

第5章 单纯形法

第4章介绍了单纯形方法的基本技巧。现在我们将深入分析一下更加具体的方法。5.1节讨论构成单纯形法基础的几何与代数的基本性质。然后讨论单纯形法的矩阵形式,它大大简化了计算机的执行过程。接下来我们给出有关单纯形法的基本规律,使我们能够了解如何从初始单纯形表变化到最终单纯形表中。该规律是第6章(对偶理论)和7.1节~7.3节(灵敏度分析)的基础。本章然后介绍改进单纯形法,该方法将单纯形法的矩阵形式进一步流程化。此外,单纯形法的软件算法是基于改进的单纯形法。

5.1 单纯形法基础

4.1节介绍了角点可行解及其在单纯形法中所起的关键作用,在4.2节和4.3节中我们把这些几何概念与单纯形法的代数联系起来。然而,这些都是基于Wyndor Glass公司问题背景下,只有两个决策变量,所以可以直观地进行几何解释。当我们解决更复杂的问题时,这些原理如何才能推广到较高的维数呢?本节我们将讨论这个问题。

我们从介绍 n 维变量的线性规划问题的一些基本术语开始。在我们做这些介绍时你会发现,参考图5.1(与图4.1相同)在二维空间($n=2$)中解释这些定义很有帮助。

5.1.1 术语

我们已经很清楚任何线性规划问题的最优解一定位于可行域的边界上。因为边界是一个几何概念,所以先用定义阐明可行域的边界怎样用代数表示。

任何约束的约束边界方程都是通过把“ \leq ”“ $=$ ”或“ \geq ”转化成“ $=$ ”获得的。

因此,函数约束条件的约束边界方程形式就是 $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$,而非负约束条件的约束边界方程形式是 $x_j = 0$ 。在 n 维空间中,每一个这样的方程定义了一个“平滑”的几何图形,称为超平面,类似于二维空间中的直线、三维空间中的平面。这个超平面用对应的约束形成了约束边界(Constraint Boundary)。当约束符号为“ \leq ”或“ \geq ”时,边界约束条件把所有满足约束条件的点(所有位于一侧的点,包含约束边界)和不满足约束条件的点(所有位于约束边界另一侧的点)区分开。当约束符号为“ $=$ ”时,只有在约束边界上的点满足约束条件。

例如,Wyndor Glass公司问题有5个约束(3个约束函数和2个非负约束),所以它有5个边界约束方程,如图5.1所示。由于 $n=2$,定义这些约束边界方程的超平面为简单直线。因此,5个约束条件的约束边界为如图5.1所示的5条直线。

可行域的边界仅包括满足一个或多个约束边界方程的可行解。

在几何上,可行域边界上的任意点都位于一个或多个约束边界方程所定义的超平面上。在图5.1中,边界由5条粗线组成。

下一步,我们会给出一个 n 维空间中“角点可行解”的一般定义。角点可行解(CPF),是指不位于任何其他两个可行解连接的线段上的可行解。

如定义所述,若有可行解位于其他两个可行解连接的线段上,那么,这个可行解就不是

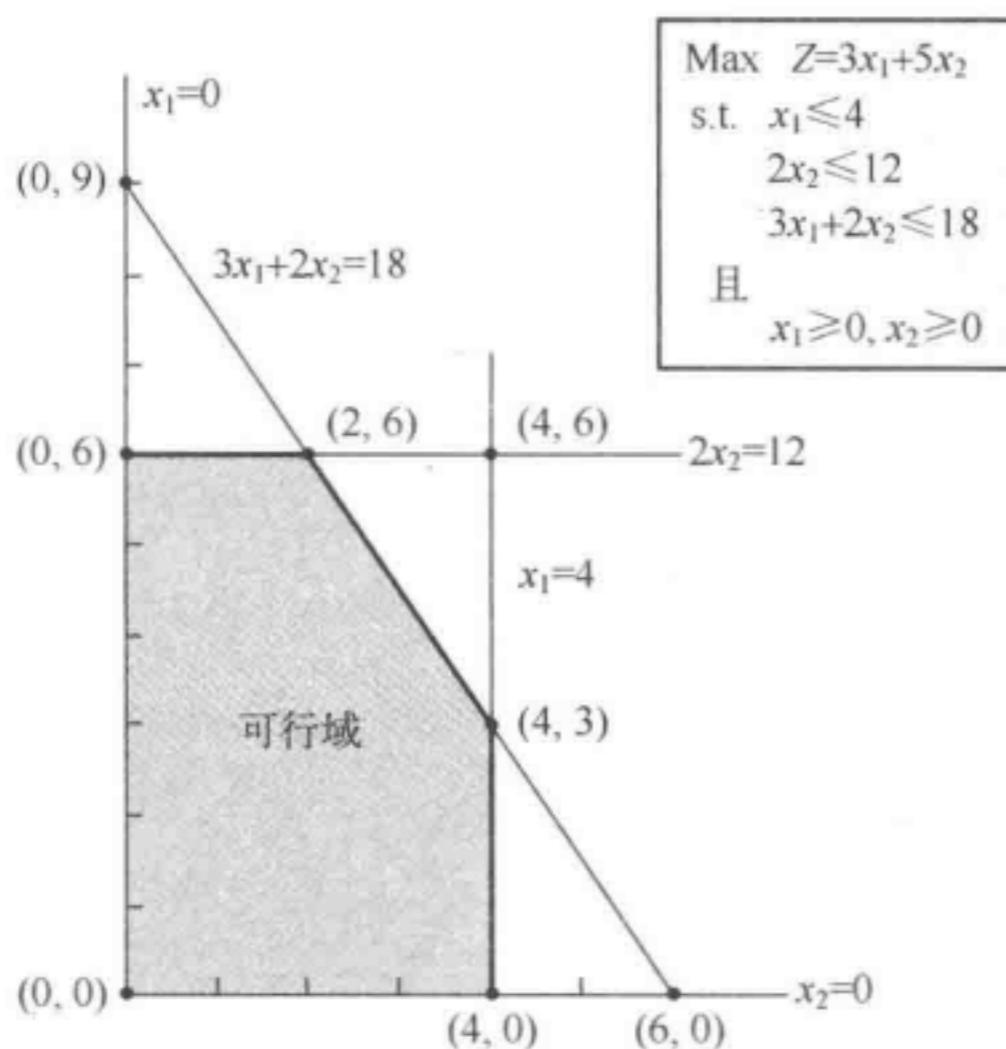


图 5.1 Wyndor Glass 公司问题的约束边界、约束边界方程和角点解

CPF 解。例如, $n=2$, 图 5.1 中, 点 $(2,3)$ 不是 CPF 解, 因为它位于许多条这样的线段上, 如点 $(0,3)$ 和点 $(4,3)$ 连接的线段。类似地, $(0,3)$ 也不是一个 CPF 解, 因为它位于点 $(0,0)$ 和点 $(0,6)$ 连接的线段上。但是, $(0,0)$ 是一个 CPF 解, 因为不可能找到其他两个可行解位于点 $(0,0)$ 的两端。

当决策变量的个数 n 大于 2 或 3 时, CPF 的定义对确定解就不方便了。因此, 运用代数方法对解释这种问题是有效的。在 Wyndor Glass 公司的例子中, 图 5.1 中每一个 CPF 解都位于两条约束线段交点上, 即有两个边界约束方程的方程组的公共解。表 5.1 总结了这些解的情况, 其中定义方程指的是约束边界方程, 由这些方程得出(定义)所列出的 CPF 解。

在任何有 n 维向量的线性规划问题中, 每一个 CPF 解都位于 n 个约束边界的交点上, 即它是有 n 个约束边界方程的方程组的公共解。

然而, 这并不是说每个从 $n+m$ 个约束(n 个非负约束和 m 个函数约束)中选出的 n 个约束边界方程的组合都能产生一个 CPF 解。特别是, 这样一个方程组的公共解可能会不满足一个或多个没有被选中的另外 m 个约束。这种情况下, 它就是一个角点非可行解。

本例中有 3 个这样的解, 如表 5.2 所列。

表 5.1 Wyndor Glass 公司问题
每个 CPF 解的定义方程

CPF 解	CPF 解的定义方程
$(0,0)$	$x_1 = 0$ $x_2 = 0$
$(0,6)$	$x_1 = 0$ $2x_2 = 12$
$(2,6)$	$2x_2 = 12$ $3x_1 + 2x_2 = 18$
$(4,3)$	$3x_1 + 2x_2 = 18$ $x_1 = 4$
$(4,0)$	$x_1 = 4$ $x_2 = 0$

表 5.2 Wyndor Glass 公司问题中
角点非可行解的定义方程

角点非可行解	定义方程
$(0,9)$	$x_1 = 0$ $3x_1 + 2x_2 = 18$
$(4,6)$	$2x_2 = 12$ $x_1 = 4$
$(6,0)$	$3x_1 + 2x_2 = 18$ $x_2 = 0$

此外,一个 n 维约束边界方程组可能完全无解。在这个例子中发生了两次,即:① $x_1 = 0$ 和 $x_1 = 4$;② $x_2 = 0$ 和 $2x_2 = 12$ 。我们不考虑这样的方程组。

最后还有种可能(在这个例子中不会发生)是由于方程减少,一个 n 维约束边界方程组有多个解。你也不需要关注这种情况,因为单纯形方法绕过了这些困难。

还应当提到有可能在 n 个约束方程中有多于一个以上组合得到相同的角点解。例如,Wyndor Glass 公司问题中的 $x_1 \leq 4$ 约束若用 $x_1 \leq 2$ 替换,在图 5.1 中的 CPF 解 $(2, 6)$ 可以从 3 对约束方程中的任意一对中导出(这是在 4.5 节中讨论的不同内容的退化例子)。

对这个例子做总结,对 5 个约束和 2 个变量,有 10 对约束边界方程,其中 5 对变为 CPF 解(表 5.1),3 对变为角点非可行解的定义方程(表 5.2),2 对无解。

5.1.2 相邻 CPF 解

4.1 节介绍了相邻 CPF 解和它们在线性规划问题中的作用,我们现在来详细说明。

回顾第 4 章(当我们不考虑松弛变量、剩余变量和人工变量时)单纯形法从当前的 CPF 解转型它相邻的一个 CPF 解的每一次迭代,这个过程会沿着怎样的路径呢?相邻 CPF 解的真正意义是什么呢?首先我们把这些问题用几何来阐述,然后转到代数解释。

当 $n=2$ 时,这些问题很好回答。在这种情况下,可行域的边界由形成了多边形的几条相连的线段组成,如图 5.1 中 5 条粗线所示。这些线段就是可行域的边界。从每个 CPF 解引出的是这样的两条边界线,在其另一端就是一个相邻 CPF 解(注意:图 5.1 中,每一个 CPF 解是如何有两个相邻的 CPF 解)。在一次迭代中遵循的路径就是沿着该边界线从一端移动到另一端。在表 5.1 中,第一次迭代为沿边界从点 $(0, 0)$ 移动到点 $(0, 6)$ 。接着的下一步迭代是沿边界从点 $(0, 6)$ 移动到点 $(2, 6)$ 。表 5.1 中,每一次到相邻 CPF 解的移动都包含了一个定义方程组(约束边界方程组,依此方程组得到解)的变化。

当 $n=3$ 时,答案就显得更加复杂一些。为了帮助你想象将会发生什么,图 5.2 展示了当 $n=3$ 时的一个典型的可行域图形,这里的点为 CPF 解。这个可行域是个多面体而不是当 $n=2$ 时的个多边形(图 5.1)。因为约束边界现在是平面而不是直线,多面体的表面形成了可行域的边界,每个面都是满足其他约束条件的约束边界的一部分。注意:每个 CPF 解都取决于 3 个约束的交点(有时包括一些非负约束而形成约束边界 $x_1=0, x_2=0$ 和 $x_3=0$)。这些解也满足其他约束,而不满足一个或多个其他约束条件的交点则是角点非可行解。

图 5.2 中的粗线部分描述了单纯形法典型迭代的路径。点 $(2, 4, 3)$ 是开始迭代的当前 CPF 解,点 $(4, 2, 4)$ 是迭代结束后的新 CPF 解。点 $(2, 4, 3)$ 为 $x_2=4, x_1+x_2=6$ 和 $-x_1+2x_3=4$ 。3 个约束边界的交点,所以这 3 个方程是这个 CPF 解的定义方程。如果 $x_2=4$ 的定义方程被移走,另外两个约束边界(平面)的交界就会形成一条直线。这条直线上的两个线段,如图 5.2 所示为点 $(2, 4, 3)$ 到点 $(4, 2, 4)$ 的粗线,位于可行域的边界上。这条线以外的点都是不可行的。这条线段就是可行域的边界,它的端点 $(2, 4, 3)$ 和点 $(4, 2, 4)$ 就是相邻 CPF 解。

当 $n=3$ 时,所有的可行域的边界都是以这种

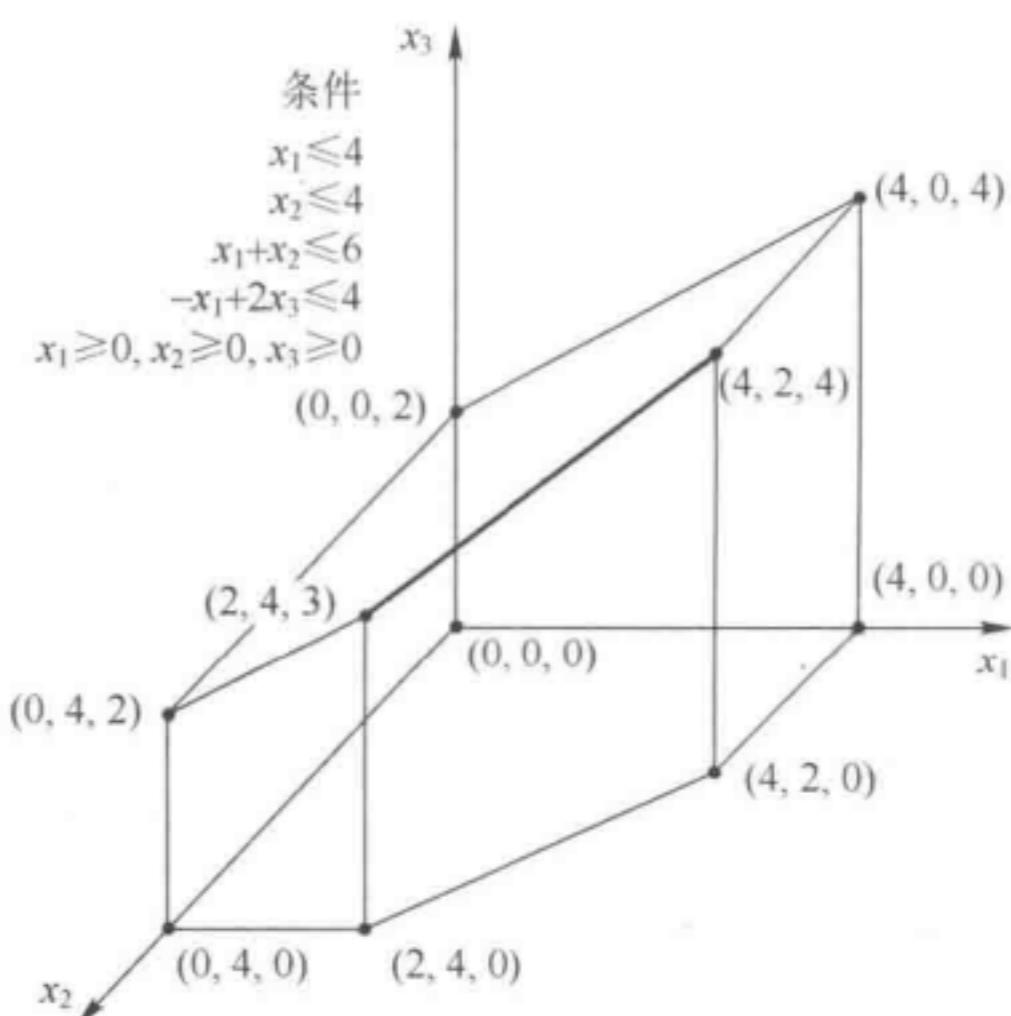


图 5.2 3 变量线性规划问题的可行域和 CPF 解

方式形成的可行线段,它位于两个约束边界的交界处,边界的两个端点就是相邻 CPF 解。在图 5.2 中,可行域由 15 条边界构成,这样就有 15 对相邻 CPF 解。对于当前 CPF 解(2,4,3),有 3 种方法来移走这 3 个定义方程的一个来得到另外两个约束方程的交界,所以从点(2,4,3)就可以引出 3 个边界。点(4,2,4)、点(0,4,2)和点(2,4,0)就是由这 3 个边界分别引出的,它们就是点(2,4,3)的相邻 CPF 解。

下步迭代中,单纯形法选择了 3 条边界中的一个,如图 5.2 中的粗线段所示,然后沿着这条边界移动,从点(2,4,3)直移到第一个新的约束边界 $x_1 = 4$ 的另一个端点上(我们不能继续沿着这条直线到下一个约束边界 $x_2 = 0$,因为这样就得出了一个角点非可行解(6,0,5))。这两个边界与新的约束边界的交点即为新的 CPF 解(4,2,4)。

当 $n > 3$ 时,相同的原理可以推广到更高的维数,除非约束边界为超平面而不是平面。

考虑任何一个具有 n 个决策变量和一个有界的可行域的线性规划问题。一个 CPF 解位于 n 个约束边界的交点上(并且也满足其他约束)。一个可行域的边界是一条可行的线段,它位于 $n-1$ 个约束边界线的交界处,该边界线的每一个端点都处于另一个约束边界上(所以这些端点为 CPF 解)。如果连接两个 CPF 解的线段为可行域的边界,那么,这两个 CPF 解就是相邻的。从每个 CPF 解引出的 n 条这样的边界,每条边界都可以得出 n 个相邻 CPF 解之一。单纯形法的每一次迭代就是从当前 CPF 解沿这 n 条边界线之一移动到相邻的一个 CPF 解。

当从几何视角转到代数视角时,约束边界的交点就转化为约束边界方程的公共解了。得出(定义)了一个 CPF 解的 n 个边界约束方程就是它的定义方程,去掉其中一个方程就得到了一条直线,其可行部分就是该可行域边界线段。

下面分析一下 CPF 解的重要性质,然后阐述所有这些原理的内涵解释单纯形法。然而,由于你才接触到上面的总结,还是让我们预习一下它的含义。当单纯形法选择了一个入基变量时,它的几何解释就是选择了从当前 CPF 解引出的移动所遵循的一条边。从 0 开始增加这个变量值(同时相应改变其他基变量值)相当于解点沿着这条边移动。使一个基变量(出基变量)减少直到 0 时,相应地到达了位于可行域边界另一端的第一个新约束边界。

5.1.3 CPF 解的性质

我们现在关注 CPF 解的 3 个主要性质,对任何有可行解和一个有界可行域的线性规划问题都成立。

性质 1: (a) 如果只有一个最优解,它一定是 CPF 解。(b) 如果有许多最优解(在有界可行域中),至少两个必为相邻 CPF 解。

性质 1 从几何视角来看更加直观。首先考虑(a)情况,在 Wyndor Glass 公司问题的例子中(图 5.1)最优解(2,6)就是 CPF 解。注意:得出这个结果的例子没有什么特别之处。任何只有一个最优解的问题,总是可能使目标函数线(超平面)提升,直到在可行域的一角触到一点(最优解)。

我们现在给出此项的代数证明。

对性质 1 的(a)情况证明:我们用反证法给予证明,假设只有一个最优解但它不是 CPF 解。我们会在下面说明这个假设会得出矛盾结论从而不可能是正确的(这个假设的最优解用 x^* 表示,目标函数值用 Z^* 表示)。

回顾 CPF 解的定义(不位于任何其他两个可行解连接的线段上的可行解)。由于假设最优解 x^* 不是 CPF 解,这就意味着必定存在另外两个这样的可行解,其连线中一定包含这个最优

解。设这两个可行解分别为 x' 、 x'' , 用 Z_1 、 Z_2 分别表示它们各自的目标函数值。当 $0 < \alpha < 1$ 时, x' 、 x'' 连成的线段上其他的点为

$$x^* = \alpha x'' + (1-\alpha)x'$$

这样

$$Z' = \alpha Z_2 + (1-\alpha)Z_1$$

因为权数 α 与 $1-\alpha$ 之和为 1, 那么, Z^* 、 Z_1 、 Z_2 相比较可能性只有① $Z^* = Z_1 = Z_2$; ② $Z_1 < Z^* < Z_2$; ③ $Z_1 > Z^* > Z_2$ 。第一种可能性表示 x' 和 x'' 都为最优解, 这与只有一个最优解的假设矛盾。后两种可能与 x^* (不是 CPF 解) 是最优解的假设矛盾。得出的结论为当只有一个最优解时, 它不可能不是 CPF 解。

现在考虑(b)情况, 在3.2节中, 在最优解的定义下, 我们曾经通过改变目标函数 $Z = 3x_1 + 2x_2$ 来证明过(b)情况(图3.5)。当我们图解这个问题时, 目标函数线持续上移直到包含连接两个 CPF 解 $(2, 6)$ 和 $(4, 3)$ 的线段。同样的事情也会在多维情况下发生, 除非目标函数超平面持续上移直到包含连接两点(或多点)的相邻 CPF 解的线段。这样, 所有的最优解都可以通过对最优 CPF 解的加权平均而获得(这种情形在习题4.5-5和习题4.5-6中有进一步描述)。

性质1的真正意义在于它极大地简化了寻找最优解的方法, 因为我们只需考虑 CPF 解。这种简化的过程将在性质2中被强调。

性质2: 只有有限个 CPF 解。

这条性质在图5.1和图5.2中已经被证实。图5.1中只有5个 CPF 解, 图5.2中有10个。下面分析为什么解的个数是有限的, 其实每一个 CPF 解都是 $m+n$ 个约束边界方程中的 n 个方程公共解。 $m+n$ 个方程中每次取 n 个不同方程的组合数为

$$\binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$$

这是一个有限的数目。因此, 这个数目即为 CPF 解个数的一个上限。在图5.1中, $m=3$, $n=2$, 所以只有10组由两个方程组成的方程组, 但只有5组能得出 CPF 解。在图5.2中, $m=4$, $n=3$, 有35组由3个方程组成的方程组, 但只有10组能得出 CPF 解。

性质2指出, 原则上详尽的列举就可以得到一个最优解, 即寻找并比较所有的有限个 CPF 解。但是, CPF 解的有限个数也就可能是 CPF 解无限多的个数(在实际应用中)。例如, 一个相当小的只是 $m=50$, $n=50$ 线性规划问题, 就要求解 $\frac{100!}{(50!)^2} \approx 10^{29}$ 组方程组。相反, 在这种规模的问题中, 单纯形法只需要测试大约100个 CPF 解。可以获得这么大量的节约是经过4.1节中最优性检验的。性质3将再次说明。

性质3: 如果一个 CPF 解没有相邻 CPF 解比它更优(以 Z 来测量), 那么, 就不存在任何更好的 CPF 解。这样, 假定这个问题至少有一个最优解(由问题具有可行解和一个有界的可行域来保证), 这个 CPF 解就是最优解(由性质1)。

为说明性质3, 考虑图5.1中的Wyndor Glass公司问题。CPF解 $(2, 6)$ 的相邻 CPF 解为 $(0, 6)$ 和 $(4, 3)$, 它们的 Z 值都不比点 $(2, 6)$ 的 Z 值更好。这个结果表明, 其他的 CPF 解 $(0, 0)$ 和 $(4, 0)$ 都不会优于 $(2, 6)$, 所以 $(2, 6)$ 必为最优解。

相反, 图5.3给出了一个绝不会在线性规划问题中发生的可行域(因为过点 $\left(\frac{8}{3}, 5\right)$ 的约束

边界线的延长会切掉部分区域),而且这违背了性质3。除了可行域扩大到 $\left(\frac{8}{3}, 5\right)$ 以外,这里描述的问题同 Wyndor Glass 公司问题一样(包括相同的目标函数)。因此,(2,6)的相邻 CPF 解为(0,6)和 $\left(\frac{8}{3}, 5\right)$,同样都没有(2,6)更优。然而,另一个 CPF 解(4,5)要优于(2,6),这就违背了性质3。原因就在于可行域的边界从(2,6)到 $\left(\frac{8}{3}, 5\right)$,然后向外弯折到(4,5),超出了过点(2,6)的目标函数线。

关键问题是图 5.3 所示的情况在线性规划中是绝不可能发生的。图 5.3 中的可行域意味着约束条件 $2x_2 \leq 12, 3x_1 + 2x_2 \leq 18$,要求 $0 \leq x_1 \leq \frac{8}{3}$ 。然而,在条件 $\frac{8}{3} \leq x_1 \leq 4$ 下,约束 $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ 被 $x_2 \leq 5$ 所取替了。这种“条件约束”在线性规划中是不允许的。

性质3适用于所有线性规划问题的基本原因在于可行域具有凸集。对具有两个变量的线性规划问题,凸集的性质表示可行域内部每个 CPF 解的角度小于 180° 。例如,图 5.1 中,点(0,0)、点(0,6)和点(4,0)角度都是 90° ,点(2,6)和点(4,3)的角度介于 90° 和 18° 之间。相反,图 5.3 中的可行域不是一个凸集,因为点 $\left(\frac{8}{3}, 5\right)$ 的角度大于 180° 。这种“向外弯曲”大于 180° 的角度情况在线性规划中不可能发生。在更高维数时,概念“不会向外弯曲”(凸集的基本性质)依然成立。

为了更明确“凸可行域”的特征,考虑穿过最优 CPF 解的目标函数的超平面(在初始 Wyndor Glass 公司问题的例子中,这个超平面是过点(2,6)的目标函数线)。所有的相邻解((0,6)和(4,3))必位于超平面上或下侧(以 Z 衡量)。可行域为凸集意味着它的边界不可能“向外弯曲”越过相邻 CPF 解得到另一个位于超平面之上的 CPF 解,所以性质3成立。

5.1.4 扩展形式问题的延伸

对于我们定义的标准形式下的任何线性规划问题(包括含有“ \leq ”形式的函数约束),添加剩余变量后的函数约束形式为

$$(1) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$

$$(2) \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2$$

...

$$(m) \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m$$

式中: $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ 为松弛变量。对于其他形式的线性规划问题,4.6 节介绍了通过引入人工变量等方法得到与此相同的形式(由高斯消元法得到的形式)的重要性。这样,原来的解 (x_1, x_2, \dots, x_n) 就被相应的松弛变量或人工变量 $(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})$ 也可能是些剩余变量扩展了。这个扩展使得在 4.2 节中把基本解定义为扩展的角点解,把基本可行解(BF 解)(Basic

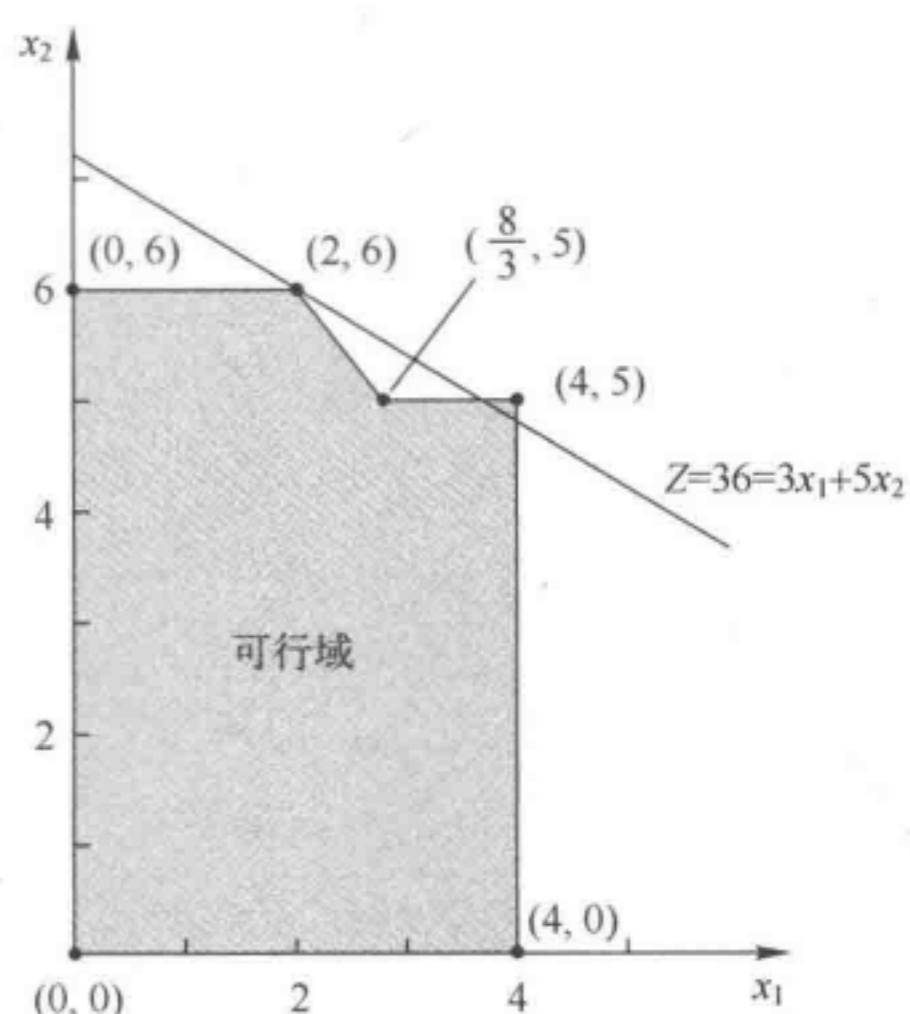


图 5.3 对 Wyndor Glass 公司
问题修订违背了性质3

Feasible Solutions (BF Solutions)) 定义为扩展的 CPF 解。因此,前述的 CPF 解的 3 个性质对于 BF 解也适用。

现在让我们明确一下基本解和角点解之间的代数关系。回顾一下,每一个角点解都是 n 个边界约束方程(我们称为定义方程)的公共解。关键问题是:在问题的扩展形式下,我们如何判断一个特定的约束边界方程是否为一个定义方程?每一个约束都有一个指示变量,它完全可以表示(依据它的值是否为 0)当前解是否满足这个约束边界方程。表 5.3 给出个总结。对于表中每一行的约束,任意只有当且仅当约束的指示变量(第五列)值为 0 时才满足相应的约束边界方程(第四列)。最后一行(“ \geq ”形式的函数约束),指示变量 $\bar{x}_{n+i} - x_{s_i}$,实际上是人工变量 \bar{x}_{n+i} 与剩余变量 x_{s_i} 的差。

表 5.3 约束边界方程的指示变量

约束类型	约束形式	扩展形式的约束	约束边界方程	指示变量
无约束	$x_j \geq 0$	$x_j \geq 0$	$x_j = 0$	x_j
函数(\leq)	$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$	$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \bar{x}_{n+i} \leq b_i$	$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$	\bar{x}_{n+i}
函数($=$)	$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$	$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \bar{x}_{n+i} = b_i$	$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$	\bar{x}_{n+i}
函数(\geq)	$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$	$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \bar{x}_{n+i} - x_{s_i} = b_i$	$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$	$\bar{x}_{n+i} - x_{s_i}$

注:指示变量 = 0 满足约束边界方程;指示变量 $\neq 0$ 不满足约束边界方程

这样,只要一个约束边界方程是角点解的定义方程之一,在问题的扩展形式里它的指示变量都为 0。每个这样的指示变量在相应的基本解中都称为非基变量。最终结论(在 4.2 节中介绍过)总结如下。

每一个基本解都有 m 个基变量,剩下的变量取值为非基变量(非基变量数为 n 与剩余变量个数之和)。基变量的取值是由扩展形式中 m 个方程的公共解得到的(非基变量值为 0),基本解为由非基变量做指示变量的 n 个定义方程的扩展角点解。特别地,只要求表 5.3 中第五列的指示变量为非基变量,第四列中的约束边界方程就是该角点解的定义方程(当约束条件为“ \geq ”的形式,两个增补变量 \bar{x}_{n+i} 和 x_{s_i} ,至少一个恒为非基变量,但仅当这两个变量同为非基变量时约束边界方程才成为定义方程)。

现在考虑基本可行解。注意:在问题的扩展形式中解为可行解的唯一条件是它满足方程组且所有变量都非负。

一个 BF 解也是基本解,其中所有 m 个基变量都非负(≥ 0)。

如果这 m 个基变量任何一个取值为 0,这个基本可行解就为退化的。

在当前的 BF 解中,有可能变量取值为 0 而不是非基变量(这种情况对应于一个 CPF 解除了满足 n 个定义方程外,还满足另一个约束边界方程)。这样,就有必要追踪哪个是非基变量(或者基变量组),而不是看它们的值是否为 0。

我们很早就注意到不是所有的 n 维方程组都能导出一个角点解,因为方程组要么无解,要么有多个解。类似地,不是所有的 n 个非基变量的组合都能得出基本解。然而,在单纯形法中,这些情况都被避免了。

为说明这些定义,再一次考虑 Wyndor Glass 公司的例子。它的约束边界方程和指示变量如表 5.4 所列。

表 5.4 Wyndor Glass 公司问题中约束边界方程的指示变量

约 束	扩展形式的约束	约束边界方程	指 示 变 量
$x_1 \geq 0$	$x_1 \geq 0$	$x_1 = 0$	x_1
$x_2 \geq 0$	$x_2 \geq 0$	$x_2 = 0$	x_2
$x_1 \leq 4$	(1) $x_1 + x_3 = 4$	$x_1 = 4$	x_3
$2x_2 \leq 12$	(2) $2x_2 + x_4 = 12$	$2x_2 = 12$	x_4
$3x_1 + x_2 \leq 18$	(3) $3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$	$3x_1 + 2x_2 = 18$	x_5

注:指示变量=0 满足约束边界方程;指示变量 $\neq 0$ 约束边界方程无效

扩展每一个 CPF 解(表 5.1)得出表 5.5 中的基本可行解。除了第一个解和最后一个解之外,表 5.5 把每一个相邻 BF 解顺次排列。注意:每一个情况下非基变量必然是定义方程的指示变量。这样,相邻 BF 解的差异缘于仅有 1 个非基变量的不同。同样,注意:当非基变量取值都为 0 时,每一个 BF 解都是扩展形式(表 5.4)下方程组的公共解。

表 5.5 Wyndor Glass 公司问题的基本可行解

CPF 解	定 义 方 程	BF 解	非 基 变 量
(0,0)	$x_1 = 0$ $x_2 = 0$	(0,0,4,12,18)	x_1 x_2
(0,6)	$x_1 = 0$ $2x_2 = 12$	(0,6,4,0,6)	x_1 x_4
(2,6)	$2x_2 = 12$ $3x_1 + 2x_2 = 18$	(2,6,2,0,0)	x_4 x_5
(4,3)	$3x_1 + 2x_2 = 18$ $x_1 = 4$	(4,3,0,6,0)	x_5 x_3
(4,0)	$x_1 = 4$ $x_2 = 0$	(4,0,0,12,6)	x_3 x_2

注:指示变量=0 满足约束边界方程;指示变量 $\neq 0$ 约束边界方程无效

类似地,3 个角点非可行解(表 5.2)得出表 5.6 中的 3 个基非可行解。

表 5.6 Wyndor Glass 公司问题的基本非可行解

角点非可行解	定 义 方 程	基 本 非 可 行 解	非 基 变 量
(0,9)	$x_1 = 0$ $3x_1 + 2x_2 = 18$	(0,9,4,-6,0)	x_1 x_5
(4,6)	$2x_2 = 12$ $x_1 = 4$	(4,6,0,0,-6)	x_4 x_3
(6,0)	$3x_1 + 2x_2 = 18$ $x_2 = 0$	(6,0,-2,12,0)	x_5 x_2

另外两组非基变量:① x_1 和 x_3 及 ② x_2 和 x_4 ,都不能得出基本解,因为令任意组变量取值为 0 都不能得出表 5.4 中给出的方程组(1)和方程组(3)的解。这个结论与本节开始部分得出的对应的约束边界方程不能得出解的结果相同。

单纯形法从 BF 解开始,然后迭代到更优的基本可行解直到达到最优解。那么,每一次迭代

是怎么到达相邻 BF 解的呢?

关于问题的原始形式,回顾一下从当前解移到相邻 CPF 解过程:①从 n 个定义当前解的约束边界中去掉一个约束边界(定义方程);②将当前解在可行的方向上沿着剩下的 $n-1$ 个约束边界交线(可行域的边缘)移动;③当到达第一个新的约束边界(定义方程)时停止。

同时,在我们新的术语中,单纯形法从当前解到达新的相邻 BF 解的步骤是:①从定义当前解的 n 个非基变量中去掉一个(作为入基变量);②通过把这个变量值从 0 增加(并调节其他基变量值使之仍满足方程组)来改变当前解,同时保持其他 $n-1$ 个非基变量值仍为 0;③当第一个基变量(出基变量)值达到 0(它的约束边界)时停止。在这两种解释中,步骤①里 n 个非基变量的选择都是通过选择一个 Z 的增加率最高(步骤②中确定)的变量(入基变量的单位增加量)。

表 5.7 列出了单纯形法中几何解释和代数解释之间紧密的对应关系。利用 4.3 节和 4.4 节给出的结果,第四列总结了 Wyndor Glass 公司问题中求解基本可行解的顺序,第三列列出了相应的 CPF 解。在第三列,注意每一次迭代是如何删除一个约束边界(定义方程)的,并增加一个新的约束边界以得到一个新的 CPF 解。类似地,注意第五列中每一次迭代是如何删除一个约束边界(定义方程)并增加一个新的约束边界以得到新的基本可行解。此外,被删除和增加的非基变量就是第三列中被删除和增加的定义方程的指示变量。最后一列显示了问题的扩展形式的初始方程组(不包括方程(0)),当前基变量用粗体表示。在每种情况下,注意如何把非基变量赋为 0 值,然后解这个方程组得到基变量的值,必然会得到与第三列对应的定义方程组相同的解(x_1 , x_2)的值。

表 5.7 Wyndor Glass 公司问题中单纯形法得到的解的顺序

迭代	CPF 解	定义方程	BF 解	非基变量	扩展形式下函数约束
0	(0,0)	$x_1 = 0$ $x_2 = 0$	(0,0,4,12,18)	$x_1 = 0$ $x_2 = 0$	$x_1 + x_3 = 4$ $2x_2 + x_4 = 12$ $3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$
1	(0,6)	$x_1 = 0$ $2x_2 = 12$	(0,6,4,0,6)	$x_1 = 0$ $x_4 = 0$	$x_1 + x_3 = 4$ $2x_2 + x_4 = 12$ $3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$
2	(2,6)	$2x_2 = 12$ $3x_1 + 2x_2 = 18$	(2,6,2,0,0)	$x_1 = 0$ $x_5 = 0$	$x_1 + x_3 = 4$ $2x_2 + x_4 = 12$ $3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$

5.2 单纯形法的矩阵形式

第 4 章中介绍的单纯形法(分别用的是代数形式或表格形式),可通过矩阵形式进一步阐述单纯形法理论和运算能力。我们先从表达线性规划问题的矩阵形式开始。

为帮助区分矩阵、向量和数量,我们始终用黑斜体大写字母来表示矩阵,黑斜体小写字母表示向量,自斜体字母表示数量。我们用黑体零(**0**)来表示零向量(向量的元素全部为 0),无论它是行向量还是列向量(上下文中应该已经明确)。但是正体的 0 仍然表示数字 0。

利用矩阵表示,我们在 3.2 节中给出的线性规划模型的标准形式就成为

$$\text{Max } Z = \mathbf{c} \mathbf{x}$$

$$\text{s. t. } A \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

式中: c 为行向量, $c = [c_1, c_2, \dots, c_n]$; $x, b, \mathbf{0}$ 都是列向量,即

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}; \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

A 为矩阵,即

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

为了得到问题的扩展形式,引入松弛变量的列向量,即

$$x_s = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$$

这样约束变为

$$[A, I] \begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix} = b$$

且

$$\begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

式中: I 为 $m \times n$ 单位矩阵;零向量 $\mathbf{0}$ 有 $n+m$ 个元素(我们在本节后讨论如何处理非标准形式的问题)。

5.2.1 求一个基本可行解

回顾一下,单纯形法的一般方法是为了得到系列更优的 BF 解直到得到最优解。单纯形法矩阵形式的一个关键是确立一种方法,即在确定其基变量和非基变量之后,如何求每一个新的 BF 解算法。给定这些变量,基本解为该 m 个方程 $[A, I] \begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix} = b$ 的解,在这里, $n+m$ 个元素 $\begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix}$ 中的 n 个非基变量被赋值为 0。通过赋予这 n 个变量 0 值后使其从方程中消去,剩下了含有 m 个未知数(基变量)的 m 个方程。方程的集合可以表示为

$$Bx_B = b$$

其中基变量向量为

$$x_B = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix}$$

是从 $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix}$ 消去非基变量后得到的。

从 $[\mathbf{A}, \mathbf{I}]$ 中消去非基变量对应的系数的列后得到的基矩阵为

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mm} \end{bmatrix}$$

(此外,采用单纯形法时, \mathbf{x}_B 的元素和 \mathbf{B} 的列可能会以不同的顺序给出。)

单纯形法仅介绍了像 \mathbf{B} 一样的非退化的基变量,这样 \mathbf{B}^{-1} 也总是存在的。所以,为了解出 $\mathbf{Bx}_B = \mathbf{b}$ 方程两边左乘 \mathbf{B}^{-1} : $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Bx}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ 。

由于 $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}$,基变量的解为

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

令 \mathbf{c}_B 表示目标函数中对应 \mathbf{x}_B 的一个系数列向量(包括松弛变量系数0),那么,该基本解的目标函数的值即为

$$Z = \mathbf{c}_B \mathbf{x}_B = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$$

为了说明这种求BF解的方法,再次以3.1节中的Wyndor Glass公司问题为例,用原单纯形法求解,如表4.8所列,本例中:

$$\mathbf{C} = [3, 5]; \quad [\mathbf{A}, \mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

参照表4.8,我们看到由单纯形法(原方法或修正的方法)得到BF解的顺序为迭代0:

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}$$

所以

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B = [0, 0, 0]$$

$$Z = [0, 0, 0] \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = 0$$

迭代1:

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}; \quad c_B = [0, 5, 0]; \quad Z = [0, 5, 0] \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 30$$

迭代2:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad c_B = [0, 5, 3]; \quad Z = [0, 5, 3] \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 36$$

5.2.2 当前方程组的矩阵形式

我们总结改进单纯形法之前的最后一个准备就是列出任一次迭代单纯形表格形式中方程组的矩阵形式。

对于原方程组,矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 1 & -c & 0 \\ 0 & A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ x \\ x_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

这个方程组同样在表 5.8 的第一列中列出。

单纯形法执行的代数运算(用一个常数乘以一个方程和把一个方程的倍数加到另一个方程上)用矩阵形式表示,就是用适当的矩阵左乘原方程组中方程的两边。这个矩阵应该与单位矩阵有相同的元素,除非代数运算的每一次倍乘都达到需要执行矩阵乘法运算的点。甚至在超过几次的一系列迭代的代数运算之后,在整个方程组中仍然能够用新方程组中我们已经知道的新右端项来推断出这个矩阵全部向量必定是(象征性)什么。特别是在任何一次迭代后,有 $x_B = B^{-1}b$ 和 $Z = c_B B^{-1}b$, 所以新方程组的右端项为

$$\begin{bmatrix} Z \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & c_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B B^{-1}b \\ B^{-1}b \end{bmatrix}$$

由于我们在方程组的原形式两边执行相同次序的代数运算,所以用与左乘原方程右端的相同的矩阵来左乘方程左端,这样,由于

$$\begin{bmatrix} 1 & c_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -c & 0 \\ 0 & A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & c_B B^{-1}A - c & c_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1}A & B^{-1} \end{bmatrix}$$

在任何次迭代之后得到方程组的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{c} & \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \\ 0 & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\ \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

表 5.8 中的第二个单纯形法也显示了相同的方程组。

表 5.8 矩阵形式下初始单纯形表和后续单纯形表

迭代	基变量	方程	系数			右端项
			Z	原变量	松弛变量	
0	Z x_B	(0) (1, 2, ..., m)	1 0	- c A	0 I	0 b
:	:	:	:	:	:	:
任意	Z x_B	(0) (1, 2, ..., m)	1 0	$\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{c}$ $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}$	$\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}$ \mathbf{B}^{-1}	$\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$ $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$

例:为了说明当前方程组的矩阵形式,我们要演示怎样对 Wyndor Glass 公司问题得到由迭代 2 导出的最终方程组。利用前述部分末尾迭代 2 中给定的 \mathbf{B}^{-1} 和 \mathbf{c}_B , 有

$$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} = [0, 5, 3] \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \left[0, \frac{3}{2}, 1 \right]$$

$$\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{c} = [0, 5, 3] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - [3, 5] = [0, 0]$$

同样,利用在前述部分结尾计算的值 $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$ 和 $Z = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$, 这个结果给出下面的方程组,与表 5.8 中最终单纯形表所示一致,即

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right| \quad \begin{bmatrix} Z \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

在任何一次迭代后,方程组集合的矩阵形式(见上一个例子的方框)提供了单纯形法矩阵形式执行的关键。这些方程显示的矩阵形式(或表 5.8 的下端部分)提供了直接计算将在观看方

程集合中出现的(对单纯形法代数形式)或在现有单纯形表中(对单纯形法的表格形式)所有数字的直接方法。单纯形法的3种形式将恰好提供相同的决策(入基变量、出基变量等)。这些形式之间的唯一差别是用于确定决策时需要计算数字的方法不同。正如下面总结的,矩阵形式提供了一种方便的方法,不需要对一系列方程组或单纯形表计算这些数字。

5.2.3 单纯形法矩阵形式的小结

1. 初始化

如第4章中描述的,引进松弛变量到初始的基变量,并由此得到初始的 x_B 、 c_B 、 B 和 B^{-1} ($B=I=B^{-1}$ 满足标准形式的假设时),然后进行最优化检验。

2. 迭代

第1步,确定入基变量。参见方程(0)中非基变量的系数,然后(如4.4节中所述)选择最大绝对值的系数为负的变量作为入基变量。

第2步,确定出基变量。应用矩阵表达式对 $B^{-1}A$ (原变量的系数)和 B^{-1} (松弛变量的系数)计算除了方程(0)之外每个方程入基变量的系数。同样利用前述的 $x_B=B^{-1}b$ (见第3步)的计算求得这些方程的右端项。然后,如同4.4节所述的应用计算最小比值选择出基变量。

第3步,确定新的基可行解。通过用 $[A, I]$ 中入基变量的相应列替换出基变量的列,更新基矩阵 B 。同样,在 x_B 和 c_B 中进行相应替换,然后,导出 B^{-1} 并使 $x_B=B^{-1}b$ 。

3. 最优性测试

应用矩阵表达式 $c_B B^{-1} A - c$ (对原变量的系数)和 $c_B B^{-1}$ (对松弛变量的系数)计算方程(0)中非基变量的系数,当或仅当所有这些系数均为非负时结束运算;否则,再进行迭代,找出下一个基可行解。

例:我们曾在本节开头对Wyndor Glass公司问题进行了上述矩阵运算,现在我们用完整的单纯形法矩阵将各部分综合到一起,即

$$c = [3, 5]; \quad [A, I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

初始化:

初始基变量为松弛变量,正如本节第一个例子中的迭代,即

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}; \quad c_B = [0, 0, 0]; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

最优性检验:

非基变量(x_1 和 x_2)的系数为

$$c_B B^{-1} A - c = [0, 0] - [3, 5] = [-3, -5]$$

这些负的系数说明初始的基可行解($x_B = b$)为非最优解。

迭代1:

因-5的绝对值较-3大,入基变量为 x_2 。仅对矩阵的有关部分进行运算, x_2 在除方程(0)之外其他方程中的系数为

$$B^{-1} A = \begin{bmatrix} - & 0 \\ - & 2 \\ - & 2 \end{bmatrix}$$

\mathbf{x}_B 所给出方程的右端项见初始化步骤。所以最小比值计算得到出基变量为 x_4 , 因为 $12/2 < 18/2$ 。本节第一个例子的迭代 1 已给出了更新后的 \mathbf{x}_B 、 \mathbf{c}_B 、 \mathbf{B} 和 \mathbf{B}^{-1} 的结果为

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c}_B = [0, 5, 0]$$

所以 x_2 已替换了 \mathbf{x}_B 中的 x_4 , 从 $[3, 5, 0, 0, 0]$ 提供了 \mathbf{c}_B 的新元素, 并从 $[\mathbf{A}, \mathbf{I}]$ 中为 \mathbf{B} 添加了新的一列。

最优化检验:

现在非基变量为 x_1 和 x_4 , 它们在方程(0) 中的系数为

对 x_1 , 有

$$\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{c} = [0, 5, 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - [-3, -5] = [-3, -]$$

对 x_4 , 有

$$\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} = [0, 5, 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \left[-\frac{5}{2}, - \right]$$

因为 x_1 有一个负的系数, 现在的 BF 解非最优, 所以继续下一次迭代。

迭代 2:

因为 x_1 是非基变量, 在方程(0) 中系数为负, 它成了入基变量, 它在其他方程中的系数为

$$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & - \\ 0 & - \\ 3 & - \end{bmatrix}$$

利用上一次迭代中得到的 \mathbf{x}_B , 最小比值的计算表明 x_5 是出基变量, 因为 $6/3 < 4/1$ 。本节第一个例子的迭代 2 已得出更新后的 \mathbf{x}_B 、 \mathbf{c}_B 、 \mathbf{B} 和 \mathbf{B}^{-1} , 结果为

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c}_B = [0, 5, 3]$$

所以用 x_1 已替换了 \mathbf{x}_B 中的 x_5 , 从 $[3, 5, 0, 0, 0]$ 为 \mathbf{c}_B 提供了新元素, 并从 $[\mathbf{A}, \mathbf{I}]$ 中为 \mathbf{B} 添加了新的一列。

最优化检验:

现非基变量为 x_4 和 x_5 , 应用本节第二个例子的计算表明它在方程(0) 中的系数为 $3/2$ 和 1 。因为这些系数非负, 现 BF 解 ($x_1 = 2, x_2 = 6, x_3 = 2, x_4 = 0, x_5 = 0$) 为最优, 运算结束。

5.2.4 最终的评述

上述例子说明单纯形法的矩阵形式只用了少量矩阵表达式来进行所需的计算。这些矩阵表达式参考表 5.8。对该表表明,为了计算表中其他所有值,依据正在求解的模型的原始参数(A 、 b 和 c)。只需知道出现在目前单纯形表松弛变量的 B^{-1} 和 $c_B B^{-1}$,当涉及最终单纯形表时,这个非常有价值,将在下一节阐述。

正如本节中已经指出的,单纯形法矩阵形式的一个缺点是需要推导 B^{-1} ,即每次迭代后更新了的基矩阵的逆。虽然对小规模的非奇异方阵有现成的求逆的程序(对 2×2 或 3×3 矩阵的求逆甚至可以用手工计算),但随着矩阵规模增大,求逆所需运算时间急剧增长。但是,有一种非常有效的方法来更新 B^{-1} ,从一次迭代到下一次重新求取新的基矩阵逆。将此同单纯形法的矩阵形式结合起来,这个矩阵形式的改进版本通常称为改进单纯形法,这是经常用于商业软件的单纯形法版本。我们将在 5.4 节讨论该算法。

本书网站给出了应用单纯形法矩阵形式的另一个例子。这个例子由于应用了改进单纯形法,每一步的迭代更新 B^{-1} 时间大幅提高,而不用更新基矩阵求逆的方法。

最后应当记住,本节讲述的单纯形法矩阵形式是假定问题已变换成 3.2 节中给出的一般线性规划问题的标准形式。但将其他形式进行修改也比较直接,其初始步骤类似 4.6 节讲述的单纯形法代数形式或表格形式。当这些步骤中包含引入人工变量得到一个初始 BF 解,并由此得到一个单位矩阵作为初始矩阵时,这些变量被包含在 x_s 的 m 个元素中。

5.3 基础的洞悉

我们将要着眼于由 5.2 节的改进单纯形法揭示的(任何形式的)单纯形法的一个性质。该节是对偶理论和敏感度分析(第 6 章)两个线性规划重要部分的基础。

我们首先描述满足线性规划标准形式的问题求解的洞悉(3.2 节),然后讨论如何求解其他形式。问题基于 5.2 节中的表 5.8,现描述如下。

表 5.8 提供的信息:应用矩阵概念,在 5.8 给出了初始单纯形表的行,第 0 行为 $[-c, 0, 0]$,其余行为 $[A, I, b]$ 。在任意一次迭代后,单纯形表中松弛变量的系数变为:第 0 行为 $c_B B^{-1}$ 其余的行为 B^{-1} ,这里 B 是当前的基矩阵。测试现有单纯形表的其余部分,通过松弛变量系数反映出现有单纯形表全部行是如何从初始单纯形表的行中得到的,特别是任意一次迭代后,即

$$\text{第 0 行} = [-c, 0, 0] + c_B B^{-1} [A, I, b]$$

$$\text{第 1 行~第 } m \text{ 行} = B^{-1} [A, I, b]$$

我们将在本节末描述这些应用。这些应用仅当已得到最优解的最终单纯形表时特别重要。所以在这之后我们将仅关注最优解方面的“基础信息”。

为了区分任意一次迭代后矩阵的符号(B^{-1} 等)同最后一次迭代的相应符号,在后面例子中引入以下符号。

设 B 是用单纯形法找出最优解时的基矩阵,令

$$S^* = B^{-1} = \text{第 1 行~第 } m \text{ 行中松弛变量系数}$$

$$A^* = B^{-1} A = \text{第 1 行~第 } m \text{ 行中原变量的系数}$$

$$y^* = c_B B^{-1} = \text{第 0 行中松弛变量的系数}$$

$$z^* = c_B B^{-1} A, \text{ 所以 } z^* - c = \text{第 0 行中原变量的系数}$$

$$Z^* = c_B B^{-1} b = \text{目标函数的最优值}$$

$b^* = B^{-1}b$ = 第1行~第m行最优的右端项值

表5.9表明,其中每一个符号均在最终单纯形表中得到匹配。为了解释这些符号,表5.9中包括了Wyndor Glass公司问题的初始表,以及问题的最终表。

再看表5.9现假定已给出初始表数据 t 和 T ,最终表中只给出 y^* 和 S^* 。怎样仅用这些信息求解最终表中余下的部分呢?本节给出了答案,现概述如下。

表5.9 初始和最终单纯形表矩阵形式的一般符号,以Wyndor Glass公司问题为例

初 始 表	
第0行	$t = [-3, -5 0, 0, 0 0] = [-c \mathbf{0} 0]$
其他行	$T = \left[\begin{array}{ccccc c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{array} \right] = [A I b]$
合并	$\left[\begin{array}{c cc c} t & -c & 0 & 0 \\ T & A & I & b \end{array} \right]$
最 终 表	
第0行	$t^* = \left[0, 0 0, \frac{3}{2}, 1 36 \right] = [z^* -c y^* Z^*]$
其他行	$T^* = \left[\begin{array}{ccccc c} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2 \end{array} \right] = [A^* S^* b^*]$
合并	$\left[\begin{array}{c cc c} t^* & z^* & y^* & Z^* \\ T^* & A^* & S^* & b^* \end{array} \right]$

基础的洞悉:

$$(1) t^* = t + y^* T = [y^* A - c | y^* | y^* b]$$

$$(2) T^* = S^* T = [S^* A | S^* | S^* b]$$

这样,只要通过已知的初始表中模型的参数(c 、 A 和 b)以及最终表中松弛变量的系数(y^* 和 S^*),这些方程就可以计算出最终表上所有其他的数了。

现在我们总结两个方程所蕴涵数学逻辑。为得到方程(2),回忆一下单纯形法(不包含第0行的)中执行的代数运算整个过程,这与用一些矩阵(称其为 M 矩阵)左乘 T 等同。这样

$$T^* = MT$$

现在识别 M 。写出 T 和 T^* 组成部分,方程变为

$$\begin{aligned} [A^* | S^* | b^*] &= M [A | I | b] \\ &\quad \uparrow \\ &= [MA | M | Mb] \end{aligned}$$

因为这些相等的方程的中间部分(或其他任何部分)一定相同,即有 $M=S^*$,所以方程(2)为有效方程。

注意到对第0行的代数运算整个过程,等同于把 T 行的某个线性组合加到 t 上,这相当于把向量 T 的某个倍数加到 t 上,可发现方程(1)是由相似的形式得到的。用 v 表示这个向量,有

$$t^* = t + vT$$

但是 ν 仍需要辨识。写出 t 和 t^* 的组成部分, 得到

$$\begin{aligned} [z^* - c | y^* | Z^*] &= [-c | 0 | 0] + \nu [A | I | b] \\ &= [-c + \nu A | \nu | \nu b] \end{aligned}$$

令这些相等的向量方程的中间部分相等, 就得出 $\nu = y^*$, 证明方程(1)有效。

5.3.1 使适用于其他模型形式

迄今为止, 我们对基础洞悉的描述是建立在初始模型为 3.2 节所描述的标准形式的假设下。然而, 上述数学逻辑只展示了初始模型为其他形式时应当怎么调整。关键在于初始表中的单位矩阵 I , 最终表上转化成了 S^* , 如果一定要在初始表中引入一些人工变量作为初始基变量, 那么, 它就是所有初始基变量(包括松弛变量和人工变量)列的组合(以适当的顺序排列), 它在这个表中形成了 I (对任何剩余变量的列都是无关的)。在最终表上相同的列由 $T^* = S^* T$ 得出 S^* , 由 $t^* = t + y^* T$ 得出 y^* 。如果 M 被引进初始的第 0 行作为人工变量的系数, 那么, 方程 $t^* = t + y^* T$ 中的 t 在基变量的非 0 系数被代数消去后即为初始表中的第 0 行(还可选择, 把初始第 0 行用做 t , 但此时这些 M 必须从最终第 0 行中减去以得到 y^*) (见练习题 5.3-9)。

5.3.2 应用

基础的洞悉在线性规划中有许多重要的应用。其中之一涉及改进单纯形法。这个方法主要基于 5.2 节中讲述的单纯形法的矩阵形式。如前一节所述(表 5.8), 这个方法利用 B^{-1} 和初始表对每一步迭代来计算当前表上的所有相关数据。利用 B^{-1} 通过公式 $y^* = c_B B^{-1}$ 计算 y^* 比基础的洞悉就更深层。

另一个应用是用于描述 4.7 节中的影子价格($y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*$)。基础的洞悉表明 Z^* (Z 的最优值) 为

$$Z^* = y^* b = \sum_{i=1}^m y_i^* b_i$$

所以, 就有对于 Wyndor Glass 公司问题的例子:

$$Z^* = 0b_1 + \frac{3}{2}b_2 + b_3$$

这个方程就给出了 4.7 节中给出的 y_i^* 值的解释。

另一组极其重要的应用是围绕许多优化后任务(再优化技术、敏感度分析、参数的线性规划, 见 4.7 节)。其研究是分析初始模型一个或多个变化造成的影响。特别地, 假设已经对初始模型应用单纯形法得到了一个最优解(即 y^* 和 S^*)。然后, 做上述的这些改变。如果相同的代数运算过程严格应用于修改的初始表, 最终表上的结果会有什么改变呢? 由于 y^* 和 S^* 没有改变, 所以基础的洞悉马上就得出了答案。

优化后分析的一般内容包括对 b 的可能变化情况。参数 b 通常代表线性规划模型进行决策时需考虑的各项活动可用资源数。所以用单纯形法求得最优解后, 管理者需要研究当有关资源分配的决策发生变化时将带来的后果。应用公式

$$x_B = S^* b$$

$$Z^* = y^* b$$

可以确切知道最优的 BF 解如何变化(或因负的变量变为非可行时), 以及作为 b 函数的目标函

数最优值如何变化。不需要对每一个新的 \mathbf{b} 一次次地重复应用单纯形法,因为松弛变量的系数已解决了相关问题。

例如,考虑把 $b_2=12$ 变为 $b_2=13$,如表 4.8 中 Wyndor Glass 公司问题所列。没有必要解出新最优解 $(x_1, x_2) = \left(\frac{5}{3}, \frac{13}{2}\right)$ 。因为最终表中基变量(\mathbf{b}^*)的值会立即由基础的洞察显示出来,即

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \mathbf{b}^* = \mathbf{S}^* \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{13}{2} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

有一个更简单的方法进行计算。因为唯一改变在 \mathbf{b} 的第二分量($\Delta b_2=1$),它只被第二列的 \mathbf{S}^* 左乘, \mathbf{b}^* 的变化可以简单计算为

$$\Delta \mathbf{b}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \Delta b_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

所以最终表上基变量的初始值($x_3=2, x_2=6, x_1=2$)现在变为

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{13}{2} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

(如果这些值中的任何一个为负值,则不可行,那么,可以应用 4.7 节中的重新优化技术,从这个新最终表开始。)对于前述的方程应用增量分析法解 Z^* 同样可以立即得到

$$\Delta Z^* = \frac{3}{2} \Delta b_2 = \frac{3}{2}$$

基础的洞悉能够以类似的方式应用于研究模型原型其他形式的变化,这也是 7.1 节~7.3 节介绍的敏感度分析的一个重要方面。

你还会在下一章看到基础的审视对线性规划的对偶理论所起的关键作用。

5.4 改进单纯形法

改进单纯形法直接建立在 5.2 节讲述的单纯形法矩阵式基础上,但该节未提到其区别在于改进单纯形法采用了一个对矩阵形式的重要改进。改进单纯形法并不是每次迭代后都对新的基矩阵的求逆(这对大型矩阵计算特别昂贵),而是利用了非常有效的算法在每次迭代后将 \mathbf{B} 转换为新的 \mathbf{B}^{-1} 。本节我们将集中描述和解释这个算法。

这个算法基于单纯形法的两个性质。一个是 5.3 节在表 5.8 中提供的洞悉,特别是在每次迭代后,新单纯形表中松弛变量除第 0 行以外的所有系数变为 \mathbf{B}^{-1} ,其中 \mathbf{B} 是新表中的基矩阵。

只要求解的是3.2节中给出的线性规划模型的标准形式,上述性质始终成立(对需要引进人工变量的非标准形式,唯一的区别是只要引入合适的有序列,在初始单纯形表第0行下面形成一个单位矩阵,然后在随后表中就会提供 \mathbf{B}^{-1})。

单纯形法的另一个性质是:在用高斯消元法执行初等代数运算(例如,一个方程除以一个常数或从一个方程中减去某个方程乘上一个常数),迭代的第3步改变单纯形表包括 \mathbf{B}^{-1} 的数字。所以在每次迭代后需要从原有的 \mathbf{B}^{-1} (用 $\mathbf{B}_{\text{旧}}^{-1}$ 标记)更新获得新的 \mathbf{B}^{-1} (用 $\mathbf{B}_{\text{新}}^{-1}$ 标记),需要用单纯形法通常进行的代数运算对整个方程组(除了第(0)行)实施。由此在迭代的第1步、第2步给出入基变量和出基变量的选择后,这个算法应用迭代的第3步(见4.3节和4.4节的讲述)得到新的单纯形表或方程组的 \mathbf{B}^{-1} 部分。

为了正式地阐述这种方法,令

x_k =入基变量

a'_{ik} =当前方程*i*中 x_k 的系数, $i=1,2,\dots,m$ (在迭代的步骤2中计算)

i =包含出基变量的方程的个数

我们回顾一下,新的方程组(不包括方程(0))可以由前述的从第(*i*)个方程中减去第(*r*)个方程的 a'_{ik}/a'_{rk} 倍得到, $i=1,2,\dots,m, i \neq r$,然后用方程(*r*)除以 a'_{rk} 。这样, $\mathbf{B}_{\text{新}}^{-1}$ 的*i*行*j*列元素为

$$(\mathbf{B}_{\text{新}}^{-1})_{ij} = \begin{cases} (\mathbf{B}_{\text{旧}}^{-1}) - \frac{a'_{ik}}{a'_{rk}} (\mathbf{B}_{\text{旧}}^{-1})_{rj}, & i \neq r \\ \frac{1}{a'_{rk}} (\mathbf{B}_{\text{旧}}^{-1})_{rj} & i = r \end{cases}$$

此式用矩阵符号表示为

$$\mathbf{B}_{\text{新}}^{-1} = \mathbf{E} \mathbf{B}_{\text{旧}}^{-1}$$

式中:矩阵 \mathbf{E} 为单位矩阵,除非它的第*r*个列向量被替换为

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix}$$

其中

$$\eta_i = \begin{cases} -\frac{a'_{ik}}{a'_{rk}}, & i \neq r \\ \frac{1}{a'_{rk}}, & i = r \end{cases}$$

因此, $\mathbf{E} = [\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_{r-1}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{U}_{r+1}, \dots, \mathbf{U}_m]$,其中每个一列向量的*m*元素都是0,只有第*i*个除外,为1。

例:我们将通过Wyndor Glass公司问题中的应用来解释这个算法。对同一问题在5.2节中已应用了单纯形法的矩阵形式,所以可以参考该节中每次迭代的结果(入基变量、出基变量等),将这些信息应用于现在的算法。

迭代1:

在5.2节中找到初始的 $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$,入基变量是 x_2 (即*k*=2)。在方程(1)、(2)、(3)中的系数 $a_{12}=0, a_{22}=2$ 和 $a_{32}=2$ 。出基变量为 x_4 ,含有 x_4 方程的数字为*r*=2。为得到新 \mathbf{B}^{-1} ,有

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} -\frac{a_{12}}{a_{22}} \\ \frac{1}{a_{22}} \\ \frac{a_{32}}{a_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

迭代2:

从5.2节可知第2次迭代的入基变量为 x_1 (即 $k=1$),在目前的方程(1)、(2)、(3)中的系数为 $a'_{11}=1$, $a'_{21}=0$ 和 $a'_{31}=3$,所以出基变量为 x_5 。包含 x_1 方程的数字为 $r=3$ 。由此结果得

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} -\frac{a'_{11}}{a'_{31}} \\ -\frac{a'_{21}}{a'_{31}} \\ \frac{1}{a'_{31}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

新的 \mathbf{B}^{-1} 为

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

至此已不需要进行更多迭代,本例结束。

因为改进单纯形法包含每次迭代用于更新 \mathbf{B}^{-1} 的算法与5.2节中单纯形法矩阵形式的其他部分,将上例与5.2节中矩阵形式结合,提供了应用改进单纯形法完整的例子。正如5.2节结尾处提到的,本书网站的例子提供了应用改进单纯形法的另一例子。

比较改进单纯形法相对于单纯形法代数和表格形式的优点。其优点之一是算法的计算量将得到减少,当一个矩阵中含有大量0元素时(这在规模大的实际问题中经常出现)特别明显。在每次迭代中需要储存的信息总量较少,有时是相当程度的减少。改进单纯形法同样允许计算中产生不可避免的误差,这可以通过周期性地直接对 \mathbf{B} 求逆得到 \mathbf{B}^{-1} 来控制。还有4.7节和5.3节末尾讨论的优化后分析,应用改进单纯形法时将更便于掌握。基于上述理由,改进单纯形法在计算机操作中通常作为优先选择的形式。

5.5 结 论

尽管单纯形法是一个代数过程,它基于一些十分简单的几何概念。这些概念可以使达到和确认最优解之前利用算法检验数量相对较少的BF解。

第4章描述了初等的代数运算被运用于进行单纯形法的代数形式,进而说明单纯形法的表格形式如何以相同方式使用等价的初等行运算。学习这些形式的单纯形法是学习单纯形法基本概念的一个好方法。然而,这些形式的单纯形法没有提供在计算机上运行的最有效形式。矩阵

方法是结合和执行初等代数运算或行变换的一种更快的方法。因此,利用单纯形法的矩阵形式,改进单纯形法提供了一种适合计算机执行单纯形法的有效方法。这种改进是通过将单纯形法同一种有效的计算组合,将现有基矩阵的迭代过程一步步更新。

最终单纯形表包含了如何能够直接从初始单纯行表进行代数重建的全部信息。这个基础的洞悉有很重要的应用,尤其是对于优化后分析。

参考文献

- [1] Bazaraa, M. S., J. J. Jarvis, and H. D. Sherali; Linear Programming and Network Flows, 4th ed., Wiley, Hoboken, NJ, 2010.
- [2] Dantzig, G. B., and M. N. Thapa; Linear Programming 1:Introduction, Springer, New York, 1997.
- [3] Dantzig, G. B., and M. N. Thapa; Linear Programming 2: Theory and Extensions, Springer, New York, 2003.
- [4] Denardo, E. V.: Linear Programming and Generalizations: A Problem-based Introduction with Spreadsheets, Springer, New York, 2011.
- [5] Elhallaoui, I., A. Metrane, G. Desaulniers, and F. Soumis; "An Improved Primal Simplex Algorithm for Degenerate Linear Programs," INFORMS Journal on Computing, 23(4): 569–577, Fall 2011.
- [6] Luenberger, D., and Y. Ye; Linear and Nonlinear Programming, 3rd ed., Springer, New York, 2008.
- [7] Murty, K. G.: Optimization for Decision Making: Linear and Quadratic Models, Springer, New York, 2010.
- [8] Vanderbei, R. J.: Linear Programming: Foundations and Extensions, 4th ed., Springer, New York, 2014.

习题

某些习题(或其中一部分)左端的符号意义如下。

D:上面列出演示的例子可能会有帮助。

I:可以应用上面列出的程序检查你的作业。

习题上有星号表示书后至少给出该题一部分答案。

5.1-1 * 考虑下面的问题。

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

s. t.

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

I(a) 用图解法解这个问题,在图上画出 CPF 解。

(b) 找出这个问题包含两个定义方程所有集合,对于每个集合,解出相应的角点解(如果解存在),并对它们进行分类,是 CPF 解还是角点非可行解。

(c) 引入松弛变量以便写出扩展形式的函数约束。利用这些松弛变量,对于(b)中找到的每个角点解识别基本解。

(d) 对于(b)每一个含两个定义方程的集合做以下工作。对每个定义方程确定指示变量;删除这两个指示(非基)变量后,表示(c)中的方程组;然后用后面的方程组解出剩下的两个变量(基变量);把最终的基本解同(c)部分相应的基本解相比较。

(e) 不执行单纯形法,利用它的几何解释(和目标函数)确定到达最优解的路径(CPF解的顺序);依次对每一个CPF解确定下一步迭代的决策(i)哪个定义方程要删掉,哪个要添加上(ii);哪一个指示变量被删除了(从入基变量中),哪一个被添加进去了(从出基变量中)。

5.1-2 按照习题5.1-1计算习题3.1-6。

5.1-3 考虑下面的问题。

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2$$

s. t.

$$-3x_1 + x_2 \leq 1$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 20$$

$$4x_1 - x_2 \leq 10$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 5$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

I(a) 用图解法解这个问题,在图上画出CPF解。

(b) 列表标出每一个CPF解和相应的定义方程,基本可行解和非基变量。计算每一个解Z值,利用这些信息找出最优解。

(c) 为每一个角点非可行解等列出相应的表。同样确定不能得到解的定义方程和非基变量。

5.1-4 考虑下面的问题。

$$\text{Max } Z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

s. t.

$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 60$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 20$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

在引入松弛变量并进行单纯形法的一次迭代后,得到下面的单纯形表:

迭代	基变量	方程	系数							右端项
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	Z	(0)	1	0	-1	3	0	2	0	20
	x_4	(1)	0	0	4	-5	1	-3	0	30
	x_1	(2)	0	1	-1	2	0	1	0	10
	x_6	(3)	0	0	2	-3	0	-1	1	10

(a) 确定迭代1中的CPF解。

(b) 确定定义这个CPF解约束边界方程。

5.1-5 考虑表5.2中3个变量的线性规划问题。

(a) 构造一个如表5.1所列的表,给出每一个CPF解的定义方程组。

(b) 哪一个是角点非可行解(6,0,5)的定义方程?

(c) 确定 3 个约束边界方程组中的一个, 它既没有得出 CPF 解, 又没有得出角点非可行解。解释该方程组为什么会出现这种情况。

5.1-6 考虑下面的问题。

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

s. t.

$$2x_1 + x_2 \geq 10$$

$$-3x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 \geq 6$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

(a) 识别这个问题的 10 组定义方程。对于每一组解出(如果解存在)相应的角点解, 并判断是 CPF 解还是角点非可行解。

(b) 对每一个角点解, 给出相应的基本解和非基变量。

5.1-7 重新考虑习题 3.1-5 中给出的模型。

(a) 确定这个问题的一组定义方程, 对每一组, 解出(如果解存在)相应的角点解, 并判断是 CPF 解还是角点非可行解。

(b) 对每一个角点解, 给出相应的基本解和这一组的非基变量。

5.1-8 在大部分情况下, 下面每一个表述都是正确的, 但不总正确。对每一种情况, 说明表述何时不正确, 为什么。

(a) 最好的 CPF 解是一个最优解。

(b) 一个最优解就是一个 CPF 解。

(c) 如果相邻 CPF 解没有更好的(用目标函数值来衡量), 该 CPF 解是唯一的最优解。

5.1-9 考虑有 n 个决策变量(每个都有一个非负约束)和 m 个函数约束的线性规划原形式(扩展之前)的线性规划问题, 指出下面每一个陈述的正确与错误, 然后用本章提供的特定材料(包括引用的材料)证明你的答案。

(a) 如果一个可行解是最优解, 那它一定是 CPF 解。

(b) CPF 解的个数至少为

$$\frac{(m+n)!}{m!n!}$$

(c) 如果一个 CPF 解有更好的相邻 CPF 解(以 Z 值衡量), 那么, 这些相邻最优解之一必为最优解。

5.1-10 判断下面关于线性规划问题表述的对错, 然后证明你的答案。

(a) 如果一个可行解是最优解但不是 CPF 解, 那么, 存在无穷多个最优解。

(b) 如果目标函数的值在两个不同的可行点 x^* 、 x^{**} 上相等, 那么, 连接 x^* 和 x^{**} 的线段上所有的点都是可行的, 且这些点上的 Z 值都相等。

(c) 如果问题含有 n 个变量(扩展前), 那么, 任何 n 个约束边界方程的公共解都是 CPF 解。

5.1-11 考虑一个线性规划问题的扩展形式, 该问题具有可行解和有界的可行域。判断下列陈述的对错, 然后用本章提供的特定材料(包括引用的材料)证明你的答案。

(a) 至少有一个最优解。

(b) 存在一个最优解必为基本可行解。

(c) 基本可行解的个数是有限的。

5.1-12 再次考虑习题 4.6-9 的模型,现在已知最优解中基变量为 x_2 和 x_3 ,利用已知条件确定有 3 个约束边界方程的方程组,其公共解必为最优解。然后解方程组得出这个解。

5.1-13 再次考虑习题 4.3-6。现在不用单纯形法而利用所给的已知条件和单纯形法理论确定有 3 个约束边界方程(含 x_1, x_2, x_3)的方程组(其公共解必为最优解)。解这个方程组寻找最优解。

5.1-14 考虑下面的问题。

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

s. t.

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

令 x_4, x_5 为各自函数约束的松弛变量,这两个变量为初始基本可行解的基变量,已知由单纯形法经过两步迭代得到最优解,其过程如下:(1)迭代 1,入基变量为 x_3 ,出基变量为 x_4 ;(2)迭代 2,入基变量为 x_2 ,出基变量为 x_5 。

(a) 对这个问题的可行域画一个三维的图,标出单纯形法迭代的路径。

(b) 给出为什么单纯形法沿这条路径进行迭代的几何解释。

(c) 对于单纯形法经过的可行域两条边中的每一个,写出每个约束边所在的方程,然后给出每一个端点上要增加的约束边界方程。

(d) 对由单纯形法得到的 3 个 CPF 解的每一个(包括初始的 CPF 解),确定定义方程组,并利用定义方程组解出这 3 个解。

(e) 对于每个由(d)得到的 CPF 解,给出相应的 BF 解和非基变量的组,并解释如何根据这些非基变量确定由(d)得到的定义方程。

5.1-15 考虑下面的问题。

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$$

s. t.

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 20$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 30$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

令 x_4 和 x_5 为各自函数约束的松弛变量,这两个变量为初始基本可行解的基变量,已知由单纯形法经过两步迭代得到最优解,其过程如下:(1)迭代 1,入基变量为 x_2 ,出基变量为 x_5 ;迭代 2,入基变量为 x_1 ,出基变量为 x_4 。对这种情况按习题 5.1-14 中的说明解答。

5.1-16 通过观察图 5.2,解释当目标函数如下时,为什么这个问题 CPF 解有 1(b)性质。

(a) $\text{Max } Z = x_3$ 。

(b) $\text{Max } Z = -x_1 + 2x_3$ 。

5.1-17 考虑如图 5.2 所示的 3 个变量的线性规划问题。

(a) 用几何方法解释为什么满足任何个别约束的解集为凸集。

(b) 利用(a)的结论解释为什么整个可行域(同时满足所有约束的公共解集)为凸集。

5.1-18 假设如图 5.2 所示的 3 个变量的线性规划问题有目标函数

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

不用单纯形法的代数运算,只应用它的几何意义(包括选择使 Z 有最大增加率的边界),确定并解释它所沿图 5.2 中从初始解到最优解的路径。

5.1-19 考虑如图 5.2 所示的 3 个变量的线性规划问题。

(a) 构建类似表 5.4 的表,给出每一个约束边界方程和初始约束的指示变量。

(b) 对于 CPF 解 $(2,4,3)$ 和它的 3 个相邻 CPF 解 $(4,2,4)$ 、 $(0,4,2)$ 、 $(2,4,0)$,构建如表 5.5 所列的表格,写出相应的定义方程、基本可行解和非基变量。

(c) 利用(b)中得到的定义方程组证明点 $(4,2,4)$ 、点 $(0,4,2)$ 和点 $(2,4,0)$ 与点 $(2,4,3)$ 相邻,但这 3 个 CPF 解不互为相邻点。然后再利用(b)中得到的该组非基变量证明这点。

5.1-20 图 5.2 中过点 $(2,4,3)$ 和点 $(4,2,4)$ 的直线方程为

$$(2,4,3) + \alpha[(4,2,4) - (2,4,3)] = (2,4,3) + \alpha(2, -2, 1)$$

当 $0 \leq \alpha \leq 1$ 时,为这两点之间的线段。在对各自函数约束加入松弛变量 x_4 、 x_5 、 x_6 和 x_7 ,扩展后,方程变为

$$(2,4,3,2,0,0,0) + \alpha(2, -2, 1, -2, 2, 0, 0)$$

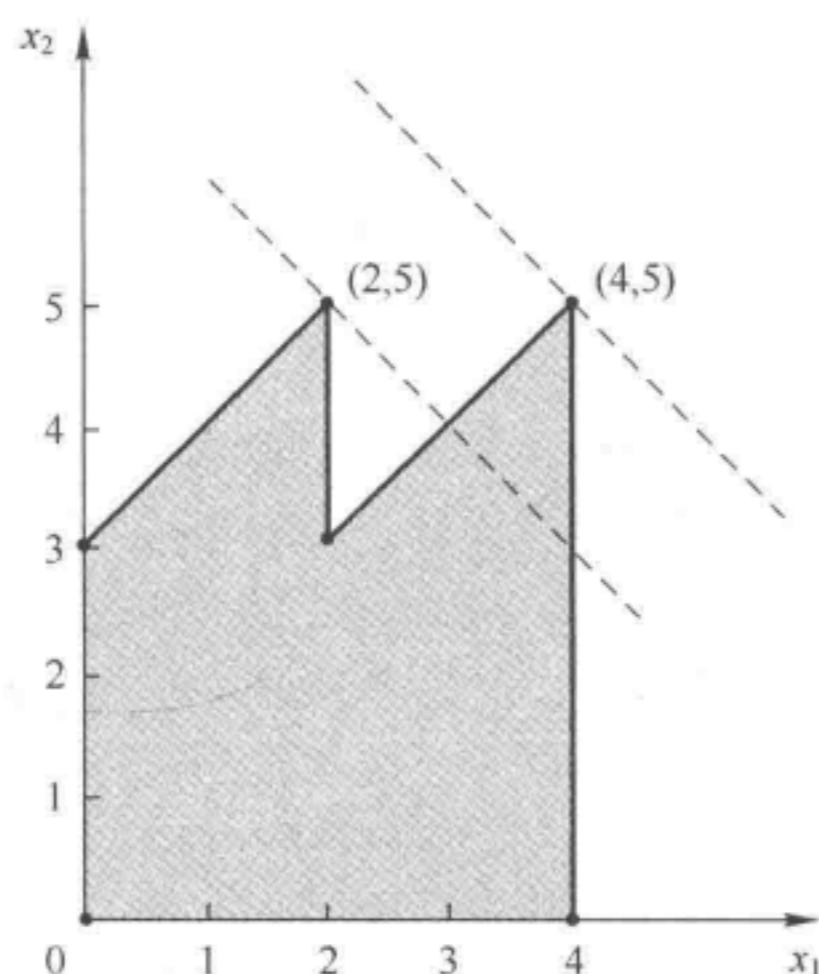
利用这个公式直接回答下面的问题,进而给出单纯形法迭代由点 $(2,4,3)$ 向点 $(4,2,4)$ 移动时的代数和几何解释(已知迭代沿这条线段移动)。

(a) 哪个是入基变量?

(b) 哪个是出基变量?

(c) 新的基本可行解是什么?

5.1-21 考虑有两个变量的数学规划问题,其可行域如下图所示,6 个点为 CPF 解。该问题目标函数是线性的,两条虚线是通过最优解 $(4,5)$ 和次优解 $(2,5)$ 的目标函数线。注意:非最优解 $(2,5)$ 比它的两个相邻 CPF 解更优,这违背了 5.1 节的中线性规划的 CPF 解的性质 3。通过构建出这个可行域的边界上的 6 条线段是线性规划约束条件的约束边界,证明该问题不是线性规划问题。



5.2-1 考虑下面的问题。

$$\text{Max } Z = 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 9x_5$$

s. t.

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +3x_4 & & \leq 180 \text{(资源 1)} \\ 4x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +x_4 & +x_5 & \leq 270 \text{(资源 2)} \\ x_1 & +2x_2 & & +x_4 & +3x_5 & \leq 180 \text{(资源 3)} \end{array}$$

且

$$x_j \geq 0, j=1, 2, \dots, 5$$

已知最优解中的基变量为 x_3, x_1, x_5 , 且

$$\left[\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right]^{-1} = \frac{1}{27} \left[\begin{array}{ccc} 11 & -3 & 1 \\ -6 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 10 \end{array} \right]$$

(a) 根据所给条件求出最优解。

(b) 根据所给条件求出 3 个资源的影子价格。

I5. 2-2* 用改进单纯形法逐步求解下面的问题。

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 6x_5$$

s. t.

$$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 20$$

$$3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 4x_5 \leq 30$$

且

$$x_j \geq 0, j=1, 2, 3, 4, 5$$

5. 2-3 再考虑问题 5. 1-1 按(e)的 CPF 解的顺序, 对每个相应的基本可行解构造基矩阵 B 。对每个 B 手工求逆矩阵 B^{-1} , 利用 B^{-1} 计算当前解, 然后进行下一步迭代(或证明当前解为最优解)。

I5. 2-4 用改进单纯形法逐步解习题 4. 1-5 模型。

I5. 2-5 用改进单纯形法逐步解习题 4. 7-6 模型。

D 5. 3-1* 考虑下面的问题。

$$\text{Max } Z = x_1 - x_2 + 2x_3$$

s. t.

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 3$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 2$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

令 x_4, x_5 和 x_6 为各自约束的松弛变量, 应用单纯形法后的最终单纯形表的一部分如下表所列:

迭 代	方 程	系 数							右端项
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
Z	(0)	1				1	1	0	
x_2	(1)	0				1	3	0	
x_6	(2)	0				0	1	1	
x_3	(3)	0				1	2	0	

(a) 利用 5.3 节中给出的基础洞悉计算最终单纯形表中缺少的数字,写出运算过程。

(b) 确定对应最终表上基本可行解的 CPF 解的定义方程。

D 5.3-2 考虑下面的问题。

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4$$

s. t.

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 5$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 4$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

令 x_5 和 x_6 为各自约束的松弛变量,应用单纯形法后的最终单纯形表的一部分如下表所列:

基变量	方 程	系 数						右端项
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	(0)	1					1	1
x_2	(1)	0					1	-1
x_4	(2)	0					-1	2

(a) 利用 5.3 节中给出的基础洞悉计算最终单纯形表中缺少的数字,写出运算过程。

(b) 确定对应最终表上基本可行解的 CPF 解的定义方程。

D5.3-3 考虑下面的问题。

$$\text{Max } Z = 6x_1 + x_2 + 2x_3$$

s. t.

$$2x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq 2$$

$$-4x_1 - 2x_2 - \frac{3}{2}x_3 \leq 3$$

$$x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq 1$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

令 x_4 , x_5 和 x_6 为各自约束的松弛变量,应用单纯形法后的最终单纯形表的一部分如下表所列:

基变量	方 程	系 数						右端项
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	(0)	1				2	0	2
x_5	(1)	0				1	1	2
x_3	(2)	0				-2	0	4
x_1	(3)	0				1	0	-1

利用5.3节中给出的基础的洞悉计算最终单纯形表中缺少的数字,写出运算过程。

D 5.3-4 考虑下面的问题:

$$\text{Max } Z = 20x_1 + 6x_2 + 8x_3$$

s. t.

$$8x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 200$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + x_3 \leq 50$$

$$x_3 \leq 20$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

令 x_4, x_5, x_6 和 x_7 分别为第一个~第四个约束的松弛变量。假设经单纯形法的几步迭代之后,当前单纯形表的一部分如下所列:

基变量	方程	系 数								右端项
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
Z	(0)	1				$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	
x_1	(1)	0				$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{8}$	0	0	
x_2	(2)	0				$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	
x_6	(3)	0				$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	1	0	
x_7	(4)	0				0	0	0	1	

(a) 利用5.3节中给出的基础的洞悉计算最终单纯形表中缺少的数字,写出运算过程。

(b) 指出为进行下步迭代,缺少的哪一个数字会由改进单纯形法产生。

(c) 确定对应当前表中基本可行解的CPF解的定义方程。

D 5.3-5 考虑下面的问题。

$$\text{Max } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

s. t.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq b$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 2b$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

注意:目标函数中系数(c_1, c_2, c_3)的值并没有给出,约束函数中右端项唯一特别处是第二个右端项(2b)为第一个(b)的2倍。

现在假设老板提出了对 c_1, c_2, c_3 和b的最优估计值,但并没有告诉你,然后运用单纯形方法。给你如下所示的最终单纯形表(这里 x_4, x_5 为各自约束函数的松弛变量),但你不知道 Z^* 的值。

基变量	方程	系数						右端项
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	(0)	1	$\frac{7}{10}$	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	Z^*
x_2	(1)	0	$\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1
x_3	(2)	0	$\frac{3}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	3

- (a) 利用 5.3 节中的基础的洞悉解出用到的 (c_1, c_2, c_3) 的值。
(b) 利用 5.3 节中的基础的洞悉解出用到的 b 的值。
(c) 用两种方法计算出 Z^* 的值, 一种利用你从(a)中得到的结果, 另一种利用你从(b)中得到的结果, 并写出运算步骤。

5.3-6 对于 5.3 节例子的迭代 2 给出下面的表达式:

$$\text{最终第 0 行} = [-3, -5 | 0, 0, 0 | 0] + \left[0, \frac{3}{2}, 1 \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{bmatrix}$$

结合代数运算(用矩阵形式), 从第 0 行的迭代 1 和迭代 2 导出这个式子。

5.3-7 5.3 节中对基础的洞悉大部分描述都假设问题为标准形式。现在考虑下面每一种其他形式, 其中初始化步骤中另外的调整都已经在 4.6 节中给出, 包括适当地应用人工变量和大 M 法, 写出在基础洞悉下的调整结果。

- (a) 等式约束。
(b) 函数约束为“ \geq ”形式。
(c) 负的右端项。
(d) 变量值允许为负(无下界)。

5.3-8 再次考虑习题 4.6-5 模型。利用人工变量和大 M 法建立完整的初始单纯形表, 然后找出约束 S^* 的列, 这里 S^* 在最终表上的基础的洞悉中应用, 并解释为什么是这些列。

5.3-9 考虑下面的问题。

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

s. t.

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

令 x_4 和 x_6 分别为第一个、第二个方程的剩余变量, 令 \bar{x}_5, \bar{x}_6 为相应的人工变量。利用大 M 法对这个模型进行 4.6 节的调整后, 初始单纯形表就可以应用单纯形法, 具体如下:

基变量	方程	系数							右端项	
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	\bar{x}_5	x_6		
Z	(0)	-1	$-4M+2$	$-6M+3$	$-2M+2$	M	0	M	0	$-14M$
\bar{x}_5	(1)	0	1	4	2	-1	1	0	0	8
x_7	(2)	0	3	2	0	0	0	-1	1	6

应用单纯形法后的部分最终表如下所列：

基变量	方程	系数								右端项
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	\bar{x}_5	x_6	\bar{x}_7	
Z	(0)	-1					M-0.5		M-0.5	
x_2	(1)	0					0.3		-0.1	
x_1	(2)	0					-0.2		0.4	

(a) 根据上面的表格,利用5.3节中给出的基础洞悉计算最终单纯形表中缺少的数字,写出运算过程。

(b) 研究5.3节的数学推理,证实基础洞悉(见方程 $T^* = MT$ 和 $t^* = t + vT$ 及后来M和v的推导)。这个推理假设初始模型符合我们的标准形式,而当前问题不是标准形式。当t为上面初始单纯形表的第0行,T为第1行和第2行时,试用最小的调整使同样推理能应用于当前问题。对这个问题推导M和v。

(c) 当应用方程 $t^* = t + vT$ 时,另一个选择是利用 $t = [2, 3, 2, 0, M, 0, M, 0]$,即为对初始基变量 \bar{x}_5, \bar{x}_7 的非0系数进行代数消元前的初始第0行。用新t对这个方程重复(b)得出新v以后,说明该方程所得到的最终第0行与在(b)中得到的结果是相同的。

(d) 确定最终表中对应于最优BF解的CPF解的定义方程。

5.3-10 考虑下面的问题。

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 7x_2 + 2x_3$$

s. t.

$$-2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 \leq 20$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

已划最优解中的基变量为 x_1 和 x_3 。

(a) 引入松弛变量,并利用所给信息直接应用高斯消元法找到最优解。

(b) 继续(a)的工作以找出影子价格。

(c) 利用所给信息确定最优CPF解的定义方程,并为这些方程找到最优解。

(d) 对最优BF解构建基矩阵B,手工求B的逆阵,然后,利用 B^{-1} 解出最优解和影子价格 y^* ,再应用改进单纯形法的最优化检验来证明这个解是最优解。

(e)(d)的 B^{-1} 和 y^* ,利用5.3节的基础洞悉建立完整的最终单纯形表。

5.4-1 考虑习题5.2-2中给出的模型,令 x_6 和 x_7 分别是前两个约束的松弛变量。已知 x_2 是入基变量, x_7 是出基变量(单纯形法第一次迭代中),在第二次(最后)的迭代中, x_4 是入基变量, x_6 是出基变量。运用5.4节讲述更新 B^{-1} 的过程,找出第一次和第二次迭代后的新的 B^{-1} 。

15.4-2 用改进单纯形法求解习题4.3-4中给出的模型。

15.4-3 用改进单纯形法求解习题4.7-5中给出的模型。

15.4-4 用改进单纯形法求解习题3.1-6中给出的模型。