

第4章 求解线性规划问题：单纯形法

现在,我们开始准备学习单纯形法,这是求解线性规划问题的通用方法。该方法是伟大的乔治·丹茨格(George Dantzig)^①在1947年创造的,它已被证明是一种非常有效的方法,现今常被用于在计算机上解决巨大问题。除了用于解决微小的问题,该方法总是在计算机上执行,相关软件包也得到广泛使用。单纯形法的扩展算法和变种算法也用于对模型进行优化后分析(包括灵敏度分析)。

本章介绍和说明单纯形法的主要特点。4.1节介绍了其一般性质,包括几何解释。后续3个部分介绍了求解标准型线性规划模型(目标求最大值,所有函数为“≤”形式,所有变量取值为非负)的过程,只有约束函数右侧的 b_i 项受到非负限制。4.5节给出了求解细节。4.6节描述了如何使单纯形法适应其他模型形式。接下来我们讨论优化后分析(见4.7节),并描述了单纯形法的计算机实现(见4.8节)。4.9节介绍了一种替代单纯形法解决巨大的线性规划问题的方法(内点法)。

4.1 单纯形法的本质

单纯形法是一个代数过程。然而,它的本质概念却是几何的。理解这些几何概念,为我们了解单纯形法是如何工作的、是什么使它如此有效等问题提供了一种强烈的直观感受。因此,在钻研其代数细节之前,本节从几何角度专注于研究图形。

为了说明一般的几何原理,我们将以3.1节中提出的Wyndor Glass公司为例子进行说明(4.2节和4.3节用单纯形法的代数算法求解同一问题)。5.1节将进一步精心说明大型问题的几何原理。

为了加深印象,在图4.1中又重复了例子的模型和图象。图形中,5个约束边界及其交点被加黑标出,因为它们是分析问题的关键。其中,每个约束边界(Constraint Boundary)是由相应约束条件所生成的一条边界线。边界线的交点是问题的角点解(Corner-point Solutions)。可行域的5个角——(0,0), (0,6), (2,6), (4,3)和(4,0)——是角点可行解(CPF Solutions)(其他3个点——(0,9),(4,6)和(6,0))。

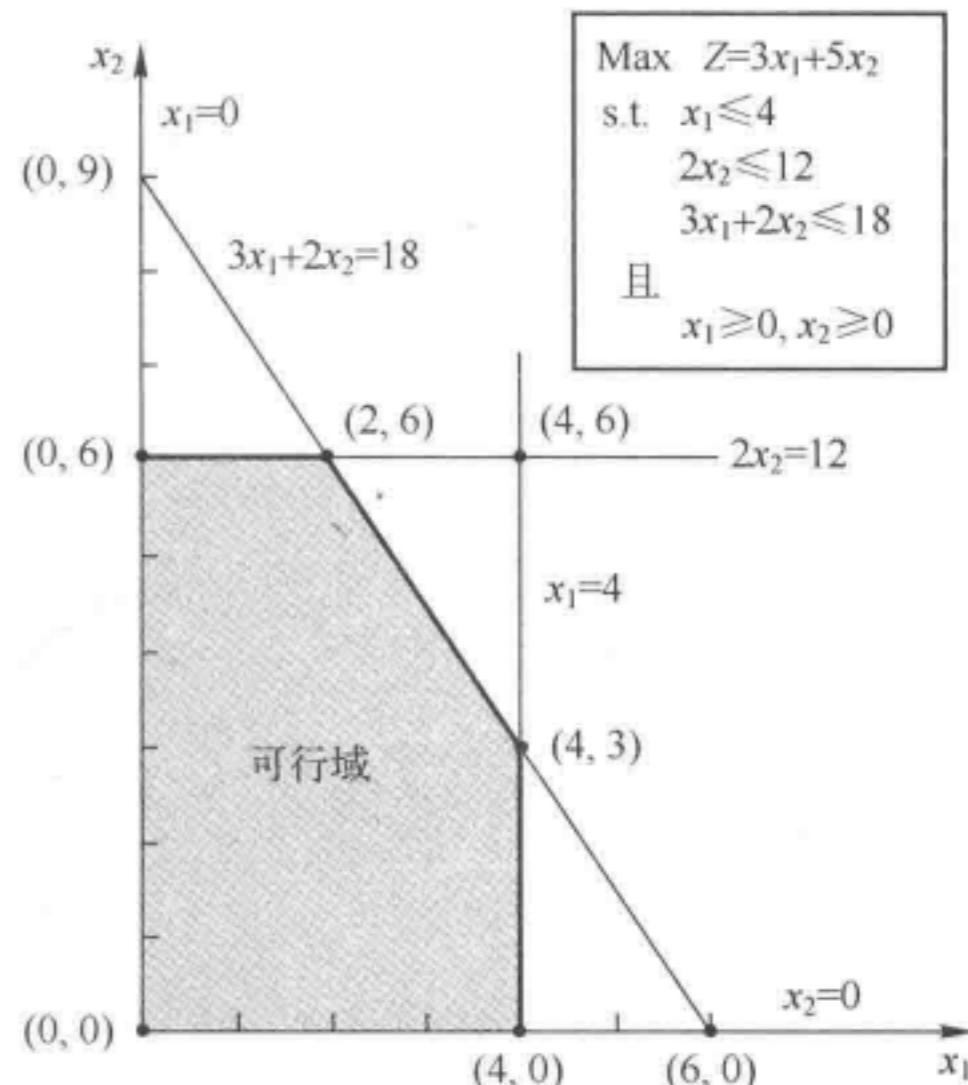


图4.1 Wyndor Glass公司问题的约束边界和角点解

^① 被誉为运筹学重要先驱的乔治·丹茨格广受尊敬,由于单纯形法的发展及其一系列的关键贡献,乔治·丹茨格通常被称作线性规划之父。作者有幸与他在斯坦福大学的运筹学系同事近30年。丹茨格博士始终投身边运筹学的活动,直到他在2005年90岁时去世。

0)——称为角点非可行解)。

本例中,每个角点解位于两个约束边界的交点上(对于 n 个决策变量的线性规划问题,每个角点解位于 n 个约束边界的交点上^①)。图 4.1 中,某对 CPF 解共享一个约束边界,而其他对并不是。用以下定义对这些情况进行区分是非常重要的。

对于 n 个决策变量的任意线性规划问题,位于 $n-1$ 条约束边界上的两个 CPF 解是相邻的。两个相邻 CPF 解相连构成一条线段,并位于同一约束边界线上。这样的线段称为可行域的边。

本例中,由于 $n=2$,所以在同一约束边界上的两个 CPF 解是相邻的。例如,(0,0)和(0,6)是相邻的因为它们都在约束边界 $x_1=0$ 上。图 4.1 的可行域有 5 条边,来自于形成这个可行域的 5 条线段。这里要引起注意的是,两条边界线相交形成一个 CPF 解。因此,每一个 CPF 都有两个与之相邻的 CPF 解(每一个都在两条边其中一条的另一端),如表 4.1 所列(在该表的每一行,第一列的 CPF 解与第二列里的两个 CPF 解都相邻,但第二列里的两个 CPF 解却互不相邻)。

表 4.1 Wyndor Glass 公司问题每个 CPF 解的相邻 CPF 解

CPF 解	相邻 CPF 解
(0,0)	(0,6) 和 (4,0)
(0,6)	(2,6) 和 (0,0)
(2,6)	(4,3) 和 (0,6)
(4,3)	(4,0) 和 (2,6)
(4,0)	(0,0) 和 (4,3)

我们之所以对相邻的 CPF 解感兴趣,是因为接下来介绍的这些解的通用性质能为我们提供有效的方法来判断某个 CPF 解是否是最优解。

最优化检验:考虑任意至少拥有一个最优解的线性规划问题,如果一个 CPF 解没有比它更好(用 Z 的值来衡量)的相邻 CPF 解,那么,它就是最优解。

例如,(2,6)显然最优,因为其对应的 $Z=36$,大于(0,6)对应的 $Z=30$ 和(4,3)对应的 $Z=27$ (我们将会在 5.1 节中深入讨论这个性质为什么成立)。最优化检验被单纯形法用来判断是否得到最优解。

下面就开始用单纯形法求解该示例。

4.1.1 示例求解

下面给出用单纯形法求解 Wyndor Glass 公司问题时的计算(从几何视角)要点。在每一步,先给出结论,然后在括号中给出原因(参见图 4.1 的可视化结果)。

初始化:选择(0,0)作为初始 CPF 解来检测(这是一个方便的选择,因为确定这个初始 CPF 解不需要计算)。

最优化检验:得到(0,0)不是最优解(相邻的 CPF 解优于它)。

迭代 1:通过执行以下 3 个步骤,转到更优的相邻 CPF 解(0,6)。

(1) 考虑从(0,0)发出的两条可行域边界线,选择沿着指向 x_2 轴的边界线移动(由目标函数 $Z=3x_1+5x_2$ 可知,沿着 x_2 轴移动比沿着 x_1 轴移动 Z 值的增加速度快)。

(2) 在移动到第一个新约束边界线 $2x_2=12$ 处停下(按照步骤(1)中确定的方向移动得越远,将会离开可行域。例如,当移至该方向第二个新的约束边界点(0,9)时,这个点是非可行解

^① 虽然角点解定义为 n 个约束边界的交点,但也有可能存在一个或多个其他的约束边界通过一个相同的点。

的角度)。

(3) 求解新约束边界线集合的交点(0,6) (这些约束边界的方程是 $x_1 = 0, 2x_2 = 12$, 求解即能得到这个解)。

最优性检验:结论是(0,6)不是最优解(因为有一个相邻的 CPF 解更优)。

迭代 2:通过以下 3 个步骤,转到更优的相邻 CPF 解(2,6)。

(1) 考虑从(0,6)发出的两条可行域边界线,选择沿着指向右侧的边界线移动(沿着该方向的边界线移动时 Z 值增加,而沿着 x_2 反向移动时 Z 值减小)。

(2) 在移到第一个新约束边界线 $3x_1 + 2x_2 = 18$ 处停止
(按照步骤(1)确定的方向移动得再远,将会离开可行域)。

(3) 求解新约束边界线集合的交点(2,6)(这些约束边界的方程是 $3x_1 + 2x_2 = 18$ 和 $2x_2 = 12$,求解即能得到这个解)。

最优性检验:结论是(2,6)为最优解,结束(没有相邻的 CPF 解更优)。

CPF 解检验的顺序如图 4.2 所示。在图中,每个带圈的数字代表了在第几次迭代时得到了这个解(在本书的网站上阅读求解例题部分,可以找到其他例题来演示单纯形法在搜寻一系列的 CPF 解之后得到最优解)。

现在,让我们来看看单纯形法 6 个关键的求解原理,它们反映了上述步骤背后的基本原理(记住,这些原理对拥有两个以上决策变量的问题也适用,而这类问题不能通过构建如图 4.2 图形那样的方式快速地找到最优解)。

4.1.2 关键求解原理

第一个求解原理是基于 3.2 节最后给出的最优解和 CPF 解之间的关系上建立的。

求解原理 1: 单纯形法只专注于 CPF 解。对于至少有一个最优解的任意问题,找到最优解仅需找到最好的 CPF 解^①。

由于可行解的数量通常是无限的,将需要检验的解的数量减少至很小的有限数量(图 4.2 中的 3 个)是一个巨大的简化。

接下来的求解原理决定了单纯形法的流程。

求解原理 2: 单纯形法是一个迭代算法(一个系统化的求解过程,通过保持重复固定的一系列步骤——迭代,直到获得期望的结果),具有如下结构。

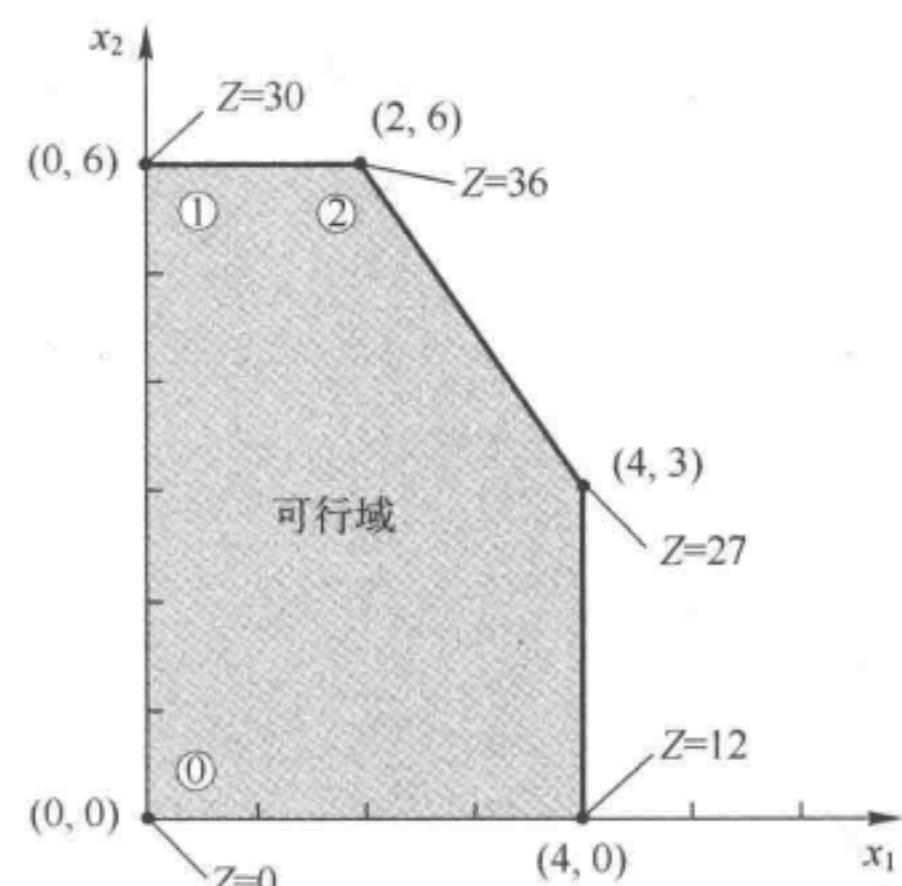
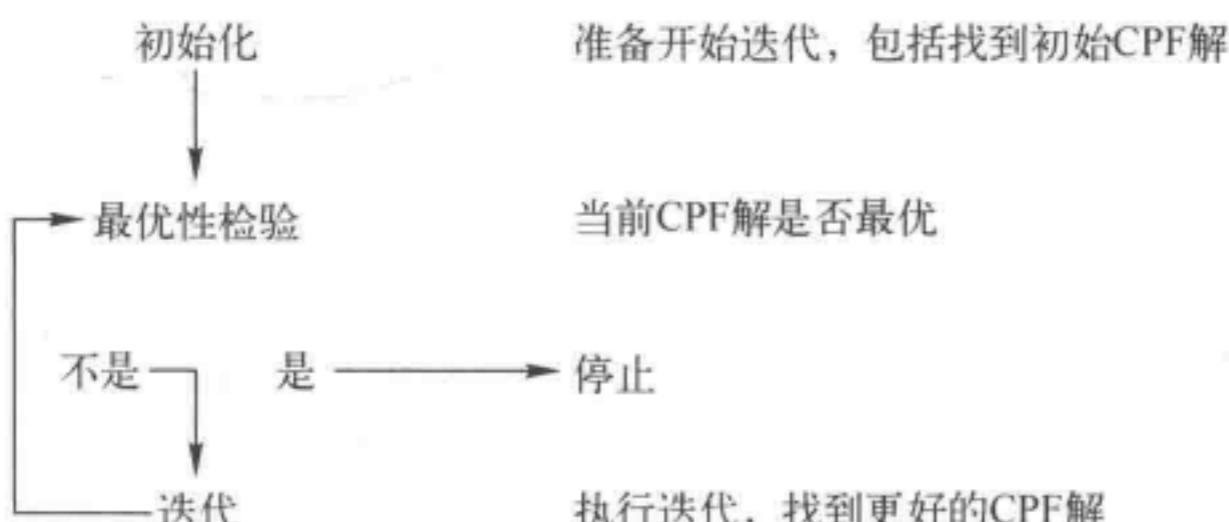


图 4.2 该图给出了 Wyndor Glass 单纯形法检查的系列 CPF 解(①,②,③),最优解(2,6)在检查了 3 个解之后被找到

① 仅有限制条件就是问题必须存在 CPF 解,如可行域有界就会确保这一点。

当例题解决时,注意该流程图怎样被执行,通过两次迭代直到找到最优解。接下来关注如何开始求解。

求解原理3:只要有可能,单纯形法的初始解选择原点(所有决策变量等于0)作为初始CPF解。当有太多的决策变量以至于不能利用图形找到初始CPF解时,这一选择意味着需要用代数方法来寻找初始CPF解。

当所有的决策变量有非负约束时,通常选择原点作为初始解是可能的,因为这些约束边界线相交造成了原点就是一个角点解。这个解就是CPF解,除非它由于不符合一个或者更多约束函数而不可行。如果它不可行,就需要特殊的处理过程来找到初始CPF解,我们将在4.6节中讨论。

下一个求解原理关系到在每次迭代中更优解的选择。

求解原理4:给定一个CPF解,收集其相邻CPF解的信息比收集其他CPF解的信息在计算上要快很多。因此,每次单纯形法执行一次迭代从当前CPF解转到更优的CPF解时,总是选择与当前CPF解相邻的CPF解,并不考虑其他CPF解。最后,到达最优解的整个求解路径是沿着可行域的边界进行的。

接下来关注的是在每次迭代中选择哪个相邻CPF解。

求解原理5:在当前CPF解确定之后,单纯形法检查可行域中从该CPF解出发的每一条边,这些边中的每一条都指向另一端的一个相邻CPF解,但单纯形法并不着急花费时间来求解相邻CPF解,而是确定当沿着该边移动时Z的增长率。在具有正增长率的边界线中,单纯形法选择沿着增长率最大的边线移动。当求解出该边线另一端的相邻CPF解时,一次迭代已经完成。然后,将得到的这个相邻CPF解作为当前CPF解进行最优化检验(如果需要)并转入下次迭代。

例题中,第一次迭代时,从 $(0,0)$ 沿着 x_1 轴边线移动时,Z的增长率为3(x_1 每增加一个单位,Z增加3个单位),而沿着 x_2 轴移动时,Z的增长率为5(x_2 每增加一个单位,Z增加5个单位),因此决定选择沿着后者进行移动。第二次迭代时,从 $(0,6)$ 出发只有一条正增长率的边指向 $(2,6)$,因此决定沿着此边移动。

最后的求解原理说明最优化检验如何有效运行。

求解原理6:求解原理5描述了单纯形法如何检查可行域中从当前CPF解出发的每条边,这样的检查会快速确定沿着边线向相邻CPF解移动时得到的Z的增长率,Z的正增长率意味着相邻CPF解优于当前CPF解,而Z的负增长率意味着相邻CPF解更劣。因此,最优化检验就是检查是否有能够使Z产生正增长率的边界线。如果没有这样的边存在,那么,当前CPF解就是最优解。

例题中,沿着从 $(2,6)$ 出发的任何一条边移动将会使Z的值减少。由于我们想得到Z的最大值,这一事实使我们迅速地得出 $(2,6)$ 就是最优解的结论。

4.2 单纯形法的构建

4.1节强调了单纯形法基于的几何原理。尽管如此,这一算法通常在计算机上执行,而计算机只能执行代数指令。因此,有必要将刚才描述的原理性几何求解步骤翻译为可执行的代数求解步骤。本节我们将介绍单纯形法的代数语言并将其与4.1节的原理相关联。

代数求解步骤是基于方程组的求解。因此,单纯形法构建的第一步就是将约束条件不等式转化为等价的约束等式(非负约束作为不等式保留是因为它们将会被单独处理)。这个变换主要通过引入松弛变量来实现。为了举例说明,考虑3.1节中Wyndor Glass公司问题示例的第一

个约束函数: $x_1 \leq 4$ 。

这一约束的松弛变量定义为 $x_3 = 4 - x_1$, 其就是不等式左边的松弛量, 得到 $x_1 + x_3 = 4$ 。给出的这个等式中, 当或者仅当 $4 - x_1 = x_3 \geq 0$ 时, $x_1 \leq 4$ 成立。因此, 原始约束 $x_1 \leq 4$ 整个等价于 $x_1 + x_3 = 4$ 和 $x_3 \geq 0$ 组成的约束对。

对其他约束函数引入松弛变量后, 例题原始的线性规划模型(下面左侧所示)被替换为等价模型(称为模型的扩展形式), 如下面右侧所示。

模型的原始形式

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{s. t. } x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

模型的扩展形式^①

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{s. t. (1) } x_1 + x_3 = 4$$

$$(2) \quad 2x_2 + x_4 = 12$$

$$(3) \quad 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$$

且

$$x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3, 4, 5$$

尽管模型的两种形式都精确地表达了同一问题, 但新形式更便于进行代数运算和确定 CPF 解。我们称这种形式为问题的扩展形式, 是因为原始形式通过引入单纯形法所需的附加变量后被扩展了。

如果当前解的松弛变量等于 0, 那该解位于对应约束函数的约束边界上。如果松弛变量的值大于 0, 意味着解位于约束边界线的可行一侧, 而松弛变量的值小于 0 时, 意味着解位于约束边界线的不可行一侧。这些性质在运筹学指导书的“理解松弛变量”部分给出了例题证明。

4.1 节部分的术语(角点解等)适用于问题的原始形式。现在介绍扩展形式相对应的术语。

扩展解是原始变量(决策变量)的解扩展上相应松弛变量值后得到的解。

例如, 将例题中的解(3, 2)扩展后得到的扩展解为(3, 2, 1, 8, 5), 因为相应松弛变量的值是 $x_3 = 1, x_4 = 8, x_5 = 5$ 。

基解是角点解的扩展解。

举例说明, 如图 4.1 中的角点非可行解(4, 6), 带入松弛变量的值 $x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = -6$ 扩展后, 得到相应的基解(4, 6, 0, 0, -6)。

实际上, 角点解(及基解)可以可行也可以非可行, 有以下定义。

基可行解(BF 解)是 CPF 解的扩展解。

因此, 例题的 CPF 解(0, 6)等价于扩展形式的 BF 解(0, 6, 4, 0, 6)。

基解和角点解之间(或者 BF 解和 CPF 解之间)的唯一区别在于是否包含松弛变量的值。

对任意基解, 获得相应的角点解仅需删去松弛变量即可。因此, 这两类解之间的几何和代数关系非常密切, 我们将在 5.1 节中描述。

由于基解、基可行解等术语是线性规划标准词汇表中非常重要的, 我们现在需要弄清它们的代数性质。对于例题中的扩展形式, 注意约束条件函数中有 5 个变量和 3 个等式, 因此,

$$\text{变量的个数 - 方程的个数} = 5 - 3 = 2$$

这一事实给出了解决问题的 2 个自由度, 因为可以选择任意 2 个变量设置任意数值来求解

^① 松弛变量并未在目标函数中出现, 因其系数为 0。

3个方程中的剩余3个变量。^①单纯形法用0作为这一任意值。因此,2个变量(称为非基变量)被置为0,同时,关于其他3个变量(称为基变量)的3个方程的解称为基解。这些性质一般定义如下。

基解具有如下性质。

- (1) 每个变量可指派为非基变量或者基变量。
- (2) 基变量的个数等于约束条件(现在是方程)的个数。因此,非基变量的个数等于变量的总数减去约束条件的个数。
- (3) 非基变量的值设为0。
- (4) 求解出方程组(扩展形的约束条件)的同时,也获得了基变量的值(基变量的集合通常称为基)。
- (5) 如果基变量满足非负约束,那基解就是BF解。

为了说明这些定义,再来看一下例题的BF解(0,6,4,0,6)。这个解之前是通过扩展CPF解(0,6)获得的。尽管如此,得到相同解的另一种方法是选择 x_1 和 x_4 作为2个非基变量,并令这2个变量值为0。这3个方程就产生了,分别求解得到 $x_3=4, x_2=6, x_5=6$ 作为3个基变量的解,如下所示(基变量加粗)。

令 $x_1=0, x_4=0$,得

$$\begin{array}{lll} (1) & x_1 + x_3 = 4 & x_3 = 4 \\ (2) & 2x_2 + x_4 = 12 & x_2 = 6 \\ (3) & 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 & x_5 = 6 \end{array}$$

因为所有3个基变量是非负的,基解(0,6,4,0,6)实际上是一个BF解。本书网站上解题示例部分包括了关于CPF解和BF解的另一个解题示例。

就像某2个CPF解是相邻的那样,其对应的2个BF解也是相邻的。这里给出判断2个BF解是相邻的简单方法。

对于2个BF解,如果所有非基变量中只有一个不同,则它们是相邻的。这意味着它们的基变量中也只有一个不同,虽然可能数值不同。

所以,从当前BF解向相邻BF解移动,意味着将一个变量从非基变量变为基变量,对另一个变量则采取相反的变换(然后,调整基变量的值来继续满足方程)。

为了说明相邻BF解,考虑图4.1中的2个相邻CPF解(0,0)和(0,6)。它们的扩展解(0,0,4,12,18)和(0,6,4,0,6),自动就是相邻BF解。尽管如此,不需要看图4.1就能得到这个结论。另一个标志就是非基变量, (x_1, x_2) 和 (x_1, x_4) 除了 x_2 被 x_4 代替外也相同。因此,从(0,0,4,12,18)转到(0,6,4,0,6)包括了将 x_2 从非基变量变换为基变量,而 x_4 采取了相反变换。

当采用扩展形式处理问题时,同时将目标函数方程作为新的约束条件方程进行考虑和处理是非常方便的。因此,在我们开始单纯形法之前,需要把问题等价地改写为

$$\begin{array}{lll} \text{Max } & Z & \\ \text{s. t. } & (0) Z - 3x_1 - 5x_2 & = 0 \\ & (1) \quad x_1 + x_3 & = 4 \\ & (2) \quad 2x_2 + x_4 & = 12 \\ & (3) \quad 3x_1 + 2x_2 + x_5 & = 18 \end{array}$$

^① 这种判断方程组自由度数的方法是可行的,只要方程组不包括任何冗余方程。对于从线性规划模型扩展形式构成的方程组,同样有效。

且

$$x_j \geq 0, \quad j=1,2,\dots,5$$

方程(0)就像一个原始的约束条件,因其已经是等式形式,不需要引入松弛变量。在增加一个方程的同时,我们也在方程组中增加了一个未知数(Z)。因此,当按照上文所述用方程(1)~方程(3)获得基解时,我们同时利用方程(0)求解 Z 。

幸运的是,Wyndor Glass 公司的问题符合我们的标准形式,所有的约束函数都有非负的右端项 b_i 。如果不是这种情况,在运用单纯形法之前将需要做一些额外的调整。这些细节将在 4.6 节中描述,我们当前关注的是单纯形法本身。

4.3 单纯形法的代数运算

继续以 3.1 节给出的例子为蓝本,如 4.2 节结尾所改写的那样,为作说明之用。为开启将单纯形法的几何原理和代数原理相联系的工作,在表 4.2 中从代数和几何两个视角,并行地列出单纯形法是如何求解该例的。几何视角(4.1 节中首次描述)是建立在模型的原始形式(没有松弛变量)上的,所以当检查表的第二列时,再看图 4.1 可以取得更直观的效果。当检查表的第三列时,可参照 4.2 节结尾给出的模型扩展形式。

下面补充表 4.2 第三列中每一步的具体细节。

表 4.2 单纯形法求解 Wyndor Glass 公司问题的几何和代数解释

方法步骤	几何解释	代数解释
初始	选择(0,0)作为初始 CPF 解	选择 x_1 和 x_2 作为非基变量($=0$)作为初始 BF 解:(0,0,4,12,18)
最优化检测	不是最优,因为沿着从(0,0)出发的任何一条边移动会使 Z 值增加	不是最优,因为增加任一非基变量(x_1 或 x_2)的值会使 Z 值增加
迭代 1 第 1 步	沿着 x_2 轴的边向上移动	增加 x_2 的值并调整其他变量的值来满足方程组
第 2 步	当到达第一个新的约束边界($2x_2 = 12$)时停止移动	当第一个基变量(x_3 , x_4 或 x_5)下降到 0 时(x_4)停止
第 3 步	找到 2 个新约束边界线的交点:(0,6)就是新的 CPF 解	x_2 现在作为新的基变量, x_4 现在成为非基变量,解方程组得:(0,6,4,0,6)是新的 BF 解
最优化检验	不是最优,因为沿着从(0,6)出发的边向右移动会使 Z 值增加	不是最优,因为增加一个非基变量(x_1)的值会使 Z 值增加
迭代 2 第 1 步	沿着这条边向右移动	增加 x_1 的值并调整其他变量的值来满足方程组
第 2 步	当到达第一个新的约束边界($3x_1 + 2x_2 = 18$)时停止移动	当第一个基变量(x_2 , x_3 或 x_5)下降到 0 时(x_5)停止
第 3 步	找到 2 个新约束边界线的交点:(2,6)就是新的 CPF 解	x_1 现在作为新的基变量, x_5 现在成为非基变量,解方程组得:(2,6,2,0,0)是新的 BF 解
最优化检验	(2,6)是最优解,因为沿着从(2,6)出发的任何边移动会使 Z 值减少	(2,6,2,0,0)是最优解,因为增加任何一个非基变量(x_4 或 x_5)的值会使 Z 值减少

4.3.1 初始化

选择 x_1 和 x_2 为非基变量(令变量为 0)作为初始 BF 解,是基于 4.1 介绍的求解原理 3 得到

的。这一选择减少了从以下方程组(基变量加粗)求解基变量(x_3, x_4, x_5)的工作量。

令 $x_1 = 0, x_2 = 0$, 得

$$(1) \quad x_1 + x_3 = 4 \quad x_3 = 4$$

$$(2) \quad 2x_2 + x_4 = 12 \quad x_4 = 12$$

$$(3) \quad 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \quad x_5 = 18$$

因此, 初始 BF 解是(0, 0, 4, 12, 18)。

注意: 这个解能够立即得出是因为每个方程只有一个基变量, 系数为 1, 且不在其他方程中出现。你很快将发现基变量集合改变时, 单纯形法也能用一种代数方法(高斯消元法)将方程转化为同样方便的形式立即得出 BF 解。这一形式称为高斯消元法的常态形式。

应用案例

三星电子有限公司是动态和静态随机存储设备及其他数字集成电路经销商中的佼佼者, 它已成为 2009 年以来世界最大(年均收入超过 1000 亿美元)的信息技术公司, 雇员超过 20 万, 分布在 60 多个国家。公司坐落于韩国的 Kiheung 地区(可能是世界上最大的半导体制造地), 每月制造超过 30 万个硅晶片。

循环周期是一个工业术语, 表示从一批空白硅晶片进入制造过程直到晶片上的所有配件均装配完成所花费的时间。缩短循环周期是公司一直努力的目标, 因其不但可以降低成本, 还可以向潜在顾客提供更短的交货时间。这是一个非常关键的方法, 使其在竞争激烈的产业中保持或增加市场份额。

为了缩短循环周期需要应对 3 个挑战。第一, 仍然是产品结构挑战。第二, 公司经常需要对目标周期时间内的晶原生产表进行根本性改变以适应客户需求预测的变化。第三, 通用型的机器设备并不同质, 只有少量机器能够按照设计步骤逐个装配。

运筹小组建立了一个具有成千上万变量和约束条件的巨大线性规划模型应对这些挑战。目标函数包括最小化未交货订单和成品库存。尽管这个模型规模很大, 通过运行高度复杂的单纯形法(及相关技术), 在需要时数分钟内就能解出。

该模型的不断运行, 使公司制造动态随机存储设备的生产循环周期由原来的 80 天以上缩短到 30 天以内, 巨大的改进和因其产生的制造成本的减少及售价降低使三星公司年均销售收入增加了 2 亿美元。

资料来源: R. C. Leachman, J. Kang, and Y. Lin: "SLIM: Short Cycle Time and Low Inventory in Manufacturing at Samsung Electronics," *Interfaces*, 32(1): 61-77, Jan. -Feb. 2002. 我们网站上提供了文章链接: www.mhhe.com/hillier。

4.3.2 最优性检验

目标函数为 $Z = 3x_1 + 5x_2$, 因此对于初始 BF 解, $Z = 0$ 。因为在目标函数中, 没有一个基变量(x_3, x_4, x_5)有非零系数, 所以如果变量从 0 开始增长, 那每个非基变量(x_1, x_2)的系数给出了 Z 的增长率(基变量的值会被调整以继续满足方程组)^①。这些增长率(3~5)是正的, 因此, 基于 4.1 节中的求解原理 6, 我们得出结论, (0, 0, 4, 12, 18) 不是最优解。

对之后迭代产生的每个 BF 解, 至少有一个基变量在目标函数中系数非 0。因此, 最优性检验将把新方程(0)改写成只有非基变量的目标函数, 稍后将会看到。

4.3.3 确定移动方向(迭代步骤 1)

从 0 开始增加一个非基变量(同时调整基变量的值以满足方程组), 相当于沿着从当前 CPF 解发出的边界线移动。基于 4.1 节的求解原理 4 和求解原理 5, 增加哪一个非基变量, 要按如下选择:

$$Z = 3x_1 + 5x_2$$

^① 注意: 变量 x_j 的系数解释是基于这些变量位于等式右侧的情况, $Z = 3x_1 + 5x_2$ 。当这些变量被移到方程(0)的左端时, $Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$, 非零系数变号。

增加 x_1 ? Z 的增长率是 3。

增加 x_2 ? Z 的增长率是 5。

$5 > 3$, 所以选择 x_2 来增加。

如下所述, 我们称 x_2 为迭代 1 的进基变量。

在单纯形法的每一次迭代中, 步骤 1 的目的是选择一个非基变量从 0 开始增加(同时调整基变量的值以满足方程约束)。从 0 增加这个非基变量的值将其转变为下一个 BF 解中的基变量。因此, 这个变量称为当前迭代的进基变量(因为它进入了基中)。

4.3.4 确定停止处(迭代步骤 2)

步骤 2 处理的是在进基变量 x_2 停止移动前能增加多少的问题。 Z 随着 x_2 的增加而增加, 所以想在可行域的范围内尽可能地增加其值。满足扩展形式的约束条件(如下所示)的要求意味着增加 x_2 (同时保持非基变量 $x_1 = 0$) 改变了如下右侧式子中一些基变量的值。

令 $x_1 = 0$, 得

$$(1) \quad x_1 + x_3 = 4 \quad x_3 = 4$$

$$(2) \quad 2x_2 + x_4 = 12 \quad x_4 = 12 - 2x_2$$

$$(3) \quad 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \quad x_5 = 18 - 2x_2$$

另一个可行性要求是所有的变量必须非负。非基变量(包括进基变量)是非负的, 但是我们需要检查在基变量不破坏非负约束的情况下 x_2 能增加多少。

$$x_3 = 4 \geq 0 \Rightarrow x_2 \text{ 无上界}$$

$$x_4 = 12 - 2x_2 \Rightarrow x_2 \leq \frac{12}{2} = 6 \leftarrow \text{最小值}$$

$$x_5 = 18 - 2x_2 \Rightarrow x_2 \leq \frac{18}{2} = 9$$

因此, x_2 只能增加到 6, 此时, x_4 减少为 0。若 x_2 的值增加超过 6, 将会使 x_4 为负, 违反了可行性。

这些计算称为最小比检测。这个检测的目的是在进基变量增加时确定哪个基变量最先减至 0。在进基变量系数为 0 或者为负值时, 可以立即划去任何方程中的基变量, 因为在进基变量增加时这个基变量不会减少(正如例题中方程(1)中的 x_3 那样)。尽管如此, 对进基变量的系数严格为正(>0)的方程来说, 这个检测计算的是右端项与进基变量系数的比值。方程中拥有最小比值的基变量会随着进基变量值的增加首先减小到 0。

在任何单纯形法的迭代过程中, 步骤 2 通过最小比检测决定随着进基变量的增加哪个基变量会首先减少到 0。这个基变量减至 0 使其在下一个 BF 解中它变成了非基变量。因此, 这个变量在当前迭代中称为出基变量(因为它离开了基)。

因此, 例题迭代 1 中 x_4 是出基变量。

4.3.5 求新的 BF 解(迭代步骤 3)

把 x_2 从 0 增至 6 使左边的初始 BF 解变成了右边新的 BF 解。

初始 BF 解 新 BF 解

非基变量: $x_1 = 0, x_2 = 0$ $x_1 = 0, x_4 = 0$

基变量: $x_3 = 4, x_4 = 12, x_5 = 18$ $x_3 = ?, x_2 = 6, x_5 = ?$

步骤3的目的是把方程组转换为一种对于最优性检验和(如果需要)新BF解的下次迭代更方便的形式(高斯消元的常态形)。在这个过程中,这种形式也将求出新解中 x_3 和 x_5 的值。

下面再看一下原始方程组的完整形式,其中新的基变量以粗体标示(变量Z在目标函数方程中作为基变量):

$$\begin{array}{lll} (0) & Z - 3x_1 - 5x_2 & = 0 \\ (1) & x_1 & + x_3 = 4 \\ (2) & 2x_2 & + x_4 = 12 \\ (3) & 3x_1 + 2x_2 & + x_5 = 18 \end{array}$$

在方程(2)中, x_2 代替 x_4 成为基变量。为了求解这个关于 Z 、 x_2 、 x_3 和 x_5 的方程组,需要进行一些初等代数运算,把当前 x_4 的系数形式(0,0,1,0)变成 x_2 的新系数。可以用以下两类初等代数运算。

- (1) 方程乘以(或除以)一个非零常数。
- (2) 一个方程加上(或减去)另一个方程的倍数。

准备执行这些运算时,必须注意在上面方程组中 x_2 的系数分别为-5,0,2和2,而我们想让这些系数分别变为0,0,1和0。为了将方程(2)中的系数2变为1,运用第一类初等代数运算,将方程(2)除以2,得

$$(2) x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 6$$

为了把系数-5和2变为0,运用第二类初等代数运算。特别地,把方程(0)加上新的方程(2)的5倍,方程(3)减去新的方程(2)的2倍,得到新的方程组为

$$\begin{array}{lll} (0) & Z - 3x_1 & + \frac{5}{2}x_4 = 30 \\ (1) & x_1 & + x_3 = 4 \\ (2) & x_2 & + \frac{1}{2}x_4 = 6 \\ (3) & 3x_1 & - x_4 + x_5 = 6 \end{array}$$

因为 $x_1=0$ 和 $x_4=0$,由这个形式的方程组可立即得出新的BF解,即 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 6, 4, 0, 6)$, $Z=30$

求线性方程组联立解的计算过程称为高斯-乔丹消元法或简称高斯消元法^①。这个方法的核心原理,就是运用初等代数运算把初始方程组变为高斯消元法的常态形,这时每个基变量只存在于一个方程中且系数为+1,在其他方程中这个变量会被消去。

4.3.6 新BF解的最优性检验

当前方程(0)给出了以当前非基变量表示的目标函数的值:

$$Z = 30 + 3x_1 - \frac{5}{2}x_4$$

任意一个非基变量从0开始增加(同时调整基变量的值以继续满足方程成立)将会导致向两个相邻BF解其中的一个移动。由于 x_1 有正系数,增加 x_1 会移向优于当前BF解的相邻BF解,因此当前解不是最优解。

^① 实际上,高斯-乔丹消元法和高斯消元法有一些技术上的区别,但我们这里不再区分。

4.3.7 第二次迭代和求得最优解

由于 $Z = 30 + 3x_1 - \frac{5}{2}x_4$, Z 将随着 x_1 的增加而增加, 而不是随着 x_4 的增加而增加。因此, 步骤 1 选择 x_1 作为进基变量。

步骤 2 中, 当前方程组关于 x_1 能增加多少 ($x_4=0$) 给出如下结论:

$$x_3 = 4 - x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \frac{4}{1} = 4$$

$$x_2 = 6 \geq 0 \Rightarrow x_1 \text{ 无上界}$$

$$x_5 = 6 - 3x_1 \Rightarrow x_1 \leq \frac{6}{3} = 2 \leftarrow \text{最小值}$$

因此, 最小比检测表明, x_5 是出基变量。

步骤 3 中, x_1 替换 x_5 成为基变量, 我们对当前方程组进行初等代数运算, 把 x_5 的当前系数 (0,0,0,1) 变为 x_1 的新系数, 得到如下新方程组:

$$(0) Z + \frac{3}{2}x_4 + x_5 = 36$$

$$(1) \quad x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 = 2$$

$$(2) \quad x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 6$$

$$(3) \quad x_1 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 = 2$$

因此, 下个 BF 解是 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 6, 2, 0, 0)$, 得 $Z = 36$ 。对这个新的 BF 解进行最优化检验, 用当前方程 (0), 将 Z 表示成关于当前非基变量的函数:

$$Z = 36 - \frac{3}{2}x_4 - x_5$$

增加 x_4 或 x_5 都会使 Z 减少, 因此两个相邻 BF 解都不会像当前 BF 解一样好。因此, 根据 4.1 节的求解原理 6 可知, 当前 BF 解必最优。

根据问题的原始形式(无松弛变量), 最优解为 $x_1 = 2, x_2 = 6$, 得

$$Z = 3x_1 + 5x_2 = 36$$

如果想看关于单纯形法应用的其他示例, 建议你现在阅读 OR 教程中标题为“单纯形法——代数形式”的示范。这个示范同时展示了单纯形法的代数和几何动态演化。像本书其他部分(包括下一节)介绍的许多示例一样, 这个计算机示例突出强调了难以用书面文字表达的概念。此外, 本书网站的解题示例部分包含了应用单纯形法的另一个例子。

为了进一步帮助你高效地学习单纯形法, 在运筹学课件中的 IOR Tutorial 中包含了一个标题为用单纯形法交互求解的程序。当你一步一步决策时, 这个程序几乎能完成所有计算, 使你能更专注于研究概念, 而不是注重于大量的计算。因此, 你可能在家庭作业中要用到这个程序。这个软件还会帮助你发现在第一次迭代时出现的错误。

在你学了单纯形法之后, 需要简单地应用一个自动计算程序, 迅速求得线性规划问题的最优解。为了便于学习, 我们在 IOR Tutorial 中收录了一个称为用单纯形法自动求解的程序。这个程序仅被设计用于课本上规模的问题, 包括检查用交互程序得到的解。4.8 节将介绍更强大的

软件求解线性规划,它们也将在本书网站中提供。

下一节包含对单纯形法表格形式的介绍应用起来更方便。

4.4 单纯形法的表格形式

4.3节讲解的单纯形法的代数形式可能是理解算法潜在逻辑关系的最好方法。尽管如此,它并不是进行所需计算最方便的形式。当需要手工求解问题(或者借助运筹学课件进行交互学习时),我们向你推荐本节中描述的表格形式。^①

单纯形法的表格形式只记录核心信息,即:(1)变量的系数;(2)方程式右端的常数项;(3)每个方程的基变量。这样省去了书写每个方程的变量符号,但更重要的是突出了算术计算中的数字,并精简了运算需记录的内容。

表4.3比较了Wyndor Glass公司问题的原始方程组的代数形式(左侧)和表格形式(右侧),右边的表格称为单纯形表,每个方程的基变量在左侧用粗体标出,在右侧单纯形表的第一列给出(尽管只有 x_1 是基变量或非基变量,Z在方程(0)中充当基变量)。基变量列中未列出的其余所有变量(x_1, x_2)自动成为非基变量。在我们令($x_1=0, x_2=0$)之后,“右端项”列给出了基变量导出结果,因此,初始BF解是(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)=(0,0,4,12,18),而Z=0。

表4.3 Wyndor Glass公司问题的原始方程组

(a) 代数形式	(b) 表格形式								
	基变量	方程 编号	系数					右端项	
(0) $Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$	Z	(0)	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(1) $x_1 + x_3 = 4$	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
(2) $2x_2 + x_4 = 12$	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
(3) $3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18

单纯形法的表格形式运用单纯形表来简洁地表达产生当前BF解的方程组。对于这个解,在最左侧列的每个变量等于对应的最右侧列的数值(未列出的变量值为0)。当进行最优化检验或迭代时,仅仅与Z列右侧的那些数值相关^②。术语“行”指的是Z列右面的一行数字(包括右端项数字),第*i*行与方程*i*相对应。

下面总结单纯形法的表格形式,同时,简单描述它在Wyndor Glass公司问题中的应用。记住,这个逻辑与前一节描述的代数形式是相同的。只是对当前方程组和后续迭代的表示形式有了变化(另外,在最优化检验或迭代的步骤1和步骤2时,将不需要费力去把变量移动到方程的右侧)。

4.4.1 单纯形法总结(以迭代1为例)

初始化:引入松弛变量,选择决策变量作为初始非基变量(令之为0),选择松弛变量作为初始基变量(参见4.6节,如果不是我们的标准形式—目标求最大值,只有“≤”的方程约束和所有

^①一种对计算机自动化执行更为方便的表格形式将在5.2节中讲述。

^②由于这个原因,允许删去方程号和Z列来减少单纯形表的规模。我们倾向于保留这些列,以提示单纯形表正在表达当前的方程组,以及Z是方程(0)的一个变量。

变量为非负—或者有 b_i 值为负的模型需要做必要的调整)。

例题中,这一选择得到了表 4.3 中(b)栏所列的初始单纯形表,因此初始 BF 解为 $(0, 0, 4, 12, 18)$ 。

最优化检验:当且仅当第 0 行的每个系数为非负(≥ 0)时,当前 BF 解为最优解。如果最优,就停止计算;否则,进行迭代得到下一个 BF 解。迭代需要将一个非基变量变为基变量(步骤 1),以及相应把一个基变量变为非基变量(步骤 2),然后求出新解(步骤 3)。

例题中,像 $Z = 3x_1 + 5x_2$ 所表示的那样,增加 x_1 或 x_2 的值,会使 Z 增加,所以当前 BF 解不是最优,同样的结论也可以从方程 $Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$ 中得出。表 4.3 中(b)栏中第 0 行列出了系数 -3 和 -5。

迭代:步骤 1:通过选择方程(0)中系数为负且绝对值最大(即最负系数)的变量(自然是非基变量)作为进基变量。框出这个系数下面的列,称其为枢列。

例题中,最负系数是 x_2 的系数 -5 ($5 > 3$),因此, x_2 将会变成基变量(表 4.4 给出了这种变化,在 x_2 列中 -5 的下面用框标出)。

步骤 2:通过运用最小比检验确定出基变量。

4.4.2 最小比检验

(1) 挑出枢列中严格为正(>0)的系数。

(2) 将挑出的每一个系数去除同一行的右端项。

(3) 标出最小比值所在的行。

(4) 该行的基变量就是出基变量,在下一个单纯形表的基变量列中,由进基变量替换该变量。

框出该行,称为枢行。称同时在两个框中的数字为枢数。

例题中,最小比检验的计算在表 4.4 右侧列出。因此,第二行是枢行(表 4.5 中第一个单纯形表中该行被框出), x_4 是出基变量。在下一个单纯形表中(表 4.5 底部),第二行中 x_2 替代 x_4 成为基变量。

表 4.4 运用最小比检验确定 Wyndor Glass 公司问题的第一个出基变量

基变量	方程编号	系 数					右端项	比值
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4		
Z	(0)	1	-3	-5	0	0	0	0
x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	$12 \rightarrow 12/2 = 6 \leftarrow \text{Min}$
x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	$18 \rightarrow 18/2 = 9$

步骤 3:用初等行变换求解新 BF 解(用非零常数去乘或除某行;将一行的倍数加到或去减另一行),通过高斯消元法,在当前单纯形表下方,建立一个新的单纯形表,然后继续回到最优化检验。特定的初等行变换实施如下。

(1) 将枢行除以枢数。在后面两步中要用到这个新枢行。

(2) 对其他在枢列中有负系数的行(包括第 0 行),将该系数的绝对值与新枢行的乘积加到该行上去。

(3) 对其他在枢列中有正系数的行,减去该系数与新枢行的乘积。

例题中,由于 x_2 替代 x_4 成为基变量,需要把第一个单纯形表 x_4 列的系数 $(0, 0, 1, 0)$ 格式应

用于第二个单纯形表的 x_2 列。开始时,将枢行(第二行)除以枢数(2),得到了表 4.5 中新的第二行。接下来,将新的第二行数值乘以 5 加到第 0 行上去,然后从第三行减去新的第二行的 2 倍(或者等价地,将第三行减去老第二行)。这些计算得到了新的单纯形表如表 4.6 迭代 1 所列。因此,新的 BF 解是(0,6,4,0,6),对应 $Z=30$ 。接下来返回最优化检验,检查新的 BF 解是否最优。由于新的第 0 行仍然具有负系数(x_1 的系数为 -3),解并不是最优,所以至少还需迭代一次。

表 4.5 第一个枢行除以第一个枢数后 Wyndor Glass 公司问题的单纯形表

迭 代	基 变 量	方程编号	系 数					右端项
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	Z	(0)	1	-3	-5	0	0	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	12
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	18
1	Z	(0)	1					
	x_3	(1)	0					
	x_4	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0
	x_5	(3)	0					6

表 4.6 Wyndor Glass 公司问题的前两个单纯形表

迭 代	基 变 量	方程编号	系 数					右端项
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	Z	(0)	1	-3	-5	0	0	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	12
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	18
1	Z	(0)	1	-3	0	0	$\frac{5}{2}$	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0
	x_5	(3)	0	3	0	0	-1	6

4.4.3 例题的第二次迭代和最优解

第二次迭代从表 4.6 的第二个单纯形表开始寻找下一个 BF 解。按照步骤 1 和步骤 2 的说明,确定 x_1 作为进基变量, x_5 是出基变量,如表 4.7 所列。

表 4.7 Wyndor Glass 公司迭代 2 中的步骤 1 和步骤 2

迭 代	基 变 量	方程编号	系 数					右端项
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	
1	Z	(0)	1	-3	0	0	$\frac{5}{2}$	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	$4 \quad 4/1=4$
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	6
	x_5	(3)	0	3	0	0	-1	6 $6/3=2 \leftarrow \text{Min}$

步骤3中,先把表4.7中的枢行(第三行)除以枢数(3)。接下来,把得到的新的第三行的3倍加到第0行上,最后,从第一行中减去新的第三行。

现在得到了表4.8所列的单纯形表集合。因此,新的BF解是 $(2, 6, 2, 0, 0)$,相应 $Z=36$ 。通过最优化检验,发现这个解是最优的,因为第0行没有负的系数,所以算法结束。

表4.8 Wyndor Glass公司问题的完整单纯形表

迭代	基变量	方程编号	系数						右端项
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	Z	(0)	1	-3	-5	0	0	0	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	(0)	1	-3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_5	(3)	0	3	0	0	-1	1	6
2	Z	(0)	1	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	36
	x_3	(1)	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_1	(3)	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2

最后,Wyndor Glass公司问题的最优解(不考虑松弛变量值)为 $x_1=2, x_2=6$ 。

现在对比一下表4.8和4.3节中的工作,验证单纯形法的这两种形式是等价的。注意:当学习了单纯形法背后的逻辑原理时,使用代数形式较好,但表格形式以更简单、更简洁的形式组织计算工作。此后,我们将通常采取表格形式。

应用单纯形法表格形式的补充示例参考OR教程中标题为“单纯形法——表格形式”的介绍。另一个例子在本书网站的解题示例部分也有介绍。

4.5 破解单纯形法的纠结

注意到,之前的两节中,如果按照单纯形法的变量选取规则,由于一些纠结或者类似情况,不能做出明确的选择时,我们从没提到过应该如何处理这些问题。下面详细讨论这些内容。

4.5.1 进基变量的纠结

每次迭代的步骤1中,都选择方程(0)中有最大绝对值负系数的非基变量作为进基变量。现在假设两个或者更多非基变量的负系数有相同最大值(绝对值),这时就出现了纠结。例如,当Wyndor Glass公司问题的目标函数变为 $Z=3x_1+3x_2$ 时,这时,初始方程(0)变为 $Z-3x_1-3x_2=0$,迭代时就会出现纠结。这个纠结该如何破解呢?

答案就是可以任选一个候选数作为进基变量。不管纠结的变量如何选择,最终都会得到最优解,没有一种简便方法能预计到哪个选择会更快地到达最优解。在这个例题中,单纯形法选择 x_1 作为初始进基变量到达最优解 $(2, 6)$ 要经过3次迭代,而如果选择 x_2 则只需2次迭代。

4.5.2 出基变量的纠结——退化

现在假设在迭代的步骤2中,纠结于2个或多个基变量中选哪个出基。选哪一个真的重要吗?理论上,严格来说是很重要的,因为会产生后续一系列事件。首先,当进基变量增加后,纠结的基变量会同时变为0。因此,在新的BF解中,未被选为出基变量的一个或者多个变量的值也会为0(注意:值为0的基变量称为退化,相应的BF解也称为退化解)。第二,如果这些退化的基变量中的一个,保持值为0直至在后续的迭代中选为出基变量,相应的进基变量也必须保持值为0(因为其值将不会增加除非令出基变量为负),因此Z值必然保持不变。第三,如果Z保持相同值而不是在每次迭代中都有所增加,单纯形法就会陷入一个循环,周期性地重复同一系列解而不是使Z朝着最优解方向增加。事实上,这些例子都是人为构设的,因此它们确实会陷入这样一个周期性的循环。^①

幸运的是,尽管理论上无限期循环是可能发生的,但是在实际应用中却极少听说会发生。如果发生循环,需要通过改变出基变量的选择来跳出循环。另外,也构建有一些特殊的规则^②用来打破纠结、避免循环。尽管如此,这些规则在实际应用中通常会忽视,这里也不再对其进行重复。对于你们的学习目的而言,只需随意地突破这种纠结并继续计算,无需担心退化的基变量会出现什么结果。

4.5.3 没有出基变量——Z无界

在迭代的步骤2中,还存在一种从未讨论过的结果,即没有变量可选为出基变量^③。这时,会出现这样的结果:当进基变量无限增加却不会使当前任何一个基变量为负值。在表格形式中,这意味着枢列中的每个系数(包括第0行)都是负数或者为0。

如表4.9所列,这种情况在图3.6所举的例子中出现过。该例中,没有考虑Wyndor Glass公司问题的末尾两个约束条件,且模型中也未包括进来。注意:图3.6中 x_2 是如何在不离开可行域范围却又能无限增加(导致Z的无限增加)的。然后,注意表4.9中, x_2 作为进基变量,但是枢列中唯一的系数是0。因为最小比检验只考虑大于0的系数,因此无法通过比值来确定出基变量。

表4.9 Wyndor Glass公司问题去掉最后两个约束条件时的初始单纯形表

基变量	方程编号	系数				右端项	比值
		Z	x_1	x_2	x_3		
Z	(0)	1	-3	-5	0	0	none
x_3	(1)	0	1	0	1	4	

注:当 $x_1=0, x_2$ 增加时, $x_3=4-1x_1-0x_2=4>0$

像表4.9这类表格可解释为约束条件无法阻止目标函数Z的值无限增加,因此,单纯形法将会得到Z无界的信息并停止计算。因为线性规划没有发现一种方法创造无限利润,反映实际问

① 获取关于周期性循环的进一步信息,参见J. A. J. Hall and K. I. M. McKinnon: "The Simplest Examples Where the Simplex Method Cycles and Conditions Where EXPAND Fails to Prevent Cycling," *Mathematical Programming*, Series B, 100(1): 135–150, May 2004。

② 参见R. Bland: "New Finite Pivoting Rules for the Simplex Method," *Mathematics of Operations Research*, 2:103–107, 1977。

③ 注意类似的情况(无进基变量)不会在迭代的步骤1中出现,因为如果出现,最优化检验将会报出已得到最优解,算法停止。

题的真实信息发生错误。也许是模型构建错误,要么忽略了相关约束条件,要么错误地表达了它们,也可能是发生了计算错误。

4.5.4 多个最优解

在3.2节中提到(在最优解的定义下方)一个问题可以有不止一个最优解。图3.5说明了这个事实,通过将Wyndor Glass公司的问题中的目标函数改为 $Z=3x_1+2x_2$,以至于在(2,6)和(4,3)之间线段上的每一个点都是最优的。因此,所有的最优解都是这两个最优CPF解的加权平均,即

$$(x_1, x_2) = w_1(2, 6) + w_2(4, 3)$$

其中,权数 w_1 和 w_2 满足关系

$$w_1 + w_2 = 1$$

且

$$w_1 \geq 0, w_2 \geq 0$$

例如,令 $w_1 = \frac{1}{3}, w_2 = \frac{2}{3}$,得

$$(x_1, x_2) = \frac{1}{3}(2, 6) + \frac{2}{3}(4, 3) = \left(\frac{2}{3} + \frac{8}{3}, \frac{6}{3} + \frac{6}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}, 4\right)$$

是一个最优解。

一般地,2个或多个解(向量)的任意加权平均,当权数非负且和为1时,称为这些解的凸组合。因此,本例的每个最优解都是(2,6)和(4,3)的凸组合。

这个例子是典型的有多个最优解的问题。

正如3.2节结尾指出的那样,任意有多个最优解(并且可行域有界)的线性规划问题至少有2个最优CPF解。每个最优解是这些最优CPF解的凸组合,因此,在扩展形式中,每个最优解都是最优BF解的凸组合。

(习题4.5-5和习题4.5-6会引导你洞察这一结论背后的原因。)

单纯形法在找到一最优BF解时自动停止。尽管如此,线性规划问题的这么多应用里,一些不确定的因素并未包含在模型中,而这些因素可能用来在这些最优解中做出有意义的选择。在这种情况下,也应该找出其他的最优解。如上所述,这就需要找出其他所有BF解,每一个最优解就是最优BF解的凸组合。

在单纯形法得到一个最优BF解之后,可以检测一下是否还有其他最优BF解。如果有,可按照以下方法找出它们。

当一个问题多于一个最优BF解时,在最终单纯形表的第0行至少有一个非基变量的系数为0,增加任一这样的变量值都不会改变Z的值。因此,想获得其他最优BF解(如果需要),可以通过单纯形法的附加迭代实现,迭代时,每次选择一个系数为0的非基变量作为进基变量。^①

为了举例说明这个问题,再考虑刚才提到的情况,Wyndor Glass公司问题的目标函数改为 $Z=3x_1+2x_2$ 。单纯形法得到表4.10所列的前3个单纯形表,并找到最优BF解后停止。尽管如此,由于有一个非基变量(x_3)在第0行的系数为0,在表4.10中再实施一次迭代找出另外的最优BF解。因此,这2个最优BF解为(4,3,0,6,0)和(2,6,2,0,0),都得 $Z=18$ 。注意:最后一个

^① 如果迭代中找不到出基变量,那就意味着可行域无界,进基变量的值可无限增加,而Z值不发生变化。

表中,也有一个非基变量(x_4)在第0行的系数为0。这种情况是必然的,因为附加的迭代没有改变第0行,所以这个出基变量必须会保持系数为0。若令 x_4 作为进基变量将又回到第三个表(检查一下)。因此,这两个是仅有的最优BF解,其他最优解是它们的凸组合,即

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = w_1(2, 6, 2, 0, 0) + w_2(4, 3, 0, 6, 0)$$

$$w_1 + w_2 = 1, \quad w_1 \geq 0, \quad w_2 \geq 0$$

表 4.10 $c_2=2$ 时,Wyndor Glass 公司问题全部最优 BF 解的完整单纯形表

迭 代	基 变 量	方程编号	系 数						右端项	解最优化
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	Z	(0)	1	-3	-2	0	0	0	0	—
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4	否
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12	
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18	
1	Z	(0)	1	0	-2	3	0	0	12	否
	x_1	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12	
	x_5	(3)	0	0	2	-3	0	1	6	
2	Z	(0)	1	0	0	0	0	1	18	是
	x_1	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
	x_4	(2)	0	0	0	3	1	-1	6	
	x_2	(3)	0	0	1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3	
附加	Z	(0)	1	0	0	0	0	1	18	是
	x_1	(1)	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	
	x_3	(2)	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	
	x_2	(3)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	

4.6 适应其他模型形式

到目前为止,我们在假设问题是我们的标准形式(Z 求最大值,约束条件是“ \leq ”形式,全部变量非负)以及 $b_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, m)$ 的情况下介绍了单纯形法的详细内容。

本节将指出如何进行调整以满足其他合法形式的线性规划模型求解所需。你将看到,所有这些调整都会在初始步骤内完成,剩下的可以应用已经学过的单纯形法。

由约束条件的其他形式(“=”或“ \geq ”形式,或右端项为负)造成的唯一严重问题在于如何确定初始BF解。之前,这个初始解是通过把松弛变量作为初始基变量方便地得到,这样每个变量等于它所在方程的非负右端项。现在必须要进行一些其他的处理。用来处理这些情况的标准方法称为人工变量法。这种方法通过在每个需要的约束条件下引入一个虚拟变量(称为人工变量),构建了一个更简便的人工问题。引进这个变量的唯一目的就是为了成为该方程的初始基变量。通常还会限制它们为非负。目标函数也要做修改,若它们取值大于0,就对其强加一个严厉的惩罚因子。单纯形法的每次迭代会自动迫使人工变量消失(变为0),一次一个,直到它们都消失,这之后真正的问题就得到了解决。

为了举例说明人工变量法,首先考虑问题中非标准形式仅仅是一个或多个等式约束的情况。

4.6.1 等式约束

任意一个等式约束:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

实际上,等价于一组不等式约束:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$$

尽管如此,为了不这样替换以避免增加约束条件的数量,用人工变量法更方便。我们将通过以下例子说明这个方法。

例 假设3.1节中的Wyndor Glass公司的问题修改为第三车间的产能必须全部利用,在线性规划模型中唯一的变化就是第三个约束条件, $3x_1 + 2x_2 \leq 18$,被替代变成了等式约束:

$$3x_1 + 2x_2 = 18$$

因此,完整的模型如图4.3右上角所示。图中还以粗线条标出了可行域,但其仅为连接点(2,6)和点(4,3)的线段。

当引入不等式约束仍然需要的松弛变量后,问题的扩展形式的方程组变为

$$(0) Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

$$(1) x_1 + x_3 = 4$$

$$(2) 2x_2 + x_4 = 12$$

$$(3) 3x_1 + 2x_2 = 18$$

不幸的是,这些方程没有一个明显的初始BF解,因为方程(3)中不再有一个松弛变量用作初始基变量,必须找一个初始BF解启动单纯形法。

这个困难可以通过以下方法克服。

获得初始BF解:方法是通过对实际问题做2次修改而构建一个与之有相同最优解的人工问题。

(1) 应用人工变量法,在方程(3)中引入一个非负的人工变量(称为 \bar{x}_5)^①,就好像它是一个松弛变量一样:

$$(3) 3x_1 + 2x_2 + \bar{x}_5 = 18$$

(2) 安排一个相当大的惩罚因子迫使 $\bar{x}_5 > 0$,使得目标函数 $Z = 3x_1 + 2x_2$ 变为

$$Z = 3x_1 + 2x_2 - M\bar{x}_5$$

式中:符号 M 代表一个巨大的正数(这种在最优解中迫使 \bar{x}_5 趋向于 $\bar{x}_5 = 0$ 的方法称为大 M 法)。

现在,通过对人工问题应用单纯形法找出真实问题的最优解,从如下初始BF解启动算法:

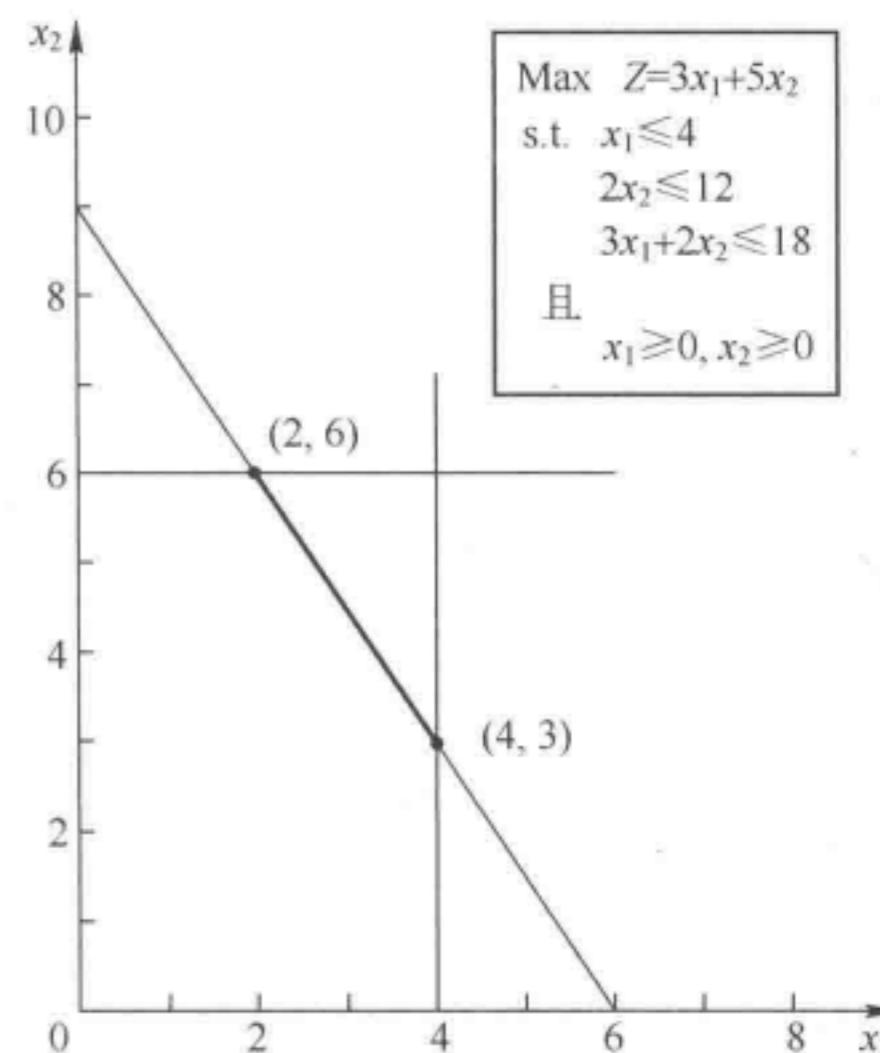


图4.3 当第三个约束条件变成等式约束时,
Wyndor Glass公司问题的可行域变为
(2,6)和(4,3)之间的线段

① 我们将一直通过在人工变量上方加横线对其进行标注。

初始 BF 解

非基变量: $x_1 = 0, x_2 = 0$

基变量: $x_3 = 4, x_4 = 12, \bar{x}_5 = 18$

因为 \bar{x}_5 在人工问题的第三个约束条件中起到了松弛变量的作用, 因此这个约束与 $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ 等价(正如 3.1 节中原始的 Wyndor Glass 公司问题一样)。下面在真实问题的旁边列出人工问题(扩展前):

真实问题	人工问题
$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s. t. } x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ \text{且 } x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{定义 } \bar{x}_5 &= 18 - 3x_1 - 2x_2 \\ \text{Max } Z &= 3x_1 + 5x_2 - M\bar{x}_5 \\ \text{s. t. } x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ (\text{所以 } 3x_1 + 2x_2 + \bar{x}_5 &= 18) \\ \text{且 } x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0, \bar{x}_5 \geq 0 \end{aligned}$

因此, 正如在 3.1 节中描述的那样, 人工问题中 (x_1, x_2) 的可行域如图 4.4 所示。这个可行域与原始问题可行域只有一部分一致, 就是 $\bar{x}_5 = 0$ 处(所以 $3x_1 + 2x_2 = 18$)。

图 4.4 也演示了单纯形法对 CPF 解(或扩展后 BF 解)的检查顺序。带圈的数字标出了是在哪一次迭代中得到该解。注意: 这里单纯形法是逆时针移动, 而在真实的 Wyndor Glass 公司问题中是顺时针移动的(图 4.2)。造成这个差别的原因是人工问题目标函数中的附加项 $-M\bar{x}_5$ 。

在运用单纯形法和演示它是沿着图 4.4 所示的路径移动之前, 需要做以下准备工作。

把方程(0)变为常态形式: 人工问题扩展后的方程组为

$$(0) \quad Z - 3x_1 - 5x_2 + M\bar{x}_5 = 0$$

$$(1) \quad x_1 + x_3 = 4$$

$$(2) \quad 2x_2 + x_4 = 12$$

$$(3) \quad 3x_1 + 2x_2 + \bar{x}_5 = 18$$

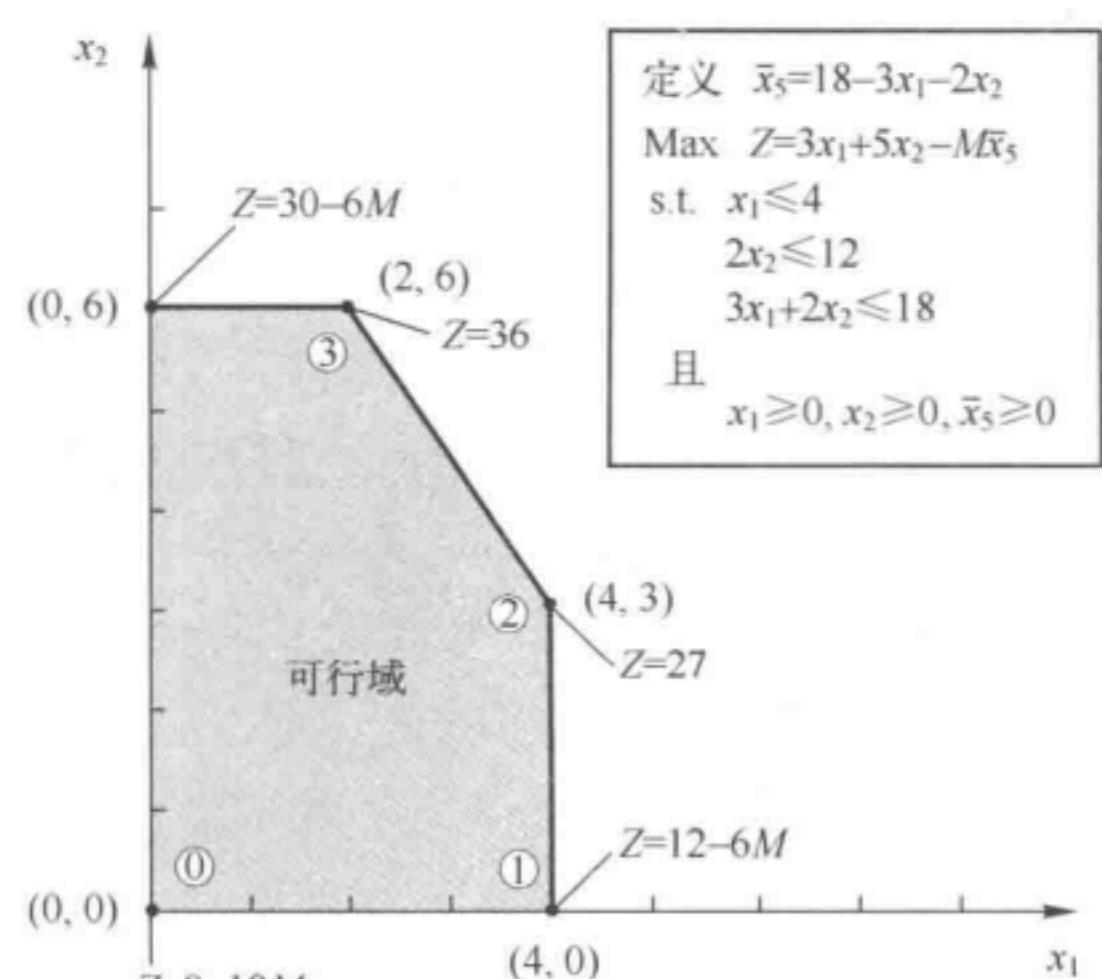


图 4.4 该图给出了图 4.3 真实问题对应的人工问题的可行域和由单纯形法检查的系列 CPF 解
(①, ②, ③)

其中的初始基变量(x_3, x_4, \bar{x}_5)以粗体显示。尽管如此, 这个方程组并不是高斯消元法的常态形式, 因为在方程(0)中的基变量 \bar{x}_5 有非零系数。回顾一下, 在单纯形法运用最优性检验或找到进基变量之前, 所有的基变量必须从方程(0)中代数消去。这种消去是必须做的, 这样每个非基变量的负系数将会在非基变量从 0 增加时也让 Z 增加, 并相应调整基变量的值。

为了从方程(0)中消去 \bar{x}_5 , 我们需让方程(0)中减去方程(3)的 M 倍, 即

$$\begin{array}{r}
 Z - 3x_1 - 5x_2 + M\bar{x}_5 = 0 \\
 -M(3x_1 + 2x_2 + \bar{x}_5) = 18 \\
 \hline
 \text{新(0)} \quad Z - (3M+3)x_1 - (2M+5)x_2 = -18M
 \end{array}$$

应用单纯形法:新方程(0)仅用非基变量(x_1, x_2)表示 Z ,即

$$Z = -18M + (3M+3)x_1 + (2M+5)x_2$$

由于 $3M+3 > 2M+5$ (记住 M 代表一个很大的数),通过增加 x_1 使 Z 增加的速度会比增加 x_2 使 Z 增加的速度更快,因此选择 x_1 作为进基变量。这在迭代1中会导致从 $(0,0)$ 移到 $(4,0)$,如图4.4所示,因此 Z 增加了 $4(3M+3)$ 。

M 不会在方程(0)之外的其他方程中出现。因此,只需在进行最优化检验和选取进基变量时考虑它们。处理这些数量的一种方法就是赋予 M 某个特定(巨大)常数值,并按正常的方式处理方程(0)中的系数。尽管如此,这种方法可能会导致明显的舍入误差以至于最优化检验无效。因此,最好按照我们的方法去处理,即将方程(0)中的每一项系数表示成为符号数 M 的线性函数 $aM+b$,并单独记录和更新(1)的乘数因子 a 和(2)加项 b 的当前数值。因为 M 值被假定得很大,以至于当 $a \neq 0$ 时,与 M 相比 b 几乎可以忽略不计,除了需要借助加项突破纠结外,选择最优化检验和进基变量时只需按常规方法运用乘数因子计算。

用例子中的这种方法得到表4.11所列的单纯形表。注意:在前2个单纯形表中的人工变量 \bar{x}_5 是基变量($\bar{x}_5 > 0$),后2个单纯形表中是非基变量($\bar{x}_5 = 0$)。因此,这个人工问题的前2个BF解对真实问题是不可行的,而后2个BF解对真实问题是可行的。

表4.11 图4.4中问题的完整单纯形表

迭代	基变量	方程编号	系 数					右端项	
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4		
0	Z	(0)	1	-3M-3	-2M-5	0	0	0	-18M
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	\bar{x}_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	(0)	1	0	-2M-5	3M+3	0	0	-6M+12
	x_1	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	\bar{x}_5	(3)	0	0	2	3	0	1	6
2	Z	(0)	1	0	0	$-\frac{9}{2}$	0	$M+\frac{5}{2}$	18
	x_1	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	0	3	1	-1	6
	x_2	(3)	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3
3	Z	(0)	1	0	0	0	$\frac{3}{2}$	$M+1$	36
	x_1	(1)	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
	x_3	(2)	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
	x_2	(3)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6

这个例子只有一个等式约束,如果一个线性规划模型有不止一个等式约束,那每一个都要用这种方法处理(如果右端项为负,要先在两端同时乘以-1)。

4.6.2 负的右端项

前文提到的处理右端项为负数的等式约束的方法(即两端各乘以-1)也适用于右端项为负数的不等式约束。不等式两边同乘以-1并使不等号变向,即“ \leq ”变为“ \geq ”,反之亦然。例如,对约束条件进行类似变换,即

$$x_1 - x_2 \leq -1 \quad (x_1 \leq x_2 - 1)$$

给出等价约束

$$-x_1 + x_2 \geq 1 \quad (x_2 - 1 \geq x_1)$$

而现在右端项为正。所有约束条件都有非负的右端项时,单纯形法就可以开始了,因为(扩展后)这时右端项就成为各个初始基变量的值,一定能满足变量的非负要求。

接下来将关注如何用人工变量法扩展“ \geq ”的约束,如 $-x_1 + x_2 \geq 1$ 。

4.6.3 “ \geq ”形式的约束条件

为了举例演示人工变量法如何解决“ \geq ”形式的约束条件,我们将利用在3.4节中提到的设计玛丽放射治疗方案这个模型。为便于描述,下面重复一遍模型,把要特别关注的约束加了框。

放射治疗示例

Min	$Z = 0.4x_1 + 0.5x_2$
s. t.	$0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7$
	$0.5x_1 + 0.5x_2 = 6$
	$0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6$
且	
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	

这个例子的图解法(如图3.12所描述)在图4.5中以一种稍微不同的形式再次出现。图中的3条线和2个轴,组成了问题的5条约束边界线。位于每对约束边界的交点上的点是角点解。只有两个角点可行解 $(6, 6)$ 和 $(7.5, 4.5)$,可行域就是连接这两个点的线段。最优解是 $(x_1, x_2) = (7.5, 4.5), Z = 5.25$ 。

很快我们将通过直接求解相应的人工问题演示单纯形法是如何解决这个问题的。但是,首先必须描述如何处理第三个约束。

我们的方法包括引入一个剩余变量 x_5 (定义 $x_5 = 0.6x_1 + 0.4x_2 - 6$)和一个人工变量 \bar{x}_6 ,即

$$\begin{aligned} 0.6x_1 + 0.4x_2 &\geq 6 \\ \rightarrow 0.6x_1 + 0.4x_2 - x_5 &= 6 \quad (x_5 \geq 0) \\ \rightarrow 0.6x_1 + 0.4x_2 - x_5 + \bar{x}_6 &= 6 \quad (x_5 \geq 0, \bar{x}_6 \geq 0) \end{aligned}$$

式中: x_5 称为剩余变量,是因减去该剩余变量即方

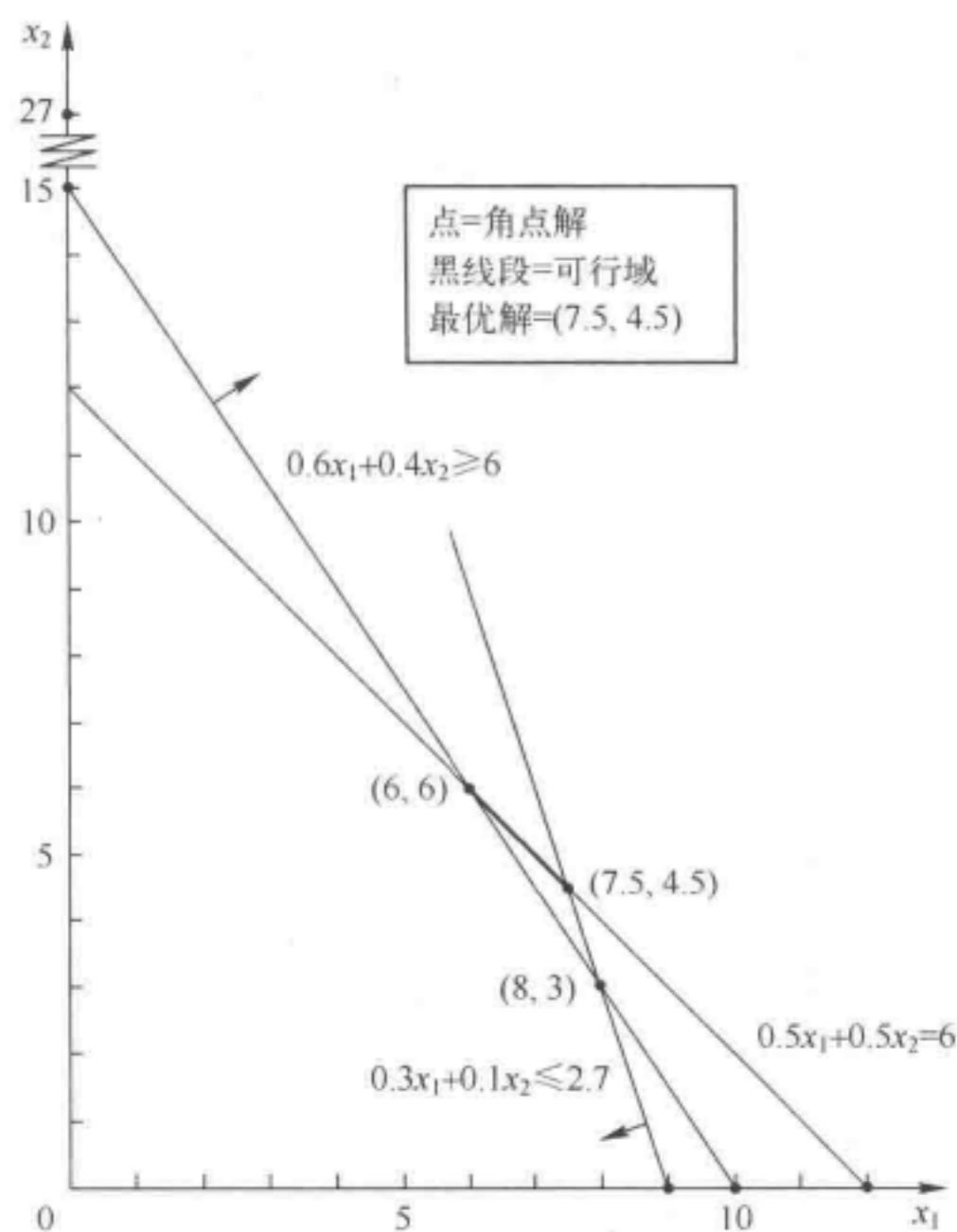


图4.5 放射治疗示例及其角点解的图形演示

程左端项与右端项之差,不等式方程约束就变换为等价的等式约束。一旦完成变换,就可以像处理等式约束那样引入人工变量。

在第一个约束条件引入松弛变量 x_3 、第二个约束条件引入人工变量 \bar{x}_4 后,就可以应用大 M 法,因此,完整的人工问题(扩展形式)为

$$\begin{array}{lll} \text{Min } & Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 + M\bar{x}_4 + M\bar{x}_6 \\ \text{s. t. } & 0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 & = 2.7 \\ & 0.5x_1 + 0.5x_2 + \bar{x}_4 & = 6 \\ & 0.6x_1 + 0.4x_2 - x_5 + \bar{x}_6 & = 6 \end{array}$$

且

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad \bar{x}_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad \bar{x}_6 \geq 0$$

注意:目标函数中人工变量的系数是 $+M$,而不是 $-M$,因为我们现在要使 Z 最小化,因此,尽管 \bar{x}_4 和(或) $\bar{x}_6 > 0$ 可能是这个人工问题的可行解,但 $+M$ 的巨大惩罚作用会在最优解中防止这种情况发生。

通常,引入人工变量扩大了可行域。我们来把下面真实问题的原始约束条件同人工问题对 (x_1, x_2) 的相应约束进行比较。

真实问题对 (x_1, x_2) 的约束

$$0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7$$

$$0.5x_1 + 0.5x_2 = 6$$

$$0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

人工问题对 (x_1, x_2) 的约束

$$0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7$$

$$0.5x_1 + 0.5x_2 \leq 6 \quad (\bar{x}_4 = 0 \text{ 时“=}”成立)$$

无此约束 (除了 $\bar{x}_6 = 0$ 时)

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

引入人工变量 \bar{x}_4 在第二个约束中起到了松弛变量的作用,使 (x_1, x_2) 的取值位于 $0.5x_1 + 0.5x_2 = 6$ 直线下方,如图 4.5 所示。在真实问题的第三个约束中引入 x_5 和 \bar{x}_6 (并将这两个变量移至右侧)得到方程

$$0.6x_1 + 0.4x_2 = 6 + x_5 - \bar{x}_6$$

由于 x_5 和 \bar{x}_6 都被限制为非负,它们的差值 $x_5 - \bar{x}_6$ 可以是任意正数或负数。因此, $0.6x_1 + 0.4x_2$ 可以得到任意值,这得到了从人工问题中把第三个约束消去并允许点可以位于图 4.5 中直线 $0.6x_1 + 0.4x_2 = 6$ 的两侧的效果(我们在方程组中保留第三个约束条件仅仅因为其稍候在大 M 法令 \bar{x}_6 趋向于 0 时会再次相关)。因此,人工问题的可行域是图 4.5 中的整个多面体,其顶点是 $(0,0), (9,0), (7.5,4.5)$ 和 $(0,12)$ 。

由于原点现在成为人工问题的可行解,那单纯形法就将 $(0,0)$ 作为初始 CPF 解开始启动,即把 $(x_1, x_2, x_3, \bar{x}_4, x_5, \bar{x}_6) = (0,0,2.7,6,0,6)$ 作为初始 BF 解(将原点可行解作为单纯形法便于启动的初始点,是建立人工问题的关键)。我们稍后将追踪单纯形法求解人工问题和原始问题时,从原点到最优解的整个求解路径。首先要解决的问题是,单纯形法如何处理求目标函数最小化的问题呢?

4.6.4 最小化

单纯形法解决最小化问题的一个最直接的办法就是在最优化检验和迭代第一步时,交换第

0行正系数和负系数的角色。尽管如此,我们给出通过下面一种简单的方法把任意一个最小值问题变换为等价的最大值问题,而不是去改变单纯形法的计算规则,即

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

等价于

$$\text{Max } -Z = \sum_{j=1}^n (-c_j) x_j$$

也就是说,这两个表达式最优解相同。

这两个式子是等价的,因为 Z 值越小, $-Z$ 越大,因此在整个可行域内使 Z 取得最小值的解必定也能为 $-Z$ 提供最大值。

因此,在放射性治疗示例中,对表达式作如下变换:

$$\text{Min } Z = 0.4x_1 + 0.5x_2$$

$$\rightarrow \text{Max } -Z = -0.4x_1 - 0.5x_2$$

引入人工变量 \bar{x}_4 和 \bar{x}_6 ,运用大 M 法,相应作如下变换:

$$\text{Min } Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 + M\bar{x}_4 + M\bar{x}_6$$

$$\rightarrow \text{Max } -Z = -0.4x_1 - 0.5x_2 - M\bar{x}_4 - M\bar{x}_6$$

4.6.5 求解放射治疗例子

我们马上准备用单纯形法求解放射治疗的例子。运用刚才所学的最大化变形,整个方程组变为

$$(0) -Z + 0.4x_1 + 0.5x_2 + M\bar{x}_4 + M\bar{x}_6 = 0$$

$$(1) 0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 = 2.7$$

$$(2) 0.5x_1 + 0.5x_2 + \bar{x}_4 = 6$$

$$(3) 0.6x_1 + 0.4x_2 - x_5 + \bar{x}_6 = 6$$

(对于这个人工问题)初始 BF 解的基变量($x_3, \bar{x}_4, \bar{x}_6$)以粗体显示。

注意:这个方程组不是单纯形法要求的高斯消元法的常态形,如单纯形法所需要的那样,基变量 \bar{x}_4 和 \bar{x}_6 仍需从方程(0)中被代数消元。由于 \bar{x}_4 和 \bar{x}_6 都有系数 M ,方程(0)需减去方程(2)和方程(3)的 M 倍。所有系数(包括右端项)的运算汇总如下,其中向量对应上面方程单纯形表的相关行。

0行:

$$\begin{array}{rccccccc} [0.4, & 0.5, & 0, & M, & 0, & M, & 0] \\ -M[0.5, & 0.5, & 0, & 1, & 0, & 0, & 6] \\ -M[0.6, & 0.4, & 0, & 0, & -1, & 1, & 6] \\ \hline \text{新0行} = [-1.1M+0.4, & -0.9M+0.5, & 0, & 0, & M, & 0, & -12M] \end{array}$$

得到初始单纯形表,并准备启动单纯形法,如表 4.12 顶部所列。正常用单纯形法得到表 4.12 中剩下的一系列单纯形表。在最优化检验和每次迭代选择进基变量时,对包含 M 的数值处理如同表 4.11 讨论的一样。

表 4.12 大 M 法求解放射治疗示例

迭代	基变量	方程编号	系 数						右端项	
			Z	x_1	x_2	x_3	\bar{x}_4	x_5		
0	Z	(0)	-1	-1.1M+0.4	-0.9M+0.5	0	0	M	0	-12M
	x_3	(1)	0	0.3	0.1	1	0	0	0	2.7
	\bar{x}_4	(2)	0	0.5	0.5	0	1	0	0	6
	\bar{x}_6	(3)	0	0.6	0.4	0	0	-1	1	6
1	Z	(0)	-1	0	$-\frac{16}{30}M+\frac{11}{30}$	$\frac{11}{3}M-\frac{4}{3}$	0	M	0	$-2.1M-3.6$
	x_1	(1)	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	0	0	9
	\bar{x}_4	(2)	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1	0	0	1.5
	\bar{x}_6	(3)	0	0	0.2	-2	0	-1	1	0.6
2	Z	(0)	-1	0	0	$-\frac{5}{3}M+\frac{7}{3}$	0	$-\frac{5}{3}M+\frac{11}{6}$	$\frac{8}{3}M-\frac{11}{6}$	$-0.5M-4.7$
	x_1	(1)	0	1	0	$\frac{20}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	8
	\bar{x}_4	(2)	0	0	0	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0.5
	x_2	(3)	0	0	1	-10	0	-5	5	3
3	Z	(0)	-1	0	0	0.5	$M-1.1$	0	M	-5.25
	x_1	(1)	0	1	0	5	-1	0	0	7.5
	x_5	(2)	0	0	0	1	0.6	1	-1	0.3
	x_2	(3)	0	0	1	-5	3	0	0	4.5

特别地,当遇到 M 出现时,只用到它的乘数因子,除非出现纠结情况,要用到后面的加项打破纠结。这样的纠结通常发生在最后一次选择进基变量时(见倒数第二张单纯形表),第 0 行中

x_3 和 x_5 有相同的乘数因子 $-\frac{5}{3}$, 将加项相比, $\frac{11}{6} < \frac{7}{3}$ 导致选择 x_5 作为进基变量。

注意表 4.12 中人工变量 \bar{x}_4 和 \bar{x}_6 以及 Z 值的变化过程。我们从大的值开始, $\bar{x}_4 = 6$, $\bar{x}_6 = 6$ 时, $Z = 12M$ ($-Z = -12M$)。第一次迭代大大减少了这些值。大 M 法在第二次迭代中,成功使 \bar{x}_6 变为 0 (成为一个新的非基变量), 在接下来的一次迭代中也使 \bar{x}_4 发生了同样变化。随着 $\bar{x}_4 = 0$ 和 $\bar{x}_6 = 0$, 最后表中给出的基解对于真实问题也一定可行。由于其通过了最优化检验,因此它也是最优的。

下面通过图 4.6 看大 M 法是如何工作的。人工问题的可行域开始有 4 个 CPF 解——(0, 0), (9, 0), (0, 12) 和 (7.5, 4.5)——然后前 3 个被 2 个新的 CPF 解所替代——(8, 0), (6, 6)——在 \bar{x}_6 减为 0 后以至于 $0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6$ 成为一个附加约束(注意:这 3 个被替代的 CPF 解——(0, 0), (9, 0) 和 (0, 12)——实际上是图 4.5 中真实问题的角点非可行解)。人工问题以原点作为方便的初始 CPF 解开始, 我们沿着边界移动到其他 3 个 CPF 解——(9, 0), (8, 3) 和 (7.5, 4.5)。这些解的最后一个是真实问题可行解的第一个。幸运的是,第一个可行解也是最优的,因此不再需要更多的迭代。

对于含有人工变量的其他问题,在获得真实问题的第一个可行解之后,可能还需要更多的迭代达到最优解(表 4.11 给出的求解示例就是这种情况)。因此,大 M 法可以看作有两个阶段。在第一个阶段,所有的人工变量都变为 0(因为 M 的单位惩罚量会远大于 0),以获得实际问题的初始 BF 解。在第二阶段,所有人工变量保持为 0(因为同样的惩罚措施),同时,单纯形法产生的真实问题的一系列 BF 解会逐步引向最优解。下面阐述的两阶段法是直接进行这 2 个阶段计算而不引入 M 的效率更高的过程。

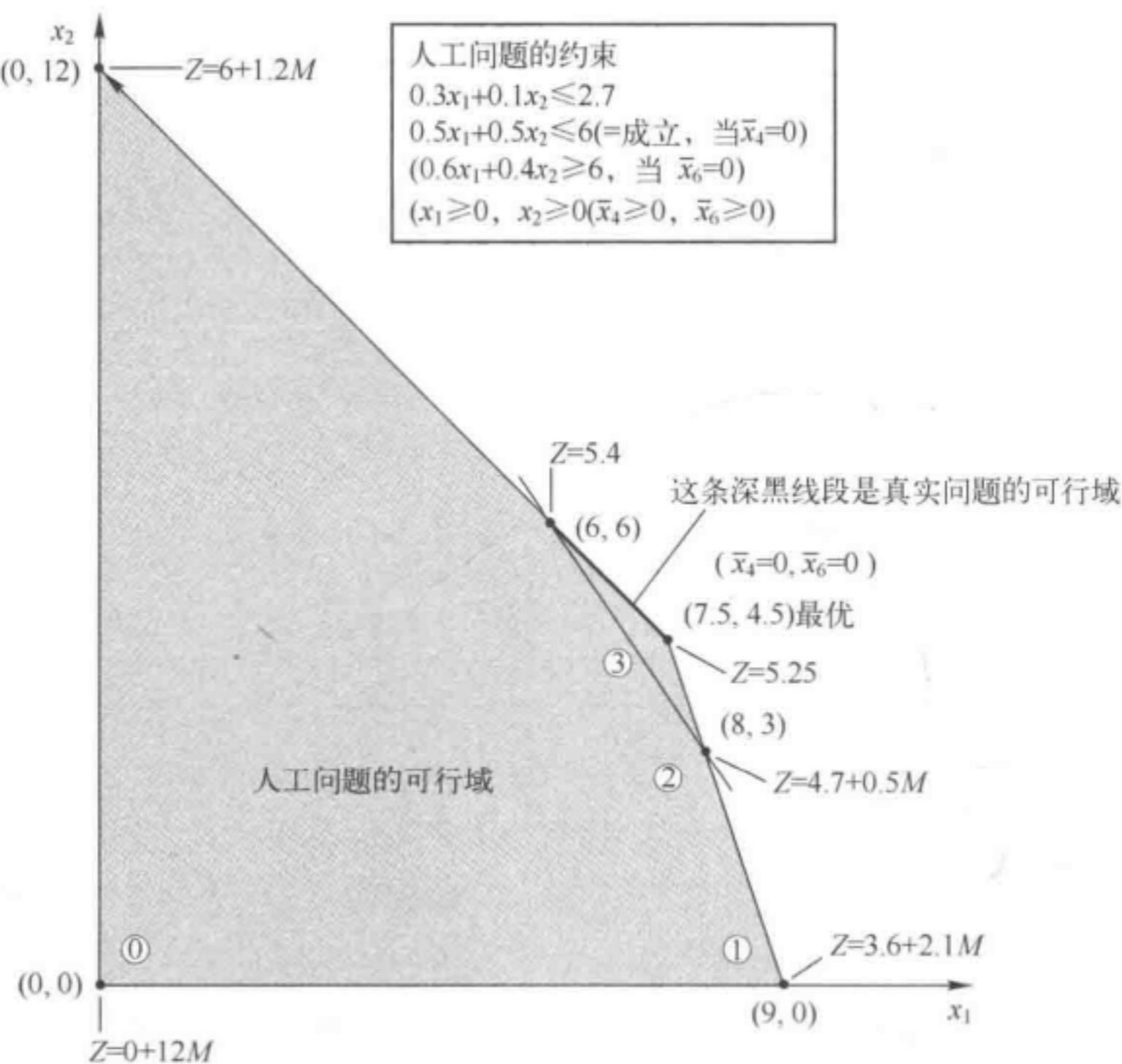


图 4.6 该图给出了图 4.5 真实问题对应的人工问题的可行域和由单纯形法(大 M 法)检查的系列 CPF 解(①, ②, ③)

4.6.6 两阶段法

对表 4.12 中刚求解的放射治疗问题,回顾它的真实目标函数:

真实问题: $\text{Min } Z = 0.4x_1 + 0.5x_2$

尽管如此,大 M 法在整个过程中使用如下目标函数(或者与它等价的求最大值形式):

大 M 方法: $\text{Min } Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 + M\bar{x}_4 + M\bar{x}_6$

由于前 2 个系数相对于 M 来说是可以忽略不计的,故两阶段可以通过运用如下 2 个目标函数去掉 M ,相应地,其中的 Z 有完全不同的定义。

两阶段法:

第一阶段: $\text{Min } Z = \bar{x}_4 + \bar{x}_6$ (直到 $\bar{x}_4 = 0, \bar{x}_6 = 0$)

第二阶段: $\text{Min } Z = 0.4x_1 + 0.5x_2$ ($\bar{x}_4 = 0, \bar{x}_6 = 0$)

第一阶段的目标函数通过把大 M 法的目标函数除以 M 后,去掉可忽略项而得到的。因为第一阶段得到了真实问题的 BF 解(当 $\bar{x}_4 = 0$ 和 $\bar{x}_6 = 0$ 时),在第二阶段中,这个解也作为单纯形法求解真实问题(具有真实目标函数)时的初始 BF 解。

在使用两阶段法求解例题前,先总结一下通用步骤。

两阶段法总结: 初始化:为了获得人工问题必需且明确的初始 BF 解,通过引入人工变量修改原始问题的约束条件。

第一阶段:这一阶段的目标是找出真实问题的 BF 解。具体如下:

$\text{Min } Z = \sum \text{ 人工变量, 受修正的约束条件约束}$

这个问题的最优解($Z=0$)将会是真实问题的 BF 解。

第二阶段:这一阶段的目标是找到真实问题的最优解。由于人工变量并不是真实问题的一

部分,这些变量现在可以去掉了(无论如何它们现在都是0)^①。从第一阶段结束时得到的BF解出发,应用单纯形法求解真实问题。

本例中,各自阶段单纯形法求解的问题总结如下:

第一阶段问题(放射治疗例题):

$$\begin{array}{lll} \text{Min } Z = & \bar{x}_4 + \bar{x}_6 \\ \text{s. t. } & 0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 & = 2.7 \\ & 0.5x_1 + 0.5x_2 + \bar{x}_4 & = 6 \\ & 0.6x_1 + 0.4x_2 - x_5 + \bar{x}_6 & = 6 \end{array}$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \bar{x}_4 \geq 0, x_5 \geq 0, \bar{x}_6 \geq 0$$

第二阶段问题(放射治疗例题):

$$\begin{array}{lll} \text{Min } Z = & 0.4x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s. t. } & 0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 & = 2.7 \\ & 0.5x_1 + 0.5x_2 & = 6 \\ & 0.6x_1 + 0.4x_2 - x_5 & = 6 \end{array}$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_5 \geq 0$$

这两个问题唯一的不同之处在于目标函数,以及包括(在第一阶段)或不包括(在第二阶段)人工变量 \bar{x}_4 和 \bar{x}_6 。当没有人工变量时,第二阶段问题就不会有一个明显的初始BF解。求解第一阶段问题的唯一目的在于得到当 $\bar{x}_4 = 0$ 和 $\bar{x}_6 = 0$ 时的BF解,以便使这个解(不含人工变量)作为第二阶段的初始BF解。

表4.13显示的是用单纯形法求第一阶段问题的结果(通过将 $\text{Min } Z = \bar{x}_4 + \bar{x}_6$ 变换为 $\text{Max } -Z = -\bar{x}_4 - \bar{x}_6$,然后,用初等行变换从 $-Z + \bar{x}_4 + \bar{x}_6 = 0$ 中消去基变量 \bar{x}_4 和 \bar{x}_6 ,得到初始表中的第0行)。在倒数第二张表中,在选择 x_3 还是 x_5 作为进基变量时有纠结,可以随意打破这个纠结,如选 x_3 。在第一阶段结束时,得到解 $(x_1, x_2, x_3, \bar{x}_4, x_5, \bar{x}_6) = (6, 6, 0.3, 0, 0, 0)$,在消去 \bar{x}_4 和 \bar{x}_6 后,得 $(x_1, x_2, x_3, x_5) = (6, 6, 0.3, 0)$ 。

表4.13 求解放射治疗示例的两阶段法中的第一阶段

迭代	基变量	方程编号	系数						右端顶	
			Z	x_1	x_2	x_3	\bar{x}_4	x_5		
0	Z	(0)	-1	-1.1	-0.9	0	0	1	0	-12
	x_3	(1)	0	0.3	0.1	1	0	0	0	2.7
	\bar{x}_4	(2)	0	0.5	0.5	0	1	0	0	6
	\bar{x}_6	(3)	0	0.6	0.4	0	0	-1	1	6
1	Z	(0)	-1	0	$-\frac{16}{30}$	$\frac{11}{3}$	0	1	0	-2.1
	x_1	(1)	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	0	0	9
	\bar{x}_4	(2)	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1	0	0	1.5
	\bar{x}_6	(3)	0	0	0.2	-2	0	-1	1	0.6

① 这里我们忽略了另外3种可能:①人工变量>0(将在下节讨论);②人工变量退化为基变量;③在第二阶段中人工变量保留为非基变量(不允许它们成为基变量),作为接下来进行优化后分析的辅助方法。你的IOR教程允许你探索这些可能性。

(续)

迭 代	基 变 量	方 程 编 号	系 数							右 端 项
			Z	x_1	x_2	x_3	\bar{x}_4	x_5	\bar{x}_6	
2	Z	(0)	-1	0	0	$-\frac{5}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{8}{3}$	-0.5
	x_1	(1)	0	1	0	$\frac{20}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	8
	\bar{x}_4	(2)	0	0	0	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0.5
	x_2	(3)	0	0	1	-10	0	-5	5	3
3	Z	(0)	-1	0	0	0	1	0	1	0
	x_1	(1)	0	1	0	0	-4	-5	5	6
	x_3	(2)	0	0	0	1	$\frac{3}{5}$	1	-1	0.3
	x_2	(3)	0	0	1	0	$\frac{6}{5}$	5	-5	6

正如总结中所叙述的,第一阶段的解确实是真实问题(第二阶段问题)的 BF 解,因为这是有 3 个约束条件组成的第二阶段问题的方程组的解(在设 $x_5 = 0$ 之后)。事实上,在删去 \bar{x}_4 和 \bar{x}_6 列以及 0 行之后的每次迭代,表 4.13 给出了用高斯消元法把方程组简化为最后单纯形表所示的形式求解这个线性方程组的方法。

表 4.14 给出了第一阶段完成后,第二阶段开始前的准备工作。从表 4.13 的最后一张单纯形表出发,去掉人工变量(\bar{x}_4 和 \bar{x}_6),把第二阶段的目标函数(最大值形式表示 $-Z = -0.4x_1 - 0.5x_2$)换入 0 行,然后,恢复高斯消元法的常态形式(通过代数法从第 0 行中消去基变量 x_1 和 x_2)。因此,最后一张单纯形表中的第 0 行是在倒数第二张单纯表中进行初等行变换运算得到的:从第 0 行减去第一行的 $2/5$ 和第三行的 $1/2$ 。除了消去的两列外,注意第一行至第三行没有变化。唯一的调整发生在第 0 行,目的是用第二阶段的目标函数替换第一阶段的目标函数。

表 4.14 准备开始求解放射治疗示例第二阶段

	基 变 量	方 程 编 号	系 数							右 端 项
			Z	x_1	x_2	x_3	\bar{x}_4	x_5	\bar{x}_6	
第一阶段 最终表	Z	(0)	-1	0	0	0	1	0	1	0
	x_1	(1)	0	1	0	0	-4	-5	5	6
	x_3	(2)	0	0	0	1	$\frac{3}{5}$	1	-1	0.3
	x_2	(3)	0	0	1	0	6	5	-5	6
去掉 \bar{x}_4 和 \bar{x}_6	Z	(0)	-1	0	0	0	0	0	0	0
	x_1	(1)	0	1	0	0	0	-5	6	6
	x_3	(2)	0	0	0	1	0	1	0	0.3
	x_2	(3)	0	0	1	0	0	5	6	6
替换第二 阶段目标 函数	Z	(0)	-1	0.4	0.5	0	0	0	0	0
	x_1	(1)	0	1	0	0	0	-5	6	6
	x_3	(2)	0	0	0	1	0	1	0	0.3
	x_2	(3)	0	0	1	0	0	5	6	6
恢复高斯 消元常态 形式	Z	(0)	-1	0	0	0	0	-0.5	0	0
	x_1	(1)	0	1	0	0	0	-5	6	6
	x_3	(2)	0	0	0	1	0	1	0	0.3
	x_2	(3)	0	0	1	0	0	5	6	6

表4.14的最后一张单纯形表是用单纯形法求解第二阶段问题的初始表格,如表4.15顶部所列。只一次迭代就得到了最优解,如第二张表所列: $(x_1, x_2, x_3, x_5) = (7.5, 4.5, 0, 0.3)$ 。这个解是真实问题期望的最优解,而不是第一阶段构建的人工问题的最优解。

表4.15 求解放射治疗示例两阶段法的第二阶段

迭 代	基 变 量	方程 编号	系 数				右 端 项
			Z	x_1	x_2	x_3	
0	Z	(0)	-1	0	0	0	-0.5
	x_1	(1)	0	1	0	0	-5
	x_3	(2)	0	0	0	1	1
	x_2	(3)	0	0	1	0	5
1	Z	(0)	-1	0	0	0.5	0
	x_1	(1)	0	1	0	5	0
	x_5	(2)	0	0	0	1	1
	x_2	(3)	0	0	1	-5	0

现在我们看到图4.7给出的两阶段法工作的图形表示。从原点出发,第一阶段检查了人工问题的4个CPF解。前3个实际上是图4.5中所示真实问题的角点非可行解,第四个CPF解(6,6),是真实问题第一个解并且是可行的,因此它成为第二阶段的初始CPF解。在第二阶段经过一次迭代即得到最优CPF解(7.5,4.5)。

表4.13中倒数第二张表格的进基变量出现纠结,如果可以用其他方法打破,第一阶段将可直接从(8,3)转到(7.5,4.5)。当用(7.5,4.5)建立第二阶段单纯形表时,最优化检验会揭示这个解是最优的,就无需再迭代。

对比大M法和两阶段法是很有意思的,先比较目标函数:

大M法:

$$\text{Min } Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 + M\bar{x}_4 + M\bar{x}_6$$

两阶段法:

$$\text{第一阶段: Min } Z = \bar{x}_4 + \bar{x}_6$$

$$\text{第二阶段: Min } Z = 0.4x_1 + 0.5x_2$$

因为大M法的目标函数中, $M\bar{x}_4$ 和 $M\bar{x}_6$ 项主导支配着 $0.4x_1$ 和 $0.5x_2$ 项,只要 \bar{x}_4 和 \bar{x}_6 大于0,这个目标函数本质上与第一阶段目标函数是等价的。因此,当 $\bar{x}_4=0$ 和 $\bar{x}_6=0$ 时,大M法的目标函数与第二阶段的目标函数完全等价。

由于目标函数本质上的等价性,大M法和两阶段法通常有相同的系列BF解。例外情况也是可能发生的,就是当两阶段法的第一阶段进基变量存在纠结时,如表4.13中第三张单纯形表所列。注意表4.12和表4.13的前3张单纯形表几乎是一致的,唯一的不同在于表4.12中M的乘数因子在表4.13对应的位置上变成了唯一的数量。因而,在表4.12的第三张单纯形表中的加项打破了进基变量纠结,但在表4.13中却不行。本例的结果就是两阶段需要再进行一次迭

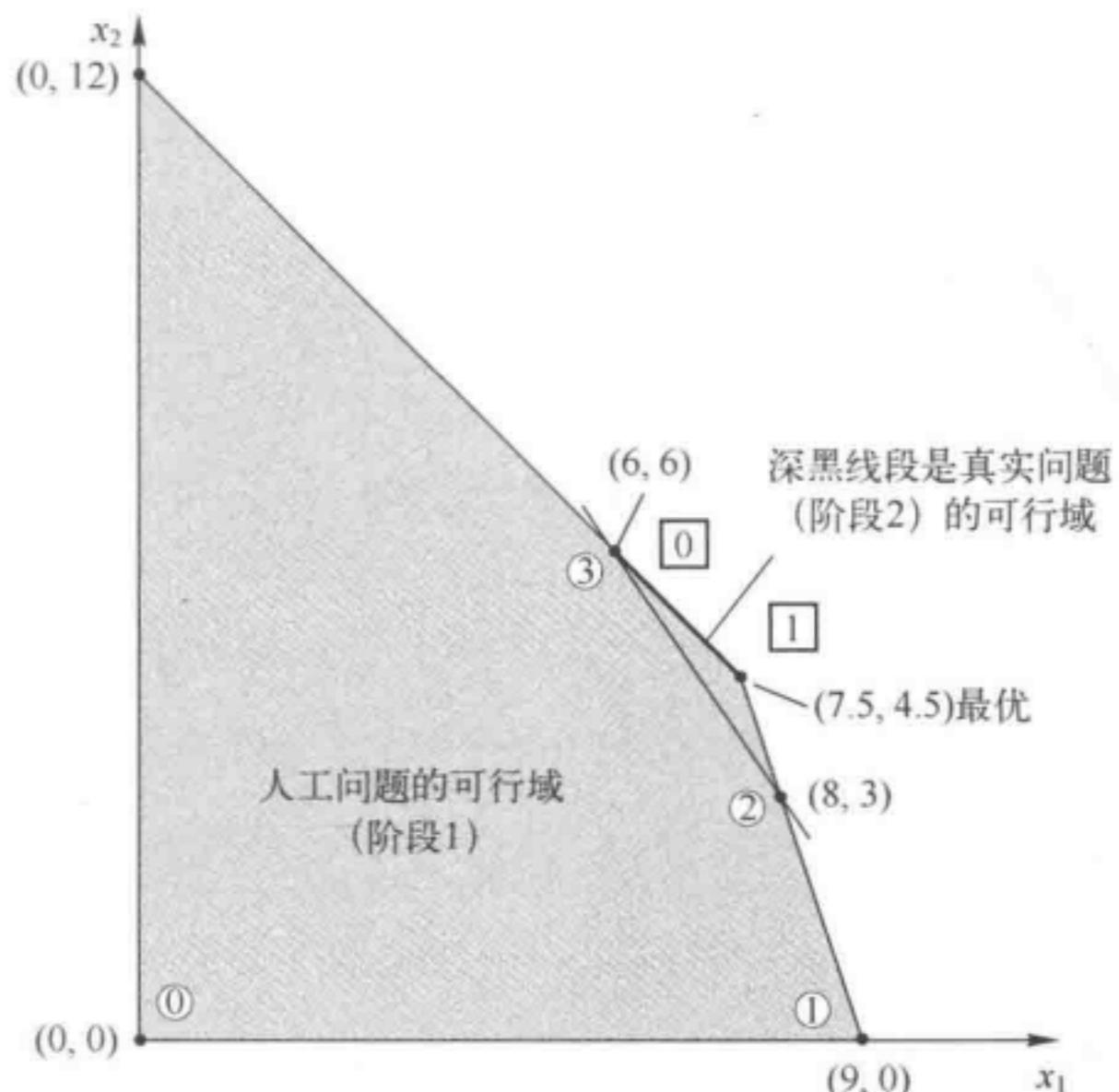


图4.7 用两阶段法求解放射治疗问题,该图给出了阶段1(①,②,③)和阶段2(④⑤)中的系列CPF解

代。总体说来,尽管如此,加项因素的作用很小。

两阶段法比大 M 法效率更高,因其在第一阶段只用乘数因子,在第二阶段就去掉人工变量(大 M 法可以通过赋予 M 一个相当巨大的值把乘项和加项结合起来,但这会产生数值不稳定的问题)。考虑到这些原因,计算机应用中通常采用两阶段法。

本书网站的解题示例部分提供了对同一问题应用大 M 法和两阶段法求解的另一个例题。

4.6.7 无可行解

到目前为止,本节主要关心的一个基础性的问题,就是当不存在一个明显的初始 BF 解时如何确定一个初始 BF 解。你已经见识了如何运用人工变量方法构造人工问题,从而得到人工问题的初始 BF 解。运用大 M 法或两阶段法,使单纯形法向着 BF 解进发,最终朝向真实问题的最优解。

尽管如此,你应该提防该方法中的一些陷阱。可能无法清晰地选出问题的初始 BF 解,一个很好的理由就是这个问题压根就没有可行解。然而,通过构建人工可行解,无法阻挡单纯形法的照常进行,并最终会得到一个假设出来的最优解。

幸运的是,当这种情况发生时,人工变量法提供了下列信号表明这种情况已经发生了:

如果原始问题无可行解,大 M 法和两阶段法的第一阶段得到的解中至少有一个人工变量大于 0,否则,它们都等于 0。

为了说明这一点,我们将放射治疗问题(图 4.5)的第一个约束条件做如下改变:

$$0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7 \rightarrow 0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 1.8$$

因此,这个问题不再有可行解。像之前一样(表 4.12)应用大 M 法会产生如表 4.16 所列的单纯形表(两阶段法的第一阶段会得到同样的表格,只是含有 M 的每个表达式都被乘数因子所代替)。因此,大 M 法正常情况下将会指示最优解是 $(3, 9, 0, 0, 0, 0.6)$ 。尽管如此,由于人工变量 $\bar{x}_6 = 0.6 > 0$,这里的真实信息是本题无可行解。^①

表 4.16 大 M 法求解修改后无可行解的放射治疗示例

迭代	基变量	方程编号	系 数							右端项	
			Z	x_1	x_2	x_3	\bar{x}_4	x_5	\bar{x}_6		
0	Z	(0)	-1	-1	$-1.1M+0.4$	$-0.9M+0.5$	0	0	M	0	$-12M$
	x_3	(1)	0	0.3	0.1	1	0	0	0	0	1.8
	\bar{x}_4	(2)	0	0.5	0.5	0	1	0	0	0	6
	\bar{x}_6	(3)	0	0.6	0.4	0	0	-1	1	0	6
1	Z	(0)	-1	0	$-\frac{16}{30}M+\frac{11}{30}$	$\frac{11}{3}M-\frac{4}{3}$	0	M	0	0	$-5.4M-2.4$
	x_1	(1)	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	0	0	0	6
	\bar{x}_4	(2)	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1	0	0	0	3
	\bar{x}_6	(3)	0	0	0.2	-2	0	-1	1	0	2.4
2	Z	(0)	-1	0	0	$M+0.5$	$1.6M-1.1$	M	0	0	$-0.6M-5.7$
	x_1	(1)	0	1	0	5	-1	0	0	0	3
	\bar{x}_4	(2)	0	0	0	-5	3	0	0	0	9
	x_2	(3)	0	0	1	-1	-0.6	-1	1	0	0.6

^① 已经开发出一些方法(集成在线性规划软件)用来分析究竟是什么原因引起一个大型线性规划问题无可行解,以便于修正函数中的错误。例子参考 J. W. Chinneck: *Feasibility and Infeasibility in Optimization: Algorithms and Computational Methods*, Springer Science + Business Media, New York, 2008。

4.6.8 允许为负的变量

在大多数现实问题中,决策变量的负值可能没有物理意义,因此必须在它们的线性规划模型函数中包含非负约束。然而,情况并非一直这样。为了举例说明,假设 Wyndor Glass 公司问题改变为产品 1 已经投产,第一个决策变量 x_1 表示产品 1 生产率的增加值。因此, x_1 为负值表示产品 1 产量减少数。这样的削减也许会发生,以满足新的利润更大的产品 2 提高生产率的要求。因此,模型中 x_1 的值允许为负。

由于选定出基变量的过程要求所有变量有非负约束,因此在应用单纯形法之前,任何一个包含允许为负的变量的问题必须转化为只有非负变量的等价的问题。幸运的是,这个变换是可以实施的。每个变量所需的修改都取决于它许可值是否有(负值的)下界。现在分别讨论两种情况。

允许为负的有界变量:考虑任意决策变量 x_j ,允许有负值并满足如下形式的约束:

$$x_j \geq L_j$$

式中: L_j 为某个负的常数。通过对变量做如下改变,这个约束能转化为一个非负约束,即

$$x'_j = x_j - L_j$$

则

$$x'_j \geq 0$$

因此,在整个模型中, $x'_j + L_j$ 将代替 x_j ,这样,新定义的决策变量 x'_j 将不会为负(也可使用同样的方法,当 L_j 为正时,将约束条件 $x_j \geq L_j$ 转化为非负约束 $x'_j \geq 0$)。

为了举例说明,假设 Wyndor Glass 公司问题中的产品 1 当前的生产率为 10,根据给出的 x_1 的定义,在这一点上完整的模型与 3.1 节中给出的是一样的,除了非负约束 $x_1 \geq 0$ 被替换为 $x_1 \geq -10$ 。为了得到单纯形法需要的等价模型,这个决策变量将被重新定义为产品 1 的总生产率 $x'_1 = x_1 + 10$,这就使得目标函数和约束条件发生了变化,具体如下:

$Z = 3x_1 + 5x_2$ $x_1 \leq 4$ $2x_2 \leq 12$ $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ $x_1 \geq -10, x_2 \geq 0$	\rightarrow	$Z = 3(x'_1 - 10) + 5x_2$ $x'_1 - 10 \leq 4$ $2x_2 \leq 12$ $3(x'_1 - 10) + 2x_2 \leq 18$ $x'_1 - 10 \geq -10, x_2 \geq 0$	\rightarrow	$Z = -30 + 3x'_1 + 5x_2$ $x'_1 \leq 14$ $2x_2 \leq 12$ $3x'_1 + 2x_2 \leq 48$ $x'_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
--	---------------	--	---------------	---

允许为负的无界变量:如果建立的模型中 x_j 没有下界约束,这样的情况下,就需要另一个方法:模型中的 x_j 需要用 2 个非负变量的差来代替,即

$$x_j = x_j^+ - x_j^-$$

其中

$$x_j^+ \geq 0, x_j^- \geq 0$$

由于 x_j^+ 和 x_j^- 可以有任意非负值,差值 $x_j^+ - x_j^-$ 可以有任意值(正的或负的),因此其可以作为模型中 x_j 的合理替代者。如此替代后,单纯形法只需处理非负变量即可。

新变量 x_j^+ 和 x_j^- 有着简单的意义。如下段中所解释的,新形式模型的每个 BF 解一定具有这样的性质: $x_j^+ = 0$ 或者 $x_j^- = 0$ (或均为 0)。因此,在单纯形法得到的最优解(BF 解)为

$$x_j^+ = \begin{cases} x_j, & x_j \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$x_j^- = \begin{cases} |x_j|, & x_j \leq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

所以, x_j^+ 代表决策变量 x_j 正的部分, x_j^- 代表负的部分(就像变量上标所表示的那样)。

例如,如果 $x_j = 10$,由上面的表达式得出 $x_j^+ = 10$ 和 $x_j^- = 0$ 。在 x_j^+ 和 x_j^- 的值更大时, $x_j = x_j^+ - x_j^- = 10$ 也得出了相同的值,使得 $x_j^+ = x_j^- + 10$ 。在二维图中绘出 x_j^+ 和 x_j^- 的这些值,得到一条直线,该直线以 $x_j^+ = 10, x_j^- = 0$ 为端点来避免违背非负约束。这个端点是这条线上唯一的角点解,因此,在包括模型的所有变量的解中,只有这个端点可以作为全部 CPF 解或者 BF 解的一部分。这个例子说明了为什么每个 BF 解必须有 $x_j^+ = 0$ 或者 $x_j^- = 0$ (或均为 0)。

为了说明 x_j^+ 和 x_j^- 的作用,我们回到本章之前介绍的例子中,其中 x_1 重新定义为 Wyndor Glass 公司产品 1 生产率 10 的增加量。

尽管如此,现在假设 $x_1 \geq -10$ 这个约束并不包含在原始模型中,因为很清楚它并不会改变最优解(在一些问题中,特定的变量无需特定的下界约束,因为约束条件已经阻止了其取得更小值)。因此,在单纯形法应用之前, x_1 将被替换为如下差值:

$$x_1 = x_1^+ - x_1^-$$

其中

$$x_1^+ \geq 0, x_1^- \geq 0$$

具体表述如下:

$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$ s. t. $x_1 \leq 4$ $2x_2 \leq 12$ $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ $x_2 \geq 0$ (仅有)	\rightarrow	$\text{Max } Z = 3x_1^+ - 3x_1^- + 5x_2$ s. t. $x_1^+ - x_1^- \leq 4$ $2x_2 \leq 12$ $3x_1^+ - 3x_1^- + 2x_2 \leq 18$ $x_1^+ \geq 0, x_1^- \geq 0, x_2 \geq 0$
---	---------------	--

从计算的视角来说,这个方法有一个不足,就是新的等价模型变量比初始模型多。事实上,如果所有初始变量都没有下界约束,这个新的模型会有 2 倍数量的变量。幸运的是,这个方法可稍作修改以使变量的数量只增加一个,不管有多少变量被替换。这个修改就是可以通过下式替换 x_j :

$$x_j = x'_j - x''_j$$

其中

$$x'_j \geq 0, x''_j \geq 0$$

对于所有相关 j 来说, x''_j 是同一个变量。 x''_j 的含义在这种情况下就是: x''_j 为最大(绝对值)的负原始变量的当前值,因此 x'_j 就是 x_j 超过这个值的数量。因此,当 $x''_j = 0$ 时,单纯形法现在可以使一些 x'_j 变量大于 0。

4.7 优化后分析

我们在 2.3 节、2.4 节和 2.5 节中强调了优化后分析——得到模型原始版本的最优解后进行的分析——构成了大多数运筹研究中非常主要、非常重要的部分。事实是,优化后分析非常重要,对于典型的线性规划应用是非常真实的。本节将关注于单纯形法在优化后分析中的作用。

表 4.17 总结了线性规划研究优化后分析的典型步骤,最右列给出了包括单纯形法在内的一些算法。这些方法在本节中将简要介绍,后序章节再具体介绍细节。

表 4.17 线性规划的优化后分析

任 务	目 的	方 法
模型调试	查出模型中的错误和缺点	再优化
模型确认	证明模型有效	见 2.4 节
关于资源分配的最终管理决策(b_i 值)	对组织资源在研究活动与其他活动之间进行合理性分析	影子价格
模型参数估计	决定重要的估计,可能在进一步研究进影响最优解	灵敏度分析
模型参数平衡点	确定最佳权衡点	参数线性规划

由于你可能没有机会掌握这些特殊章节,本节有两个目的:一是确信至少使你在这些重要方法中有个入门;二是如果你今后有机会钻研这些问题时,为你提供有益的背景知识。

4.7.1 再优化

如 3.6 节所讨论的那样,从现实中产生的线性规划模型通常非常大,有上百个、上千个甚至上百万个约束条件和决策变量。在这种情况下,基本模型的诸多变化可能会引起我们在考虑不同应用场景时的兴趣。因此,在找到一个版本线性规划模型的最优解之后,对该模型的稍许不同版本,我们常需要再次(通常是多次)求解。在模型调试步骤中(见 2.3 节和 2.4 节),我们几乎不得不再求解若干次。同样,在优化后分析的后续步骤中我们也不得不进行剧多次数的计算。

再应用单纯形法从头求解每个新版本模型是一种简单的方法,对于大型问题每次迭代都需要成百甚至上千次迭代。尽管如此,一个更高效的方法就是再优化。再优化包括推导模型中是如何变化以至于影响到最终单纯形表(见 5.3 节和 7.1 节)。那被修改的单纯形表和原先模型的最优解就可以作为求解新模型的初始表和初始基本解。对于新模型,如果这个解是可行的,那单纯形法就可以正常应用,从这个初始 BF 解开始。如果这个解不可行,一个相关的算法称为对偶单纯形法(见 8.1 节),可能被用来找出新的最优解^①,从这个初始基本解开始。

再优化方法与重新求解方式相比,一个大大的优点就是修改后模型的最优解更接近于原模型的最优解,而不是接近运用单纯形法常规构建的初始 BF 解。因此,假设模型的修改是适度的,那么,只需要稍加迭代进行再优化,无需从头开始进行上百次、上千次的运算。事实上,原先模型和修改后模型的最优解通常是相同的,这种情况下,再优化方法只需一次最优化检验而无需迭代。

4.7.2 影子价格

回忆一下,线性规划问题通常解释为向一些活动分配资源。特别地,当约束条件是“≤”形式时,我们把 b_i (右端项)理解为活动中能想到的被使用的各自资源的数量。在许多情况下,可用的数量可能会有某些限制范围。如果这样,在初始(有效的)模型中的 b_i 值实际上可能代表了管理上试验性的初始决策,这个决策是关于有多少资源会被提供给模型中所考虑的活动,而不是纳入管理视野的其他重要活动。从这个更广阔的视角来说,在修改的模型中某些 b_i 的值可能增加,但只有在管理方面有足够的事实证明时,这种修改才是有利可得的。

^① 应用对偶单纯形法的一个要求就是,修正的最终表的第 0 行要通过最优化检验。如不能通过,仍有另一个称为原始-对偶方法的算法来代替。

因此,关于资源对业绩度量(Z)的经济贡献信息对于当前的研究特别重要。单纯形法以各种资源影子价格的形式提供了这类信息。

资源 i 的影子价格(用 y_i^* 表示)衡量这种资源的边际值,也就是(稍微)增加所使用资源(b_i)的量时,相应 Z 的增长率。单纯形法通过 $y_i^* = \text{最终单纯形表第0行中第 } i \text{ 个松弛变量的系数}$,确定影子价格。

以Wyndor Glass公司问题为例说明:

资源 i =所考虑的两种新新品可能的工厂 i 的生产能力

b_i =工厂 i 关于这两种新产品每周可用的生产小时数

为新产品提供相当多的生产时间时,将需要调整生产当前产品的生产时间,因此,选择 b_i 值是一个非常困难的管理决策。正如3.1节和本章基本模型中所反映的试探性的初始决策为

$$b_1=4, \quad b_2=12, \quad b_3=18$$

尽管如此,管理层现在希望估计 b_i 变为任意值时产生的影响。

这3种资源的影子价格提供的正是管理层所需的信息,由表4.8的最终表得出

$y_1^*=0$ =资源1的影子价格

$y_2^*=\frac{3}{2}$ =资源2的影子价格

$y_3^*=1$ =资源3的影子价格

当仅有两个决策变量时,这些数字可通过检查图形中单个 b_i 增加1时引起最优解 Z 的增加量 y_i^* 来得到验证。如图4.8中用3.1节提到的图解法演示证明了对于资源2来说的这个增量。最优解是 $(2,6), Z=36$,当 b_2 增加1时(从12增加到13),最优解改为 $\left(\frac{5}{3}, \frac{13}{2}\right), Z=37\frac{1}{2}$ 。因此,有

$$y_2^* = \Delta Z = 37\frac{1}{2} - 36 = \frac{3}{2}$$

由于 Z 代表周利润是以“千美元”为单位的,这样, $y_2^* = \frac{3}{2}$ 意味着车间2每周对两种新产品多增加1h的生产时间,会使每周总利润增加1500美元。这在实际中可能发生吗?这取决于当前占用这个生产时间的其他产品的边际利润。如果工厂2的当前产品每周生产时间的每小时贡献利润少于1500美元,那么,把生产时间转到新产品上就是值得的。

我们将在7.2节中继续讨论这个例子,Wyndor Glass公司的运筹小组将影子价格作为对模型灵敏度分析的一部分。

图4.8举例证明了 $y_2^* = \frac{3}{2}$ 是 b_2 稍作增加时 Z 的增长率。尽管如此,也证明了一种普遍现象,只有在 b_2 的增量很小的情况下才成立。一旦 b_2 的增加量超过18时,最优解将停留在 $(0,9)$ 而 Z 值不再增加(在那

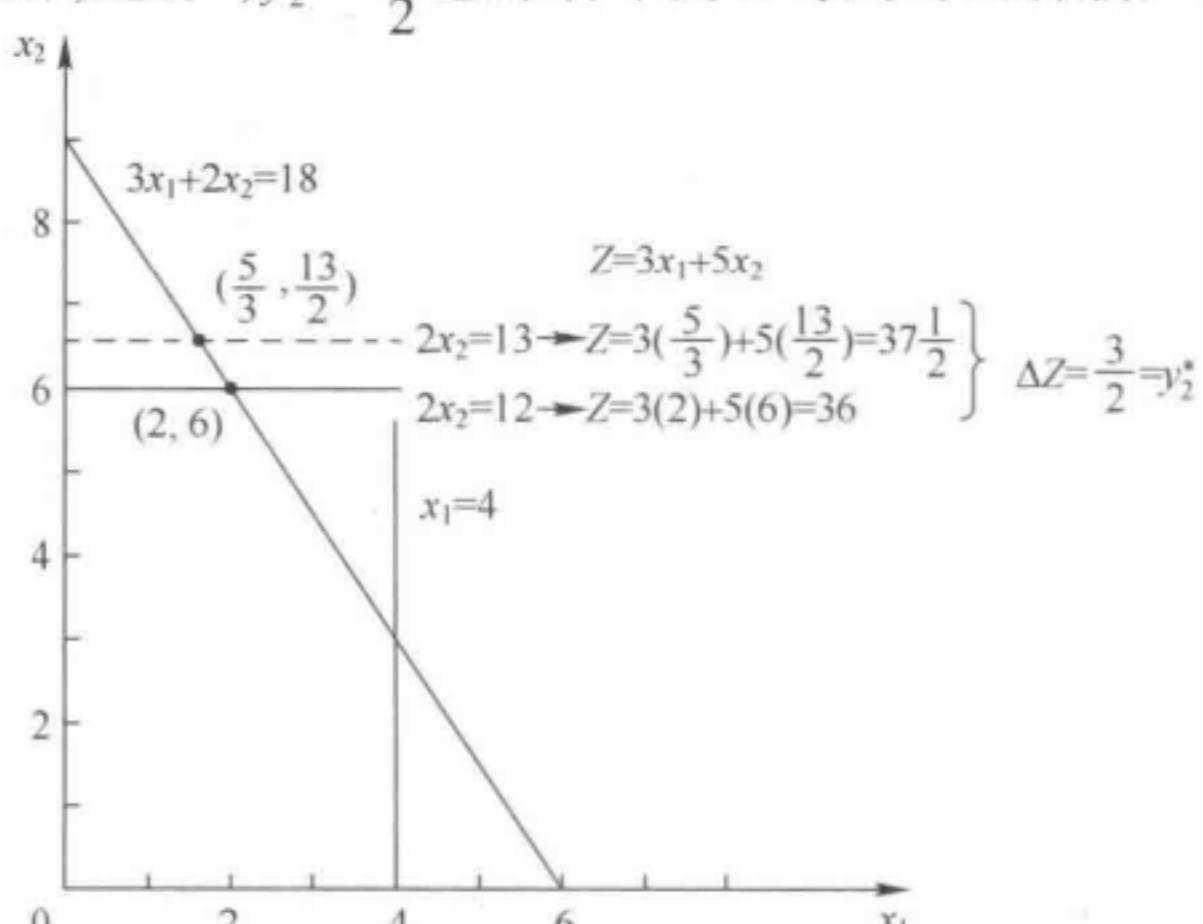


图4.8给出了Wyndor Glass公司问题中资源2的影子价格为 $y_2^* = \frac{3}{2}$ 。图中两个点为 $b_2=12$ 或 $b_2=13$ 时的最优解,并将这些解代入目标函数得到 b_2 增加1会使 Z 增加 $y_2^* = \frac{3}{2}$

个点,最优解对应的基变量组发生了变化,因此将得到一个新的单纯形表具有新的影子价格,包括 $y_2^* = 0$)。

注意图 4.8 中为何 $y_1^* = 0$ 。因为资源 1 的约束, $x_1 \leq 4$, 在最优解(2,6)时没有起到约束作用,说明这种资源存在剩余。因此,当 b_1 的增加超过 4 并不会产生一个使 Z 值更大的新的最优解。

相反,对资源 2 和资源 3 的约束, $2x_2 \leq 12$, $3x_1 + 2x_2 \leq 18$, 是有约束力的约束(在最优解时约束等号成立)。因为这些资源的限制供应($b_2 = 12$, $b_3 = 18$)限制了 Z 的进一步增长,它们有正的影子价格。经济学家称这类资源是稀缺资源,而把处于过剩状态的资源(如资源 1)称为免费物品(其影子价格为 0)。

当管理者考虑组织内资源的再分配时,影子价格提供的这类信息显然是很有价值的。当增加 b_i 只需要从组织的外部市场来购买更多的资源能够实现时,影子价格也是非常有帮助的。例如,假设 Z 代表利润,项目活动的单位利润(c_i 的值)包含了所消耗资源的成本(以常规价格计算)。资源 i 正的影子价格 y_i^* 意味着以常规价格多购买一个单位的这种资源时,总利润 Z 的值可以增加 y_i^* 。相反,如果在市场上必须为这种资源支付昂贵的价格时, y_i^* 代表了值得支付的最大加价(超出常规价格)费用。^①

影子价格的理论基础由第 6 章描述的对偶理论提供。

4.7.3 敏感度分析

在 3.3 节结尾讨论线性规划的确定性假设时,我们指出模型参数的值(表 3.3 所列的 a_{ij} 、 b_i 和 c_j)通常只是估计量,其真实值只有未来在线性规划研究在某个时间实施后才会知道。敏感度分析的主要目的就是要确定灵敏参数(也就是说,如果不改变最优解,这些参数不能改变)。灵敏参数是指那些需特别小心估计的参数,使得到错误最优解的风险最小化。当实施研究时,它们也将需要特别密切地观测。如果发现灵敏参数的真实值与模型中的估计值不同时,这即意味着需要改变这个解。

如何确定灵敏参数呢?就拿 b_i 来说,你刚看到由单纯形法提供的影子价格给出的这个信息。特别地,如果 $y_i^* > 0$,若 b_i 改变,则最优解改变,因此 b_i 是灵敏参数。尽管如此, $y_i^* = 0$ 意味着最优解至少是对 b_i 的微小改变不敏感。因此,如果 b_i 所用的值是对可用(不是管理决策)资源数的估计时,那么,需要密切关注的 b_i 值是那些有正的影子价格——特别是那些大的影子价格的资源。

当仅有两个变量时,各参数的灵敏度可由图示分析完成。例如,在图 4.9 中, $c_1 = 3$ 可以变为

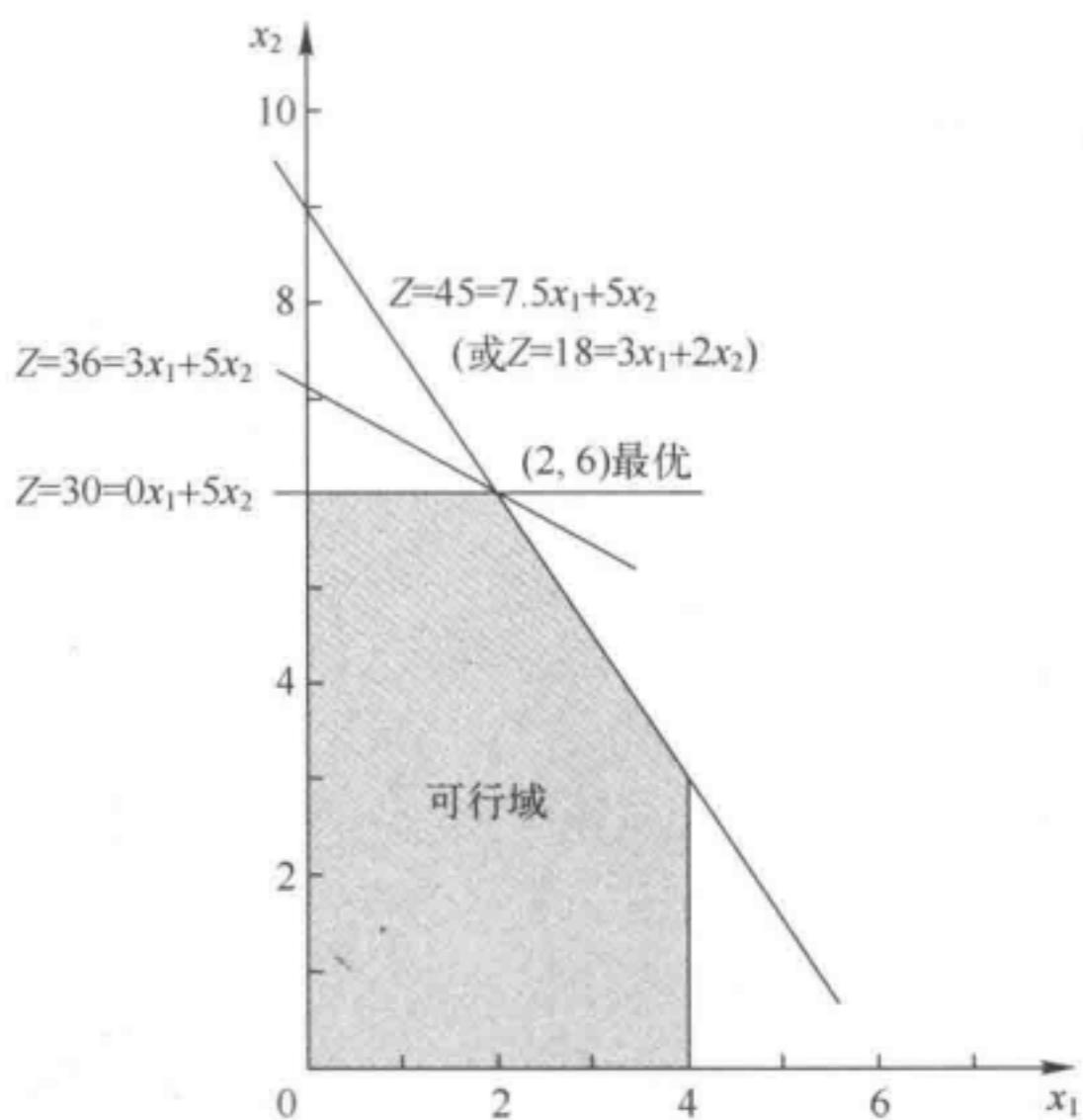


图 4.9 这个图演示了 Wyndor Glass 公司问题中 c_1 和 c_2 的灵敏度分析。从初始的目标函数线(其中 $c_1 = 3$, $c_2 = 5$, 最优解为(2,6))开始,另外两条线给出了在仍然保持(2,6)为最优解时,目标函数线的斜率变化值。因此,当 $c_2 = 5$ 时, c_1 的许可范围为 $0 \leq c_1 \leq 7.5$, $c_1 = 3$ 时, c_2 的许可范围为 $c_2 \geq 2$

^① 如果单位利润不包括所消耗资源的成本,那 y_i^* 代表增加 b_i 时值得花费的最大的总单位价格。

0~7.5 中的任何一个值,而不会使最优解(2,6)变化(原因是这个范围内的任意 c_1 值都可使 $Z=c_1x_1+5x_2$ 的斜率位于 $2x_2=12$ 和 $3x_1+2x_2=18$ 的斜率之间)。类似地,如果 $c_2=5$ 是唯一改变的参数,它可以是大于 2 的任意值,而不会影响最优解。因此, c_1 和 c_2 都不是敏感参数(你的 IOR Tutorial 上名字为“图解法与灵敏度分析”的程序可以使你非常有效地进行图解分析)。

图解分析每个 a_{ij} 参数的灵敏度最简单的方法是检查对应的约束条件在最优解时是否有限制作用。因为 $x_1 \leq 4$ 不是有限制作用的约束,其系数($a_{11}=1, a_{12}=0$)任何足够小的变化数也不会改变最优解,因此它们不是灵敏参数。另外, $2x_2 \leq 12$ 和 $3x_1+2x_2 \leq 18$ 都是有限制作用的约束,因此改变任意一个它们的系数($a_{21}=0, a_{22}=2, a_{31}=3, a_{32}=2$)都会引起最优解的变化,所以它们都是灵敏参数。

通常,在执行灵敏度分析时,与 a_{ij} 相比,我们会给 b_i 和 c_j 更多的注意力。对于有成百个甚至上千个约束和变量的现实问题,改变一个 a_{ij} 值的影响通常可以忽略不计,但改变一个 b_i 或 c_j 的值却会产生真正的影响。进一步说,在许多情况下, a_{ij} 值是由所采用的工艺决定的(a_{ij} 值有时称为工艺系数),因此它们的最终值可能会有相对小(或者没有)的不确定性。这是幸运的,因为在大型问题中 a_{ij} 参数的数量远多于参数 b_i 和 c_j 。

对于多于 2 个(或者 3 个)决策变量的问题,不能像刚才对 Wyndor Glass 公司问题那样用图解法分析参数的灵敏度,但可以从单纯形法中抽取同样的信息。得到这些信息需要用到 5.3 节所述的“基本洞察”推导由初始模型参数值变化所引起的最终单纯形表的变化。其他的过程将在 7.1 节和 7.2 节中描述和说明。

4.7.4 运用 Excel 产生灵敏度分析信息

灵敏度分析通常包含在基于单纯形法的软件包中,例如,当用 Excel 电子表格建立和求解线性规划模型时,Solver 按照需求产生灵敏度分析信息(ASPE 的 Solver 也会产生同样精确的信息),如图 3.21 所示,当 Solver 给出信息找到解时,它也会在右侧给出 3 个可提供的报告列表。在求解 Wyndor Glass 公司问题后,通过选择第二个报告(标记为“灵敏度”),你将会得到如图 4.10 所示的灵敏度报告。报告的上部分表提供了决策变量及其在目标函数中系数的灵敏度分析信息。报告的下部分表提供了约束条件及其右端项的灵敏度分析信息。

先看图 4.10 中的上部分,“最终值”列表示的是最优解,下列给出了“减少的成本”(我们现在不讨论“减少的成本”,因为它们提供的信息也可以从上表的其余部分收集到)。接下来 3 列提供的是确定目标函数中每个系数 c_j 允许范围所必需的信息。

变量单元格						
单 元 格	名 称	最 终 值	减 少 的 成 本	目 标 系 数	允 许 增 加 值	允 许 减 少 值
\$C\$12	生产门批数	2	0	3	4.5	3
\$D\$12	生产窗批数	6	0	5	1E+30	3
约 束 条 件						
单 元 格	名 称	最 终 值	影 子 价 格	约 束 右 端 项	允 许 增 加 值	允 许 减 少 值
\$E\$7	工厂 1 消耗	2	0	4	1E+30	2
\$E\$8	工厂 2 消耗	12	1.5	12	6	6
\$E\$9	工厂 3 消耗	18	1	18	6	6

图 4.10 Solver 求解 Wyndor Glass 公司问题提供的灵敏度报告

对任意 c_j , 它的允许范围是假定其他系数不变, 保持当前最优解仍为最优时系数的取值变化范围。

“目标系数”列给出了每个系数的当前值, 以千美元为单位, 接下来的两列给出了这个值在允许范围内的允许增加值和允许减少值。

因此, $3-3 \leq c_1 \leq 3+4.5$, 得 $0 \leq c_1 \leq 7.5$, 就是针对当前最优解不变时 c_1 的允许范围(假设 $c_2=5$), 如图 4.9 图形法所得到的一样。同样, 由于 Excel 用 $1E+30 (10^{30})$ 表示无穷大, $5-3 \leq c_2 \leq 5+\infty$, 得 $2 \leq c_2$ 就是 c_2 的允许范围。

事实是, 两个决策变量系数的允许增加值和允许减少值都大于 0, 这提供了另一个有用的信息, 如下所述。

当 Excel Solver 提供的灵敏度分析报告的上部分表格中显示, 每个目标函数系数的允许增加值和允许减少值都大于 0, 这标志着“最终值”列的最优解是唯一的最优解。相反, 如果存在任意允许增加值和允许减少值等于 0, 就标志着有多个最优解。在允许范围内稍微改变一小点相应系数的值使之大于 0, 重新求解就会得到原始问题的另一个最优 CPF 解。

现在考虑图 4.10 中下部分的表格, 其着重于对 3 个约束条件的灵敏度分析。“最终值”列给出取得最优解时, 每个约束条件左边的值。接下来两列给出了每个约束条件的影子价格和右端项(b_i)的当前数值。当只有一个 b_i 值改变时, 后两列给出的是为了保持在允许范围内, 其允许增加和允许减少值。

对任意 b_i , 其允许范围是假设其他右端项保持不变的情况下, 使当前最优 BF 解(基变量的值有调整^①)保持可行。该范围值的一个重要性质是, 只要 b_i 保持在允许范围内, 评估 b_i 的改变对 Z 的影响时, 当前 b_i 的影子价格仍然有效。

这样, 运用图 4.10 下部分, 把后两列与右端项的当前值结合起来, 得出如下许可范围:

$$2 \leq b_1$$

$$6 \leq b_2 \leq 18$$

$$12 \leq b_3 \leq 24$$

这个由 Solver 提供的灵敏度分析报告是典型的由线性规划软件包提供的灵敏度分析信息。你将在附录 4.1 中看到 LINDO 和 LINGO 会提供几乎一样的报告。MPL/Solvers 当调出解文件对话框时, 也会给出同样的报告。再说一遍, 对于两个变量的问题而言, 这种代数法获得的信息也能从图解分析中导出(见习题 4.7-1)。例如, 在图 4.8 中, $b_2 \leq 18$, 当 b_2 从 12 开始增加时, 位于两个约束边界 $2x_2 = b_2$ 和 $3x_1 + 2x_2 = 18$ 交点上的原始最优 CPF 解仍将保持可行(包括 $x_1 \geq 0$)。

本书网站的解题示例部分包含应用灵敏度分析(图解法和灵敏度分析报告都采用了)的另一个例子。7.1 节~7.3 节将更深入地详述这类分析。

4.7.5 参数线性规划

灵敏度分析是在原始模型中一次改变一个参数检查其对最优解的影响。相反, 参数线性规划(或简称参数规划)是系统性研究多个参数在某个范围内同时变化时最优解的变化情况。这种研究为灵敏度分析提供了有用的拓展延伸, 例如, 检查有相互关联的参数由于外因变化如经济状况变化而发生改变时造成的影响。尽管如此, 更重要的应用是对参数值平衡点的研究。例如,

^① 由于基变量的值是由方程组(扩展形式的约束条件)的联立求解得到的, 如果一个右端项变化时至少这些值中有部分值会变化。尽管如此, 只要右端项的新值保持在允许范围内, 当前基变量的调整值仍满足非负约束并仍将可行。如果调整后的基解仍然可行, 它也将最优。在 7.2 节中我们会进一步详述。

如果 c_i 值代表各活动的单位利润, 通过适当转换活动中的人力和设备来减少其他 c_i 值为代价, 而增加某些 c_i 的值是可能的。同样, 如果 b_i 值代表可用资源的数量, 也可通过允许减少一些 b_i 值的方法使另一些 b_i 的值增加。

在一些应用中, 研究的主要目的是确定两个基本因素之间最适当的平衡点, 如成本和利润之间。常用的方法是把其中一个因素表示在目标函数(如求总成本最小值)中, 把相关另一个放入约束条件中(如利润 \geq 最低可接受水平), 如 3.4 节中 NORI & LEETS 公司的空气污染问题那样的做法。当通过其他代价改善了一个因素而使基于平衡点(如最小可接受利润值)的初始试验决策发生变化时, 参数线性规划方法就能对其进行系统性研究。

参数线性规划的算法是灵敏度分析方法的自然拓展, 因此, 它也是基于单纯形法的。这个过程将在 8.2 节中描述。

4.8 计算机实现

如果计算机从未被发明, 你可能不会听说线性规划和单纯形法。尽管可以通过手工(可能在计算器的辅助下)运用单纯形法解决小型问题, 但其中的计算太繁琐以至于不能按照常规方法进行。尽管如此, 单纯形法非常适合在计算机上执行。计算机革命使线性规划在近几十年的广泛应用成为可能。

4.8.1 单纯形法的实施

单纯形法的计算机编码现在在所有的现代计算机系统中被广泛应用。这些编码通常是精妙的数学规划软件包的一部分, 它也包括了后续章节提到的许多程序(包括那些用于优化后分析的)。

这些产品的计算机编码并不是紧密遵循 4.3 节和 4.4 节中所介绍的单纯形法的代数形式或表格形式。这些形式从计算机实现角度考虑可以简化。因此, 编码采用矩阵形式(通常称为改进单纯形法)代替, 因其是特别适合计算机实现的。这种形式完成了与代数形式或表格形式几乎一样的工作, 但是当它计算和储存当前迭代实际需要的数字时完成了这些工作, 然后以更简洁的格式带着这些基本数据。改进单纯形法在 5.2 节和 5.4 节中描述。

单纯形法通常用来求解相当大型的线性规划问题。例如, 强大的台式计算机(包括工作站)通常用来求解有成百上千甚至上百万个约束条件和大量决策变量的问题。有时, 成功解决了有上千万约束条件和变量的问题^①。对线性规划的某一特殊模型(如本书后续会介绍的运输问题、指派问题和最小费用流问题), 甚至更大的问题现在也可以通过单纯形法的特殊版本解决。

许多因素会影响用一般单纯形法求解线性规划问题的耗时长短。最重要的一个因素就是常规约束条件的数量。事实上, 计算时间与这个数量的立方大致成正比, 以至于这个数量翻倍就会使运算时间大约变为 8 倍。相反, 变量的数目是一个相对小的影响因素^②。因此, 变量数目翻倍将不太可能使计算时间翻倍。第三个某种重要因素是约束系数表的密度(即非 0 系数的比例), 因为它影响了每次迭代的计算时间(对于实践中遇到的大型问题, 密度低于 5% 甚至 1% 都是常

^① 不要在家里尝试。解决这样一个巨大的问题需要一个特别高级的利用系数矩阵稀疏性的方法(如快速找到高级初始 BF 解的破碎方法)。在数据少许更新后问题周期性重复求解时, 通过应用(或修改)最后的最优解提供一个初始 BF 解进行新一轮运算会节省许多时间。

^② 这个叙述是假定应用了 5.2 节和 5.4 节中介绍的改进单纯形法。

见的,这样大的稀疏性将大大加速单纯形法的计算)。关于迭代次数的一个常见经验法则是:它大约为约束条件数量的2倍。

对于大型线性规划问题,开始构建模型和将其输入计算机时发生一些错误或失误是不可避免的。因此,正如2.4节所描述的,需要一个测试和提炼模型(模型有效性)的完整过程。通常,最终产品不是一个仅由单纯形法一次求解的单一静态模型。相反,运筹小组和管理层通常考虑基于基本模型的一系列变化(有时甚至上千种变化)作为优化后分析的一部分检测不同的情境结果。当能在台式计算机上交互执行时,整个过程被大大加速了。在数学规划模型语言和不断改进的计算机技术的帮助下,现在这已经很常见了。

直到20世纪80年代中期,线性规划问题还几乎是在大型计算机上求解的。从那以后,台式计算机(包括个人计算机和工作站)求解线性规划问题的能力爆发。工作站包括一些具有并行的处理能力的工作站,现在一般也用来代替大型机解决大型线性规划模型。最快的个人计算机也不会落后很远,尽管求解大型问题需要更多的内存,甚至笔记本计算机现在也能求解相当大的线性规划问题。

4.8.2 本书特色线性规划软件

如3.6节所述,你的运筹课件中的MPL软件学生版提供了一个学生友好型的模型语言,能以简洁的方式高效构建大型规划模型(和相关模型)。MPL也提供了一些经典Solver来相当快地求解这些模型。你的运筹课件中的MPL学生版包括了4个软件的学生版——CPLEX、GUROBI、CoinMP和SULUM。MPL的专业版本通常用来求解巨大的有数千(或可能甚至上百万)约束条件和决策变量的线性规划模型。本书网站提供了一个MPL教程的若干个MPL示例。

LINDO(Linear, Interactive, and Discrete Optimizer)在线性规划应用及其拓展领域有着非常长的历史。轻松用LINDO界面,作为LINDO系统(www.lindo.com)中LINGO优化模型包的子集,也是可以找到的。LINDO的长期流行部分归因于其易于使用。对于课桌上规模的问题,模型被以一种直观、明确的方式输入和求解,因此,LINDO界面为学生运用提供了一个方便的工具。尽管对小问题易于使用,但专业版的LINDO/LINGO也能求解有数千(或可能甚至上百万)约束条件和决策变量的巨大模型。

本书网站的运筹课件提供包括了一个学生版的LINDO/LINGO,伴随一个扩展教程。附录4.1提供了一个快速介绍。此外,软件包括了延伸的在线帮助。运筹课件还包括了本书用到的主要示例的LINGO/LINDO公式。

针对线性规划及其扩展形式的基于电子表格的求解工具正变得越来越受欢迎。引领这条道路的是一个基本的Solver由Frontline Systems为Microsoft Excel开发的。除了Solver,Frontline Systems也曾开发了更强大的Premium Solver产品,包括非常多功能的分析解决平台教育版(A_nalytic Solver Platform for Education,ASPE)包含在你们的运筹课件中(ASPE具有强大的功能来解决除线性规划之外的许多类型的运筹问题)。现在,由于像Microsoft Excel等电子表格包的广泛使用,这些求解工具正第一时间向许多人介绍线性规划的潜力。对于课桌上规模的线性规划问题(以及相当大规模的问题),电子表格提供了一个更方便的方法构建和求解模型,如3.5节所述。更强大的电子表格求解工具能求解有数千个决策变量的相当大的模型。尽管如此,当电子表格遇到一个难以处理的规模时,一个好的模型语言及其求解工具可能会提供一个更方便的方法构建并求解模型。

电子表格提供了一个优秀的沟通工具,特别是与管理人员沟通时,他们对这种形式感到

非常舒服,而不是采用运筹模型的代数形式。因此,优化软件包和模型语言现在能正常输入输出数据并形成电子表格结果。例如,MPL 模型语言包括了一个改进(称为 *OptiMax Component Library*)能使建模者仍然使用 MPL 非常有效地建立模型,并能为模型使用者创建电子表格模型的感觉。

本书网站上所有这些软件、教程以及示例会为你提供关于线性规划(及一些其他领域的运筹问题)的若干能吸引你的软件选项。

4.8.3 线性规划问题可用软件选项

(1) 演示示例(在 OR Tutor 中)和 IOR Tutorial 中的交互及自动程序高效学习单纯形法。

(2) Excel 及其 Solver 以电子表格的形式建立并求解线性规划模型。

(3) Analytic Solver Platform for Education (ASPE)大大扩展了 Excel 的 Solver 功能。

(4) MPL 学生版及其 Solver——CPLEX、GUROBI、CoinMP 和 SULUM——高效建立并求解大型线性规划模型。

(5) 学生版 LINGO 及其 Solver(与 LINDO 共享)提供了另一个方法高效建立并求解大型线性规划模型。

你的导师将明确你用哪个软件。不论选择哪个,你将积累使用这类运筹专家们曾使用的最先进软件的经验。

4.9 求解线性规划问题的内点法

20世纪80年代,运筹学上最引入注目的新发展就是求解线性规划问题的内点法的发现。这是1984年由AT&T Bell实验室的一名年轻数学家 Narendra Karmarkar 发现的,当时他借助该方法成功开发出了一个线性规划问题的新算法。尽管这种特殊算法在与单纯形法的竞争中只取得了部分成功,但以下所述的关键求解原理看上去在求解巨大的线性规划问题方面有很大潜力,而这方面可能是单纯形法做不到的。许多顶尖的研究者陆续地致力于修改 Karmarkar 算法以使其完全开发出这种潜力。已经取得了(并将继续取得)很大的进步,也开发出许多运用内点法的强大算法。如今,更强大的被设计用来求解真正大型线性规划问题的软件包除包含单纯形法及其衍生方法外,至少包括一种内点算法。随着对这些算法研究的继续,它们的计算机实现也在改进。这刺激了对单纯形法的重新研究,单纯形法的计算机实现也得到不断改进。在求解巨大问题上,这两种方法之间的竞争还在继续。

现在让我们看一下 Karmarkar 算法背后的关键思想及它后续利用内点法的一些衍生算法。

4.9.1 关键求解原理

尽管根本上不同于单纯形法,但 Karmarkar 算法还是有一点与其相同的特征。它是一种迭代算法。它开始于得到的一个可行试验解。在每次迭代中,它在可行域内从当前试验解开始移动至另一个更好的试验解。然后,继续这个过程直到达到(基本上)最优的试验解为止。

大的不同在于这些试验解的性质。对于单纯形法,试验解是 CPF 解(或扩展后的 BF 解)。因此,所有的移动都是沿着可行域的边界进行的。对于 Karmarkar 算法,试验解是内点,就是可行域边界以内的点。由于这个原因,Karmarkar 算法及其衍生算法称为内点算法。

尽管如此,由于内点算法的早期版本很早获得专利,故内点算法也通常称为障碍算法(或障碍法)。用“障碍”一词是因为从搜索的视角看,其试验解都是内点,每一个约束边界都被当作障碍。但我们将继续用提示性更强的内点算法这一术语。

为了描述内点算法,图 4.11 展示了在运筹学课件中按内点算法解 Wyndor Glass 公司问题时得到的从初始试验解 $(1, 2)$ 开始的路径。注意路径到达最优解 $(2, 6)$ 时,路径上的所有试验解(点)均在可行域边界内(所有后续的未标出的试验解也位于可行域边界内)。请将这条路径与单纯形法沿着可行域边界从 $(0, 0)$ 到 $(0, 6)$ 到 $(2, 6)$ 的路径进行比较。

表 4.18 给出了来自于 IOR Tutorial 关于该问题的实际输出^①(自己试一下)。注意连续的试验解是如何变得越来越接近最优解,但却不会真正到达最优解。然而,这个偏差变得可以无限小,以至于最终的试验解可被认为是实际目标的最优解(本书网站的求解例题部分给出了 IOR Tutorial 关于另一个示例的输出)。

在 8.4 节给出了 IOR Tutorial 中内点算法的详细说明。

表 4.18 运筹课件中内点法求解 Wyndor Glass 公司问题结果输出

迭代	x_1	x_2	Z
0	1	2	13
1	1.27298	4	23.8189
2	1.37744	5	29.1323
3	1.56291	5.5	32.1887
4	1.80268	5.71816	33.9989
5	1.92134	5.82908	34.9094
6	1.96639	5.90595	35.429
7	1.98385	5.95199	35.7115
8	1.99197	5.97594	35.8556
9	1.99599	5.98796	35.9278
10	1.99799	5.99398	35.9639
11	1.999	5.99699	35.9819
12	1.9995	5.9985	35.991
13	1.99975	5.99925	35.9955
14	1.99987	5.99962	35.9977
15	1.99994	5.99981	35.9989

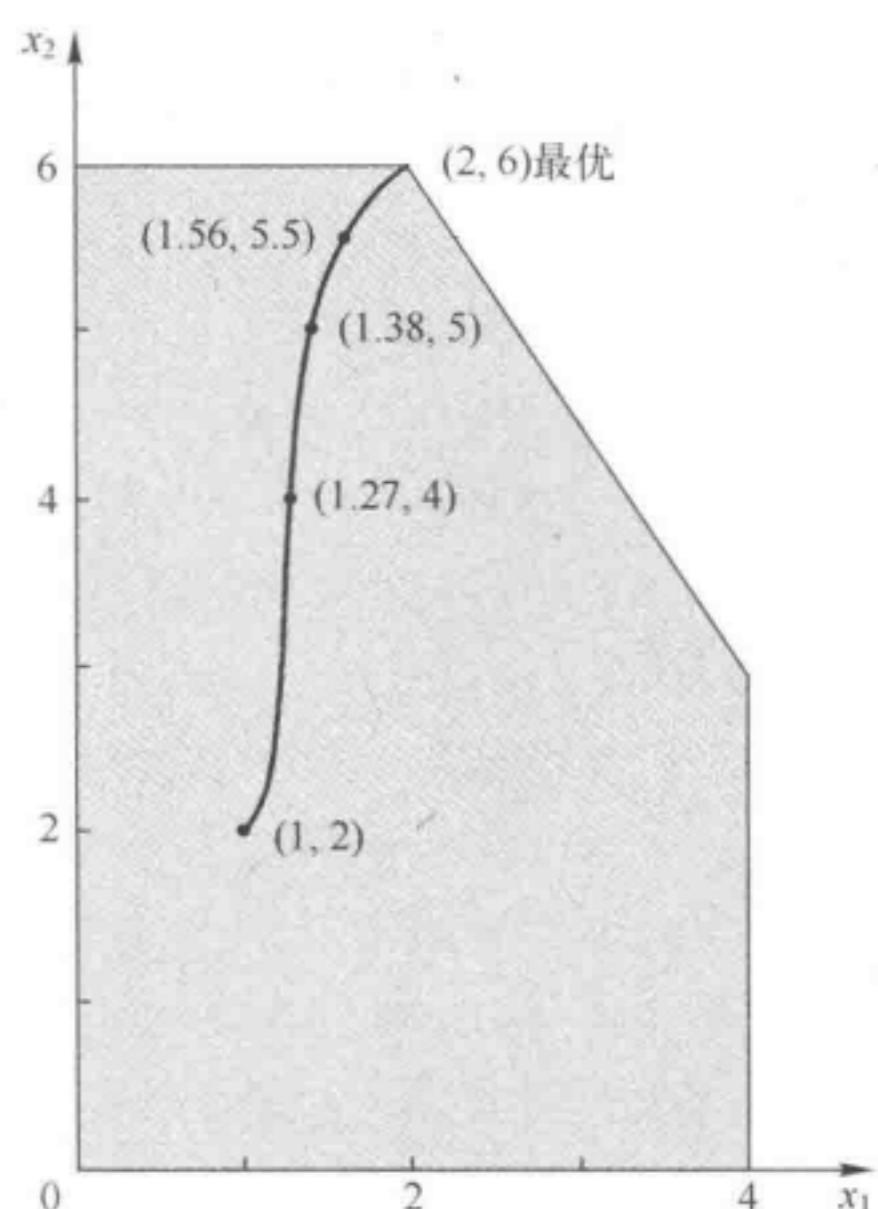


图 4.11 从 $(1, 2)$ 到 $(2, 6)$ 的曲线给出内点算法的一个典型路径,穿过 Wyndor Glass 公司问题可行域的内部

^① 这个程序称为内点算法的自动求解。对算法的特定参数 α (8.4 节中有定义),选项菜单提供了两个选择。这里选择了默认值 $\alpha=0.5$ 。

4.9.2 与单纯形法的比较

比较内点法和单纯形法的一个有意义的方法是检验它们理论上的计算复杂性。Karmarkar 已证明他算法的原始版本是一个多项式时间算法,即求解任何线性规划问题所需的时间能被界定为该问题规模的多项式函数。病态的反例已经被构建出来为了说明单纯形法不具备这个性质,因此它是一个指数时间算法(即所需时间仅由问题规模的指数函数界定)。在最坏的情况下,这个差别是很明显的。然而,它并未告诉我们其在真实问题上平均表现的比较情况,这才是更重要的问题。

决定一个算法在真实问题上的表现的两个基本因素就是每次迭代的平均计算时间和迭代次数。我们接下来的比较就涉及这两个因素。

内点算法远比单纯形法复杂得多。每一次迭代都需要相当多的扩展运算才能找到下一个试验解。因此,内点算法每次迭代的计算时间是单纯形法计算时间的几倍长。

对相当小的问题,内点算法需要的迭代次数与单纯形法需要的迭代次数相比差不多。例如,对于具有 10 个约束条件的问题,两种算法大约都需要 20 次迭代。因此,对类似规模的问题,内点法的总计算时间将是单纯形法的数倍长。

另一方面,内点法的主要优点就是求解大型问题不需要比小型问题产生更多的迭代次数。例如,一个有 10000 个约束条件的问题可能只需 100 次以内的迭代。甚至考虑到这个规模的问题每次迭代所需的基本时间,如此少的迭代次数也会使问题变得容易处理。相反,单纯形法可能需要 20000 次迭代,因此可能需要大量的计算时间。因此,对于这种非常大型的问题来说,内点算法常常比单纯形法快。对于处理有成百上千(甚至上百万)个约束条件的巨大问题时,内点法可能是求解问题最好的期望。

关于求解大型问题的迭代次数有非常大差异的原因是所遵循的求解路径不同。每次迭代中,单纯形法沿着可行域边界从当前 CPF 解移至相邻的 CPF 解。大型问题有天文数字般的 CPF 解,从初始 CPF 解出发至最优解可能是一个沿着边界的非常迂回的路径,每次只走一小步就到达了下一个相邻 CPF 解,因此到达最优解必须经过相当多的步数。相反,内点算法避开了所有这些而直接通过可行域直击最优解。增加更多的约束条件会增加更多的可行域边界,但对通过可行域内部的这条路径上的试验解的个数几乎没有影响。这常常使得内点法有可能求解拥有大量约束条件的问题。

最后一个关键的关注在于 4.7 节所述的各种优化后分析的能力。单纯形法及其衍生方法非常适合并且已被广泛应用于这类分析,不幸的是,内点法在该领域能力有限^①。考虑到优化后分析的巨大重要性,而这恰恰是内点法的一个主要劣势。但是,我们接下来将指出单纯形法和内点法如何相结合克服这个劣势。

4.9.3 优化后分析中单纯形法和内点算法的结合

像刚才提到的那样,内点法的主要缺点就是其在进行优化后分析时的能力有限。为了克服这个缺点,研究者们已经开发出在内点法结束后转向单纯形法的计算程序。回忆一下,内点算法得到的试验解会越来越接近最优解(最佳 CPF 解),但不会精确到达那里。因此,转换程序需要

^① 然而,旨在增加这种能力的研究已经取得一些进步。例如,参考 E. A. Yildirim and M. J. Todd; "Sensitivity Analysis in Linear Programming and Semidefinite Programming Using Interior-Point Methods," *Mathematical Programming*, Series A, 90(2): 229–261, April 2001.

识别离最后试验解非常接近的 CPF 解(或扩展后的 BF 解)。

例如,通过看图 4.11,很容易看出表 4.18 中的最终试验解非常接近 CPF 解(2,6)。不幸的是,对有上千个决策变量的问题(因此没有图形可用)时,识别一个邻近的 CPF 解(或 BF 解)是非常具有挑战性和消耗时间的任务。然而,开发一个交叉算法将内点法得到的解转化为一个 BF 解,这方面已经取得了可喜的进步。

一旦这个邻近的 BF 解被发现后,对单纯形法的最优化检验被用于检验其是否为实际上的最优 BF 解。如果不是,单纯形法通过迭代从该 BF 解移到最优解。一般地,只需要非常少数的几次迭代(可能一次),因为内点算法已将我们带到非常接近最优解了。因此,这些迭代会很快完成,即使对那些太巨大以致很难从头求解的问题也是如此。在实际到达最优解后,单纯形法及其变种也被用于进行优化后分析。

4.10 结 论

单纯形法是求解线性规划的一个有效而可靠的算法,它也为非常有效地进行多种优化后分析奠定了基础。

尽管它具有一个有意义的几何解释,但单纯形法仍是一个代数过程。每次迭代中,它通过选择进基变量和出基变量,用高斯消元法求解一个线性方程组,实现从当前 BF 解移向一个更好的相邻 BF 解。当当前解没有更好的相邻 BF 解时,当前解就是最优解,算法停止。

我们介绍了单纯形法的完整代数形式表达它的逻辑,接着我们将其简化为更方便的表格形式。为了准备开始单纯形法,有时需用人工变量得到人工问题的初始 BF 解。如果是这种情况,不论使用大 M 法还是两阶段法都能确保单纯形法得到真实问题的最优解。

单纯形法及其变种的计算机实现已变得非常强大,以至于它们现在通常被用于求解巨大的线性规划问题。内点算法也为解决这类问题提供了一个强大的工具。

附录 4.1 LINDO 和 LINGO 的使用介绍

LINDO 软件可用以下两种形式或语句接受优化模型:LINDO 语句或 LINGO 语句。我们将首先描述 LINDO 语句结构。LINDO 语句的优点:对简单的线性规划和整数规划问题的描述是非常容易和自然的,自 1981 年得到广泛使用。

LINDO 语句允许自然输入一个教材中的模型。例如,这里给出了 3.1 节介绍的 Wyndor Glass 公司问题的输入方法。假设你已经安装了 LINGO,只要单击 LINGO 图标启动 LINGO,然后立即输入下列语句:

```
! Wyndor Glass Co. Problem. LINDO model
! X1 = batches of product 1 per week
! X2 = batches of product 2 per week
! Profit, in 1000 of dollars,
MAX Profit) 3 X1 + 5 X2
Subject to
! Production time
Plant1) X1 <= 4
Plant2) 2 X2 <= 12
```

```
Plant3) 3 X1 + 2 X2 <= 18
END
```

前4行,每行都以一个感叹号作为开始,是简单的注释。第四行注释进一步说明目标函数以1000美元为单位。数字1000没有像通常表达时在后面3位数字之前加逗号,因为LINDO/LINGO不接受逗号(LINDO语句也不接受代数表达式中的括号)。第五行继续描述这个模型,决策变量可以是小写字母也可以是大写字母。大写字母通常用于使变量在接下来的下标中不显得矮小。你可以使用更有提示性的名称来代替X₁或X₂,像生产的产品名称,如门窗等单词拼写来代表模型中的决策变量。

LINDO式的第五行表示模型的目标是使目标函数 $3x_1+5x_2$ 最大化。单词利润后加括号表示最优。这就清楚了,在解报告中代表最大化的量称为利润。

第七行的注释指出下列约束为所用生产时间。接下来3行对每个约束条件开头处给出一个名称(紧跟的一个括号表明这个名称是可选择的)。这些约束除不等式符号外以通常方式书写。因为大多数键盘不包括“≤”和“≥”,LINDO将“<”或“<=”作为“≤”,将“>”或“>=”作为“≥”(在有“≤”和“≥”的键盘,LINDO将不再识别它们)。

约束条件的结尾处标记单词END。变量的非负约束不需列出,因为LINDO自动假设所有变量 ≥ 0 。如果说, x_1 不存在非负约束,这将意味着在END下面一行键入FREE X1。

为了在LINGO/LINDO中求解模型,单击LINGO窗口顶端红色牛眼状的求解按钮。图A4.1给出了“求解报告”的结果。顶端一行给出已找到的全局最优解,目标函数值为36,经两次迭代。接下来就是最优解中 x_1 和 x_2 的值。

```
Global optimal solution found.
Objective value: 36.00000
Total solver iterations:
Variable      Value    Reduced Cost
X1            2.000000   0.000000
X2            6.000000   0.000000

Row          Slack or Surplus   Dual Price
PROFIT        36.000000   1.000000
PLANT1        2.000000   0.000000
PLANT2        0.000000   1.500000
PLANT3        0.000000   1.000000
```

图A4.1 由LINGO语句提供的关于Wyndor Glass公司问题的解报告

“Value”列右端的列给出了缩减成本(Reduced Cost)。本章中我们未曾讨论过,因为它们反映的信息也能从目标函数系数允许范围内收集到。这些允许范围也是可以得到的(你将在下个图中看到)。当这个变量是最优解中的基变量时(如在Wyndor Glass公司问题中的两个变量),其缩减成本自动为0。当一个变量为非基变量时,缩减成本提供了一些有意义的信息。当一个变量的目标函数系数在求最大值的模型中太小或在求最小值的模型中太大,在最优解中其值将为0。缩减成本意味着这个系数需要增大(目标求最大值时)或减小(目标求最小值时)多少,最优解才会发生变化,这个变量才会变成基变量。尽管如此,回顾一下,同样的信息也能从目标函数里该变量系数的允许值中得到。缩减成本(非基变量)恰好是在允许范围内该系数当前值的允许增加值(目标求极大值时)或允许减小值(目标求极小值时)。

图A4.1的底部提供了关于3个约束条件的信息。其松弛或剩余列给出了每个约束条件左右两端的差值,对偶价格列给出了另一个名字,影子价格,曾在4.7节中讨论过(这个可替换的

名字来自于 6.1 节中发现的事实,就是这些影子价格正是第 6 章介绍的对偶变量的最优值)。需要注意,LINDO 采用了与本书各处习惯相比不同的符号规约(见 4.7 节中有关影子价格定义的脚注)。特别地,对目标最小化问题,LINGO/LINDO 的影子价格(对偶价格)是我们得到数字的负值。

在 LINDO 提供了解报告后,你将可以选择进行范围(灵敏度)分析。图 A4.2 给出了范围报告,是由单击 LINDGO I Range 生成的。

除了目标函数中的系数用千美元为单位代替美元为单位外,这个报告与前面图 4.10 中用 Solver 生成的灵敏度分析报告的最后 3 列是一致的。如曾在 4.7 节所讨论的,范围报告的前 2 行数字表示目标函数中每个系数的允许范围(假设模型中其他不变)为

$$0 \leq c_1 \leq 7.5$$

$$2 \leq c_2$$

类似地,最后 3 行表示每个右端项的允许范围(假设模型中其他不变)为

$$2 \leq b_1$$

$$6 \leq b_2 \leq 18$$

$$12 \leq b_3 \leq 24$$

你可以通过单击 Files | Print 以标准的 Windows 风格打印结果。

Ranges in which the basis is unchanged:				
Variable	Coefficient	Objective Coefficient Ranges		
		Current	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	3.000000	4.500000	3.000000	
X2	5.000000	INFINITY	3.000000	
Righthand Side Ranges				
Row	Current	Righthand Side Ranges		
		RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
PLANT1	4.000000	INFINITY	2.000000	
PLANT2	12.000000	6.000000	6.000000	
PLANT3	18.000000	6.000000	6.000000	

图 A4.2 由 LINDO 提供的关于 Wyndor Glass 公司问题的允许范围

这都是启动 LINGO/LINDO 的基础,可以打开或关闭报告生成。例如,如果标准解自动生成报告已被关闭(简洁模式),可以通过单击 LINGO | Options | Interface | Output level | Verbose | Apply 返回。生成范围报告的功能可以通过单击 LINGO | Options | General solver | Dual computations | Prices & Ranges | Apply 打开或关闭。

LINGO 支持的第二种输入风格就是 LINGO 语句。LINGO 语句比 LINDO 语句强大得多。应用 LINGO 语句的优点:①允许任意的数学表达,包括括号和所有熟悉的数学运算,如乘、除、对数、三角函数等;②不仅能求解线性规划问题,也能求解非线性规划问题;③能适应具有下标的变量和集合功能的大应用;④能从电子表格或数据库中读取输入数据并将解信息发回电子表格或数据库中;⑤能自然表达稀疏关系;⑥编程功能,使你在进行参数分析时可以自动求解一系列模型;⑦快速建立并求解机会约束规划问题(见 7.5 节)和随机规划问题(见 7.6 节)。在 LINGO 中 Wyndor 问题应用 subscript/sets 表达的式子如下:

! Wyndor Glass Co. Problem;

SETS:

```

PRODUCT: PPB, X; ! Each product has a profit/batch
and amount;

RESOURCE: HOURSAVAILABLE; ! Each resource has a capacity;
! Each resource product combination has an hours/batch;
RXP( RESOURCE, PRODUCT) : HPB;
ENDSETS

DATA:
PRODUCT = DOORS WINDOWS; ! The products;
PPB = 3 5; ! Profit per batch;
RESOURCE = PLANT1 PLANT2 PLANT3;
HOURSAVAILABLE = 4 12 18;
HPB = 1 0 ! Hours per batch;
0 2
3 2;
ENDDATA

! Sum over all products j the profit per batch times batches
produced;
MAX = @SUM( PRODUCT(j): PPB(j) * X(j));
@FOR( RESOURCE(i)): ! For each resource i... ;
! Sum over all products j of hours per batch time batches
produced... ;
@SUM( RXP(i,j): HPB(i,j) * X(j)) <= HOURSAVAILABLE(i);
);

```

原始的 Wyndor 问题有 2 个产品和 3 种资源。如果将其扩展为有 4 个产品和 5 种项资源，这是一个平常的变化，只需要在 DATA 部分插入相应的新数据，模型的式子将会自动调整。它的 subscript/sets 功能也允许自然表达 3 阶的或更高阶的模型。3.6 节中描述的大型问题有 5 个维度：工厂、机器、产品、地区/客户和时间周期。这难以用 2 维的电子表格表示，但却很容易用带有 sets 和 subscript 的模型语言来表达。实际上，像在 3.6 节中多达 $10(10)(10)(10)(10) = 100000$ 个可能的关系组合并不存在，即并非所有工厂可以生产所有的产品，并非所有客户都需要所有的产品。这个建模语言中的 subscript/sets 功能使表达这类稀疏的关系更容易。

对你涉及的大多数模型，LINGO 能自动识别你正在使用 LINDO 语句还是 LINGO 语句。你可以通过单击 LINGO | Options | Interface | File format | lnx (对 LINGO) 或 ltx (对 LINDO) 选择你的默认语句。

LINGO 包含一个扩展的在线支持(Help)菜单，给出更多例子和更多细节。第 3 章补充材料 1 和 2(见本书网站)也提供了相对完整的对 LINGO 的介绍。网站上的 LINGO 教程也提供了更多的细节。网站上关于各章的 LINGO/LINDO 文件给出了大多数章节中例子的 LINGO/LINDO 建模。

参考文献

- [1] Dantzig, G. B., and M. N. Thapa: *Linear Programming 1: Introduction*, Springer, New York, 1997.
- [2] Denardo, E. V.: *Linear Programming and Generalizations: A Problem-based Introduction with Spreadsheets*, Springer, New

- York, 2011.
- [3] Fourer, R.: "Software Survey: Linear Programming," *OR/MS Today*, June 2011, pp. 60–69.
- [4] Luenberger, D., and Y. Ye: *Linear and Nonlinear Programming*, 3rd ed., Springer, New York, 2008.
- [5] Maros, I.: *Computational Techniques of the Simplex Method*, Kluwer Academic Publishers (now Springer), Boston, MA, 2003.
- [6] Schrage, L.: *Optimization Modeling with LINGO*, LINDO Systems, Chicago, 2008.
- [7] Tretkoff, C., and I. Lustig: "New Age of Optimization Applications," *OR/MS Today*, December 2006, pp. 46–49.
- [8] Vanderbei, R. J.: *Linear Programming: Foundations and Extensions*, 4th ed., Springer, New York, 2014.

习 题

一些习题(或其部分)左边的符号有如下含义。

D:前面列出的相应演示示例可能会有帮助。

I:我们建议你使用前面列出的相应交互程序(打印出你的工作记录)。

C:用任意一个可选软件(或导师指定的)通过计算机自动求解(见本书4.8节所介绍的或本书中和网站中列出的选项清单)。

题号上有星号表示书后至少会给出该题的一部分答案。

4.1-1 考虑如下问题。

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2$$

$$\text{s. t. } x_1 \leq 2$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

(a) 画出可行域并圈出所有 CPF 解。

(b) 对于每个 CPF 解, 确定它满足的一对约束条件方程。

(c) 对于每个 CPF 解, 用这对约束方程来代数求解当前角点的 x_1 和 x_2 值。

(d) 对于每个 CPF 解, 确定其相邻 CPF 解。

(e) 对于每一对相邻 CPF 解, 通过给出其方程来表示它们共享的约束边界。

4.1-2 考虑如下问题。

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s. t. } 2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

D, I(a) 用图解法求解这个问题, 圈出图中所有的角点解。

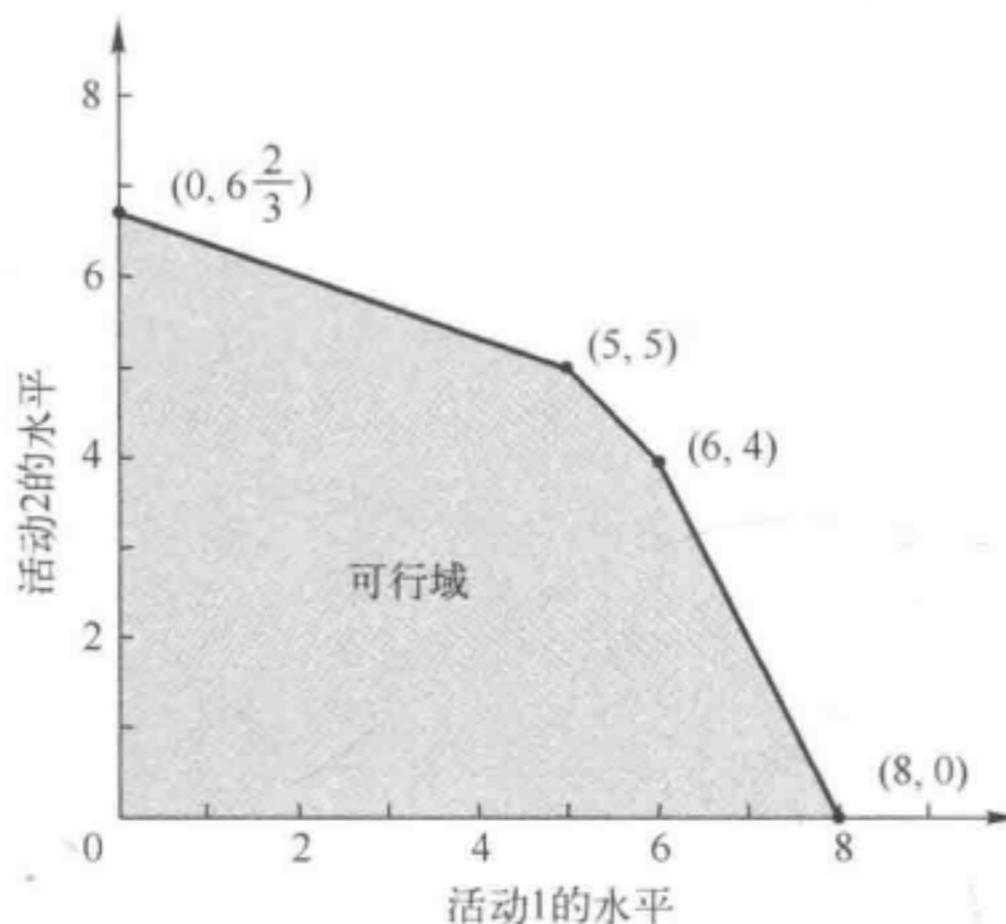
(b) 对于每个 CPF 解, 确定它满足的一对约束条件方程。

(c) 对于每个 CPF 解, 确定其相邻 CPF 解。

(d) 计算每个 CPF 解相应的 Z 值, 用这些信息确定最优解。

(e) 图上描出单纯形法逐步求解问题所做的工作。

4.1-3 一个有两个活动的线性规划模型可行解如下。



目标是使两项活动的总利润最大。活动1的单位利润是1000美元，活动2的单位利润是2000美元。

(a) 计算每个 CPF 解的总利润,用这些信息确定最优解。

(b) 用4.1节中给出的单纯形法的求解原理求出一系列 CPF 解,它们会在单纯形法到达最优解时被检验。

4.1-4* 考虑习题3.2-3中构建的线性规划模型(书后给出)。

(a) 用图形分析确定这个模型所有的角点解,并逐个标出可行或不可行。

(b) 计算每一个 CPF 的目标函数值,用这些信息确定最优解。

(c) 用4.1节中给出的单纯形法的求解原理求出一系列 CPF 解,它们会在单纯形法到达最优解时被检验(提示:对这个模型有两个可选的结果要确定)。

4.1-5 对下面问题重复习题4.1-4的要求。

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2$$

$$\text{s. t. } x_1 + 3x_2 \leq 8$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

4.1-6 图上描出单纯形法逐步求解如下问题时所做的工作。

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s. t. } -3x_1 + x_2 \leq 1$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 20$$

$$4x_1 - x_2 \leq 10$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 5$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

4.1-7 图上描出单纯形法逐步求解如下问题时所做的工作。

$$\text{Min } Z = 5x_1 + 7x_2$$

$$\text{s. t. } 2x_1 + 3x_2 \geq 42$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 20$$

$$x_1 + x_2 \geq 18$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

4.1-8 标出下面关于线性规划问题的叙述是正确还是错误,然后解释你的答案。

- (a) 关于求目标最小值的问题,如果评估一个 CPF 解的目标函数值不比每个相邻 CPF 解大,则这个解是最优解。
- (b) 只有 CPF 解是最优,所以最优解的数量不会超过 CPF 解的数量。
- (c) 如果存在多个最优解,那最优 CPF 解可能会有也是最优解的相邻 CPF 解(Z 有相同值)。

4.1-9 如下叙述给出了关于 4.1 节描述的 6 个求解原理的不正确解释。对每种情况,解释表述的错误之处。

- (a) 最好的 CPF 解都是一个最优解。
- (b) 单纯形法的一次迭代检查是否当前 CPF 解最优,如果不是,转到一个新的 CPF 解。
- (c) 尽管任意 CPF 解能被选中作为初始 CPF 解,单纯形法总是选择原点。
- (d) 当单纯形法准备要选择一个新的 CPF 解,并从当前 CPF 向其移动时,它仅考虑相邻 CPF 解,因为它们中的一个更可能成为最优解。
- (e) 选择要从当前 CPF 解移动到的新的 CPF 解时,单纯形法识别出所有相邻 CPF 解并决定哪个给出最大的目标函数值的增长率。

4.2-1 再考虑习题 4.1-4 中的模型。

- (a) 引入松弛变量是为了写出约束条件的扩展形式。
- (b) 对每一个 CPF 解,通过计算松弛变量的值找出相应的 BF 解。对每个 BF 解,用变量的值确定非基变量和基变量。
- (c) 对每个 BF 解,证明(通过代入解)当非基变量被设为 0 后,该 BF 解也是(a)中得到的方程组的联立解。

4.2-2 重新考虑习题 4.1-5 中的模型,按照习题 4.2-1 中(a)、(b)、(c)的要求:

- (d) 对角点不可行解和相应的基不可行解重复(b)。
- (e) 对基不可行解重复(c)。

4.3-1 阅读 4.3 节应用案例中全面描述运筹研究中提到的参考文献,简要描述单纯形法在该研究中的应用,然后列举该研究得出的各种金融与非金融收益。

D,I 4.3-2 用单纯形法(代数形式)一步步求解习题 4.1-4 中的模型。

4.3-3 重新考虑习题 4.1-5 中的模型。

- (a) 用单纯形法(代数形式)手工求解这个模型。

D,J(b) 用你的 IOR Tutorial 中相应的交互程序重复(a)。

C(c) 运用基于单纯形法的软件包验证你求得的最优解。

D,I 4.3-4* 用单纯形法(代数形式)一步步求解下述问题。

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

$$\text{s. t. } 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 40$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

D,I 4.3-5 用单纯形法(代数形式)一步步求解下述问题。

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$\begin{aligned} \text{s. t. } & 3x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 10 \\ & x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 8 \\ & 2x_1 + 2x_3 \leq 7 \end{aligned}$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

4.3-6 考虑如下问题。

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = & 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{s. t. } & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 20 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30 \end{aligned}$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

已知最优解中的非零变量是 x_2 和 x_3 。

(a) 不实际执行任何迭代, 描述你如何能用该信息改造单纯形法, 以便以尽可能少的迭代次数求解(从通常的初始 BF 解开始)该问题。

(b) 用(a)中开发的程序手工求解该问题(不要使用运筹学课件)。

4.3-7 考虑如下问题。

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{s. t. } & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 24 \\ & 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 60 \end{aligned}$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

已知最优解中 $x_1 > 0, x_2 = 0, x_3 > 0$ 。

(a) 不实际执行任何迭代, 描述你如何能用该信息改造单纯形法, 以便以尽可能少的迭代次数求解(从通常的初始 BF 解开始)该问题。

(b) 用(a)中开发的程序手工求解该问题(不要使用运筹学课件)。

4.3-8 标出下面的叙述是正确还是错误, 然后通过参考本章中具体的描述来解释你的答案。

(a) 单纯形法选择进基变量的准则得到应用, 是因为它总是指向最好的相邻 BF 解(Z 最大)。

(b) 单纯形法选择出基变量的最小比准则得到应用, 因为另一个较大比率的选择可能会产生不可行的基解。

(c) 单纯形法求解下一个 BF 解时, 运用初等代数变换从某个方程(它所在的方程)之外的其他方程中消去每个非基变量, 并使其在这个方程的系数为+1。

D,I 4.4-1 用单纯形法的表格形式重做习题 4.3-2。

D,I,C 4.4-2 用单纯形法的表格形式重做习题 4.3-3。

4.4-3 考虑如下问题。

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s. t. } x_1 + x_2 \leq 40$$

$$4x_1 + x_2 \leq 100$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

(a) 用手工画图法求解这个问题，并确定所有的 CPF 解。

D,I(b) 用 IOR Tutorial 图解法求解这个问题。

D(c) 用单纯形法的代数形式手工计算求解这个问题。

D,I(d) 用 IOR Tutorial 单纯形法的代数形式交互求解这个问题。

D(e) 用单纯形法的表格形式手工计算求解这个问题。

D,I(f) 用 IOR Tutorial 单纯形法的表格形式交互求解这个问题。

C(g) 用基于单纯形法的软件包来求解这个问题。

4.4-4 对以下问题重复习题 4.4-3 的要求。

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s. t. } x_1 + 2x_2 \leq 30$$

$$x_1 + x_2 \leq 20$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

4.4-5 考虑如下问题。

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$\text{s. t. } 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 60$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 80$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

D,I(a) 用单纯形法的代数形式一步一步求解。

D,I(b) 用单纯形法的表格形式一步一步求解。

C(c) 用基于单纯形法的软件包来求解这个问题。

4.4-6 考虑如下问题。

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2 + 6x_3$$

$$\text{s. t. } 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

D,I(a) 用单纯形法的代数形式一步一步求解。

D,I(b) 用单纯形法的表格形式求解。

C(c) 用基于单纯形法的计算机软件包来求解这个问题。

D,I 4.4-7 用单纯形法(表格形式)一步一步求解如下问题。

$$\text{Max } Z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

$$\text{s. t. } 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

D,I 4.4-8 用单纯形法一步一步求解如下问题。

$$\text{Max } Z = -x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$\text{s. t. } x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 20$$

$$-2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 50$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

4.5-1 考虑如下关于线性规划和单纯形法的叙述,标出每个叙述是正确还是错误,然后解释你的答案。

(a) 在单纯形法的一次具体迭代中,如果纠结于选择哪个变量作为出基变量,那么,接下来的BF解必须至少有一个基变量等于0。

(b) 如果某次迭代中没有出基变量,那该问题无可行解。

(c) 如果最终表的第0行中至少有一个基变量的系数为0,那该问题有多个最优解?

(d) 如果一个问题有多个最优解,那该问题必定有有界可行域。

4.5-2 假设如下约束是一个线性规划模型的约束条件,决策变量是 x_1 和 x_2 。

$$-x_1 + 3x_2 \leq 30$$

$$-3x_1 + x_2 \leq 30$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

(a) 图解证明可行域无界。

(b) 如果目标函数为 $\text{Max } Z = -x_1 + x_2$,模型有最优解吗?如果存在,求出来。如果不存在,解释为什么不存在。

(c) 当目标函数为 $\text{Max } Z = x_1 - x_2$,重复(b)的要求。

(d) 对于没有最优解模型的目标函数,意味着没有针对于模型的好解吗?请解释。在构建模型时什么地方会出错?

D,I(e) 选择一个目标函数使这个模型没有最优解。然后用单纯形法一步一步证明 Z 无界。

C(f) 对于(e)中选的目标函数,用基于单纯形法的软件包证明 Z 无界。

4.5-3 按照习题4.5-2中的说明,但约束条件如下。

$$2x_1 - x_2 \leq 20$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 20$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

D,I 4.5-4 考虑如下问题。

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ \text{s. t. } &x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 20 \\ &-4x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 \leq 40 \\ &2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 50 \end{aligned}$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

用单纯形法一步一步证明 Z 无界。

4.5-5 任何可行域有界的线性规划问题具有一个基本的性质,就是每个可行解能表示为 CPF 解的凸组合(可能不只一种方法)。类似地,对于问题的扩展形式,每个可行解也能表示为 BF 解的凸组合。

(a) 证明任何一组可行解的任意凸组合一定是可行解(所以任意 CPF 解的凸组合一定可行)。

(b) 引用(a)的结果证明任意 BF 解的凸组合一定是一个可行解。

4.5-6 运用习题 4.5-5 中给出的事实,证明下列观点对于可行域有界和有多个最优解的任意线性规划问题一定为真。

(a) 每个最优 BF 解的凸组合一定最优。

(b) 没有其他可行解是最优的。

4.5-7 考虑两个变量的线性规划问题,其 CPF 解为 $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(6, 3)$, $(3, 3)$ 和 $(0, 2)$ (见习题 3.2-2 中可行域图)。

(a) 利用可行域的图确定模型的所有约束条件。

(b) 对于每对相邻 CPF 解,给出目标函数的一个示例,使位于两个角点之间线段上的所有点成为多个最优解。

(c) 现在假设目标函数是 $\text{Max } Z = -x_1 + 2x_2$,用图解法找到所有的最优解。

D,I(d) 对于(c)中的目标函数,用单纯形法一步一步地找出所有最优 BF 解。然后写出代数表达式表示所有的最优解。

D,I 4.5-8 考虑如下问题。

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s. t. } &x_1 + x_2 \leq 3 \\ &-x_3 + x_4 \leq 2 \end{aligned}$$

且

$$x_j \geq 0, j=1,2,3,4$$

用单纯形法一步一步求出所有最优 BF 解。

4.6-1* 考虑如下问题。

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t. } &x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ &x_1 + x_2 \leq 3 \end{aligned}$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

D,I(a) 图解这个问题。

(b) 用大 M 法, 建立完整的首个单纯形表, 确定相应的初始(人工)BF解, 并确定初始进基变量和出基变量。

I(c) 继续(b)的工作, 用单纯形法一步一步求解。

4.6-2 考虑如下问题。

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4$$

$$\text{s. t. } 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 300$$

$$8x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 300$$

且

$$x_j \geq 0, j=1, 2, 3, 4$$

(a) 用大 M 法, 建立完整的首个单纯形表, 确定相应的初始(人工)BF解, 并确定初始进基变量和出基变量。

I(b) 用单纯形法一步一步求解。

(c) 用两阶段法, 建立第一阶段完整的首个单纯形表, 确定相应的初始(人工)BF解, 并确定初始进基变量和出基变量。

I(d) 一步一步地完成第一阶段。

(e) 建立第二阶段完整的首个单纯形表。

I(f) 一步一步地完成第二阶段求解。

(g) 比较(b)和(d)、(f)中得到的一系列BF解, 对于通过引入人工变量建立的人工问题, 这些解中哪些是可行的? 对真实问题哪些解是可行的?

C(h) 用基于单纯形法的软件包来求解问题。

4.6-3* 考虑如下问题。

$$\text{Min } Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$\text{s. t. } x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

(a) 将这个问题改写, 使其符合3.2节描述线性规划问题的标准形式。

I(b) 用大 M 单纯形法一步一步求解这个问题。

I(c) 用两阶段法一步一步求解这个问题。

(d) 比较(b)和(c)中得到的系列BF解, 这些解中哪些对于引入人工变量构建的人工问题是可行的, 如此对真实问题实际可行。

C(e) 用基于单纯形法的软件求解这个问题。

4.6-4 对于大 M 法, 解释当所有人工变量都不是基变量时, 为什么单纯形法决不选择一个人工变量作为进基变量。

4.6-5 考虑如下问题。

$$\text{Max } Z = 90x_1 + 70x_2$$

$$\text{s. t. } 2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 - x_2 \geq 2$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

- (a) 图解证明这个问题没有可行解。
 C(b) 用基于单纯形法的计算机软件包证明这个问题无可行解。

- I(c) 用大 M 单纯形法一步一步求解证明这个问题无可行解。
 I(d) 用两阶段法的第一阶段重复(c)。

4.6-6 按照习题 4.6-5 的要求完成下题。

$$\text{Min } Z = 5000x_1 + 7000x_2$$

$$\text{s. t. } -2x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1 - 2x_2 \geq 1$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

4.6-7 考虑如下问题。

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

$$\text{s. t. } x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 20$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 50$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

(a) 用大 M 法, 建立完整的首个单纯形表, 确定相应的初始(人工)BF 解, 并确定初始进基变量和出基变量。

I(b) 用单纯形法一步一步求解。

I(c) 用两阶段法, 建立第一阶段完整的首个单纯形表, 确定相应的初始(人工)BF 解, 并确定初始进基变量和出基变量。

I(d) 一步一步地完成第一阶段。

(e) 建立第二阶段完整的首个单纯形表。

I(f) 一步一步地完成第二阶段求解。

(g) 比较(b)和(d)、(f)中得到的一系列 BF 解, 对于通过引入人工变量建立的人工问题, 这些解中哪些是可行的? 对真实问题哪些解是可行的?

C(h) 用基于单纯形法的软件包求解问题。

4.6-8 考虑如下问题。

$$\text{Min } Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$\text{s. t. } 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 420$$

$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 280$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

I(a) 用两阶段法,一步一步地完成第一阶段。

C(b) 用基于单纯形的软件包建立并求解第一阶段的问题。

I(c) 一步一步地完成第二阶段求解原始问题。

C(d) 用基于单纯形的软件包求解原始问题。

4.6-9* 考虑如下问题。

$$\text{Min } Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$\text{s. t. } 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 60$$

$$3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 120$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

I(a) 用大 M 单纯形法一步一步求解这个问题。

I(b) 用两阶段法一步一步求解这个问题。

(c) 比较(a)和(b)中得到的一系列 BF 解,对于通过引入人工变量建立的人工问题,这些解中哪些是可行的? 对真实问题哪些解是可行的?

C(d) 用基于单纯形的软件包求解这个问题。

4.6-10 按照习题 4.6-9 的要求完成下题。

$$\text{Min } Z = 3x_1 + 2x_2 + 7x_3$$

$$\text{s. t. } -x_1 + x_2 = 10$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \geq 10$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

4.6-11 标出以下每个叙述是正确还是错误,然后解释你的答案。

(a) 当一个线性规划模型有一个等式约束,一个人工变量将被引入这个约束,是为了在启动单纯形法时,能有明确的对原始问题可行的初始基解。

(b) 当通过引入人工变量建立一个人工问题时,用大 M 法如果人工问题最优解中的所有人工变量都等于 0,那真实问题就没有可行解。

(c) 两阶段法通常在实践中应用是因为它通常到达最优解时比大 M 法需要较少的迭代。

4.6-12 考虑如下问题。

$$\text{Max } Z = x_1 + 4x_2 + 2x_3$$

$$\text{s. t. } 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10$$

且

$$x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

(x_1 没有非负约束)

(a) 将这个问题改写,使所有变量都有非负约束。

D,I(b) 用单纯形法一步一步求解这个问题。

C(c) 用基于单纯形的软件包求解这个问题。

4.6-13* 考虑如下问题。

$$\text{Max } Z = -x_1 + 4x_2$$

$$\text{s. t. } -3x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_2 \geq -3$$

(x_1 无下界约束)

D,I(a) 图解这个问题。

(b) 重新改写这个问题使其只有两个约束条件并且所有变量没有非负约束。

D,I(c) 用单纯形一步一步求解这个问题。

4.6-14 考虑如下问题。

$$\text{Max } Z = -x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\text{s. t. } 3x_2 + x_3 \leq 120$$

$$x_1 - x_2 - 4x_3 \leq 80$$

$$-3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 100$$

(没有非负约束)

(a) 将这个问题改写,使所有变量都有非负约束。

D, I(b) 用单纯形法一步一步求解这个问题。

C(c) 用基于单纯形的计算机软件包求解这个问题。

4.6-15 本章对于目标函数为求最大值的线性规划问题,描述了单纯形法并应用于该问题。4.6节描述了将求最小值的问题转化为等价的求最大值的问题以便用单纯形法求解。对于求最小值问题的另一个选项就是对本章描述的单纯形法的规则做稍许修改,以能够直接应用该算法。

(a) 描述将需要进行的这些修改。

(b) 用大M法,应用(a)中修改的方法直接手工求解如下问题(不要用你的运筹课件)。

$$\text{Min } Z = 3x_1 + 8x_2 + 5x_3$$

$$\text{s. t. } 3x_2 + 4x_3 \geq 70$$

$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq 70$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

4.6-16 考虑如下问题。

$$\text{Max } Z = -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4$$

$$\text{s. t. } x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 4$$

$$x_1 - x_3 + x_4 \geq -1$$

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2$$

且

$$x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

(x_1 无非负约束)

(a) 将这个问题改写,使其符合3.2节描述线性规划问题的标准形式。

(b) 用大M法,建立完整的首个单纯形表,确定相应的初始(人工)BF解,并确定初始进基变量和出基变量。

(c) 用两阶段法,建立第一阶段首个单纯形表的第0行。

C(d) 用基于单纯形的计算机软件包求解这个问题。

I 4.6-17 考虑如下问题。

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

$$\text{s. t. } x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 20$$

$$15x_1 + 6x_2 - 5x_3 \leq 50$$

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 30$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

用单纯形法一步一步地证明这个问题没有任何可行解。

4.7-1 参考图4.10和3.1节中Wyndor Glass公司问题各个右端项的允许范围结果,用图解分析证明每个允许范围是正确的。

4.7-2 重新考虑习题4.1-5中模型。理解各个约束条件的右端项为各资源的可用数量。

I(a) 用如图4.8中的图形分析确定各资源的影子价格。

I(b) 用图形分析来对这个模型进行灵敏度分析。特别地,通过检查确定最优解的图形,检查模型中的每个参数决定是否为灵敏参数(最优解不变时参数值不变)。

I(c) 用如图4.9中的图形分析方法,决定每个 c_j 值(目标函数中 x_j 的系数)的允许范围。在该范围当前最优解将保持最优。

I(d) 只改变一个 b_i 值(约束条件*i*的右端项)改变相应的约束边界。如果当前最优CPF解位于这个约束边界上,这个CPF解也将变化。用图形分析确定每个 b_i 值的允许范围。在该范围这个CPF解将保持可行。

C(e) 用基于单纯形法的计算机软件包求解这个问题,验证(a)、(c)、(d)中你的答案,然后生成灵敏度分析信息。

4.7-3 给你如下线性规划问题。

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 2x_2$$

$$\text{s. t. } 2x_1 \leq 16 \text{ (资源 1)}$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 17 \text{ (资源 2)}$$

$$x_2 \leq 5 \text{ (资源 3)}$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

D,I(a) 图解该问题。

(b) 用图形分析找出资源的影子价格。

(c) 求出最优值 Z 增加15,资源1将需要再增加多少个单位。

4.7-4 考虑如下问题。

$$\text{Max } Z = x_1 - 7x_2 + 3x_3$$

$$\text{s. t. } 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4 \text{ (资源 1)}$$

$$4x_1 - 3x_2 \leq 2 \text{ (资源 2)}$$

$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3 \text{ (资源 3)}$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

D,I(a) 用单纯表法一步一步地求解该问题。

(b) 确定3种资源的影子价格并描述它们的意义。

C(c) 用基于单纯形法的软件包求解问题并生成灵敏度信息。用该信息确定每种资源的影子价格、每个目标函数系数的许可范围和每个右端项的许可范围。

4.7-5* 考虑如下问题。

$$\text{Max } Z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

$$\text{s. t. } -x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \text{ (资源 1)}$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 2 \text{ (资源 2)}$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 12 \text{ (资源 3)}$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

D,I(a) 用单纯表法一步一步地求解该问题。

(b) 确定 3 种资源的影子价格并描述它们的意义。

C(c) 用基于单纯形法的软件包求解问题并生成灵敏度信息。用该信息确定每种资源的影子价格、每个目标函数系数的许可范围和每个右端项的许可范围。

4.7-6 考虑如下问题。

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4$$

$$\text{s. t. } 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 24 \text{ (资源 1)}$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 36 \text{ (资源 2)}$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

D,I(a) 用单纯表法一步一步地求解该问题。

(b) 确定两种资源的影子价格并描述它们的意义。

C(c) 用基于单纯形法的软件包求解问题并生成灵敏度信息。用该信息确定每种资源的影子价格、每个目标函数系数的许可范围和每个右端项的许可范围。

4.8-1 用你的 IOR Tutorial 中的内点法求解习题 4.1-4 中的模型。从 Option 菜单中选择 $\alpha=0.5$, 用 $(x_1, x_2) = (0.1, 0.4)$ 作为初始试验解, 然后进行 15 次迭代。画出可行域的图形, 然后描出试验解穿过可行域的轨迹。

4.8-2 对习题 4.1-5 中的模型重复习题 4.9-1。

案 例

案例 4.1 织物与秋装

从她办公楼的 10 楼, Katherine Rally 注视着成群的纽约人奋斗在挤满了黄色出租车的街道和杂乱摆放着热狗摊的人行道上。在这个炎热的 7 月的一天, 她特别注意各类女人的时装, 猜测着她们在秋季将会选择穿什么。她的想法并不是随便想想, 这些想法对她的工作非常重要, 因为她拥有并管理 TrendLines 公司, 一个精品女装公司。

今天是一个特别重要的日子, 因为她必须与生产经理 Ted Lawson 见面, 要制定下个月的秋装生产计划。具体地说, 她必须根据每个工厂的生产能力、有限的资源和需求预计, 确定她将要生产的每种时装系列的产量。下个月产量的精确计划对于秋季销售是非常重要的, 因为下个月生产的服装系列 9 月份将会出现在商店中, 女人通常会在 9 月秋装最先上市时大量购买。

她转身回到堆放杂乱的玻璃桌前并注视着盖在上面的大量文件。她的目光徘徊在几乎 6 个月前就设计出的时装款式上, 每种款式的需要原料的清单, 以及在时装表演上通过消费者调查得出的对各款服装需求预测的清单上。她想起设计秋季时装线并在纽约、米兰和巴黎的时装发布会上展出时那些繁忙并有时像恶梦一样的日子。最终, 她为秋装系列作品付给她团队的 6 个设计师共 860000 美元。加上雇用模特、发型师、化妆师, 缝制和修改服装、制作布景、时装表演设计和排练、租用会议厅等, 3 场发布会的每场都另外花费了 2700000 美元。

她研究了服装款式和原料需求。她的秋装系列中包括正装和休闲装。她根据服装原料质量和成本、人力和机器成本、种类需求和 TrendLines 品牌的声誉, 确定了每种服装的售价。

秋季正装包括:

服装种类	原料消耗	价格/美元	人力与机器成本/美元
羊毛宽松长裤	3码羊毛,2码醋酸面料	300	160
羊绒衫	1.5码羊绒	450	150
丝绸衬衫	1.5码丝绸	180	100
真丝背心	0.5码丝绸	120	60
西服裙	2码人造丝,1.5码醋酸面料	270	120
羊毛外套	2.5码羊毛,1.5码醋酸面料	320	140

秋季休闲装包括:

服装种类	原料消耗	价格/美元	人力与机器成本/美元
天鹅绒裤	1.5码天鹅绒,2码醋酸面料	350	175
棉毛衫	1.5码棉织物	130	60
棉裙	0.5码棉织物	75	40
天鹅绒衫	1.5码天鹅绒	200	160
纽扣衬衫	1.5码人造丝	120	90

她知道这些,为了下个月,她已订了45000码的羊毛、28000码的醋酸面料、9000码的羊绒、18000码的丝绸、30000码的人造丝、20000码的天鹅绒和30000码棉织物用于生产。原料价格如下:

原 料	每码价格/美元	原 料	每码价格/美元
羊毛	9	人造丝	2.25
醋酸面料	1.5	天鹅绒	12
羊绒	60	棉织物	2.5
丝绸	13		

生产中未使用的原材料可退给织物批发商,全价返还涉及的材料款项,但零碎的原料片不能再退给批发商。

丝绸衬衫和棉毛衫会有剩余边角料。具体地,生产一件丝绸衬衫或一件棉毛衫分别需要2码丝绸和棉织物。在这2码中,1.5码用于丝绸衬衫或者棉毛衫,剩下0.5码成了边角料。她不想浪费原料,所以计划用丝或棉的长方形余料分别生产一件真丝背心或一条棉裙。因此,在生产一件丝绸衬衫的同时会生产出一件真丝背心。同样,生产一件棉套衫的同时生产出一条棉裙。注意:不需要通过生产丝绸衬衫和棉毛衫,也可以单独生产真丝背心和棉裙。

需求预测表明,有些品种的服装需求有限。具体来说,因为天鹅绒裤和天鹅绒衫是一时的流行风尚,TrendLines预测只能卖出5500条天鹅绒裤和6000件天鹅绒衫。TrendLines并不想比预测需求量生产更多,因为一旦裤子和衫过时了,公司就不能卖掉它们。TrendLines可以比预测需求量生产的少,因为公司并不需要满足需求。羊绒衫需求量也有限,因为它相当贵,TrendLines预计最多能卖出4000件。丝绸衬衫和真丝背心需求也有限,因为大多数女人认为丝绸很难打理,TrendLines预计最多可卖12000件丝绸衬衫和15000件真丝背心。

需求预测还表明,羊毛宽松长裤、西服裙和羊毛外套需求很大,因为它们是各种职业套装的

基本搭配。具体地说,羊毛宽松长裤需求为 7000 条、羊毛外套需求为 5000 件。Katherine 希望满足这两种服装至少 60% 的需求来保住她的忠实顾客基础使将来不丢失生意。尽管西服裙需求无法估计,但 Katherine 觉得至少应生产 2800 条。

(a) Ted 正试图使 Katherine 相信不要生产天鹅绒衫。因为这种时装的需求相当小。他认为光这种时装本身就需要固定设计和其他费用共 500000 美元。出售这种时装的净贡献(服装价格-原料成本-人工成本)能够弥补固定成本。每件天鹅绒衫净贡献 22 美元,他认为,给定这一净贡献值,即使满足最大需求也不会产生一点利润。你如何看待他的观点?

(b) 在给定产量、资源和需求约束下,建立并求解利润最大化的线性规划模型。

在做出最终决策之前,除非另有说明,Katherine 打算独自探究以下问题。

(c) 织物批发商通知 Katherine 天鹅绒不能退回,因为需求预测表明未来天鹅绒的需求将会下降。因此,Katherine 将无法得到天鹅绒的返还款。这个因素会怎样改变生产计划?

(d) 针对(b) 和 (c)求得的解有区别,直观的经济解释是什么?

(e) 裁缝在缝制衣袖和把它们缝到羊毛外套时遇到了困难,因为外套的款式有奇怪的形状,而粗重的羊毛原料很难切割和缝制。缝一件羊毛外套而增加的人工时间使每件外套的人工和设备成本增加 80 美元。给出这一最新成本,各种时装应分别生产多少件才能使利润最大化?

(f) 织物批发商通知 Katherine 由于另一织物顾客取消了订单,她可得获得额外 10000 码的醋酸面料。各种时装 TrendLines 应分别生产多少件才能使利润最大化?

(g) TrendLines 假设 9 月和 10 月未卖出的各类服装,可以在 11 月的一次大的展销会上以原价的 60% 卖出。因此,它可以在 11 月的展销会上无限量销售各种服装(前面提到的需求上限只与 9 月和 10 月的销售有关)。应如何制定新的生产计划以使利润最大化?

案例 4.2 新前沿

美银将很快开始为其用户提供网上银行。为了制定其通过互联网提供服务的计划,将在三类社团 4 个不同年龄组的人群中开展调查。美银正在制定一些约束条件关于被调查每个年龄组和每个社团范围应该有多大。需要用线性规划来制定一个调查计划,满足所有不同场景下的调查约束并使总成本最小。

案例 4.3 给学校安排学生

在决定关闭其一所中学后,斯普林菲尔德教育局需要将所有下一届中学学生重新安排到 3 个保留的学校。许多学生将乘坐公共汽车,因此最小化总的乘车成本将是一个目标。另一个目标是对于步行与骑车上学的学生,最小化其不方便性和安全担忧。

已知 3 所学校的能力,并需要大致平衡每个学校中 3 个年级的学生数量,如何用线性规划确定每个学校应分配城市 6 个住宅区中每个区的学生数量?如果每一个住宅区必须整个被安排到同一所学校将会发生什么?(该示例将在案例 7.3 和案例 12.4 中继续。)