

第7章 不确定条件下的线性规划

确定性假设为本书第3.3节所述线性规划关键假设之一,该假设假定线性规划模型各参数赋值均为已知常量。这是一种简便易行的假设,但实际上很难满足。通常,构建线性规划模型旨在选出未来行动的方案,因此参数值的确定有赖于对未来条件的预测。如此一来,采用模型最优解后实际参数情况将会如何变化,有时便存在极大的不确定性。因此,我们现在便着重介绍一些处理此类不确定性的方法。

灵敏度分析是处理不确定性的技术中最重要的手段。如前所述(参见本书2.3节、3.3节和4.7节),灵敏度分析也是多数线性规划研究的重要组成部分,其目的之一便是确定当参数估值出现错误时会对模型最优解产生何种影响。这种分析通常用于在应用模型前确定那些有待进一步认真估值的参数,还可用于识别更适合大部分合理参数值的新解。此外,某些参数值(如资源量)也许代表管理层决定。此时,如何选择参数值便可能成为研究的主要问题,可通过灵敏度分析加以解决。

7.1节对(基于5.3节基本观点得出的)灵敏度分析基本步骤进行了概述,7.2节对其展开详述,7.3节主要讲述如何直接使用电子表格进行灵敏度分析(如无暇阅读整章,可仅读本章7.3节以简要了解灵敏度分析)。

本章其余部分介绍了另外一些处理不确定型线性规划的重要技巧。对于那些必须完全满足约束条件的问题,通过7.4节鲁棒优化法所求之解事实上不但确保可行,而且接近最优,不用考虑参数值与估值间存在的合理偏差。当稍许不满足某些限制条件而不至于产生严重后果时,可采用7.5节介绍的机会约束法。只要原约束条件极可能划分为两个(或更多)阶段时,便可利用7.6节讲述的补偿随机规划法处理此类问题,此时,机会约束条件对原约束条件做出修正,以便用第二阶段决策补偿第一阶段中由于某些参数估值失误所导致的不尽人意。

7.1 灵敏度分析的本质

通常,在成功运用单纯形法求得线性规划模型的最优解时,运筹研究团队的工作还远未结束。正如我们在3.3节结束部分所指出的,线性规划假设之一便是模型所有参数 a_{ij} 、 b_i 和 c_j 均为已知常量。但实际上,模型所用参数值通常只是基于对未来条件的预测所得的估值。一般情况下,计算估值所用数据要么未经整理,要么根本不存在,因此原模型参数可能仅仅是忙碌的线性规划人员的经验之谈,并且这些数据可能是有意高估或低估,借以保护评估人员的利益。

因此,成功的经理或运筹研究人员始终不会盲目相信计算机求得的原始数据,多数情况下仅将这些数据视为继续分析问题的起点而已。所谓的“最优”解,也仅针对某一描述实际问题的特定模型而言,只有经检验同样适用于该问题其他合理表述后,方可作为指导行动的依据。此外,模型参数(尤其是参数 b_i)有时是根据管理决策(如为相关活动配置某类资源的数量)而赋值的,一旦意识到决策存在潜在不良影响,应对其重新审查。

因此,参数如有其他赋值时,则需进行灵敏度分析,检查其他可能的参数赋值对单纯形法求得的最优解有何影响,这一点十分重要。通常,有些参数可取任何合理值,且不影响最优解的最佳性。然而,有些参数一旦被赋予其他值,就可能产生新的最优解。若原解因此导致目标函数极

差值甚至不可行时,情况尤为严重。

因此,灵敏度分析主要目的之一便是识别敏感参数(即最优解不变的情况下,赋值不能变动的参数)。对于目标函数参数中的非敏感参数,确定它们保持最优解不变的情况下的取值范围亦是有益的(我们把该取值范围称作该参数允许范围)。某些情况下,改变函数约束右侧条件会对BF最优解的可行性造成影响。对此类参数而言,确定使BF最优解始终有效的取值范围是有益的(我们将该取值范围称作相关右侧条件允许范围)。该取值范围也是当前受相应条件制约的影子价格保持有效的范围。下一节将介绍计算该取值范围的具体步骤。

该取值范围的重要性体现在以下两点:首先,它可确定出更重要参数,以便人们对其做出更加慎重的估值,并从中选出一个适用于大多数可能估值的解;其次,在研究实施过程中,该取值范围可确定那些需要倍加关注的参数,如果发现某一参数真值超出其允许范围,这便意味着解需马上改变。

如果是小规模问题,可直接运用单纯形法分别检查参数值诸多变化所带来的影响,以便发现最优解是否发生改变。该方法在使用电子表格公式时尤为简便易行。最优解求解程序(Solver)制定后,只需在电子表格中输入想要的变化值,再单击“求解”按钮即可。

但是,对于实践中经常遇到的较大规模问题,如果必须应用单纯形法从头分别检查其中各参数值变化,此时,灵敏度分析便需要大量的计算。幸运的是,本书5.3节所探讨的基本理念实际上免除了这样的运算工作。该基本理念能立即揭示出原模型的任何变化是如何改变单纯形表中的数值的(假定单纯形法的原代数运算顺序在此保持不变)。因此,先做一些简单计算修改单纯形表,然后便可轻松检查原BF最优解现在是否是非最优解(或不可行解)。如果是该解可在需要时用作初始基本解,重新运算单纯形法(或对偶单纯形法),用以发现新的最优解。如果模型变化不大,仅需若干次迭代便可通过该“优化的”初始基本解获得全新最优解。

为更具体描述该过程,可考虑以下情况:现已应用单纯形法求得一个线性规划模型最优解,其中模型参数 b_i 、 c_j 和 a_{ij} 的值已确定。若开始灵敏度分析,其中至少应有一个参数值发生变化,然后令 \bar{b}_i 、 \bar{c}_j 和 \bar{a}_{ij} 分别表示不同参数值。于是,模型的矩阵表示形式修正为

$$\mathbf{b} \rightarrow \bar{\mathbf{b}}, \mathbf{c} \rightarrow \bar{\mathbf{c}}, \mathbf{A} \rightarrow \bar{\mathbf{A}}$$

首先,修改最终单纯形表以体现这些变化。特别地,我们希望找到修正后的最终单纯形表,使得从新的初始单纯形表开始到最终单纯形表的代数运算过程(包括对行乘以相同的倍数,与其他行相加或相减)不变(这一过程未必等同于重复应用单纯形法,因为初始单纯形表中的变化或可引发单纯形法改变某些当前所应用的代数运算过程)。继续采用表5.9中所列符号和用于表达上述基本理念的方程式($t^* = t + y^* T$ 和 $T^* = S^* T$),根据 y^* 、 S^* (这两个参数保持不变)及新初始单纯形表可求得经过修正的最终单纯形表(表7.1)。注意: y^* 和 S^* 均为最终单纯形表的松弛变量系数,在该表中向量 y^* (对偶变量)等于第0行的系数,而矩阵 S^* 给出该形表中其他行的系数。因此,仅通过 y^* 、 S^* 及初始单纯形表中的修正值,表7.1便可表明,最终单纯形表中其余部分的修正值可立即计算得出,而无需重复任何代数运算。

表7.1 原模型变化后得到的修正的最终单纯形表

	等式	变量系数			右侧条件
		目标值(Z)	原始变量	松弛变量	
新初始单纯形表	(0)	1	$-\bar{c}$	0	0
	$(1, 2, \dots, m)$	0	\bar{A}	1	\bar{b}
修正后最终单纯形表	(0)	1	$z^* - \bar{c} = y^* \bar{A} - \bar{c}$	y^*	$Z^* = y^* \bar{b}$
	$(1, 2, \dots, m)$	0	$A^* = S^* \bar{A}$	S^*	$b^* = S^* \bar{b}$

示例(Wyndor Glass公司模型变化一):为便于说明,在3.1节中用于解决Wyndor Glass公司相关问题的模型中,假设表7.2中内容是对该模型的首次修正。

表7.2 用于Wyndor Glass公司模型灵敏度分析的原模型及首次修正模型
(即原模型变化一)

原模型	修正模型
<p>求极大值 $Z = [3, 5] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$</p> <p>约束条件为</p> $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$ <p>且</p> $x \geq 0$	<p>求极大值 $Z = [3, 5] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$</p> <p>约束条件为</p> $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$ <p>且</p> $x \geq 0$

因此,原模型变化如下: $c_1 = 3 \rightarrow 4$ 、 $a_{31} = 3 \rightarrow 2$ 及 $b_2 = 12 \rightarrow 24$ 。这些变化的图形效果如图7.1所示。单纯形法已求得原模型CPF最优解为(2,6),它位于两条约束边界(虚线 $2x_2 = 12$ 和 $3x_1 + 2x_2 = 18$)的交点位置。现在,如图所示,模型修正后两条约束边界(实线 $2x_2 = 24$ 和 $2x_1 + 2x_2 = 18$)发生移位。所以,前述CPF最优解(2,6)移至新解(-3,12)处,但该解为修正模型的不可行角点解。通过上述几段对赋值过程的描述可以发现这一增广形式的代数移位。该过程对于那些无法用图解分析表达的大规模问题亦十分有效。

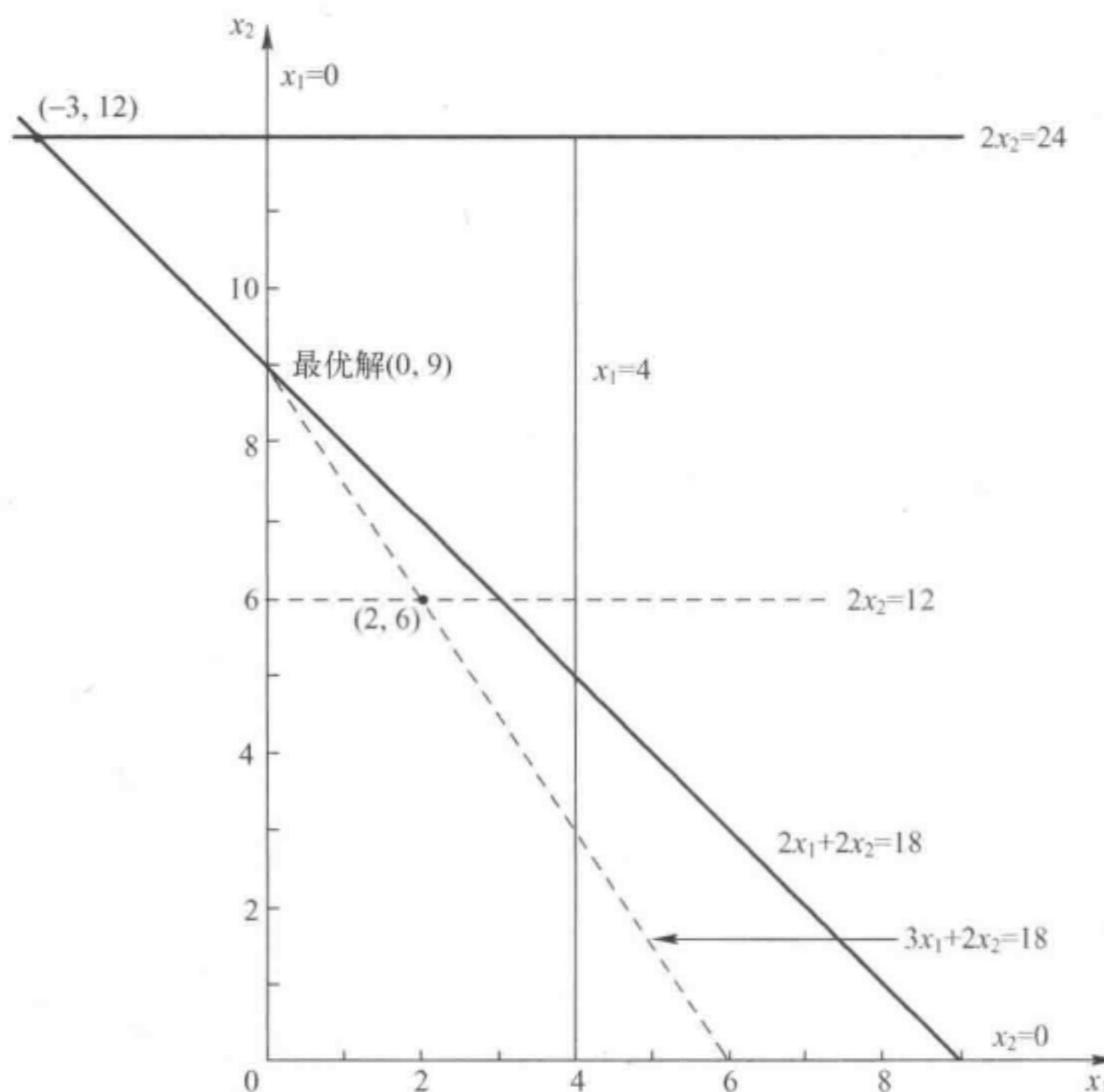


图7.1 Wyndor Glass公司模型变化一:最终角点解从(2,6)变为(-3,12),其中,该模型赋值发生如下变化: $c_1 = 3 \rightarrow 4$ 、 $a_{31} = 3 \rightarrow 2$ 及 $b_2 = 12 \rightarrow 24$

为进行运算,首先用矩阵列出修正模型参数:

$$\bar{c} = [4, 5]; \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \bar{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$$

计算求得新初始单纯形表,如表 7.3 上部分所列,该表下方是原最终单纯形表(初见于表 4.8)。在原最终单纯形表内有部分数据显然未受模型变化影响,也就是说,0 行(y^*)及其余 3 行(S^*)的松弛变量系数保持不变,我们将这几行数据用实线框出。所以,有

$$y^* = \left[0, \frac{3}{2}, 1 \right]; S^* = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

采用与单纯形法原代数运算相同的过程时,松弛变量系数必然保持不变,这是因为这些变量系数在初始单纯形表中也未改变。

但是,由于初始单纯形表中其他数据发生了变化,因此最终单纯形表中其他数据也会随之变化。根据表 7.1 中公式,求得最终单纯形表中其余修正数据为

$$z^* - \bar{c} = \left[0, \frac{3}{2}, 1 \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - [4, 5] = [-2, 0]$$

$$Z^* = \left[0, \frac{3}{2}, 1 \right] \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix} = 54$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$b^* = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ -2 \end{bmatrix}$$

表 7.3 针对 Wyndor Glass 公司模型的变体,求解修正的最终单纯形表

	基本变量	等式	下列变量系数						右侧数值
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
新初始单纯形表	Z	(0)	-1	-4	-5	0	0	0	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	24
	x_5	(3)	0	2	2	0	0	1	18

(续)

	基本变量	等式	下列变量系数						右侧数值
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
原模型最终单纯形表	Z	(0)	1	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	36
	x_3	(1)	0	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	2
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_1	(3)	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
修正的最终单纯形表	Z	(0)	1	-2	0	0	$\frac{3}{2}$	1	54
	x_3	(1)	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	6
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	12
	x_1	(3)	0	$\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-2

表 7.3 底部为修正后最终单纯形表。

事实上,求解修正最终单纯形表的计算还可大幅简化。由于原模型(单纯形表) x_2 所有系数均未发生任何改变,因此在最终单纯形表中也不会变化,所以该部分运算可以省略。还有若干其他原参数(a_{11}, a_{21}, b_1, b_3)也保持不变,因此另一捷径是只计算最终单纯形表中与初始单纯形表增量变化对应的那部分增量变化,而对那些在初始单纯形表的向量乘法或矩阵乘法运算中不涉及任何变化的参数均可忽略不计。特别是初始单纯形表中只有 $\Delta c_1 = 1, \Delta a_{31} = -1$ 和 $\Delta b_2 = 12$ 涉及增量变化,因此仅需考虑这些参数便可。该简化法如下所示,标有 0 或-的位置表示无需运算。

$$\Delta(z^* - c) = y^* \Delta A - \Delta c = \begin{bmatrix} 0, \frac{3}{2}, 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & - \\ 0 & - \\ -1 & - \end{bmatrix} - [1, -] = [-2, -]$$

$$\Delta Z^* = y^* \Delta b = \begin{bmatrix} 0, \frac{3}{2}, 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} = 18$$

$$\Delta A^* = S^* \Delta A \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & - \\ 0 & - \\ -1 & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & - \\ 0 & - \\ -\frac{1}{3} & - \end{bmatrix}$$

$$\Delta b^* = S^* \Delta b = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

将增量与最终单纯形表原值(表 7.3 中部所列)相加便可求出最终修正单纯形表(表 7.3 底部所列)。

该增量分析还提供了一种有用的总体认识,即最终单纯形表中的变化必与初始单纯形表中各变化成正比。下一节将说明通过该特性如何利用线性内插法或线性外插法确定某给定参数的取值范围,在该范围内最终基本解既是可行解也是最优解。

获得修正的最终单纯形表后,下一步便是(如果需要)利用高斯消去法将其转变为恰当形式。尤其重要的是, i 行基本变量中必须有一个取值为 1 的系数,在其他各行(包括 0 行)必须有一个取值为 0 的系数,这样才可将修正的最终单纯形表用于识别、评价当前基本解。因此,所做变化若与该要求不符(这种情况仅当某一基本变量原约束系数发生变化时,才会出现),必须继续做出修正以获得修正的最终单纯形表的恰当形式。这一修正过程需运用高斯消去法,即对单纯形法连续应用迭代运算的第三步(见第 4 章),就像每个不相符的基本变量为入基变量一样。需要注意的是,这些代数运算或可导致右侧数值列的进一步变化,因此只有通过高斯消去法彻底获得修正的最终单纯形表恰当形式后,方可将该列作为当前基本解。

例如,表 7.4 上半部分所列的修正的最终单纯形表,就不是由高斯消去法得出的恰当形式,因为其中基本变量 x_1 列赋值,尤其是 x_1 所在行(第 3 行)系数不是 1,而是 $2/3$,且 x_1 的第 0 行、第 1 行系数均不为 0(分别为 $-2, 1/3$)。因此,要获得该表的恰当形式,第 3 行系数需乘以 $3/2$,再乘以 2,然后与 0 行系数相加;再用第 3 行乘以 $1/3$,再与第 1 行系数相减。于是,便可通过高斯消去法求得表 7.4 下半部分所示的单纯形表的恰当形式,然后,用于识别当前基本解(此前的最优解)新值,即

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-3, 12, 7, 0, 0)$$

由于 x_1 为负值,该基本解便不再可行,但却是超最优解(见表 6.10 中定义),因此成为对偶可行解,这是因为 0 行所有系数仍为非负数。因此,(如需要)可以该基本解为切入点,通过对偶单纯形法(见本书 8.1 节)重新优化变量。

表 7.4 对 Wyndor Glass 公司模型的变体 1, 利用高斯消去法将修正的最终单纯形表转换为恰当形式

	基本变量	等式	下列变量系数						右侧数值
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
修正的最终单纯形表	Z	(0)	1	-2	0	0	$\frac{3}{2}$	1	54
	x_3	(1)	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	6
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	12
	x_1	(3)	0	$\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-2
转换至恰当形式	Z	(0)	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	2	48
	x_3	(1)	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	7
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	12
	x_1	(3)	0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-3

以图 7.1 为例(忽略其中的松弛变量),对偶单纯形法仅通过一次迭代运算便可从角点解 $(-3, 12)$ 求得 CPF 最优解 $(0, 9)$ (以下做法通常有助于灵敏度分析:首先求出一组模型参数可

能值的最优解,然后确定对于不同参数可能值而言,哪些最优解始终表现良好)。

如果基本解 $(-3, 12, 7, 0, 0)$ 既非初始基可行解,亦非对偶可行解(即单纯形表右侧数值列和第0行内均包含负数),则可引入人工变量将单纯形表转换为恰当形式,用作初始单纯形表^①。

敏感性分析的一般步骤:检验原始最优解对模型各种参数敏感性的常用方式是对各参数分别检验(或至少检验参数 c_j 和 b_i)。除找出参数允许范围(这一点将在下一节讲述)外,检验过程中,可能还需要将参数初始赋值改为可能值范围(包括该范围端点)内的其他可能赋值。接下来可能还需检验不同参数值同时变化(如改变整个函数约束)的若干情况。参数(无论是一个还是多个)每次变化时均需应用此处所述检验步骤。该步骤概括如下。

灵敏度分析一般步骤:

- (1) 模型修正。在待检验模型中进行所需变化(一处或多处)。
- (2) 最终单纯形表修正。根据基本理念(见表7.1底部的公式总结)确定最终单纯形表中的变化(见表7.3示例)。
- (3) 通过高斯消去法转换为恰当形式。(如有必要)通过高斯消去法将修正的最终单纯形表转换为恰当形式,用以识别、评估当前基本解(见表7.4示例)。
- (4) 可行性检验。检查修正的单纯形表右侧列内所有基本变量值是否仍为非负数,从而检验该解的可行性。
- (5) 最优性检验。(若可行)检查修正的单纯形表内第0行所有非基变量系数是否仍为非负数,从而检验该解的最优性。
- (6) 重新优化。如果该解未通过上述检验,可将当前单纯形表用作初始单纯形表(并进行必要的转换),然后通过单纯形法或对偶单纯形法重新求得最优解(如需要)。

对于只有两个决策变量的问题而言,进行灵敏度分析时,可用图解分析法替代上述代数运算过程。

下一节将讨论并演示如何将上述代数运算程序应用于对原模型的各重要修正。此外,还将利用图解分析演示使用代数法所取得的效果。部分讨论内容还将涉及本节在研究赋值变化时所引用的关于伟恩德玻璃有限公司模型的范例,并对其展开详述。

7.2 灵敏度分析的应用

通常,灵敏度分析的第一步是研究参数 b_i ,即可供所研究活动使用的第*i*个资源量($i=1, 2, \dots, m$)的变化。原因在于,一般情况下,设定或调整该值比设定或调整模型中其他参数值更灵活方便。本书4.7节及6.2节曾论述过,从经济角度讲,将对偶变量(y_i)理解为经济学中的影子价格对确定应将哪些变化纳入考虑范围极为有益。

案例1:参数 b_i 的赋值变化。

假设当前模型的仅有变化是有一个或多个 b_i 参数($i=1, 2, \dots, m$)发生了改变。此时,最终单纯形表的唯一变化体现在右侧数值列,因此该表采用高斯消去法后仍为恰当形式,且第0行所有非基变量系数仍为非负数。所以,灵敏度分析一般程序中,通过高斯消去法转换为恰当形式与最优性检验这两个步骤均可省略。右侧数值列修正后,唯一的问题便是确认该列所有基本变量值是否仍为非负数(即可行性检验)。

如表7.1所列, b_i 值向量由 b 变为 \bar{b} 后,重新计算最终单纯形表右侧数值列的公式如下。

^① 还有一种原始对偶算法,无需任何转换便可直接用于此类单纯形表。

最终单纯形表第0行的右侧数值: $Z^* = y^* \bar{b}$ 。

最终单纯形表第($1, 2, \dots, m$)行的右侧数值: $b^* = S^* \bar{b}$ 。

(未发生变化的向量 y^* 与矩阵 S^* 在最终单纯形表中的位置可参见表 7.1 底部。)第一个等式具有内在的经济学含义,与 6.2 节开始部分所述的对偶变量的经济学含义类似。

向量 y^* 赋予对偶变量最优值,这些值可理解为相应资源的影子价格。尤其当 Z^* 和各 b_i 值分别代表通过原最优解 x^* 所求得的利润及配置的资源量 i 时, y_i^* 表示 b_i 每增加一个单位(即 b_i 的小幅增加)时的利润增加量。

示例(Wyndor Glass 公司模型变体 2): 通过检查对偶变量 y_i ($y_1^* = 0, y_2^* = 3/2, y_3^* = 1$) 的最优值,本书 3.1 节开始将灵敏度分析用于 Wyndor Glass 公司问题。影子价格为活动(开发两项新产品)的各项资源 i (工厂 i 的有效产能)赋予边际值,此处边际值的单位用 Z (每周数千美元的利润)表示。正如本书 4.7 节(图 4.8)的讨论,配置的资源 2(即 2 号工厂每周生产时间)每增加 1 单位,活动的总利润每周可增加 1500 美元(y_2^* 乘以 1000 美元/周)。这样的利润增长所需赋值变化相对较小,因此不会影响当前基本解的可行性(因此也不会影响 y_i^* 值)。

所以,运筹研究小组对该资源目前用于其他使用场合的盈利能力进行了调查,以确认是否存在周盈利不足 1500 美元的情况。调查显示,相比之下,某旧产品利润极低,其产量已降至最低,仅够维持营销成本。但该产品完全可以停产,以便为新产品再提供 12 个单元的资源 2。因此,下一步需确认如果这样做,会从新产品中盈利多少。这样一来,线性规划模型中的 b_2 会由 12 变为 24。图 7.2 通过图表展示这一变化的效果,包括角点解从 $(2, 6)$ 移至 $(-2, 12)$ (注意:由于约束条件 $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ 在本例中并未发生改变,因此图 7.2 中角点解与图 7.1 不同,后者角点解的描述对象是 Wyndor Glass 公司模型变体 1)。

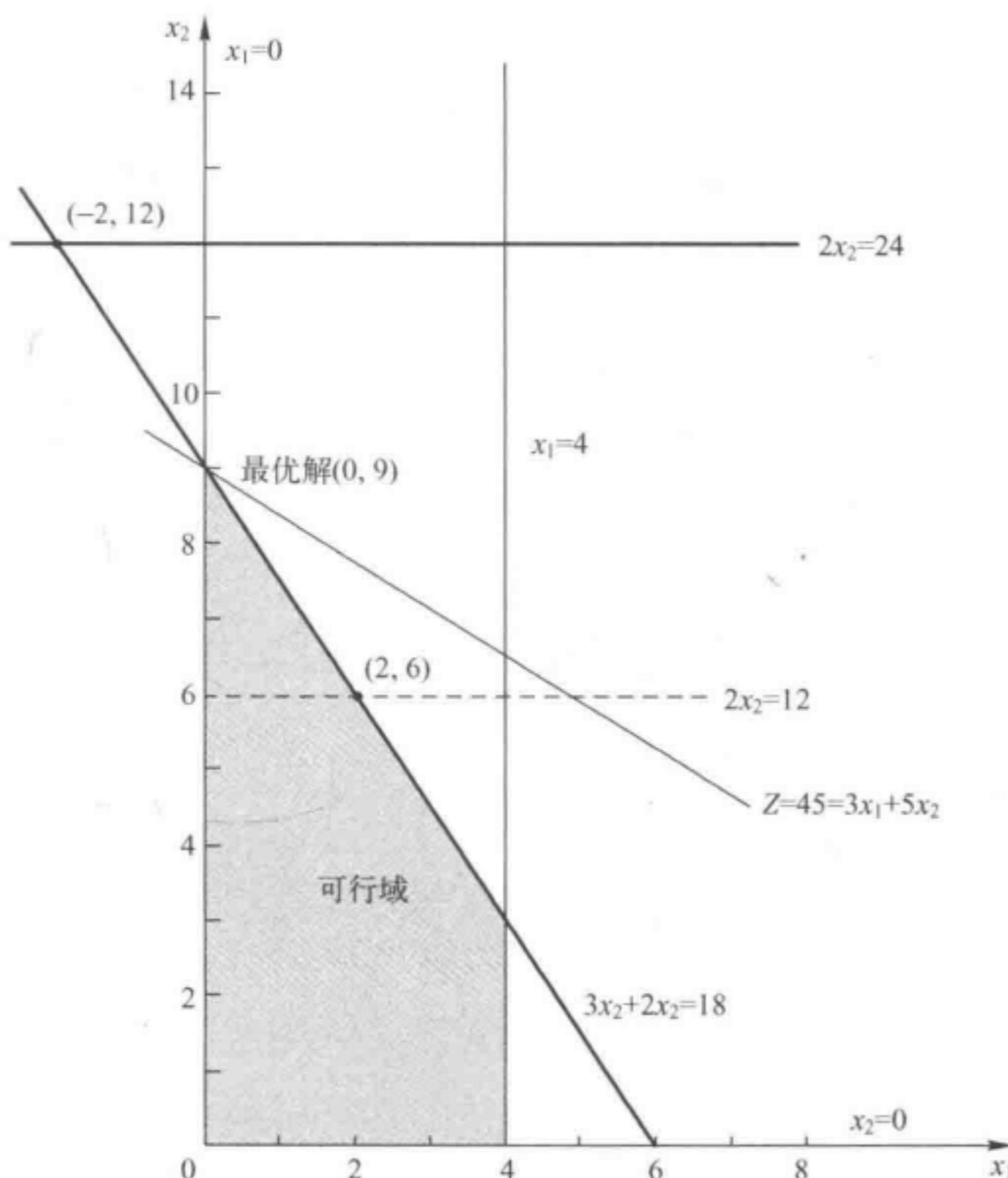


图 7.2 Wyndor Glass 公司模型变体 2 的可行域,其中 $b_2 = 12 \rightarrow 24$

这样,Wyndor Glass 公司模型变体 2 相对原模型的唯一改变如下(即对 b_i 向量值的修正):

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$$

所以,只有 b_2 被赋予新值。

对 Wyndor Glass 公司模型变体 2 的分析:应用(表 7.1)基本理念后,上述 b_2 的变化对原最终单纯形表(见表 7.3 中间部分)产生的影响是表中右侧数值发生如下变化:

$$Z^* = \mathbf{y}^* \bar{\mathbf{b}} = \left[0, \frac{3}{2}, 1 \right] \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix} = 54$$

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{y}^* \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ -2 \end{bmatrix}$$

因而

由于原模型唯一变化为 $\Delta b_2 = 24 - 12 = 12$, 因此可采用增量分析更为快速地求得相同解。增量分析仅涉及计算单纯形表中由原模型变化所产生的(一个或多个)增量值,然后将计算求得的增量值与初始值相加。本例中 Z^* 和 b^* 的增量如下:

$$\Delta Z^* = \mathbf{y}^* \Delta \mathbf{b} = \mathbf{y}^* \begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \\ \Delta b_3 \end{bmatrix} = \mathbf{y}^* \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{b}^* = \mathbf{S}^* \Delta \mathbf{b} = \mathbf{S}^* \begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \\ \Delta b_3 \end{bmatrix} = \mathbf{S}^* \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

因此,通过 \mathbf{y}^* 的第二个值以及 \mathbf{S}^* 的第二列值,仅需下列计算:

$$\Delta Z^* = \frac{3}{2}(12) = 18, \quad \text{因而 } Z^* = 36 + 18 = 54$$

$$\Delta b_1^* = \frac{1}{3}(12) = 4, \quad \text{因而 } b_1^* = 2 + 4 = 6$$

$$\Delta b_2^* = \frac{1}{2}(12) = 6, \quad \text{因而 } b_2^* = 6 + 6 = 12$$

$$\Delta b_3^* = -\frac{1}{3}(12) = 4, \quad \text{因而 } b_3^* = 2 - 4 = -2$$

其中,这些变量的初始值是通过原最终单纯形表(表 7.3 中间部分)右侧数值列求得。除了该列被赋予新值外,修正后的最终单纯形表与原最终单纯形表完全一致。

于是,当前基本解(原最优解)变为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2, 12, 6, 0, 0)$$

但由于存在负值,当前基本解没有通过可行性检验。此时,便可以修正后的单纯形表为起点,应用本书8.1节所述的对偶单纯形法重新求取最优解。该方法仅通过一步迭代运算便可求出新的最终单纯形表(表7.5)(同样,本例也可从一开始便使用单纯形法,并且该法也可仅通过一步迭代运算便得出同样的最终单纯形表)。最终单纯形表显示新的最优解为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 9, 4, 6, 0)$$

此时, $Z = 45$,与原先的 $Z = 36$ 相比,该最优解可使新产品增加9个单位的利润(即9000美元/周)。 $x_4 = 6$ 表明,在该解中,新增的12个单位资源2中有6个单位闲置未用。

根据 $b_2 = 24$ 这一结果,将停产相对利润极少的旧产品,而闲置未用的6个单位的资源2也可用于他日之需。由于 y_3^* 仍为正值,于是,对重新分配资源3的可能性进行了类似研究,但最终还是决定维持现有分配方式不变。因此,当前线性规划模型(即Wyndor Glass公司模型变体2)的参数值及最优解如表7.5所列。该模型将用作继续研究模型其他类型变化的起点,这些变化详见本节后面内容。但首先让我们以更广阔的视野看待当前这一案例。

右侧数值的允许范围:尽管对 b_2 而言, $\Delta b_2 = 12$ 的增长过大,以至无法维持基本解的可行性(及最优性),但上述增量分析也清晰表明对 b_2 而言,多大的增长是可行的。尤其需要注意的是

$$b_1^* = 2 + \frac{1}{3}\Delta b_2$$

$$b_2^* = 6 + \frac{1}{3}\Delta b_2$$

$$b_3^* = 2 - \frac{1}{3}\Delta b_2$$

此处,这3个量分别为该基本解对应的 x_3 、 x_2 和 x_1 的值。只要这3个量全部保持非负,该基本解便始终为可行解和最优解,即

$$2 + \frac{1}{3}\Delta b_2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{3}\Delta b_2 \geq -2 \Rightarrow \Delta b_2 \geq -6$$

表7.5 Wyndor Glass公司模型变体2的数据

		重新优化后的最终单纯形表						右侧 数值列		
基本变量	等式	变量的系数								
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
模型参数										
$c_1 = 3$,	$c_2 = 5$,	(n=2)	Z	(0)	1	$\frac{9}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	45
$a_{11} = 1$,	$a_{12} = 0$,	$b_1 = 4$	x_3	(1)	0	1	0	1	0	4
$a_{21} = 0$,	$a_{22} = 2$,	$b_2 = 24$	x_2	(2)	0	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	9
$a_{31} = 3$,	$a_{32} = 2$,	$b_3 = 18$	x_4	(3)	0	-3	0	1	-1	6

应用案例

2008年,太平洋木材公司(PALCO)被洪堡红木公司收购。此前,太平洋木材公司是一家总部位于加州斯科舍省(Scotia)的大型木材控股公司。当时,该公司拥有20余万英亩高产林地,供应加州北部洪堡县5家工厂。这些林地中曾有一些是全球最为壮观的红木林,由于这些红木林是作为公园建设的,其中的红木都是捐赠或是低价购得的。太平洋木材公司在严格遵守森林保护法的前提下,集中管理剩余林地用于可持续性木材生产。由于太平洋木材公司的森林中栖息着许多野生物种(包括诸如斑点猫头鹰和斑海雀等濒危物种),该司还需严格遵守联邦政府《濒危物种法》。

为制定可持续性生产计划,太平洋木材公司管理层与一运筹研究咨询小组签订合同,研发一项长达120年的12期森林生态系统管理计划。该运筹小组在满足诸多约束条件下,通过建立、应用线性规划模型,优化太平洋木材公司整体林地经营活动及盈利能力。该模型规模巨大,涵盖约8500个函数约束条件及353000个决策变量。

该线性规划模型在应用过程中所面临的最大挑战是模型参数估值方面存在诸多不确定性因素。不确定性的主要因素包括不断波动的市场供需变化、伐木成本及环保法规等。为此,运筹小组大量运用了详细灵敏度分析,得出的可持续性生产计划使太平洋木材公司资本净值净增逾3.98亿美元,同时,还生成了更为优化的野生动物栖息地配置方案。

来源:L. R. Fletcher, H. Alden, S. P. Holmen, D. P. Angelis, and M. J. Etzenhouser: "Long-Term Forest Ecosystem Planning at Pacific Lumber," *Interfaces*, 29(1):90-112, Jan-Feb. 1999. (我们的网址提供了本文链接:www.mhhe.com/hillier.)

$$6 + \frac{1}{2}\Delta b_2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\Delta b_2 \geq -6 \Rightarrow \Delta b_2 \geq -12$$

$$2 - \frac{1}{3}\Delta b_2 \geq 0 \Rightarrow 2 \geq \frac{1}{3}\Delta b_2 \Rightarrow \Delta b_2 \leq 6$$

由于 $b_2 = 12 + \Delta b_2$,因此,只有当 $-6 \leq \Delta b_2 \leq 6$,即 $6 \leq b_2 \leq 18$ 时,该解始终为可行解。

(可通过图7.2对该解进行图解检验。)正如本书4.7节所介绍的, b_2 的取值范围称为其允许范围。

本书4.7节曾讲到,对任何 b_i 而言,其允许范围便是当前BF最优解^①(其基本变量已经校正)保持可行的取值范围。因此,只要 b_i 不超出该允许范围,其影子价格赋值在评价对Z影响方面便始终有效(此处假设该模型的唯一变化只涉及 b_i 值的变化)。基本变量校正值则通过公式 $b^* = S^* \bar{b}$ 计算得出。然后,再根据 b_i 取值范围(使 $b^* \geq 0$)求出其允许范围。

许多线性规划软件包利用与该方法自动生成各 b_i 的允许范围(案例2a与案例3也讨论了类似方法,用于生成各 c_j 的允许范围)。本书第4章图4.10与图A4.2分别绘出了Solver和LINDO软件的相应输出结果。表7.6对该输出结果中与Wyndor Glass公司原模型相关的 b_i 进行了总结。例如, b_2 的允许增量与允许减量均为6,也就是说, $-6 \leq \Delta b_2 \leq 6$ 。上段所做分析介绍了这些值是如何算出的。

右侧数值同时发生变化的分析:多个 b_i 值同时改变时,可再次通过公式 $b^* = S^* \bar{b}$ 观察最终单纯形表右侧数值是如何变化的。如果所有右侧数值仍为非负数,则该可行性检查表明修正后的最终单纯形表所给出的依然为可行解。由于(0)行数值保持不变,意味着该可行解也是最优解^②。

尽管此方法可用于检查特定 b_i 值变化的影响,但对于确定所有 b_i 在原值基础上同时变化到什么程度,才会导致修正解为不可行解却帮助不大。作为后优化分析的一部分,机构管理层通常感兴趣的是不同决策变化(如配置给研究活动的资源量)所带来的影响,而这些决策变化决定了右侧数值的取值。管理层不仅需要考虑某组特定数值的变化,更希望探索右侧数值部分增加,同时部分减少的变化所产生的发展趋势。影子价格对此类探索十分有益。但影子价格仅在一定变化范围内才能有效评估对Z值变化的影响。对各 b_i 而言,如果其他 b_i 不同时发生变化,则其允许范围给出了其变化范围,但若干 b_i 同时变化时,允许范围是否还有效呢?

下面的百分之百法则可在一定程度上解答这一问题,该法则将各 b_i 允许变动量(允许增量或减量)结合到一起,如表7.6中最后两列数值所列。

右侧数值百分之百法则:同时改变某些约束条件的右侧数值,只要变化不大,影子价格就能有效预测此类变化所产生的影响。为检查变化是否处于合理范围,可计算各变动量占允许变动量(允

① 如果当前模型(即 b_i 未改变前的模型)BF最优解不止一个,此处所指最优解为通过单纯形法所求之解。

② 如果当前模型(即 b_i 未改变前的模型)BF最优解不止一个,此处所指最优解为通过单纯形法所求之解。

许增量或减量)的百分比,以使右侧数值处于其允许范围内。如变动百分比相加不超过 100%,影子价格就会继续有效(如果变动百分比相加超过 100%,便无法确定影子价格是否依然有效)。

示例(Wyndor Glass 公司模型变体 3):为说明右侧数值百分之百法则,对原模型右侧数值向量做出如下改变:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix}$$

该例中百分之百法则计算如下。

表 7.6 对 Wyndor Glass 公司原模型进行右侧数值灵敏度分析的典型软件输出结果

约束条件	影子价格	当前右侧数值	允许增量	允许减量
1号车间	0	4	∞	2
2号车间	1.5	12	6	6
3号车间	1	18	6	6

$$b_2: 12 \rightarrow 15 \quad \text{允许增量百分比} = 100 \left(\frac{15-12}{6} \right) = 50\%$$

$$b_3: 18 \rightarrow 15 \quad \text{允许减量百分比} = 100 \left(\frac{18-15}{6} \right) = 50\%$$

$$\text{总和} = 100\%$$

由于该例中变化百分比总和不超过 100%,因此影子价格能有效预测 Z 值变化所产生的影响。由于 b_2, b_3 影子价格分别为 1.5 和 1, Z 值的变化则为

$$\Delta Z = 1.5(3) + 1(-3) = 1.5$$

因此, Z^* 将由 36 增加至 37.5。

图 7.3 给出了该修正模型的可行域(虚线代表被修正约束条件的原边界线位置)。现在的最优解为 CPF 解(0, 7.5), 该解使得

$$Z = 3x_1 + 5x_2 = 0 + 5(7.5) = 37.5$$

这与影子价格的预测完全吻合。但需要注意的是,如果 b_2 继续增加至大于 15,或 b_3 继续减少至小于 15,允许变化量的百分比总和将超过 100%,此时,会使先前求得的最优角点解向 x_2 轴 ($x_1 < 0$) 左侧偏移,因此该不可行解不再是最优解。因此,以前的影子价格也不再是预测 Z^* 新值的有效手段。

案例 2a: 改变非基变量系数。

假设某变量 x_j (其中 j 值固定不变)为最终单纯形表最优解的非基变量。在案例 2a 中,当前模型唯一变化是该变量一个或多个系数($c_j, a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$)发生了变化。因此,令 \bar{c}_j, \bar{a}_{ij} 表示这些参数的新值,其中 \bar{A}_j (矩阵 \bar{A} 的 j 列)为包含 \bar{a}_{ij} 的向量,于是修正模型新解为

$$c_j \rightarrow \bar{c}_j, A_j \rightarrow \bar{A}_j$$

正如本书 6.5 节开篇所述,对偶理论为检验这些变化提供了一种简便易行的方法。尤其当对偶问题的互补基本解 y^* 仍满足唯一改变的对偶约束条件时,原始问题的初始最优解仍保持最优。相反,如果 y^* 违反了该对偶约束条件,该初始解不再是最优解。

最优解改变后,如果想要求出新解,其实非常简单。只需运用基本理念对最终单纯形表 x_j 列(因为仅该列数值发生变化)做出修正即可。具体说来,表 7.1 中公式简化如下。

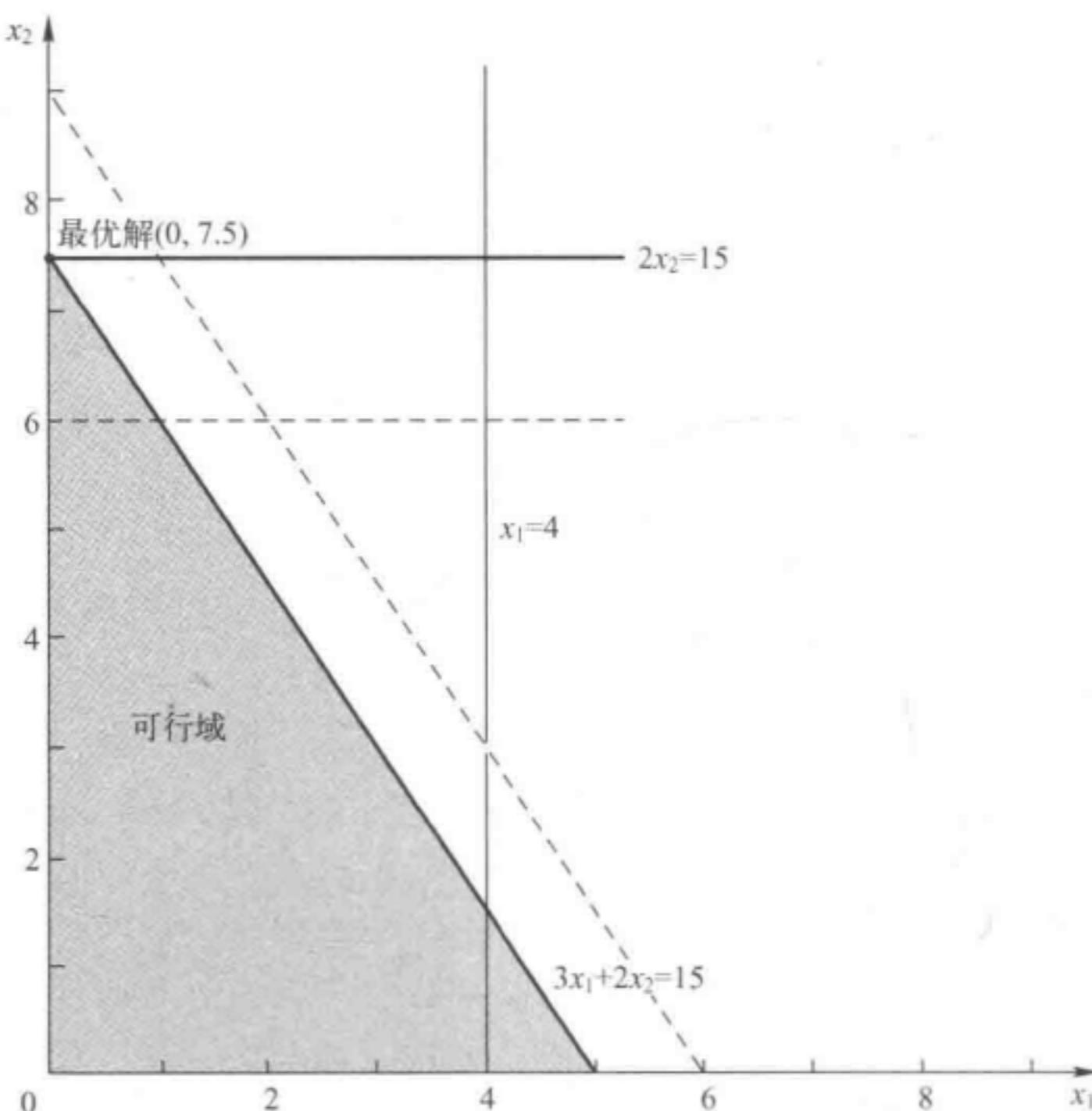


图 7.3 Wyndor Glass 公司模型变体 3 的可行域, 其中 $b_2=12 \rightarrow 15, b_3=18 \rightarrow 15$

最终单纯形表第 0 行 x_j 的系数: $z_j^* - \bar{c}_j = y^* \bar{A}_j - \bar{c}_j$ 。

最终单纯形表第 1 至第 m 行 x_j 的系数: $A_j^* = S^* \bar{A}_j$ 。

由于当前基本解不再是最优解, 第 0 行的负系数便成为 $z_j^* - c_j$ 的新值。所以, 需以 x_j 为初始进基变量, 重新开始单纯形法运算。

需要注意的是, 该过程为 7.1 节结尾处所述灵敏度分析一般程序的简化版。由于(重新优化前的)最终单纯形表在修正过程中仅涉及改变非基变量 x_j 列值, 所以上述一般程序的第三步(通过高斯消去法转换为恰当形式)和第四步(可行性检查)由于不相关而删掉了。第五步(最优化检查)由速度更快的最优化检查所取代, 该检查在完成第一步(模型修正)后马上进行。只有当该检查表明最优解已发生变化, 且希望求得新解时, 才需要进行一般程序所述的第二步(修正最终单纯形表)和第六步(重新优化)。

示例(Wyndor Glass 公司模型变体 4): 由于 x_1 为当前 Wyndor Glass 公司模型变体 2 的最优解(表 7.5)的非基变量, 接下来的灵敏度分析工作是检验 x_1 系数估值合理变化情况下, 引入产品 1 是否仍可取。使产品 1 更具吸引力且切实可行的一组变化应为: 重新令 $c_1=4, a_{31}=2$ 。在此, 我们不对这些变化分别检验(尽管灵敏度分析通常如此), 而是同时考察。因此, 此处需要考虑的变化为

$$c_1 = 3 \rightarrow \bar{c}_1 = 4, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow = \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

从 Wyndor Glass 公司模型变体 2 的上述两项变化可得出该公司模型变体 4。事实上, 变体 4 等同于 7.1 节及图 7.1 所描述的该公司模型变体 1, 因为变体 1 将上述两项变化(即产生该公司模型变化二的 $b_2=12 \rightarrow 24$)结合到了一起。但与 7.1 节所述变体 1 相比, 在处理方法上的主要区别在于分析变体 4 时, 变体 2 被视为原模型, 因此表 7.5 中最终单纯形表(其中, x_1 在此成为非基变量)成为分析的起点。

a_{31} 的变化将可行域从图 7.2 所示范围修正至图 7.4 所示相应区域。 c_1 的变化将目标函数从 $Z = 3x_1 + 5x_2$ 变为 $Z = 4x_1 + 5x_2$ 。图 7.4 表明最优功能函数线 $Z = 45 = 4x_1 + 5x_2$ 仍穿过当前最优解 $(0, 9)$, 因此 a_{31} 与 c_1 变化后, 该解仍为最优解。

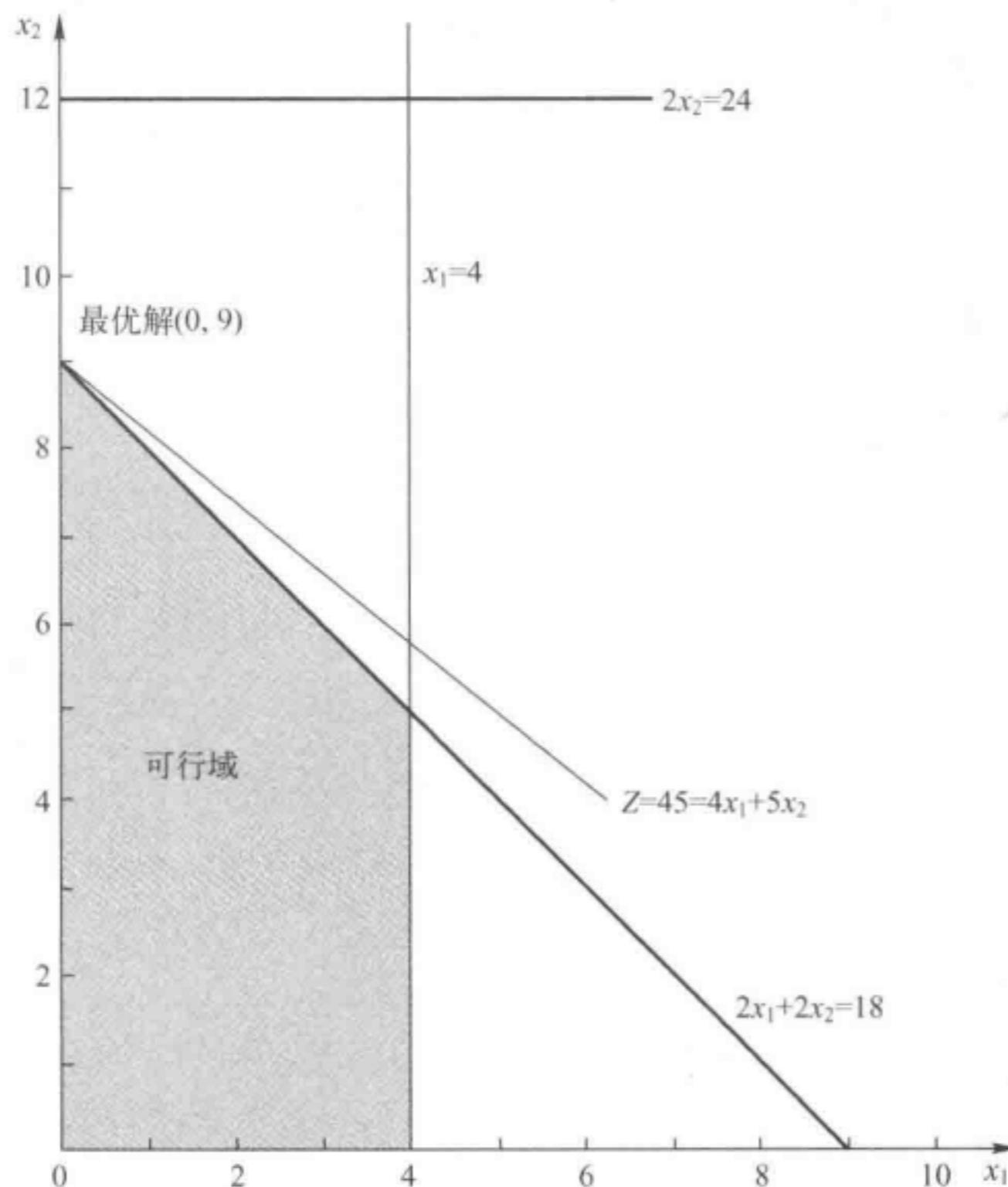


图 7.4 Wyndor Glass 公司模型变体 4 的可行域, 该域是对模型变体 2(图 6.3)所做的修正, 因此 $a_{31} = 3 \rightarrow 2, c_1 = 3 \rightarrow 4$

若要通过对偶理论得出同样结论, 需要注意 c_1 与 a_{31} 的变化使该对偶问题产生一个唯一改进约束条件, 即 $a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 \geq c_1$ 。该约束条件与当前 y^* 值(即表 7.5 第 0 行中的松弛变量系数)为

$$y_1^* = 0, y_2^* = 0, y_3^* = \frac{5}{2}$$

$$y_1 + 3y_3 \geq 3 \longrightarrow y_1 + 2y_3 \geq 4$$

$$0 + 2\left(\frac{5}{2}\right) \geq 4$$

由于 y^* 值仍满足改进约束条件, 因此当前初始解(表 7.5)仍为最优解。

因为该解仍为最优解, 所以无需修改最终单纯形表 x_j 列数值(即“灵敏度分析”第二步)。不过, 为便于说明, 下面仍对 x_j 列数值进行修改, 即

$$z_1^* - \bar{c}_1 = y^* \bar{A}_1 - c_1 \left[0, 0, \frac{5}{2} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - 4 = 1$$

$$A_1^* = S * \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$z_1^* - c_1 \geq 0$ 这一事实再次证明当前解的最优性。由于 $z_1^* - c_1$ 为上述对偶问题改进制约条件的剩余变量,这一最优性检验方法与前述检验方法等效。

将当前模型(即变体2)改至变体4的效果分析至此结束。由于对系数 x_1 原始赋值进行任何较大改动均不切实际,运筹研究小组认定这些系数为当前模型的非敏感参数,因此在接下来的灵敏度分析中将保持这些参数最佳赋值(表7.5)不变,即 $c_1 = 3, a_{31} = 3$ 。

非基变量目标函数系数的允许范围:以上对非基变量 x_j 系数同时变化时的分析方法进行了描述、讲解。通常,灵敏度分析主要研究仅改变单一参数 c_j 后的效果。本书4.7节对找到 c_j 的允许范围的方法进行了简化。

回顾本书4.7节所述,可知对任何 c_j 而言,其允许范围就是当前最优解(即 c_j 变化前,通过单纯形法求得的当前模型最优解)保持最优的全部取值范围(此处假设 c_j 的变化为当前模型唯一变化)。当 x_j 为当前最优解非基变量时,只要 $z_j^* - c_j \geq 0$ (其中 $z_j^* = y^* A_j$ 为不受 c_j 值变化影响的常量),该解便始终为最优解。因此,通过 $c_j \leq y^* A_j$ 便可计算求得 c_j 的允许范围。

以 Wyndor Glass 公司的当前模型(即变体2,见表7.5左侧数据总结)为例,其中当前最优解($c_1 = 3$ 时)为右侧数值。仅考虑决策变量 x_1 和 x_2 ,该最优解为 $(x_1, x_2) = (0, 9)$,如图7.2所示。

如果仅 c_1 发生变化,只要 $c_1 \leq y^* A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 7\frac{1}{2}$,该解仍保持最优。

因而, $c_1 \leq 7\frac{1}{2}$ 为允许范围。

计算此类向量乘法的另一方法,可关注表7.5中: $c_1 = 3$ 时, $z_1^* - c_1 = \frac{9}{2}$ (即 x_1 的第0行的系数),所以 $z_1^* = 3 + \frac{9}{2} = 7\frac{1}{2}$ 。因为 $z_1^* = y^* A_1$,所以该方法可立刻得出相同的允许范围。

图7.2为 $c_1 \leq 7\frac{1}{2}$ 之所以成为允许范围提供了图形化视角。当 $c_1 = 7\frac{1}{2}$ 时,目标函数为 $Z = 7.5x_1 + 5x_2 = 2.5(3x_1 + 2x_2)$,所以最优目标函数线将位于约束条件边界线 $3x_1 + 2x_2 = 18$ 之上(图7.2)。因此,在该允许范围的末端存在多个最优解,均位于 $(0, 9)$ 与 $(4, 3)$ 之间的线段上。如果 c_1 有所增大(即 $c_1 > 7\frac{1}{2}$),则仅 $(4, 3)$ 为最优解,因此,为使 $(0, 9)$ 仍保持为最优解,需 $c_1 \leq 7\frac{1}{2}$ 。

对任何非基决策变量 $x_j, z_j^* - c_j$ 的值有时称作 x_j 的减少成本,因为该值代表活动 j 必须降低的最小单位成本,否则,该活动便失去实施的意义(使 $x_j > 0$)。将 c_j 理解为活动 j 的单位收益(因此,单位成本降低多少, c_j 便会增加多少),则 $z_j^* - c_j$ 的值是保持当前 BF 最优解前提下 c_j 最大允许增加值。

通过线性规划软件包得出的灵敏度分析数据通常包括减少成本和目标函数中各系数的允许范围两项内容(以及表7.6所列信息类型)。图4.10为通过Solver获得的数据,图A4.1与A4.2为通过LINGO和LINDO所获得的数据。表7.7展示了当前模型(Wyndor Glass公司模型变体2)信息的典型模式。最后3列数值用于计算各系数的允许范围,因此其允许范围为

$$c_1 \leq 3 + 4.5 = 7.5$$

$$c_2 \geq 5 - 3 = 2$$

正如本书4.7节所述,如果任一允许增量或允许减量值为零,则意味表中所列最优解仅为多个最优解之一。此时,改变相应系数,使其在允许范围内略大于零,并重新求解,便可得出原模型另一CPF最优解。

至此,我们描述了对非基变量如何计算表 7.7 所列的信息类型的方法。但对于诸如 x_2 等基本变量,其减少成本自动为 0。案例 3 将讨论 x_j 为基本变量时,如何获得 c_j 的允许范围。

目标函数系数同时变化时的分析:无论 x_j 为基本变量还是非基变量,仅当该目标函数系数为唯一变化量时, c_j 的允许范围方为有效。然而,如果目标函数系数同时改变,可运用百分之百法则检验原解是否仍为最优解。该法则与处理右侧数值同时变化的百分之百法则大同小异,也将各 c_j 的允许变化量(允许增量或允许减量)彼此结合(这些允许变化量类似表 7.7 中最后两列数值),现描述如下。

处理目标函数系数同步变化时的百分之百法则:如果目标函数系数同时改变,计算各变动量占允许变动量(允许增量或减量)的百分比,以使该系数处于其允许范围内。如变动百分比之和未超过 100%,原最优解必仍为最优(如变动百分比之和超过 100%,则无法确保原最优解仍为最优解)。

表 7.7 Wyndor Glass 公司模型变体 2 目标函数系数灵敏度分析的典型软件输出值

变量	值	减少成本	当前系数	允许增量	允许减量
x_1	0	4.5	3	4.5	∞
x_2	9	0	5	∞	3

根据表 7.7(并参看图 7.2),百分之百法则表明,即使同时令 $c_1 > 3, c_2 < 5$,只要变化不过大,(0,9) 仍将是 Wyndor Glass 公司模型变体 2 的最优解。例如,如果 c_1 增加 1.5(即允许变化量的 $33\frac{1}{3}\%$),则 c_2 至多可减少 2(即允许变化量的 $66\frac{2}{3}\%$)。同样,如果 c_1 增加 3(即允许变化量的 $66\frac{2}{3}\%$),则 c_2 最多只能减少 1(即允许变化量的 $33\frac{1}{3}\%$)。上述最大变化量使目标函数变为 $Z = 4.5x_1 + 3x_2$,或变为 $Z = 6x_1 + 4x_2$,无论哪个变化均使图 7.2 中最优目标函数线发生顺时针方向旋转,直至与约束条件边界方程 $3x_1 + 2x_2 = 18$ 重合为止。

总之,目标函数系数同向改变时,允许变化量百分比之和大于 100% 时,最优解却可能保持不变。案例 3 讨论结束时将给出一个相关示例。

案例 2b:引入新变量。

求得最优解后,我们会发现线性规划并未考虑全部具有吸引力的备选活动。考虑一项新活动需要为当前模型的目标函数引入一个新变量、相应系数以及约束条件(即案例 2b)。

处理案例 2b 的便捷方法便是将其完全视为案例 2a。也就是假设原模型实际包括该新变量 x_j ,只是其所有系数均等于 0(以便这些系数在最终单纯形表中仍为 0),且 x_j 为当前 BF 解的非基变量。因此,如果将这些 0 系数变为其在新变量下的实际值,该过程(包括所有重新优化的步骤)则会与案例 2a 的过程完全相同。

特别是在当检验当前解是否仍为最优解时,仅需检验互补基本解 y^* 是否满足新对偶约束条件,该约束条件与原始问题新增变量相对应。6.5 节对此已有涉及,并通过 Wyndor Glass 公司问题对其进行了阐释。

案例 3:基本变量系数的变化。

现在假设被研究变量 x_j (j 值固定)为最终单纯形表中最优解的一个基本变量。案例 3 假设当前模型的唯一变化为该基本变量系数的变化。

案例 3 有别于案例 2a 之处在于,通过高斯消去法获得的单纯形表需要保持适当形式。这一要求使得非基变量列可任意取值,因而对案例 2a 没有影响。但案例 3 基本变量 x_j 对应行在单纯形表内必须有一个系数为 1,且其余行的系数为 0(包括(0)行)。因此,计算求得最终单纯形表

x_j 列变化值后^①, 可能还需如表 7.4 所列, 用高斯消去法再获得最终单纯形表的适当形式。但这样做反过来可能会改变当前基本解值, 使其成为不可行解或非最优解(从而需要进行重新优化)。因此, 案例 3 需执行 7.1 节结束部分所总结程序的全部步骤。

在应用高斯消去法前, 用于修正案例 3 中 x_j 列数值的公式与用于修正案例 2a 的相同, 现总结如下:

最终单纯形表第 0 行的 x_j 系数: $z_j^* - \bar{c}_j = y^* \bar{A}_j - \bar{c}_j$

最终单纯形表第 1 至第 m 行的 x_j 系数: $A_j^* = S^* \bar{A}_j$

示例(Wyndor Glass 公司模型变体 5): 因为 x_2 为表 7.5 Wyndor Glass 公司模型变体 2 的基本变量, 对其系数的灵敏度分析同样适用于案例 3。由于当前最优解为 $(x_1=0, x_2=9)$, 所以, 产品 2 是当前唯一应当引入的新产品, 且应采用较高生产率。因此, 目前的关键问题是用于求出当前模型(即变体 2) x_2 系数的初始赋值是否过高, 而导致所得结论并不成立。该问题可通过检验这些系数合理赋值的最保守集(即 $c_2=3, a_{22}=3, a_{32}=4$)予以验证。由此, 需要研究的变化(Wyndor Glass 公司模型变体 5)包括:

$$c_2 = 5 \rightarrow \bar{c}_2 = 3, A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

如图所示, 这些变化使图 7.2 中的可行域变为图 7.5 的可行域。图 7.2 的最优解为 $(x_1, x_2) = (0, 9)$, 这是位于 $x_1=0$ 和 $3x_1+2x_2=18$ 这两条约束边界交叉点的角点解。约束条件修改后, 图 7.5 的对应角点解则为 $(0, 9/2)$ 。但修正后的目标函数 $Z = 3x_1 + 3x_2$ 下产生了一个新最优解 $(x_1, x_2) = (4, 3/2)$, 因此原解不再是最优解。

分析 Wyndor Glass 公司模型变体: 现在看一下如何通过代数方法得出与上述相同的结论。由于变体 5 中仅 x_2 的系数发生了改变, 所以最终单纯形表(表 7.5)的唯一变化是 x_2 列。因此, 可用上述案例 3 的公式重新计算该列数值, 即

$$z_2 - \bar{c}_2 = y^* \bar{A}_2 - \bar{c}_2 = \left[0, 0, \frac{5}{2} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - 3 = 7$$

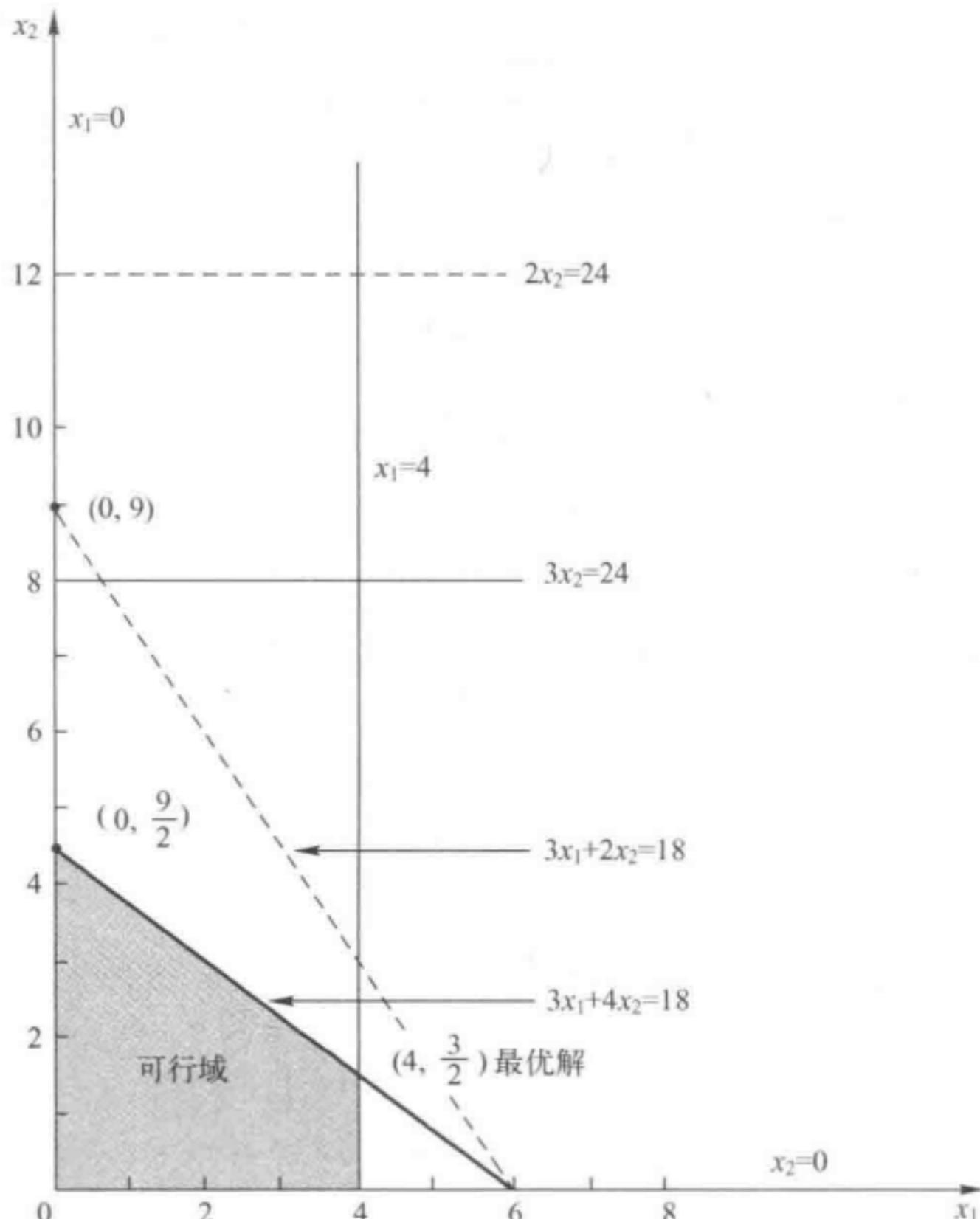


图 7.5 Wyndor Glass 公司模型变体 5 的可行域, 该图是对模型变体 2(图 7.2)所做的修正, 因此 $c_2=5 \rightarrow 3, a_{22}=2 \rightarrow 3, a_{32}=2 \rightarrow 4$

^① 对较为了解该领域的读者, 在此应当指出案例 3 存在一个可能缺陷。尤需指出的是, 初始单纯形表中的变化可能破坏基本变量系数列的线性无关性。不过, 这种情况只有当最终单纯形表基本变量 x_j 的单位系数在该点变为 0 时才会发生。在此情况下, 案例 3 必须采用更多的单纯形法计算。

$$A_2^* = S^* \bar{A}_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(可以相同方式运用增量分析计算求得该列数值,也是等效的。即 $\Delta c_2 = -2$ 、 $\Delta a_{22} = 1$ 、 $\Delta a_{32} = 2$ 。)

表 7.8 上部为修正后的最终单纯形表。需要注意的是,基本变量 x_2 的新系数值与要求不符,所以下一步必须通过高斯消去法将该表变为适当形式。该步包括将第(2)行数值除以 2、用第(0)行数值减去新求得第(2)行数值与 7 的乘积,最后将新求得第(2)行数值与第(3)行数值相加。

表 7.8 中通过该步求得的第二个单纯形表给出了当前基本解的新值,即 $x_3 = 4$ 、 $x_2 = 9/2$ 、 $x_4 = 21/2$ ($x_1 = 0$, $x_5 = 0$)。由于所有这些变量均为非负数,所以该解仍为可行解。但从第(0)行中 x_1 系数为负可知该解不再为最优解。因此,对第二个单纯形表运用单纯形法,并以新基本解作为 BF 初始解来计算新最优解。初始进基变量为 x_1 ,出基变量为 x_3 。本例仅需一步迭代运算便可求得新最优解 $x_1 = 4$ 、 $x_2 = 3/2$ 、 $x_4 = 39/2$ ($x_3 = 0$, $x_5 = 0$),见表 7.8 中最后一个单纯形表。

上述分析表明, c_2 、 a_{22} 和 a_{32} 为相对敏感参数。但用于进一步分析这些参数的数据仅可通过试运行获取。因此,运筹研究小组建议立即开始小规模 ($x_2 = 3/2$) 生产产品 2,并将该经验用于决策指导,以确定剩余产能应配置给产品 2 还是给产品 1。

基本变量目标函数系数的允许范围:

案例 2a 描述了如何求解所有 c_j 允许范围的方法,其中 x_j 为当前(即 c_j 未改变时)最优解的非基变量。但当 x_j 成为基本变量时,求解所有 c_j 允许范围这一过程却变得更为复杂,这是因为需要利用高斯消去法先将最终单纯形表转变为适当形式,然后再检查其最优性。

为阐明这一过程,考虑 Wyndor Glass 公司模型变体 5(其中 $c_2 = 3$ 、 $a_{22} = 3$ 、 $a_{23} = 4$)。图 7.5 为该变体的图解分析,表 7.8 列出了该变体的解。由于 x_2 是表 7.8 底部所列最优解(其中 $c_2 = 3$)的基本变量,所以计算 c_2 允许范围的步骤如下。

表 7.8 Wyndor Glass 公司模型变体 5 敏感度分析程序

	基本变量	等式	下列参数系数						右侧数 值列
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
修正后的最终单纯形表	Z	(0)	1	$\frac{9}{2}$	7	0	0	$\frac{5}{2}$	45
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_2	(2)	0	$\frac{3}{2}$	2	0	0	$\frac{1}{2}$	9
	x_4	(3)	0	-3	-1	0	1	-1	6
转换为适当形式的最终单纯形表	Z	(0)	1	$-\frac{3}{4}$	0	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{27}{2}$
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_2	(2)	0	$\frac{3}{4}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{2}$
	x_4	(3)	0	$-\frac{9}{4}$	0	0	1	$-\frac{3}{4}$	$\frac{21}{2}$
重新优化后的新最终单纯形表(本 例仅需一步单纯形法迭代运算)	Z	(0)	1	0	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{33}{2}$
	x_1	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_2	(2)	0	0	1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$
	x_4	(3)	0	0	0	$\frac{9}{4}$	1	$-\frac{3}{4}$	$\frac{39}{2}$

(1) 因为 x_2 为基本变量, 在此需注意, 其在新最终单纯形表的第(0)行系数(见表 7.8 下部的单纯形表)在 c_2 未发生改变前(c_2 当前值为 3)自动变为 $z_2^* - c_2 = 0$ 。

(2) 现在使 $c_2 = 3$ 增加一个量 Δc_2 (即 $c_2 = 3 + \Delta c_2$)。于是, 上述第一步所关注的系数变为 $z_2^* - c_2 = -\Delta c_2$, 因此第(0)行变为

$$(0) \text{ 行数值} = \left[0, -\Delta c_2, \frac{3}{4}, 0, \frac{3}{4} \mid \frac{33}{2} \right]$$

(3) 由于该系数现在为非 0, 在此必须进行初步行运算, 通过高斯消去法再得到最终单纯形表的适当形式。尤其需将产量与第(0)行数值相加, 用第(2)行数值乘以 Δc_2 计算第(0)行的新值, 过程为

$$\begin{aligned} & \left[0, -\Delta c_2, \frac{3}{4}, 0, \frac{3}{4} \mid \frac{33}{2} \right] \\ & + \left[0, -\Delta c_2, -\frac{3}{4}\Delta c_2, 0, \frac{1}{4}\Delta c_2 \mid \frac{3}{2}\Delta c_2 \right] \\ \hline \text{第(0)行的新值} = & \left[0, 0, \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\Delta c_2, 0, \frac{3}{4} + \Delta c_2 \mid \frac{33}{2} + \frac{3}{2}\Delta c_2 \right] \end{aligned}$$

(4) 利用第(0)行的新值求解 Δc_2 取值范围, 该范围应使非基变量(x_3 与 x_5)的系数为非负数:

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\Delta c_2 \geq 0 \Rightarrow \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}\Delta c_2 \Rightarrow \Delta c_2 \leq 1$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\Delta c_2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}\Delta c_2 \geq -\frac{3}{4} \Rightarrow \Delta c_2 \geq -3$$

因此, Δc_2 取值范围为 $-3 \leq \Delta c_2 \leq 1$ 。

(5) 由于 $c_2 = 3 + \Delta c_2$, 将 Δc_2 的取值范围加 3 可得 $0 \leq c_2 \leq 4$, 即为 c_2 的允许范围。

由于仅有两个决策变量, 该取值范围可通过图 7.5 及目标函数 $Z = 3x_1 + c_2 x_2$ 进行图解验证。

又因为 c_2 当前值为 3, 所以最优解为 $\left(4, \frac{3}{2}\right)$ 。在 c_2 增大时, 只要 $c_2 \leq 4$, 该解仍为最优解。但当

$c_2 \geq 4$ 时, 由于约束条件边界为 $3x_1 + 4x_2 = 18$, $\left(0, \frac{9}{2}\right)$ 成为最优解(其中 $c_2 = 4$ 时, 上述两个条件的解相交)。相反, c_2 减小时, 只有当 $c_2 \geq 0$ 时, $\left(4, \frac{3}{2}\right)$ 仍为最优解。当 $c_2 \leq 0$ 时, 由于约束条件边界为 $x_1 = 4, (4, 0)$ 成为最优解。

c_1 的取值范围(其中 c_2 值固定为 3)可以类似方式求出, 即可通过代数方法或图解方法得出 $c_1 \geq \frac{9}{4}$ (习题 7.2-10 要求使用这两种方法对取值范围进行验证)。

因此, c_1 当前值为 3 时, 其可减少量仅为 $\frac{3}{4}$ 。但 c_2 如果同时大幅降低, c_1 也可大幅减小, 且

不影响最优解。例如, c_1 和 c_2 当前值为 3, 假设二者均减去 1, 则目标函数由 $Z = 3x_1 + 3x_2$ 变为 $Z = 2x_1 + 2x_2$ 。根据用于目标函数系数同时变化的百分之百法则, 二者的允许变化量百分比分别为

$133\frac{1}{3}\%$ 和 $33\frac{1}{3}\%$, 二者之和远高于 100%。但目标函数斜线丝毫不变, 因此 $\left(4, \frac{3}{2}\right)$ 仍为最优解。

案例 4: 引入新约束条件。

本例中, 尽管已求得模型的解, 但还必须引入一个新的约束条件。其原因在于: 模型建立之初, 可能忽略了该约束条件; 或者模型建立后, 可能又产生了新想法; 还有可能是由于该约束条件

似乎不及模型中其他约束条件严格,因此被刻意删除以降低计算量,但现在为了检验已获得解的最优性,需要重新考虑已删除的约束条件。

检验新约束条件会否影响当前最优解仅需直接检验该最优解是否满足新约束条件便可。如果满足,即使模型新增了约束条件,该解仍为最优可行解(即最优解)。这是因为新约束条件只能消去某些以前求得的可行解,却不能增加任何新的可行解。

如果当前最优解确实不满足新约束条件,且仍需要求出新解,此时,需在最终单纯形表内重新设置一行,以引入该条件,同时仅将该最终单纯形表视为初始单纯形表,并且设计附加变量(松弛变量或人工变量)作为新增行的基本变量。由于新增行的某些其他基本变量有非零系数,因此下一步需运用高斯消去法将单纯形表变换至其适当形式,然后再进行重新优化运算。

与前述某些案例相同,上述案例 4 的分析过程也是 7.1 节结尾部分所述灵敏度分析过程的简化形式。案例 4 唯一需要解决的问题便是此前求得的最优解是否仍为可行解,因此省略了分析过程第五步(最优性检验)。分析过程第四步(可行性检验)由更简便的可行性检验(即检验此前求得的最优解是否满足新约束条件)所取代,该验证在第一步(模型修正)结束后便可马上进行。只有当该检验结果为负数且希望对其重新优化时,方需进行第二步、第三步和第六步(即修正最终单纯形表、通过高斯消去法转换为恰当形式及重新优化)。

示例(Wyndor Glass 公司模型变体 6):为说明上述情况,以 Wyndor Glass 公司模型变体 6 为例,变体 6 只是在变体 2(表 7.5)模型基础上新增约束条件 $2x_1 + 3x_2 \leq 24$,其图解分析见图 7.6。由于以前的最优解(0,9)不满足新约束条件,所以新最优解变为(0,8)。

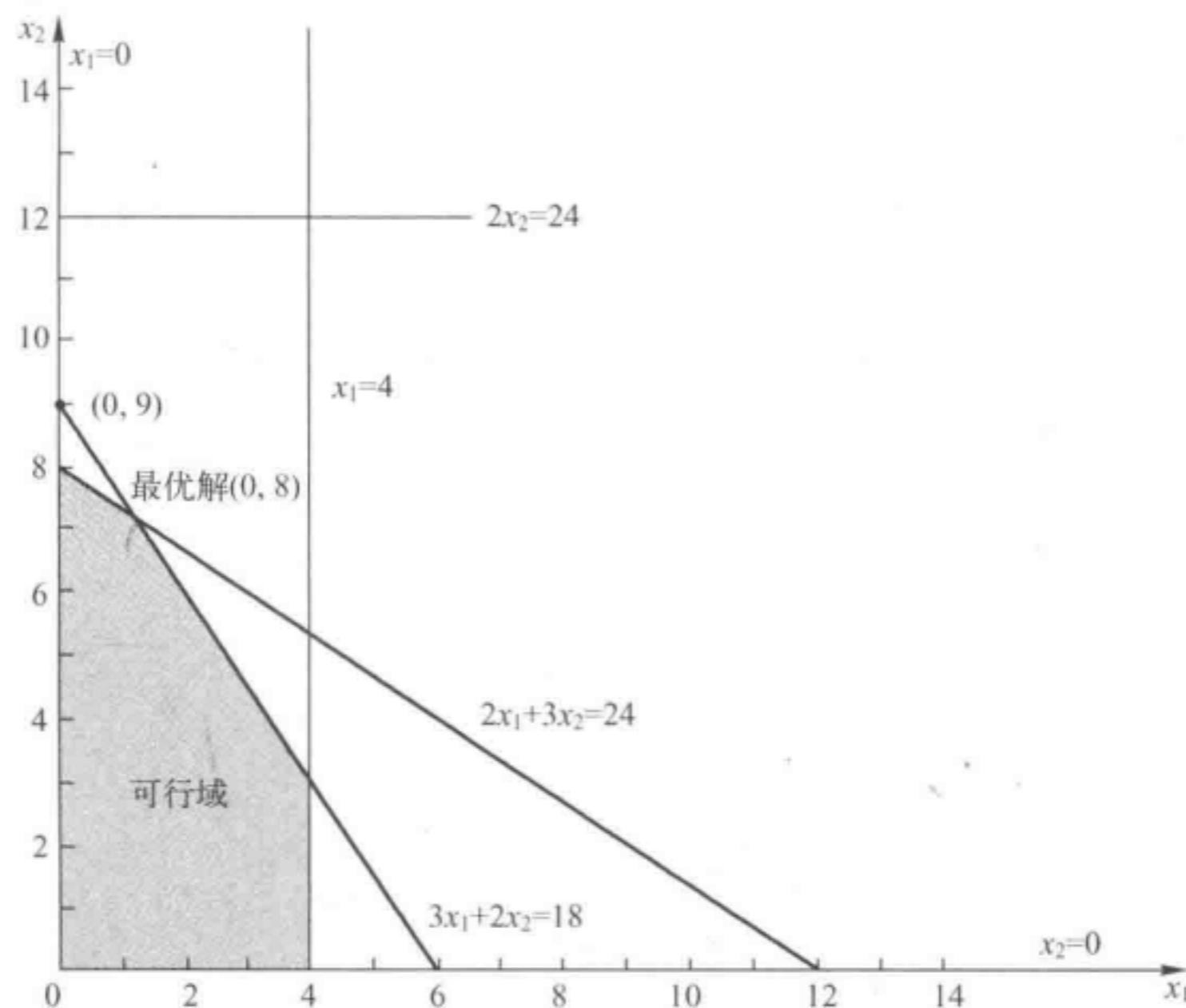


图 7.6 Wyndor Glass 公司模型变体 6 的可行域。变体 6 由变体 2 新增约束条件($2x_1 + 3x_2 \leq 24$)后修正得出

以代数方法分析该例时,请注意根据此前的最优解(0,9)可得出 $2x_1 + 3x_2 = 27 > 24$,所以该解不再可行。要得到新最优解,需按上文所述,将新增约束条件引入当前最终单纯形表,引入松弛变量 x_6 作为初始基本变量。这一步可得出表 7.9 中第一个单纯形表。然后,通过高斯消去法将最终单纯形表转化为恰当形式。这一要求从新行产品数值减去第(2)行数值乘以 3,于是,求出当前基本解 $x_3 = 4, x_2 = 9, x_4 = 6, x_6 = -3 (x_1 = 0, x_5 = 0)$,见表 7.9 中第二个单纯形表。在第二个单纯形表中运用对偶单纯形法(见 8.1 节所述内容),仅通过一步迭代运算(有时需要多步),便求

得表 7.9 中最后一个单纯形表中的最优解。

表 7.9 Wyndor Glass 公司模型变化六敏感度分析程序

	基本变量	等式	下列参数系数							右侧数 值列
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
修正后的最终单纯形表	Z	(0)	1	$\frac{9}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$	0	45
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	0	4
	x_2	(2)	0	$\frac{3}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	9
	x_4	(3)	0	-3	0	0	1	-1	0	6
	x_6	New	0	2	3	0	0	0	1	24
变换为适当形式的最终单纯形表	Z	(0)	1	$\frac{9}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$	0	45
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	0	4
	x_2	(2)	0	$\frac{3}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	9
	x_4	(3)	0	-3	0	0	1	-1	0	6
	x_6	New	0	$-\frac{5}{2}$	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	1	-3
重新优化后新的最终单纯形表(本例仅需一步对偶单纯形法迭代运算)	Z	(0)	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	$\frac{5}{3}$	40
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	0	4
	x_2	(2)	0	$\frac{2}{3}$	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	8
	x_4	(3)	0	$-\frac{4}{3}$	0	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	8
	x_6	New	0	$\frac{5}{3}$	0	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	2

至此,本章描述了检验模型参数具体变化的不同方法,而灵敏度分析的另一常用方法,即参数线性规划法,则通过连续改变某个或某些参数,以查看最优解何时出现变化。8.2节将讲述参数线性规划算法。

7.3 通过电子表格进行灵敏度分析^①

Solver 软件的电子表格,为 7.1 节、7.2 节所述的大部分灵敏度分析提供了另一种相对简单的计算方法。电子表格法在处理 7.2 节所述案例原模型的不同变化时,方法基本相同。因此,在此仅重点研究(7.2 节案例 2a 和案例 3)目标函数变量的系数变化所产生的影响。通过改变 3.1 节所建立的 Wyndor Glass 公司原模型,将对上述影响进行分析。原模型目标函数中 x_1 (即每周新型门的生产批量)与 x_2 (即每周新型窗的生产批量)的系数分别为

$$c_1 = 3 = \text{每批新型门的利润(以“千美元”为单位)}$$

$$c_2 = 5 = \text{每批新型窗的利润(以“千美元”为单位)}$$

为便于阅读,将(图 3.22 中)该模型的电子表格形式复制于图 7.7 中。此处需要是,“每批次利润”单元格(C4:D4)中含有需要变化的量。

① 本节内容无需参阅本章前两节亦可理解,但本节后半部分内容则需要 4.7 节所讲述的重要背景知识。

电子表格实际可提供3种灵敏度分析方法。第一种方法是仅在电子表格中做出一项变动，然后重新求解来检验该变动所产生的效果。第二种方法是在同一电子表格内系统地生成一张表，用以显示模型中一到两个参数发生一系列变化后的效果。第三种方法是生成并应用Excel灵敏度报告。下面逐一讲解这3种方法。

7.3.1 检验模型单个参数变化

电子表格优势之一是可交互式地进行不同类型的灵敏度分析。利用Solver软件建立最优解模型时，若模型中有一个参数值发生变化，其效果会立竿见影显现出来。此时，仅需在电子表格中修改该参数值，然后单击“Solve”按键即可。为便于说明，假设Wyndor Glass公司管理层对每批次门的利润(c_1)并不十分确定。尽管可认为图7.7中每批次利润值3000美元是一个合理的初始赋值，但管理层仍感觉实际利润可能与该值大相径庭，既可能是远高于也可能是远低于该值。不过， c_1 的取值范围为2~5是很有可能的。

	B	C	D	E	F	G
1	Wyndor Glass公司产品线问题					
2						
3		门	窗户			
4	每批次利润 /千美元	3	5			
5				时间/h		时间/h
6		各批次生产时间/h		已用时间/h		可用时间/h
7	1号车间	1	0	2	<	4
8	2号车间	0	2	12	\leq	12
9	3号车间	3	2	18	\leq	18
10						
11		门	窗户			总利润/千美元
12	生产批量	2	6			36

Solver参数

将目标单元格：“总利润”
设置为：最大值
改变变量单元格生产量
约束条件为：
已用时间(h) \leq 可用时间(h)

Solver选项：

变量为非负数

求解方法：单纯法

	E
5	时间/h
6	使用时间/h
7	=对应单元格乘积之和(C7:D7,生产批量)
8	=对应单元格乘积之和(C8:D8,生产批量)
9	=对应单元格乘积之和(C9:D9,生产批量)

	G
11	总利润
12	=对应单元格乘积之和(每批次利润,生产批量)

区域名称	单元格
生产批量	C12:D12
可用时间/h	G7:9
已用时间/h	E7:E9
每批次生产时间/h	C7:D9
每批次利润	C4:D4
总润	G12

图7.7 灵敏度分析之前，Wyndor Glass公司原模型问题的电子表格模型及最优解

图7.8展示了每批次门的利润由 $c_1=3$ 降为 $c_1=2$ 后的结果,与图7.7相比,产品线最优解未发生任何变化。事实上,新电子表格的唯一变化是单元格C4中的新 c_1 值,以及单元格G12中总利润减少了2000美金(因为每周生产的两批门中,每批利润均降低1000美金)。由最优解未发生变化可知 c_1 原赋值3过高,尽管该值并未使模型最优解成为不可行解。

	B	C	D	E	F	G
1	Wyndor Glass公司产品线问题					
2						
3		门	窗户			
4	每批次利润 /千美元	2	5			
5				时间/h		时间/h
6		每批次生产时间/h		已用时间/h		可用时间/h
7	1号车间	1	0	2	\leq	4
8	2号车间	0	2	12	\leq	12
9	3号车间	3	2	18	\leq	18
10						
11		门	窗户			总利润/千美元
12	生产批量	2	6			34

图7.8 修改后的Wyndor Glass公司产品线问题,其中每批次门的利润赋值由 $c_1=3$ 改为 $c_1=2$,但产品线最优解未发生变化

但如果该赋值过低又会出现何种结果呢?图7.9显示若 c_1 增至5时所产生的结果。同样,最优解仍未变化。因此,可令当前最优解保持其最优性的 c_1 取值范围(即7.2节所讨论的允许范围)为2~5,甚至还能更大。

	A	B	C	D	E	F	G
1	Wyndor Glass公司产品线问题						
2							
3		门	窗户				
4	每批次利润 /千美元	5	5				
5				时间/h		时间/h	
6		各批次生产时间/h		已用时间/h		可用时间/h	
7	1号车间	1	0	2	\leq	4	
8	2号车间	0	2	12	\leq	12	
9	3号车间	3	2	18	\leq	18	
10							
11		门	窗户			总利润/千美元	
12	生产批量	2	6				4

图7.9 修改后的Wyndor Glass公司产品线问题,其中每批次门的利润赋值由 $c_1=3$ 改为 $c_1=5$,但产品线最优解未发生变化

由于 c_1 初始值 3 既可较大幅度增加,也可较大幅度减小,且均不会改变最优解,所以 c_1 为相对非敏感参数。因此,没必要对其进行非常精确的赋值,也能得到模型的最优解。

关于 c_1 仅需了解这些内容或已足够。但如果 c_1 真值超出 2~5 这一范围时,可能还需做进一步研究 c_1 超出或低于该范围多少时,最优解仍保持不变。

图 7.10 表明, c_1 如果一直增大到 10 时,最优解确实会发生变化。由此可知,在 c_1 从 5 增加到 10 的过程中,最优解发生了改变。

	A	B	C	D	E	F	G
1	Wyndor Glass 公司产品线问题						
2							
3		门	窗户				
4	每批次利润 /千美元	10	5				
5				时间/h		时间/h	
6		各批次生产时间/h		已用时间/h		可用时间/h	
7	1号车间	1	0	4	\leq	4	
8	2号车间	0	2	6	\leq	12	
9	3号车间	3	2	18	\leq	18	
10							
11		门	窗户				总利润/千美元
12	生产批量	4	3				55

图 7.10 修改后的 Wyndor Glass 公司产品线问题,其中每批次门的利润赋值由 $c_1=3$ 改为 $c_1=10$,产品线最优解随之发生变化

7.3.2 运用参数分析报告进行系统性灵敏度分析

为确定最优解何时发生变化,可为随机 c_1 连续赋值,但更好的方法是系统考虑 c_1 的取值范围。3.5 节的教学版 Solver 分析平台(ASPE)可用于生成参数分析报告。本书附赠该软件安装说明,也可从本书网站 www.mhhe.com/hillier 下载该说明。

当数据单元格中含有能发生系统性变化的参数(本例中单元格 C4 中的“每批次门的利润”)时,该单元格即称为参数单元格。参数分析报告是用于显示参数单元格引入不同试验值后,改变单元格和/或目标单元格所产生的变化。各试验值所产生的变化结果均由 Solver 软件获取用以重新求解。

要生成参数分析报告,应首先定义参数单元格。本例应选择单元格 C4(即“每批次门的利润”),并在 ASPE 平台菜单栏的“参数”菜单下,选择“优化”选项。在图 7.11 所示的参数单元格对话框内输入参数单元格试验值范围,输入值表明 c_1 将从 1 至 10 进行有条理的变化。需要时,也可以同样方法定义其他参数单元格的试验值范围,但此处跳过该步。

下一步选择(ASPE)平台菜单栏中“报告”菜单下的“优化”>“参数分析”选项,弹出图 7.12 所示对话框,在此可规定发生变化的参数单元格有哪些,以及显示哪些变化结果。通过该对话框下半部分的“参数”选项可选出需要变化的参数单元。单击(>>)可选择目前定义的所有参数单元格(并将这些单元格全部移至对话框右侧)。Wyndor Glass 公司案例中仅定义了一个参数单元格,因此只有一个参数单元格(即“每批次门的利润”,或单元格 C4)会出现在对话框

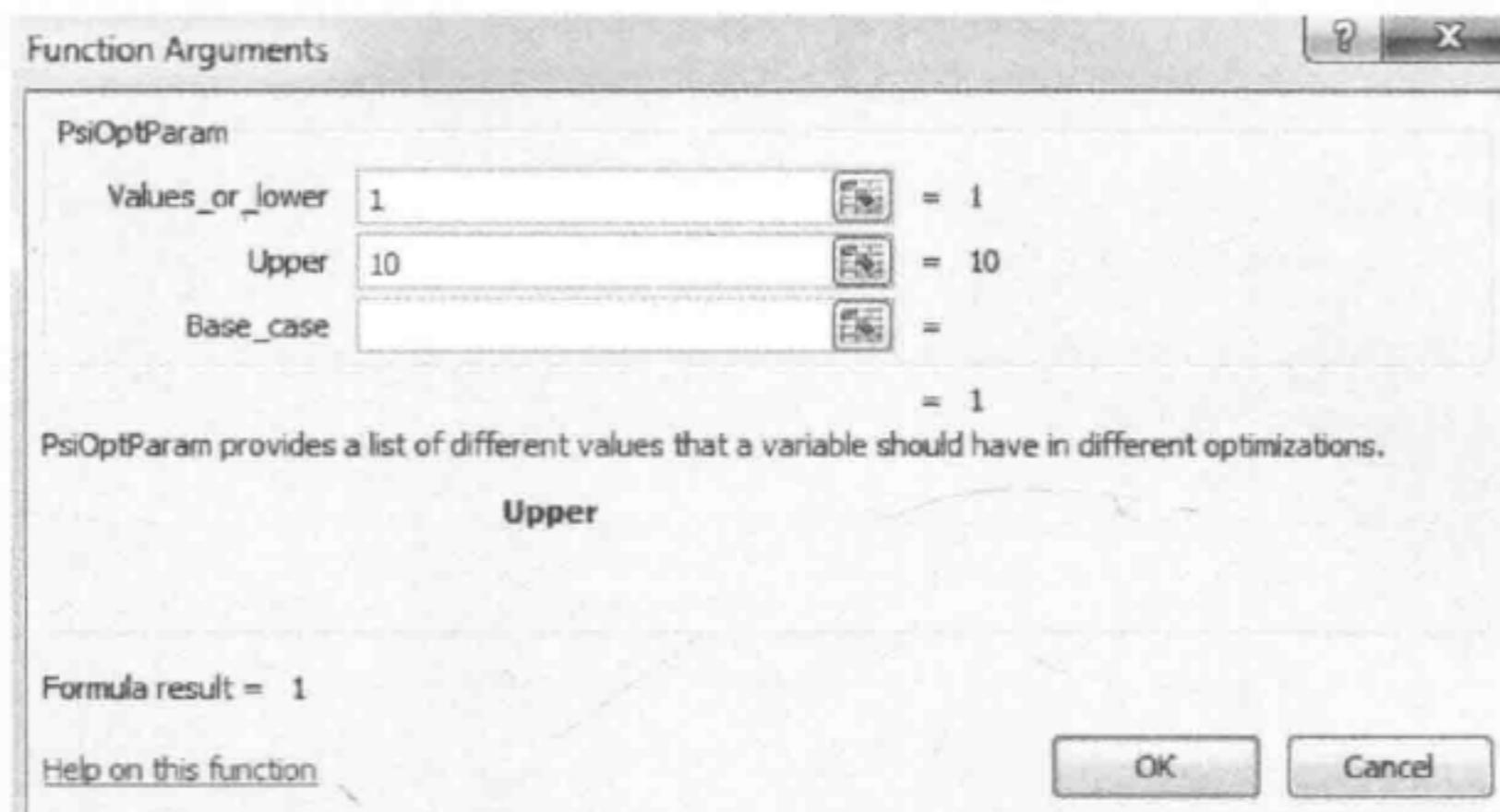


图 7.11 c_1 (即单元格 C4)参数单元对话框表明该参数单元格将从 1 至 10 有系统地发生变化

右侧。如果定义了多个参数单元格,可单击“Wyndor”旁的+号查看“Wyndor”电子表格所列参数单元格清单,并选出某些参数单元格进行分析。单击(>)可将单个参数单元格移至右侧清单内。

可从对话框上部选择参数单元格变化时需要显示的结果。单击(>),所有变化单元格(即“门的生产批量”或 C12 单元格)及目标单元格(即“总利润”或 G12 单元格)均将显示在右侧清单中。若要选择上述单元格下的某一子选项,可点击“变化单元格”(或“目标单元格”)旁的小+号,便可看到全部变化单元格(或目标单元格),然后点击(>),将所需变化单元格(或目标单元格)移至右侧。

最后,输入长轴点数量,以定义参数分析报告中需显示多少个该参数单元格的不同赋值。这些赋值将平均分布于图 7.11 所示参数单元对话框的上限值和下限值之间。该图参数分析报告有 10 个长轴点,其下限值为 1,上限值为 10,因此报告将显示 c_1 赋值由 1 到 10 的均匀变化结果。

单击“OK”键便可生成图 7.13 中的参数分析报告。报告第一列的试验值将逐一输入参数单元格(即“每批次门的利润”,或单元格 C4),并通过 Solver 软件重新求解该问题,由此求得的某试验值最优结果便显示于表的其余列内,即“门的生产批量”列(C4)、“窗户生产批量”列(D4)及“总利润”列(G12)。这一过程会自动用参数单元格中剩余各试验值进行重复运算,并最终生成图 7.13 所列完整的参数分析报告(如果是小型问题,报告很快便会生成)。

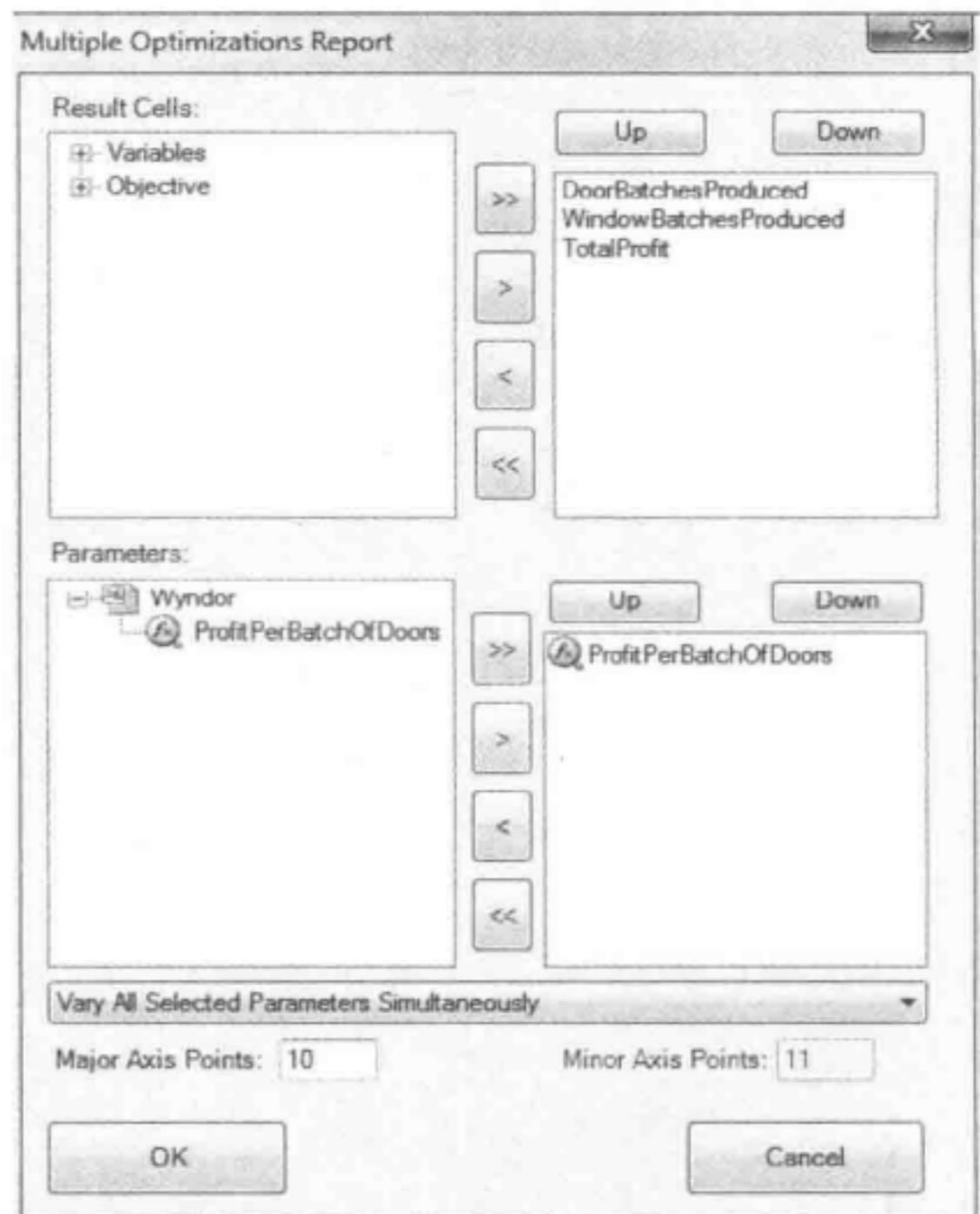


图 7.12 此处,用于解决 Wyndor Glass 公司产品线问题的参数分析报告对话框表明“每批次门的利润”(即单元格 C4)这一参数单元将发生变化,且所有变化单元(即“门的生产批量”及“窗的生产批量”)与目标单元(即“总利润”)的变化结果均会显示出来

	A	B	C	D
1	每批次门的利润	门的生产批量	窗户生产批量	总利润
2	1	2	6	32
3	2	2	6	34
4	3	2	6	36
5	4	2	6	38
6	5	2	6	40
7	6	2	6	42
8	7	2	6	44
9	8		3	47
10	9	4	3	51
11	10	4	3	55

图 7.13 该参数分析报告显示了 Wyndor Glass 公司产品线问题中“每批次门的利润”发生均匀变化后的结果

参数分析报告表明,当 c_1 取值为 1(或许小于 1 时)~7 时,最优解保持不变,但 c_1 取值为 7~8 的某数值时,最优解开始改变。接下来便可考虑 c_1 取值为 7~8 均匀变化时的情况,以便更精确地找出 c_1 为何值时最优解发生变化。但该步也并非必不可少,因为后面还将很快论述,可使用 Excel 敏感度报告这一更便捷的方法求出 c_1 到底为何值时最优解会发生变化。

至此已阐释了只改变 c_1 (即图 7.7 中的单元格 C4)时,考察其均匀变化结果的方法。该方法同样适用于 c_2 (即单元格 D4)。事实上,参数分析报告还可用于考察模型任一单个数据单元格变化的结果,包括“可用时间(h)”(G7:G9)或“每批次生产时间(h)”(C7:D9)中的任一有单元格。

下面讲解考察同一电子表格内两个数据单元同时变化的方法。首先用电子表格,然后再利用参数分析报告对变化结果予以研究。

7.3.3 检验模型双向变化

使用 c_1 和 c_2 的初始赋值 3 和 5 时,模型最优解(图 7.7)倾向于多生产窗户(每周生产 6 批)、少生产门(每周仅生产 2 批)。假设 Wyndor Glass 公司管理层对这一生产不平衡现象表示关注,觉得这一问题或许是由 c_1 赋值过低,而 c_2 赋值过高所致,那么,便引发如下问题:如果 c_1 赋值增加、 c_2 赋值减小,能否产生一个更为平衡、利润最高的产品线呢(此处需牢记 c_1 与 c_2 之比才是确定最优产品线的关键,因此,即使 c_1 、 c_2 赋值发生同向变化,但二者比值变化不大亦不可能改变最优产品线)?

回答这一问题只几秒钟时间,仅需用新值替代图 7.7 中原电子表格的“每批次利润”,然后单击 Solve 键即可。图 7.14 表明将“每批次门的利润”与“每批次窗的利润”分别赋值为 4.5 和 4 时,不会使产品线最优解发生任何变化(尽管总利润发生变化,但这仅是因为“每批次利润”赋值发生了改变)。如果“每批次利润”赋值在更大范围内变化,最终是否会改变产品线最优解?图 7.15 表明,确会如此,当“每批次门的利润”为 6、“每批次窗的利润”为 3 时,便产生一个相对平衡的产品线(x_1, x_2)=(4,3)。

图 7.14 与图 7.15 并未说明当“每批次门的利润”从 4.5 增至 6、“每批次窗的利润”从 4 减至 3 时,产品线最优解是受哪个赋值影响而发生变化。下面介绍参数分析报告如何更好地系统解决这一问题。

	A	B	C	D	E	F	G
1	Wyndor Glass 公司产品线问题						
2							
3		门	窗户				
4	每批次利润 /千美元	4.5	4				
5				时间/h		时间/h	
6		各批次生产时间为 33h		已用时间/h		可用时间/h	
7	1号车间	1	0	2	\leq	4	
8	2号车间	0	2	12	<	12	
9	3号车间	3	2	18	\leq	18	
10							
11		门	窗户			总利润/千美元	
12	生产批量	2	6				33

图 7.14 修改后的 Wyndor Glass 公司产品线问题,其中“每批次门的利润”与“每批次窗的利润”赋值分别变为 $c_1=4.5$ 与 $c_2=4$,但最优产品线未发生任何变化

	A	B	C	D	E	F	G
1	Wyndor Glass 公司产品线问题						
2							
3		门	窗户				
4	每批次利润 /千美元	6	3				
5				时间/h		时间/h	
6		各批次生产时间		已用时间/h		可用时间/h	
7	1号车间	1	0	4	\leq	4	
8	2号车间	0	2	6	\leq	12	
9	3号车间	3	2	18	\leq	18	
10							
11		门	窗户			总利润/千美元	
12	生产批量	4	3				33

图 7.15 修改后的 Wyndor Glass 公司产品线问题,其中“每批次门的利润”与“每批次窗的利润”赋值分别变为 6 与 3,导致最优产品线发生变化

7.3.4 利用双向参数分析报告(ASPE)分析上述问题

当每批次门窗利润赋值均不精确时,基于 Solver 教育分析平台(ASPE)生成双向参数分析报告,提供了一个系统考察方式。该参数分析报告将上述两个参数单元的不同试验值所产生的结果显示于一个输出单元内。因此,该参数分析报告可用于显示图 5.1 中“总利润”(G12)是如何根据上述两个参数单元(即“每批次门的利润”,或单元格 C4 与“每批次窗的利润”,或单元格 D4)试验值的取值范围而变化的。针对两个参数单元格内的试验值,Solver 软件可进行重新求解。

要创建 Wyndor Glass 公司产品线问题的双向参数分析报告,需将“每批次门的利润”(C4)与“每批次窗户利润”(D4)均定义为参数单元。接下来,选择 C4 和 D4 单元,再选择 ASPE 平台菜单栏中“参数”菜单下的“优化”选项,然后输入各参数单元试验值范围(与 7.3.2 节图 7.11 做法相同)。本例中“每批次门的利润”(C4)取值变化为 3~6、“每批次窗户利润”(D4)取值变化为 1~5。

然后,选择 ASPE 平台菜单栏中报告菜单下的“优化>参数分析”选项,弹出图 7.16 所示对话框。双参数分析报告需选出两个参数单元,但仅显示一个计算结果。单击“参数”菜单中(>>)键,可同时选择两个被定义参数单元“每批次门的利润”(C4)和“每批次窗户利润”(D4)。单击“结果单元”下(<<)键,清除右侧对话框清单中的参数单元,单击“目标单元”旁+号按钮可显示“总利润”目标单元(即单元格 G12),然后选择“总利润”,再单击(>)键将其移至右侧。

接下来,选择图 7.16 中菜单底部的“分别改变两个被选参数”选项,这样两个参数单元试验值便可在各自的全部取值范围内进行变化。参数分析报告中的“长轴点”和“短轴点”两项内则分别输入第一个和第二个参数单元各自的赋值。这些值将均匀分布于各参数单元参数对话框所规定的取值范围内。

因此,如图 7.16 所示,分别选择 4 和 5 作为第一个和第二个参数单元各自的试验值赋值,则“每批次门的利润”将在 3、4、5、6 4 个值之间变化。同时,“每批次窗户利润”将在 1、2、3、4、5 5 个值之间变化。

单击“OK”按钮,生成图 7.17 中的参数分析报告。该报告中第一列和第一行为各参数单元的试验值。对于第一列与第一行的各试验值组合,Solver 均求解了所关注的输出单元格的值(本例中为“目标单元”),并将该值输入到了本表相应的单元格内。

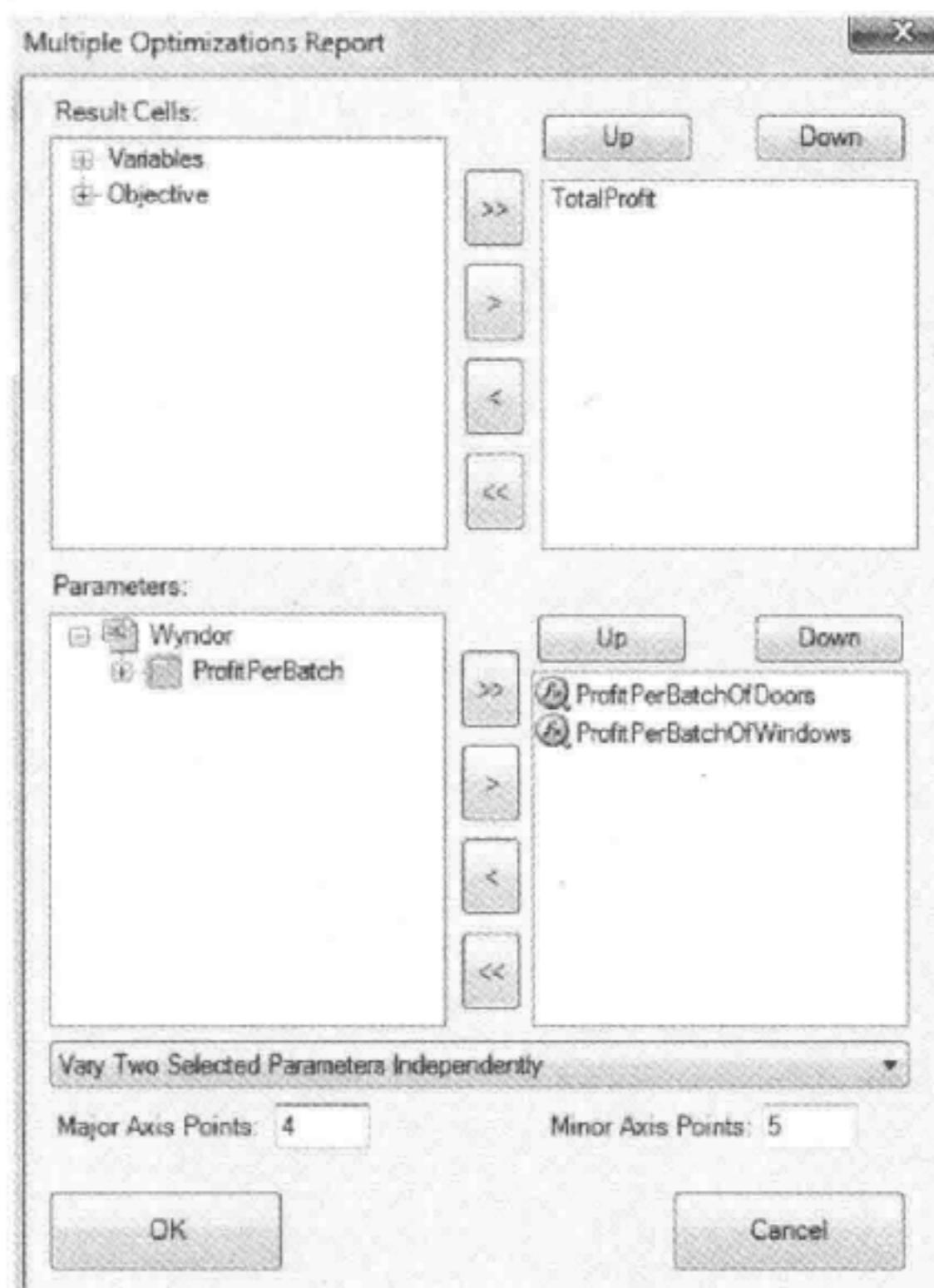


图 7.16 用于解决 Wyndor Glass 公司产品线问题的参数分析报告对话框表明:“每批次门的利润”(C4)以及“每批次窗户利润”(D4)这两个参数单元将发生变化,且将显示目标单元(即“总利润”(G12))的变化结果

	A	B	C	D	E	F
1	总利润	每批次窗户利润▼				
2	每批次门的利润▼		1	2	3	4
3			15	18	24	30
4			19	22	26	32
5			23	26	29	34
6			27	30	33	36
						42

图 7.17 该参数分析报告表明,均匀改变 Wyndor Glass 公司产品线问题中“每批次门的利润”(C4)和“每批次窗户利润”(D4)赋值后,“总利润”(G12)变化的情况

除“总利润”(G12)外,还可选择“门的生产批量”(C12)或“窗户生产批量”(D12)显示在图7.16对话框中“结果”一栏,于是,可生成一个类似的参数分析报告,显示为获取最优单位利润,第一列与第一行不同试验值组合下应生产的最佳门、窗数量。图7.18显示了上述两个参数分析报告。当“每批次门的利润”与“每批次窗户利润”分别采用原估值3和5时,两个报告右上角(即F3单元格)取值的组合,便是本例最优解 $(x_1, x_2) = (2, 6)$ 。从F3向下方单元格移动,意味着增加“每批次门的利润”的赋值,而向左移动则意味着降低“每批次窗户利润”的赋值(由于H26上方或右侧单元格的变化只会增加 $(x_1, x_2) = (2, 6)$ 作为最优解的优越性,因此报告中并未显示这些单元格)。注意: $(x_1, x_2) = (2, 6)$ 仍是H26附近所有单元格的最优解。这意味着每批次产品利润原赋值不必十分精确,亦不会影响本产品线最优解。

	A	B	C	D	E	F
1	门的生产批量	每批次窗户利润▼				
2	每批次门的利润▼		1	2	3	4
3	3		4	2	2	2
4	4		4		2	2
5	5		4	4	2	2
6	6		4	4	2	2

	A	B	C	D	E	F
1	窗户生产批量	每批次窗户利润▼				
2	每批次门的利润▼		1	2	3	4
3	3		3	6	6	6
4	4		3	3	6	6
5	5		3	3	3	6
6	6		3	3	3	6

图7.18 双参数分析报告表明,均匀改变Wyndor Glass公司产品线问题中门、窗的单位利润赋值后,门、窗的最优产量变化情况

7.3.5 利用灵敏度报告进行灵敏度分析

至此,我们已了解如何利用电子表格轻松进行某些灵敏度分析。一种方法是分别改变数据单元赋值,然后重新求解;另一种方法是通过参数分析报告均匀生成类似数据。还有另一种更为简便的方法,仅通过Solver提供的灵敏度报告便可更为快速、精确地获得相同(甚至更多)数据(其他线性规划软件包输出数据也可生成同样的灵敏度报告,如MPL/Solvers、LINDO和LINGO)。

4.7节讨论了灵敏度报告,并讲述了利用其进行灵敏度分析的方法。4.7节图4.10展示了Wyndor Glass公司问题的灵敏度报告。图7.19显示了该报告的部分内容。此处不再对4.7节进行赘述,而是重点阐释灵敏度报告如何有效解决本章前两节所提出的Wyndor Glass公司相关具体问题的。

本章前两节所考虑的问题是,当前最优解 $(x_1, x_2) = (2, 6)$ 不发生改变的情况下, c_1 初始赋值以3为起点的变化范围。图7.9和图7.10表明, c_1 取值在5~10的某数时,最优解才会发生变化。图7.13进一步将该最优解发生变化的范围缩小到7~8。图7.13还表明,如果 c_1 初始赋值3取值过高,而非过低,那么,需将其减小至小于1时,最优解才会发生改变。

现在来看一下图7.19中的灵敏度报告是如何解决这一问题的。该报告中“门的生产批量”一行给出 c_1 下列数据:

c_1 当前值: 3

c_1 允许增量: 4.5

因而, $c_1 \leq 3 + 4.5 = 7.5$

c_1 允许减量: 3

因而, $c_1 \geq 3 - 3 = 0$

c_1 允许范围: $0 \leq c_1 \leq 7.5$

因此, 如果仅改变 c_1 当前值(不对模型作任何改变), 只要 c_1 新值不超出 $0 < c_1 < 7.5$ 这一允许范围, 当前最优解 $(x_1, x_2) = (2, 6)$ 就不会改变。

单元格	名称	终值	减少成本	目标函数系数	允许增量	允许减量
\$C\$12	门的生产批量	2	0	3	4.5	3
\$D\$12	窗户生产批量	6	0	5	1E+30	3

图 7.19 图为 Wyndor Glass 公司原模型问题(图 6.3)灵敏度报告中的一部分, 由 Solver 生成。

其中, 最后 3 列表明各批次门、窗利润的允许范围

图 7.20 以图解方式标明该允许范围。当 c_1 取其原值 3 时, 图中实线表明目标函数斜线穿过 $(2, 6)$ 点。当 c_1 取其允许范围下限, 即 $c_1=0$ 时, 穿过 $(2, 6)$ 点的目标函数线为图中直线 B, 因此由点 $(0, 6)$ 与 $(2, 6)$ 组成的线段上任一点均为最优解。当 c_1 为任一小于 0 的数值时, 目标函数线将进一步旋转, 因此 $(0, 6)$ 成为唯一最优解。当 c_1 取其允许范围上限, 即 $c_1=7.5$ 时, 穿过 $(2, 6)$ 的目标函数线为图中直线 C, 因此由点 $(2, 6)$ 与 $(4, 3)$ 组成的线段上任一点均为最优解。当 c_1 为任一大于 7.5 的数值时, 目标函数线甚至比直线 C 更为陡峭, 因此 $(4, 3)$ 成为唯一最优解。所以只有当 $0 \leq c_1 \leq 7.5$ 时, 原最优解 $(x_1, x_2) = (2, 6)$ 保持不变。

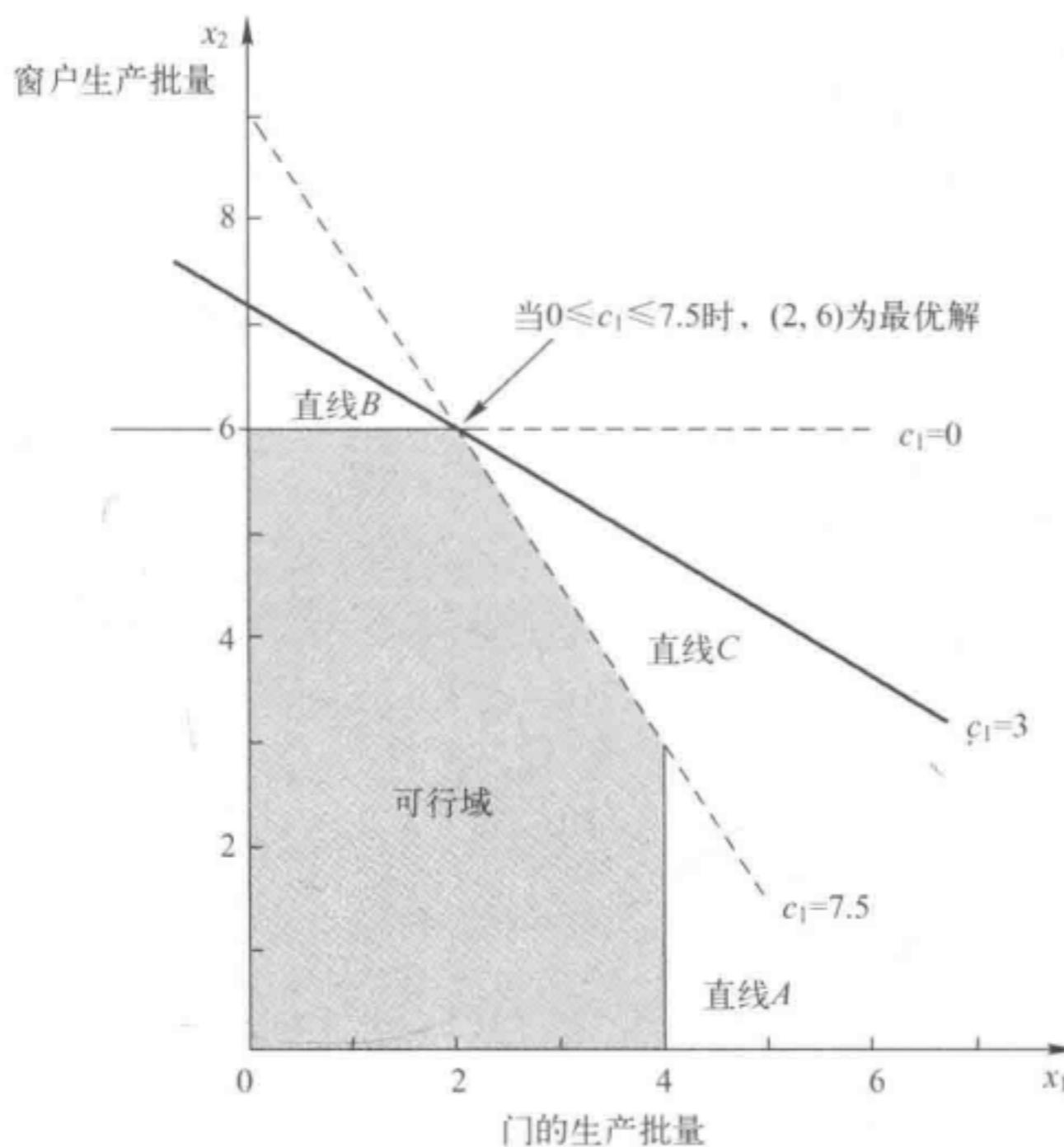


图 7.20 当 c_1 (即“每批次门的利润”)取值为其允许范围($0 \leq c_1 \leq 7.5$)的上、下限时, 穿过实线约束条件边界线的两条虚线为目标函数线, 因为对 Wyndor Glass 公司问题而言, 两条虚线间的任一目标函数线所产生的最优解仍为 $(x_1, x_2) = (2, 6)$

结论: c_1 允许范围为 $0 \leq c_1 \leq 7.5$, 这是因为在该范围内 $(x_1, x_2) = (2, 6)$ 保持为最优解, 超出该范围便不再是优解(尽管当 $c_1=0$ 或 $c_1=7.5$ 时, 有多个优解, 但其中仍包括 $(x_1, x_2) = (2, 6)$)。

由于该允许范围距 c_1 (即“每批次的利润”)原赋值 $c_1=3$ 上下浮动较大,因此可确保求得真实正确的利润最优解。

现在让我们回到前两小节所提出的问题。如果 $c_1(3)$ 赋值过低与 $c_2(5)$ 赋值过高的情况同时发生,则会产生什么结果?尤其是在当前最优解保持不变的情况下, c_1 的允许增量与 c_2 的允许减量范围分别是多少?

图 7.14 表明,如果 c_1 增加 1.5(即由 3 增至 4.5)、 c_2 减少 1(即由 5 降至 4),最优解保持不变。图 7.15 表明,若将 c_1 、 c_2 变化值增加 1 倍,最优解将发生变化。但是最优解发生变化的具体取值却无法确定。图 7.18 提供了更多信息,但仍无法确切回答该问题。

幸好还可通过 c_1 与 c_2 的允许增量和允许减量数据,从灵敏度报告(图 7.19)中获取其他信息,但要应用如下规则(7.2 节有所论述)。

处理目标函数系数同时变化的百分之百法则:如果目标函数系数同时改变,计算各变动量占允许变动量(允许增量或减量)的百分比,使该系数处于其允许范围内。如变动百分比相加未超过 100%,原最优解必然保持最优(如变动百分比相加超过 100%,则无法确保原最优解仍为最优解)。

该法则并未阐述如果变动百分比相加超过 100%会发生什么情况,其后果取决于系数变动方向。切记,系数之比才是确定最优解的关键。如果系数变动方向相同,即使变动百分比远高于 100%,实际上原最优解仍保持不变。所以,变动百分比超出 100%后不一定会改变最优解,但只要不超出 100%,则最优解一定保持不变。

只有当其他系数均未发生变化时,才可放心使用某一目标函数系数全部允许增量或减量。如果系数同时变化,则需重点关注各系数允许增量或允许减量的变动百分比。

为便于说明,仍以 Wyndor Glass 公司问题为例,并同时考虑图 7.19 中灵敏度报告所提供的数据。现在假设 c_1 赋值由 3 增加至 4.5, c_2 由 5 减至 4,则百分之百法则的计算如下:

$$c_1: 3 \rightarrow 4.5$$

$$\text{允许增量变动百分比: } = 100 \left(\frac{4.5-3}{4.5} \right) \% = 33 \frac{1}{3} \%$$

$$c_2: 5 \rightarrow 4$$

$$\text{允许减量变动百分比: } = 100 \left(\frac{5-3}{3} \right) \% = 33 \frac{1}{3} \%$$

$$\text{变动百分比之和: } = 66 \frac{2}{3} \%$$

由于变动百分比之和未超出 100%,原最优解 $(x_1, x_2) = (2, 6)$ 仍保持不变,其结论与前文图 6.14 所示一致。

现在假设 c_1 赋值由 3 增加至 6, c_2 由 5 减至 3,则百分之百法则的计算如下:

$$c_1: 3 \rightarrow 6$$

$$\text{允许增量变动百分比: } = 100 \left(\frac{6-3}{4.5} \right) \% = 66 \frac{2}{3} \%$$

$$c_2: 5 \rightarrow 3$$

$$\text{允许减量变动百分比: } = 100 \left(\frac{5-3}{3} \right) \% = 66 \frac{2}{3} \%$$

$$\text{变动百分比之和: } = 133 \frac{1}{3} \%$$

由于当前变化百分比之和大于 100%,根据百分之百法则,我们无法继续确保 $(x_1, x_2) = (2, 6)$

仍为最优解。事实上,从前文图 7.15 和图 7.18 便可发现最优解已变为 $(x_1, x_2) = (4, 3)$ 。

结果表明,当 c_1 赋值增加上述相对量、 c_2 赋值减小上述相对量时,如何求解使最优解发生变化的数值。由于 100% 处于 $66\frac{2}{3}\%$ 与 $133\frac{1}{3}\%$ 的中间位置,因此 c_1, c_2 取值分别位于其在上例赋值的中间位置时,相应的变化百分比之和便为 100%,即 $c_1 = 5.25$ 时便位于 4.5 与 6 的中间位置, $c_2 = 3.5$ 时便位于 4 与 3 的中间位置。相应地,其百分之百法则计算如下:

$$c_1: 3 \rightarrow 5.25$$

$$\text{允许增量变动百分比: } = 100\% \left(\frac{5.25 - 3}{4.5} \right) \% = 50\%$$

$$c_2: 5 \rightarrow 3.5$$

$$\text{允许减量变动百分比: } = 100\% \left(\frac{5 - 3.5}{3} \right) \% = 50\%$$

$$\text{变动百分比之和: } = \overline{100\%}$$

尽管该变动百分比之和等于 100%,但并未超出 100%,因此可确保 $(x_1, x_2) = (2, 6)$ 仍为最优解。图 7.21 以图解方式表明 $(2, 6)$ 、 $(4, 3)$ 目前均为最优解,而且这两点连接所组成的线段上的任一点均为最优解。然而,若在初始值基础上发生更大变化(致使变动百分比之和大于 100%),则该目标函数线会大幅移向纵轴,使 $(x_1, x_2) = (4, 3)$ 成为唯一最优解。

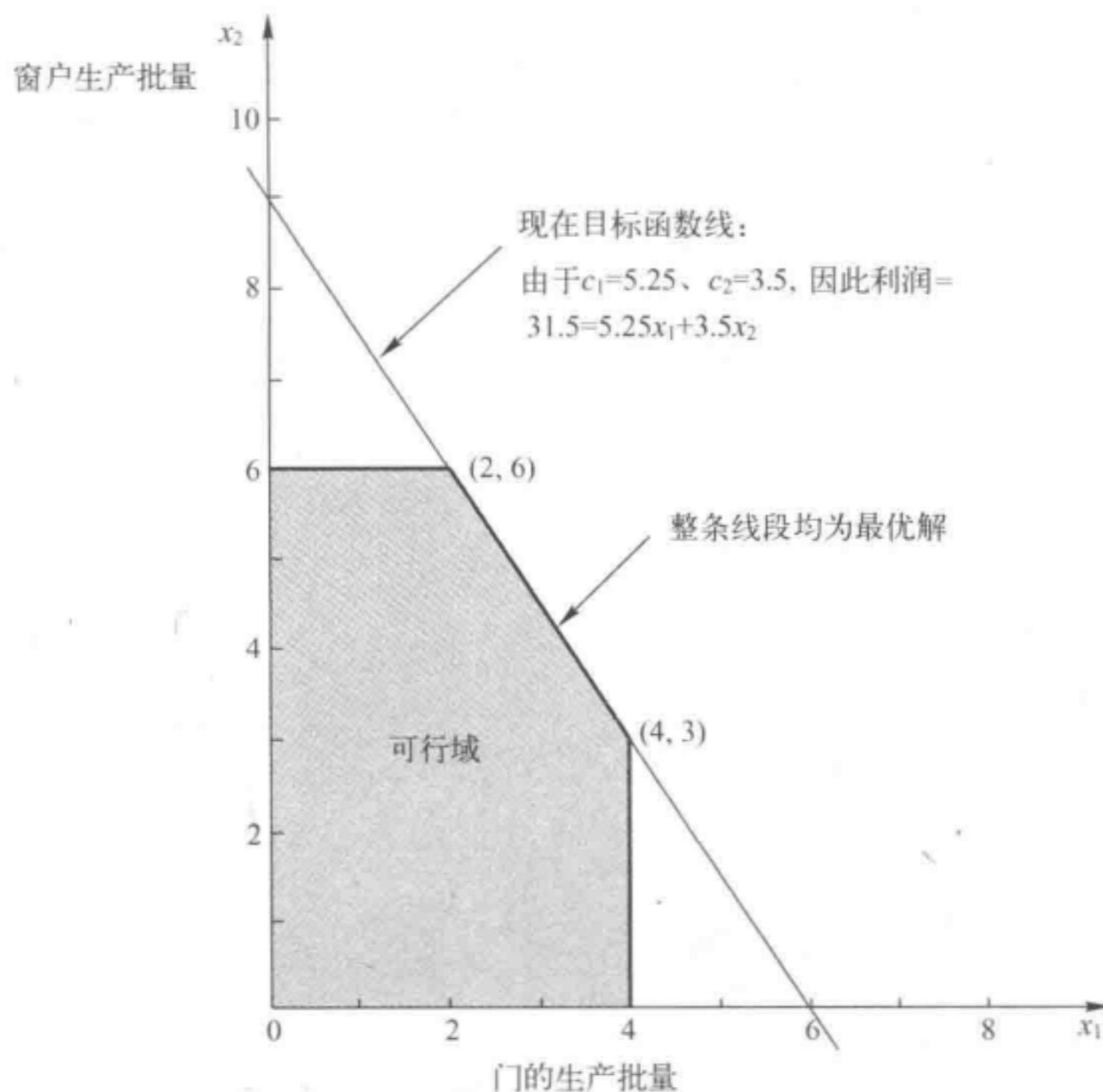


图 7.21 每批次门窗利润赋值分别变为 $c_1 = 5.25, c_2 = 3.5$ 时,即位于百分之百法则允许范围的边缘时,此处图解法显示 $(x_1, x_2) = (2, 6)$ 仍为最优解之一,但该解与点 $(4, 3)$ 所形成的线段上的任一其他点亦为最优解

同时,还需牢记允许变动百分比之和即使大于 100%,也不意味最优解会自动发生变化。例如,假设门窗单位利润赋值均减半,则相应的百分之百法则计算如下:

$$c_1: 3 \rightarrow 1.5$$

$$\text{允许减量变动百分比: } = 100\% \left(\frac{3 - 1.5}{3} \right) \% = 50\%$$

$$c_2: 5 \rightarrow 2.5$$

$$\text{允许减量变动百分比: } = 100\% \left(\frac{5-2.5}{3} \right) \% = 83 \frac{1}{3} \%$$

$$\text{变动百分比之和: } = 133 \frac{1}{3} \%$$

虽然该变动百分比之和大于 100%，但图 7.22 表明原最优解仍保持不变。实际上，该图中目标函数线与原目标函数线（即图 7.20 中的实线）斜率相同。因此，只要所有利润赋值均按比例变化，自然便会得出相同最优解，上述情况便会发生。

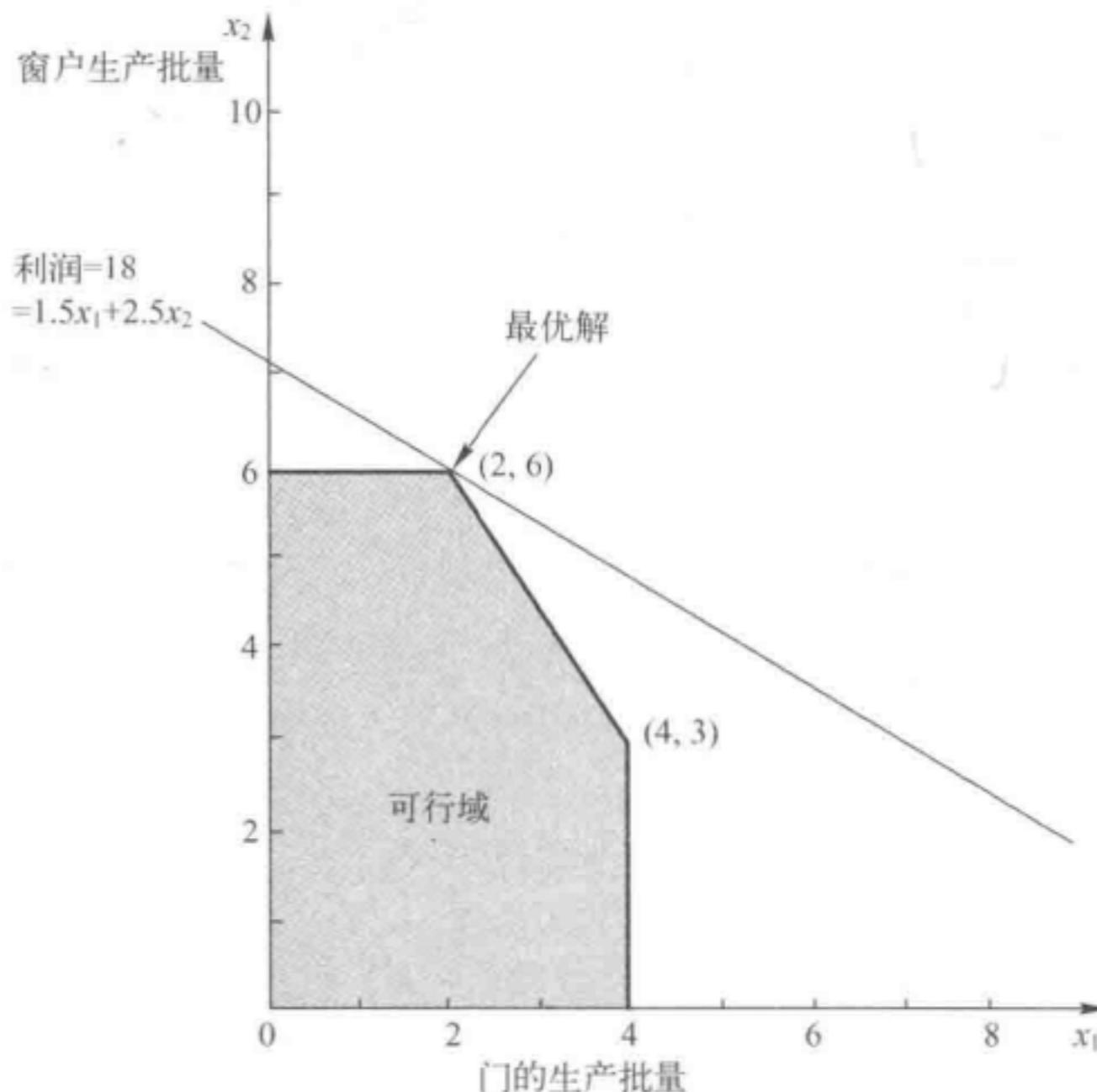


图 7.22 当每批次门窗利润赋值分别变为 $c_1 = 1.5, c_2 = 2.5$ （即原赋值的 $1/2$ ）时，尽管根据百分之百法则，最优解可能会发生变化，但此处图解法显示 $(x_1, x_2) = (2, 6)$ 仍为最优解

7.3.6 其他类型敏感度分析

本节着重探讨了仅当目标函数变量系数发生变化时，如何通过电子表格研究其变化效果。通常，人们对函数约束条件右侧数值的变化效果也充满兴趣。有时，甚至想检验一下函数约束条件中某些系数如果需要改变时，最优解是否会发生变化。

电子表格在研究模型的诸如此类的其他变化时，其方法实际上与使用电子表格研究目标函数系数的变化完全相同。也就是说，仅需在电子表格数据单元内输入任何变化值，然后，通过 Solver 重新求解模型解来检验这些变化的结果，而且还可利用参数分析报告对任意一或两个数据单元中的进行一系列改变进行系统检验。正如 4.7 节所述，在改变任一函数约束条件右侧数值会产生何种效果问题上，Solver（或其他任何线性规划软件包）生成的灵敏度报告也可提供有价值信息，如影子价格。多个右侧数值同时变化时，也可采用百分之百法则，类似于目标函数约束条件同时变化时所应用百分之百法则（如何考察右侧数值的变化效果，包括右侧数值同时变化时如何应用百分之百法则，内容详见 7.2 节案例 1）。

7.4 鲁棒优化

正如前几节所述,灵敏度分析是处理线性规划模型中参数值不确定性的方法。灵敏度分析的主旨是识别敏感参数,即那些导致最优解发生变化的参数。这一点非常重要,因为对这些参数赋值尤需谨慎,以最大程度地降低最优求解出错的风险。

但线性规划不确定性的应对方法并非仅此而已。有时,(根据模型求得的)最优解只有在实施很长一段时间后,可能才会知道敏感参数的真值。因此,即使谨慎地为敏感参数赋值,这些参数也可能出现较大赋值错误,其他非敏感参数的赋值错误甚至更大,从而导致不良后果。或许,(根据模型所求得的)最优解最终根本不具备最优性,甚至可能不是一个可行解。

某种程度上,不良后果的严重程度与模型中函数约束条件是否存在自由度有关。因此,对约束条件进行下列区分十分有益。

软约束是可稍许违反、但不至引发严重后果的约束条件。相反,硬约束是必须满足的约束。鲁棒优化是专为处理含有硬约束条件的问题而设计的。

对于小规模线性规划问题而言,在执行模型最优解前发现其可能不再是最优解,甚至不再是可行解时,通常这一复杂情况不难解决。如果模型只包含软约束条件,那么,即使(根据模型求得的)最优解不可行,也可能被采用。而且,即使某些或全部约束条件均为硬约束,是否被采用也取决于能否在最后一刻对执行中的最优解做出调整(在某些情况下,会事先锁定待执行最优解不允许调整)。如果可调,那么,可能很容易就能知道如何调整使其可行;甚至也可轻易看出如何稍做调整,使其成为最优解。

但在处理现实中经常遇到的较大型线性规划问题时,情况便截然不同了。例如,本章结尾的“主要参考文献[1]”描述了处理题库(该题库由94个大型线性规划问题组成,其中包括成千上万的约束条件和变量)中问题时的情况。人们认为参数可能发生随机错误的概率为0.01%。尽管整个模型所含错误概率如此之小,但发现这些问题中仍有13个问题的最优解为不可行解,还有6个问题的解也接近不可行。此外,亦看不出如何调整才能使其成为可行解。如果该模型所有限制条件均为硬约束,这便是个棘手问题。因此,鉴于许多现实线性规划问题中的赋值错误率通常远高于0.01%,甚至可能高于1%,或者更高,显然,需要找到一种较好的方法,真正确保该解可行。

这便是鲁棒优化法关键作用所在。

鲁棒优化旨在为模型求得一解,并确保该解对参数实际值所有合理的组合而言始终可行,并接近最优。

这是一个令人却步的目标,但目前人们研究出了更为复杂的鲁棒优化理论(见“主要参考文献[1,3]”)。虽然该理论大部分内容(包括多种线性规划拓展内容)已远超出了本书的范畴,但我们仍将通过以下独立参数的简单示例介绍其中一些基本概念。

7.4.1 具有独立参数的鲁棒优化法

该方法包含以下4个基本假设。

- (1) 各参数预估值的不确定性均有其范围。
- (2) 在该范围内,参数可在最小值与最大值之间任意取值。
- (3) 该值不受其他参数取值的影响。
- (4) 所有函数约束条件的表达形式均为 \leq 或 \geq 。

不管参数赋值不确定性范围如何,为确保所得解始终可行,我们按以下方法取各参数最保守

的值。

- (1) 以“≤”形式表达的所有函数约束条件,取各 a_{ij} 的最大值及 b_i 的最小值。
- (2) 以“≥”形式表达的所有函数约束条件,取各 a_{ij} 的最小值及 b_i 的最大值。
- (3) 以最大化形式表达的目标函数,取各 c_j 的最小值。
- (4) 以最小化形式表达的目标函数,取各 c_j 的最大值。

下面仍用 Wyndor Glass 公司示例讲述这一方法。

7.4.2 示例

继续以本书 3.1 节中首次出现的线性规划原型案例为例。Wyndor Glass 公司管理层现正与一位专营门窗的批发商谈判,旨在商洽让其销售公司即将投产的全部新款特殊门窗(即 3.1 节所指的产品 1 和产品 2)事宜。尽管批发商对此很感兴趣,但同时也担心门窗产量或许过小,以至于不值得进行该交易。因此,批发商要求 Wyndor Glass 公司明确这些产品的最低产量(以每周生产批量计量),如果达不到最低产量,Wyndor Glass 公司需支付罚金。

因为此前从未生产过这些新款特殊门窗,Wyndor Glass 公司管理层意识到其线性规划模型(即 3.2 节中依据表 3.1 所建模型)的参数仅是一些估值而已。对各产品而言,其在各车间的每批次生产时间与表 3.1 中的赋值(即 a_{ij})可能存在巨大差异。每批次利润赋值也存在同样的问题。目前,正安排降低某些现有产品产量,以腾出各车间的生产时间,用于两款新产品的生产。因此,各车间(即 b_i)可空出多少生产时间用于新品生产亦存在不确定性。

经过深入研究,目前 Wyndor Glass 公司管理层已经找到了模型各参数的最大和最小值,并确信这些参数符合即将面对的实际。对各参数而言,最小值与最大值所构成的范围称作不确定性范围。各参数的不确定性范围如表 7.10 所列。

现在将前一小节介绍的具有独立参数的鲁棒优化法程序应用于各参数的不确定性范围,从而确定其在新线性规划模型中的值。在此,取各 a_{ij} 的最大值及各 b_i, c_j 的最小值,所得模型如下:

使 $Z = 2.5x_1 + 4.5x_2$ 在以下约束条件下达到最大:

$$\begin{aligned} 1. \quad & 2x_1 \leq 3.6 \\ 2. \quad & 2x_2 \leq 11 \\ 3. \quad & 5x_1 + 2.5x_2 \leq 16 \end{aligned}$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

表 7.10 Wyndor Glass 公司模型参数不确定性范围

参数	不确定性范围	参数	不确定性范围
a_{11}	0.8~1.2	b_2	11~13
a_{22}	1.8~2.2	b_3	16~20
a_{31}	2.5~3.5	c_1	2.5~3.5
a_{32}	1.5~2.5	c_2	4.5~5.5
b_1	3.6~4.4		

该模型十分容易求解,包括用图解法求解。该模型最优解为 $x_1 = 1$ 和 $x_2 = 5$,此时, $Z = 25$ (即每周总利润为 25000 美元)。因此,Wyndor Glass 公司管理层现在可向该批发商保证每周至少可

向其供应1批新款特制门(即产品1)和5批新款特制窗(即产品2)。

7.4.3 拓展应用

尽管参数彼此独立时便于采用鲁棒优化法,但因为其他情况下,某些参数最终值会受其他参数值影响。通常还必须将鲁棒优化法拓展应用于这些情况,通常有如下两种情况。

第一种情况是模型各列内的参数(即某一变量的系数,或右侧数值)并非彼此独立。例如,Wyndor Glass公司问题中各产品每批次利润(即 c_j)可能会受投产后各车间每批次产品实际生产时间影响(即 a_{ij})。因此,需考虑某一变量系数值的诸多情况。同样,将某些员工从一个车间派到另一车间工作可能会提高另一车间每周生产时间,但派出员工的车间会减少等量的生产时间。这同样可能引发诸多需要考虑的潜在情况,它们关乎 b_i 的不同值集。幸好,仍可使用线性规划求解所产生的鲁棒优化模型。

第二种常见情况是模型各行内的参数并非彼此独立。例如,在解决Wyndor Glass公司问题时,将工作人员及设备安排至3号车间,通过增大 a_{31} 或 a_{32} 中的一者可能会使另一者数值减小(甚或由此改变 b_3 的值)。这便需要对模型中对应行参数值的诸多情况予以考虑。但遗憾的是,求解所产生的鲁棒优化模型时,需采用较线性规划更为复杂的方法。

在此不再继续探讨上述或其他情况。相关详细内容(甚至包括原模型比线性规划模型更为复杂的情况下如何应用鲁棒优化法),可参见“主要参考文献[1,3]”。

鲁棒优化法的缺点之一是缩小模型解范围时过于保守,这在实际中是远不必要的,在处理具有成千上万个(甚至成百万个)参数的大型模型时上述问题尤为突出。不过当不确定参数为某些 a_{ij} ,且所有这些参数之间相互独立,或只有 a_{ij} 的单列参数内具有从属性时,“主要参考文献[4]”提供了一种可有效克服鲁棒优化法这一缺点的途径。基本思路是要认识到,不是每一个不确定参数 a_{ij} 估值的随机变化都会增大可行解的求解难度。有些变化可以忽略(甚至归零),有些变化可简化可行解求解过程,而仅有一些变化会使问题朝着相反方向发展。因此,可有把握地假设,仅有少数参数会令可行解求解过程变得复杂。但即便如此,仍非常可能求出一个可行解。因此,如能确定这些少数参数,为下列取舍提供了一定的便利,即求得一个相当理想的解,还是确保该解在实际应用时可行。

7.5 机会约束

对于线性规划模型参数而言,通常只有在所采用最优解首次实施一段时间后,才能看出这些参数的真值,在此之前,它们都存在不确定性。7.4节讲述了用鲁棒优化法处理此类不确定性,即通过修改模型参数值,以确保所求解最终实施时具有可行性。这需要识别各不确定参数可能值的上下限。然后,用上下限值中更难达到可行性的值作为参数的估值。

该方法对处理硬约束(即必须满足的约束条件)时十分有效,但确实也存在某些不足。不足之一便是可能无法准确识别不确定参数的上下限。事实上,该参数甚至可能不具有上下限。例如,某参数的概率分布为正态分布时,会带有较长的尾部,却不会有上下限。与此相关的另一不足是当参数概率分布为没有上下限的正态分布时,通常赋值区域较宽,从而导致过度保守的解。

机会约束主要用于处理具有较长尾部、没有上下限的参数。为简便起见,我们对此类情况进行简化处理,只将右侧数值(即 b_i)作为不确定参数,这些 b_i 为具有正态分布的独立随机变量。令 μ_i 和 σ_i 分别表示该分布各 b_i 的平均差和标准差。具体而言,我们还假设所有函数约束条件均为“≤”形式(可用同样方式处理以“≥”形式表达的函数约束条件,但原约束条件为等式时,机会

约束不适用)。

7.5.1 机会约束的形式

原约束条件为 $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_j$ 时, 相应的机会约束的含义为仅需使满足原约束条件拥有极高的概率即可。令 α =原约束条件最小可接受概率, 换言之, 机会约束为

$$p\left\{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_j\right\} \geq \alpha$$

该式表明, 原约束条件概率至少应为 α 。接下来, 可用一等价约束条件, 即一个简单的线性规划约束条件, 替代该条件约束。因为 b_i 是机会约束中的唯一随机变量, 且假设其呈正态分布, 因此该机会约束的确定性等价方程为

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq \mu_j = K_\alpha \sigma_i$$

式中: K_α 是正态分布表中概率为 α 的常量。例如, $K_{0.90} = -1.28$, $K_{0.95} = -1.645$, $K_{0.99} = -2.33$ 。

因此, 如果 $\alpha = 0.95$, 则该机会约束的确定性等价方程为 $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq \mu_i - 1.645\sigma_i$ 。

换言之, 如果 μ_i 对应于 b_i 的原始估值, 那么, 右侧数值减小 $1.645\sigma_i$ 可确保约束条件得以满足的概率至少为 0.95(如果该确定性等价方程为等式, 其概率值正好为 0.95, 但如果左侧数值小于右侧数值, 概率则大于 0.95)。

图 7.23 验证了上述说法。该正态分布为 b_i 实际值(即执行最优解时 b_i 的实际取值)概率密度函数。图中左侧阴影区域(0.05)显示 b_i 小于 $\mu_i - 1.645\sigma_i$ 的概率, 因而, b_i 大于该值的概率为 0.95。所以, 要求约束条件左侧数值小于等于该值, 也即左侧数值至少在 95% 的情况下会小于 b_i 的最终值。

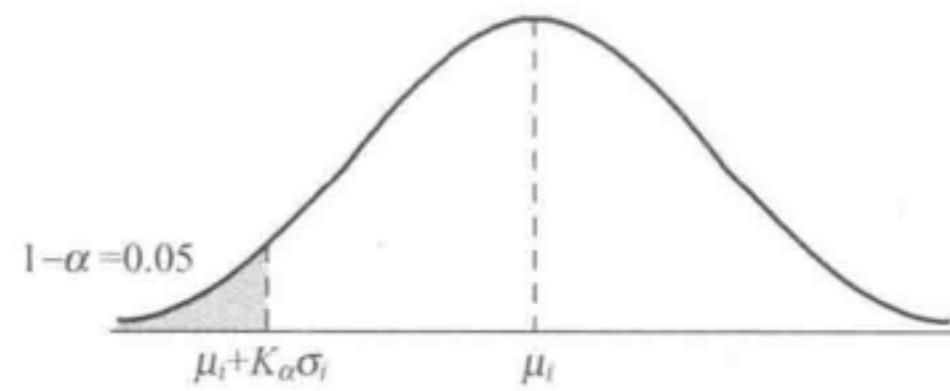


图 7.23 假设 b_i 服从本图所示正态分布

7.5.2 示例

为说明机会约束的用法, 仍以本书 3.1 节所述 Wyndor Glass 公司问题的最初版本及其模型为例。现在假设不十分确定两种新产品在 3 个车间的可用生产时间是多少。因此, b_1 , b_2 和 b_3 为本模型当前不确定参数(即随机变量)。假设这些参数均呈正态分布, 那么, 首先要判断各参数的平均差和标准差。表 3.1 给出 3 个车间每周可用生产时间的原始估值, 因此, 如果这些值看起来仍为最可能的可用生产时间, 则可基于它们求得平均生产时间。标准差可对实际可用生产时间与该平均生产时间的偏差进行度量。正态分布的特点为约有 2/3 分布于平均值的 1 个标准差内。所以, 判断各 b_i 标准差的一个好方法便是知道实际可用生产时间与平均生产时间存在多大差异, 通常, 2/3 的情况下这一偏差不会大于标准差。

如前所述, 为 α 选择一个适当值也是重要的一步。如何选值取决于下列情况: 如果该解执行后与原约束条件不符, 不符程度有多严重? 如果需对该值进行必要调整, 其困难程度有多大? 在处理那些允许稍有违反且不会产生严重后果的软约束时, 通常 $\alpha = 0.95$, 本例亦采用这一数值(下一小节将讨论硬约束的情况)。

表 7.11 列出本例各 b_i 的平均差和标准差。最后两列还分别给出这 3 个函数约束条件的原右侧数值(RHS)及调整后的右侧数值。

表 7.11 本例(利用机会约束调整 Wyndor Glass 公司模型)相关数据

参数	平均值	标准差	原右侧数值	调整后的右侧数值
b_1	4	0.2	4	$4 - 1.645(0.2) = 3.671$
b_2	12	0.5	12	$12 - 1.645(0.5) = 11.178$
b_3	18	1	18	$18 - 1.645(1) = 16.355$

利用表 7.11 中 3 个机会约束的确定性等价方程替换这些机会约束条件, 得到以下线性规划模型。

在下列条件下求 $Z = 3x_1 + 5x_2$ 的最大值:

$$x_1 \leq 3.671$$

$$2x_2 \leq 11.178$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 16.355$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

最优解为 $x_1 = 1.726$ 和 $x_2 = 5.589$, 此时, $Z = 33.122$ (即每周总利润为 33122 美元)。此处所求得的每周总利润较 Wyndor Glass 公司初始模型中每周 36000 美元的总利润出现大幅缩减。但通过降低两种新产品的生产批量(其原始赋值分别为 $x_1 = 2$ 和 $x_2 = 6$), 新生产计划的可行性极高, 且投产后无需进行任何调整。

如果假设这 3 个 b_i 不仅呈正态分布, 且具有统计独立性, 我们便可估计新生产计划可行性的概率。如果 3 个初始函数约束条件均得以满足, 新生产计划将会证明是可行的。对每个约束, 其满足的概率至少为 0.95, 如果对应的机会约束确定性等价等式通过线性规划模型最优解得到满足, 则该初始函数约束条件满足的概率恰好为 0.95。因此, 3 个约束条件都得以满足的概率至少为 $(0.95)^3 = 0.857$ 。但本例中仅第二个和第三个确定性等价方程满足等式的要求, 因此满足第一个约束条件的概率大于 0.95。在最理想情况下, 即第一个约束条件的概率实际为 1 时, 3 个约束条件均得以满足的基本概率为 $(0.95)^2 = 0.9025$ 。因此, 新生产计划可行性的概率应位于上下限值(即 0.9025 和 0.857)之间(本例中, $x_1 = 1.726$, 比 b_1 的均值 4 低 11 个标准差, 因此, 满足第一个约束条件的概率实际为 1, 也就是说, 同时满足 3 个约束条件的概率实际为 0.9025)。

7.5.3 硬约束的处理

机会约束非常适合处理软约束, 即那些实际上可稍许违反且不会产生严重后果的约束条件。在处理硬约束(即必须满足的约束条件)时, 机会约束也可能发挥一定作用。上节所述鲁棒优化法是专门用于应对含有硬约束的问题的。 b_i 为硬约束中不确定参数时, 可使用鲁棒优化法估计 b_i 的上下限值。但若 b_i 的概率分布具有较长的尾部, 而没有上下限, 即呈正态分布状, 便无法设定 b_i 的上下限, 也即违反硬约束的概率为 0。因此, 较好的替代方法是以 α 取值极高(即 α 至少为 0.99)的机会约束替代硬约束。因为 $K_{0.99} = -2.33$, 于是, 表 7.10 中的右侧数值将进一步减小至 $b_1 = 3.534$ 、 $b_2 = 10.835$ 和 $b_3 = 15.67$ 。

尽管 $\alpha = 0.99$ 看起来似乎非常安全, 但仍存在潜在风险。我们实际希望的是使所有初始约束条件最大可能地得到满足。当然, 当函数约束条件数量巨大时, 这一概率比某一具体初始约束条件得到满足的概率要小很多。

前一小节最后一段描述了所有初始约束条件在一定概率得到满足时, 计算其上下限的方法。尤其当存在 M 个含有不确定 b_i 的函数约束条件时, 下限值为 a^M 。首先, 以机会约束的确定性等价约束替换这些机会约束条件, 然后计算由此得到的线性规划问题的最优解, 接下来确定在最优

解下以等式满足的确定性等价方程的数量，并以字母 N 表示，上限值则为 a^N 。因此， $a^M \leq$ 全部约束条件均得以满足的概率 $\leq a^N$ 。

当 $a=0.99$ 且 M 与 N 值较大时，其概率值就可能无法满足人们的要求。因此，当问题含有大量不确定 b_i 时，建议 a 取值尽量接近 1，而不是 0.99。

7.5.4 应用拓展

目前为止，我们仅考虑了 b_i 为唯一不确定参数的情况。如果目标函数(c_j)系数亦为不确定参数，也可十分简便地处理这一情况。首先确定各 c_j 概率分布，用该分布的平均值替代各参数，所求解的最大值或最小值成为目标函数(统计学意义上)的期望值。此外，该期望值为线性函数，因此仍可利用线性规划求解该模型。

当函数约束条件系数(a_{ij})为不确定参数时，情况则复杂得多。因为对各约束条件而言，其所对应的机会约束的确定性等价方程包含一个复杂的非线性表达式。当然，并非无法求解由此得到的非线性规划模型。事实上，LINGO 具有一种特殊功能，可将确定性模型转化为含有概率系数的机会约束模型后求解。该方法可用于求解参数的分布为主要概率分布的模型。

7.6 带补偿的随机规划

随机规划是解决不确定型线性规划(如机会约束)的重要方法。随机规划的创始时间可追溯至 20 世纪 50 年代，时至今日，该方法仍广为使用(相比之下，7.4 节所述的鲁棒优化法于 21 世纪初才开始得到长足发展)。它可用于解决诸多线性规划问题，如当前含有不确定数据的线性规划问题，以及将来执行所选解后情况发展不明的线性规划问题。随机规划假设可对问题随机变量的概率分布进行估值，这些分布随后将全面用于分析之中。模型中有时也采用机会约束，通常旨在优化目标函数在较长时间范围内的期望值。

随机规划法与鲁棒优化法存在较大差异。鲁棒优化法尽量避免使用概率分布，重点关注可能产生的最坏结果。因此，鲁棒优化法极容易导致非常保守的解。鲁棒优化法专门用于处理含有硬约束(即必须满足的约束条件，因为此类约束条件不允许有任何违反)的问题。相比之下，随机规划寻找的是那些平均而言表现良好的解，而非为了安全运行而寻找极为保守的解。因此，随机规划更适用于含有软约束(即实际上可稍许违反且不会产生任何严重结果的约束条件)的问题。如果问题中出现硬约束条件，重要的是能够在实施解的过程中，可在最后时刻对其进行修改，以实现可行性。

随机规划的另一个重要特点是，用随机规划处理问题时，有些决策可以后延，直到初始决策执行过程中积累的经验可以部分或全部消除问题中的不确定性。这称为带补偿的随机规划，因为最初决策产生不良结果后可采取纠正措施加以补偿。对两阶段问题而言，有些决策可在问题第一阶段制定，获得更多信息后，可以在问题第二阶段制定其他决策。对多阶段问题，可随着时间的推移收集到更多信息后，再做相应的决策。

本节介绍了用带补偿的随机规划解决两阶段问题的基本思路。下面以简化的 Wyndor Glass 公司问题为例，对这一思路加以说明。

7.6.1 示例

Wyndor Glass 公司管理层听闻有竞争对手正筹划生产销售一种特殊新型产品，该产品会与 Wyndor Glass 公司生产的 4×6 英尺双悬式木框架门(即“产品 2”)形成直接竞争。如果传言属

实,Wyndor Glass 公司需对产品 2 的设计进行某些修改,并降低其价格,以便更有竞争力。如果传言不属实,则无需修改产品 2 的设计,而且 3.1 节表 3.1 中的全部数据仍可使用。

因此,未来如何发展出现了两种情况,它们会影响管理层下一步的决策。

第一种情况:如果竞争对手规划新品的传言不属实,那么,表 3.1 中的全部数据仍可使用。

第二种情况:如果传言属实,那么,Wyndor Glass 公司需修改产品 2 的设计,并降低其价格。

表 7.12 为第二种情况下应采用的新数据。

表 7.12 第二种情况下 Wyndor Glass 公司问题应采用的数据

车间	每批次生产时间/h		每周可用生产时间/h
	产品		
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	6	18
每批次利润	\$3000	\$1000	

鉴于以上因素,Wyndor Glass 公司管理层决定尽快投产产品 1,但如何处理产品 2 可待情况明朗后再做决定。用第二个下标数字分别表示两种情况,则相关决策变量如下:

x_1 =产品 1 每周生产批量

x_{21} =第一种情况下,产品 2 的每周生产批量

x_{22} =第二种情况下,产品 2 改进后,每周的生产批量

这是一个两阶段问题,因为产品 1 在第一阶段便会投产,但产品 2 只会在第二阶段投产。现在利用带补偿的随机规划可建立模型,计算上述 3 项决策参数的最优解。鉴于 x_1 的取值,需尽快安装生产设施,以便马上投产产品 1,且产品 1 的产量在第一阶段和第二阶段保持不变。在问题第二阶段,当情况明朗后,明确 x_{21} 或 x_{22} (二者中以适用者为准)的取值,从而制定(适宜形式的)产品 2 的投产起始计划。

这一小型随机规划问题仅有一个相关的概率分布,也就是会发生哪种情况的概率分布。Wyndor Glass 公司管理层根据能够得到的信息做出以下估值:

第一种情况的发生概率=1/4=0.25

第二种情况的发生概率=3/4=0.75

不清楚到底会发生哪种情况确实构成一个难题,因为两种情况下的最优解大相径庭。如果是第一种情况,那么,3.1 节为 Wyndor Glass 公司所建立的原线性规划模型便能适用,该模型的最优解为 $x_1=2$ 、 $x_{21}=6$ 、 $Z=36$ 。如果发生第二种情况,那么,线性规划模型就变为

$$\max Z = 3x_1 + x_{22}$$

约束条件为

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_{22} \leq 12$$

$$3x_1 + 6x_{22} \leq 18$$

且

$$x_1 \geq 0, x_{22} \geq 0$$

该模型最优解为 $x_1=4$ 、 $x_{22}=1$ 、 $Z=16.5$ 。

但我们需要建立一个可同时兼顾两种情况的模型,该模型应涵盖各种情况下的所有约束条件。考虑到两种情况的概率,可依概率对各情况下总利润进行加权处理,计算总利润期望值。相

应的随机规划模型为

$$\begin{aligned}\max Z &= 0.25(3x_1 + 5x_{21}) + 0.75(3x_1 + x_{22}) \\ &= 3x_1 + 1.25x_{21} + 0.75x_{22}\end{aligned}$$

约束条件为

$$\begin{aligned}x_1 &\leq 4 \\ 2x_{21} &\leq 12 \\ 2x_{22} &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_{21} &\leq 18 \\ 3x_1 + 6x_{22} &\leq 18\end{aligned}$$

且

$$x_1 \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0$$

本模型最优解为 $x_1 = 4, x_{21} = 3, x_{22} = 1, Z = 16.5$ 。也就是说,最佳方案是:

每周生产 4 批次产品 1;

接下来,仅在出现第一种情况下,每周生产 3 批次原产品 2;

接下来,仅在出现第二种情况下,每周生产 1 批次改进的产品 2。

需要注意的是,通过带补偿的随机规划,我们为 Wyndor Glass 公司问题求得一个全新的最优方案。与 3.1 节为该问题所求得的初始方案(即每周生产 2 批次产品 1,以及每周按生产 6 批次原产品 2)相比,两者存在很大差异。

7.6.2 一些典型应用

与上例类似,所有应用带补偿的随机规划的场合均涉及未来发展趋势存在多种情况的问题,而这一不确定性不仅对当前决策,也对依最终发生情况而定的未来决策造成影响。但多数情况下,大多数应用所生成的模型规模比上例要大(通常大得多)。上例仅涉及两个阶段,且第一阶段仅需进行一项决策;第二阶段仅存在两种可能情况,也仅需进行一项决策。许多应用必须考虑大量可能出现的情况,问题涉及也不止两个阶段,且各阶段均需制定多项决策。由此生成的模型,其决策变量与函数约束条件可能有成千上万个。尽管如此,其推理论证过程与上述简单例子基本相同。

多年来,带补偿的随机规划在诸多领域得到广泛应用。下面简要介绍其在几个领域的应用情况。

生产计划通常涉及如何将各种有限资源配置给不同产品,用以现在起到未来某段时间内的生产。但未来如何发展具有某些不确定性(如产品需求、资源是否充足等等),可用诸多潜在情况描述。制定生产计划时,重要的一点是将这些不确定性,包括下一生产周期的产品线考虑进去。生产计划还应根据发生哪种情况的信息制定接下来若干生产周期的产品线。随机规划公式所涉及的阶段数量与问题中的生产周期数量相等。

另一个应用涉及一般市场营销决策,这是所有公司在开发新品时都会遇到的过程。由于向国内市场引进新品时要投入巨大广告费用,所以产品能否盈利便不是很清楚。因此,公司营销部通常先在试销市场销售新品,然后再决定是否在全国范围内进行营销。首先要决策的是试销市场新品试销计划(包括生产水平、广告水平等)。产品在试销市场的被接受程度会存在多种情况。根据实际发生的情况决定是否在全国范围内继续推广该产品,如果继续,产品生产、营销计划如何制定?根据上述市场情况,下一个决策可能涉及产品全球推广问题。如果上述所言全部实施,该问题就成了一个三阶段带补偿的随机规划问题。

在从事一系列具有风险的金融投资时,投资业绩很大程度上可能取决于整个投资过程中某

些外部因素(如国家经济状况、某经济领域的优势,是否有新竞争性企业的出现等)的演变情况。这样,就需要考虑诸多外部因素可能出现的发展趋势。需决定第一笔投资的数目,然后再根据搜集到的实际发生情况的信息决定今后各项投资(如果还有后续投资的话)的数额。这一做法与多阶段带补偿的随机规划完全吻合。

对于农业而言,每个生长季节都要面临极大的不确定因素。如果风调雨顺,这一季就会有好收成。不过,要是赶上旱灾、洪涝、早霜等,庄稼收成便不尽如人意。在知道会发生哪种天气状况前,需要制定很多决策,确定各种作物的播种面积。然后静观天气变化、收割庄稼(无论产量好坏),此时,还需决定各类作物出售多少、留下多少用于家畜饲料、留出多少用于下一季播种等。所以,这是一个可用带补偿的随机规划解决的两阶段问题。

上述情况表明,制定初步决策时,如存在不确定因素,那么,如能在事态明朗之际做出补偿性决策是十分有益的。补偿性决策有助于对第一阶段所做的任何不利决策进行补偿。

随机规划并非唯一包含补偿机制的分析方法。鲁棒优化法(见7.4节)也可包含补偿机制。“主要参考文献[6]”(见本章结尾部分)介绍了名为ROME(“鲁棒优化一点通”的缩写)的计算机程序包是如何应用补偿鲁棒优化法的。“主要参考文献[6]”还对库存管理、项目管理及投资组合优化领域的案例做了描述。

其他软件包也具有这样的方法,如“运筹学”课件中的Solver教育分析平台就具有鲁棒优化法、机会约束及带补偿的随机规划的某些功能。LINGO在这些领域的功能也非常强大。例如,LINGO具有特殊功能,可将确定性模型转化为随机规划模型,然后再求解。事实上,LINGO可计算多阶段任意顺序的随机规划问题。所谓任意顺序,是指“人们制定决策,上天随机决策;于是,人们制定补救决策,上天则又给出一个随机决策;人们再制定另一补救决策,如此等等。”MPL也具备某些补偿随机规划功能。“主要参考文献[9]”还提供计算大型带补偿的随机规划问题的相关信息。

7.7 小结

线性规划模型参数值通常只是估计值。因此,需采用灵敏度分析,对可能的参数估值错误所导致的后果进行研究。5.3节讲述了有效展开此类研究的基本要点。灵敏度分析的总体目标是找出影响最优解的敏感参数,并对其进行更为精确的赋值,然后选出在敏感参数可能值范围内均适宜的一个解。灵敏度分析还有助于指导管理决策,这些决策会影响到某些参数值(如配置给活动的资源量)。各种灵敏度分析是大部分线性规划研究的重要组成部分。

Solver电子表格也为灵敏度分析提供一些有益方法。一种方法便是在电子表格中反复输入模型中一个或多个参数的不同赋值,然后单击“Solve”按钮,即可马上看出最优解是否发生了改变。另一种方法是通过“运筹学”课件中的Solver教育分析平台(ASPE)检验模型中一个或两个参数发生一系列变化所导致的后果。第三种方法是用Solve提供的灵敏度报告求出目标函数系数的允许范围、约束条件的影子价格,以及令影子价格保持有效的各右侧数值允许范围(其他应用单纯形法的软件,包括运筹学课件中的不同软件,也可按需提供此类灵敏度报告)。

还有一些重要方法可用于参数真值具有极大不确定性的线性规划问题。有些仅具有硬约束(即必须满足的约束条件)问题,鲁棒优化法所求之解对参数各种合理真值组合而言,基本上可确保是可行解,甚至与最优解相差无几。处理软约束(即实际上可稍许违反且不会产生任何严重结果的约束条件)时,各软约束条件均可由机会约束替代,机会约束只要概率很高便可满足原限制条件的要求。带补偿的随机规划旨在应对两阶段(或更多阶段)的决策问题。对此类问题,可根据某些参数更新后的信息,进行后续决策补偿。

参 考 文 献

- [1] Ben-Tal, A., L. El Ghaoui, and A. Nemirovski: *Robust Optimization*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.
- [2] Bertsimas, D., D.B. Brown, and C. Caramanis: "Theory and Applications of Robust Optimization," *SIAM Review*, **53**(3): 464–501, 2011.
- [3] Bertsimas, D., and M. Sim: "The Price of Robustness," *Operations Research*, **52**(1): 35–53, January–February 2004.
- [4] Birge, J.R., and F. Louveaux: *Introduction to Stochastic Programming*, 2nd ed., Springer, New York, 2011.
- [5] Gal, T., and H. Greenberg (eds): *Advances in Sensitivity Analysis and Parametric Analysis*, Kluwer Academic Publishers (now Springer), Boston, MA, 1997.
- [6] Goh, J., and M. Sim: "Robust Optimization Made Easy with ROME," *Operations Research*, **59**(4): 973–985, July–August 2011.
- [7] Higle, J.L., and S.W. Wallace: "Sensitivity Analysis and Uncertainty in Linear Programming," *Interfaces*, **33**(4): 53–60, July–August 2003.
- [8] Hillier, F. S., and M. S. Hillier: *Introduction to Management Science: A Modeling and Case Studies Approach with Spreadsheets*, 5th ed., McGraw-Hill/Irwin, Burr Ridge, IL, 2014, chap.5.
- [9] Infanger, G.: *Planning Under Uncertainty: Solving Large-Scale Stochastic Linear Programs*, Boyd and Fraser, New York, 1994.
- [10] Infanger, G. (ed.): *Stochastic Programming: The State of the Art in Honor of George B. Dantzig*, Springer, New York, 2011.
- [11] Kall, P., and J. Mayer: *Stochastic Linear Programming: Models, Theory, and Computation*, 2nd ed., Springer, New York, 2011.
- [12] Sen, S., and J.L. Higle: "An Introductory Tutorial on Stochastic Linear Programming Models," *Interfaces*, **29**(2): 33–61, March–April, 1999.

习 题

某些习题左侧符号的含义:

D: 可参考上述示例。

C: 使用装有任何一款推荐软件的计算机(或按导师指导)对问题进行求解。

E*: 使用 Excel 软件,该软件或许含有 ASPE 插件。

习题上有*号表示书后附有部分该题答案。

7.1-1* 思考以下问题。

求 $Z = 3x_1 + x_2 + 4x_3$ 在以下条件下的最大值:

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 25$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 20$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

与此相对应,最终产生最优解的一组方程式为

$$(0) Z + 2x_2 + \frac{1}{5}x_4 + \frac{3}{5}x_5 = 17$$

$$(1) x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 = \frac{5}{3}$$

$$(2) x_2 + x_3 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{2}{5}x_5 = 3$$

(a) 从该组方程式中求最优解。

(b) 建立对偶问题。

I(c) 求该对偶问题的最优解,并通过图解法检验该最优解。

(d) 假设原问题变化如下:

求 $Z = 3x_1 + 3x_2 + 4x_3$ 在以下条件下的最大值:

$$6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 25$$

$$3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 20$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

通过对偶理论判定前面所求最优解是否仍为最优。

(e) 根据 5.3 节所述基本要点计算 x_2 在(d)对应的最优解方程式中的新系数。

(f) 现在假设原问题仅有一处变化,即在模型中引入以下新变量 x_{new} :

求 $Z = 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_{\text{new}}$ 在以下条件下的最大值:

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_{\text{new}} \leq 25$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_{\text{new}} \leq 20$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_{\text{new}} \geq 0$$

利用对偶理论判断当 $x_{\text{new}} = 0$ 时,前面所得最优解是否仍保持最优。

(g) 对(f)所述引入 x_{new} 后的模型,根据 5.3 节所述基本要点,确定 x_{new} 在相应最终方程中的系数。

D.17.1-2 重新思考习题 7.1-1 中的模型。现在对原模型进行灵敏度分析,分别研究下列 6 个变化。对各变化而言,利用灵敏度分析程序修改给出的最后一组方程式(以单纯形表形式),并通过高斯消去法将其转化为恰当形式。转化后,检查该解的可行性和最优性(不要重新优化)。

- (a) 将约束条件 1 的右侧数值变为 $b_1 = 10$ 。
- (b) 将约束条件 2 的右侧数值变为 $b_2 = 10$ 。
- (c) 将 x_2 的目标函数系数变为 $c_2 = 3$ 。
- (d) 将 x_3 的目标函数系数变为 $c_3 = 2$ 。
- (e) 将约束条件 2 的 x_2 系数变为 $a_{22} = 2$ 。
- (f) 将约束条件 1 的 x_1 系数变为 $a_{11} = 8$ 。

D.17.1-3 思考以下问题。

求 $W = 5y_1 + 4y_2$ 在以下条件下的最小值:

$$4y_1 + 3y_2 \geq 4$$

$$2y_1 + y_2 \geq 3$$

$$y_1 + 2y_2 \geq 1$$

$$y_1 + y_2 \geq 2$$

且

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

该原始问题中约束条件的数量多于变量数,因此假设单纯形法已直接应用于其对偶问题。

如果令 x_5 与 x_6 分别代表其对偶问题的松弛变量,所得到的最终单纯形表如下:

基本变量	方程式	变量参数系数								右侧数值
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
Z	(0)	1	3	0	2	0	1	1	9	
X_2	(1)	0	1	1	-1	0	1	-1	1	
X_4	(2)	0	2	0	3	1	-1	2	3	

现在将对原初始模型下列各单独变化进行灵敏度分析,即直接研究各变化对其对偶问题的影响,然后推断对原始问题所产生的互补效果。对原初始模型各变化而言,运用7.1节结尾部分所总结的灵敏度分析程序研究其对偶问题(不要重新优化),然后判断原始问题的当前基本解是否仍为可行解和最优解。最后直接对原始问题进行图解分析,检验你的判断。

- (a) 将目标函数变为 $W=3y_1+5y_2$ 。
- (b) 将函数约束条件右侧数值分别变为 3、5、2、3。
- (c) 将第一个约束条件变为 $2y_1+4y_2 \geq 7$ 。
- (d) 将第二个约束条件变为 $5y_1+2y_2 \geq 10$ 。

7.2-1 阅读7.2节应用案例中的参考文章,其中对运筹学研究做了详尽总结。简要描述该应用案例是如何应用灵敏度分析的,然后列出本研究可带来的财务收益和非财务收益。

D,I 7.2-2* 思考以下问题。

求 $Z=-5x_1+5x_2+13x_3$ 在以下条件下的最大值:

$$\begin{aligned} -x_1+x_2+3x_3 &\leq 20 \\ 12x_1+4x_2+10x_3 &\leq 90 \end{aligned}$$

且

$$x_j \geq 0 \quad (j=1,2,3)$$

如令 x_4 与 x_5 为相应约束条件的松弛变量,那么,单纯形法会产生下列一组最后方程式:

$$\begin{aligned} (0) Z+2x_3+5x_4 &= 100 \\ (1) -x_1+x_2+3x_3+x_4 &= 20 \\ (2) 16x_1-2x_3-\frac{1}{5}4x_4+x_5 &= 10 \end{aligned}$$

现在对原模型进行灵敏度分析,分别研究下列 9 个变化。对各变化而言,利用灵敏度分析程序修改上述一组方程式(以单纯形表形式),并通过高斯消去法将其转化为恰当形式,以求出和评价当前基本解。然后,检验该解的可行性和最优性(不要重新优化)。

- (a) 约束条件 1 的右侧数值变为 $b_1 = 30$ 。
- (b) 将约束条件 2 的右侧数值变为 $b_2 = 70$ 。
- (c) 将右侧数值变为

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \end{bmatrix}$$

- (d) 将 x_3 的目标函数系数变为 $c_3 = 8$ 。
- (e) 将 x_1 的系数变为

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

- (f) 将 x_2 的系数变为

$$\begin{bmatrix} c_2 \\ a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

- (g) 引入新变量 x_6 , 其系数为

$$\begin{bmatrix} c_6 \\ a_{16} \\ a_{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(h) 引入一新约束条件: $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 50$ (以 x_6 表示其松弛变量)。

(i) 将约束条件 2 变为 $10x_1 + 5x_2 + 10x_3 \leq 100$ 。

7.2-3* 重新思考习题 7.2-2 中的模型。假设约束条件方程的右侧数值变为

(约束条件 1 的右侧数值变为) $20+2\theta$

(约束条件 2 的右侧数值变为) $90-\theta$

式中: θ 的赋值可为任何正值或负值。

将与原最优解相对应的基本解(及 Z)表达为 θ 的函数。确定 θ 的上下限值, 超出此范围, 该基本解便不再可行。

D,I 7.2-4 思考下列问题。

求 $Z = 2x_1 + 7x_2 - 3x_3$ 在以下条件下的最大值:

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 30$$

$$x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 10$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

令 x_4 与 x_5 为相应约束条件的松弛变量, 那么, 单纯形法会产生下列一组最后方程式:

$$(0) Z + x_2 + x_3 + 2x_5 = 20$$

$$(1) -x_2 + 5x_3 + x_4 - x_5 = 20$$

$$(2) x_1 + 4x_2 - x_3 + x_5 = 10$$

现在对原模型进行灵敏度分析, 分别研究下列 7 个变化。对各变化而言, 利用灵敏度分析程序修改上述一组方程式(以单纯形表形式), 并通过高斯消去法将其转化为恰当形式, 以求出和评价当前基本解。然后, 检查该解的可行性和最优化。如果所有检查均未通过, 重新优化这些方程, 并求出新的最优解。

(a) 将右侧数值变为

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$

(b) 将 x_3 系数变为

$$\begin{bmatrix} c_3 \\ a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(c) 将 x_1 系数变为

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(d) 引入新变量 x_6 , 其系数为

$$\begin{bmatrix} c_6 \\ a_{16} \\ a_{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- (e) 将目标函数变为 $Z = x_1 + 5x_2 - 2x_3$ 。
 (f) 引入新约束条件: $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 25$ 。
 (g) 将约束条件 2 变为 $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 35$ 。

7.2-5 重新思考习题 7.2-4 中的模型。假设约束条件方程的右侧数值变为

(约束条件 1 的右侧数值变为) $30 + 3\theta$

(约束条件 2 的右侧数值变为) $10 - \theta$

式中: θ 的赋值可为任何正值或负值。

将与原最优解相对应的基本解(及 Z)表达为 θ 的函数。确定 θ 的上下限值, 超出此范围, 该基本解便不再可行。

D,I 7.2-6 思考以下问题。

求 $Z = 2x_1 - x_2 + x_3$ 在以下条件下的最大值:

$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 15$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 4$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

如令 x_4, x_5, x_6 为相应约束条件的松弛变量, 那么, 单纯形法会产生下列一组最终方程式:

$$(0) Z + 2x_3 + x_4 + x_5 = 18$$

$$(1) x_2 - 5x_3 + x_4 - 3x_5 = 24$$

$$(2) x_1 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 21$$

现在对原模型进行灵敏度分析, 分别研究下列 8 个变化。对各变化而言, 利用灵敏度分析程序修改上述一组方程式(以单纯形表形式), 并通过高斯消去法将其转化为恰当形式, 以便求出和评价当前基本解。然后, 检查该解的可行性及最优化。如果所有测试均未通过, 重新优化这些方程, 并求出新的最优解。

(a) 将右侧数值变为

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(b) 将 x_3 的目标函数系数变为 $c_3 = 2$ 。

(c) 将 x_1 的目标函数系数变为 $c_1 = 3$ 。

(d) 将 x_3 的系数变为

$$\begin{bmatrix} c_3 \\ a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(e) 将 x_1, x_2 的系数分别变为

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

和

$$\begin{bmatrix} c_2 \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- (f) 将目标函数变为 $Z = 5x_1 + x_2 + 3x_3$ 。
- (g) 将约束条件 1 变为 $2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 12$ 。
- (h) 引入新约束条件: $2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 60$ 。

C7.2-7 思考本书 3.4 节所述 Distribution Unlimited 公司问题及图 3.13 对该问题的总结。

尽管图 3.13 对不同运输路线的单位成本做出预估,但这些成本最终值还存在不确定性。因此,管理层希望在采用 3.4 节结尾部分提出的最优解前,先获取更多相关信息,以了解单位成本估计不准确所产生的后果。先通过基于单纯形法的计算机程序包生成灵敏度分析数据,然后再解答以下问题。

- (a) 图 3.13 所示单位运输成本中,哪一成本在不违反 3.4 节所给最优解的情况下具有最小误差? 估算单位运输成本时,重点工作是什么?
- (b) 各单位运输成本的允许范围是多少?
- (c) 应如何向管理层解释这些单位运输成本的允许范围?
- (d) 如果单位运输成本估值变化不止一处,如何利用生成的灵敏度分析数据确定最优解是否会变化?

7.2-8 思考以下问题。

求 $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2$

在以下条件下的最大值:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\leq b_1 \\ x_1 - x_2 &\leq b_2 \end{aligned}$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

令 x_4 和 x_5 分别代表函数约束条件的松弛变量。当 $c_1 = 3, c_2 = 2, b_1 = 30, b_2 = 10$ 时:

基本变量	方程式	下列参数系数:					右侧数值
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_4	(0)	1	0	0	-1	1	40
x_5	(1)	0	0	1	1	-2	10
x_1	(2)	0	1	0	1	-1	20

单纯形法会产生以下一组最终方程式。

I(a) 通过图解法确定 c_1 和 c_2 的允许范围。

(b) 运用代数分析求(a)的解,并予以验证。

I(c) 运用图解分析确定 b_1 和 b_2 的允许范围。

(d) 运用代数分析求(c)的解,并予以验证。

C(e) 通过采用单纯形法的软件包找出 c_1, c_2, b_1 和 b_2 的允许范围。

I7.2-9 思考 Wyndor Glass 公司模型变化五(图 7.5 及表 7.8),其中表 7.5 给出的参数值变化为 $\bar{c}_2 = 3, \bar{a}_{22} = 3$ 和 $\bar{a}_{32} = 4$ 。通过公式 $\bar{b}^* = S^* \bar{b}$ 计算各 b_i 的允许范围。然后利用图解分析对各允许范围做出解释。

17.2-10 思考 Wyndor Glass 公司模型变体 5(图 7.5 及表 7.8), 其中表 7.5 给出的参数值变化为 $\bar{c}_2=3$ 、 $\bar{a}_{22}=3$ 和 $\bar{a}_{32}=4$ 。通过代数法和图解法对 c_1 的允许范围($c_1 \geq \frac{9}{4}$)进行检验。

7.2-11 根据表 7.5 中的问题, 计算 c_2 的允许范围。按照表 7.5 中单纯形表格式, 用代数法列出所得解。然后, 以几何学视角, 并参照图 7.2, 对所得解进行检验。

7.2-12* 应用表 4.8 中最后一个单纯形表求解 Wyndor Glass 公司原问题中的下列问题。

- (a) 计算各 b_i 的允许范围。
- (b) 计算 c_1, c_2 的允许范围。
- (c) 通过采用单纯形法的软件包找出各 b_i, c_1 和 c_2 的允许范围。

7.2-13 思考 7.2 节所述 Wyndor Glass 公司模型变体 6, 利用表 7.9 中最后一个单纯形表求解下列问题。

- (a) 计算各 b_i 的允许范围。
- (b) 计算 c_1, c_2 的允许范围。
- (c) 通过采用单纯形法的软件包找出各 b_i, c_1 和 c_2 的允许范围。

7.2-14 思考以下问题。

求 $Z=2x_1-x_2+3x_3$ 在以下条件下的最大值:

$$x_1+x_2+2x_3=3$$

$$x_1-2x_2+x_3 \geq 1$$

$$2x_2+x_3 \leq 2$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

假设大 M 法(见本书 4.6 节)用于求解初始(人工)BF 解。使 \bar{x}_4 成为第一个约束条件的人工松弛变量, x_5 成为第二个约束条件的剩余变量, x_7 成为第三个约束条件的松弛变量, 于是, 产生最优解的最终一组方程式为

$$(0) Z+5x_2+(M+2)\bar{x}_4+M\bar{x}_6=8$$

$$(1) x_1-x_2+\bar{x}_4-x_7=1$$

$$(2) 3x_2+\bar{x}_4+x_5-x_6=2$$

假设原目标函数变为 $Z=2x_1+3x_2+4x_3$, 并且原来的第三个约束条件变为 $2x_2+x_3 \leq 1$ 。利用灵敏度分析过程(以单纯形表形式)修改给出的最终一组方程式, 并通过高斯消去法将其转化为恰当形式。转化后, 测试该解的可行性及最优化(不要重新优化)。

7.3-1 思考以下问题。

求 $Z=2x_1+5x_2$ 在以下条件下的最大值:

$$x_1+2x_2 \leq 10 \text{ (资源 1)}$$

$$x_1+3x_2 \leq 12 \text{ (资源 2)}$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

其中 Z 为两项生产活动的利润(单位: 美元)。

进行灵敏度分析时发现单位利润的估值正确率仅在 $\pm 50\%$ 以内。也就是说, 生产活动 1 的单位利润可能值为 1000~3000 美元, 生产活动 2 的单位利润可能值为 2500~7500 美元。

E*(a) 根据单位利润初始估值建立该问题电子表格模型。完成后, 通过 Solver 软件计算最优解, 并生成灵敏度报告。

E*(b) 利用电子表格与 Solver 软件验证当生产活动 1 单位利润由 2000 美元变为 1000 美元时,或由 2000 美元变为 3000 美元时,最优解是否仍保持最优。

E*(c) 再检验当生产活动 1 单位利润仍为 2000 美元但生产活动 2 单位利润由 5000 美元变为 2500 美元,或由 5000 美元变为 7500 美元时,最优解是否仍保持最优。

E*(d) 当生产活动 1 单位利润由 1000 美元变为 3000 美元(生产活动 2 单位利润保持不变),即增量为 20% 时,利用参数分析报告系统地计算出最优解及总利润。接下来,以同样方式系统地计算出当生产活动 2 的单位利润由 2500 美元变为 7500 美元(生产活动 1 单位利润保持不变)时,即增量为 50% 时,其最优解及总利润为多少。通过上述所得解对各产品单位利润允许范围进行评价。

I(e) 运用运筹学导论辅导软件中的图解法与灵敏度分析程序对各生产活动单位利润的允许范围进行估值。

E*(f) 运用 Solver 中的灵敏度报告计算各生产活动单位利润的允许范围。然后通过所得允许范围对(b)~(e)的结果进行检验。

E*(g) 运用双向参数分析报告系统地计算出两项生产活动单位利润同时变化时(如(d)所述)的最优解。

I(h) 运用运筹学导论辅导软件中的图解法与灵敏度分析程序,用图表解释(g)的结果。

E*7.3-2 重新思考习题 7.3-1 中的模型。进行灵敏度分析时发现两个函数约束条件右侧数值的估值正确率仅在±50% 以内。也就是说,第一个右侧数值的参数可能值范围为 5~15,第二个右侧数值的参数可能值范围为 6~18。

(a) 原电子表格模型计算完毕后,使第一个函数约束条件右侧数值增加 1,然后重新求解影子价格。

(b) 运用参数分析报告计算当第一个函数约束条件的右侧数值增加 1,即由 5 变为 15 时,最优解与总利润为多少?通过该报告对该右侧数值允许范围进行估值,即令(a)中所求影子价格维持有效的范围。

(c) 第二个函数约束条件也进行(a)步运算。

(d) 第二个函数约束条件也进行(b)步运算,即其右侧数值增加 1,由 6 变为 18。

(e) 运用 Solver 中的灵敏度报告计算各函数约束条件的影子价格及这些约束条件各右侧数值的允许范围。

7.3-3 思考以下问题。

求 $Z = x_1 + 2x_2$ 在以下条件下的最大值:

$$x_1 + 3x_2 \leq 8 \text{ (资源 1)}$$

$$x_1 + x_2 \leq 4 \text{ (资源 2)}$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

其中 Z 为两项生产活动的利润(单位:美元),右侧数值代表相应资源可用单位数量。

I(a) 通过图解法求解该模型。

I(b) 使可用资源量增加 1,然后通过图解分析重新确定各资源影子价格。

E*(c) 通过电子表格模型及 Solver 软件求解(a)和(b)。

E*(d) 当唯一变化是可用资源量增量为 1 时(该值比原值小 4,比当前值大 6),运用参数分析报告系统地计算出各资源最优解及总利润。利用所得解对各资源可用量的允许范围进行估值。

(e) 运用 Solver 中的灵敏度报告计算影子价格。再用该报告求出各可用资源量的范围,在

该范围内相应的影子价格保持有效。

(f) 为什么在管理层可灵活改变可用资源配置量的情况下,影子价格仍有其作用?

7.3-4* G. A. 制革公司有一款产品是一种特殊玩具,预计单位利润为3美元。由于该玩具需求量大,因此管理层计划增加当前1000件/天的产量。但由于两家玩具零件(零件A与零件B)供货商的供应量有限,所以加大产量比较困难。每件玩具需要安装两个零件A,但该零件供货商仅能将其供应量从2000件/天增至3000件/天。每件玩具需要安装一个零件B,但该零件供货商无法增加供应量,只能维持在1000件/天的水平。因为目前没有其他供应商可提供这些零件,于是,管理层考虑在企业内部开始自行生产,即同时生产同等数量的零件A和零件B,用于弥补上述两家供应商的供货不足。据估计,公司自行生产各种零件的成本比从两家供货商处采购要高出2.5美元。因此,管理层想确定该玩具的产量,以及零件副(即由零件A和零件B组成的一对零件)的产量,以此来实现总利润最大化。

下表为该问题所涉数据的总结:

		各生产活动中每件玩具的资源使用情况		
		生产活动		
资源	玩具生产	零件生产	可用资源量	
零件A	2	-1	3000	
零件B	1	-1	1000	
单位利润	\$3	-\$2.50		

E*(a) 为该问题建立电子表格模型,并求解。

E*(b) 由于所列两项生产活动的单位利润均为估值,因此管理层想了解在最优解保持不变的情况下,这些估值的上下浮动范围是多少。首先通过电子表格及Solver软件手动生成关于第一项生产活动(即玩具生产)最优解及总利润的表格,其中该项生产活动单位利润增量为50%,即由2美元增至4美元,然后求解该生产活动单位利润范围。第一项生产活动原单位利润为3美元,在最优解保持不变的情况下,关于该项生产活动单位利润的上下浮动范围,可得出什么结论?

E*(c) 第二项生产活动(即零件生产)也进行(b)步运算,并生成相关表格。其中该项生产活动单位利润的增量为50%,即由-3.50美元增至-1.50美元(此时,第一项生产活动的单位利润仍为3美元)。

E*(d) 利用参数分析报告系统地生成(b)步与(c)步所需全部数据,此处所用增量为25%,而不是50%。通过这些数据重新修改(b)步与(c)步所得结论。

I(e) 运用运筹学导论辅导软件中的图解法与灵敏度分析程序确定各生产活动单位利润的上下浮动范围(不要改变另一项生成活动的单位利润),在该范围内最优解保持不变。通过这一数据说明各生产活动单位利润的允许范围。

E*(f) 通过Solver软件的灵敏度报告求出各生产活动单位利润的允许范围。

E*(g) 运用双向参数分析报告系统计算两项生产活动单位利润同时变化时(如(b)、(c)所述)的最优解。

(h) 通过Solver软件灵敏度报告所给出的数据对这两项生产活动单位利润同时变化的范围进行描述,超出这一范围最优解可能发生变化。

E*7.3-5 重新思考习题7.3-4。G. A. 制革公司与上述两位供货商继续磋商后,管理层得知两位供货商均有意考虑在其原有最大供应量(即3000件零件A/天和1000件零件B/天)基础上增加供货,但前提是G. A. 制革公司愿为多生产的零件支付比正常价格稍高一些的费用。为各类零件多支出的具体费用有待继续协商。对正在生产的这款玩具的需求量极大,因此如果零

件供应增量充足,可实现每天生产 2500 件,这些玩具一天之内便可售出。这里假设习题 7.3-4 所给出的单位利润初始估值是正确的。

(a) 为该问题建立电子表格模型,并求解,其中零件初始最大供应量保持不变,新增约束条件为每天玩具产量不应大于 2500 件。

(b) 先不考虑零件超出正常价格的额外费用。在此使零件 A 最大供应量增加 1,然后通过电子表格及 Solver 软件确定零件 A 约束条件的影子价格。通过所得影子价格确定 G. A. 制革公司愿为各零件 A 所支付的最大额外费用。

(c) 对零件 B 的约束条件同样进行(b)步运算。

(d) 当零件 A 最大供应量 100 由 3000 增至 4000 时,对其最大供应量进行估值,超出该值(b)步所得影子价格(及相应的额外费用)便不再有效。估值可通过参数分析报告计算该供应增量的最优解及总利润(扣除正常价格外的额外费用)。

(e) 当零件 B 的最大供应量 100 由 1000 增至 2000 时,通过参数分析报告对零件 B 同样进行(d)步运算。

(f) 通过 Solver 软件的灵敏度报告确定各零件约束条件的影子价格及这些约束条件右侧数值的允许范围。

E*7.3-6* 思考本书 3.4 节所述联邦航空公司问题,以及表 3.19 所列数据。第 3 章的 EXCEL 文件包括一张列有该问题公式及最优解的电子表格。下面通过该电子表格及 Solver 软件进行下列(a)~(g)。

管理层与代表公司客服代表的协会将就新合同展开磋商。这可能会使表 3.19 所列不同班次各代表日常开销发生些许变化。以下为几种可能发生变化,现逐一考虑。对各种情况而言,管理层希望了解变化是否会令电子表格中的解不再为最优解。通过电子表格与 Solver 软件直接回答(a)~(e)中的这一问题。如果最优解发生改变,请将新解记录下来。

(a) 第二班次各代表日常开销由 160 美元变为 165 美元。

(b) 第四班次各代表日常开销由 180 美元变为 170 美元。

(c) (a)与(b)均发生了变化。

(d) 第二、四、五班次各代表日常开销均增加 4 美元,但第一班次和第三班次各代表日常开销均减少 4 美元。

(e) 对各班次而言,每位代表的日常开销增加了 2%。

(f) 通过 Solver 软件生成该问题的灵敏度报告。假设计算机上现在没有可供使用的电子表格模型,因此上述变化有待日后考虑。那么,说明如何通过灵敏度报告检验各情况下原最优解是否一定仍为最优?

(g) 对 5 个班次中的各班次而言,当唯一变化是相应班次各代表日常开销增加 3 美元时(从比当前成本少 15 美元起至比当前成本多 15 美元),运用参数分析报告系统计算各班次的最优解及总成本。

E*7.3-7 重新思考习题 7.3-6 中的联邦航空公司问题及其电子表格模型。

管理层现考虑增大表 3.19 中最右列的一个或多个数字值,该列代表不同时段最小客服代表数量,以提高客服水平。为指导该决策制定,管理层想了解不同时段最小客服代表数量方面的变化将对总成本造成什么影响?

通过 Solver 软件生成灵敏度报告,以便解答以下问题:

(a) 表 3.19 中最右列的哪个/些数值的增加不会导致总成本上涨?说明在不导致总成本上涨的情况下,各数值(假设该值为唯一变化)的增量是多少?

(b) 对于可导致总成本上涨的那些数值而言,各数值每增加1后,总成本会上涨多少?说明在答案保持有效的情况下,各数值(假设该值为唯一变化)的增量是多少?

(c) 如果(b)中所涉数值同时增加1,那么,上述(b)的答案是否仍然有效?

(d) 如果(b)中所涉10个数值同时增加1,那么,上述(b)的答案是否仍然有效?

(e) 如果10个数值同时等量增加,在多大范围内上述(b)的答案仍为有效?

7.3-8 大卫、拉德亚娜与莉迪亚3人是一家钟表公司的唯一合伙人,他们也在这家生产精良钟表的公司工作。大卫和拉德亚娜每人每周最多可在公司工作40h,而莉迪亚每周最多可在公司工作20小时。

该公司生产两种不同的钟表,一种是落地式大摆钟,另一种是挂钟。制作钟表时,(机械工程师)大卫负责组装钟表内部机械部件,(木工)拉德亚娜负责手工雕刻钟表木质外壳。莉迪亚则负责接单及钟表运输。这3项工作每项所需时间如下表所列:

任务	所需时间	
	落地式大摆钟	挂钟
钟表组装	6h	4h
木质外壳雕刻	8h	4h
钟表运输	3h	3h

每生产售出一台落地式大摆钟可获利300美元,而每台挂钟的获利为200美元。

现在3个合伙人想确定每周各类钟表的产量,以使总利润实现最大化。

(a) 为该问题建立代数形式的线性规划模型。

I(b) 运用运筹学导论辅导软件中的图解法与灵敏度分析程序求解该模型。求解后,利用该程序检验如果落地式大摆钟的单位利润由300美元增至375美元(模型中仅此一项变化),该模型最优解会否发生变化?如果不仅落地式大摆钟的单位利润发生变化,挂钟的单位利润也由200美元变为175美元,那么,继续检验此时模型最优解是否会发生变化。

E*(c) 利用电子表格建立该问题模型,并求解。

E*(d) 通过Solver软件检验(b)中所述变化产生的效果。

E*(e) 当落地式大摆钟的单位利润以20美元的增量由150美元增至450美元(挂钟单位利润保持不变)时,利用参数分析报告系统计算该模型最优解及总利润。然后,以同样方法计算当挂钟的单位利润以20美元增量由50美元增至350美元(落地式大摆钟单位利润保持不变)时,该模型最优解及总利润为多少。通过这些数据对各类钟表单位利润的允许范围进行估值。

E*(f) 当两类钟表单位利润同时变化(如(e)所述)且增量为50美元,而不是20美元时,通过双向参数分析报告系统计算该模型最优解。

E*(g) 如果3位合伙人每人每周最大工作时间均增加5h,那么,利用Solver软件求解这一变化对模型最优解及总利润所产生的影响。

E*(h) 当模型唯一变化是大卫每周最大工作时间分别变为35h、37h、39h、41h、43h、45h时,利用参数分析报告系统计算该模型最优解及总利润。当模型唯一变化是拉德亚娜每周最大工作时间与大卫的发生相同变化时,再以同样方法求解该模型最优解及总利润。最后,当模型唯一变化是莉迪亚每周最大工作时间变为15h、17h、19h、21h、23h、25h时,仍以同样方法求解该模型最优解及总利润。

E*(i) 生成Solver灵敏度报告,利用该报告确定各类钟表单位利润的允许范围,以及各合伙人每周最大工作时间的允许范围。

(j) 为增加总利润收入,3位合伙人同意他们中有一人需稍微延长每周最大工作时间。具体

谁需延长工作时间取决于谁能最大程度增加总收入。通过灵敏度报告选出该人选(此处假设初始单位利润赋值不发生变化)。

(k) 为什么有一个影子价格为零?

(l) 如果莉迪亚每周最大工作时间从 20h 变为 25h, 能否有效利用灵敏度报告中的影子价格确定这一变化所产生的影响? 如果可以, 总利润的增长额是多少?

(m) 除上述莉迪亚最大工作时间的变化外, 如果大卫每周最大工作时间也由 40h 变为 35h, 请重新进行(l)运算。

I(n) 通过图解分析对(m)中所得答案进行验证。

7.4-1 重新思考 7.4 节中阐释如何使用鲁棒优化法的示例。现在, Wyndor Glass 公司管理层觉得该例所做分析过于保守, 原因有 3 个: 第一, 某参数真值非常接近其不确定性范围极值(表 7.10)的可能性不大; 第二、某一约束条件所有参数真值取值均同时偏向各自不确定性范围内效果不佳的一端的可能性也微乎其微; 第三、各约束条件均存在一定空间, 可用于对违反约束条件的情况稍作补偿。

因此, Wyndor Glass 公司管理层要求重新求解该模型, 但各参数不确定性范围仅为表 7.10 中的 1/2。

(a) 重新求得的最优解是多少? 该最优解可令每周总利润增加多少?

(b) 如果 Wyndor Glass 公司产量达不到向经销商保证的最低供应量时, 需向他们支付 5000 美元罚款, 那么, Wyndor Glass 公司是否应采用新的最低供应量值?

7.4-2 思考下列问题。

求 $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ 在以下条件下的最大值:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

所涉参数赋值及不确定性范围如下表所列:

参数	赋值	不确定性范围	参数	赋值	不确定性范围
a_{11}	1	0.9~1.1	b_1	9	8.5~9.5
a_{12}	2	1.6~2.4	b_2	8	7.6~8.4
a_{21}	2	1.8~2.2	c_1	3	2.7~3.3
a_{22}	1	0.8~1.2	c_2	4	3.6~4.4

(a) 采用上述参数赋值, 运用图解法求解该模型。

(b) 现在通过鲁棒优化法为该模型建立一保守模型。列出(a)、(b)中所得 Z 值, 然后用鲁棒优化模型替代原模型, 并计算 Z 的变化百分比。

7.4-3 按照习题 7.4-2 的提示思考下列问题, 相关参数信息如下表所列:

参数	赋值	不确定性范围	参数	赋值	不确定性范围
a_{11}	10	6~12	b_1	50	45~60
a_{12}	5	4~6	b_2	20	15~25
a_{21}	-2	-3~-1	b_3	30	27~32
a_{22}	10	8~12	c_1	20	18~24
a_{31}	5	4~6	c_2	15	12~18
a_{32}	5	3~8			

如下一列顶部数据所列。

求 $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ 在以下条件下的最大值：

约束条件：

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq b_3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

C7.4-4 思考下列问题。

求 $Z = 5x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$ 在以下条件下的最大值：

$$a_{11}x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq b_1$$

$$3x_1 + a_{22}x_2 + x_3 \leq b_2$$

$$2x_1 - 4x_2 + a_{33}x_3 \leq 20$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

上述不确定参数的赋值及不确定性范围如下表所列：

参数	赋值	不确定性范围	参数	赋值	不确定性范围
a_{11}	4	3.6~4.4	b_2	20	19~22
a_{22}	-1	-1.4~-0.6	c_2	-8	-9~-7
a_{33}	3	2.5~3.5	c_3	4	3~5
b_1	30	27~33			

(a) 利用这些参数赋值求解该模型。

(b) 现在通过鲁棒优化法为该模型建立一保守模型。求解该模型。列出(a)、(b)中所得 Z 值,然后用鲁棒优化模型替代原模型,并计算 Z 值减量百分比。

7.5-1 重新思考 7.5 节中阐释如何使用机会约束条件的示例。需要考虑的是,不久,Wyndor Glass 公司两款新产品在 3 个车间投产后,在具体可用生产时间方面存在不确定性。3 个车间中各车间每周可用生产时间的平均值和标准差,其初始赋值如表 7.11 所列。

现在假设对可用生产时间进行深入研究后,其潜在允许范围很可能被大幅缩小,尤其是表 7.11 中的平均值保持不变,但标准差已减半。但为确保投产后原约束条件仍然成立, a 的值被增至 0.99。现仍假设各车间可用生产时间呈正态分布。

(a) 用概率表达式表达这 3 个机会约束条件,然后写出这些机会约束条件的确定性等价形式。

(b) 求解所得出的线性规划模型。该解每周可为 Wyndor Glass 公司带来的总利润是多少?将该周总利润与 7.5 节中所求得的每周总利润进行比较。将标准差减半后,这种更为严谨的研究方法使每周总利润增长多少?

7.5-2 思考以下约束条件,假设其右侧数值 b 呈正态分布,平均值为 100,标准差为 σ 。

$$30x_1 + 20x_2 \leq b$$

快速研究随机变量 b 的可能取值后得出 σ 的估值为 10。但随后更为仔细的计算将这一可能取值大幅缩小,由此 σ 被重新赋值为 2。选出该约束条件最小可接受概率(用 a 表示)后,这一

约束条件将被视为机会约束条件。

- (a) 用概率表达式表达所得出的机会约束条件,然后用 σ 和 K_a 表达其确定性等价形式。
- (b) 制作表格,比较 $\sigma=10$ 与 $\sigma=2$ 时该确定性表达式中右侧数值的不同,其中 $a=0.9$ 、 0.95 、 0.975 、 0.99 和 0.99865 。

7.5-3 假设某线性规划模型有 20 个以不等式表达的约束条件,且这些约束条件右侧数值(即 b_i)为不确定参数,于是,引入含有 a 的机会约束条件取代这些约束条件。接下来,代入机会约束条件并计算由此得到的线性规划模型,发现所得最优解满足其中 10 个确定性表达式的要求,而另外 10 个确定性表达式则不满足。假设这 20 个不确定参数 b_i 均呈现正态分布,请回答下列问题。

- (a) 当 $a=0.95$ 时,新线性规划问题最优解满足所有 20 个原约束,因而成为原问题可行解的概率上限和下限为多少?
- (b) 重复(a)运算,其中 $a=0.99$ 。

(c) 假设所有 20 个函数约束条件均为硬约束,即必须满足的约束条件。因此,决策者希望所采用的 a 值至少存在 95% 的概率可确保新线性规划问题的最优解实际上可成为原问题可行解。通过反复尝试, a 最小值(保留 3 位有效数字)。

7.5-4 思考下列问题。

求 $Z=20x_1+30x_2+25x_3$ 在下列条件下的最大值:

$$3x_1+2x_2+x_3 \leq b_1$$

$$2x_1+4x_2+2x_3 \leq b_2$$

$$x_1+3x_2+5x_3 \leq b_3$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

其中 b_1 、 b_2 和 b_3 为不确定参数,且均呈正态分布。这些参数的均值及标准差分别为 $(90, 3)$ 、 $(150, 6)$ 和 $(180, 9)$ 。

- (a) 建议采用 $(x_1, x_2, x_3) = (7, 22, 19)$ 这个解。如果采用该解,各函数约束条件得以满足的概率是多少?

(b) 用公式表示上述 3 个约束条件的机会约束条件,其中第一个约束条件的 a 值为 0.975,第二个约束条件的 a 值为 0.95,第三个约束条件的 a 值为 0.90。然后,确定 3 个机会约束条件的确定性等价形式,并求解由此所得线性规划模型的最优解。

- (c) 计算新线性规划模型最优解成为原问题可行解的概率。

C7.6-1 重新思考 7.6 节中阐释如何使用带补偿的随机规划的示例。现在 Wyndor 管理层已获得有关其竞争对手正计划生产销售一款特殊新品与其产品 2 展开直接竞争的更多信息,表明该传言实现的可能性与当初想象的不同。因此,有关该传言的概率降至 50%。

建立修正的随机规划模型,并计算其最优解。然后用文字描述相应的最优计划。

C7.6-2 该情况与习题 7.6-1 所述基本相同,只是 Wyndor Glass 公司管理层认为有关上述传言的信息并不可靠。即他们还未确定该传言属实的最大概率应为 50% 还是 75%,亦或是介于二者之间的某个概率。于是,管理层要求计算出这一概率的平衡点,低于该点时 7.6 节所提出的最优计划将不再具备最优化。通过反复尝试计算该平衡点(保留小数点后两位数字)。如果这一概率略小于平衡点,新最优计划是什么?

C7.6-3 皇家可乐公司正考虑开发一款新型特殊碳酸饮料增加至现有标准产品线中,新品的生产时间为 2 年左右(之后,可能生产另一款特殊饮料,用以取代该新品)。但新款饮料能否

盈利并不清楚,因此需要分析确定是否进行新品开发。如果是,新品开发结束后将先在小区域试销市场出售,看其接受程度如何。如果试销表明新款饮料会带来盈利,那么,便在全国范围内销售。

在此列出相关数据:新款饮料开发成本及试销市场销售运作成本预计为4000万美元。新品在试销市场及全国范围(如果新品在全国销售)的广告经费预算为1亿美元。其中,用于试销市场的广告费用至少需500万美元,最多为1000万美元,也就是说,用于全国市场的广告费为9000~9500万美元。为简化分析,假设试销市场与全国市场的销售额和各自市场范围内所投放的广告经费成正比(同时,厂家也认识到广告投放达到饱和程度后,销售增量便会下降)。扣除4000万美元的固定成本后,试销市场净利润预计为其广告费用的1/2。

为进一步简化分析,将试销市场产品销售情况分为以下3种:①销售看好;②销售一般;③销售欠佳。这3种情况的概率估值分别为25%、25%和50%。如果是销售看好的情况,那么,预计全国市场的净利润约为其广告投入的2倍。如果是销售一般,相应地,全国市场净利润约为其广告投入的0.2倍。如果是销售欠佳,就放弃该饮品,不在全国市场销售。

运用带补偿的随机规划建立该问题模型。假设公司应开发新款饮料,求解该模型,确定试销市场应投放多少广告经费?然后,根据试销市场3种销售情况,分别计算不同情况下全国市场(如果在全国销售的话)应投放多少广告经费。最后,如果公司研发该新款饮料,请计算其净利润总额(统计学意义上的)期望值,其中包括固定成本。事实上,只要该产品净利润总额预期值为正值,公司就应继续研发。

C7.6-4 思考下列问题。

求 $Z = 5x_1 + c_2x_2$ 在下列条件下的最大值:

$$\begin{aligned} 3x_1 + a_{12}x_2 &\geq 60 \\ 2x_1 + a_{22}x_2 &\geq 60 \end{aligned}$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

其中, x_1 代表生产活动1的情况, x_2 代表生产活动2的情况, c_2 、 a_{12} 及 a_{22} 的值待定。只有生产活动1将于不久后启动,而生产活动2的启动时间还要晚些。从现在到生产活动2启动的这段时间内可能发生多种不同情况,因而, c_2 、 a_{12} 和 a_{22} 会随情况的不同而取值不同。所以,现在的目标是通过所有这些信息来选择 x_1 值,并同时制定某具体情况发生后如何选择 x_2 值的计划。

考虑可能发生的有3种情况,不同情况下, c_2 、 a_{12} 和 a_{22} 的值分别为

第一种情况下: $c_2 = 4$ 、 $a_{12} = 2$ 、 $a_{22} = 3$

第二种情况下: $c_2 = 6$ 、 $a_{12} = 3$ 、 $a_{22} = 4$

第三种情况下: $c_2 = 3$ 、 $a_{12} = 2$ 、 $a_{22} = 1$

这3种情况发生的可能性相同。

运用带补偿的随机规划为该问题建立相应模型,然后求解最优计划。

案 例

案例 7.1 空气污染控制

回顾3.4节(即题为“空气污染控制”小节)关于NORI & LEETS公司的问题。运筹研究小组获得最优解后便进行了灵敏度分析。现在我们先提供一些其他背景信息,然后大家重新按照运筹研究小组人员所采取的步骤继续研究该问题。

模型原表达式中各参数值请参见表3.12、表3.13和表3.14。由于该公司在本例所涉及的

污染治理方法方面经验不多,所以表 3.14 中的成本估算非常笼统,各估值上下浮动可达 10%。此外,表 3.13 中的参数值也存在不确定性,但略好于表 3.14。相比之下,表 3.12 的值为政策标准,因此可为常量。

但是,在如何设置不同污染物的减排政策标准问题上,仍存在分歧。表 3.12 的数值只是在还不了解达标所需的总成本前,暂定的初值。政府官员与公司决策层均同意,应在对成本与利润做出权衡的基础上,制定政策标准的最终决策。有鉴于此,政府的结论是:政策标准方面,当前值(即表 3.12 中的全部数值)每增加 10%,即意味着政府投入增加 350 万美元。因此,政府同意在公司接受的范围内,其政策标准值每减少 10%(最多减少 50%),政府便减免 350 万美元的税款。

最后,关于 3 项污染物的政策标准相对值也存在某些争论。正如表 3.12 所列,现在对颗粒物的减排要求不到氧化硫或碳氢化合物减排量的 1/2。因此,有人呼吁缩小此类不平衡现象。另一些人主张这种差距即使再大一些也属合理,因为含硫氧化物与烃类化合物比颗粒物所造成的伤害要大得多。不过,人们已达成共识,在知晓政策标准中哪些方面可做权衡且不会增加总成本后,将重新审视这一问题。

(a) 利用现有的线性规划软件求解 3.4 节所建立的该问题模型。除计算最优解外,再生成灵敏度报告用于优化后分析。由此所得的结果可作为以下各步的基础。

(b) 不考虑参数值不存在不确定性参数的约束条件(即当 $j=1, 2, \dots, 6$ 时, $x_j \leq 1$),找出模型中的敏感参数(提示:参见 4.7 节关于“灵敏度分析”小节)。如可能,给出哪些参数应更为审慎地赋值的建议。

(c) 分析表 3.14 所列各成本参数赋值,如果其中一项发生错误会产生什么结果。如果真值比估值小 10%,最优解是否会改变?如果真值比估值大 10%,最优解是否会改变?根据结论给出建议,在对成本参数进行更为审慎的估值时,下一步的工作重点是什么?

(d) 思考在应用单纯形法前,将模型转换为最大化形式的情形。利用表 6.14 建立相应的对偶问题,然后将单纯形法所求之解用于原问题,以求得该对偶问题的最优解。如果保持原问题最小化形式,会对该对偶问题的形式以及最优对偶变量产生怎样的影响?

(e) 对各项污染物,利用(d)的结论,说明污染物年排放率减排要求若发生任何微小变化,会使最优解的总成本以怎样的速率发生变动。同时说明,在不改变总成本变动率的情况下减排量的(上下浮动)范围。

(f) 针对表 3.12 所列颗粒物政策标准中的每个单位变化,请确定含硫氧化物需发生多大反向变化,才可使最优解的总成本保持不变?然后再确定烃类化合物需发生多大反向变化(此时含硫化合物的值不变),才可使最优解的总成本保持不变?最后,当含硫化合物、烃类化合物同时等量地与颗粒物排放值发生反向变化时,确定前两者的变化量是多少,方可保持最优解的总成本不变?