第 3 章　线性规划导论

线性规划的发展已成为 20 世纪中叶最重要的科学进步之一,我们也赞同这一说法。从 1950 年开始,线性规划就起到了不同寻常的作用。如今,线性规划已成为标准工具,并为世界上工业化国家的许多规模化的公司财团节省了数千或数百万美元,并日益广泛地应用于社会其他领域。大量基于计算机的科学计算均致力于线性规划的应用。有很多关于线性规划的教材,发表了数以百计的描述线性规划重要应用的文章。

这一知名工具的本质是什么?它能解决哪类问题?在你看了随后的事例之后,你将会洞察这些问题的答案。尽管如此,一个简要的归纳可以为你提供洞察视角。简单地说,如何在竞争活动中分配有限资源的这类问题,最常见的就是找到最佳的可能方式(如最优化问题)。更准确地说,这类问题可以归纳为对竞争资源的活动选定合适的活动水平,而这些资源又是活动运行所必需的。选定的活动水平将限定每项活动中各种资源的消耗量。这一描述适用于多种情形,范围涵盖从生产设备的分配到基于内需的国家资源分配,从证券组合投资分析到运输模式选定,从农业生产计划到放射治疗等。尽管如此,这些情形的共同特征就是,必须要选定活动的水平以为其分配资源。

线性规划运用数学模型来描述相关问题。形容词"线性"意味着模型中所有的数学函数都必须是线性函数。"规划"一词不是指计算机程序(英语中规划与程序同词),其本质上是"计划"的同义词。因而,线性规划是指对活动进行计划以获得最优结果。例如,在所有的可能选项中,到达最佳特定目标(依据数学模型)。

尽管为活动分配资源是现实应用中最普遍的问题类型,但线性规划在其他方面也有很多重要的应用。实际上,任何问题只要其数学模型符合线性规划模型一般形式,这样的问题都是线性规划问题(于是,线性规划问题及其模型通常简称线性规划来代替,甚至仅仅用 LP 表示)。因此,一个相当有效率的解法产生了,称为单纯形法(Simplex Method),它也可用于求解大规模线性规划问题。这也成为近年来线性规划产生巨大影响的原因。

由于线性规划的重要性,我们在本章和随后 7 章专门论述它。在本章介绍线性规划问题的一般特征之后,第 4 章和第 5 章着重介绍单纯形法,第 6 章和第 7 章讨论单纯形法初步应用之后,再对线性规划问题做进一步分析。第 8 章讲述了单纯形法诸多广泛的应用领域,并介绍了内点法,与单纯形法相比,它能够解决更大型的线性规划问题。第 9 章和第 10 章探讨了一些特殊类型的线性规划问题,其重要性值得单独研究。

在随后的章节中,你将会看到线性规划在其他运筹领域的应用。

我们通过研究一个微小的线性规划问题的原形示例作为本章的开始。这个示例足够小以至于能够用图形直接求解。在 3.2 节和 3.3 节中给出了一般线性规划模型及其基本假设。3.4 节给出了线性规划问题应用的补充示例。3.5 节描述了适度规模的线性规划模型能够很方便地通过电子表格得到演示和求解。尽管如此,现实遇到的某些线性规划问题往往需要巨大的模型。3.6 节举例说明了大型模型产生,以及如何用 MPL(本节将描述其建模过程)和 LINGO(本书网站中本章的补充材料 2 描述了其建模过程)等专门建模语言来成功构建模型。

3.1 原形示例

Wyndor Glass 公司生产高质量的玻璃产品,包括窗户和玻璃门。公司有 3 个工厂。铝框和硬件在工厂 1 生产,木框在工厂 2 生产,工厂 3 生产玻璃并组装产品。

由于利润下滑,公司高层决定调整生产线。终止生产不赢利的产品,释放的产能用于生产 2 个有巨大销售潜力的新产品。

产品 1:带铝框的 8 英尺玻璃门。

产品 2:带木框的 4×6 英尺玻璃窗户。

产品 1 需要工厂 1 和工厂 3 的部分产能,不需要工厂 2 的产能。产品 2 只需要工厂 2 和工厂 3 的产能。市场分析得到的结论是,工厂生产的产品均能卖掉。尽管如此,由于两种产品将竞争工厂 3 的产能,不清楚两种产品如何组合生产才能获得最大利润。因此,组织一个运筹小组来研究这个问题。

运筹小组开始时,同高管讨论明确该项研究的管理目标。经过讨论明确了对以下问题的界定。

决定两种产品的生产率是基于总利润最大化来考虑,但也受制于 3 个工厂有限的产能(每种产品将以 20 个作为一批生产,那生产率定义为每周的批数)。生产率的任何组合都能满足约束条件的限制,包括其中一个产品不生产而尽可能多地生产另一种产品。

运筹小组还明确了需要收集的数据。

(1) 每个工厂能够为这些新产品提供的每周生产时间的小时数(这些工厂的大部分时间已经给了当前的产品,因此新产品的可用产能相当有限)。

(2) 每个工厂生产每批新产品生产时间的小时数。

(3) 每批新产品的利润数(之所以选择批次利润作为合适的度量指标,是因为运筹小组总结出,每增产一批产品所增加的利润大体上与总批数无关)。由于在新产品投产和销售之初不发生实际性的成本,所以每种产品的总利润大致等于批次利润乘以产品批次数。

应用案例

位于科罗拉多州格里利市的 Swift 公司是一家多种经营的蛋白质厂商。到目前为止,牛肉及相关产品的年均销售额超过 80 亿美元,在公司业务中占比最大。为了提高公司的销售额及生产效率,公司的高层管理者认为需要达到 3 个目标:一是让公司的业务代表告知超过 8000 名顾客关于当前以及未来可用库存的正确信息,并考虑要求交货日期和交付时产品的最大库存时间;二是为每个工厂制定超过 28 天高效的员工排班时间表;三是当牛的可用数量和工厂的处理能力给定时,要准确确定一个工厂能否按照需求订单明细规定的日期和时间配送相应数量的订货。

为了满足这 3 个挑战性的目标,运筹小组开发了一个由 45 个线性规划模型集成的系统,这些模型主要基于 3 个模型公式,在接到订单时,能实时为 5 个工厂动态分配牛肉生产活动。系统运行第一年实现总账面效益达到 1274 万美元,其中 1200 万归功于产品结构优化。其他的收益包括减少订单丢失、减少价格折扣和更好地按时递送。

资料来源:A. Bixby, B. Downs, and M. Self, "A Scheduling and Capable-to-Promise Application for Swift & Company," *Interfaces*, **36**(1):39-50, Jan.-Feb. 2006.(我们的网址提供了本文链接:www.mhhe.com/hillier。)

为了获取对这些数据合理的估计,需要得到公司各部门相关人员的帮助。制造部门的员工提供了上面的第一类数据。第二类数据需要精于生产工序设计的制造工程师来对其进行估计。这些工程师和市场部门的人员通过分析成本数据,以及来自市场部门的定价信息,由会计部门对第三类数据进行估计。

表 3.1 汇总了收集的数据。

表 3.1 Wyndor Glass 公司问题的数据

工厂	每批生产时间/h		每周可用生产时间/h
	产品 1	产品 2	
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
每批利润/美元	3000	5000	

运筹小组迅即意识到这是典型的产品结构类线性规划模型,接着构建了相应的数学模型。

3.1.1 作为线性规划问题建模

从前文对问题的定义中可以看出,为获得最大的总利润,需要决定每周生产的相应产品的批数。因此,来针对该问题构建数学(线性规划)模型,令

x_1 = 每周产品 1 的生产批数

x_2 = 每周产品 2 的生产批数

Z = 每周生产这两种产品的总利润(千美元)

因而,x_1、x_2 是模型的决策变量,根据表 3.1 最后一行,可得

$$Z=3x_1+5x_2$$

我们的目标是选择 x_1 和 x_2 的值来使 $Z=3x_1+5x_2$ 最大,而它们的值受约束于 3 个工厂有限的生产能力。表 3.1 表明,生产每批产品 1 需要消耗工厂 1 生产时间 1h,而工厂 1 每周生产时间只有 4h 可用。这一约束在数学上可用不等式表示为 $x_1\leqslant 4$。同理,工厂 2 的约束条件是 $2x_2\leqslant 12$。工厂 3 每周的生产时间数,通过选取 x_1 和 x_2 表达新产品的生产率可表示为 $3x_1+2x_2$,所以,工厂 3 约束的数学表示为 $3x_1+2x_2\leqslant 18$。最后,由于生产率不能为负,决策变量受到非负约束:$x_1\geqslant 0$ 和 $x_2\geqslant 0$。

用线性规划的数学语言归纳一下,问题描述为选择 x_1 和 x_2 的值,使

$$\text{Max } Z=3x_1+5x_2$$

s. t.

$$x_1\leqslant 4$$
$$2x_2\leqslant 12$$
$$3x_1+2x_2\leqslant 18$$

且

$$x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0$$

(注意:线性规划模型中 x_1 和 x_2 系数如何确定以充分反映表 3.1 的信息。)

这个问题是典型的资源分配问题,线性规划问题中的常见类型。资源分配问题的重要特点就是大多数或者全部约束方程是资源约束。资源约束的右侧表示某种资源的可能使用数量,资源约束的左侧表示可供使用的资源数量,因此左侧必须小于等于右侧。产品结构问题属于资源分配问题的一类,可在 3.4 节中看到其他类的资源分配问题以及其他类线性规划问题的示例。

3.1.2 图解法

这个很小规模的问题有两个变量,仅仅是二维的,因此图解法就能够对其进行求解。这个过程包括构建以 x_1 和 x_2 为轴的二维图。第一步是求出(x_1,x_2)符合约束条件的取值范围,这是通

过对每个约束条件许可值范围描画边界线得到的。首先，注意到非负限制 $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$，要求位于坐标系的正数区域(包括两个坐标轴)，也就是第一象限。接着，考虑约束条件 $x_1 \leqslant 4$ 意味着 (x_1, x_2) 的取值不能位于直线 $x_1 = 4$ 的右侧。结果如图 3.1 所示，图中阴影区域包含可行的 (x_1, x_2) 取值。

用同样的方式，约束条件 $2x_2 \leqslant 12$(或相当于 $x_2 \leqslant 6$)意味着直线 $2x_2 = 12$ 应增加为可行域的边界。最后的约束条件 $3x_1+2x_2 \leqslant 18$，要求绘制位于 $3x_1+2x_2 = 18$(另一条线)上 (x_1, x_2) 表示的点以完成约束边界(注意：满足约束条件 $3x_1+2x_2 \leqslant 18$ 的所有点在直线 $3x_1+2x_2 = 18$ 上或者在它的下方，因此约束线上方的点不满足不等式)，(x_1, x_2) 的所有允许取值区域被称为可行域，如图 3.2 所示(在运筹学教程中图解法示例部分，提供了构建可行域更详细的说明示例)。

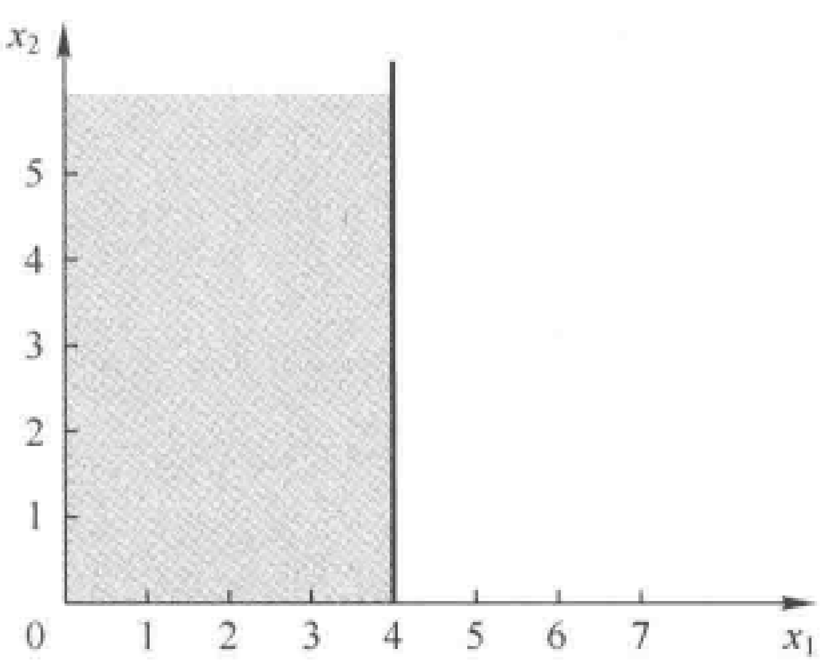


图 3.1　阴影区域给出由 $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$，$x_1 \leqslant 4$ 确定的 (x_1, x_2) 允许取值

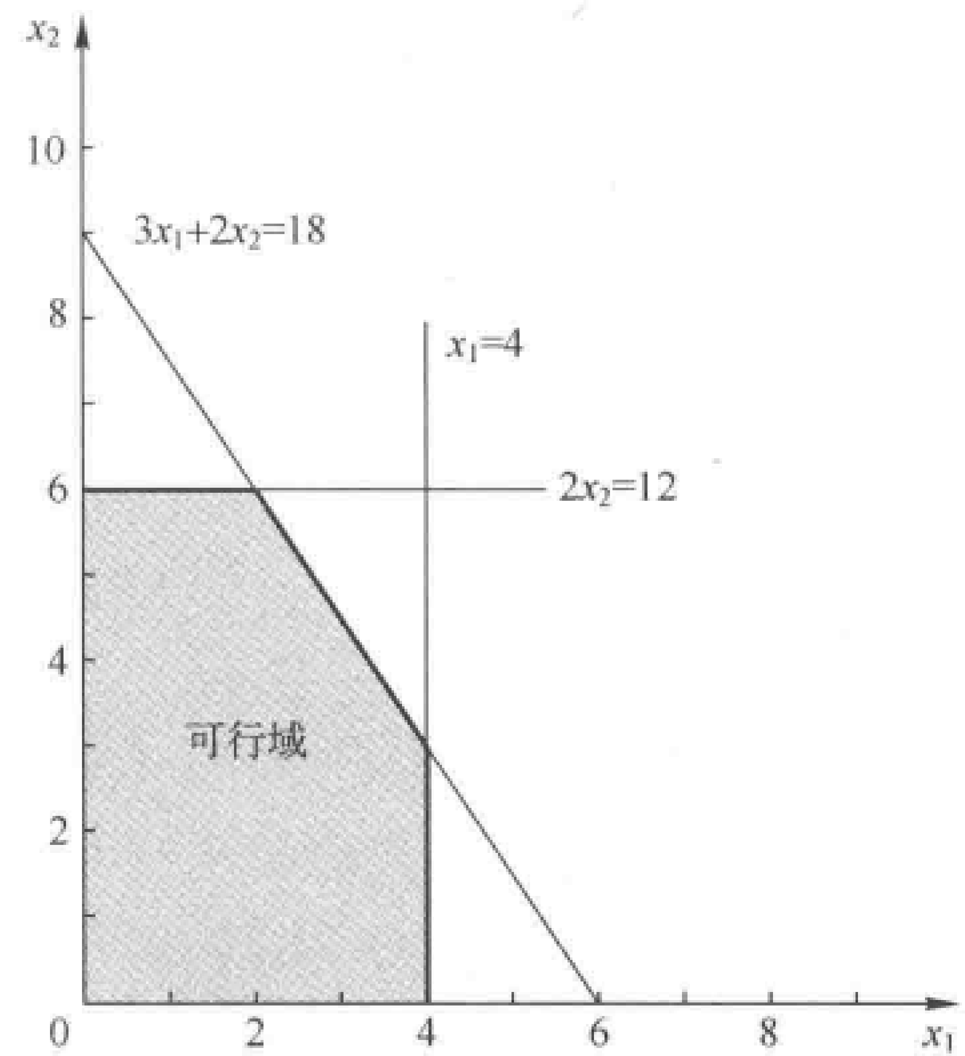


图 3.2　阴影区域给出由 (x_1, x_2) 允许值的集合，称为可行域

最后的步骤是在可行域中找出使目标函数 $Z = 3x_1 + 5x_2$ 取得最大值的点。为了能够发现如何使这一步骤有效地完成，需通过反复实验。例如，实验 $Z = 10 = 3x_1 + 5x_2$ 来看在可行域内是否存在 (x_1, x_2) 值能达到 10。通过绘出直线 $3x_1 + 5x_2 = 10$(图 3.3)，可以看到在可行域内这条线上有许多点满足这一条件。通过任意选择直线 Z=10 获得了希望得到的结果，接下来应任意选择更大的 Z 值，如 $Z = 20 = 3x_1 + 5x_2$ 进行试探。图 3.3 表明直线 $3x_1 + 5x_2 = 20$ 的一部分线段位于可行域内，因此，Z 的最大可行值不会低于 20。

现在注意在图 3.3 中刚建立的两条直线是平行的。这并非巧合，因为以这种方式构建的任何直线，对于选定的 Z 值都有 $Z = 3x_1 + 5x_2$ 的形式，这意味着 $5x_2 = -3x_1 + Z$，或者等价为

$$x_2 = -\frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}Z$$

最后的等式，称为目标函数的斜截

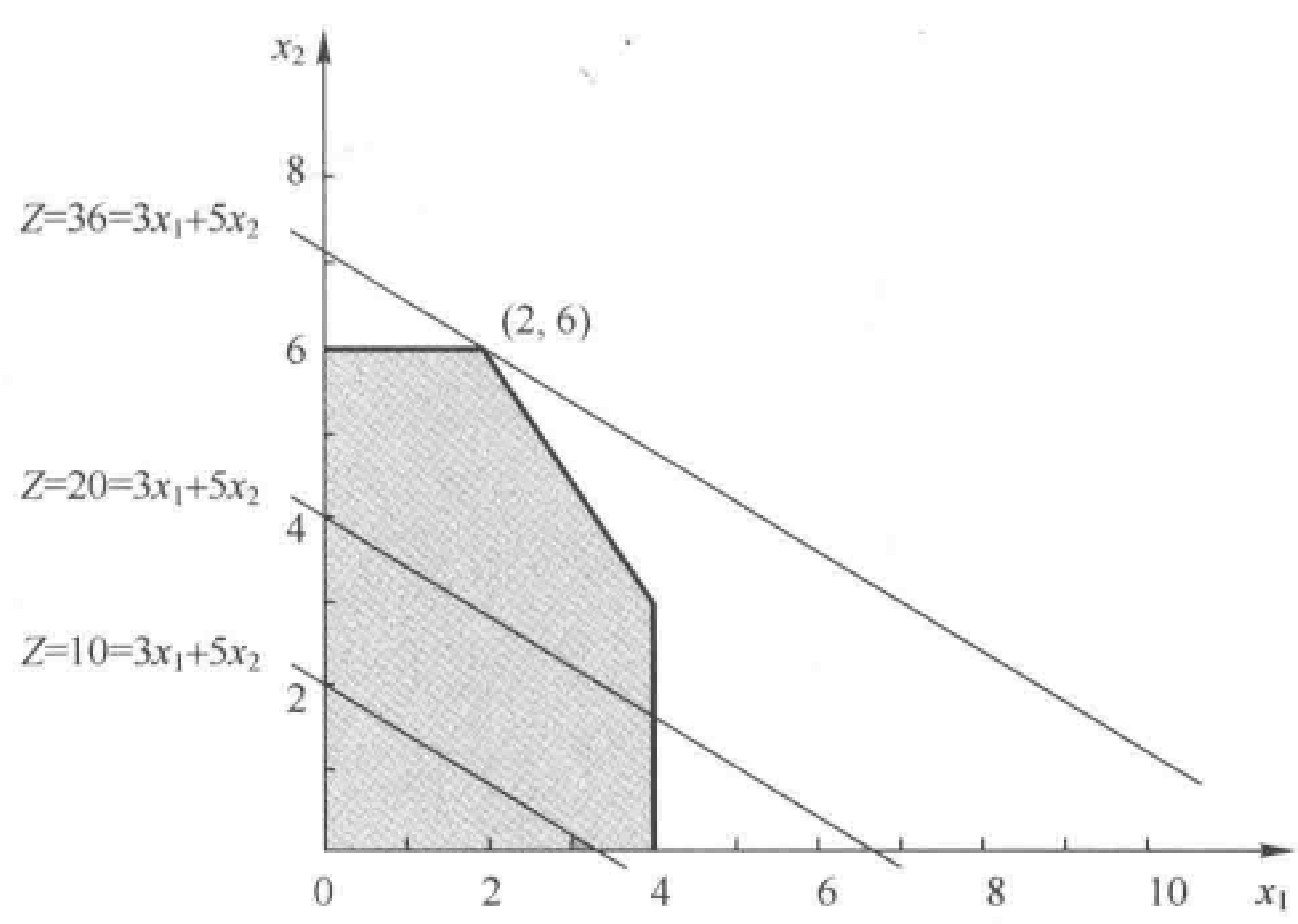


图 3.3　使 $3x_1+5x_2$ 最大的 (x_1, x_2) 的值是 $(2,6)$

形式,表明直线的斜率是$-\frac{3}{5}$(每增加 1 个单位的 x_1,x_2 相应变化$-\frac{3}{5}$个单位),而直线在 x_2 轴上的截距是$\frac{1}{5}Z$ ($x_1=0$ 时,$x_2=\frac{1}{5}Z$)。事实上,斜率固定为$-\frac{3}{5}$意味着以这种方式建立的所有直线都是平行的。

再次,比较在图 3.3 中的直线 $10=3x_1+5x_2$和 $20=3x_1+5x_2$,我们注意到,被赋予较大值 Z 的直线($Z=20$)与其他直线相比($Z=10$),距离原点更高更远。这一事实还可以通过目标函数的斜截形式反映出来,这意味着,当为 Z 选择的值增加时,x_1 轴的截距($\frac{1}{5}Z$)也增加。

这些结果意味着在图 3.3 中构建直线的反复实验过程中,仅仅是画出至少包含可行域中一个点的一簇平行线,并选择 Z 取得最大值所对应的直线。图 3.3 表示这条直线穿过点(2,6)意味着最优解为 $x_1=2$,$x_2=6$。这条线对应的等式为 $3x_1+5x_2=3(2)+5(6)=36=Z$,意味着 Z 的最优值是 $Z=36$。点(2,6)位于两条线 $2x_2=12$ 和 $3x_1+2x_2=18$ 的交点上,如图 3.2 所示,因此,这个点能被代数计算出来因为它是两个等式的公共解。

刚才看到寻找最优点(2,6)的反复实验过程,你现在可以用这个方法流程化地去求解其他问题了。用尺子足够形成一条线来建立斜率,而不是画几条平行线。然后在可行域内,沿着使 Z 增加的方向,以固定的斜率移动尺子(当目标函数为求极小值时,沿着使 Z 减小的方向移动尺子)。当它仍然穿过区域中的点的最后一瞬间停止移动尺子,这个点就是期望最优解。

这个过程通常称为线性规划的图解法。它可用于解决具有两个变量的任意线性规划问题。在增加一些难度的情况下,可以对它进行扩展来解决 3 个变量但不多于 3 个变量的问题(下一章我们将聚焦用单纯形法解决较大规模的问题)。

3.1.3 结论

运筹小组用这个方法找到了最优解 $x_1=2$,$x_2=6$,$Z=36$。这个解意味着 Wyndor Glass 公司生产产品 1 和产品 2 的生产率分别是 2 批/周和 6 批/周,总利润是每周 36000 美元。根据这个模型,两种产品的其他产品结构都没有这种组合赢利多。

尽管如此,在第 2 章强调过,一个良好的运筹研究不是只简单地为初始模型找到解就停止了。在第 2 章描述的 6 个阶段都十分重要,包括模型彻底测试(见 2.4 节)和优化后分析(见 2.3 节)。

在充分认清实际情况后,运筹小组现在准备更认真地(见 3.3 节继续研究)评价模型的有效性,对表 3.1 估计效果的基础上进行灵敏度分析,这不同于其不精确、环境变化等的分析。(7.2 节继续讨论)。

3.1.4 用运筹学课件继续学习过程

本书的诸多特点之一就是你会发现用本书网站上的运筹学课件是非常有帮助的。这个课件的关键之处就是有一个称为 OR Tutor 的程序。这个程序包括本节介绍的图解法的一个完整演示示例。这个示例先是引入问题、构建问题的线性规划模型,然后应用图解法逐步求解模型。像本书其他章节的许多其他求解示例一样,计算机的举例演示着重于那些难以用纸面文字来传递的概念。可参考附录 1 中有关软件的文档材料。

如果想看到更多的示例,可以访问本书网站的解题示例部分。这部分包含一些有完整求解过程的例题,几乎涵盖本书的每一章,它们是对本书例子和 OR Tutor 中例子的补充。本章的示例是以一个相对易懂的问题开始的,包括构建一个小的线性规划模型,然后用图解法求解。后续的例子将逐渐变得具有挑战性。

运筹学课件的另一关键部分是一个称为 IOR Tutorial 的程序。该程序的特征是它有许多交互程序来交互运行书中不同的求解方法,这使你能够高效地专心理解和执行算法逻辑,而由计算

机来进行数字运算。程序中还包含应用图解法求解线性规划问题的交互程序。一旦安装了这个程序后,第二程序将使你很快地用图解法运行对修订问题数据影响的敏感度分析。然后,可以打印工作以及家庭作业的结果。与 IOR Tutor 中的其他软件一样,这些软件是专门设计用来在完成家庭作业过程中,为你提供有效、愉快和有启发的学习体验。

当构建两个以上决策变量的线性规划模型时(无法用图解法),第 4 章介绍的单纯形法将使你仍然能很快地找到一个最优解。这样做有助于模型验证,因为找到一个无意义的最优解意味着在建模时出错了。

我们在 1.5 节中提到,运筹学课件介绍了 4 个特别流行的商业软件包——Excel 及其 Solver,一个强大的 Excel 嵌入软件称为 Analytical Solver Platform,LINGO/LINDO,MPL/ Solvers——用于求解各种运筹模型。所有这 4 个软件包都包含求解线性规划模型的单纯形法。3.5 节描述了如何借助 Solver 或者 ASPE 软件,应用 Excel 数据表格形式来建立和求解线性规划模型,其他软件包在 3.6 节中描述(MPL 和 LINGO)、本书网站上本章附录 1 和 2(LINGO)、4.8 节(LINDO 和 MPL 的各种求解工具)以及附录 4.1(LINGO 和 LINDO),MPL、LINGO 和 LINDO 本书网站提供了教程。此外,运筹学课件还包含了 1 个 Excel 文件、1 个 LINGO/LINDO 文件以及 1 个 MPL/Solvers 文件,演示如何用各软件包求解本章中的每个例子。

3.2 线性规划模型

Wyndor Glass 公司的问题是为了举例说明典型的线性规划问题(微型版本)。尽管如此,线性规划包含的内容太多以至于不能通过一个简单的例子完全说明它的特征。本节我们讨论线性规划问题的一般特征,包括线性规划数学模型的各种合理形式。

让我们从一些基本的术语和符号开始。表 3.2 的第一列总结了 Wyndor Glass 公司问题的构成部分。第二列介绍了适用于多数线性规划问题同样构成部分的更通用形式。关键词是资源和活动,m 表示能被使用的不同种类资源的数量,n 表示被考虑的活动的数量。一些典型的资源包括资金、特定的机器、设备、工具和人员。活动的例子包括特定项目的投资、特定媒体的广告、从特定的出发点到特定目的地的货物运输。在线性规划的任何应用中,所有的活动可能是一般类型的(如这 3 个例子中的任何一个),单独的活动可能是一般类别内的特定事物。

表 3.2 线性规划的常用术语

原型范例	一般问题
工厂的生产能力	资源
3 个工厂	m 种资源
产品产量	活动
2 种产品	n 个活动
产品 j,x_j 的生产率	活动 j,x_j 的水平
利润 Z	绩效 Z 的整体度量

正如本章引言中描写的一样,线性规划最常见的应用包括将资源分配给活动时,一种可用资源的数量是有限的,所以要将资源仔细地分配给活动。对分配的决策意味着选择活动的级别,从而达到总体绩效的最优值。

通常使用特定的符号来表示线性规划模型的不同组成部分。下面列出了这些符号,并相应给出了为活动分配资源等一般问题的解释:

Z=绩效 Z 的整体度量

x_j=活动 j 的级别($j=1,2,\cdots,n$)

c_j=活动 j 的级别增加1个单位引起的 Z 的增加

b_i=可分配给所有活动的资源 i 的数量($i=1,2,\cdots,m$)

a_{ij}=每单位活动 j 所消耗的资源 i 的数量

模型处理的是关于对活动水平作出决策的问题,因此 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为决策变量。如表3.3所总结的那样,c_j、b_i 和 a_{ij}的值($i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$)是模型的输入常量,因此 c_j、b_i 和 a_{ij}也称作模型的参数。

表3.3 为活动分配资源线性规划模型所需数据

资　源	单位活动的资源使用				资源可用数量
	活动				
	1	2	$\cdots$	n	
1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{21}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
每单位的活动对 Z 的贡献	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	

注意表3.3中与表3.1对应的部分。

3.2.1 模型的标准形式

正如处理Wyndor Glass公司问题的过程,我们现在能够为活动分配资源这个一般问题构建数学模型。特定地,该模型就是选择 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的值为

$$\begin{aligned} \text{Max } Z&=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \\ \text{s. t.}\quad a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&\leqslant b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&\leqslant b_2 \\ &\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n&\leqslant b_m \end{aligned}$$

且

$$x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0$$

我们称其为关于线性规划问题我们的标准形式①。任何情形只要符合该模型的数学公式都是线性规划问题。

注意:上一节建立的Wyndor Glass公司问题模型符合我们的标准形式,且 $m=3,n=2$。

现在可以总结线性规划模型的通用术语了。求最大值的函数 $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$ 称为目标函数。限制条件通常称为约束。前 m 个约束(左边关于所有变量的一个函数 $a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n$)有时称为约束函数(或者结构性约束)。类似地,$x_j\geqslant 0$ 限制条件称为非负约束(或非负条件)。

3.2.2 其他形式

现在我们马上增加一些实际上不符合前面模型标准形式的线性规划问题的自然形式。其他合理的形式如下。

① 称为我们的标准形式而不是标准形式是因为有些教材采用其他形式。

(1) 目标函数是最小化而不是最大化，即

$$\text{Min } Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

(2) 一些约束条件含有大于等于不等式，即

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n \geqslant b_i(\text{部分 } i \text{ 值})$$

(3) 一些约束条件是等式形式，即

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n = b_i(\text{部分 } i \text{ 值})$$

(4) 一些决策变量没有非负限制，即

$$x_j \text{ 无符号约束(部分 } i \text{ 值)}$$

任何混合了以上某些形式，而保留前面标准模型其他部分的问题仍然是线性规划问题。我们对“将有限的资源分配给竞争性活动”术语的解释可能不再适用，或者根本不能用了；但如果不考虑其解释或上下文关系，所需的只是对问题的数学描述满足允许形式。因此，一个线性规划问题的规范定义是模型的每个组成部分符合标准形式，或符合上面列出的其他合法形式之一。

3.2.3　模型的解相关术语

你可能习惯用词语“解”来表示问题的最终答案，但在线性规划(及其扩展)中的习惯用语却非常不同。这里，决策变量($x_1,x_2,\cdots,x_n$)的任意特定值都称为一个解，无论它是否为期望的或许可的。通过使用合适的形容词来区别不同类型的解。

可行解是指满足所有约束条件的解。

不可行解是指至少一个约束条件不满足的解。

例题中，图 3.2 中的点(2,3)和点(4,1)是可行解，点(-1,3)和点(4,4)是不可行解。

可行域是所有可行解的集合。

例题中，图 3.2 中的整个阴影区域就是可行域。

一个问题可能没有可行解。在本例中，如果新产品要求每周达到至少 50000 美元的净利润补足当前产品线的不足部分，将可能发生没有可行解的情况。相应的约束为 $3x_1+5x_2\geqslant 50$，这将干掉整个可行域，因此，没有新产品的组合优于当前。这个情况如图 3.4 所示。

已知有可行解，线性规划的目的就是找到最佳可行解，正如模型中的目标函数值所度量的那样。

最优解是指目标函数取得最有利值的可行解。

当目标函数为求极大化时，最有利值就是最大值，如果目标函求极小化时，最有利值就是极小值。

大多数问题只有一个最优解，但也有可能不止一个。如本例中当每批产品 2 的利润变为 2000 美元时，这种情况将会出现。这将使目标函数变为 $Z=3x_1+2x_2$，因此连接点(2,6)与点(4,3)的线段上所有的点都是最优的。这种情况在图 3.5 中进行了说明。正如在这种情况下，任何有多个最优解的问题将有无穷多个解，每一个解都有相同的目标函数值。

另一种可能是问题没有最优解，它发生在如果没有可行解或约束条件不能阻止目标函数值

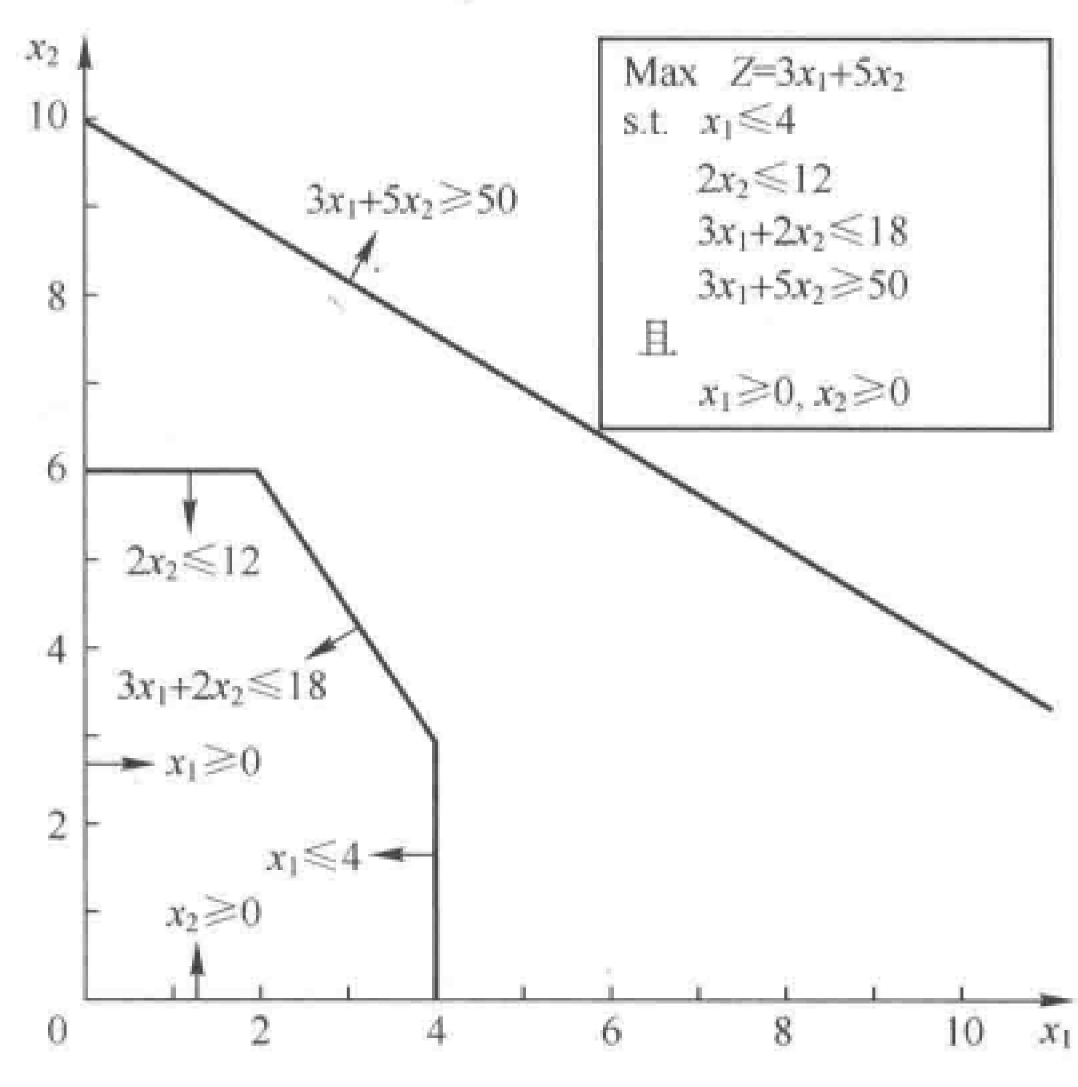


图 3.4　如果给问题增加 $3x_1+5x_2\geqslant 50$ 的约束，则 Wyndor Glass 公司的问题将没有可行解

(Z)在有利的方向上(正的或者负的)无限增长的情况下。后一种情况被认为有无界 Z 或者目标无界。为了举例说明这种情况,将后两个约束条件从例子中删除,如图3.6所示。

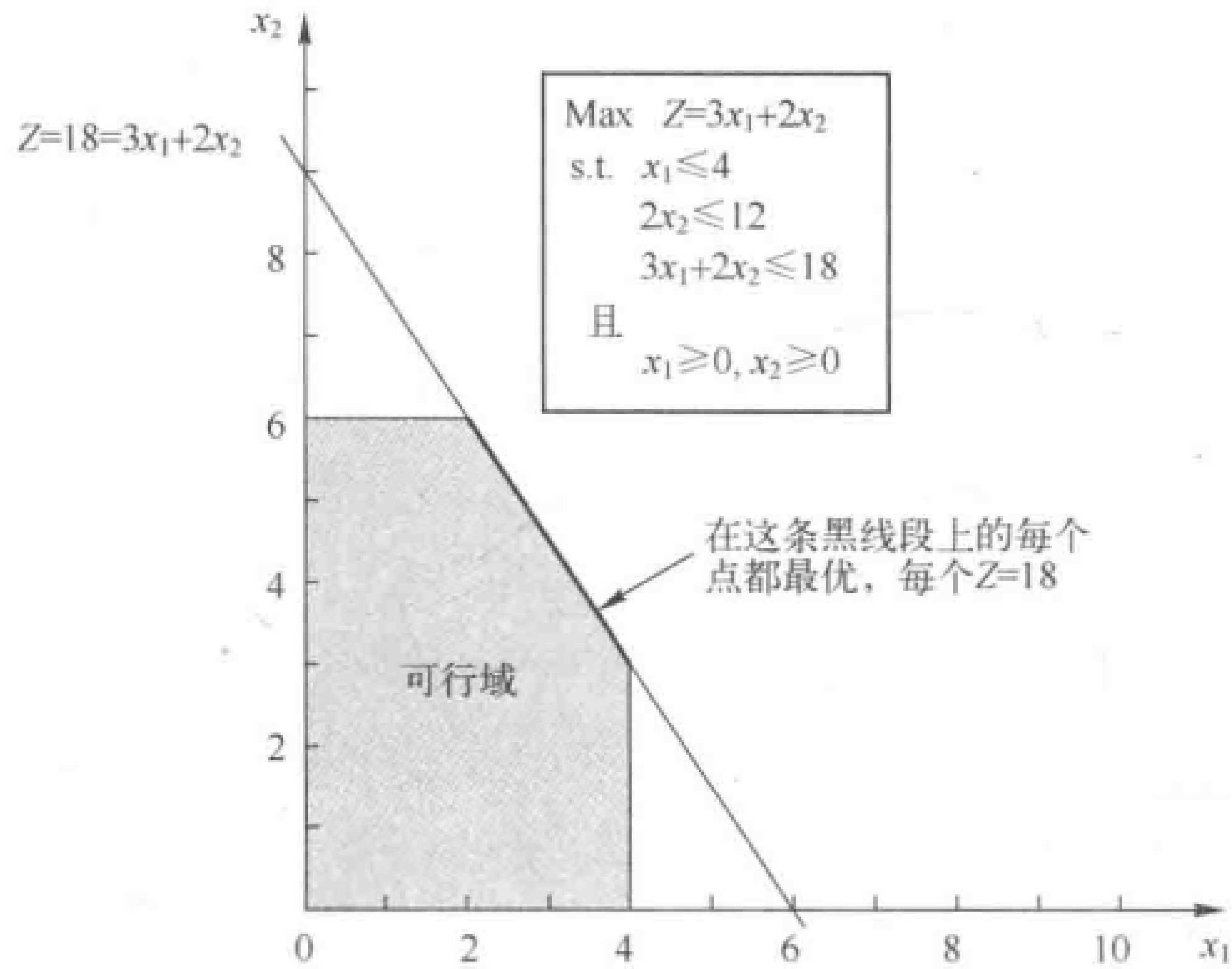


图3.5 Wyndor Glass公司的问题如果将目标函数改为 $Z=3x_1+2x_2$ 时将有多个最优解

我们接着介绍一种专用类型的可行解,它在用单纯形法求解最优解时发挥了重要作用。

角点可行解(CPF解)是指位于可行域角点上的解。

(CPF解通常被运筹专家们称为极点(或顶点),但我们在导论课程中更建议用角点这一术语。)图3.7标出了例题中的5个CPF解。

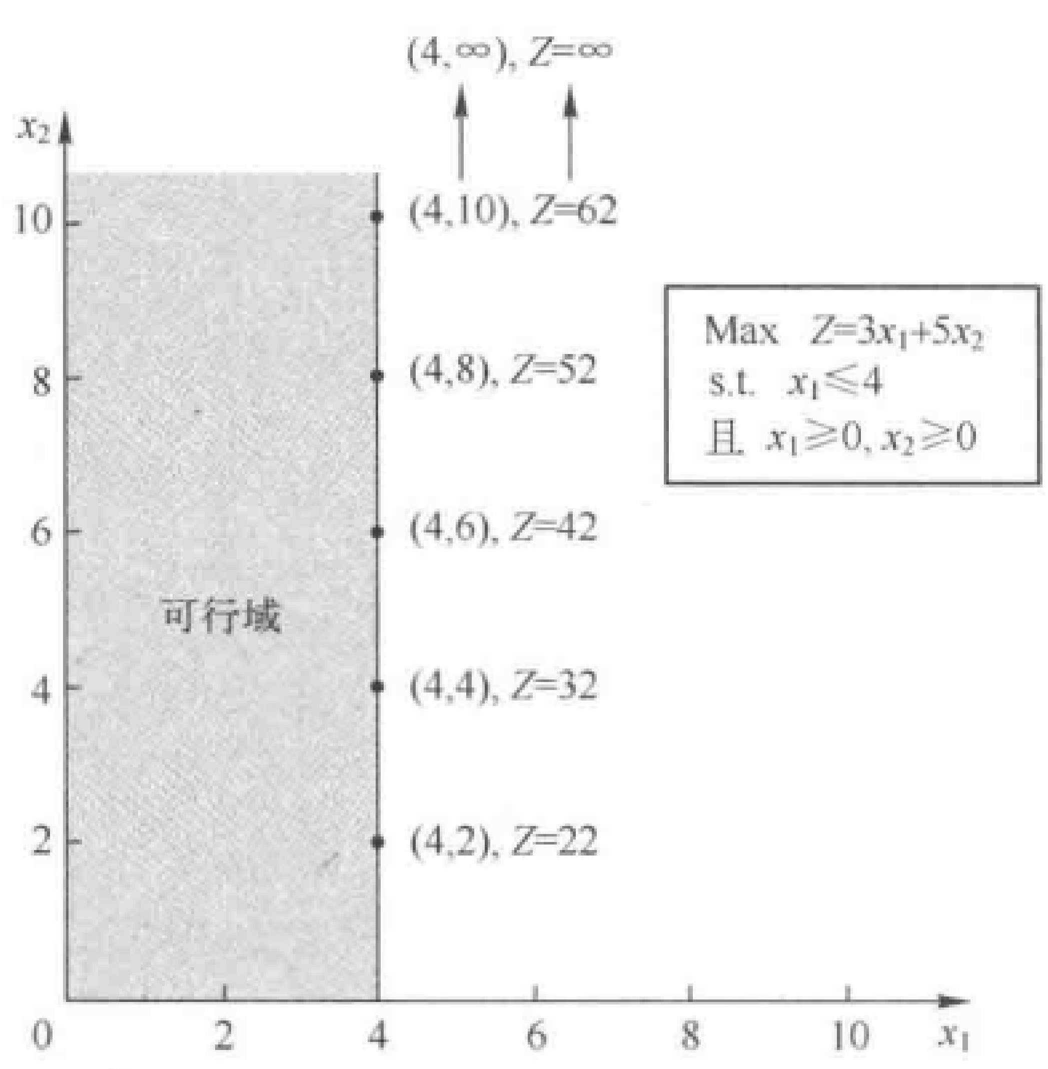


图3.6 如果仅有的约束条件为 $x_1 \leqslant 4$,Wyndor Glass公司的问题将没有最优解,因为 x_2 将会在可行域中无限增加而无法达到 $Z=3x_1+5x_2$ 的最大值

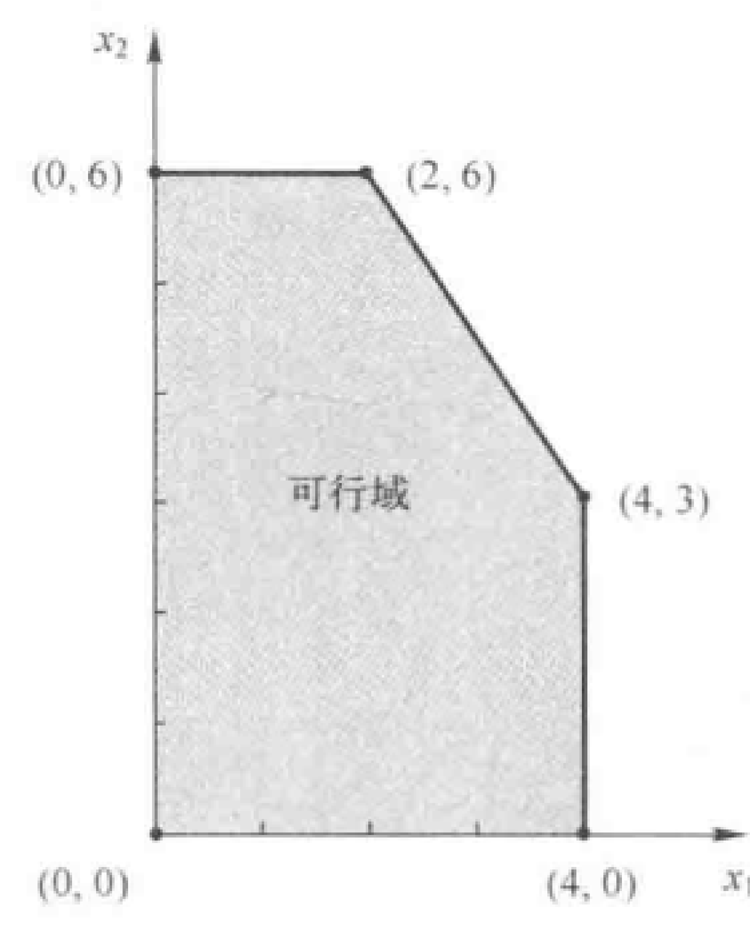


图3.7 5个点就是Wyndor Glass公司问题的5个CPF解

4.1节和5.1节将重点分析CPF解对各种规模问题的有用性质,包括如下与最优解的关系。

最优解与CPF解之间的关系:考虑任意有可行解和可行域有界的线性规划问题,该问题必定有CPF解并至少有一个最优解,而且,最佳CPF解一定是一个最优解。因此,如果一个问题有且只有一个最优解,它必有一个CPF解。如果一个问题有多个最优解,至少有两个一定是CPF解。

本例只有一个最优解,$(x_1,x_2)=(2,6)$,这是一个CPF解(思考图解法如何从CPF解找到最优解)。当本例改为有多个最优解时,如图3.5所示,这些最优解中的两个(2,6)和(4,3)是CPF解。

3.3　线性规划的假设

所有线性规划的假设实际上都蕴含在3.2节模型表达式中。特别地,从数学视角来看,所设仅仅是模型必须有一个线性目标函数服从于线性约束。尽管如此,从建模视角来看,线性规划模型的这些数学性质意味着关于建模问题的活动和数据的假设必须成立,其中包括活动水平变化效果的假设。强调这些假设是好的,这样你就能更容易地估计任何给定的问题多大程度上能应用线性规划。进一步说,我们仍需要看看 Wyndor Glass 公司的运筹小组为什么会认为线性规划建模提供了一个问题的满意表达方法。

3.3.1　比例性

比例性是关于目标函数和约束函数的假设,概括如下。

比例性假设:每个活动对目标函数 Z 值的贡献与 x_j 的活动水平成比例,如目标函数中 c_jx_j 所代表的。类似地,每个活动对每个约束条件左侧的贡献与 x_j 的活动水平成比例。因此,这个假设淘汰了线性规划模型任何函数(不论目标函数还是约束条件的左侧函数)中除了指数为1以外的任意项中的任何变量①。

为了说明这个假设,考虑 Wyndor Glass 公司问题目标函数($Z=3x_1+5x_2$)中第一项($3x_1$)。这一项代表了由生产产品1产生的每周利润(以千万美元表示),以每周 x_1 批的生产率表示。表3.4中的比例性满足列给出了3.1节中的假设情况,也就是说,这个利润确实与 x_1 成比例,以至于 $3x_1$ 成为目标函数的合适项。相反,接下来的3列给出了不同的假设情况,其中比例性假设不成立。

首先考虑表3.4中案例1列的情况。产品1的生产初始化将会有启动成本时,这种情况就会出现。例如,安装生产设施可能会有成本,还有安排新产品的配送也有成本。由于这些是一次性成本,因为它们需要按周进行分期偿还,以与 Z 相称(每周数千美元的利润)。假设进行分期偿还已经完成,并且总启动成本量使 Z 减少1,但不考虑初始成本的利润将是 $3x_1$。这意味着产品1对于利润 Z 的贡献当 $x_1>0$ 时是 $3x_1-1$,当 $x_1=0$ 时是 $3x_1=0$(没有启动成本)。这个利润函数②,如图3.8中给出的实曲线,当然与 x_1 不成比例。

表3.4　满足或违背比例性的例子

x_1	产品1的利润(每周千美元)			
	比例性满足	违背比例性		
		案例1	案例2	案例3
0	0	0	0	0
1	3	2	3	3
2	6	5	7	5
3	9	8	12	6
4	12	11	18	6

① 当函数包括交叉乘积项时,比例性应被解释为,在其他变量不变的情况下,函数值的改变与每个变量(x_j)的单独变化成比例。因此,交叉乘积项满足比例性要求,只要其中的每个变量指数为1(然而,交叉乘积项违背了可加性假设,随后会讨论)。

② 如果产品1对 Z 的贡献是当 $x_1\geqslant0$ 时为 $3x_1-1$,包括 $x_1=0$,然后固定常数-1,将从目标函数中去掉而不改变最优解,比例将被恢复。尽管如此,这个"固定"这里并不起作用,因为常数-1在 $x_1=0$ 时不能用。

乍一看,表3.4中案例2与案例1可能看起来相似。尽管如此,事实上,案例2是以不同的方式发生的。这里不再有启动成本,每周产品1的第一个单位的利润确实是3,作为原始假设。尽管如此,现在是一个正在增加的边际利润,如产品1的利润函数的斜率(图3.9中的实曲线)是随着 x_1 的增加而增加的。这种违反比例性的情况可能发生,因为较高的生产水平有时会获得规模经济,如使用更高效率的机器、较长的生产周期、大量购买原材料的数量折扣、学习曲线作用、工人因特定的生产模式而获得的经验使工作效率更高等。随着边际成本的下降,边际收益将会上升(假定边际收入为常数)。

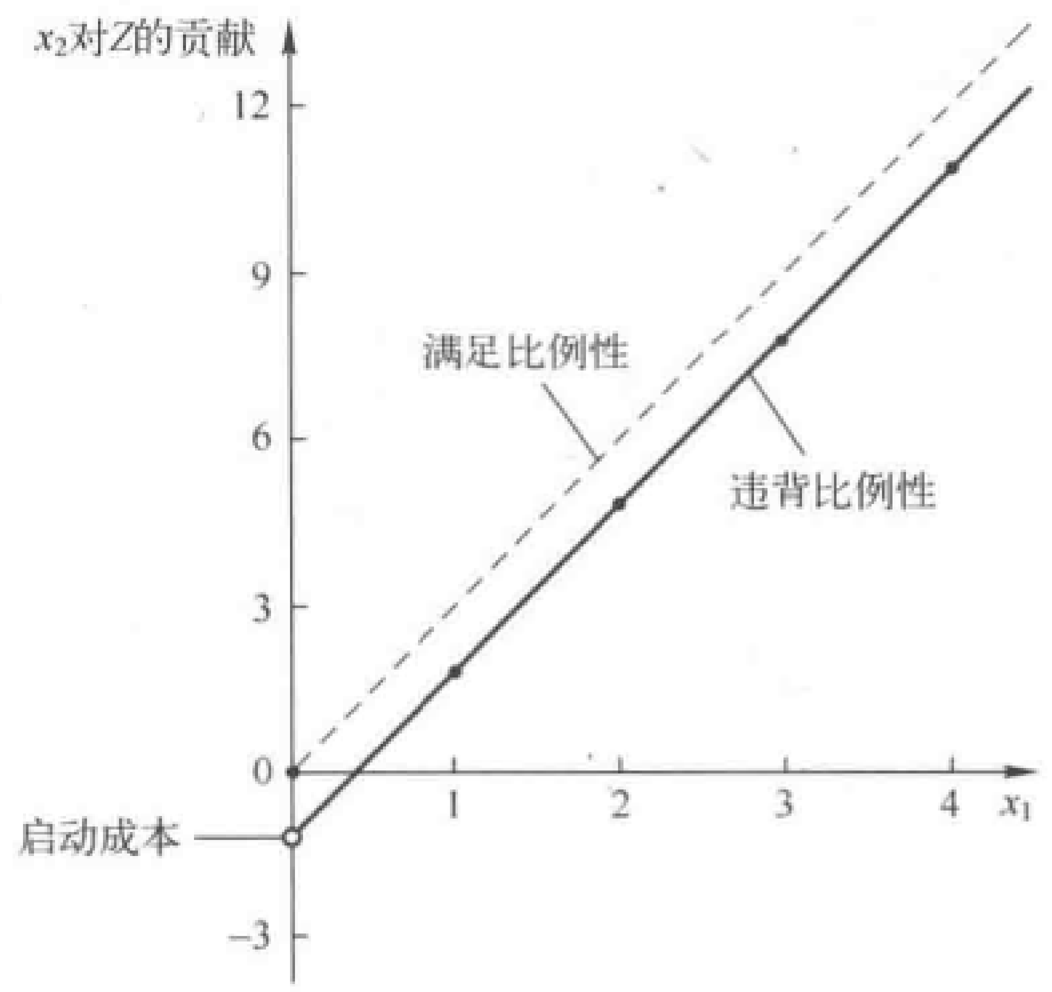


图3.8 实曲线违背了比例性假设由于 x_1 从0增加时产生了启动成本。这些点的值由表3.4案例1列给出

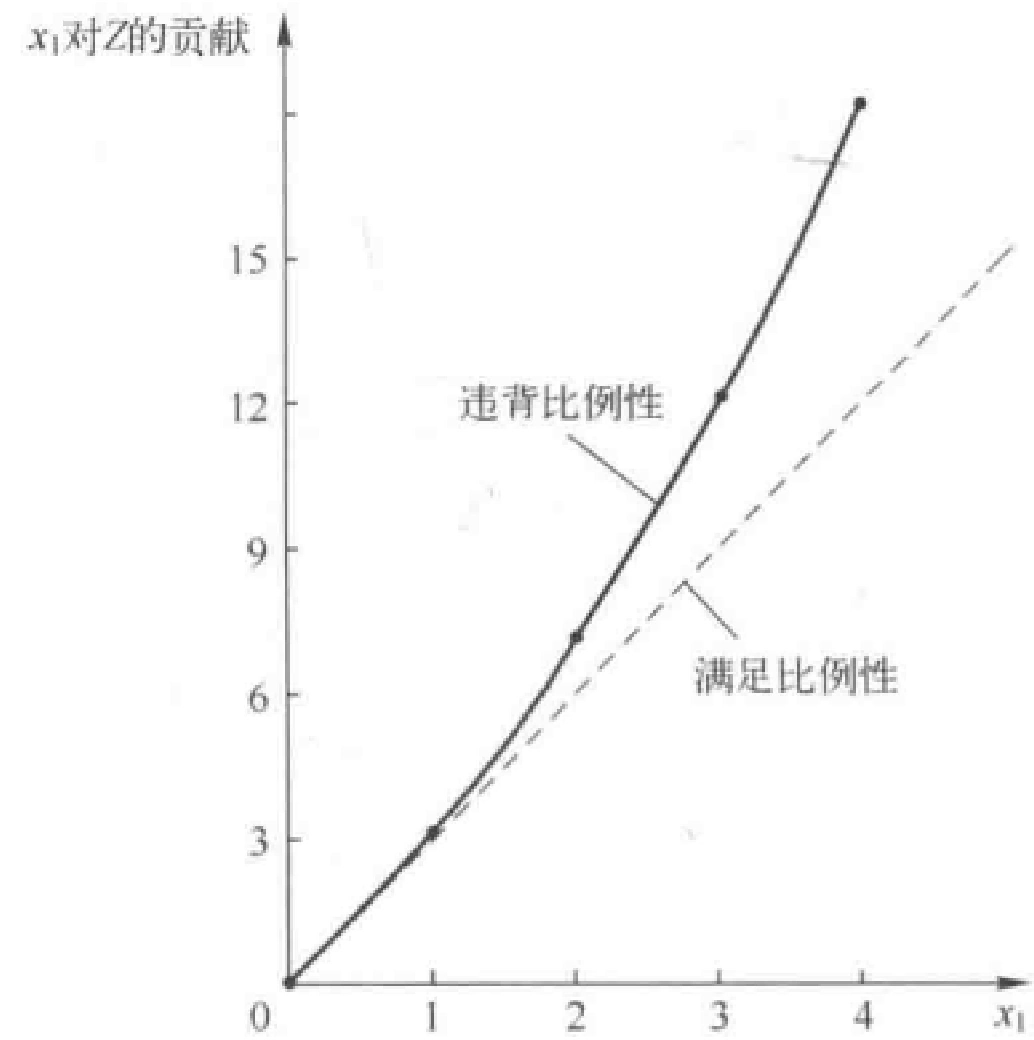


图3.9 实曲线违背了比例性假设因为其斜率(产品1的边际回报)随 x_1 增加保持增加。这些点的值由表3.4案例2列给出

再回到表3.4,案例3与案例2的情况相反,其边际回报是下降的。在这种情况下,产品1的利润函数的斜率(图3.10中给出的实曲线)随着 x_1 的增加而下降。这种违背比例性的情况可能发生,是因为销售水平的提高,营销成本也需要成比例上涨更多。例如,不做广告的情况下,产品1可能每周销售率为1($x_1=1$),然而,为了使销售率上涨为 $x_1=2$,可能需要适量的广告。当 $x_1=3$ 时,可能需要激烈的广告投放;当 $x_1=4$ 时,可能需要降低价格。

所有这3种情况都是违背比例性假设的例子。真实情况是什么?产品1(或者其他产品)的实际利润等于销售额收入减去各种直接成本和间接成本。不可避免地,这些成本中的一些部分,不是与生产率严格成比例的,这可能成为解释上面情况的一个理由。尽管如此,实际问题是,利润的所有部分被计算后,比例性是否与实际的建模目的相接近。对于 Wyndor Glass 公司的问题,运筹小组检查了目标函数和约束函数。结论是,在不严重歪曲事实时,比例性将确实要被假设。

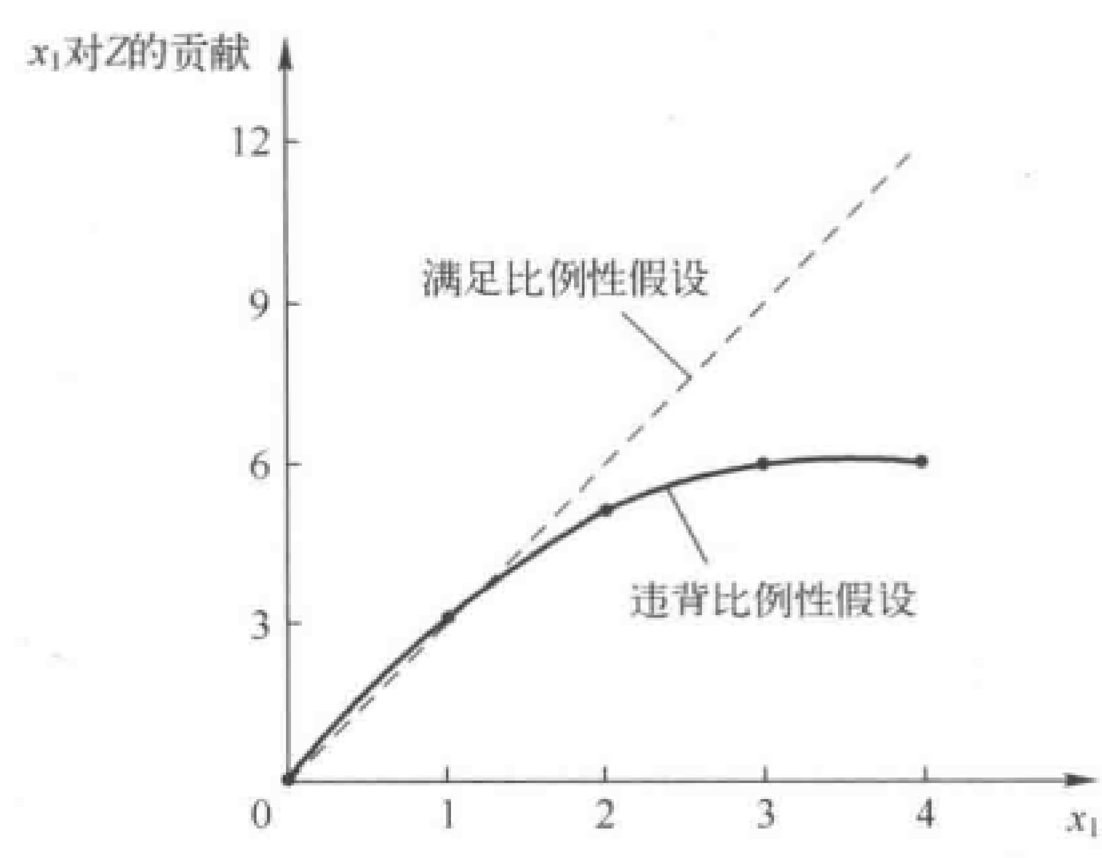


图3.10 实曲线违背了比例性假设因为其斜率(产品1的边际回报)随 x_1 增加而递减。这些点的值由表3.4案例3列给出

对于其他问题,当比例性假设作为合理的近似不成立时将会发生什么?大多数情况下,

这意味着必须使用非线性规划来代替(将在第 13 章讨论)。尽管如此,我们确实指出在 13.8 节中一类相当重要的非比例性问题,能够通过恰当地重新建立模型来用线性规划处理。进一步说,如果仅因为启动成本的增加而违背比例性假设,可以使用扩展的线性规划(混合整数规划),将在 12.3 节讨论(固定费用问题)。

3.3.2　可加性

尽管比例性假设淘汰了指数不为 1 的情况,但并没有禁止叉积项(这些项包括两个或多个变量之积)。可加性假设将淘汰后者出现的可能性,概括如下。

可加性假设:线性规划模型中的每个函数(无论是目标函数还是约束函数的左端项)是每个活动的各自贡献之和。

为了使定义更精确并澄清为什么我们需要担心这个假设,让我们来看一些例子。表 3.5 给出了 Wyndor Glass 公司问题的目标函数的一些可能情况。在每一种情况下,产品的贡献如 3.1 节假设的一样,即产品 1 为 $3x_1$,产品 2 为 $5x_2$。区别在最后一行,其给出了当两种产品联合生产时 Z 的函数值。满足可加性列给出了这样的情况,函数值通过前两行简单相加获得($3+5=8$),所以如之前假设的 $Z=3x_1+5x_2$。相反,接下来的两列给出了可加性假设将不满足(但不是比例性假设)的假定情况。

参见表 3.5 中的案例 1,这种情况对应目标函数为 $Z=3x_1+5x_2+x_1x_2$,对于 $(x_1,x_2)=(1,1)$,$Z=3+5+1=9$。因此,违背可加性假设 $Z=3+5$(比例性假设仍然满足,因为在一个变量的值固定后,另一个变量使 Z 的增加与该变量的值成比例)。如果两种产品在增加利润方面是互补的,这种情况将会出现。例如,假设市场或者本身生产的两种新产品之一需要一个主要的广告投放,但是如果决定生产两种产品,同一个单一的广告能同时有效地提高两种产品的利润。因为节省了第二种产品的主要成本,它们的联合利润将某种程度上多于它们独立生产时各自利润的总和。

表 3.5　目标函数满足或违背可加性的例子

(x_1,x_2)	Z 值		
	满足可加性	违背可加性	
		案例 1	案例 2
(1,0)	3	3	3
(0,1)	5	5	5
(1,1)	8	9	7

表 3.5 中的案例 2 也违背了可加性假设,因为在相应的目标函数中出现了额外项,$Z=3x_1+5x_2-x_1x_2$,因此,对于 $(x_1,x_2)=(1,1)$,$Z=3+5-1=7$。与第一种情况相反,如果两种产品在某种程度上竞争将减少它们的联合利润时,案例 2 就会出现。例如,假设两种产品需要用同样的机器和设备。如果两种产品中的一种单独生产,机器和设备将单独使用。尽管如此,生产两种产品将需要来回切换生产过程,涉及临时关闭一个产品的生产并启动另一个产品的生产的时间和成本问题。因为大量的额外成本,它们的联合利润比每一种产品独自生产带来的利润的总和某种程度上要少。

相同类型活动之间的交互能够影响约束函数的可加性。例如,考虑 Wyndor Glass 公司问题的第三个约束函数 $3x_1+2x_2\leqslant 18$(这是涉及两个产品的唯一约束)。这个约束是关于工厂 3 的生产能力,其中两种新产品的可用生产时间是每周 18h。左侧的函数($3x_1+2x_2$)表示这些产品每周将消耗的生产时间小时数。表 3.6 的满足可加性列给出了这种情况,接着的两列表示了函数包

含叉积的形式,不满足可加性。对于这3列,使用工厂3生产能力的产品的各自贡献和以前的假设一样,即产品1为$3x_1$,产品2为$2x_2$,或者$x_1=2$时$3(2)=6$,$x_2=3$时$2(3)=6$。这与表3.5的情况一样,区别之处位于最后一行,其中给出了两种产品联合生产时总的函数值。

对于案例3(表3.6),两种产品的生产时间通过函数$3x_1+2x_2+0.5x_1x_2$给出,因此,当$(x_1,x_2)=(2,3)$时,总函数值为$6+6+3=15$,违背可加性假设的值$6+6=12$。在与表3.5中的案例2相同的情形下,这种情况将会出现,即额外的时间被浪费在两种产品之间来回的生产转换过程中。额外的叉积($0.5x_1x_2$)给出了生产时间以这样的方式浪费(注意到在两种产品中转换浪费的时间导致正的叉积项,总的函数用于度量总的生产时间,其在案例2中将导致负的叉积项,因为总的函数用于度量利润)。

表3.6中的案例4,生产时间的函数为$3x_1+2x_2-0.1x_1^2x_2$,因此,当$(x_1,x_2)=(2,3)$时,函数值为$6+6-1.2=10.8$。这种情况将以如下方式产生。正如在案例3中,假设两个产品同样的机器和设备类型。但是假设现在从一种产品转换到另一种产品需要的时间相当小。因为每种产品需要通过一系列的生产操作,单个生产设备正常生产产品时将会产生偶然的空闲时间。在这些空闲时间里,这些设备可用于生产其他产品。因此,消耗的总生产时间(包括空闲时间)是:当两种产品被联合生产时,将小于单独生产每种产品各产品消耗时间的总和。

表3.6 目标函数满足或违背可加性的例子

(x_1,x_2)	消耗资源量		
	满足可加性	违背可加性	
		案例3	案例4
(2,0)	6	6	6
(0,3)	6	6	6
(2,3)	12	15	10.8

在分析由这4个案例说明的两种产品的可能交叉类型时,运筹小组认为没有因素在实际的Wyndor Glass公司问题中发挥关键作用。因此,可加性假设作为一个合理的近似被采用。

对于其他问题,如果可加性不是合理的假设,那模型的一部分或者全部数学函数就是非线性(由于叉积项)的,你可以进入非线性规划领域学习相关知识(第13章)。

3.3.3 可分割性

我们接下来的假设是关于决策变量的允许值。

可分割性假设:在线性规划模型中的决策变量,被允许取满足函数和非负性约束的任意值,包括非整数值。因此,这些变量并不严格都是整数值。由于每个决策变量代表了一些活动的水平,假设活动能够以分数方式表示。

对于Wyndor Glass公司的问题,决策变量代表了生产率(一种产品每周生产的批数)。由于在可行域内这些生产率可以有任意分数值,可分割性假设成立。

在某种情况下,可分割性假设并不成立,因为部分或所有的决策变量必须被限定为整数值。具有这种限制的数学模型称为整数规划模型,并将在第12章讨论它们。

3.3.4 确定性

我们最后的假设关系到模型的参数,即在目标函数中的系数c_j、在约束函数中的系数a_{ij}和约

束函数右端的 b_i。

确定性假设:赋予线性规划模型的每个参数的值假设为已知常量。

在实际应用中,确定性假设很少被恰好满足。建立线性规划模型时通常会选择一些将来的活动过程。因此,使用的参数值将是基于对将来条件的一种预期,这必然会带来某种程度的不确定性。

由于这一原因,在假设参数值下找到最优解后,引入灵敏度分析通常是重要的。正如 2.3 节讨论的那样,目的之一是识别灵敏参数(不改变最优解它们的值也不会变化),因为灵敏参数值的任何后续变化意味着要立即改变正在使用的解。

灵敏度分析在分析 Wyndor Glass 公司问题时发挥了重要作用,将在 7.2 节讲述。尽管如此,在我们结束故事前很有必要多了解一些背景。

偶然情况下,参数的不确定性程度太大以至于不能只进行灵敏度分析。7.4 节 ~ 7.6 节介绍了在不确定情况下处理线性规划的其他方法。

3.3.5　前景假设

我们在 2.2 节中强调,数学模型是现实问题理想化的表达。模型为了便于处理,需要做近似和简化的假设。增加太多的细节和精细度将使模型在对问题进行分析时显得很笨重。我们只需要将模型的预测和真实问题中实际发生的情况建立高度关联。

这个建议当然适用于线性规划。在线性规划的实际应用中,非常常见的是 4 个假设几乎没有一个被完全满足。除了分割性假设,都会有很小的差距。这对于确定性假设来说尤其严重,所以灵敏度分析作为对违反假设的弥补通常是必须的。

尽管如此,对于运筹小组来说,检查所研究问题的 4 个假设并分析存在多大的差距是非常重要的。如果在主要方面任何假设都不满足,就需要采用大量有帮助的可替代模型,如本书后续章节所描述。这些其他模型的缺点就是对于求解它们的可用算法并不像求解线性规划那样强大,但在某些情况下这种差距正在缩小。对于一些应用,强大的线性规划方法用于初始分析,更复杂的模型用于更进一步的分析。

正如在 3.4 节例题中所学习的那样,你将发现分析线性规划 4 个假设如何应用,是非常好的练习。

3.4　附 加 示 例

Wyndor Glass 公司的问题是一个各个领域线性规划问题的典型示例:这是一个资源分配问题(线性规划问题最常见的类型),因为它涉及在竞争性的活动中分配有限的资源,而且,其模型满足我们的标准形式,它的背景是改进传统的商务计划。然而,线性规划的应用范围更广。本节我们将开阔视野。当研究下面的例子时,应该注意的是这些例子潜在的数学模型而不是这些例子的背景,使其具有线性规划问题的特征。然后,考虑怎样在其他背景下,只改变活动的名称等,建立同样的线性规划数学模型。

这些例子是实际应用的缩小版本。与 Wyndor 问题以及 OR Tutor 中的图解法演示示例一样,这些例子中的第一个只有两个变量,能够用图形法求解。新的特征是:它是一个最小化问题并有混合形式的约束函数(这个例子是对放射治疗设计方面实际情境的极大简化,不过本节中第一个应用案例介绍了运筹学在该领域实际带来的令人惊喜的影响)。接下来的例子有远远多于两个决策变量,因此建模也更有挑战性。尽管我们将提到它们的最优解是通过单纯形法获得

的,但这里关注的是对这些大型问题如何建立线性规划模型。接下来一节和下一章我们将转到求解此类问题的软件工具和算法(通常是单纯形法)的问题上。

在学习这些更有挑战性的建模示例之前,如果需要先学习构建小的相对简单的线性规划模型的附加示例,我们建议你返回学习 OR Tutor 中图解法的演示示例和本书网站本章求解示例部分的一些例子。

3.4.1 放射治疗的设计

玛丽被诊断为患有晚期癌症。尤其严重的是,她的膀胱长了一个大的恶性肿瘤(整个膀胱病变)。

玛丽将接受最先进的医学治疗以给她带来每个可能的生存机会。这个治疗将包括大量的放射性治疗。

放射性治疗包括使用外部光束治疗仪透过患者的身体,通过电离辐射,破坏癌细胞和健康的组织。通常,控制几束光束在一个二维的平面上从不同的角度进行精确照射。由于衰减,射入点附近的组织会比射出点附近的组织的光束带来更多的放射。发散性还可能导致光束方向以外的组织受到放射。由于肿瘤细胞在显微情况下看通常是分散在健康细胞中的,通过肿瘤区的放射量需要足够大才能杀死恶性细胞,它们对放射性稍加敏感,而要求足够少地涉及健康细胞。同时,对关键组织的放射总量一定不能超过已经建立的耐受水平,目的是防止造成比疾病本身更严重的伤害。同样的原因,对于整个健康组织的放射总量应该是最小的。

由于需要认真地平衡这些因素,放射性治疗的设计是一个非常精细的过程,设计的目标是选择用于放射的光束组合和光束强度,以产生最佳剂量分布(身体里的放射剂量用"千拉德"作为度量单位)。一旦治疗设计完成后,就将分几个星期多次进行治疗。

在玛丽的案例中,肿瘤的尺寸和位置使她的治疗设计需要更加精细。图 3.11 中肿瘤的交叉部位图从上面看几乎避开了所有的关键组织。这些组织包括了重要的器官(如直肠)以及减弱放射性的骨结构(如股骨和骨盆),也给出了在保证安全的情况下两束射线的进入点和方向(实际上,在这一点上,我们简化了例子,因为通常必须要考虑几十个可能的放射束)。

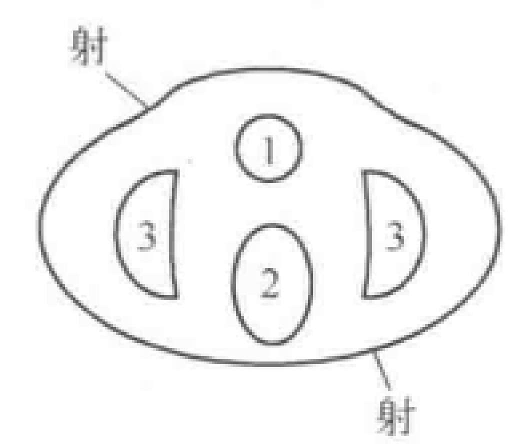


图 3.11 玛丽肿瘤的交叉部位(从上部看),附近重要的组织和用到的放射线
1—膀胱肿瘤;2—直肠尾骨等;3—股骨、骨盆等。

应用案例

前列腺癌是男性诊断中最常见的一种癌症。仅 2013 年,估计在美国就有接近 24 万例新增病例和将近 3 万人死亡。像许多其他癌症一样,放化疗是治疗前列腺癌的常用方法,其目的是对肿瘤区域给予足够高的放射剂量以杀死恶性细胞,同时最小化对肿瘤附近健康组织的放射剂量。这种治疗可通过两种方式应用:外部放射治疗(如本章第一个例子所描述的)或短距离放射治疗,就是在肿瘤区放置大约 100 个放射性"种子"。难点在于如何确定最有效的三维几何模式放置这些种子。

位于纽约的纪念斯隆-凯特琳癌症中心(MSKCC)是世界上最早的私人癌症中心。来自佐治亚理工学院的医疗和健康运筹中心的运筹团队与 MSKCC 的医生开发了一种称为"下一代"非常尖端的优化方法,用来优化短距离放射治疗方法来治疗癌症。潜在的模型与线性规划的结构一致,但有一个模型例外。除了具有适合线性规划的常见连续变量外,模型还有一些二元变量(变量取值为 0 或 1)(线性规划的这种扩展称为混合整数规划,将在第 12 章讨论)。当开始向病人体内植入这些种子时,通过一个计算机系统自动计划,医务人员可以很容易地操作这个系统,优化过程可以在几分钟内完成。

由于这套系统非常有效并且能够极大地减少副作用,优化短距离放射治疗消除癌症组织应用的突破对于医疗成本和治疗病人的生活质量均有着重要的影响。如果所有的美国诊所均采用这种方法,由于减少了预处理计划会议需求和术后 CT 扫描,据估计每年可以节省近 5 亿美元,并提供更加有效的手术及减少处理并发症的必要。可以预期的是,这种方法可以扩展到其他

短距离放射治疗中，如治疗乳腺、子宫颈、食道、胆管、胰腺、头部、脖子和眼睛。

该线性规划及其扩展应用使该运筹团队于 2007 年在表彰运筹学和管理学成就的 Franz Edelman 奖的全球竞争中获得了知名的一等奖。

资料来源：E. K. Lee and M. Zaider, "Operations Research Advances Cancer Therapeutics," *Interfaces*, **38**(1): 5-25, Jan. -Feb. 2008.（我们网站上提供了该文章的链接：www. mhhe. com/hillier。）

对于任何给定强度的建议放射束，对身体不同部分的放射吸收结果进行分析需要一个复杂的过程。简单地说，在仔细解剖分析的基础上，组织的二维交叉部位的能量分布，可以绘在等剂量图上，图上的等高线表示进入点剂量强度的百分比。一个细格滤线栅被置于等剂量图上。通过求每一种组织在该区域吸收放射剂量的总和，可以计算出肿瘤、健康解剖、重要组织等吸收的平均剂量。多于一束射线（治疗顺序）时，放射量是可以叠加的。

在彻底分析这种类型之后，医疗小组仔细地预计了设计玛丽治疗需要的数据，如表 3.7 所列。第一列列出了必须考虑的身体区域，接下来的两列给出了各自区域吸收的每束射线辐射剂量的平均占比。例如，如果放射线 1 在进入点的剂量水平是 1 千拉德，那么，在二维平面上整个健康解剖组织将吸收平均 0.4 千拉德的放射量，附近的关键组织将吸收平均 0.3 千拉德，肿瘤区域将吸收平均 0.5 千拉德，肿瘤中心部分将吸收平均 0.6 千拉德。最后一列给出了身体各个部分平均吸收的两个放射束的总放射剂量的约束限制。特别地，健康解剖组织的平均吸收量必须尽可能小，关键组织不能超过 2.7 千拉德，整个肿瘤区域必须平均为 6 千拉德，肿瘤中心至少为 6 千拉德。

作为线性规划问题建模：需要对两个进入点的放射剂量进行决策。因此，两个决策变量 x_1、x_2 分别表示放射线 1 和放射线 2 在射入点的放射量（千拉德）。因为到达健康组织的放射量应该最小，用 Z 表示这个量。表 3.7 中的数据可以用来直接建立如下的线性规划模型，①即

表 3.7　玛丽的放射治疗设计数据

区　　域	区域吸收的输入剂量比例（平均）		总平均剂量限制/千拉德
	放射线 1	放射线 2	
健康解剖组织	0.4	0.5	最小化
关键组织	0.3	0.1	≤2.7
肿瘤区域	0.5	0.5	=6
肿瘤中心	0.6	0.4	≥6

$$\text{Min } Z=0.4x_1+0.5x_2$$

$$\text{s.t.}\quad 0.3x_1+0.1x_2\leqslant 2.7$$

$$0.5x_1+0.5x_2=6$$

$$0.6x_1+0.4x_2\geqslant 6$$

且

$$x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0$$

注意这个模型与 3.1 节中 Wyndor Glass 公司问题模型的不同之处。后者模型包含最大化

① 这个模型比实际应用要小得多。为得到最好的结果，实际的模型甚至需要包含数万个决策变量和约束，如参见 H. E. Romeijn, R. K. Ahuja, J. F. Dempsey, and A. Kumar, "A New Linear Programming Approach to Radiation Therapy Treatment Planning Problems," *Operations Research*, **54**(2): 201-216, March-April 2006。作为一种替代方法是将线性规划同其他运筹学方法结合（像见本节的应用案例），也可参见 G. J. Lim, M. C. Ferris, S. J. Wright, D. M. Shepard, and M. A. Earl, "An Optimization Framework for Conformal Radiation Treatment Planning," *INFORMS Journal on Computing*, **19**(3): 366-380, Summer 2007。

Z,并且所有的约束条件都是“$\leqslant$”形式。这个新模型并不符合这一标准形式,但它确实符合3.2节中描述的3个其他合法的形式,即最小化Z,约束条件为“=”形式和“$\geqslant$”形式。

尽管如此,两个模型都只有两个变量,因此这个新问题也能用图解法求解,在3.1节图3.12中给出了图解法说明。可行解由(6,6)和(7.5,4.5)之间的黑色线段构成,因为仅有该线段上的点能同时满足所有的约束(注意:等式约束将可行解限制在这条线段上,然后另两个约束决定了线段的两个端点)。虚线是目标函数线,它穿过最优解$(x_1,x_2)=(7.5,4.5)$得$Z=5.25$。这个解比点(6,6)更优,因为减少Z值(Z为正值)会使目标函数线朝原点(这时$Z=0$)方向移动。(7.5,4.5)对应的$Z=5.25$比(6,6)对应的$Z=5.4$小。

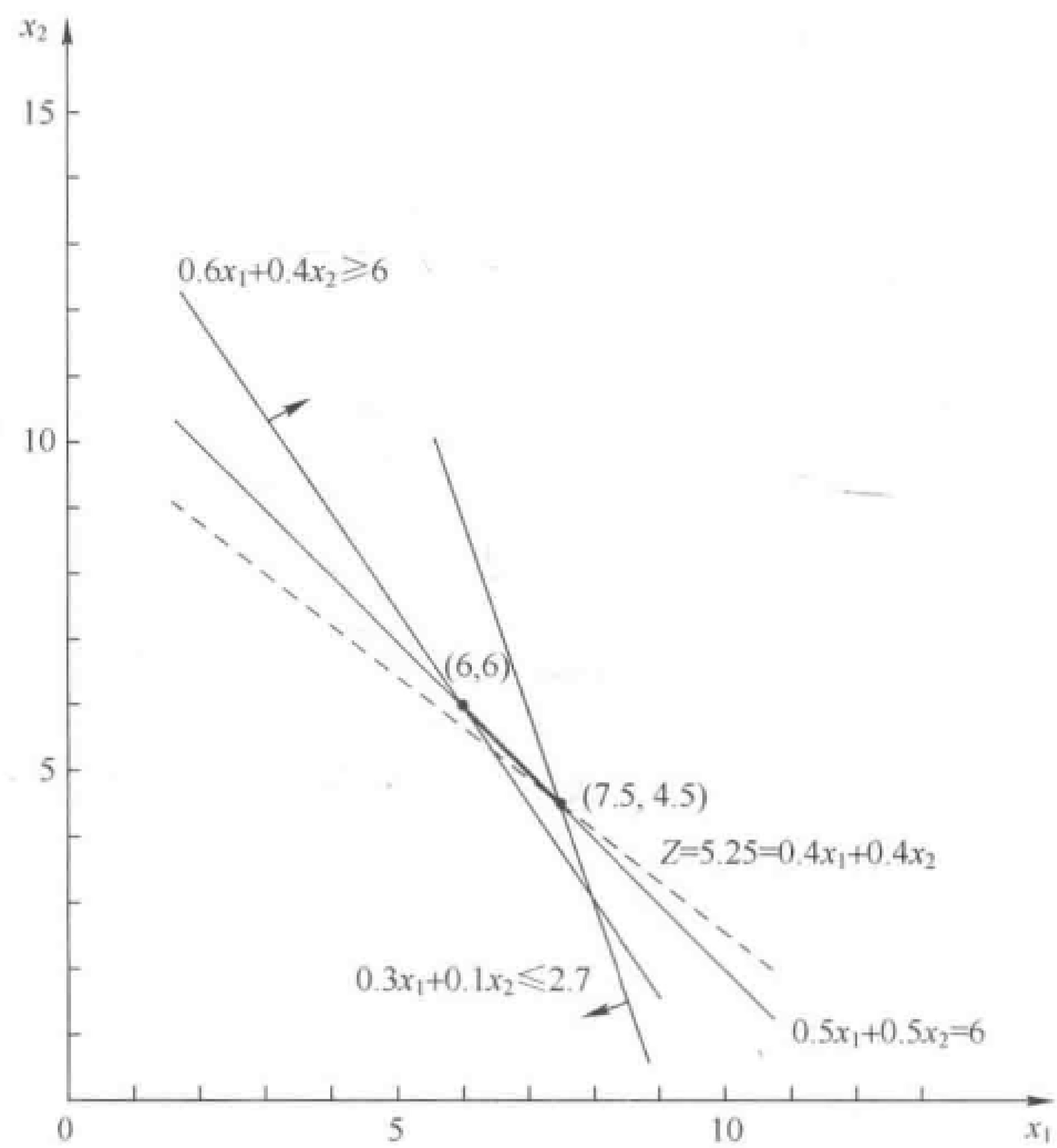


图3.12 图解法求解玛丽放射治疗问题

因此,最优设计就是在射入点射线1用7.5千拉德的剂量,射线2用4.5千拉德的剂量。

与Wyndor问题相反,这个问题并不是一个资源分配问题。然而,它归入一类称为成本收益平衡问题的线性规划问题。这类问题的主要特点是它在某种成本与某种收益之间寻求最佳平衡点。在这个特殊例题中,成本就是对健康解剖组织的破坏,收益就是到达肿瘤中心的放射量。模型中的第三个约束条件是一个收益约束,其中右端项代表收益的最低可接受水平,左端项代表达到的收益水平。这是最重要的约束,但其他两个约束也强加了额外的限制(在本节中,稍后将看到两个成本收益平衡问题的附加例题)。

3.4.2 区域规划

南部联盟农场是由以色列的3个集体农场(公共农业社区)组成的联合体,这个集团的总体规划在技术协调办公室制定,该办公室当前正在规划第二年的农业产量。

每一个农场的农业产出受限于可使用的灌溉土地量和水利委员会(国家政府办公室)分配的用于灌溉的水量。这些数据如表3.8所列。

表3.8 南部联盟农场的资源数据

农场	可用土地/英亩	分配水资源/英尺^3
1	400	600
2	600	800
3	300	375

适合本地区种植的农作物包括甜菜、棉花与高粱,这3种农作物是下一季考虑种植的。这些作物的主要差异在于它们每英亩的期望净收益和水的消耗量。此外,农业部已经制定了南部联盟农场分配给每种作物的总英亩数最大配额,如表3.9所列。

表 3.9　南部联盟农场的作物数据

作　物	最大配额/英亩	水消耗/(英尺^3/英亩)	净回报/(美元/英亩)
1	600	3	1000
2	500	2	750
3	325	1	250

由于可用的灌溉水资源有限,南部联盟农场在下一季将不能用所有可灌溉土地来种植计划的作物。为了确保3个农场之间的均衡,已经就每一个农场以相同比例使用其可灌溉土地达成一致。例如,农场1使用其400英亩可用土地中的200英亩,那么,农场2将使用其600英亩可用土地中的300英亩,农场3将使用其300英亩可用土地中的150英亩。尽管如此,作物的任何组合可以在任何农场种植,技术协调办公室的工作是在满足给定的约束下,为每个农场分配每一种作物的种植量,目标是整体上最大化南部联盟农场的净回报。

作为线性规划问题建模:需要确定的数量是为每一个农场选择每一种作物的种植英亩数,决策变量 $x_j(j=1,2,\cdots,9)$ 代表了这9个产量,如表3.10所列。

表 3.10　南部联盟农场问题的决策变量

作　物	分配数/英亩		
	农场		
	1	2	3
甜菜	x_1	x_2	x_3
棉花	x_4	x_5	x_6
高粱	x_7	x_8	x_9

由于 Z 表示总净回报的数值,该问题的线性规划模型结果为

$$\text{Max } Z=1000(x_1+x_2+x_3)+750(x_4+x_5+x_6)+250(x_7+x_8+x_9)$$

服从于如下约束条件。

(1) 每个农场的可用土地为

$$x_1+x_4+x_7\leqslant 400$$
$$x_2+x_5+x_8\leqslant 600$$
$$x_3+x_6+x_9\leqslant 300$$

(2) 每个农场的水资源分配为

$$3x_1+2x_4+x_7\leqslant 600$$
$$3x_2+2x_5+x_8\leqslant 800$$
$$3x_3+2x_6+x_9\leqslant 375$$

(3) 每种作物的总英亩数为

$$x_1+x_2+x_3\leqslant 600$$
$$x_4+x_5+x_6\leqslant 500$$
$$x_7+x_8+x_9\leqslant 325$$

(4) 种植土地的比例相等,即

$$\frac{x_1+x_4+x_7}{400}=\frac{x_2+x_5+x_8}{600}$$

$$\frac{x_2+x_5+x_8}{600}=\frac{x_3+x_6+x_9}{300}$$

$$\frac{x_3+x_6+x_9}{300}=\frac{x_1+x_4+x_7}{400}$$

(5) 非负约束为

$$x_j \geqslant 0, \quad j=1,2,\cdots,9$$

现在模型结束,除了等式约束不是线性规划模型的适合约束,因为部分变量位于等式的右端。因此,其最终形式[①]为

$$3(x_1+x_4+x_7)-2(x_2+x_5+x_8)=0$$

$$(x_2+x_5+x_8)-2(x_3+x_6+x_9)=0$$

$$4(x_3+x_6+x_9)-3(x_1+x_4+x_7)=0$$

技术协调办公室建立了这个模型并应用单纯形法(第4章介绍)得到最优解,即

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9)=(133\frac{1}{3},100,25,100,250,150,0,0,0)$$

如表3.11所列,得到的目标函数最优值是 $Z=633333\frac{1}{3}$,即总的净回报是633333.33美元。

表3.11 南部联盟农场的问题的最优解

作物	分配数/英亩		
	农场		
	1	2	3
甜菜	$133\frac{1}{3}$	100	25
棉花	100	250	150
高粱	0	0	0

这个问题是资源分配问题的另一个例子(如Wyndor问题)。前三类约束都是资源约束,第四类增加了某些侧面的约束。

3.4.3 控制空气污染

NORI & LEETS公司是世界上该地区的主要钢厂之一,坐落于Steeltown市,而且是该市唯一的大雇主。Steeltown市随着NORI & LEETS公司的成长而繁荣,公司雇用了近50000名当地居民作为员工。因此,市民的态度一直是,对NORI & LEETS公司有利的事情就是对Steeltown市有利的。尽管如此,现在这样的态度正在发生变化,公司熔炉产生的失控的空气污染正在毁坏城市的面貌并危害居民的健康。

最近,由于股东的反对导致公司选举了一个新的开明董事会,这些董事们决定担负起社会责任,他们与Steeltown市政府官员和居民一起研究怎样解决空气污染问题,并共同制定了严格的Steeltown市空气质量标准。

在空气中3种主要的污染成分是颗粒物、硫氧化物和碳氢化合物。新的标准要求公司减少

① 实际上,这些等式中的任何一个都是冗余的,如果需要可以删除。同样,由于这些等式中,任何两个可使用的土地约束中也能被删除,因为当剩余土地的约束和这些等式满足时,它们将自动满足。尽管如此,加上这些不必要的约束也是没有妨碍的(除了小部分的额外计算),因此不用担心要在自己建立的模型中删除它们。

这些污染的年排放量，如表 3.12 所列。公司董事会已经指示管理层让工程团队确定怎样以最经济的方式减少污染量。

表 3.12　NORI & LEETS 公司的清洁空气标准

污染物	要求年均排放率的减少量/百万磅
颗粒物	60
硫氧化物	150
碳氢化合物	125

钢厂有两种主要污染来源，即炼生铁的高炉和将铁炼成钢的平炉。对于这两种熔炉，工程师已经确定最有效的消除污染方法是：①增加烟囱的高度[①]；②使用过滤装置（包括气体过滤器）；③在熔炉燃料中加入高级清洁材料。每一种方法都存在技术限制，即能在多大程度上使用（如烟囱高度的最大可增加量），但是在使用这些方法的技术限制比例上也有相当的灵活性。

表 3.13 给出了在其技术极限下只用一种消除污染方法时，每种炉能被消除的排放量（百万磅/年）。为了分析，假设每种方法也能被不完全应用，而是以某种比例使排放率减少，而且这种比例对于高炉和平炉是不同的。对每种类型的熔炉来说，每种方法取得的排放减少量并不会受是否使用其他方法的影响。

表 3.13　NORI & LEETS 公司每种最大可用消除方法的排放率（每年百万磅计）减少量

污染物	高烟囱		过滤器		改善燃料	
	高炉	平炉	高炉	平炉	高炉	平炉
颗粒物	12	9	25	20	17	13
硫氧化物	35	42	18	31	56	49
碳氢化合物	37	53	28	24	29	20

在发掘出这些数据后，很清楚没有单一的方法自己就能够达到所有要求的排放量。另一方面，将所有 3 种方法对两种熔炉的全部消除能力（如果公司的产品价格保持竞争性，这种方法是极其昂贵的）的总和，远远足够了。因此，工程师基于相对成本得出结论，他们将不得不使用方法的某种组合，用每种方法所占比例来表示。而且两种类型的熔炉可能不会用相同的方法组合。

需要通过分析来估计每种消除方法所需的年均总成本。每一种方法的年成本包括增加的运行与维修花费以及由使用该方法导致的生产效率降低所带来的收益损失。其他主要成本是建立该方法的要求启动成本（初始资本支出）。为了计算一次性成本和持续的年均成本，用货币的时间价值计算年均支出（超过方法的预期寿命）并将其等价地折算到启动成本里。

分析得到了用这些方法的全部消除能力时，其总的年均成本估计（以百万美元计），如表 3.14 所列。也确定了以较低水平使用一种方法的成本，与部分使用表 3.13 给出的消除能力大致成比例。对于任何给定的比例分数，年总成本将大约是表 3.14 所表示的相应数量乘以比例分数。

---

① 这种特定的消除方法也存在争议。因为其效果就是通过将排放物扩散得更远来减少地面的污染水平，环境组织认为这将增加空气中的硫氧化物的持续时间而制造了更多的酸雨。因此，美国环境保护机构在 1985 年采取了取消对使用高烟囱的激励措施。

表 3.14 NORI & LEETS 公司使用最大可用消除方法年均总成本 (单位:百万美元)

消除方法	高炉	平炉
高烟囱	8	10
过滤器	7	6
改善燃料	11	9

现在的步骤就是建立公司污染消除计划的总体框架,这个计划将确定哪一种消除方法将会以多大程度来使用,这个程度是由它们对高炉和平炉的消除能力所占比例来确定的。由于要找出一个以最小可能成本满足需求的计划这类问题的组合性本质,需要建立运筹小组解决问题。小组采用了线性规划方法,建立的模型概括如下。

作为线性规划问题建模:该问题有 6 个决策变量 $x_j, j=1,2,\cdots,6$,每个代表使用 3 种消除方法中的一种,对每种炉型消除能力所占的比例(因此,x_j 不能超过 1)。这些变量排列在表 3.15 中。

表 3.15 NORI & LEETS 公司的决策变量(一种消除方法的最大可用程度的比例)

消除方法	高炉	平炉
高烟囱	x_1	x_2
过滤器	x_3	x_4
改善燃料	x_5	x_6

由于目标是满足排放减少要求时的总成本最小,表 3.12、表 3.13、表 3.14 中的数据生成如下模型,即

$$\text{Min } Z=8x_1+10x_2+7x_3+6x_4+11x_5+9x_6$$

服从于如下约束条件。

(1) 排放减少为

$$12x_1+9x_2+25x_3+20x_4+17x_5+13x_6\geqslant 60$$
$$35x_1+42x_2+18x_3+31x_4+56x_5+49x_6\geqslant 150$$
$$37x_1+53x_2+28x_3+24x_4+29x_5+20x_6\geqslant 125$$

(2) 技术限制为

$$x_j\leqslant 1, j=1,2,\cdots,6$$

(3) 非负约束为

$$x_j\geqslant 0, j=1,2,\cdots,6$$

运筹小组用该模型①找到了一个最小成本计划,即

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=(1,0.623,0.343,1,0.048,1)$$

这时,$Z=32.16$(年均总成本为 32.16 百万美元)。然后,引入灵敏度分析得到对表 3.12 中的空气标准进行调节可能带来的影响,并分析表 3.14 给出的成本数据的不精确性造成的影响(第 7 章末尾的案例 7.1 将继续讨论该例子)。下面进行详细的计划和管理评价。不久,这个关于控制空气污染的规划被公司彻底执行,Steeltown 市的市民深(清洁地)吸了一口气。

像放射治疗问题一样,这是另一个成本收益平衡问题的例子。本例中的成本是货币成本,收益是各种类型的污染消除。每类污染物的收益约束是:位于式子左边的能达到的消除量和位于

① 一种等价的建模能够以其消除方法的自然单位来表达每个决策变量,如 x_1 和 x_2 表示烟囱增加高度的英尺数。

式子右边的可接受消除水平。

3.4.4 回收固体废弃物

SAVE-IT 公司运营了一家回收中心,收集 4 种固体废物,并处理它们以使其能熔合成一种可销售的产品(处理和熔合是两个分开的过程)。根据原材料的混合情况,这种产品被划分为 3 个不同的级别(表 3.16 的第一列)。尽管每一个级别的混合物比例有一些灵活性,但质量标准规定了每一个级别产品中每种材料比例允许的最大量和最小量(这个比例是材料在这一级别产品中所占重量的百分比)。在两个较高的级别中,为每种材料指定了固定的百分比。这些指定的比例、熔合的成本以及每一个级别产品售价如表 3.16 所列。

表 3.16 SAVE-IT 公司的产品数据

级别	指定比例	每磅熔合成本/美元	每磅售价/美元
A	材料 1:不超过总量的 30% 材料 2:不少于总量的 40% 材料 3:不超过总量的 50% 材料 4:严格等于总量的 20%	3.00	8.50
B	材料 1:不超过总量的 50% 材料 2:不少于总量的 10% 材料 4:严格等于总量的 10%	2.50	7.00
C	材料 1:不超过总量的 70%	2.00	5.50

回收中心有固定的来源收集固体废弃物,因此能够保持稳定的速度来处理它们。表 3.17 给出了每周收集和处理的数量,还给出了每一种原材料的处理成本。

SAVE-IT 公司由绿色地球独资拥有,绿色地球是一家致力于处理环境问题的组织,因此 SAVE-IT 的利润被用于帮助支持绿色地球组织的活动。绿色地球组织筹集的捐款和补助金,每周高达 30000 美元,专门用于固体废物原料的整个处理花费。绿色地球组织的董事会指示 SAVE-IT 公司管理层以如下方式分配资金:至少保证每一种原材料可用数量的一半实际被收集和处理。这些附加条件如表 3.17 所列。

表 3.17 SAVE-IT 公司的固体废弃物原料数据

原料	每周可用磅数/lb	每磅处理成本/美元	附加限制
1	3000	3.00	1. 对每种原料,至少每周可用磅数的一半应被收集和处理。 2. 每周 30000 美元应用于处理这些原料
2	2000	6.00	
3	4000	4.00	
4	1000	5.00	

在表 3.16 和表 3.17 指定的约束内,管理层要确定每种级别产品的生产数量和用于每种级别产品原材料的精确混合比例。目标是最大化每周的净收益(总销售收入减去总熔合成本),不包含被捐赠的每周 30000 美元的固定处理成本。

作为线性规划问题建模:在试图建立线性规划模型前,我们必须仔细考虑决策变量的恰当定义。尽管这些定义通常很明确,但有时候却是整个建模的关键所在。在清楚地认识了什么样的信息是真正所需的,以及通过决策变量的意义来传递这些信息最方便的形式之后,我们将建立目标函数和关于这些决策变量值的约束条件。

在这个特定问题中,对决策制定进行了定义,但是以何种方式来恰当地传达这些信息可能需要认真考虑(尝试并看看你会不会得出下面不恰当的决策变量)。

因为一组决策是要生产的每个级别的每种产品的产量,自然就会相应得出这组决策变量。沿着之前试验性的思路,我们定义

$$y_i = \text{每周生产的 } i \text{ 级产品的磅数} \ (i=A,B,C)$$

另一组决策是每一产品等级原料的混合。这种混合由该产品等级中每种原料的比例来确定,这将定义另一组决策变量,即

$$z_{ij} = i \text{ 级产品中原料 } j \text{ 的比例} \ (i=A,B,C; j=1,2,3,4)$$

尽管如此,表 3.17 给出了处理成本与材料可应用的数量(lb)而不是比例,因此需要在一些约束中记录这些数量信息。对于材料 $j(j=1,2,3,4)$,有

每周使用的材料 j 的磅数 $=z_{Aj}y_A+z_{Bj}y_B+z_{Cj}y_C$

例如,由于表 3.17 给出了材料 1 每周的可用量是 3000lb,模型中的一个约束应为

$$z_{Aj}y_A+z_{Bj}y_B+z_{Cj}y_C \leqslant 3000$$

不幸的是,它不是一个合法的线性规划约束形式。左边的表达式不是一个线性函数,因为它含有变量的乘积。因此,使用这些决策变量不能建立线性规划模型。

幸运的是,还有一种方法来定义决策变量,这将满足线性规划的格式(你知道怎么做吗)。只需将每个旧决策变量的积替换为单个的决策变量。换句话说,定义

$$\begin{aligned} x_{ij} &= z_{ij}y_i (i=A,B,C; j=1,2,3,4) \\ &= \text{每周分配给 } i \text{ 级产品的材料 } j \text{ 的磅数} \end{aligned}$$

然后,令 x_{ij} 为决策变量。将 x_{ij} 以不同的方式组合产生以下在模型中需要的数量($i=A,B,C$; $j=1,2,3,4$),即

$$x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}+x_{i4} = \text{每周生产的 } i \text{ 级产品的磅数}$$

$$x_{Aj}+x_{Bj}+x_{Cj} = \text{每周使用的材料 } j \text{ 的磅数}$$

$$\frac{x_{ij}}{x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}+x_{i4}} = i \text{ 级产品中材料 } j \text{ 的比例}$$

事实上,最后的表达式是一个不复杂的非线性函数。例如,考虑表 3.16 中的 A 级产品第一个规定(材料 1 的比例不超过 30%)。这个限制给出了非线性的约束,即

$$\frac{x_{A1}}{x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4}} \leqslant 0.3$$

然而,通过在不等式两边都乘以分式的分母就生成了一个等价约束

$$x_{A1} \leqslant 0.3(x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4})$$

得

$$0.7x_{A1}-0.3x_{A2}-0.3x_{A3}-0.3x_{A4} \leqslant 0$$

这是一个合法的线性规划约束。

通过这一调整,上面给出的 3 个数量直接导出了模型中的所有约束。目标函数是基于管理层的目标,即最大化每周的 3 个级别的产品净收益(总销售收入减去总熔合成本)而建立的。这样,对每一级的产品,每一磅的利润是由表 3.16 第四列的销售价格减去第三列给出的熔合成本得到的。这些差值提供了目标函数的系数。

因此,完整的线性规划模型为

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = {} & 5.5(x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4})+4.5(x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4}) \\ & +3.5(x_{C1}+x_{C2}+x_{C3}+x_{C4}) \end{aligned}$$

服从于如下约束条件。

(1) 混合规定(表 3.16 的第二列),即

$$x_{A1} \leqslant 0.3(x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4}) \quad A \text{ 等级材料 } 1$$
$$x_{A2} \geqslant 0.4(x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4}) \quad A \text{ 等级材料 } 2$$
$$x_{A3} \leqslant 0.5(x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4}) \quad A \text{ 等级材料 } 3$$
$$x_{A4} = 0.2(x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4}) \quad A \text{ 等级材料 } 4$$
$$x_{B1} \leqslant 0.5(x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4}) \quad B \text{ 等级材料 } 1$$
$$x_{B2} \geqslant 0.1(x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4}) \quad B \text{ 等级材料 } 2$$
$$x_{B4} = 0.1(x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4}) \quad B \text{ 等级材料 } 4$$
$$x_{C1} \leqslant 0.7(x_{C1}+x_{C2}+x_{C3}+x_{C4}) \quad C \text{ 等级材料 } 1$$

（2）材料的可用量（表 3.17 第二列），即

$$x_{A1}+x_{B1}+x_{C1} \leqslant 3000 \quad \text{材料 } 1$$
$$x_{A2}+x_{B2}+x_{C2} \leqslant 2000 \quad \text{材料 } 2$$
$$x_{A3}+x_{B3}+x_{C3} \leqslant 4000 \quad \text{材料 } 3$$
$$x_{A4}+x_{B4}+x_{C4} \leqslant 1000 \quad \text{材料 } 4$$

（3）处理量约束（表 3.17 右侧），即

$$x_{A1}+x_{B1}+x_{C1} \geqslant 1500 \quad \text{材料 } 1$$
$$x_{A2}+x_{B2}+x_{C2} \geqslant 1000 \quad \text{材料 } 2$$
$$x_{A3}+x_{B3}+x_{C3} \geqslant 2000 \quad \text{材料 } 3$$
$$x_{A4}+x_{B4}+x_{C4} \geqslant 500 \quad \text{材料 } 4$$

（4）处理成本约束（表 3.17 右侧），即

$$3(x_{A1}+x_{B1}+x_{C1})+6(x_{A2}+x_{B2}+x_{C2})+4(x_{A3}+x_{B3}+x_{C3})$$
$$+5(x_{A4}+x_{B4}+x_{C4}) = 30000$$

（5）非负约束，即

$$x_{A1} \geqslant 0, x_{A2} \geqslant 0, \cdots, x_{C4} \geqslant 0$$

模型建立完成，还要按照线性规划模型的适用形式重写混合物指定的约束条件，就是将所有的决策变量移至等式的左边并合并同类项，具体如下。

混合物指定为

$$0.7x_{A1}-0.3x_{A2}-0.3x_{A3}-0.3x_{A4} \leqslant 0 \quad A \text{ 等级材料 } 1$$
$$-0.4x_{A1}+0.6x_{A2}-0.4x_{A3}-0.4x_{A4} \geqslant 0 \quad A \text{ 等级材料 } 2$$
$$-0.5x_{A1}-0.5x_{A2}+0.5x_{A3}-0.5x_{A4} \leqslant 0 \quad A \text{ 等级材料 } 3$$
$$-0.2x_{A1}-0.2x_{A2}-0.2x_{A3}+0.8x_{A4} = 0 \quad A \text{ 等级材料 } 4$$
$$0.5x_{B1}-0.5x_{B2}-0.5x_{B3}-0.5x_{B4} \leqslant 0 \quad B \text{ 等级材料 } 1$$
$$-0.1x_{B1}+0.9x_{B2}-0.1x_{B3}-0.1x_{B4} \geqslant 0 \quad B \text{ 等级材料 } 2$$
$$-0.1x_{B1}-0.1x_{B2}-0.1x_{B3}+0.9x_{B4} = 0 \quad B \text{ 等级材料 } 4$$
$$0.3x_{C1}-0.7x_{C2}-0.7x_{C3}-0.7x_{C4} \leqslant 0 \quad C \text{ 等级材料 } 1$$

模型的最优解如表 3.18 所列，然后，这些 x_{ij} 的值用于计算表中的其他利润值。求得的目标函数最优值为 $Z=35109.65$（每周总利润为 35109.65 美元）。

SAVE-IT 公司的问题是一个混合问题的例子。混合问题的目标是找到最终产品的最佳混合来满足特定的规格。最早的一些线性规划应用是汽油混合。其中，通过石油成分混合来得到不同级别的汽油产品。其他此类混合问题的最终产品包括钢材、化肥和动物饲料。这些问题有多种约束（一些是资源约束，一些是收益约束，一些是其他约束），所以混合问题并不属于本节先前描述的这两大类（资源分配问题和成本收益平衡问题）中的一类。

表 3.18 SAVE-IT 公司问题的最优解

等级	每周使用磅数				每周生产的磅数
	材料				
	1	2	3	4	
A	412.3(19.2%)	859.6(40%)	447.4(20.8%)	429.8(20%)	2149
B	2587.7(50%)	517.5(10%)	1552.6(30%)	517.5(10%)	5157
C	0	0	0	0	0
总量	3000	1377	2000	947	

3.4.5 人员安排

联合航空公司正在增加更多航班往来于中心机场,因此它需要雇用更多的客服代理。尽管如此,应该雇用多少还不清楚。管理层认识到有必要进行成本控制,并持续提供满意的客服水平。因此,运筹小组正研究如何安排代理来以最小的人力成本提供满意的服务。

基于新的航班计划,对在每天不同时间段值班并提供满意客服水平客服代理的最小数量进行了分析。表 3.19 最右列给出了第一列中各时间段内需要的代理的数量。表中的其他输入反映了客服代理联盟合同中的条款。这一条款是每位代理每周 5 天 8h 的轮班替换。批准的轮班如下。

第 1 班:上午 6:00 至下午 2:00;

第 2 班:上午 8:00 至下午 4:00;

第 3 班:正午至下午 8:00;

第 4 班:下午 4:00 至子夜;

第 5 班:下午 10:00 至上午 6:00。

表 3.19 联合航空公司的人员安排问题数据

时段	覆盖时段					所需最小代理数量
	班次					
	1	2	3	4	5	
上午 6:00 至上午 8:00	√					48
上午 8:00 至上午 10:00	√	√				79
上午 10:00 至正午	√	√				65
正午至下午 2:00	√	√	√			87
下午 2:00 至下午 4:00		√	√			64
下午 4:00 至下午 6:00			√	√		73
下午 6:00 至下午 8:00			√	√		82
下午 8:00 至下午 10:00				√		43
下午 10:00 至子夜				√	√	52
子夜至上午 6:00					√	15
每个代理的日成本/美元	170	160	175	180	195	

表 3.19 中的对钩给出了各轮班覆盖的时间。由于有些班不如其他班受欢迎,合同中规定的薪水也根据班不同而有所区别。对每个班,每个代理每天的补偿(包括收益)在最底行列出。问

题是确定每天应该安排多少代理给各个班，从而最小化代理的总人工成本。在最底行的基础上，要满足或超过最右列的服务需求。

作为线性规划问题建模：线性规划问题总是要找到活动水平的最佳组合。建立这个特殊问题模型的关键是认识活动的本质。

对应于每个班的活动，其每个活动的水平为安排到该班的代理数量。因此，这个问题意味着找到最佳的换班数量组合。由于决策变量就是活动的水平，5 个决策变量为

$$x_j = \text{分配给班 } j \text{ 的代理数量}, j=1,2,3,4,5$$

这些决策变量值的主要限制就是在每个时间段工作的代理数量必须满足表 3.19 最右列给出的最小需求。例如，从下午 2:00 到下午 4:00，安排给覆盖该班时段(班 2 和 3)的总代理数量必须至少为 64，因此，有

$$x_2+x_3 \geqslant 64$$

为该时段的约束条件。

由于目标是将分配给 5 个班的代理的总成本最小，目标函数的系数由表 3.19 最后一行给出。

因此，完整的线性规划模型为

$$\begin{aligned}
\text{Min } Z = {} & 170x_1+160x_2+175x_3+180x_4+195x_5 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 \geqslant 48 (\text{上午 6:00 至上午 8:00}) \\
& x_1+x_2 \geqslant 79 (\text{上午 8:00 至上午 10:00}) \\
& x_1+x_2 \geqslant 65 (\text{上午 10:00 至正午}) \\
& x_1+x_2+x_3 \geqslant 87 (\text{正午至下午 2:00}) \\
& x_2+x_3 \geqslant 64 (\text{下午 2:00 至下午 4:00}) \\
& x_3+x_4 \geqslant 73 (\text{下午 4:00 至下午 6:00}) \\
& x_3+x_4 \geqslant 82 (\text{下午 6:00 至下午 8:00}) \\
& x_4 \geqslant 43 (\text{下午 8:00 至下午 10:00}) \\
& x_4+x_5 \geqslant 52 (\text{下午 10:00 至子夜}) \\
& x_5 \geqslant 15 (\text{子夜至上午 6:00})
\end{aligned}$$

且

$$x_j \geqslant 0, \quad j=1,2,3,4,5$$

如果视觉够敏锐，可能已经注意到了第三个约束 $x_1+x_2 \geqslant 65$，实际上，并不是必需的，因为第二个约束 $x_1+x_2 \geqslant 79$ 已经确保了 x_1+x_2 将比 65 大。因此，$x_1+x_2 \geqslant 65$ 是一个可以去掉的冗余约束。同样地，第六个约束 $x_3+x_4 \geqslant 73$ 也是一个冗余约束，因为第七个约束是 $x_3+x_4 \geqslant 82$(事实上，非负约束中的 3 个——$x_1 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0$——也是冗余约束，因为第一个、第八个和第十个约束函数为 $x_1 \geqslant 48, x_4 \geqslant 43, x_5 \geqslant 15$。尽管如此，通过去掉这 3 个非负约束并没有得到计算好处)。

这个模型的最优解是$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(48,31,39,43,15)$。这时，$Z=30610$，也就是说，总的日人力成本为 30610 美元。

这个问题是线性规划不满足分割性假设时的一个示例。分配给每个班的代理数量需要为整数。严格地说，模型应该对每个决策变量有一个附加的约束，指定变量必须有一个整数值。增加这些约束将把这个线性规划模型转换为整数规划模型(见第 12 章)。

没有这些约束，上面给出的最优解结果也是整数值，所以不包括这些约束也没有害处(约束条件的形式使结果最可能成为整数)。如果某些变量结果是非整数的，最简单的方法就是取近似整数值(对这个例子取近似是可行的，因为所有的约束条件都是"≥"形式，且系数非负)。取

近似值并不能确保整数规划模型得到一个最优解,但对这么大的数取近似值所产生的误差在大多数实际情况中是可以忽略的。另一个选择是,利用第12章介绍的整数规划方法来精确求得整数值的最优解。

注意:问题中所有的约束函数都是收益约束。每个约束的左侧代表了某时段某个数量的代理带来的收益,右侧代表了那个收益的最低可接受水平。由于目标是最小化代理的总成本,服从于收益约束,这就是成本收益平衡问题的另一个例子(像放射治疗和空气污染例子)。

3.4.6 通过配送网络来配送货物

问题:Distribution 公司将在两个不同的工厂生产相同的新产品,然后,产品必须被运到两个仓库,每个工厂可供应任一仓库。图3.13给出了可用于运输的配送网络,其中 F_1 和 F_2 是两个工厂,W_1 和 W_2 是两个仓库。DC 是一个配送中心。从 F_1 和 F_2 运出的新产品数量在其左侧表示,W_1 和 W_2 可接受的数量在其右侧表示。每个箭头代表一个可行的运输路线。这样,从 F_1 运输到 W_2 有3条可行的路线($F_1 \to \text{DC} \to W_2$,$F_1 \to F_2 \to \text{DC} \to W_2$ 和 $F_1 \to W_1 \to W_2$)。从 F_2 到 W_2 只有一条路线($F_2 \to \text{DC} \to W_2$),到 W_1 有一条路线($F_2 \to \text{DC} \to W_2 \to W_1$)。每条运输线路的单位成本在箭头旁边列出。在 $F_1 \to F_2$ 与 $\text{DC} \to W_2$ 附近给出了这些路线的最大运输量。其他路线有足够的运输能力来处理两个工厂发出的任何货物。

需要做出决策的是每一条运输路线应该运输多少,目标是最小化总的运输成本。

作为线性规划问题建模:有7条运输线路,我们需要7个决策变量($x_{F_1\text{-}F_2}$,$x_{F_1\text{-DC}}$,$x_{F_1\text{-}W_1}$,$x_{F_2\text{-DC}}$,$x_{\text{DC-}W_2}$,$x_{W_1\text{-}W_2}$,$x_{W_2\text{-}W_1}$)来代表通过各自路线的运量。

对这些变量的值有若干约束。除了常规的非负约束外,还有两个上界约束,$x_{F_1\text{-}F_2} \leqslant 10$ 和 $x_{\text{DC-}W_2} \leqslant 80$,因为其受到 $F_1 \to F_2$ 和 $\text{DC} \to W_2$ 两条路线运输能力的限制。其他所有约束来自于5个网络流约束,每个对应5个定位点中的一个。这些约束有如下形式。

每个定位点的网络流约束为

$$\text{运出量} - \text{运入量} = \text{需求量}$$

如图3.13所示,需求量 F_1 是50、F_2 是40、W_1 是−30、W_2 是−60。

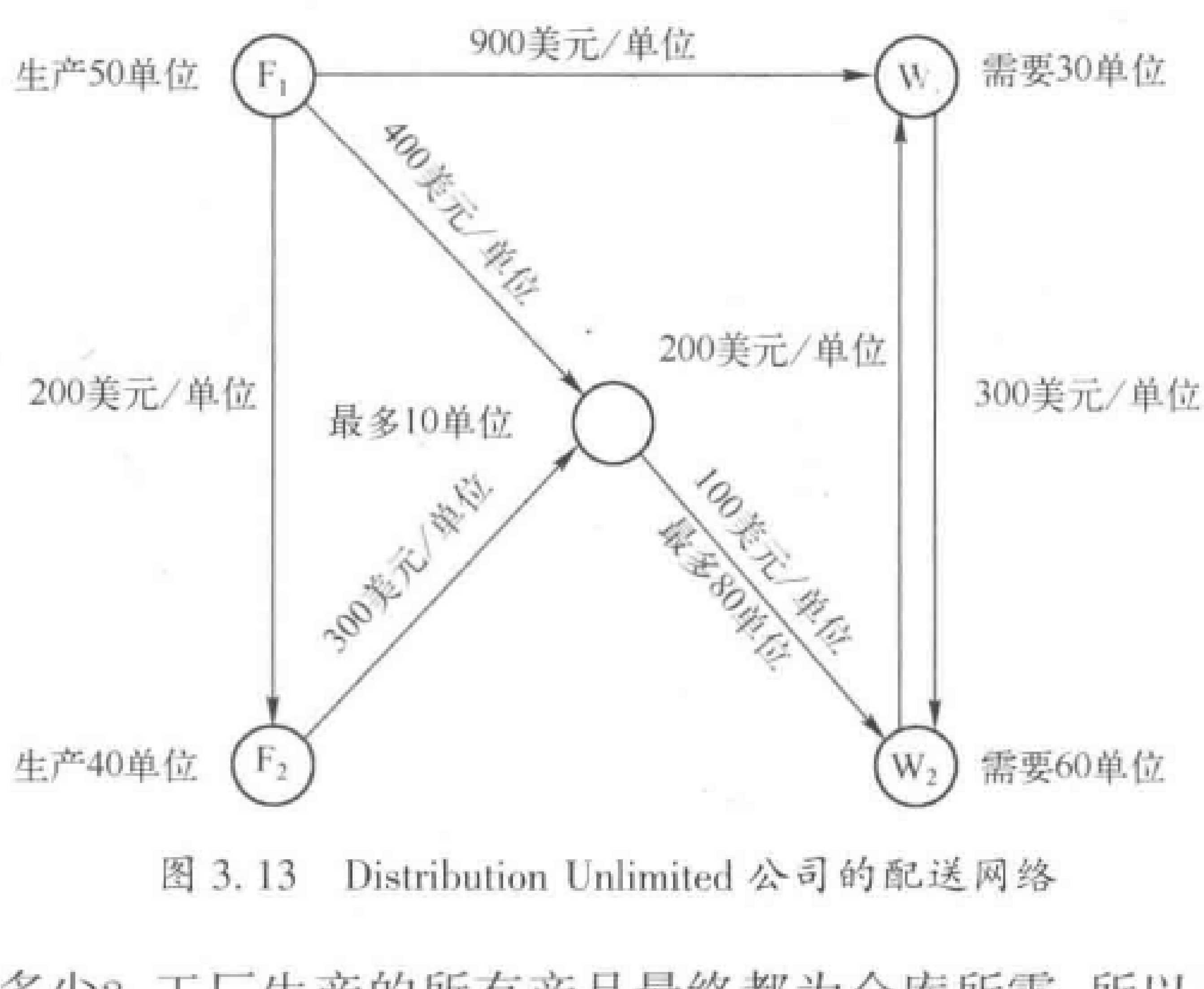


图3.13 Distribution Unlimited 公司的配送网络

DC 的需求量是多少?工厂生产的所有产品最终都为仓库所需,所以从工厂到配送中心的任何产品都应该被送往仓库。因此,从配送中心送到仓库的总运量应等于从工厂到配送中心的总运量。换句话说,这两个运量(网络流约束的需求量)的差值应为0。

由于目标是使总运输成本最小,目标函数的系数直接来自于图 3.13 中给出的单位运输成本。因此,通过在目标函数中使用百美元作为货币单位,完整的线性规划模型为

$$\text{Min } Z = 2x_{F_1\text{-}F_2} + 4x_{F_1\text{-DC}} + 9x_{F_1\text{-}W_1} + 3x_{F_2\text{-DC}} + x_{\text{DC-}W_2} + 3x_{W_1\text{-}W_2} + 2x_{W_2\text{-}W_1}$$

服从于以下约束。

(1) 网络流约束,即

$$\begin{aligned}
&x_{F_1\text{-}F_2} + x_{F_1\text{-DC}} + x_{F_1\text{-}W_1} = 50 (\text{工厂 } 1)\\
&-x_{F_1\text{-}F_2} + x_{F_2\text{-DC}} = 40 (\text{工厂 } 2)\\
&-x_{F_1\text{-DC}} - x_{F_2\text{-DC}} + x_{\text{DC-}W_2} = 0 (\text{配送中心})\\
&-x_{F_1\text{-}W_1} + x_{W_1\text{-}W_2} - x_{W_2\text{-}W_1} = -30 (\text{仓库 } 1)\\
&-x_{\text{DC-}W_2} - x_{W_1\text{-}W_2} + x_{W_2\text{-}W_1} = -60 (\text{仓库 } 2)
\end{aligned}$$

(2) 上界约束,即

$$x_{F_1\text{-}F_2} \leqslant 10, x_{\text{DC-}W_2} \leqslant 80$$

(3) 非负约束,即

$$\begin{aligned}
&x_{F_1\text{-}F_2} \geqslant 0, x_{F_1\text{-DC}} \geqslant 0, x_{F_1\text{-}W_1} \geqslant 0, x_{F_2\text{-DC}} \geqslant 0,\\
&x_{\text{DC-}W_2} \geqslant 0, x_{W_1\text{-}W_2} \geqslant 0, x_{W_2\text{-}W_1} \geqslant 0
\end{aligned}$$

你将在 10.6 节中会再次看到这个问题,那时,我们将关注这个类型(称为最小费用流问题)的线性规划问题。在 10.7 节中,我们将求到其最优解,即

$$\begin{aligned}
&x_{F_1\text{-}F_2} = 0, x_{F_1\text{-DC}} = 40, x_{F_1\text{-}W_1} = 10, x_{F_2\text{-DC}} = 40,\\
&x_{\text{DC-}W_2} = 80, x_{W_1\text{-}W_2} = 0, x_{W_2\text{-}W_1} = 20
\end{aligned}$$

得出总的运输成本为 49000 美元。

这个问题并不符合到目前为止介绍过的任何类型的线性规划问题。然而,这是一个固定需求问题,因为其主要的约束条件(网络流约束)都是固定需求约束。因为它们是等式约束,这些约束中的每一个都为固定需求,即该定位点的网络流出要求等于某一固定量。第 9 章和第 10 章将关注这一新类型的固定需求问题的线性规划问题。

3.5 用电子表格建立求解线性规划模型

电子表格软件,如 Excel 及其 Solver,是分析和求解小型线性规划问题的一个流行工具。线性规划模型的主要特征,包括其参数,能很容易地输入电子表格。尽管如此,数据表格软件除了显示数据还有更多功能。如果我们添加更多的附加信息,电子表格能用来快速分析潜在的解。例如,可以检查一个潜在的解是否可行,能够得到什么样的 Z 值(利润和成本)。电于表格的强大之处在于其能够快速揭示解的任何变化所带来的结果。

此外,Solver 能快速用单纯形法找到模型的最优解。我们在本节的靠后部分将详细描述这是如何实现的。

为了说明在电子表格上建立和求解线性规划模型的过程,现在我们回到 3.1 节中的 Wyndor 例子。

3.5.1 在电子表格上建立模型

通过将数据从表 3.1 转入电子表格,图 3.14 展示了 Wyndor 问题(列 E 和 F 被保留用于存储下面描述的输入项)。我们将显示数据的单元称为数据单元格。这些单元格以轻度阴影形式

表示来区别于电子表格中的其他单元格。①

	A	B	C	D	E	F	G
1	Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem						
2							
3			Doors	Windows			
4		Profit Per Batch ($000)	3	5			
5							Hours
6			Hours Used Per Batch Produced				Available
7		Plant 1	1	0			4
8		Plant 2	0	2			12
9		Plant 3	3	2			18

图 3.14 Wyndor 问题数据从表 3.1 转入数据单元格后的原始电子表格

应用案例

Welch 公司是世界上最大的康科德和尼亚加拉葡萄的加工厂,2012 年净销售额达到 6 亿 5000 万美元。像 Welch 葡萄果冻和 Welch 葡萄汁等产品已经被几代美国消费者所亲睐。

每年 9 月,农场主开始将葡萄运到加工厂,然后将原葡萄榨汁。在葡萄汁准备成为成品果酱、果冻、果汁、浓缩物之前,是需要花费时间的。

在需求变化并且收成质量和数量均不确定时,如何处理收获的葡萄是一项复杂的任务。典型的决策包括:主要产品用哪种制作方法、确定各工厂之间葡萄汁的运量、运输方式的选择等。

由于 Welch 公司没有优化原材料运输和用于生产制作方法的正式系统,运筹小组为该公司开发了一套初级的线性规划模型。这个大模型有 8000 个决策变量,聚焦到活动的细节。小规模的检验证明模型是有效的。

为了使模型更有用,该小组对模型进行了修改,以产品组的需求汇总取代了细节。这样将模型的规模减少到只有 324 个决策变量和 361 个约束函数。然后,模型被录入到电子表格中。

自 1994 年以来,Welch 公司每个月都会运行这个不断升级的电子表格模型,并且将 Solver 生成的最优物流计划信息提供给高层管理者。仅仅在第一年,应用和优化该模型大概节省了近 15 万美元。将线性规划模型转为电子表格的主要优点就是向具有不同数学理解水平的管理者解释该模型变得更容易了。这引发了一场对运筹研究方法的广泛赞赏。

资料来源:E. W. Schuster and S. J. Allen, "Raw Material Management at Welch's, Inc.," *Interfaces*, **28**(5):13-24, Sept.-Oct. 1998. (我们网站上提供了本文的链接 www.mhhe.com/hillier。)

后面将看到电子表格通过使用区域名很容易理解。区域名是赋予给定一簇单元格的描述名,使人能立即识别那是什么。这样,Wyndor 问题的数据单元被赋予区域名 UnitProfit(C4:D4),HoursUsedPerBatchProduced(C7:D9)和 HoursAvailable(G7:G9)。注意:在区域名中不能使用空格,每一个新的区域名用大写字母开头。要输入一个区域名,首先选择单元格的范围,然后单击电子表格顶部编辑栏左侧的名称框,并输入名称。

开始使用数据表格建立该问题的线性规划模型时,有 3 个问题需要回答。

(1) 需要做出什么决策?对于这个问题,必需的决策是两个新产品的生产率(每周生产的批数)。

(2) 这些决策有什么约束?这里的约束是这两种产品在各自工厂每周使用的生产时间小时数不能超过可用的小时数。

(3) 这些决策的总体绩效度量是什么?Wyndor 的总体绩效度量是每周两种产品的总利润,因此目标函数是最大化这个量。

图 3.15 显示了这些答案是如何被融入到电子表格中的。在第一个答案的基础上,两种产品的生产率被置于单元格 C12 和 D12 中并将其放在这些产品的列中,刚好在数据单元格下面。由于我们尚不知道这些生产率应是多少,此时,它们输入为 0(事实上,任何试验解都能够输入,尽

① 通过使用首页标签上的边界菜单按钮与填充颜色菜单按钮来添加边界和阴影。

管负的生产率应该排除,因为它们是不合理的)。之后,当求解生产率的最佳组合时,这些数字将被改变。

	A	B	C	D	E	F	G
1	Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem						
2							
3			Doors	Windows			
4		Profit Per Batch ($000)	3	5			
5					Hours		Hours
6			Hours Used Per Batch Produced		Used		Available
7		Plant 1	1	0	0	<=	4
8		Plant 2	0	2	0	<=	12
9		Plant 3	3	2	0	<=	18
10							
11			Doors	Windows			Total Profit ($000)
12		Batches Produced	0	0			0

图 3.15　初始试验解(两个生产率为 0)输入可变单元格(C12 和 D12)的 Wyndor 问题完整电子表格

因此,这些包括了需要决策的单元格称为可变单元格。为了突出可变单元格,它们加了阴影并加有边界(在运筹学课件的电子表格文件中,这些可变单元格在彩色显示器上显示为亮黄色)。这些可变的单元格被命名为 BatchesProduced(C12:D12)。

用问题 2 的答案,两种产品在各自工厂每周花费的生产时间总的小时数被输入到单元格 E7、E8 和 E9,刚好在相应的数据单元右侧。这 3 个单元格的 Excel 方程为

$$E7 = C7 * C12 + D7 * D12$$

$$E8 = C8 * C12 + D8 * D12$$

$$E9 = C9 * C12 + D9 * D12$$

其中每个星号表示相乘。由于这些单元格中的每个格提供了基于可变单元格(C12 和 D12)的输出,它们称为输出单元格。

注意:输出单元格的每个等式包括两个乘积之和。在 Excel 中有一个函数 SUMPRODUCT,它将对具有相同行和相同列的两个区域单元格的单独项相乘后再求和。对于被求和的每个乘积,是将在第一区域中的一项乘以在第二区域中相应位置的项得到的积。例如,考虑两个区域,C7:D7 和 C12:D12,因此每个区域都有一行两列。这种情况下,SUMPRODUCT(C7:D7,C12:D12)将区域 C7:D7 中的每个单独项,用区域 C12:D12 中的每个相应项去乘以它们,然后将这些单项乘积求和,如上第一个方程所示。用区域名 Batches Produced(C12:D12),表达式就变为 SUMPRODUCT(C7:D7,BatchesProduced)。尽管可以选择这么短的等式,但该函数作为长等式输入的简化是相当方便的。

接着,"≤"符号被输入到单元格 F7、F8 和 F9 表示每个左侧的总值不允许超过 G 列中相应的数字。电子表格仍将允许输入不符合"≤"符号的试验解。尽管如此,这些"≤"符号起到一个提醒作用,就是如果 G 列中的数字没有变化,这样的试验解需要被淘汰。

最后,由于第三个问题的答案是整体绩效为两种产品的总利润,这个利润(每周)将输入到单元格 G12 中。很像 E 列中的数字,它也是求积的和,即

G12=SUMPRODUCT(C4:D4,C12:D12)

用区域名 TotalProfit(G12)、ProfitPerBatch(C4:D4)和 BatchesProduced(C12:D12),该等式变为

TotalProfit=SUMPRODUCT(ProfitPerBatch,BatchesProduced)

这是一个用区域名使结果等式容易理解的很好的例子。不需要到电子表格中去看单元格 G12、C4:D4 和 C12:D12 是什么,区域名字立即就能揭示方程在做什么。

TotalProfit(G12)是一个特殊类型的输出单元格。它是一个特定的单元格，当做关于生产率的决定时其值要尽可能大。因此，TotalProfit(G12)称为目标单元格。目标单元格比可变单元格的阴影更深，而且通过加重的边界更容易区分出来(在运筹学课件包括的电子表格文件中，该单元格在彩色显示器上显示桔色)。

图3.16的底部汇总了需要输入到Hours Used列和Total Profit单元格的所有公式，也汇总列出了区域名称(字母序)和相应单元格。

	A	B	C	D	E	F	G
1		**Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem**					
2							
3			Doors	Windows			
4		Profit Per Batch ($000)	3	5			
5					Hours		Hours
6			Hours Used Per Batch Produced		Used		Available
7		Plant 1	1	0	0	<=	4
8		Plant 2	0	2	0	<=	12
9		Plant 3	3	2	0	<=	18
10							
11			Doors	Windows			Total Profit ($000)
12		Batches Produced	0	0			0

Range Name	Cells
BatchesProduced	C12:D12
HoursAvailable	G7:G9
HoursUsed	E7:E9
HoursUsedPerBatchProduced	C7:D9
ProfitPerBatch	C4:D4
TotalProfit	G12

	E
5	Hours
6	Used
7	=SUMPRODUCT(C7:D7,BatchesProduced)
8	=SUMPRODUCT(C8:D8,BatchesProduced)
9	=SUMPRODUCT(C9:D9,BatchesProduced)

	G
11	Total Profit
12	=SUMPRODUCT(ProfitPerBatch,BatchesProduced)

图3 16 Wyndor问题的电子表格模型，包括目标单元格TotalProfit(G12)的表达式和E列其他输出单元格，目的是最大化目标单元格

这时，完成了Wyndor问题电子表格的建立。

据此模型，分析任何关于生产率的试验解变得很容易。每次，生产率输入到单元格C12和D12中，Excel立即计算出关于使用时间和总利润的输出单元格。尽管如此，不是必须使用试验解。我们接着将描述Solver如何能用于快速找到最优解。

3.5.2 用Solver求解模型

Excel包含了一个称为Solver的工具，它用单纯形法寻找最优解。ASPE(在运筹课件中提供了Excel插件)包含了一个更先进的Solver版本也能用来求解相同问题。ASPE的Solver将在后续章节中介绍。

第一次使用标准的Solver时，需要安装它。单击Office按钮，选择Excel Options，然后单击窗口左边的Add-Ins，选择窗口底部的Manage Excel Add-Ins，然后单击Go按钮。确保在Add-Ins对话框中Solver被选中，然后它将会出现在Data标签上。对于Excel 2011(对于Mac)，从工具菜单中选择Add-Ins，然后确保Solver被选中。

开始时，通过将可变单元格置为0，输入任意的一个试验解，如图3.16所示。Solver将在求解问题后将其变为最优值

通过单击Data标签上的Solver按钮启动这个程序。Solver对话框如图3.17所示。

在Solver开始工作前，需要准确知道模型的每个部分在电子表格中的位置。Solver对话框被用来输入这些信息。你有机会来输入区域名字，在单元格地址中输入或在电子表格中单

击单元格①。图 3.17 给出了用第一个选项的结果，所以 TotalProfit(不是 G12)已经输入为目标单元格和 BatchesProduced(不是区域 C12:D12)已经输入为可变单元格。由于目的是最大化目标单元格，Max 也要被选中。

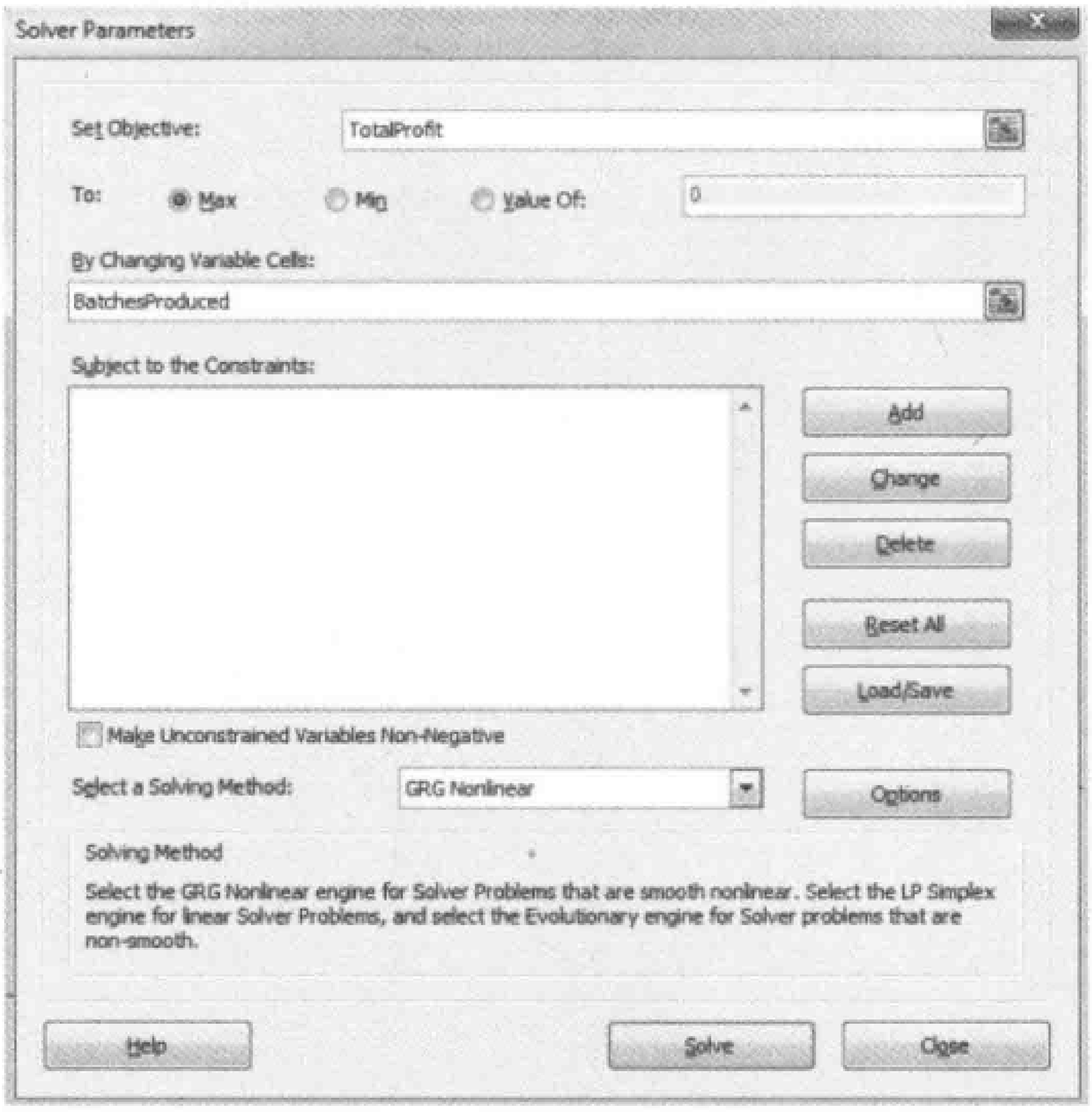


图 3.17　Solver 对话框对图 3.16 中的目标单元格和可变单元格进行了区分。它也表明了目标单元为求最大化值

接下来，包含约束函数的单元格需要进行指定。这通过单击位于 Solver 对话框上的 Add 按钮来完成。这将调出增加约束对话框，如图 3.18 所示。图 3.16 中 F7、F8 和 F9 单元格的"≤"符号提醒 HoursUsed(E7:E9)区域中的单元格都必须小于或等于 HoursAvailable(G7:G9)区域中相应的单元格。这些约束由 Solver 通过在增加约束对话框左边输入 HoursUsed(或 E7:E9)和在右边输入 HoursAvailable(或 G7:G9)进行区分。左右两边中间的符号，有一个菜单来选择≤(小于或等于)、=或≥(大于或等于)，这里选择"≤"。尽管之前就在电子表格的 F 列中输入"≤"符号，但这个选择也很有必要，因为 Solver 只会用增加约束对话框中指定的约束函数。

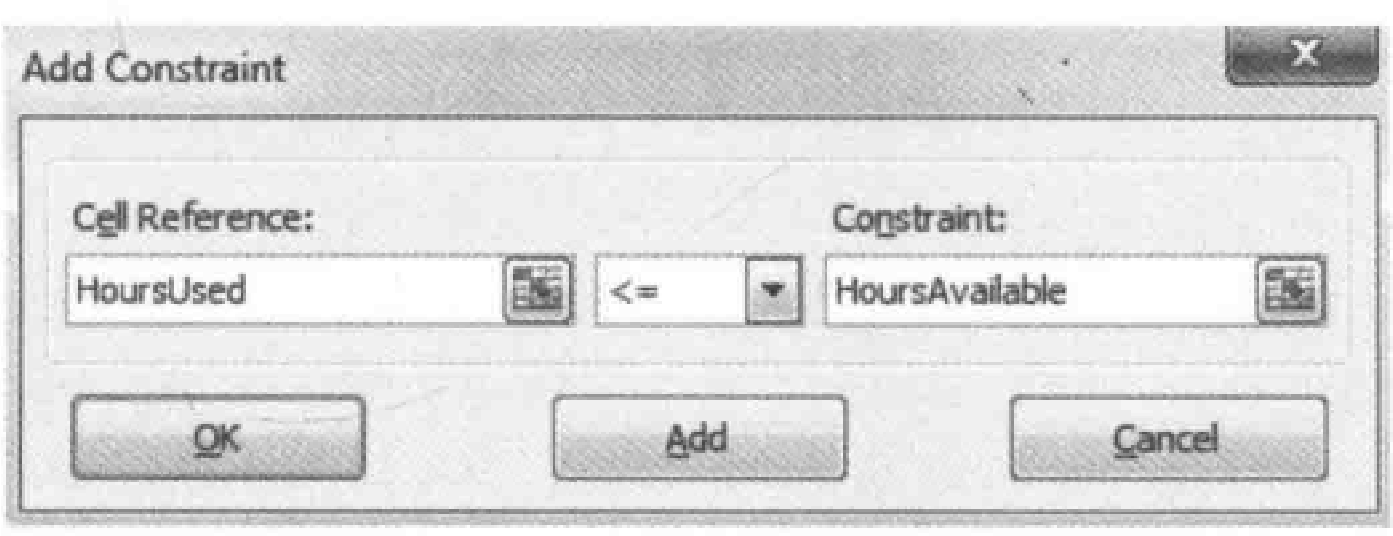


图 3.18　在输入约束集合 HoursUsed(E7:E9)≤ HoursAvailable(G7:G9)之后的增加约束对话框，它指定了图 3.16 中的 E7、E8、E9 单元格应分别小于或等于 G7、G8、G9 单元格

① 如果通过单击来选择它们，它们将首先出现在有单元格地址和美元符号(如 \$C\$9: \$D\$9)的对话框中。可以忽略美元符号，Solver 将最后使用相应的区域名代替单元格地址和美元符号(如果给定单元格地域的区域名已经定义)，但是仅限于在加入约束条件或者关闭和重打开 Solver 对话框后。

如果要增加更多的约束条件,应单击 Add 按钮来调出一个新的增加约束对话框。由于本例中没有更多的约束,下一步就是单击 OK 按钮返回 Solver 对话框。

在让 Solver 求解模型之前,还需要再完成两个步骤。我们需要告诉 Solver,对于可变单元格非负约束是必需的,淘汰负的生产率。还需要明确这是一个线性规划问题所以可以用单纯形法。在图 3.19 中有例子说明了这个问题,其中 *Make Unconstrained Variables Non-Negative* 选项已经被选中,在 *Solving Method* 中选择了 *Simplex LP*(而不是 *GRG Nonlinear* 或 *Evolutionary*,它们被用来求解非线性规划问题)。该图中列出的 Solver 对话框概括了完整的模型。

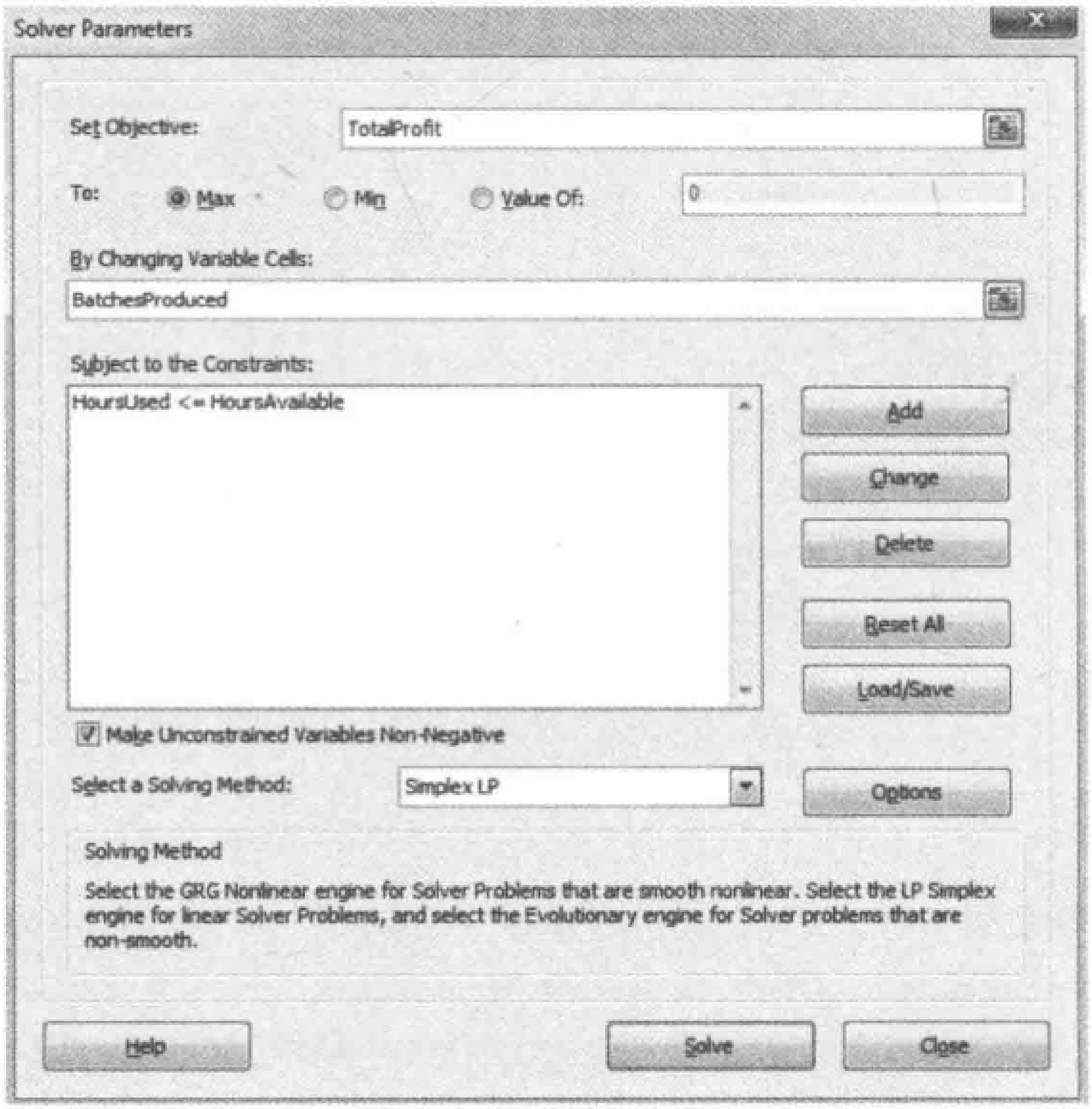


图 3.19 在电子表格中指定整个模型后的 Solver 对话框

现在可以准备单击 Solver 对话框中的 Solver 按钮,它将开始启动求解问题的后台进程。一转眼的功夫(对于小型问题),Solver 将显示结果。通常,它将显示其找到一个最优解,在 Solver Results 对话框中详细说明,如图 3.20 所示。如果模型没有可行解或没有最优解,对话框将表示为"Solver 无法找到最优解"或者"目标单元格值非凸"。对话框也提供了生成各种不同报告的选项。其中的一个(灵敏度报告)随后将在 4.7 节和 7.3 节中讨论。

模型求解后,Solver 将可变单元格中的原始数值替换成最优数值,如图 3.21 所示。因此,最优解就是每周生产 2 批门和 6 批窗,正如 3.1 节中图解法求解的结果一样。电子表格也能显示目标单元格中相应的数字(每周总利润为 36000 美元),以及输出单元格 HoursUsed(E7:E9)中的数字。

这时,你可能想检查一下,当数据单元格中的任何数字变成其他可能值时,最优解将发生什么变化。这很容易办到,因为在保存文件时,Solver 存储了所有目标单元格、可变单元格和约束等的地址。所有你需要做的就是将数据单元格按想要的进行改变,然后,再单击 Solver 对话框中的 Solver 按钮(4.7 节和 7.3 节将关注于这类灵敏度分析,包括如何用 Solver 的灵敏度报告来加速这类"如果……将发生什么变化"的分析)。

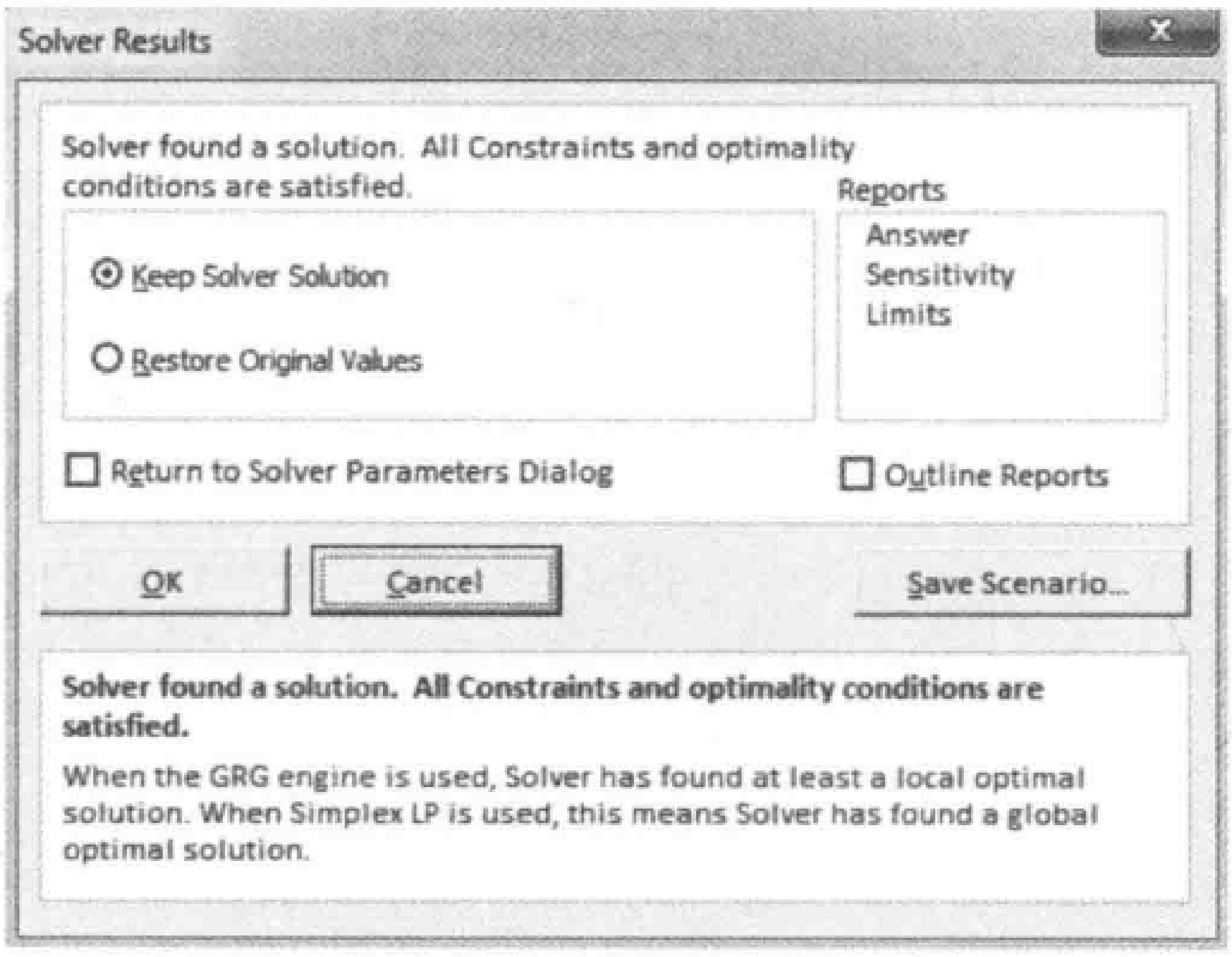


图 3.20　Solver 结果对话框表明已经找到一个最优解

	A	B	C	D	E	F	G
1		**Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem**					
2							
3			Doors	Windows			
4		Profit Per Batch ($000)	3	5			
5					Hours		Hours
6			Hours Used Per Batch Produced		Used		Available
7		Plant 1	1	0	2	<=	4
8		Plant 2	0	2	12	<=	12
9		Plant 3	3	2	18	<=	18
10							
11			Doors	Windows			Total Profit ($000)
12		Batches Produced	2	6			36

Solver Parameters
Set Objective Cell: TotalProfit
To: Max
By Changing Variable Cells:
BatchesProduced
Subject to the Constraints:
HoursUsed<= HoursAvailable
Solver Options:
Make Variables Nonnegative
Solving Method: Simplex LP

	E
5	Hours
6	Used
7	=SUMPRODUCT(C7:D7,BatchesProduced)
8	=SUMPRODUCT(C8:D8,BatchesProduced)
9	=SUMPRODUCT(C9:D9,BatchesProduced)

	G
11	Total Profit
12	=SUMPRODUCT(ProfitPerBatch,BatchesProduced)

Range Name	Cells
BatchesProduced	C12:D12
HoursAvailable	G7:G9
HoursUsed	E7:E9
HoursUsedPerBatchProduced	C7:D9
ProfitPerBatch	C4:D4
TotalProfit	G12

图 3.21　求解 Wyndor 问题后得到的电子表格

为了帮助你增加对这些变化的学习经验，你的运筹课件包含的本章（像其他章一样）Excel 文件，提供了一个该例子（Wyndor 问题和 3.4 节中的例子）完整的建模与求解的电子表格。我们鼓励你运行这些例子来看看不同数据时将发生什么变化等。你也会发现将这些电子表格作为模板来完成家庭作业是非常有用的。

此外，我们建议你用本章的 Excel 文件仔细观察 3.4 节中例题的电子表格建模形式。这将演示如何用电子表格建立比 Wyndor 问题更大型、更复杂的线性规划模型。

在后续章节中，你将看到如何用电子表格构建和求解各种 OR 模型的其他示例。本书网站上的附加章节也包括了一个完整的章节（第 21 章）介绍了电子表格的建模艺术。该章描述了建立电子表格模型的通用过程和基本原则，也给出了调试这些模型的方法。

3.5.3 用 ASPE 的 Solver 求解模型

Frontline Systems 是最先开发在 Excel 中嵌入标准 Solver(本节以后称为 Excel 的 Solver)的公司,并开发了 Solver 的 Premium 版,功能大大增加了。公司目前以一款相当强大的 Premium Solver 作为特色,称为分析求解平台。在本书的新版中,我们非常高兴地提供了从 Frontline Systems 公司得到 Excel 插件,分析求解平台教育版(ASPE)。安装这一软件的说明在本书最开始的页上(在扉页之前)以及在本书的网站 www. mhhe. com/hillier 上也给出了。

当 ASPE 安装后,在 Excel 功能区有一个称为分析求解平台的可用新标签。选择该标签将显示其功能区,如图 3.22 所示。在该功能区中的按钮将用于与 ASPE 交互。同样的图标也显示了 ASPE 的一个新特点——Solver Options and Model Specifications 窗格(列出目标单元格、可变单元格、约束条件等)——这些连同你的主电子表格都能被看到,并同时可视。通过单击 Analytic Solver Platform 功能区左边远处的 Model 按钮,这个窗格能够被触发开(为了看到模型)或者触发关(隐藏模型并为电子表格留出更多空间)。由于模型已经在前节中由 Excel 的 Solver 建立,也在 ASPE Model 窗格中建立,其目标指定为 TotalProfit(G12),可变单元格为 BatchesProduced(C12:D12),约束条件为 HoursUsed(E7:E9)<=HoursAvailable(G7:G9)。Excel 的 Solver 的数据与 ASPE 的数据相互兼容。改变其中一个也会同时改变另一个。因此,可以选择用 Excel 的 Solver,或者选择 ASPE,然后可以来回使用,并不会丢失任何 Solver 数据。

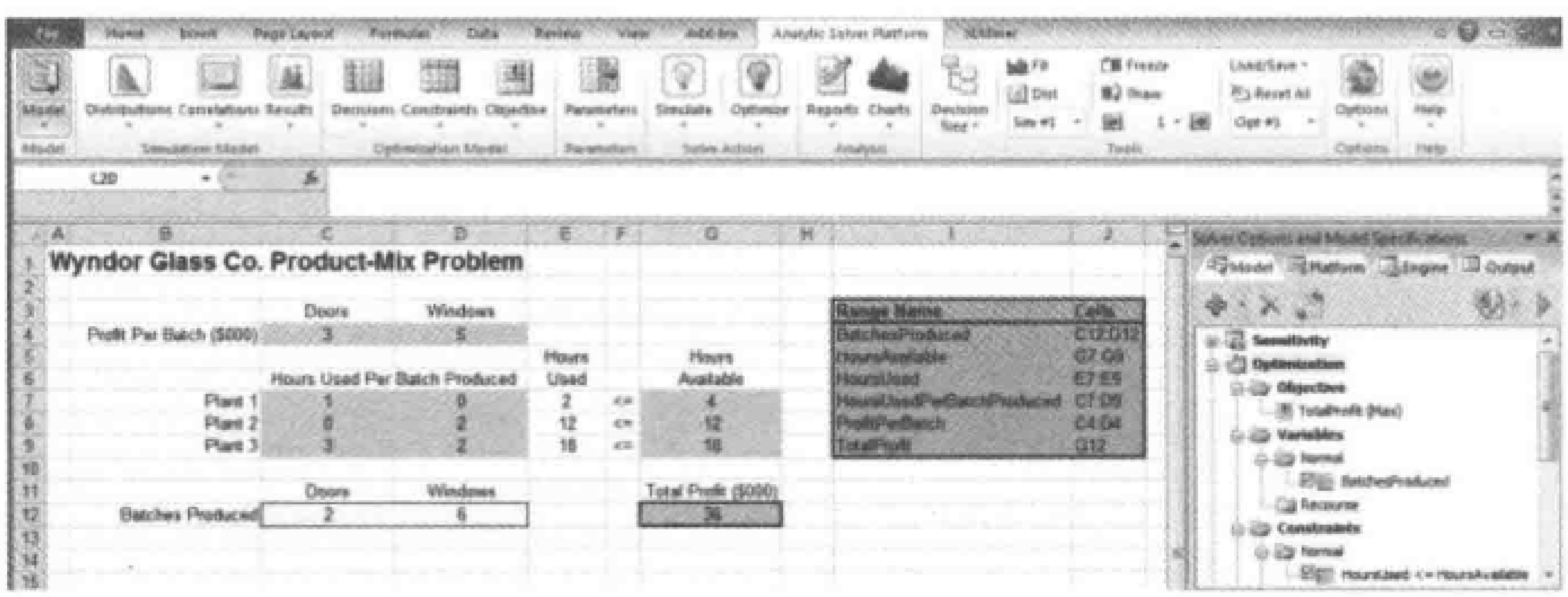


图 3.22 分析求解平台功能区和电子表格求解 Wyndor 问题连同 Solver Options and Model Specifications 窗格

如果模型之前并未用 Excel 的 Solver 建立,那用 ASPE 建模的步骤与在前节提到的用 Excel 的 Solver 步骤是相似的。两种情况下,我们需要指定目标单元格、可变单元格和约束条件的位置,然后点击来求解模型。尽管如此,用户界面会有些不同。ASPE 用 Analytic Solver Platform 功能区的按钮取代了 Solver 对话框。我们现在将同你一起经历用 ASPE 建立 Wyndor 问题模型的过程步骤。

指定 TotalProfit(G12)作为目标单元格,选择电子表格中的单元格然后单击 Analytic Solver Platform 功能区中的 Objective 按钮。这将有一个下拉菜单,可以选择最小化(Min)或最大化(Max)目标单元格。在 Min 或 Max 选项中是更进一步的选项(Normal、Expected、VaR 等)。现在,我们将一直选择 Normal 选项。

指定 UnitsProduced(C12:D12)作为可变单元格,选择电子表格中的这些单元格然后单击 Analytic Solver Platform 功能区的 Decisions 按钮。这时,将有一个下拉菜单,可以选择各个选项(Plot、Normal、Recourse)。对于线性规划,我们将一直选择 Normal 选项。

接着需要指定约束函数。对于 Wyndor 问题,约束函数为 HoursUsed(E7:E9)<=HoursAvailable(G7:G9)。为了在 ASPE 中输入这些约束,选择代表这些约束(HoursUsed,或 E7:

E9)左端项的单元格并单击 Analytic Solver Platform 功能区的 Constraints 按钮。这里有一个关于各种约束条件的下拉按钮。对于线性规划约束函数,选择 Normal Constraint 和需要的约束类型(<=、=或 >=)。对于 Wyndor 问题,选择"<=",然后将调出增加约束对话框,这非常像 Excel 的 Solver 中的增加约束对话框(图 3.18)。然后,用像 Excel 的 Solver 一样的方式输入约束。

通过如图 3.22 中右边的 Model 窗格来修改模型很容易。例如,要删去模型中的一个元素(如目标、单元格或约束),只需选择模型中对应的那个部分然后单击接近 Model 窗格顶部的红色×。要改变模型中的一个元素,双击模型窗格中的那个元素将调出一个对话框允许对模型的那个部分进行修改。

选择 Model 窗格顶部的 Engine 标签,将展示用来求解问题的算法及关于该算法各种选项的相关信息。顶部的下拉菜单将允许选择算法。对于线性规划模型(如 Wyndor 问题),将要选择 Standard LP/Quadratic Engine。这等价于在 Excel 的 Solver 中的 Simplex LP 选项。为了使无限制变量非负(正如在图 3.19 中用 Excel 的 Solver 所做的那样),要确保 Assume Non-negative 选项设为真。图 3.23 给出了完成这些选择后的模型窗格。

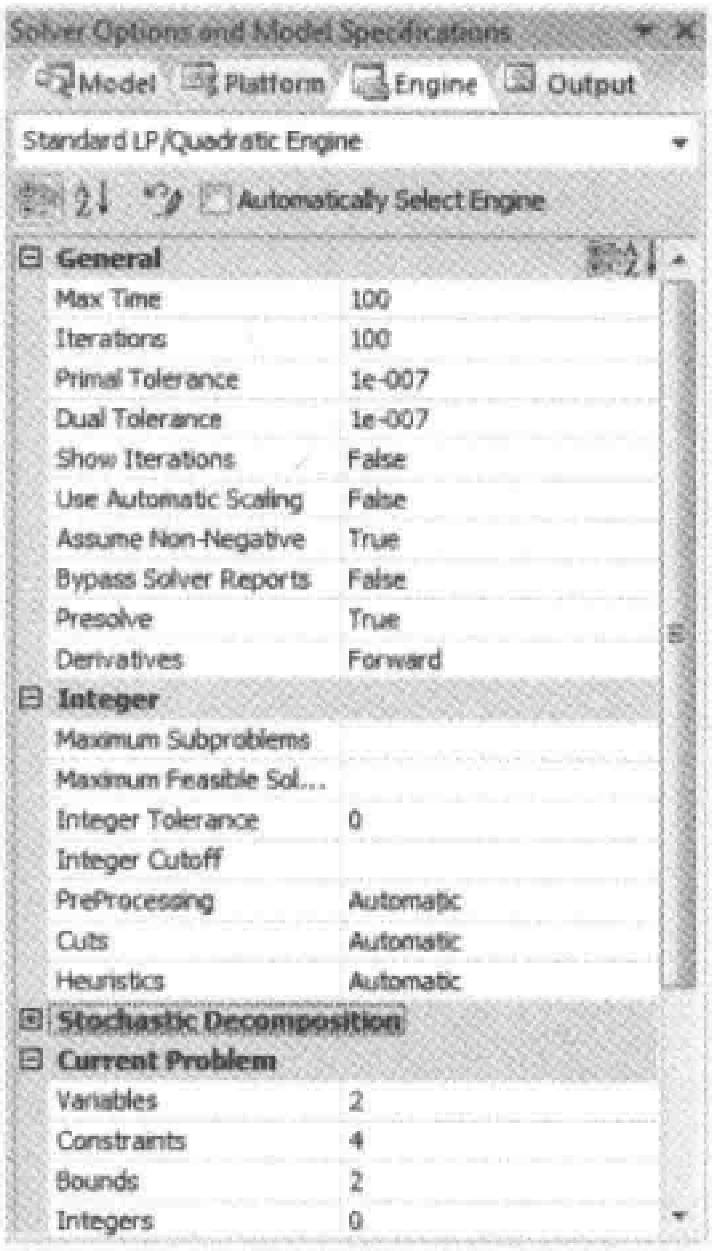


图 3.23 ASPE 中模型的 Engine 标签,包括选择求解引擎(本例中选择 Standard LP/Quadratic Engine)并将 Assume Non-negative 选项置为 True

一旦模型在 ASPE 中全部建完,通过单击 Analytic Solver Platform 功能区上的 Optimize 按钮,模型将被求解。正像 Excel 的 Solver 那样,这将展示在电子表格中求解模型的结果,如图 3.24 所示。在该图中,Model 窗格的 Output 标签也将列出求解过程的总结,包括消息(类似于图 3.20)"Solver 找到一个解,所有约束和最优化条件都被满足。"

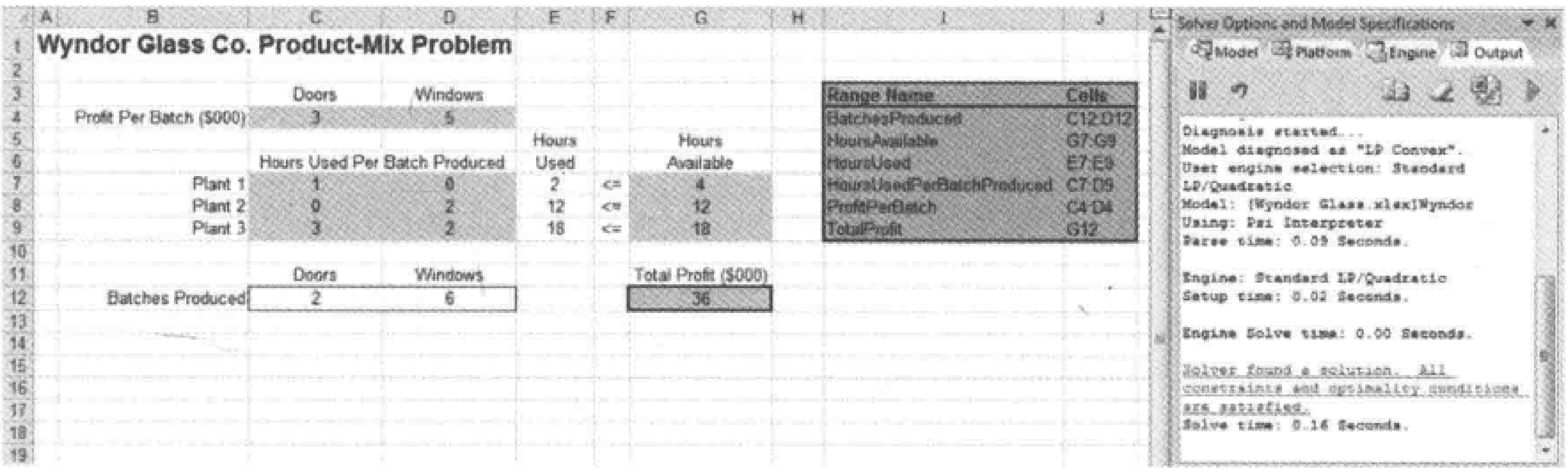


图 3.24 模型窗格的输出表格列出了 Wyndor 问题的求解过程总结

3.6 构建大型线性规划模型

线性规划模型有不同的规模。例如,3.1 节和 3.4 节中,模型的规模从 3 个约束条件 2 个决策变量(对于 Wyndor 公司问题和放射性治疗问题)到 17 个约束条件、12 个决策变量(对于 SAVE-IT 公司问题)。后者可能看起来像一个相当大规模的模型,毕竟要花费大量时间去记下这个规模的模型。但相反,本章应用案例给出的模型要远远大得多。

写出这些数学表达式是不现实的,这个模型规模并不罕见。实践中的线性规划模型通常有数百个或上千个约束条件。实际上,它们偶尔甚至有上百万个约束条件。决策变量的数量通常多于约束条件的数量,偶尔达到上百万。

构建如此恐怖的大型模型将是一项非常繁琐的工作。甚至一个有1000个约束条件和1000个决策变量的"中等规模"的模型就有超过100万个参数(包括约束条件中100万个系数)。对于这样的模型,写出这些代数表达式并将这些参数填写到电子表格中是相当不切实际的。

实践中,这些非常大的模型是如何表示的呢?这就需要用到建模语言。

3.6.1 建模语言

一种数学模型语言是指专门设计用来构建大型数学模型包括线性规划模型的软件,甚至包含上百万个约束条件,它们通常也只用很少的几类。同样,决策变量也将归为很少的几类。因此,运用数据库中大的数据块,建模语言用一条描述就能同时建立关于某型变量同一类型的约束。后面我们将举例说明这个过程。

除了高效地建立大模型,建模语言还能加快模型的管理任务,包括访问数据、把数据转为模型参数、需要时修改模型并分析模型的解。它也可以从决策者的视角生成总结报告,并存档模型内容。

最近几十年间,若干优秀的建模语言被开发出来,这其中包括AMPL、MPL、OPL、GAMS和LINGO。

其中一个的学生版MPL(Mathematical Programming Language),在本书网站上连同扩展辅导材料一起提供给你。由于后续的版本将在未来几年发布,最新的学生版也能从网站maximalsoftware.com上下载。MPL是Maximal软件公司的一个产品,它的一个特点就是能为MPL中的Excel提供扩展支持。这包括了从MPL中输入和输出Excel单元格。完整版通过OptiMax Component Library提供了Excel VBA宏语言以及各种编程语言,现在这些都包括在MPL中。这个特点允许将MPL模型完整融入Excel中并可以用MPL支持的强大工具求解。

LINGO是LINDO System公司的产品,也是市场上一个称为What's Best!的数据表格嵌入式优化器,其被设计用于大型工业问题,以及有一个称为LINDO API的调用子程序库。LINGO软件包括LINDO界面的一个子集,能为许多人通俗地介绍线性规划。具有LINDO界面的LINGO学生版也在本书网站中收录。所有LINDO System公司的产品都可从www.lindo.com下载。像MPL、LINGO是一个强大的多功能建模语言。LINGO的一个显著特点是其处置包括线性规划模型在内的各种运筹学问题的强大灵活性。例如,当处理高度非线性模型时,它包含一个全面优化器将用于找出全局最优解(更多内容参见13.10节)。最新版的LINGO也内置了编程语言,这样就能像执行部分程序来解决若干不同的优化问题那样处理问题,在执行运行参数分析(如4.7节和8.2节中所述)任务时非常有用。另外,LINGO具有求解随机规划问题(7.4节的主题)的特殊能力,用各种函数来计算最盈利的分布和运行扩展图形分析。

本书网站包含了MPL、LINGO和LINDO对书中几乎每个示例的建模和求解,对这些示例,建模语言和优化器基本上均可使用。

现在看一个简单的例子来说明怎样会产生一个非常大规模的线性规划模型。

应 用 案 例

一个国家金融基础的重要部分就是其证券市场。通过允许大量金融机构及其客户交易股票、债券以及其他金融证券,他们的证券市场有助于为公共和私人机构提供资金。因此,证券市场的充分运行在国家的经济增长提供平台方面发挥了重要作用。

每个中央证券管理处及其能够快速处理证券交易的系统是证券市场的运行支撑的组成部分,也是金融系统稳定的重要部

分。在墨西哥,一个称为 INDEVAL 的机构为整个国家提供了中央证券管理及其证券处理系统。这个证券处理系统为交易中的各方提供电子条目、修改现金和证券余额查询服务。

INDEVAL 日均处理的证券交易总值超过 2500 亿美元,这使 INDEVAL 成为墨西哥整个金融部门的主要流动性通道。因此,INDEVAL 的系统对于清算证券交易是非常有效的一个系统,能够使交易后几乎同时交付的货币数量最大化,这是相当重要的。由于以前对该系统不满意,INDEVAL 的董事会在 2005 年安排了一个重要的研究来完全重新设计这个系统。

在投入超过 12000 人时的工作量重新设计后,新系统在 2008 年 11 月成功启用。新系统的核心就是一个大型的线性规划模型,每天多次应用于选择上千个待处理交易中哪个应当用存款人的可用余额来快速处理。线性规划非常适合这个应用,因为在考虑各相关约束时,大型模型能被快速求解以最大化交易处理额。

这个线性规划的应用减少了每日流动性需求 1300 亿美元,已经大大提高并增强了墨西哥金融基础。它也减少了市场参与者的盘中融资成本每年超过 1500 亿美元。这一应用使 INDEVAL 在 2010 国际评奖中,赢得了运筹与管理科学成就领域弗朗茨·爱德曼(Franz Edelman)奖著名的一等奖。

参考资料:D. Muñoz, M. de Lascurain, O. Romeo-Hernandez, F. Solis, L. de los Santoz, A. Palacios-Brun, F. Herrería, and J. Villaseñor, "INDEVAL Develops a New Operating and Settlement System Using Operations Research," *Interfaces* 41, no. 1 (January-February 2011), pp. 8-17. (我们网站提供了这篇文章链接,www. mhhe. com/hillier。)

3.6.2　一个有巨大模型的问题实例

Worldwide 公司的管理层需要处理一个产品结构问题,这是一个比 3.1 节介绍的 Wyndor Glass 公司产品结构问题更加复杂的问题。该公司在世界各地有 10 家工厂,每家工厂生产相同的 10 种产品,然后在各自区域销售。未来的 10 个月中各月对每家工厂每种产品的需求(销售潜力)是已知的。尽管在指定月份中一家工厂销售的产品数量不能超过需求,但生产的数量可以更大,其中超出的数量将在库存中存储供下月销售(每月有一定的存储成本)。在库存中每单位的每种产品占据相同的库存空间,每家工厂存储的产品总数量有一个上限(库存能力)。

每家工厂有相同的 10 个生产线(我们将它们称为机器),每个生产线用于生产 10 种产品中的任意一种。每一种产品的单位生产成本和产品的生产率(每天生产产品的单位数)依赖于所使用的工厂和机器的结合(但不是当月)。工作天数的数量(可用生产天数)不同月之间有变化。

由于一些工厂和机器比其他工厂和机器能够以更低的成本或更快的速度生产,有时候将一些产品从一个工厂运到另一个工厂销售是值得的。对于每个运出产品的工厂(出厂)和运入产品的工厂(入厂)组合,任何产品的单位运输成本是固定的,所有产品的单位运输成本是相同的。

管理层现在需要确定每种产品每月在每家工厂的每种机器上应该生产多少,每月每家工厂每种产品应该出售多少,每月每家工厂应该运输每种产品多少到其他工厂。考虑到每种产品的世界性价格,目标是找出使总利润最大时的可行计划(总销售额减去产品生产的总成本、库存成本和运输成本之和)。

我们应该再次注意到这是一个在许多方面简化了的例子。我们已经假设工厂、机器、产品、月份都一样(都是 10)。在多数实际情况下,产品的数量可能远远大于此数并且规划周期可能远远长于 10 个月,而机器(生产线的类型)的数目可能少于 10。我们也假设每个工厂有同样类型的机器(生产线),并且每种机器类型能生产各种产品。实际上,工厂在机器的类型和它们能生产的产品上可能会有一些不同。最终结果是,一些公司相应的模型可能比这个例子的模型规模小,但有一些公司的模型可能远远大于这个例子的规模(可能是巨大的)。

3.6.3　导出模型的结构

由于库存成本和有限的库存能力,必须跟踪每月每家工厂每种产品的库存数量。因此,线性规划模型必须有 4 个决策变量:生产数量、库存数量、销售数量和运输数量。10 家工厂、10 种机器、10 种产品和 10 个月,这就给出了总共 21000 个决策变量,列出如下。

(1) 决策变量

10000个生产变量:每个代表工厂、机器、产品和月份的一个组合。

1000个库存变量:每个代表工厂、产品和月份的一个组合。

1000个销售变量:每个代表工厂、产品和月份的一个组合。

9000个运输变量:每个代表产品、月份、工厂(出厂)和另一个工厂(入厂)的一个组合。

将这些决策变量中的每一个乘以对应的单位成本或者单位收入,然后求总和,目标函数计算如下。

(2) 目标函数为

$$\text{Max 利润} = \text{总销售额} - \text{总成本}$$

其中

$$\text{总成本} = \text{总生产成本} + \text{总库存成本} + \text{总运输成本}$$

当最大化这个目标函数时,21000个决策变量需要满足非负约束和四类约束条件——生产能力约束、工厂平衡约束(为库存变量提供合适值的等式约束)、最大库存约束和最大销售约束。如下所列,有一共3100个约束,但每种类型的所有约束都遵循相同的模式。

(3) 约束函数

1000个生产能力约束(每个代表工厂、机器和月份的一个组合)为

$$\text{使用的生产天数} \leqslant \text{可用的生产天数}$$

式中:左侧是10项之和,每项代表每种产品,表示产品的产量(一个决策变量)除以产品的生产率(已知常数)。

1000个工厂平衡约束(每个代表工厂、产品和月份的一个组合)为

$$\text{生产数量} + \text{上个月库存} + \text{运入数量} = \text{销售量} + \text{当前库存} + \text{运出数量}$$

式中:生产数量为表示机器产量的决策变量之和;运入数量为从其他工厂运来数量的决策变量之和;运出数量为对应运往其他工厂数量的决策变量之和。

100个最大库存量约束(每个代表工厂和月份的一个组合)为

$$\text{总库存} \leqslant \text{库存能力}$$

式中:左边代表每种产品库存量的决策变量之和。

1000个最大销售约束(每个代表工厂、产品和月份的一种组合)为

$$\text{销售量} \leqslant \text{需求量}$$

现在让我们来看看MPL建模语言如何非常简洁地建立这个巨大的模型。

3.6.4 用MPL建模

建模工具开始赋予模型一个名字,然后列出问题每个实体的索引,具体如下。

```
TITLE
  Production_Planning;
INDEX
product := A1..A10;
month := (Jan,Feb,Mar,Apr,May,Jun,Jul,Aug,Sep,Oct);
plant := p1..p10;
fromplant := plant;
toplant := plant;
machine := m1..m10;
```

除了月份以外，右边的输入项对应各自产品、工厂和机器的任意标记，同样的标记也用在数据文件中。注意：每个输入项名字的后面有一个冒号，在每个语句的结尾有一个分号（一个语句可以扩展超过不止一行）。

大型模型的大量工作就是向数据文件中收集和组织不同类型的数据。数据文件可能是密集式或者稀疏式的。在密集式中，数据文件包含每一个可能的所有索引值组合的输入。例如，假设数据文件中包括不同工厂用不同的机器（生产线）生产不同的产品的生产率。密集式中，文件包括工厂、机器、产品的所有组合输入。尽管如此，输入的大部分组合可能是 0，因为某些工厂可能并没有某些机器，即使有，对于某些工厂某些机器来说可能不生产某些产品。密集式中非零输入的百分比被定义为数据集的密度。在实践中，大数据集低于 5% 的密度是很常见的，经常有低于 1% 的情况。有如此低密度的数据集称为稀疏的。在这种情形下，以稀疏式使用数据文件更有效。这种形式中，只有非零值（和其对应的索引值的标识）才能输入数据文件。通常，稀疏式数据可以从文本文件或者从公共数据库中读取。高效处理稀疏数据集的能力是成功建立和求解大规模优化模型的关键。MPL 能够使用密集式和稀疏式两种数据。

在 Worldwide 公司的例子中，需要建立产品价格、需求、产品成本、生产率、可用生产天数、库存成本、库存能力、运输成本 8 个数据文件。我们假设这些数据文件都是可用的稀疏式的。下一步就是为每一个文件赋一个简短的建议名称，识别（包括方括号）该型数据的索引，具体如下。

```
DATA
Price[product] := SPARSEFILE("Price.dat");
Demand[plant,product,month] := SPARSEFILE("Demand.dat");
ProdCost[plant,machine,product] := SPARSEFILE("Produce.dat",4);
ProdRate[plant,machine,product] := SPARSEFILE("Produce.dat",5);
ProdDaysAvail[month] := SPARSEFILE("ProdDays.dat");
InvtCost[plant,product] := SPARSEFILE("InvtCost.dat");
InvtCapacity[plant] := SPARSEFILE("InvtCap.dat");
ShipCost[fromplant,toplant] := SPARSEFILE ("ShipCost.dat");
```

为了举例说明这些数据文件的内容，考虑这样一个文件，它提供了生产成本和生产率。这里有一个稀疏文件 produce.dat 前几项的样本：

```
!
  ! Produce.dat - Production Cost and Rate
  !
  ! ProdCost[plant,machine,product]:
  ! ProdRate[plant,machine,product]:
  !
    p1,m11,A1,73.30,500,
    p1,m11,A2,52.90,450,
    p1,m12,A3,65.40,550,
    p1,m13,A3,47.60,350,
```

接下来，建模工具为每种类型的决策变量赋予了一个简短的名称。在名称后的方括号内，是脚本运行的索引。

```
VARIABLES
  Produce[plant,machine,product,month] -> Prod;
```

```
Inventory[plant,product,month] -> Invt;
Sales[plant,product,month] -> Sale;
Ship[product,month,fromplant,toplant]
  WHERE (fromplant<> toplant);
```

当决策变量的命名长度多于4个字母时,右边指向4个字母缩写的箭头满足许多求解工具对名称长度的限制。最后一行表示出厂下标和入厂下标不允许有相同的值。

写下模型前还需要做一个额外的步骤。即为了使模型易读,先引入宏,代表目标函数的和是非常有用的。

```
MACROS
  Total Revenue := SUM(plant,product,month:Price * Sales);
  TotalProdCost := SUM(plant,machine,product,month:
                   ProdCost * Produce);
  TotalInvtCost := SUM(plant,product,month:
                   InvtCost * Inventory);
  TotalShipCost := SUM(product,month,fromplant,toplant:
                   ShipCost * Ship);
  TotalCost := TotalProdCost + TotalInvtCost + TotalShipCost;
```

前4个宏用了MPL的关键词SUM执行求和。紧接着每个SUM关键词(括号里面的)的,先是运行求和的索引。接着(冒号后)的是一个向量积,它由数据向量(一个数据文件)乘以一个变量的向量(四类决策变量中的一种)得到。

现在这个有3100个约束函数和21000个决策变量的模型,能够以下面的简洁形式记录下来。

```
MODEL
  MAX Profit =TotalRevenue - TotalCost;
SUBJECT TO
  ProdCapacity[plant,machine,month] -> PCap:
    SUM(product:Produce/ProdRate) <= ProdDaysAvail;
    PlantBal[plant,product,month] -> PBal:
    SUM(machine:Produce) + Inventory [month - 1]
  + SUM(fromplant:Ship[fromplant,toplant:= plant])
=
    Sales + Inventory
  + SUM(toplant:Ship[fromplant:=plant,toplant]);
  MaxInventory [plant,month] -> MaxI:
    SUM(product:Inventory) <= InvtCapacity;
BOUNDS
    Sales <= Demand;
END
```

对于这4种类型中的每种约束,第一行给出了该类型的名称。名称后方括号内的索引值的每个组合就是该类型的一个约束。括号的右边,箭头指向了求解工具能使用的缩写为4个字母的名称。第一行下面,该类型通用形式的约束条件用SUM运算显示。

对于每一个生产能力约束,将由决策变量(该月该工厂该机器上该产品的产量)组成的求和

计算中的每一项除以相应的生产率,得到了用掉的生产天数。求和后得到该月该工厂该机器用掉的生产天数的总和,因此这个数一定不超过可用的生产天数。

对每个工厂、产品和月份平衡约束的目的是为了给出当前库存变量的正确值,给出所有其他决策变量的值包括上月的库存水平。这些约束中每个 SUM 运算都包括简单的决策变量求和,而不是向量积。这种情况也适用于最大库存约束的 SUM 运算。相反,最大销售约束的左边恰恰是1000 个关于工厂、产品和月份的组合的单个决策变量(将这些单个决策变量的上界约束从常规的约束函数中分离出来是有好处的,因为通过使用 8.3 节介绍的上界法能够提高计算效率)。这里没有下界约束,因为 MPL 自动假设 21000 个决策变量有非负约束,除非特别定义非零下界。对于 3100 个约束函数中的每个约束函数,注意:左边是关于决策变量的线性函数,右边是从有关数据文件中读取的常量。因此,目标函数也是关于决策变量的线性函数,这个模型是个合法的线性规划模型。

为了求解这个模型,MPL 支持安装于其中的各种先进的求解工具(求解线性规划及其他运筹模型的软件包)。正如 1.5 节曾提到的,这些求解工具包括 CPLEX、GUROBI、CoinMP 和 SULUM,它们都可以相当高效地求解非常大型的线性规划模型。在你的运筹课件中的 MPL 学生版也已经安装了这 4 个求解工具的学生版本。以 CPLEX 为例,其学生版用单纯形法求解线性规划模型。因此,求解用 MPL 建立的模型,不得不从 Run 菜单或者单击工具栏上的 Run Solve 按钮选择 Solve CPLEX,然后将通过单击 Status 窗口底部的 View 按钮可以在窗口中显示解的文件。对于特别大的线性规划模型,1.5 节指出了学术用户能够获得完整版的带有 CPLEX 和 GUROBI 的 MPL 用于其课程作业。

上面对 MPL 的简要介绍,说明建模者能够很容易地用该建模语言以清晰规范的方式建立大型线性规划模型。为了帮助使用 MPL ,本书网站也收录了一个 MPL 教程。该教程通过建立这里讨论的生产计划模型的一个小版本的例子进行详细介绍。还可以在本书网站的其他地方看到本章和随后各章的其他线性规划的例子将采用 MPL 建模,并用 CPLEX 求解。

3.6.5 LINGO 建模语言

LINGO 是本书描述的另一个流行的建模语言。LINDO Systems 公司开发了 LINGO,因其易于使用的优化工具而知名,LINDO 是 LINGO 软件的子集。LINDO Systems 同时开发电子表格求解器 What's Best! 和一种被称为求解器库的产品 LINDO API。LINGO 的学生版在本书网站上有提供(上述软件的最新试用版本可从网站 www.lindo.com 上下载)。LINDO 和 What's Best! 共享 LINDO API 作为求解引擎。LINDO API 有基于单纯形法和内点/障碍算法的求解器(见 4.9 节和 7.4 节的讨论),求解机会约束模型(见 7.5 节)的特殊求解器和随机规划问题(见 7.6 节)的求解器,以及非线性规划(见第 13 章)的求解器,甚至包括求解非凸规划的全局求解器。

与 MPL 一样,LINGO 能够使建模者以简洁清晰的方式有效地构建大型线性规划模型,并将数据从模型构建中分离出来。这种分离意味着当描述问题的数据需要每天(甚至每分钟)都发生变化时,使用者仅仅需要变化数据,而不需要关心模型。可以用较少的数据集建立模型,然后为模型提供大的数据集,模型的式子将随新数据集自动调整。

LINGO 用集合作为基础的概念。例如,在 Worldwide 公司生产计划问题中,关心的简单或原始的集合为产品、厂房、机器和月份。每个集合的每个元素可能有一个或多个与其相关的属性,如产品的价格、厂房的存储能力、机器的生产率、一个月内可用生产天数。这些属性的一部分是输入数据,而其他的,像生产和运输量是模型的决策变量。也可以定义由其他集合组合而成的导出集合。与 MPL 一样,SUM 运算通常用于记下紧缩形式的目标函数和约束条件。

LINGO有一个纸制手册,整个手册也可通过Help命令在LINGO中直接使用,并可通过各种方法被搜索到。

本书网站在本章的附加内容中对LINGO作了进一步描述并用一对小型例子进行了说明。第二个附加内容阐述了LINGO如何用于建立Worldwide公司生产计划示例模型。第4章结尾的附录4.1也提供了运用LINDO和LINGO的说明介绍。此外,网站的LINGO教程提供了用建模语言进行基础建模所需的细节。网站还收录了本章以及其他章中用LINGO对各类例子的建模和求解应用。

3.7 结　论

线性规划是一个处理资源分配问题、成本收益平衡问题和需求满足问题以及其他类似数学问题的强大方法。它已经成为对于许多商业和工业组织都非常重要的标准工具。进而,几乎所有的社会组织在一定程度上都有类似的问题,关于线性规划非常广泛的应用日益获得人们的认可。

然而,并不是所有的这类问题都能被构建为线性规划模型,即便只是一个合理的近似。当一个或多个线性规划假设被严重破坏时,就应该考虑用其他的数学规划模型代替,如整数规划模型(第12章)或者非线性规划模型(第13章)。

参考文献

[1] Baker, K. R.: *Optimization Modeling with Spreadsheets*, 2nd ed., Wiley, New York, 2012.

[2] Denardo, E. V.: *Linear Programming and Generalizations: A Problem-based Introduction with preadsheets*, Springer, New York, 2011, chap. 7.

[3] Hillier, F. S., and M. S. Hillier: *Introduction to Management Science: A Modeling and Case Studies Approach with Spreadsheets*, 5th ed., McGraw-Hill/Irwin, Burr Ridge, IL, 2014, chaps. 2, 3.

[4] *LINGO User's Guide*, LINDO Systems, Inc., Chicago, IL, 2011.

[5] *MPL Modeling System* (*Release* 4.2) manual, Maximal Software, Inc., Arlington, VA, e-mail: info@maximalsoftware.com, 2012.

[6] Murty, K. G.: *Optimization for Decision Making: Linear and Quadratic Models*, Springer, New York, 2010, chap. 3.

[7] Schrage, L.: *Optimization Modeling with LINGO*, LINDO Systems Press, Chicago, IL, 2008.

[8] Williams, H. P.: *Model Building in Mathematical Programming*, 4th ed., Wiley, New York, 1999.

一些成功的线性规划应用

(我们网站www.mhhe.com/hillier提供了下面所有文章的链接。)

[A1] Ambs, K., S. Cwilich, M. Deng, D. J. Houck, D. F. Lynch, and D. Yan: "Optimizing Restoration Capacity in the AT&T Network," *Interfaces*, **30**(1): 26-44, January-February 2000.

[A2] Caixeta-Filho, J. V., J. M. van Swaay-Neto, and A. de P. Wagemaker: "Optimization of the Production Planning and Trade of Lily Flowers at Jan de Wit Company," *Interfaces*, **32**(1): 35-46, January-February 2002.

[A3] Chalermkraivuth, K. C., S. Bollapragada, M. C. Clark, J. Deaton, L. Kiaer, J. P. Murdzek, W. Neeves, B. J. Scholz, and D. Toledano: "GE Asset Management, Genworth Financial, and GE Insurance Use a Sequential-Linear-Programming Algorithm to Optimize Portfolios, *Interfaces*, **35**(5): 370-380, September-October 2005.

[A4] Elimam, A. A., M. Girgis, and S. Kotob: "A Solution to Post Crash Debt Entanglements in Kuwait's al-Manakh Stock Market," *Interfaces*, **27**(1): 89-106, January-February 1997.

[A5] Epstein, R., R. Morales, J. Serón, and A. Weintraub: "Use of OR Systems in the Chilean Forest Industries," *Interfaces*, **29**

(1):7-29, January-February 1999.

[A6] Feunekes, U., S. Palmer, A. Feunekes, J. MacNaughton, J. Cunningham, and K. Mathisen: "Taking the Politics Out of Paving: Achieving Transportation Asset Management Excellence Through OR," *Interfaces*, **41**(1):51-65, January-February 2011.

[A7] Geraghty, M. K., and E. Johnson: "Revenue Management Saves National Car Rental," *Interfaces*, **27**(1):107-127, January-February 1997.

[A8] Leachman, R. C., R. F. Benson, C. Liu, and D. J. Raar: "IMPReSS: An Automated ProductionPlanning and Delivery-Quotation System at Harris Corporation—Semiconductor Sector," *Interfaces*, **26**(1):6-37, January-February 1996.

[A9] Mukuch, W. M., J. L. Dodge, J. G. Ecker, D. C. Granfors, and G. J. Hahn: "Managing Consumer Credit Delinquency in the U. S. Economy: A Multi-Billion Dollar Management Science Application," *Interfaces*, **22**(1):90-109, January-February 1992.

[A10] Murty, K. G., Y.-w. Wan, J. Liu, M. M. Tseng, E. Leung, K.-K. Lai, and H. W. C. Chiu: "Hongkong International Terminals Gains Elastic Capacity Using a Data-Intensive DecisionSupport System," *Interfaces*, **35**(1):61-75, January-February 2005.

[A11] Yoshino, T., T. Sasaki, and T. Hasegawa: "The Traffic-Control System on the Hanshin Expressway," *Interfaces*, **25**(1):94-108, January-February 1995.

习　题

一些习题(或其部分)左边的符号有如下含义。

D:前面列出的相应演示示例可能会有帮助。

I:你将发现使用 IOR Tutorial 中相应的程序是非常有帮助的(打印出工作记录)。

C:用单纯形法通过计算机求解习题。做这个工作可利用的软件包括 Excel 的 Solver 和 ASPE(见 3.5 节)、MPL/Solvers(见 3.6 节)、LINGO(本书网站上本章补充材料 1、2 和附录 4.1)和 LINDO(附录 4.1),但要按照导师给你的选择意见来使用软件。当一个习题需要用 Solver 去求解模型时,你可以使用 Excel 的 Solver 或者 ASPE 的 Solver。

题号上有星号表示书后至少会给出该题的一部分答案。

3.1-1　阅读在 3.1 节应用案例中总结的充分描述运筹研究的参考文章。简要描述该研究中是如何应用线性规划的,然后列出从研究中总结出的各种金融和非金融收益。

D 3.1-2*　对以下每个约束,分别画图来表示满足该约束的非负解。

(a) $x_1+3x_2\leq 6$。

(b) $4x_1+3x_2\leq 12$。

(c) $4x_1+x_2\leq 8$。

(d) 现在把这些约束条件放到一张图上,展示整个约束条件集合加上非负约束的可行域。

D 3.1-3　考虑如下线性规划模型的目标函数:

$$\text{Max } Z=2x_1+3x_2$$

(a) 对 $Z=6, Z=12, Z=18$,画图对应的目标函数表示的直线。

(b) 求出这 3 个目标函数直线对应方程的斜截形式。比较这 3 条线的斜率,还比较其在 x_2 轴上的截距。

3.1-4　考虑如下直线对应的方程:

$$20x_1+40x_2=400$$

(a) 求出该等式的斜截式。

(b) 用这个形式确定这条直线的斜率及其在 x_2 轴上的截距。

(c) 用(b)得到的信息画出这条直线的图形。

D,I 3.1-5*　用图解法求解问题:

$$\text{Max } Z=2x_1+3x_2$$
$$\text{s.t.}\quad x_2\leqslant 10$$
$$2x_1+5x_2\leqslant 60$$
$$x_1+x_2\leqslant 18$$
$$3x_1+x_2\leqslant 44$$

且

$$x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0$$

D,I 3.1-6 用图解法求解问题：

$$\text{Max } Z=10x_1+20x_2$$
$$\text{s.t.}\quad -x_1+2x_2\leqslant 15$$
$$x_1+x_2\leqslant 12$$
$$5x_1+3x_2\leqslant 45$$

且

$$x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0$$

3.1-7 Whitt 窗户公司，是一家只有 3 名雇员生产两种手工窗户的公司：一种木框和一种铝框窗户。公司每个木框窗户赚 300 美元利润，每个铝框窗户赚 150 美元利润。Doug 制作木框，每天能制作 6 个；Linda 制作铝框，每天制作能 4 个；Bob 制作和切割玻璃，每天能制作 48 英尺^2。每个木框窗用 6 英尺^2 玻璃，每个铝框窗用 8 英尺^2 玻璃。

公司希望决定每种窗户每天的生产数量使总利润最大。

(a) 描述该问题与 3.1 节描述的 Wyndor Glass 问题之间的相似之处。然后，对这个问题建立并填写像表 3.1 那样的表格，确定活动和资源。

(b) 为这个问题建立线性规划模型。

D,I(c) 用图解法求解这个模型。

(d) 小镇上有一个新的竞争者也开始制造木框。这将使公司降低要价，那每个木框窗的利润也会降低。如果每个木框窗的利润从 300 美元减少到 200 美元，最优解将如何变化(就算真的有)? 从 300 美元减少到 100 美元又将如何? (你会发现，用 IOR Tutorial 中的图解分析和灵敏度分析程序是很有帮助的。)

(e) Doug 正考虑减少工作时间，这将减少他每天制造的木框数量。如果他每天只制作 5 个木框窗，那最优解将如何变化? (你会发现，用 IOR Tutorial 中的图解分析和灵敏度分析程序是很有帮助的。)

3.1-8 WorldLight 公司生产两种光装置(产品 1 和产品 2)，它们都需要金属框和电子部件。管理层想决定每种产品要生产的单位数量以使利润最大化。对于 1 个单位的产品 1，需要 1 个单位的框部件和 2 个单位的电子部件；对于 1 个单位的产品 2，需要 3 个单位的框部件和 2 个单位的电子部件。公司有 200 个单位的框部件和 300 个单位的电子部件。每个单位的产品 1 带来 1 美元利润，每个单位的产品 2，产量在 60 件以内时，带来 2 美元利润。当产品 2 超过 60 个单位时没有利润，因此要排除这样的超出。

(a) 为这个问题建立线性规划模型。

D,I(b) 用图解法求解这个模型，得到的总利润是多少?

3.1-9 Primo 保险公司正引进 2 个新产品线：专门险和抵押险。每单位专门险的期望利润是 5 美元，而每单位抵押险为 2 美元。

管理层希望为新产品线建立销售定额以实现总的最大期望利润。工作要求如下。

部　门	每单元的工作时间/h		可用工作时间/h
	专门险	抵押险	
承保	3	2	2400
管理	0	1	800
债权	2	0	1200

(a) 为这个问题建立线性规划模型。

D,I(b) 用图解法求解这个模型。

(c) 通过代数求解两个相关等式的联立解,验证你从(b)中得到的最优解的精确值。

3.1-10　Weenies and Buns 是生产热狗和热狗面包的食品加工厂,它们每周要为生产热狗面包磨最多达 200lb 的面粉。每个热狗面包需要 0.1lb 的面粉。它们当前与 Pigland 有限公司有个合同,规定每周一运输 800lb 的猪肉。每个热狗需要 1/4lb 的猪肉产品。a 热狗和热狗面包的所有其他成分是充足供应的。最后,Weenies and Buns 有 5 个全时雇员(每周工作 40h)。每个热狗需要一个劳力 3min 的劳动,而每个热狗面包需要一个劳力 2min 的劳动。每个热狗产生 0.88 美元的利润,每个热狗面包产生 0.30 美元的利润。

Weenies and Buns 想知道每周应该生产多少热狗和热狗面包以达到最大的可能利润。

(a) 为这个问题建立线性规划模型。

D,I(b) 用图解法求解这个模型。

3.1-11* 　Omega 制造公司关停了不赢利的产品生产线。这一做法产生了可观的剩余生产能力。管理层考虑将这些生产能力用于生产 3 种产品中的一个或多个,称它们为产品 1、产品 2 和产品 3。机器的可用生产能力可能限制产量如下。

机器类型	可用时间(每周机器小时)
铣床	500
车床	350
磨床	150

生产每单位各个产品需要的小时数:

机 器 类 型	产品 1	产品 2	产品 3
铣床	9	3	5
车床	5	4	0
磨床	3	0	2

销售部门表示产品 1 和产品 2 的销售潜力超过了最大生产量,产品 3 的销售潜力是每周 20 个单位。产品 1、产品 2 和产品 3 的单位利润将分别为 50 美元、20 美元和 25 美元。目标是确定每种产品 Omega 应该生产多少来使利润最大化。

(a) 为这个问题建立线性规划模型。

C(b) 用计算机通过单纯形法求解这个模型。

D 3.1-12　考虑如下问题,其中 c_1 的值并未确定。

$$\text{Max } Z=c_1x_1+x_2$$
$$\text{s.t.}\quad x_1+x_2\leqslant 6$$

$$x_1+2x_2\leqslant 10$$

且

$$x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0$$

对于 $c_1(-\infty<c_1<+\infty)$ 的各种可能值,用图形分析来确定(x_1,x_2)的最优解。

D 3.1-13 考虑如下问题,其中 k 的值并未确定。

$$\text{Max } Z=x_1+2x_2$$

$$\text{s. t.} \quad -x_1+x_2\leqslant 2$$

$$x_2\leqslant 3$$

$$kx_1+x_2\leqslant 2k+3, \quad k\geqslant 0$$

且

$$x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0$$

当前正在用的解是 $x_1=2, x_2=3$。用图形分析来确定 k 的值使这个解最优。

D 3.1-14 考虑如下问题,其中 c_1 和 c_2 的值并未确定。

$$\text{Max } Z=c_1x_1+c_2x_2$$

$$\text{s. t.} \quad 2x_1+x_2\leqslant 11$$

$$-x_1+2x_2\leqslant 2$$

且

$$x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0$$

对于 c_1 和 c_2 的各种可能值,用图形分析确定(x_1,x_2)的最优解。(提示:区分 $c_2=0$, $c_2>0$ 和 $c_2<0$ 3 种情况。对于后 2 种情况,关注 c_1 和 c_2 的比值。)

D 3.2-1 下表总结了 A 和 B 两种产品的关键要素和生产它们的 Q、R 和 S 3 种资源的需求。

资　源	单位生产资源用量		可用资源数量
	产品 A	产品 B	
Q	2	1	2
R	1	2	2
S	3	3	4
单位利润	3	2	

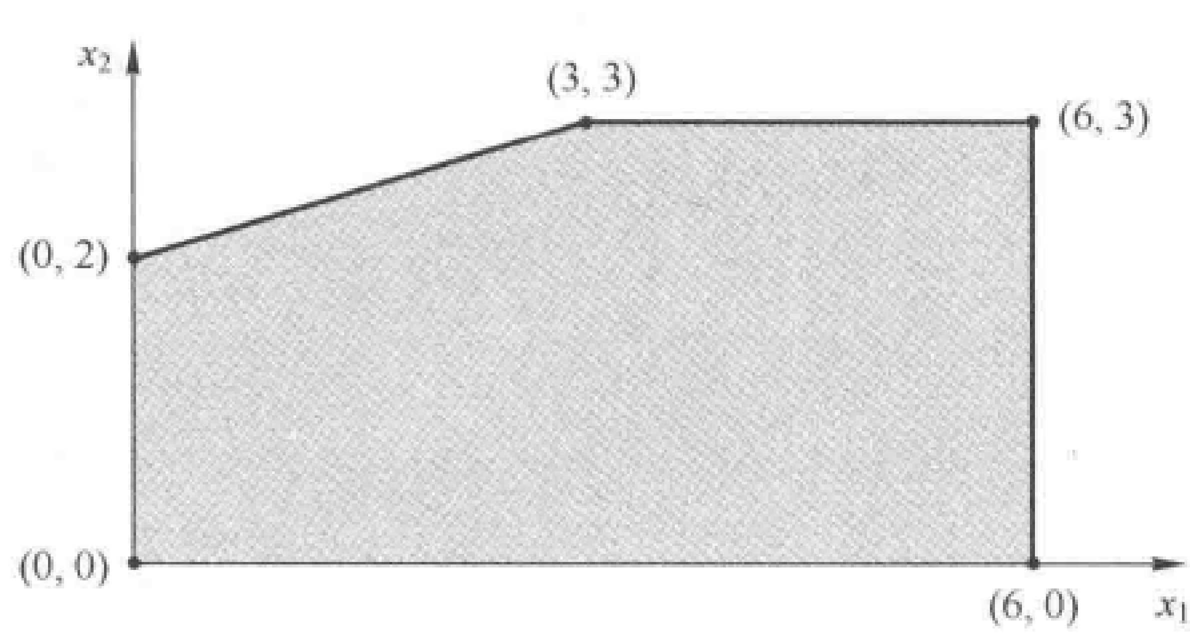
线性规划的所设均成立。

(a) 为这个问题建立线性规划模型。

D,I(b) 用图解法求解这个模型。

(c) 通过代数求解两个相关等式的联立解,验证从(b)中得到的最优解的精确值。

3.2-2 下图中的阴影区域代表线性规划问题的可行域,其目标函数为求最大值。



标记下列说法是对还是错，基于图解法说明你的答案。在每种情况下，给出一个目标函数的例子来说明你的答案。

(a) 如果(3,3)对应的目标函数值大于(0,2)和(6,3)对应的值，那(3,3)一定是一个最优解。

(b) 如果(3,3)是一个最优解并且存在多个最优解，(0,2)或(6,3)中有一个一定也是最优解。

(c) 点(0,0)不是最优解。

3.2-3　这是幸运的一天，你刚刚赢得了 20000 美元的奖金，决定拿出 8000 美元交税和作为聚会费用，用其余的 12000 美元投资。听说了这个消息后，你的两个不同朋友向你提供两个不同创业企业的投资机会。在这两种情形中，这项投资将花费这个夏天的时间和你的现金。如果成为第一个朋友的全资合作者，你将需要 10000 美元和 400h 的时间，预计利润将是 9000 美元(忽略时间价值)。如果成为第二个朋友的全资合作者，你将需要 4000 美元和 500h，预计利润也将是 9000 美元。尽管如此，两个朋友是灵活的，并允许你就全部合伙投资的任意比例进行投资。如果你选择以一定比例投资，那么，上面全面投资相应的数值(金钱投资、时间投资和利润)都乘以它们相应的比例值。

由于你正在寻找一个有意义的夏季工作(最多 600h)，你已经决定以任意组合参与一个或两个朋友的，并最大化预计利润。现在需要解决找到最优组合的问题。

(a) 描述该问题与 3.1 节描述的 Wyndor Glass 问题之间的相似之处。然后，对这个问题建立并填写像表 3.1 那样的表格，确定活动和资源。

(b) 为这个问题建立线性规划模型。

D,I(c) 用图解法求解这个模型。你的总预计利润是多少？

D,I 3.2-4　用图解法求解如下模型的所有最优解：

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 500x_1+300x_2 \\ \text{s.t.}\quad 15x_1+5x_2 &\leqslant 300 \\ 10x_1+6x_2 &\leqslant 240 \\ 8x_1+12x_2 &\leqslant 450 \end{aligned}$$

且

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$$

D 3.2-5　用图解法证明如下模型没有可行解：

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 5x_1+7x_2 \\ \text{s.t.}\quad 2x_1-x_2 &\leqslant -1 \\ -x_1+2x_2 &\leqslant -1 \end{aligned}$$

且

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$$

D 3.2-6　假设如下约束是一个线性规划模型的约束：

$$\begin{aligned} -x_1+3x_2 &\leqslant 30 \\ -3x_1+x_2 &\leqslant 30 \end{aligned}$$

且

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$$

(a) 证明可行域无界。

(b) 如果目标函数是 $Z=-x_1+x_2$，这个模型有最优解吗？如果有，求出来。如果没有，解释为

什么没有。

(c) 当目标函数是 $Z=x_1-x_2$,重复(b)的要求。

(d) 模型没有最优解时的目标函数,是不是意味着根据这个模型没有好的解?请给出解释。当构建模型时可能犯什么错误?

3.3-1 重新考虑习题3.2-3。解释为什么线性规划的4个假设(3.3节)中的每一个看起来都能合理地满足这个问题。是否有一个假设比其他的更可疑?如果是,要做些什么才能考虑到这种情况?

3.3-2 考虑有两个决策变量(x_1,x_2)的问题,分别代表了活动1和活动2的水平。对每个变量,允许取值为0、1和2,两个变量这些取值的可能组合由各种约束决定。目标就是最大化Z所表示的某种运行度量。对于可能的(x_1,x_2)可行值对应的Z值估计由下表给出。

x_1	x_2		
	0	1	2
0	0	4	8
1	3	8	13
2	6	12	18

基于这些信息,考虑是该问题完全满足线性规划的4个假设,解释你的答案。

3.4-1 阅读3.4节应用案例中充分描述运筹研究的参考文章。简要描述线性规划在该研究中是如何应用的,然后,列出该项研究带来的金融与非金融效益。

3.4-2* 对于3.3节讨论的每个线性规划假设,写一段分析关于如何将其应用于3.4节给出的如下示例。

(a) 设计放射治疗(Mary)。

(b) 区域规划(南部联盟农场)。

(c) 控制空气污染(NORI & LEETS公司)。

3.4-3 对于3.3节讨论的每个线性规划假设,写一段分析关于如何将其应用于3.4节给出的如下示例。

(a) 固体废物的回收利用(SAVE-IT公司)。

(b) 人事规划(联合航空公司)。

(c) 通过配送网络配送货物(Distribution Unlimited公司)。

D,I 3.4-4 用图解法求解这个问题:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z&=15x_1+20x_2 \\ \text{s.t.}\quad x_1+2x_2&\geqslant 10 \\ 2x_1-3x_2&\leqslant 6 \\ x_1+x_2&\geqslant 6 \end{aligned}$$

且

$$x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0$$

D,I 3.4-5 用图解法求解这个问题:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z&=3x_1+2x_2 \\ \text{s.t.}\quad x_1+2x_2&\leqslant 12 \\ 2x_1+3x_2&=12 \\ 2x_1+x_2&\geqslant 8 \end{aligned}$$

且

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$$

D 3.4-6　考虑如下问题,其中 c_1 的值并未确定:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= c_1x_1+2x_2 \\ \text{s. t.} \quad 4x_1+x_2 &\leqslant 12 \\ x_1-x_2 &\geqslant 2 \end{aligned}$$

且

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$$

对于 c_1 的各种可能值,用图形分析来确定(x_1, x_2)的最优解。

D,I 3.4-7　考虑如下模型:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= 40x_1+50x_2 \\ \text{s. t.} \quad 2x_1+3x_2 &\geqslant 30 \\ x_1+x_2 &\geqslant 12 \\ 2x_1+x_2 &\geqslant 20 \end{aligned}$$

且

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$$

(a) 用图解法求解这个模型。

(b) 如果目标函数变为 $Z=40x_1+70x_2$,最优解如何变化?(你会发现用 IOR Tutorial 中的图解分析和灵敏度分析非常有用。)

(c) 如果第三个约束条件变为 $2x_1+x_2 \geqslant 15$,最优解如何变化?(你会发现用 IOR Tutorial 中的图解分析和灵敏度分析非常有用。)

3.4-8　Ralph Edmund 喜欢牛排和马铃薯,因此他决定所有进餐稳定在只吃这两种食物(加上某些饮料和维生素)。Ralph 意识到这不是最健康的饮食,因此他想确定两种食物的正确摄入量以满足自己关键的营养需求。他已经获得了如下表列出的营养和成本信息。

Ralph 希望决定以最小的成本满足这些需求的牛排和马铃薯的每天食用量(可能为分数)。

(a) 为这个问题建立线性规划模型。

D,I(b) 用图解法求解这个模型。

C(c) 用计算机通过单纯形法求解这个模型。

要　素	每份摄取要素的克数		每天需要量/g
碳水化合物	5	15	≥50
蛋白质	20	5	≥40
脂肪	15	2	≤60
每份成本	8 美元	4 美元	

3.4-9　Web Mercantile 通过在线目录销售多种家用产品。公司需要大量的仓库空间来存储货物。现在正在制定下 5 个月租用仓库存储空间的计划。这些月中每个月所需的空间是已知的。尽管如此,由于这些空间需求有很大差别,以每个月的空间需求为基础租用空间可能是最经济的。另一方面,续租月份租用空间的额外花费比第一个月少,因此为今后 5 个月租用最大的所需空间可能并不是很昂贵。另一个选择是改变租用空间总数量的方法(通过添加新的租用或让旧租期满),至少改变一次,但不是每月都改变。

空间需求和不同租期的租用花费如下。

月　份	需求空间/英尺^2
1	30000
2	20000
3	40000
4	10000
5	50000

租期/月	每平方英尺租用成本/美元
1	65
2	100
3	135
4	160
5	190

目标是满足空间需求的基础上总的租用成本最小。

(a) 为这个问题建立线性规划模型。

C(b) 用单纯形法求解这个模型。

3.4-10 Larry Edison 是 Buckly 大学计算机中心的主任。他现在需要编制中心的人事工作计划。中心的开放时间从上午 8:00 到半夜。Larry 对中心每天不同时段的使用情况做了监控，并得到如下计算机咨询员的需求数量。

每天时段	需值班咨询员的最少数量
上午 8:00 至中午	4
中午至下午 4:00	8
下午 4:00 至下午 8:00	10
下午 8:00 至午夜	6

可以雇用两种类型的计算机咨询员：全职的和兼职的。全职的咨询员在如下时段工作连续 8h：上午班(上午 8:00 至下午 4:00)，下午班(中午至晚上 8:00)或夜班(下午 4:00 至午夜)。全职咨询员的报酬是每小时 40 美元。

兼职的咨询员能够以上表所列的四班轮换中的任何一种方式工作，兼职报酬为每小时 30 美元。

附加的要求是在每个时段内，必须有至少两名全职咨询员值班。

Larry 想确定多少全职和兼职工作人员应该在每一班工作，才能满足上面的需求并使成本最小。

(a) 为这个问题建立线性规划模型。

C(b) 用单纯形法求解这个模型。

3.4-11* Medequip 公司在两个工厂生产精密医疗诊断设备。3 个医疗中心订购了本月生产出来的产品。下表列出了从每个工厂运送给上述客户的单位运输成本。表中也给出了每家工厂生产的产品单位数和每个客户订购的单位数。

	单位运输成本/美元			产量/单位
	客户 1	客户 2	客户 3	
工厂 1	600	800	700	
工厂 2	400	900	600	
订购量/单位	300	200	400	

现在需要确定从每个工厂到每个客户运输数量的运输计划。

(a) 为这个问题建立线性规划模型。

C(b) 用单纯形法求解这个模型。

3.4-12* Al Ferris 目前有 60000 美元想用于投资,以便能够在 5 年内积累资金用于购买退休养老金。在咨询了他的理财顾问后,他有 4 种类型的固定收入投资,我们标记为 A、B、C、D。

投资 A 和投资 B 在未来 5 年(称为年 1~年 5)的每一年年初开始投资,1 美元的投资 A 在 2 年后(在能立即再投资的时间内)的年初得到 1.40 美元的回报(0. 40 美元利润)。1 美元的投资 B 在 3 年后的年初得到 1.70 美元的回报。

投资 C 和投资 D 在未来只有一次机会可用。1 美元的投资 C 从第 2 年年初开始,在第 5 年年末得到 1.90 美元的回报。1 美元的投资 D 在第 5 年年初开始,在第 5 年年末得到 1.30 美元的回报。

Al 希望知道哪一种投资计划能够在第 6 年年初得到最多的积累资金。

(a) 这个问题的所有约束函数能被表示为是等式约束。为了做到这一点,令 A_t、B_t、C_t、D_t 分别表示在投入在投资 A、投资 B、投资 C、投资 D 的资金数量。在第 t 年开始投资时,对于每个 t 投资是可用的并将在第 5 年末得到投资收益。令 R_t 表示在第 t 年年初没有用于投资的美元数量(从而可用于之后年份的投资)。这样,在 t 年年初的投资数量加上 R_t,必等于此时可用的投资金额。写出关于上面 5 年每年年初的相关变量的方程,并得到这个问题的 5 个约束函数。

(b) 为这个问题建立线性规划模型。

C(c) 用单纯形法求解这个模型。

3.4-13 Metalco 公司希望从几种可用合金(属性如下)中制得一种新的合金含锡 40%、锌 35%、铅 25%。

属　性	合金				
	1	2	3	4	5
锡含量	60	25	45	20	50
锌含量	10	15	45	50	40
铅含量	30	60	10	30	10
成本/(美元/lb)	22	20	25	24	27

目标是决定这些被混合的合金的比例,以最小的成本生产新的合金。

(a) 为这个问题建立线性规划模型。

C(b) 用单纯形法求解这个模型。

3.4-14* 一架货运飞机有 3 个存储货物的隔间:前、中、后。这些隔间有重量和空间的容量限制,概括如下。

隔　间	重量容量/t	空间容量/英尺^3
前	12	7000
中	18	9000
后	10	5000

另外,为了维持飞机的平衡,各隔间的货物的重量与各隔间的载重能力必须有相同比例。如下一班次航班有空间时将运输如下 4 种货物。

货　物	重量/t	体积/(英尺^3/t)	利润/(美元/t)
1	20	500	320
2	16	700	400
3	25	600	360
4	13	400	290

这些货物的任何比例都是可接受的。目标是确定每种货物运输多少(如果有)能被接受,怎样分配于飞机的不同隔间,使航班的总利润最大。

(a) 为这个问题建立线性规划模型。

C(b) 用单纯形法求解这个模型并求出其多个最优解中的一个。

3.4-15　Oxbridge 大学维护一台强大的主机,用于为教职人员、博士研究生和研究合作者提供研究使用。在所有的工作时间,需要有操作者操作并维护计算机,运行一些程序服务。计算机系的主任 Beryl Ingram 监督其运行。

现在是秋季学期开始,Beryl 面临给不同的操作者分配不同的工作时间,因为所有的操作者当前都在该大学登记注册,他们每天只有有限的工作时间,如下表所列。

操作者	薪酬率/(美元/h)	可用最大时数				
		周一	周二	周三	周四	周五
K. C.	25	6	0	6	0	6
D. H.	26	0	6	0	6	0
H. B.	24	4	8	4	0	4
S. C.	23	5	5	5	0	5
K. S.	28	3	0	3	8	0
N. K.	30	0	0	0	6	2

有 6 名操作者(4 个大学生和 2 个研究生)。他们的薪酬率不同,因为他们的计算机经验和编程能力不同。上表给出了他们的薪酬率和每人每天能工作的最大时间数。

每一名操作者必须保证每周有一个最小时间数来掌握足够的操作知识。这个时间被设定为对于大学生是每周 8h(K. C. 、D. H. 、H. B. 和 S. C.),对于研究生是每周 7h(K. S. 和 N. K.)。

计算机设备在上午 8:00 至晚上 10:00 是开放的。从周一至周五的这些时间内要有一名操作者值班。在周六和周日,可由其他职员操作。

由于预算紧缩,Beryl 不得不最小化成本。她希望确定赋予每一名操作者每天工作的小时数。

(a) 为这个问题建立线性规划模型。

C(b) 用单纯形法求解这个模型。

3.4-16　Joyce 和 Marvin 开办了一个日托学前班。他们正试图确定给这些孩子吃什么午餐。他们需要降低成本,但也需要满足这些孩子的营养需求。他们已经确定与花生酱、果冻三明治以及全麦饼干、牛奶、桔子汁的混合物打交道。每一种食物成分的营养和成本如下表所列。

食物	脂肪热量/cal	总热值/cal	维生素 C/mg	蛋白质/g	成本/美元
面包(一片)	10	70	0	3	5
花生酱(一汤匙)	75	100	0	4	4
草莓果冻(一汤匙)	0	50	3	0	7
全麦饼干(一块)	20	60	0	1	8
牛奶(一杯)	70	150	2	8	15
果汁(一杯)	0	100	120	1	35
注:1cal = 4.186J					

营养需求如下。每个孩子应该摄入 400 ~ 600cal。来自脂肪的卡路里数量不多于总数的 30%。每个孩子应该消耗 60mg 的维生素 C 和 12g 的蛋白质。由于实际原因,每个孩子需要 2 片

面包（制作三明治），至少是花生酱和果冻的 2 倍多，至少一杯液体（牛奶和/或果汁）。

Joyce 和 Marvin 将选择每一个孩子的食物组合使成本最低并满足以上需求。

(a) 为这个问题建立线性规划模型。

C(b) 用单纯形法求解这个模型。

3.5-1　阅读 3.5 节应用案例中列出的充分描述运筹研究的参考文献，简要描述线性规划如何在这些研究中得到应用，然后列举从该项研究中带来的各种金融和非金融的收益。

3.5-2*　给出下列一个关于线性规划问题的数据，目标函数是将分配 3 种资源到 2 个非负活动产生的利润最大化。

资　源	每项活动的单位资源用量		可用资源数量
	活动 1	活动 2	
1	2	1	10
2	3	3	20
3	2	4	20
单位贡献/美元	20	30	
注：单位贡献＝活动的单位利润			

(a) 为这个问题建立线性规划模型。

D,I(b) 用图解法求解这个模型。

(c) 用 Excel 电子表格列出这个模型。

(d) 用电子表格检查如下解：$(x_1, x_2) = (2,2), (3,3), (2,4), (4,2), (3,4), (4,3)$。这些解中哪些是可行的？这些可行解中哪些有目标函数的最优值？

C(e) 用 Solver 通过单纯形法求解模型。

C(f) 用 ASPE 及其 Solver 通过单纯形法求解模型。

3.5-3　Ed Butler 是 Bilco 公司的生产经理，公司生产 3 种类型的汽车备件。每一个备用件均需经过 2 台机器加工，所需的时间(h)如下表所列。

机　器	备件		
	A	B	C
1	0.02	0.03	0.05
2	0.05	0.02	0.04

每台机器每月有 40h 的可用时间。制造每个备件将产生单位利润如下。

	备　件		
	A	B	C
利润/美元	50	40	30

Ed 想确定生产的备件结构以最大化生产利润。

(a) 为这个问题建立线性规划模型。

(b) 用 Excel 电子表格列出这个模型。

(c) 自己猜测 3 个最优解。用电子表格检查每个解的可行性，如果可行，求出目标函数值。猜测哪个可行解有最佳目标函数值。

C(d) 用 Solver 通过单纯形法求解模型。

3.5-4 给出下列一个关于线性规划问题的数据,目标函数是两个非负活动的成本最小化,并达到不低于它们最低水平的3个收益。

利 润	每项活动的单位利润贡献		最低可接受水平
	活动1	活动2	
1	5	3	60
2	2	2	30
3	7	9	126
单位成本/美元	60	50	
注:单位贡献=活动的单位利润			

(a) 为这个问题建立线性规划模型。

D,I(b) 用图解法求解这个模型。

(c) 用 Excel 电子表格列出这个模型。

(d) 用电子表格检查如下解:$(x_1,x_2)=(7,7),(7,8),(8,7),(8,8),(8,9),(9,8)$。这些解中哪些是可行的?这些可行解中哪些有目标函数的最优值?

C(e) 用 Solver 通过单纯形法求解模型。

C(f) 用 ASPE 及其 Solver 来通过单纯形法求解模型。

3.5-5* Fred Jonasson 管理一家家庭农场。农场除了种植几种农作物外,还养猪供应市场。他现在希望确定喂养每一头猪的可用各种饲料的数量(玉米、桶糟、紫花苜蓿)。因为猪将吃这几种饲料的任意混合物,目标是确定如何混合饲料可以以最小的成本满足一定的营养需求。下表给出了每种饲料每千克所包含的基本营养成分的单位数,以及每一天的营养需求和食物成本。

营养成份	玉米	桶糟	紫花苜蓿	每日最少需求
碳水化合物	90	20	40	200
蛋白质	30	80	60	180
维生素	10	20	60	150
成本/美元	2.10	1.80	1.50	

(a) 为这个问题建立线性规划模型。

(b) 用 Excel 电子表格列出这个模型。

(c) 用电子表格检查如果$(x_1,x_2,x_3)=(1,2,2)$是可行解,那这样的食物搭配每天成本将是多少?其提供的每种营养成份的数量是多少?

(d) 花几分钟时间用电子表格来试验并构建你对最优解的最佳猜测。你猜到的解的每天成本是多少?

C(e) 用 Solver 通过单纯形法求解模型。

C(f) 用 ASPE 及其 Solver 来通过单纯形法求解模型。

3.5-6 Maureen Laird 是 Alva 电力公司的首席金融官,公司是一个中西部的主要公共机构。从现在起的5年、10年、20年,公司计划建建新的水电站,满足公司服务区域人口增长的需求。为了抵上最少的建设成本,Maureen 目前用公司的一些钱满足将来公司的现金流需求。Maureen 可购买3种类型的金融资产,每种每单位需要花费100万美元。可以购买分数单位的资产。从现在起,资产带来的5年、10年、20年收入,应该至少满足这些年最小的现金流需求(每个时间

段超出的收入将被用于为股票持有者分红，而不是存下来以满足下一个时期的现金流需求）。下表给出了当一个新水电厂建设时，每种投资产生的单位收入和将来每个时期的最低收入。

年	单位投资收入/百万美元			最小现金流需求/百万美元
	资产 1	资产 2	资产 3	
5	2	1	0.5	400
10	0.5	0.5	1	100
15	0	1.5	2	300

Maureen 希望确定这些资产的组合，以最小化的总投资量满足现金流需求。

(a) 为这个问题建立线性规划模型。

(b) 用电子表格列出这个模型。

(c) 用电子表格检查购买 100 个单位资产 1、100 个单位资产 2 和 200 个单位资产 3 的可能性。这种投资组合从现在开始的 5 年、10 年、15 年将产生多少现金流？总投资将是多少？

(d) 花几分钟时间用电子表格来试验并构建你对最优解的最佳猜测。你猜到的解的总投资量多少？

C(e) 用 Solver 通过单纯形法求解模型。

C(f) 用 ASPE 及其 Solver 通过单纯形法求解模型。

3.6-1　Philbrick 公司有两个工厂，分别在美国的两端，两个工厂生产同样的两种产品，然后将其销往各自半个国家批发商。来自批发商未来两个月（2 月和 3 月）的订单，需求单位数量如下（公司不必完全满足这些订单，但是如果不减少利润，公司将愿意满足）。

产　品	工厂 1		工厂 2	
	2 月	3 月	2 月	3 月
1	3600	6300	4900	4200
2	4500	5400	5100	6000

每家工厂在 2 月有 20 个生产日、在 3 月有 23 个生产日可用于生产和运输这些产品。1 月底库存耗尽，但每个工厂有足够的库存能力来保持 1000 个单位的两种产品的总量，如果超出的数量在 2 月生产 3 月销售。在每家工厂，以这种方式存储货物的成本是产品 1 为 3 美元/单位，产品 2 为 4 美元/单位。

每家工厂有相同的两种生产线，每种都能够生产两种产品。每家工厂每种产品的单位生产成本如下表所列。

产　品	工厂 1/美元		工厂 2/美元	
	生产线 1	生产线 2	生产线 1	生产线 2
1	62	59	61	65
2	78	85	89	86

每家工厂每个生产线的每种产品的生产率（每天生产此产品的数量）如下。

产　品	工厂 1/美元		工厂 2/美元	
	生产线 1	生产线 2	生产线 1	生产线 2
1	100	140	130	110
2	120	150	160	130

当一个工厂出售产品给其客户(工厂所在的半个国家的批发商)时,公司得到净销售收入(销售价格减去正常的运输成本)是每单位的产品1~83美元,每单位的产品2得到112美元。然而,也有可能(偶偶希望)一个工厂运输产品到国家的另一区域帮助弥补另一个工厂的销售。当这种情况发生时,将增加额外运输成本为每单位产品1需9美元,每单位产品2需7美元。

管理层现在需要确定每月中每家工厂每条生产线的每种产品应该生产多少、销售多少、运往其他工厂客户多少。目标是确定哪个可行计划能使总利润最大化(总的净销售收入减去生产成本、库存成本和额外运输成本的总和)。

(a) 建立完整的代数形式的线性规划模型,表示出这个问题的每个约束和决策变量。

C(b) 在Excel电子表格上建立相同的模型,然后用Excel Solver求解模型。

C(c) 用MPL以简洁形式建立模型,然后用MPL Solver求解模型。

C(d) 用LINGO以简洁形式建立模型,然后用LINGO Solver求解模型。

C 3.6-2 重新考虑习题3.1-11。

(a) 用MPL/Solvers建立并求解该问题的线性规划模型。

(b) 用LINGO建立并求解该模型。

C 3.6-3 重新考虑习题3.4-11。

(a) 用MPL/Solvers建立并求解该问题的线性规划模型。

(b) 用LINGO建立并求解该模型。

C 3.6-4 重新考虑习题3.4-15。

(a) 用MPL/Solvers建立并求解该问题的线性规划模型。

(b) 用LINGO建立并求解该模型。

C 3.6-5 重新考虑习题3.5-5。

(a) 用MPL/Solvers建立并求解该问题的线性规划模型。

(b) 用LINGO建立并求解该模型。

C 3.6-6 重新考虑习题3.5-6。

(a) 用MPL/Solvers建立并求解该问题的线性规划模型。

(b) 用LINGO建立并求解该模型。

C 3.6-7 Quality Paper公司是一家大型的造纸公司,管辖10个造纸厂,需要供应1000个客户。使用3种可相互替代的机器和4种原材料来制造5种不同类型的纸。因此,公司需要制定详细的每月生产分配计划,目标是使每月份生产和销售纸的总成本最小。具体地,必须联合决定每个工厂的每种类型的机器生产的每种纸的数量,以及从各个工厂运到各客户每种纸的数量。

相关数据符号表述如下:

D_{jk}=顾客j需要k型纸的单位数量

r_{klm}=在l型机器上生产1个单位k型纸需要原材料m的数量

R_{im}=造纸厂i中可用原材料m的单位数量

c_{kl}=在l型机器上生产1个单位k型纸需要的生产能力

C_{il}=造纸厂i中可用l型机器的生产能力

P_{ikl}=造纸厂i在l型机器上生产1个单位k型纸的生产成本

T_{ijk}=将每单位k型纸从造纸厂i运到顾客j的运输成本

(a) 用这些符号,手工建立该问题的线性规划模型。

(b) 该模型有多少约束函数和决策变量?

C(c) 用MPL建立模型。

C(d) 用 LINGO 建立模型。

3.6-8 阅读3.6节应用案例中列出的充分描述运筹研究的参考文献，简要描述线性规划如何在这些研究中得到应用，然后，列举从该项研究中带来的各种金融和非金融的收益。

3.7-1 从本章末参考文献的下端部分，找出这些线性规划成功应用中的1篇。阅读该文章，然后，写两页纸篇幅的应用总结及其带来的收益（包括非金融的收益）。

3.7-2 从本章末参考文献的下端部分，找出这些线性规划成功应用中的3篇。对每一篇文章，阅读然后写一页纸篇幅的应用总结及其带来的收益（包括非金融的收益）。

案 例

案例3.1 汽车装配

汽车联盟公司是一家大型汽车制造公司。制造的汽车分3个车系：卡车系、小汽车系、中型豪华车系。一个工厂位于底特律郊外，组装中型豪华车系的两个车型。第一个车型——Family Thrillseeker，是四门的私家轿车，配有乙烯基座椅、塑料内饰、标准配置、低油耗。它的市场定位为预算紧张的中产阶级家庭的精明采购，每销售一辆 Family Thrillseeker 可为公司产生3600美元的利润。第二个车型，Classy Cruiser 是两门的豪华私家轿车，有皮革座椅、木质内饰、定制配置和巡航能力。它的市场定位为有影响的富裕中上层家庭。每销售一辆 Classy Cruiser 可为公司产生5400美元的合理利润。

Rachel Rosencrantz 是装配厂的管理者，正在考虑下个月的生产计划。具体地说，她必须决定安排组装多少 Family Thrillseeker 和 Classy Cruiser，以使公司的利润最大化。她知道工厂该月有48000工时的能力，也知道组装一辆 Family Thrillseeker 需要6个工时，组装一辆 Classy Cruiser 需要10.5个工时。

因为工厂仅仅是一个组装厂，组装两个车型必需的部分部件不在工厂生产，而需要从密歇根附近区域的其他工厂运输，如轮胎、方向盘、窗户、座位和门都来自不同的供应工厂。对于下个月，Rachel 知道她将从车门供应者那里仅能获得20000个车门（10000个左边的门，10000个右边的门）。最近的一次罢工迫使某个供应商工厂关闭了几天，该工厂下个月将不能满足其生产计划。Family Thrillseeker 和 Classy Cruiser 均使用同样的车门。

此外，近期公司预测了对不同车型的月度需求，表明 Classy Cruiser 的需求限于3500辆。Family Thrillseeker 在组装工厂的生产能力内的需求没有限制。

(a) 建立并求解线性规划模型，确定应该组装 Family Thrillseeker 和 Classy Cruiser 的数量。

在她做出最终的生产决定之前，Rachel 计划独立研究下列问题；除非另有说明。

(b) 市场部得知其能够开展一个目标为500000美元的广告投入，将使下个月 Classy Cruiser 的需求增加20%。这个投入应该执行吗？

(c) Rachel 得知通过使用超时劳动能使下个月工厂的生产能力增加25%的工时。利用这个新的组装能力，能组装多少辆 Family Thrillseeker 和 Classy Cruiser？

(d) Rachel 得知获得超时劳动需要付出额外的成本。她愿意付出的比常规时间的劳动成本之外最大的超时劳动成本是多少？给出需要一次性付出总额的答案。

(e) Rachel 研究了使用有目标的广告投放和超时劳动两者的选择。广告投放带来 Classy Cruiser 20%的需求增长，超时劳动带来工厂生产能力25%的提高。如果每台 Classy Cruiser 的销售利润比每台 Family Thrillseeker 的多50%，使用广告投放和超时劳动，应该组装 Family Thrillseeker 和 Classy Cruiser 多少辆？

(f) 已知广告投放的成本是500000美元，在常规时段外，最大的超时劳动使用成本是

1600000 美元,那么,(e)中得到的解比(a)中得到的解更明智吗?

(g) 汽车联盟公司已经确认,代销商使产品 Farnily Thrillseeker 的价格打折扣并降低很多,由于和经销者利润共享,公司因此从 Family Thrillseeker 获得的利润不是 3600 美元,而是 2800 美元。在这个新的折扣价格下,确定 Family Thrillseeker 和 Classy Cruiser 的组装数量。

(h) 公司通过在组装线末端的随机检测中发现了 Family Thrillseeker 的质量问题。监督者发现超过 60%的情形,4 个门中的两个封闭不完好。由于随机测试发现有缺陷的 Family Thrillseeker 的百分比太高了,主管人员决定在生产线的末端对每一辆 Family Thrillseeker 执行质量控制检测。由于增加了检测,组装一台 Family Thrillseeker 的时间已经从 6h 增加到 7.5h。确定在 Family Thrillseeker 新的组装时间下,每一种车型的单位组装数量。

(i) 汽车联盟公司的董事会希望得到豪华私家轿车市场更大的份额,并想满足对 Classy Cruĺser 的全部需求。他们要求 Rachel 确定她的组装计划产生的利润与(a)中得出的利润相比将减少多少利润。如果减少的利润不超过 2000000 美元,他们将要求 Rachel 满足 Classy Cruiser 的全部需求。

(j) Rachel 现在将通过结合所有在(f)、(g)、(h)中描述的新的想法定下最终决心。她最终决定是否进行广告投放、是否使用超时劳动,以及需要组装 Family Thrillseeker 的数目、需要组装 Classy Cruiser 的数目。

预告我们网站上增加的案例(www.mhhe.com/hillier)

案例 3.2 食堂削减成本

本案例专注于一个让许多学生心里感到亲切的主题。大学食堂的管理者如何选择砂锅炖荤素什锦的成分使学生觉得其足够美味并能使成本最小?在本案例中,只有两个决策变量的线性规划模型,能用于处理管理者要面对的 7 个具体问题。

案例 3.3 呼叫中心人员配备

加利福尼亚儿童医院当前对病人采用一套混乱的、分散的预约和注册流程。因此,其决定通过建立一个专门进行预约和注册的呼叫中心集中处理。医院的管理者现在需要制定一个计划,对每个可能的工作变化确定每类人员需要雇佣多少人。需要用线性规划制定一个计划,使呼叫中心每个工作时提供 14h 的服务到达满意水平的成本最小。这个模型需要 2 个以上决策变量,因此将需要像 3.5 节或 3.6 节中描述的软件包求解模型的两个版本。

案例 3.4 推广早餐麦片粥

超晶公司的市场营销副总裁需要制定一个公司新早餐麦片粥的推广活动。三家广告媒体被选中进行推广,但需要现在要确定每家媒体需要使用多少。约束条件包括有限的广告预算、有限的规划预算、有限的可用电视广告商业时段以及需要有效地告知两个特殊的目标受众(幼儿和幼儿家长)并充分利用好折让优惠方案。相应的线性规划模型需要 2 个以上决策变量,因此将需要像 3.5 节或 3.6 节中描述的软件包求解该模型。这个案例也需要分析线性规划的 4 个假设在这个问题中是如何满足的。线性规划实际上是否为这种情况下的管理决策提供了一个合理的根据?(案例 13.3 将继续分析该案例。)