

第二章 矩阵分析

2.1 k变量模型的矩阵表达

2.2 模型假设的矩阵表达

2.3 OLS估计的矩阵表达

2.4 假设检验的矩阵表达

2.5 模型预测的矩阵表达

2.6 矩阵方法总结（示例）

2.1k变量模型的矩阵表达



k变量线性回归模型

k变量总体回归模型(PRM)

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i$$

其n个联立方程组为：

$$Y_1 = \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{31} + \cdots + \beta_k X_{k1} + u_1$$

$$Y_2 = \beta_1 + \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{32} + \cdots + \beta_k X_{k2} + u_2$$

.....

$$Y_n = \beta_1 + \beta_2 X_{2n} + \beta_3 X_{3n} + \cdots + \beta_k X_{kn} + u_n$$



k变量线性回归模型

如果样本数为n, 则可以将上述PRM模型表达为矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \dots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \dots & X_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & \dots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

进一步地, 可以得到精简化的PRM矩阵形式:

$$\begin{matrix} \mathbf{y} = & \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} & +\mathbf{u} \\ (n \times 1) & (n \times k)(k \times 1) + (n \times 1) \end{matrix}$$



k变量线性回归模型

或者进一步紧凑表达为：

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$$

其中：

- 向量（默认为列向量）用加粗体的小写字母表达
- 矩阵用大写粗体字母表达
- 矩阵或向量的维度需要注意标明

2.2 模型假设的矩阵表达



经典线性回归模型假设(N-CLRM)的矩阵表达

进一步地，我们可以用矩阵方法表达正态经典线性回归模型假设（N-CLRM）：

N-CLRM假设1-1：模型是正确设置的。（这里大有学问，也是一切计量分析问题的根本来源）

N-CLRM假设1-2：模型应该是参数线性的。也即模型中参数必须线性，变量可以不是线性。

CLRM假设2-1： X 是固定的（给定的）或独立于误差项。也即自变量 X 不是随机变量。或者表达为矩阵 $\mathbf{X}_{n \times k}$ 是非随机的，即它由固定数的一个集合构成。

N-CLRM假设2-2：多元回归情形下，自变量 X 间无完全共线性。可记为 $\rho(\mathbf{X}) = k$ ，也即矩阵 \mathbf{X} 为列满秩

- 矩阵 \mathbf{X} 是列满秩(full column rank) 的，也即其秩等于矩阵的列数。
- 矩阵 \mathbf{X} 的列是线性独立的，即在 X_{ki} 变量之间无完全的线性关系即无完全共线性



经典线性回归模型假设(N-CLRM)的矩阵表达

N-CLRM假设3-1: 随机干扰项期望为0。可记为 $E(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

具体地:

$$E(\mathbf{u}) = E \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(u_1) \\ E(u_2) \\ \vdots \\ E(u_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

N-CLRM假设3-2/3: 随机干扰项同方差且无自相关。可记为 $E(\mathbf{u}\mathbf{u}') = \sigma^2 \mathbf{I}$

在正态性假设下, 关于随机干扰项的全部假设可以记为 $\mathbf{u} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$



随机干扰项的方差协方差矩阵

随机干扰项的方差协方差矩阵为：

$$\text{var} - \text{cov}(\mathbf{u}) = E(\mathbf{u}\mathbf{u}')$$

$$\begin{aligned} &= E \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n] = E \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & \cdots & u_1 u_n \\ u_2 u_1 & u_2^2 & \cdots & u_2 u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n u_1 & u_n u_2 & \cdots & u_n^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E(u_1^2) & E(u_1 u_2) & \cdots & E(u_1 u_n) \\ E(u_2 u_1) & E(u_2^2) & \cdots & E(u_2 u_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(u_n u_1) & E(u_n u_2) & \cdots & E(u_n^2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$



随机干扰项的方差协方差矩阵

如果满足N-CLRM假设，则随机干扰项的方差协方差矩阵进一步可以写成：

$$\begin{aligned} \text{var} - \text{cov}(\mathbf{u}) = E(\mathbf{u}\mathbf{u}') &= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12}^2 & \cdots & \sigma_{1n}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1}^2 & \sigma_{n2}^2 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \leftarrow (E(u_i) = 0) \\ &= \begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma_{12}^2 & \cdots & \sigma_{1n}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma^2 & \cdots & \sigma_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1}^2 & \sigma_{n2}^2 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix} \leftarrow [\text{var}(u_i) = \sigma^2; \text{cov}(u_i, u_j) = 0, i \neq j] \\ &= \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 \mathbf{I} \end{aligned}$$

2.3 OLS估计的矩阵表达



OLS估计的矩阵表达：代数过程

给定如下的样本回归模型（SRM）：

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \cdots + \hat{\beta}_k X_{ki} + e_i \quad (\text{SRM})$$

可以表达为：

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \cdots & X_{k2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \mathbf{y} = & \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} & + \mathbf{e} \\ (n \times 1) & (n \times k)(k \times 1) + (n \times 1) \end{matrix}$$



OLS估计的矩阵表达：代数过程

$$\begin{aligned}\sum e_i^2 &= \sum \left(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \cdots - \hat{\beta}_k X_{ki} \right)^2 \\ &= e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2 = [e_1 e_2 \cdots e_n] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = 2 \sum \left(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \cdots - \hat{\beta}_k X_{ki} \right) (-1) = 0 \\ \frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_2} = 2 \sum \left(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \cdots - \hat{\beta}_k X_{ki} \right) (-X_{2i}) = 0 \\ \cdots \cdots \cdots \\ \frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_k} = 2 \sum \left(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \cdots - \hat{\beta}_k X_{ki} \right) (-X_{ki}) = 0 \end{array} \right.$$



OLS估计的矩阵表达：代数过程

正规方程组如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} n\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum X_{3i} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum X_{ki} = \sum Y_i \\ \hat{\beta}_1 \sum X_{2i} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i}^2 + \hat{\beta}_3 \sum X_{2i}X_{3i} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum X_{2i}X_{ki} = \sum X_{2i}Y_i \\ \hat{\beta}_1 \sum X_{3i} + \hat{\beta}_2 \sum X_{3i}X_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum X_{3i}^2 + \cdots + \hat{\beta}_k \sum X_{3i}X_{ki} = \sum X_{3i}Y_i \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \hat{\beta}_1 \sum X_{ki} + \hat{\beta}_2 \sum X_{ki}X_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum X_{ki}X_{3i} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum X_{ki}^2 = \sum X_{ki}Y_i \end{array} \right.$$



OLS估计的矩阵表达：代数过程

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} n & \sum X_{2i} & \sum X_{3i} & \cdots & \sum X_{ki} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \sum X_{2i}X_{3i} & \cdots & \sum X_{2i}X_{ki} \\ \sum X_{3i} & \sum X_{3i}X_{2i} & \sum X_{3i}^2 & \cdots & \sum X_{3i}X_{ki} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum X_{ki} & \sum X_{ki}X_{2i} & \sum X_{ki}X_{3i} & \cdots & \sum X_{ki}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ X_{31} & X_{32} & \cdots & X_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_{k1} & X_{k2} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

从而有：

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$$

如果矩阵 $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ 的逆矩阵存在，则两边同时左乘 $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ ，得到OLS估计量：

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$



OLS估计的矩阵表达：纯矩阵过程

最小二乘方法将求解最小化过程：

$$Q = \sum e_i^2$$
$$= \mathbf{e}'\mathbf{e}$$

$$= (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})$$

$$= \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} + \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$\leftarrow [\mathbf{y} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{e}; \quad \mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}]$$

$$\leftarrow \begin{cases} (\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y})' = \mathbf{y}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} \\ (1^*k) \cdot (k^*n) \cdot (n^*1) = (1^*1) \end{cases}$$

提示：标量的转置还是自身！



OLS估计的矩阵表达：纯矩阵过程

进一步可以得到：

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial \hat{\beta}} &= 0 \\ \frac{\partial (y'y - 2\hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}} &= 0 \\ -2X'y + 2X'X\hat{\beta} &= 0 \\ -X'y + X'X\hat{\beta} &= 0 \\ X'X\hat{\beta} &= X'y\end{aligned}$$

如果 $X'X$ 的逆矩阵存在，则两边同时左乘 $(X'X)^{-1}$ ，得到OLS估计量：

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

提示：

$$\begin{aligned}F &= AZ, & \frac{\partial F}{\partial Z} &= A' \\ F &= ZA, & \frac{\partial F}{\partial Z} &= A \\ F &= Z'A, & \frac{\partial F}{\partial Z} &= A \\ F &= A'ZB, & \frac{\partial F}{\partial Z} &= AB' \\ F &= A'Z'B, & \frac{\partial F}{\partial Z} &= AB' \\ F &= A'Z'B, & \frac{\partial F}{\partial Z} &= BA' \\ F &= Z'AZ, & \frac{\partial F}{\partial Z} &= AZ + A'Z\end{aligned}$$



OLS估计的矩阵表达：纯矩阵过程(u 的方差)

样本回归模型的估计量 $\hat{\sigma}^2$ ，是对总体回归模型参数 σ^2 的无偏估计：

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k} = \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{n-k} = \frac{\mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y}}{n-k} \quad \leftarrow E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}'\mathbf{e} &= (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta}) \\ &= (\mathbf{y}' - \hat{\beta}'\mathbf{X}')(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta}) \\ &= \mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{X}'\hat{\beta} - \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y} + \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} \\ &= \mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y} - (\mathbf{y}' - \hat{\beta}'\mathbf{X}')\mathbf{X}\hat{\beta} \\ &= \mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y} - \mathbf{e}'\mathbf{X}\hat{\beta} \\ &= \mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y} - (\mathbf{X}'\mathbf{e})'\hat{\beta} \\ &= \mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \mathbf{X}\hat{\beta} + \mathbf{e} \\ \mathbf{y}' &= \hat{\beta}'\mathbf{X}' + \mathbf{e}' \\ \mathbf{y}' - \hat{\beta}'\mathbf{X}' &= \mathbf{e}'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \mathbf{X}\hat{\beta} + \mathbf{e} \\ \mathbf{X}'\mathbf{y} &= \mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} + \mathbf{X}'\mathbf{e} \\ \mathbf{X}'\mathbf{y} &= \mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} + \mathbf{X}'\mathbf{e} \\ &= \mathbf{X}'\mathbf{y} + \mathbf{X}'\mathbf{e} \\ \mathbf{X}'\mathbf{e} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$



回归系数的方差协方差矩阵

对于回归系数的OLS估计量 $\hat{\beta}$ ，进一步讨论其方差和协方差矩阵 $var - cov(\hat{\beta})$ ，一般记为：

$$\begin{aligned} var - cov(\hat{\beta}) &= E \left(\left(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}) \right) \left(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}) \right)' \right) \\ &= \begin{bmatrix} var(\hat{\beta}_1) & cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) & \cdots & cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_k) \\ cov(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1) & var(\hat{\beta}_2) & \cdots & cov(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ cov(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_1) & cov(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_2) & \cdots & var(\hat{\beta}_k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$



回归系数的方差协方差矩阵

如果满足N-CLRM假设，则回归系数的OLS估计量 $\hat{\beta}$ 的方差和协方差矩阵 $var - cov(\hat{\beta})$ 可以进一步写成：

$$\begin{aligned} var - cov(\hat{\beta}) &\equiv \sigma_{\hat{\beta}}^2 \\ &= E \left(\left(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}) \right) \left(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}) \right)' \right) \\ &= E \left(\left(\hat{\beta} - \beta \right) \left(\hat{\beta} - \beta \right)' \right) \\ &= E \left(\left((X'X)^{-1} X'u \right) \left((X'X)^{-1} X'u \right)' \right) \\ &= E \left((X'X)^{-1} X' u u' X (X'X)^{-1} \right) \\ &= (X'X)^{-1} X' E(uu') X (X'X)^{-1} \\ &= (X'X)^{-1} X' \sigma^2 I X (X'X)^{-1} \\ &= \sigma^2 (X'X)^{-1} X' X (X'X)^{-1} \\ &= \sigma^2 (X'X)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= (X'X)^{-1} X'y \\ &= (X'X)^{-1} X'(X\beta + u) \\ &= (X'X)^{-1} X'X\beta + (X'X)^{-1} X'u \\ &= \beta + (X'X)^{-1} X'u \\ \hat{\beta} - \beta &= (X'X)^{-1} X'u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (AB)' &= B'A' \\ \left[(X'X)^{-1} \right]' &= \left[(X'X)' \right]^{-1} \\ &= (X'X)^{-1} \end{aligned}$$



回归系数的方差协方差矩阵

那么，可以很快得到回归系数的OLS估计量 $\hat{\beta}$ 的样本方差和协方差矩阵 $S_{ij}^2(\hat{\beta})$

$$\begin{aligned} S_{ij}^2(\hat{\beta}) &= \hat{\sigma}^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\ &= \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{n-k} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\ &= \frac{\mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y}}{n-k} \cdot (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \end{aligned}$$



OLS估计的性质：BLUE

下面我们将证明高斯-马尔可夫定理(Gauss-Markov Theorem): 在正态经典线性回归模型假设 (N-CLRM) 下, 采用普通最小二乘法 (OLS), 得到的估计量 $\hat{\beta}$, 是真实参数 β 最优的、线性的、无偏估计量 (BLUE)。记为:

$$\xrightarrow[\text{N-CLRM}]{\text{OLS}} \hat{\beta} \xrightarrow{\text{BLUE}} \beta$$

因为模型参数的OLS估计为:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

又因为矩阵 \mathbf{X} 为列满秩, 也即 $\rho(\mathbf{X}) = k$, 所以 $\hat{\beta}$ 关于 \mathbf{y} 是线性的。



OLS估计的性质：BLUE

根据模型参数OLS估计，容易得到如下过程：

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\beta + \mathbf{u}) \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} \\ &= \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\end{aligned}$$

进一步可证明

$$\begin{aligned}E(\hat{\beta}) &= E(\beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}) \\ &= E(\beta) + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'E(\mathbf{u}) \\ &= \beta\end{aligned}$$

因此， $\hat{\beta}$ 是参数 β 的无偏估计量得证。



OLS估计的性质：BLUE

假设存在用其他方法估计的线性无偏估计量 β^* ，则要求 C 满足如下条件：

$$CX = 0$$

从而保证如下式子成立：

$$\begin{aligned}\beta^* &= ((X'X)^{-1}X' + C)y \\ &= ((X'X)^{-1}X' + C)(X\beta + u) \\ &= \beta + CX\beta + (X'X)^{-1}X'u + Cu \\ &= \beta + (X'X)^{-1}X'u + Cu\end{aligned}$$

进一步得到：

$$\beta^* - \beta = (X'X)^{-1}X'u + Cu$$



OLS估计的性质：BLUE

根据方差定义，有：

$$\begin{aligned} \text{var} - \text{cov}(\beta^*) &= \mathbf{E}((\beta^* - \beta)(\beta^* - \beta)') \\ &= \mathbf{E}\left(\left((\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} + \mathbf{C}\mathbf{u}\right)\left((\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} + \mathbf{C}\mathbf{u}\right)'\right) \\ &= \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + \sigma^2\mathbf{C}\mathbf{C}' \\ &= \text{var} - \text{cov}(\hat{\beta}) + \sigma^2\mathbf{C}\mathbf{C}' \end{aligned}$$

其中，我们可以证明 $\sigma^2\mathbf{C}\mathbf{C}'$ 是半正定矩阵，矩阵对角线元素 ≥ 0 ，因此有：

$$\text{var} - \text{cov}(\beta^*) \geq \text{var} - \text{cov}(\hat{\beta})$$

从而表明N-CLRM假设下，OLS方法估计得到的 $\hat{\beta}$ ，方差最小。

2.4 假设检验的矩阵表达



平方和分解的矩阵表达

对于多元回归模型：

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i \quad (\text{PRM})$$

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \cdots + \hat{\beta}_k X_{ki} + e_i \quad (\text{SRM})$$

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \cdots + \hat{\beta}_k X_{ki} \quad (\text{SRF})$$



平方和分解的矩阵表达

通过对 Y_i 的变异及其来源的分解，可以得到：

$$(Y_i - \bar{Y}_i) = (\hat{Y}_i - \bar{Y}_i) + (Y_i - \hat{Y}_i)$$

$$y_i = \hat{y}_i + e_i$$

$$\sum y_i^2 = \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2$$

$$TSS = ESS + RSS$$

其中TSS表示总离差平方和，ESS表示回归平方和，RSS表示残差平方和。它们分别可以用矩阵表达为：

$$TSS = \mathbf{y}'\mathbf{y} - n\bar{Y}^2$$

$$RSS = \mathbf{e}\mathbf{e}' = \mathbf{y}\mathbf{y}' - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

$$ESS = \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} - n\bar{Y}^2$$



平方和分解的矩阵表达 (ANOVA)

进一步地，可以得到方差分析表 (ANOVA)：

变异来源	平方和符号 SS	平方和计算 公式	自由度 df	均方和符号 MSS	均方和计算公式
回归平方和	ESS	$\sum \hat{y}_i^2$	k-1	MSS_{ESS}	$= (\hat{\beta}' X' y - n \bar{Y}^2)/(k - 1)$
残差平方和	RSS	$\sum e_i^2$	n-k	MSS_{RSS}	$= (yy' - \hat{\beta}' X' y)/(n - k)$
总平方和	TSS	$\sum y_i^2$	n-1	MSS_{TSS}	$= (y'y - n \bar{Y}^2)/(n - 1)$



拟合优度的矩阵表达

根据拟合优度的定义，判定系数 R^2 和调整判定系数 \bar{R}^2 的矩阵计算公式为：

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\hat{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{y} - n\bar{Y}^2}{\mathbf{y}' \mathbf{y} - n\bar{Y}^2}$$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{RSS/f_{RSS}}{TSS/f_{TSS}} = 1 - \frac{MSS_{RSS}}{MSS_{TSS}} = 1 - \frac{(\mathbf{y}\mathbf{y}' - \hat{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{y}) / (k - 1)}{(\mathbf{y}' \mathbf{y} - n\bar{Y}^2) / (n - 1)}$$



回归系数显著性检验 (t检验) 的矩阵方法实现

根据回归系数显著性检验的定义，利用矩阵方法实现t检验的过程如下：

对于多元回归模型

$$\begin{aligned} Y_i &= \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i \\ \mathbf{y} &= \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u} && \text{(PRM)} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{e} && \text{(SRM)} \end{aligned}$$



回归系数显著性检验 (t检验) 的矩阵方法实现

在N-CLRM假设下，采用OLS估计方法，可以证明：

$$\mathbf{u} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$$

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma^2 \mathbf{X}'\mathbf{X}^{-1})$$

从而可以构造t统计量

$$T_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\beta} - \beta}{S_{\hat{\beta}}} \sim t(n - k)$$

$$T_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{c_{ij} \frac{\mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y}}{n - k}}}$$

提示：

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y}$$

$$\begin{aligned} \text{var} - \text{cov}(\hat{\beta}) &\equiv \sigma_{\hat{\beta}}^2 \\ &= \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \end{aligned}$$

$$S_{ij}^2(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

$$= \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{n - k} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

$$= \frac{\mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y}}{n - k} \cdot (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$



回归系数显著性检验 (t检验) 的矩阵方法实现

对于总体回归模型的任一参数 $\beta_j, j \in (1, 2, \dots, k)$ 提出假设:

$$H_0 : \beta_j = 0$$

$$H_1 : \beta_j \neq 0$$

根据原假设 H_0 , 可以得到:

$$t_{\hat{\beta}}^* = \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{S_{ij}^2(\hat{\beta}_{kk})}} = \frac{\hat{\beta}_j}{\sqrt{c_{ij} \frac{\mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y}}{n-k}}}$$

其中 $S_{ij}^2(\hat{\beta}_{kk})$ 表示, 由 $\hat{\beta}$ 的样本方差和协方差矩阵 $S_{ij}^2(\hat{\beta})$ 的对角线元素组成的列向量, 即

$$S_{ij}^2(\hat{\beta}_{kk}) = [s_{\hat{\beta}_1}^2, s_{\hat{\beta}_2}^2, \dots, s_{\hat{\beta}_k}^2]^T$$



回归系数显著性检验 (t检验) 的矩阵方法实现

若给定显著性水平 α 和自由度 $(n - k)$, 很快可以得到t分布的查表t值, 也即 $t_{(1-\alpha/2)}(n - k)$ 。

然后比较样本t统计量 $t_{\hat{\beta}}^*$ 与理论t分布查的表t值 ($t_{(1-\alpha/2)}(n - 2)$) 的关系。根据如下法则做出参数 β_2 的显著性检验结论:

- 如果列向量 $t_{\hat{\beta}}^*$ 的第 k 个元素 $t_{\hat{\beta}_k}^* > t_{(1-\alpha/2)}(n - 2)$, 则表明参数 β_k 的t检验在 α 水平下是显著的, 也即显著地拒绝 $H_0 : \beta_k = 0$, 从而接受 $H_1 : \beta_k \neq 0$ 。
- 如果列向量 $t_{\hat{\beta}}^*$ 的第 k 个元素 $t_{\hat{\beta}_k}^* \leq t_{(1-\alpha/2)}(n - 2)$, 则表明参数 β_k 的t检验在 α 水平下是不显著的, 也即不能显著地拒绝 $H_0 : \beta_k = 0$, 从而只能暂时接受 $H_0 : \beta_k = 0$ 。



模型整体显著性检验 (F 检验) 的矩阵方法实现

对于多元回归模型

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i \quad (\text{U-PRM})$$

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \cdots + \hat{\beta}_k X_{ki} + e_i \quad (\text{U-SRM})$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u} \quad (\text{PRM})$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{e} \quad (\text{SRM})$$

我们称总体回归模型和对应的样本回归模型为无约束模型 (unrestricted model)。

对于总体回归模型的斜率参数 $\beta_j, j \in (2, \cdots, k)$ 提出如下联合假设 (joint hypothesis)：

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_k = 0$$

$$H_1 : \beta_j \text{ not all } 0, \text{ for } j \in (2, \cdots, k)$$



模型整体显著性检验 (F 检验) 的矩阵方法实现

在原假设 $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_k = 0$ 下, 我们可以得到如下模型:

$$Y_i = \beta_1 + u_i \quad (\text{R-PRM})$$

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + e_i \quad (\text{R-SRM})$$

此时, 我们称总体回归模型和对应的样本回归模型为受约束模型 (restricted model)。

在备择假设 $H_1 : \beta_j$ 不全为 0, $j \in (2, \cdots, k)$ 下, 我们可以得到该假设下的一种特殊回归模型 (如 $\beta_j \neq 0, j \in (2, \cdots, k)$), 也即无约束总体回归模型和无约束样本回归模型。

受约束模型: 一般也称为参数约束回归模型 (restricted model), 是指总体参数满足某种约束条件的一类回归模型。

无约束模型: 一般也称为参数无约束回归模型 (unrestricted model), 是指总体参数没有被指定满足某种约束条件的一类回归模型。



模型整体显著性检验 (F检验) 的矩阵方法实现

根据回归系数显著性检验的定义，利用矩阵方法实现F检验的过程如下：

在N-CLRM假设下，采用OLS估计方法，容易证明：

对于无约束总体回归模型有

$$u_i \sim i.i.d N(0, \sigma^2)$$

$$Y_i \sim i.i.d N(\beta_1 + \beta_2 X_i + \cdots + \beta_k X_i, \sigma^2)$$

$$RSS_U = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \sim \chi^2(n - k)$$

对于受约束总体回归模型有

$$u_i \sim i.i.d N(0, \sigma^2)$$

$$Y_i \sim i.i.d N(\beta_1, \sigma^2)$$

$$RSS_R = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \sim \chi^2(n - 1)$$



模型整体显著性检验 (F 检验) 的矩阵方法实现

进一步地可以构造得到随机变量 \tilde{F} , 它将服从如下的F分布:

$$\tilde{F} = \frac{(RSS_R - RSS_U)/(k-1)}{RSS_U/(n-k)} = \frac{ESS_U/df_{ESS_U}}{RSS_U/df_{RSS_U}} \sim F(df_{ESS}, df_{RSS})$$



模型整体显著性检验 (F检验) 的矩阵方法实现

变异来源	平方和符号 SS	平方和计算 公式	自由度 df	均方和符号 MSS	均方和计算公式
回归平方 和	ESS	$\sum \hat{y}_i^2$	k-1	MSS_{ESS}	$= (\hat{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{y} - n\bar{Y}^2)/(k - 1)$
残差平方 和	RSS	$\sum e_i^2$	n-k	MSS_{RSS}	$= (\mathbf{y} \mathbf{y}' - \hat{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{y})/(n - k)$
总平方和	TSS	$\sum y_i^2$	n-1	MSS_{TSS}	$= (\mathbf{y}' \mathbf{y} - n\bar{Y}^2)/(n - 1)$



模型整体显著性检验 (F 检验) 的矩阵方法实现

基于原假设 $H_0: \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$ (也即斜率系数全部等于0, 或者说约束模型的 $RSS_R = 0$), 然后根据ANOVA分析表, 我们可以计算得到一个样本F统计量 (F^*)

$$F^* = \frac{ESS_U / df_{ESS_U}}{RSS_U / df_{RSS_U}} = \frac{(\hat{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{y} - n\bar{Y}^2) / (k - 1)}{(\mathbf{y}\mathbf{y}' - \hat{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{y}) / (n - k)}$$

此外, 我们还可以通过拟合优度 R^2 , 计算得到 F^*

$$F^* = \frac{ESS_U / df_{ESS_U}}{RSS_U / df_{RSS_U}} = \frac{R_U^2 / (k - 1)}{(1 - R_U^2) / (n - k)}$$



模型整体显著性检验 (F检验) 的矩阵方法实现

若给定显著性水平 α 和样本数 (n), 很快可以得到F分布的查表F值, 也即 $F_{(1-\alpha)}(k-1, n-k)$, 然后比较其与样本F统计量 (F^*) 的关系。

根据如下法则做出总体回归模型整体显著性检验结论:

- 如果 $F^* > F_{(1-\alpha)}(k-1, n-k)$, 则表明总体回归模型的F检验在 α 水平下是显著的, 也即显著地拒绝 $H_0: \beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_k = 0$, 从而接受 $H_1: \beta_j$ 不全为0, $j \in (2, \cdots, k)$, 认为模型整体统计上是有意义的!
- 如果 $F^* \leq F_{(1-\alpha)}(k-1, n-k)$, 则表明总体回归模型的F检验在 α 水平下是不显著的, 也即不能显著地拒绝 $H_0: \beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_k = 0$, 从而只能暂时接受 $H_0: \beta_2 = 0$, 认为模型整体在统计上是无意义的!

2.5 模型预测的矩阵表达



样本外预测的矩阵方法实现

根据一元线性回归样本外预测的知识内容，下面将用矩阵方法实现：

- 样本外均值预测 $E(Y_0|X_0)$
- 样本外个值预测 $(Y_0|X_0)$ 。

其中，给定样本外数据 $X_0 = [1, X_{20}, X_{30}, \dots, X_{k0}]^t$ （列向量）。

对于多元回归模型：

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \dots + \beta_k X_{ki} + u_i$$

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \dots + \hat{\beta}_k X_{ki} + e_i$$

$$y = X\beta + u$$

$$y = X\hat{\beta} + e$$

$$\hat{y} = X\hat{\beta}$$

$$\hat{Y}_0 = X_0\hat{\beta}$$



样本外预测的矩阵方法实现：均值预测

对于样本外均值预测 $E(Y_0|X_0)$ ，矩阵实现步骤如下：

在N-CLRM假设下，已知 \hat{Y}_0 的期望和真实方差为：

$$\begin{aligned} E(\hat{Y}_0) &= E(X_0\hat{\beta}) = X_0\beta = E(Y_0) \\ \text{var}(\hat{Y}_0) &= E(X_0\hat{\beta} - X_0\beta)^2 && \leftarrow (\text{var. def}) \\ &= E\left(X_0(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'X_0'\right) && \leftarrow (\text{trans.}) \\ &= X_0E\left((\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'\right)X_0' && \leftarrow \text{def. } \text{var}(\hat{\beta}) \\ &= \sigma^2 X_0(X'X)^{-1}X_0' && \leftarrow \text{var}(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1} \end{aligned}$$

同时， \hat{Y}_0 的样本方差为：

$$S_{\hat{Y}_0}^2 = \hat{\sigma}^2 X_0(X'X)^{-1}X_0'$$



样本外预测的矩阵方法实现：均值预测

因此 \hat{Y}_0 服从如下正态分布：

$$\hat{Y}_0 \sim N(\mu_{\hat{Y}_0}, \sigma_{\hat{Y}_0}^2)$$

$$\hat{Y}_0 \sim N(E(Y_0|X_0), \sigma^2 X_0(X'X)^{-1}X_0')$$

因此可以构造t统计量：

$$t_{\hat{Y}_0} = \frac{\hat{Y}_0 - E(Y|X_0)}{S_{\hat{Y}_0}} \sim t(n - k)$$

其中：

$$S_{\hat{Y}_0} = \sqrt{\hat{\sigma}^2 X_0(X'X)^{-1}X_0'}$$
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{ee'}{(n - k)}$$



样本外预测的矩阵方法实现：均值预测

给定显著性水平 α 的情况下，可以查表得到理论t值 $t_{1-\alpha/2}(n-k)$ ，从而可以计算得到均值预测的置信区间：

$$\hat{Y}_0 - t_{1-\alpha/2}(n-k) \cdot S_{\hat{Y}_0} \leq E(Y|X_0) \leq \hat{Y}_0 + t_{1-\alpha/2}(n-k) \cdot S_{\hat{Y}_0}$$

其中：

$$S_{\hat{Y}_0} = \sqrt{\hat{\sigma}^2 X_0 (X'X)^{-1} X_0'} \quad \leftarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{ee'}{(n-k)}$$
$$\hat{Y}_0 = X_0 \hat{\beta}$$



样本外预测的矩阵方法实现：个值预测

对于多元线性回归模型，样本外个值预测 $(Y_0|X_0)$ 的矩阵实现步骤如下：

因为有： $e_0 = Y_0 - \hat{Y}_0$

所以 e_0 的期望为：

提示：

$$\begin{aligned} E(e_0) &= E(Y_0 - \hat{Y}_0) \\ &= E(\mathbf{X}_0\boldsymbol{\beta} + u_0 - \mathbf{X}_0\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= E(u_0 - \mathbf{X}_0(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})) \\ &= E(u_0 - \mathbf{X}_0(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}) \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} \\ &= \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} \\ \hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} \end{aligned}$$



样本外预测的矩阵方法实现：个值预测

同时， e_0 的真实方差为：

$$\begin{aligned} \text{var}(e_0) &= E(Y_0 - \hat{Y}_0)^2 \\ &= E(e_0^2) \\ &= E(u_0 - \mathbf{X}_0(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u})^2 \\ &= \sigma^2 (1 + \mathbf{X}_0(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}_0') \end{aligned}$$

进一步地， e_0 服从如下正态分布：

$$\begin{aligned} e_0 &\sim N(\mu_{e_0}, \sigma_{e_0}^2) \\ e_0 &\sim N(0, \sigma^2 (1 + \mathbf{X}_0(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}_0')) \end{aligned}$$

而且 e_0 的样本方差为：

$$S_{Y_0 - \hat{Y}_0}^2 \equiv S_{e_0}^2 = \hat{\sigma}^2 (1 + \mathbf{X}_0(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}_0') \quad \leftarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\mathbf{e}\mathbf{e}'}{(n - k)}$$



样本外预测的矩阵方法实现：个值预测

因此可以构造t统计量：

$$T = \frac{\hat{Y}_0 - Y_0}{S_{e_0}} \sim t(n - k)$$

给定显著性水平 α 的情况下，可以查表得到理论t值 $t_{1-\alpha/2}(n - k)$ ，从而可以计算得到均值预测的置信区间：

$$\hat{Y}_0 - t_{1-\alpha/2}(n - 2) \cdot S_{Y_0 - \hat{Y}_0} \leq (Y_0 | X_0) \leq \hat{Y}_0 + t_{1-\alpha/2}(n - 2) \cdot S_{Y_0 - \hat{Y}_0}$$

其中：

$$S_{Y_0 - \hat{Y}_0} = \sqrt{\hat{\sigma}^2 (1 + (X_0(X'X)^{-1}X_0'))} \quad \leftarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{ee'}{(n - k)}$$
$$\hat{Y}_0 = \mathbf{X}_0\hat{\beta}$$

2.6 矩阵方法总结（示例）



补充材料

矩阵部分的知识，将是从中级计量进入高级计量的重要基础！

本章所介绍的矩阵知识，仅仅针对经典线性回归模型的几个关键步骤流程。

大家需要注意理解和区别的要点包括：

- 几个重要的矩阵及特征。如 \mathbf{X} 矩阵、 $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ 矩阵及其逆矩阵、随机干扰项 \mathbf{u} 的总体方差协方差矩阵 $var_cov(\mathbf{u})$ 及其样本方差协方差矩阵 $\overline{var_cov}(\mathbf{u})$ 。
- 矩阵工具让繁琐的代数问题，变得形式上更加简练和紧凑，但是也更加抽象。其中理解矩阵知识的一个窍门就是借助“空间几何学”的直觉。

本节slide介绍的是一个简单的**2元回归**案例矩阵数值计算和实现过程。

EViews软件下**4元回归**的操作实现案例可以参考我的实验指导材料。点击链接到[网页](#)。



矩阵方法总结：消费支出案例（数据）

Year	Y	one	X2	X3
1956	1673	1	1839	1
1957	1688	1	1844	2
1958	1666	1	1831	3
1959	1735	1	1881	4
1960	1749	1	1883	5

Showing 1 to 5 of 15 entries

Previous

1

2

3

Next

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + e_i$$

- Y_i 表示人均私人消费支出
- X_{2i} 表示人均可支配收入
- X_{3i} 表示时间 $t \in 1, 2, \dots, n$



矩阵方法总结：消费支出案例（软件报告）

我们可以构建如下的回归模型：

$$Y = + \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3 + e_i$$

统计软件自动计算结果整理如下（便于后续手动计算的比较）：

$$\begin{aligned} \hat{Y} = & + 300.29 & + 0.74X_2 & + 8.04X_3 \\ (t) & (3.8342) & (15.6096) & (2.6960) \\ (se) & (78.3176) & (0.0475) & (2.9835) \\ (fitness) & R^2 = 0.9976; & \bar{R}^2 = 0.9972 & \\ & F^* = 2513.52; & p = 0.0000 & \end{aligned}$$



矩阵方法总结：消费支出案例（软件报告）

利用R软件给出更为详细的分析报告如下（便于后续手动计算的比较）：

```
Call:
lm(formula = mod_mat, data = data_PCE)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-22.380  -6.141   3.414   6.686  22.183

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  300.28626    78.31763   3.834  0.00238 **
X2             0.74198     0.04753  15.610 2.46e-09 ***
X3             8.04356     2.98355   2.696  0.01945 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 12.84 on 12 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9976,    Adjusted R-squared:  0.9972
F-statistic: 2514 on 2 and 12 DF,  p-value: < 2.2e-16
```



矩阵方法总结：消费支出案例（回归系数）

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1839 & 1 \\ 1 & 1844 & 2 \\ 1 & 1831 & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2595 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1673 \\ 1688 \\ 1666 \\ \cdots \\ 2324 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 15 & 31895 & 120 \\ 31895 & 68922513 & 272144 \\ 120 & 272144 & 1240 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 37.2328 & -0.0225 & 1.3367 \\ -0.0225 & 0 & -8e-04 \\ 1.3367 & -8e-04 & 0.054 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 29135 \\ 62905821 \\ 247934 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 300.2863 \\ 0.742 \\ 8.0436 \end{bmatrix}$$



求出回归标准误差方差

可以根据如下公式计算回归误差方差 $\hat{\sigma}^2$:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n - k} = \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{n - k} = \frac{\mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y}}{n - k}$$

$$\mathbf{y}'\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1673 & 1688 & 1666 & \cdots & 2324 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1673 \\ 1688 \\ 1666 \\ \cdots \\ 2324 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 300.2863 & 0.742 & 8.0436 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 29135 \\ 62905821 \\ 247934 \end{bmatrix}$$



求出回归标准误差方差

因此有：

$$\begin{aligned} RSS &= \sum e_i^2 = \mathbf{e}'\mathbf{e} = \mathbf{y}\mathbf{y}' - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} \\ &= 57420003 - 57418026.1446 = 1976.8554 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{n - k} \\ &= \frac{1976.8554}{12} = 164.7379 \end{aligned}$$



求出回归系数的样本方差-协方差矩阵

根据如下公式：

$$\begin{aligned} S_{ij}^2(\hat{\beta}) &= \hat{\sigma}^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\ &= \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{n-k} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\ &= \frac{\mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y}}{n-k} \cdot (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \end{aligned}$$

可以计算得到回归系数的方差协方差矩阵为：

$$S_{ij}^2(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 6133.6505 & -3.7079 & 220.2063 \\ -3.7079 & 0.0023 & -0.1371 \\ 220.2063 & -0.1371 & 8.9015 \end{bmatrix}$$



回归系数的显著性检验 (t检验)

```
SS_b <- matrix(diag(mat_cov_b), byrow = F)  
S_b <- sqrt(SS_b)
```

回归系数的方差协方差矩阵中:

对角线元素即为回归系数的样本方差

则回归系数的样本标准差 $S_{\hat{\beta}}$ 为:

$S_{\hat{\beta}}^2$:

$$S_{\hat{\beta}}^2 = \begin{bmatrix} 6133.6505 \\ 0.0023 \\ 8.9015 \end{bmatrix}$$

$$S_{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} 78.3176 \\ 0.0475 \\ 2.9835 \end{bmatrix}$$



回归系数的显著性检验 (t检验)

根据原假设 H_0 , 可以得到:

计算结果为:

$$t_{\hat{\beta}}^* = \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{S_{ij}^2(\hat{\beta}_{kk})}} = \frac{\hat{\beta}}{S_{\hat{\beta}}} \quad t_{\hat{\beta}}^* = \begin{bmatrix} 3.8342 \\ 15.6096 \\ 2.696 \end{bmatrix}$$

给定 $\alpha = 0.05, k = 3, n = 15$, 我们可以查表得 $t_{1-\alpha/2}(n-k) = t_{0.975}(13) = 2.1788$ 。

因此表明全部回归系数的t检验的都是显著的。



平方和分解和ANOVA分析表

$$ESS = \mathbf{y}\mathbf{y}' - \hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}' \mathbf{y} = 1976.8554$$

$$RSS = \hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}' \mathbf{y} - n\bar{Y}^2 = 1976.8554$$

$$TSS = \mathbf{y}' \mathbf{y} - n\bar{Y}^2 = 830121.3333$$

变异来源	平方和符号SS	平方和计算公式	自由度df	均方和符号MSS	均方和计算公式
回归平方和	ESS	$\sum \hat{y}_i^2$	2	MSS_{ESS}	$\hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}' \mathbf{y} - n\bar{Y}^2 = 828144.4779$
残差平方和	RSS	$\sum e_i^2$	12	MSS_{RSS}	$\mathbf{y}\mathbf{y}' - \hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}' \mathbf{y} = 1976.8554$
总平方和	TSS	$\sum y_i^2$	14	MSS_{TSS}	$\mathbf{y}' \mathbf{y} - n\bar{Y}^2 = 830121.3333$



判定系数和调整判定系数

根据判定系数公式可以计算得到：

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\hat{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{y} - n\bar{Y}^2}{\mathbf{y}' \mathbf{y} - n\bar{Y}^2} = \frac{828144.4779}{830121.3333} = 0.9976$$

根据调整判定系数公式可以计算得到：

$$\bar{R}^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{(\mathbf{y}\mathbf{y}' - \hat{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{y}) / (k - 1)}{(\mathbf{y}' \mathbf{y} - n\bar{Y}^2) / (n - 1)} = 1 - \frac{1976.8554/12}{830121.3333/14} = 0.9972$$



进行F检验

首先计算得到方差分析表（ANOVA）：

变异来源	平方和符号SS	平方和计算公式	自由度df	均方和符号MSS	均方和计算公式
回归平方和	ESS	$\sum \hat{y}_i^2$	2	MSS_{ESS}	$\hat{\beta}' X' y - n\bar{Y}^2 = 828144.4779$
残差平方和	RSS	$\sum e_i^2$	12	MSS_{RSS}	$yy' - \hat{\beta}' X' y = 1976.8554$
总平方和	TSS	$\sum y_i^2$	14	MSS_{TSS}	$y'y - n\bar{Y}^2 = 830121.3333$



进行F检验

根据方差分析表ANOVA和样本F统计量计算公式，可以得到：

$$F^* = \frac{ESS_U / df_{ESS_U}}{RSS_U / df_{RSS_U}} = \frac{(\hat{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{y} - n \bar{Y}^2) / (k - 1)}{(\mathbf{y} \mathbf{y}' - \hat{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{y}) / (n - k)} = \frac{828144.4779 / 2}{1976.8554 / 12} = 2513.5207$$

得到显著性检验的判断结论。因为 $F^* = 2513.5207$ 大于

$F_{1-\alpha}(k-1, n-k) = F_{0.95}(2, 12) = 3.8853$ ，所以模型整体显著性的F检验结果显著。



进行样本外预测

给定样本外 \mathbf{X}_0 矩阵为：

$$\mathbf{X}_0 = [1 \quad 2610 \quad 16]$$

已经求得斜率向量为：

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 300.2863 \\ 0.742 \\ 8.0436 \end{bmatrix}$$

则线性拟合值为：

$$\hat{Y}_0 = \mathbf{X}_0 \hat{\beta} = 2365.553$$



进行样本外预测（均值预测）

已知：

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 37.2328 & -0.0225 & 1.3367 \\ -0.0225 & 0 & -8e-04 \\ 1.3367 & -8e-04 & 0.054 \end{bmatrix}$$

所以有：

$$X_0(X'X)^{-1}X_0' = 0.2953$$

因此进一步得到：

$$S_{\hat{Y}_0} = \sqrt{\hat{\sigma}^2 X_0(X'X)^{-1}X_0'} = \sqrt{164.7379 * 0.2953} = 6.9744$$



进行样本外预测（均值预测）

又因为给定 $\alpha = 0.05$ 时可以查到理论t值 $t_{1-\alpha/2}(n-k) = t_{0.975}(12) = 2.1788$

因此可以计算得到均值预测的 $1 - \alpha$ 置信区间为：

$$\begin{aligned}\hat{Y}_0 - t_{1-\alpha/2}(n-k) \cdot S_{\hat{Y}_0} &\leq E(Y|X_0) \leq \hat{Y}_0 + t_{1-\alpha/2}(n-k) \cdot S_{\hat{Y}_0} \\ 2365.5532 - 2.1788 * 6.9744 &\leq E(Y|X_0) \leq 2365.5532 + 2.1788 * 6.9744 \\ 2350.3573 &\leq E(Y|X_0) \leq 2380.7492\end{aligned}$$



进行样本外预测（个值预测）

已知：

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 37.2328 & -0.0225 & 1.3367 \\ -0.0225 & 0 & -8e-04 \\ 1.3367 & -8e-04 & 0.054 \end{bmatrix}$$

所以有：

$$X_0(X'X)^{-1}X_0' = 0.2953$$

因此进一步得到：

$$S_{e0} = \sqrt{\hat{\sigma}^2(1 + X_0(X'X)^{-1}X_0')} = \sqrt{164.7379 * (1 + 0.2953)} = 7.0458$$



进行样本外预测（个值预测）

又因为给定 $\alpha = 0.05$ 时可以查到理论t值 $t_{1-\alpha/2}(n-k) = t_{0.975}(12) = 2.1788$

因此可以计算得到均值预测的 $1 - \alpha$ 置信区间为：

$$\begin{aligned}\hat{Y}_0 - t_{1-\alpha/2}(n-k) \cdot S_{e0} &\leq (Y_0|X_0) \leq \hat{Y}_0 + t_{1-\alpha/2}(n-k) \cdot S_{e0} \\ 2365.5532 - 2.1788 * 7.0458 &\leq (Y_0|X_0) \leq 2365.5532 + 2.1788 * 7.0458 \\ 2350.2019 &\leq (Y_0|X_0) \leq 2380.9046\end{aligned}$$

本章結束

