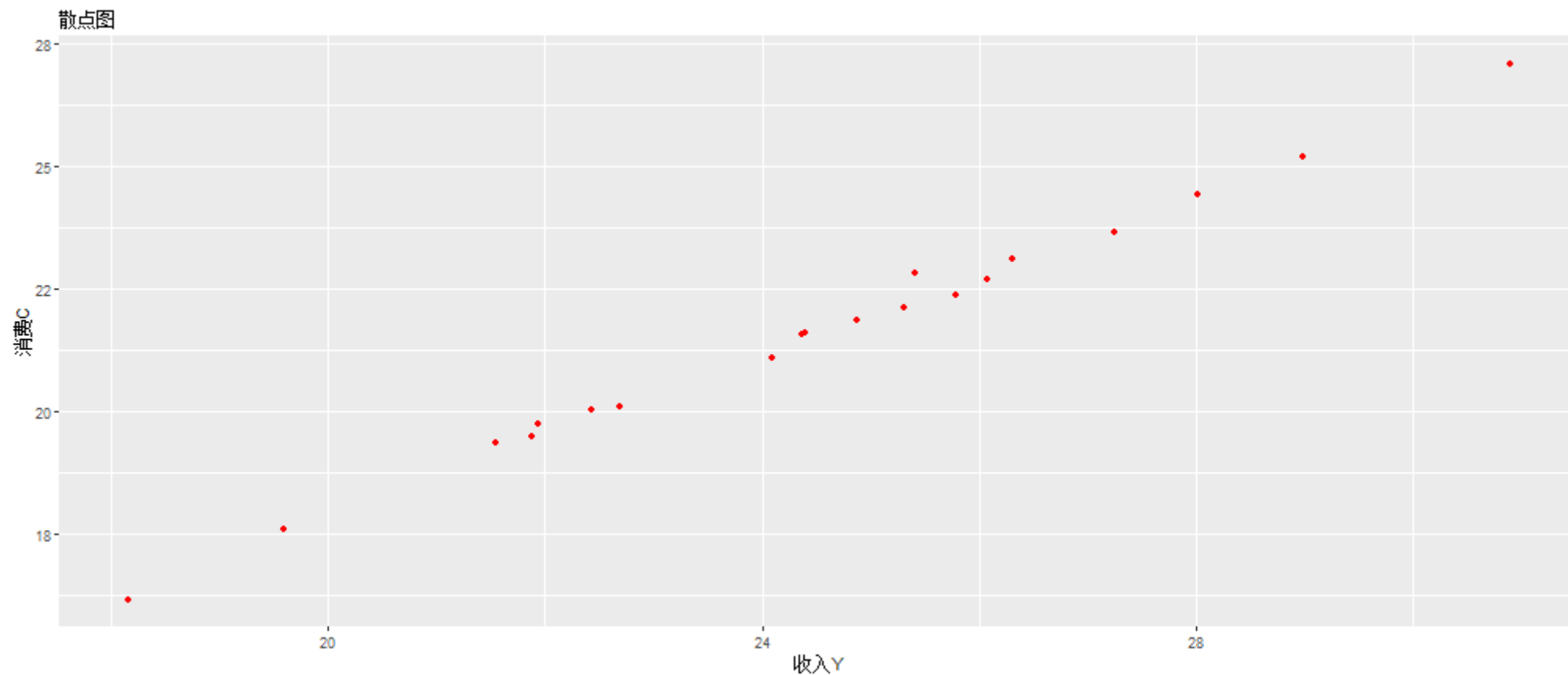
以及： $\sum y_t^2 = 184.0000$

以及： $\frac{\sum u_t y_t}{\sum y_t^2} = 0.0207$

因此： $\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum u_t y_t}{\sum y_t^2} = 0.8 + 0.0207 = 0.8207$

这也意味着： $\hat{\beta}_1$ 比真值 $\beta_1 = 0.8$ 有0.0207的偏差。

数值模拟：散点图



数值模拟：回归报告1

下面我们利用模拟的数据，进行回归分析，得到原始报告：

```
Call:
lm(formula = mod_monte$mod.C, data = monte)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.2700 -0.1586 -0.0013  0.0927  0.4631

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    1.4940     0.3541    4.22  0.00052 ***
Y               0.8207     0.0143   57.21 < 2e-16 ***
---
Signif. codes:
  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.2 on 18 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.995,    Adjusted R-squared:  0.994
F-statistic: 3.27e+03 on 1 and 18 DF,  p-value: <2e-16
```

数值模拟：回归报告2

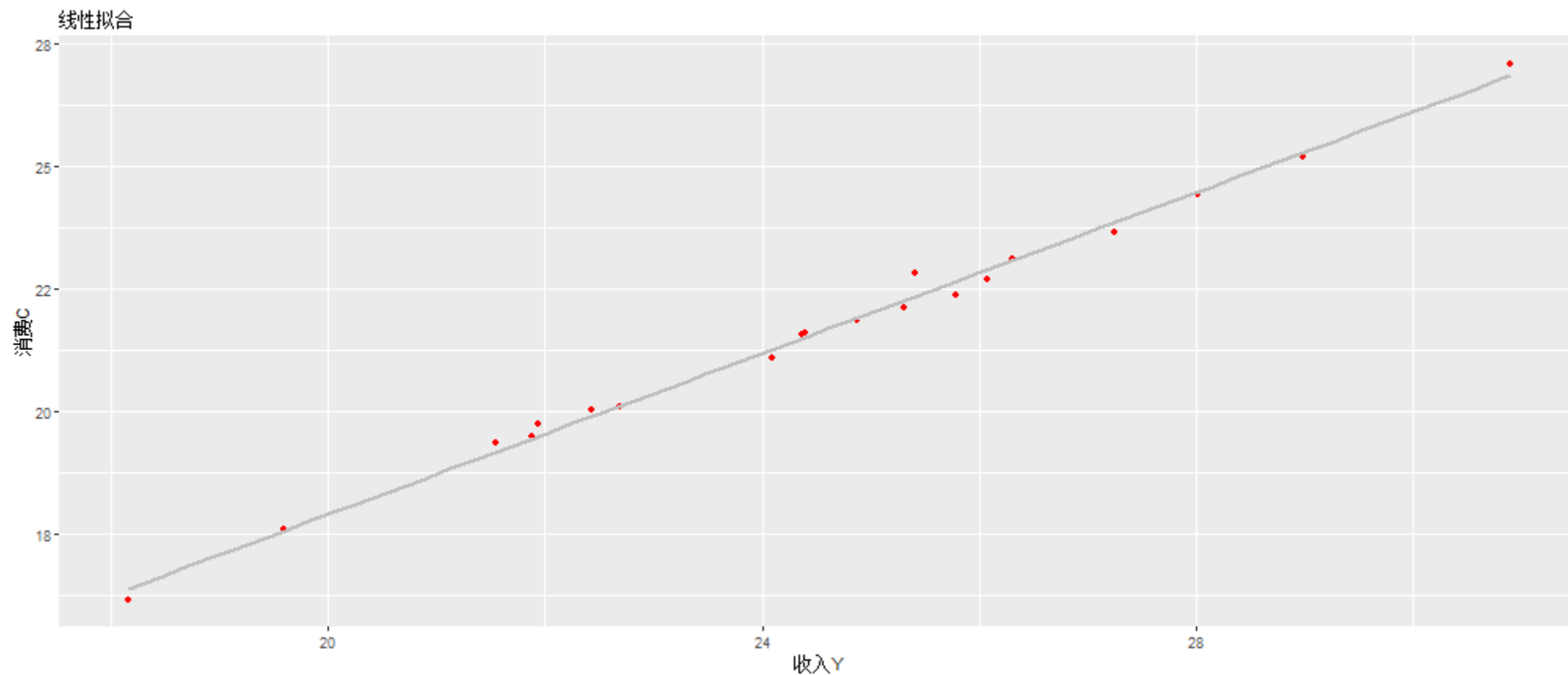
下面我们对原始报告进行整理，得到精简报告：

$$\begin{array}{rcl} \hat{C} = & + 1.49 & + 0.82Y \\ (t) & (4.2188) & (57.2090) \\ (se) & (0.3541) & (0.0143) \\ (fitness) & n = 20; & R^2 = 0.9945; \bar{R}^2 = 0.9942 \\ & F^* = 3272.87; & p = 0.0000 \end{array}$$

这样直接OLS回归的结果也表明是有偏的。

数值模拟：样本回归线

这是样本回归线。



结论和要点

- 与单方程模型对比，联立方程模型涉及多于一个因变量或内生变量，从而有多少个内生变量就需要有多少个方程。
- 联立方程模型的一个特有性质是，一个方程中的内生变量(即回归子)作为解释变量而出现在方程组的另一个方程之中。
- 这使得内生解释变量变成了随机的，而且常常和它作为解释变量所在方程中的误差项有相关关系。
- 在这种情况下，经典OLS未必适用，因为这样得到的估计量是不一致的。就是说，不管样本容量有多大，这些估计量都不会收敛于其真实总体值
- 凯恩斯模型的蒙特卡洛模拟，说明了当一个回归方程中的回归元与干扰项相关时(这正是联立方程模型的典型情况)，用OLS方法估计其参数会内在导致偏误。

本章结束

