计量经济学I（研究生）
(Econometrics I)

胡华平
西北农林科技大学
经济管理学院数量经济教研室
huhuaping01@hotmail.com

2019-10-11

模块2：结构方程模型（SEM）

Chapter 18. 为什么要关心联立方程模型？

Chapter 19. 联立方程模型的识别问题

Chapter 20. 联立方程模型的估计方法

Chapter 18. 为什么要关心联立方程模型？

18.1 联立方程模型的本质

18.2 联立方程模型的表达和定义

18.3 OLS估计方法还合适么？

18.1 联立方程模型的本质

联立方程模型的形态

联立方程模型（simultaneous equations model,SEM）：由多个方程组成的、方程之间存在相互关联的、联合影响的**内生变量**的方程系统。其基本形式如下：

$$\begin{cases} Y_{1i} = \beta_{10} + \gamma_{12} Y_{2i} + \beta_{11} X_{1i} + u_{1i} \\ Y_{2i} = \beta_{20} + \gamma_{21} Y_{1i} + \beta_{21} X_{1i} + u_{2i} \end{cases}$$

常见的经济模型1：需求-供给模型

需求-供给模型：

$$
\begin{aligned}
\text{Demand function: } Q_t^d &= \alpha_0 + \alpha_1 P_t + u_{1t}, \quad \alpha_1 < 0 \\
\text{supply function: } Q_t^s &= \beta_0 + \beta_1 P_t + u_{2t}, \quad \beta_1 > 0 \\
\text{Equilibrium condition:} Q_t^d &= Q_t^s
\end{aligned}
$$

常见的经济模型2：凯恩斯收入决定模型

凯恩斯收入决定模型（Keynesian model of income determination）：

$$\begin{cases} C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \varepsilon_t & \text{(消费函数)} \\ Y_t = C_t + I_t & \text{(收入恒等式)} \end{cases}$$

常见的经济模型3：IS模型

投资储蓄的IS宏观经济模型：

$$
\begin{aligned}
\text{Consumption function: } C_t &= \beta_0 + \beta_1 Y_{dt} & < \beta_1 < 1 \\
\text{Tax function: } T_t &= \alpha_0 + \alpha_1 Y_t & 0 < \alpha_1 < 1 \\
\text{Investment function: } I_t &= \gamma_0 + \gamma_1 r_t \\
\text{Definition: } \gamma_{dt} &= Y_t - T_t \\
\text{Government expenditure: } G_t &= \bar{G} \\
\text{National income identity: } Y_t &= C_t + I_t + G_t
\end{aligned}
$$

其中：Y表示国民收入；Y_d表示可支配收入；r表示利率；$\bar{G}$表示给定政府支出水平。

常见的经济模型4：LM模型

货币市场均衡的LM宏观经济模型：

$$
\begin{aligned}
\text{Money demand function: } M_t^d &= a + bY_t - cr_t \\
\text{Money supply function: } M_t^s &= \bar{M} \\
\text{Equilibrium condition: } M_t^d &= M_t^s
\end{aligned}
$$

其中： Y表示收入； r表示利率; $\bar{M}$表示给定货币供给量。

常见的经济模型5：克莱因模型

克莱因模型（Llein's model）：

$$
\begin{aligned}
\text{Consumption function: } C_t &= \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 \left(W + W'\right)_t + \beta_3 P_{t-1} + u_{1t} \\
\text{Investment function: } I_t &= \beta_4 + \beta_5 P_t + \beta_6 P_{t-1} + \beta_7 K_{t-1} + u_{2t} \\
\text{Demand for labor: } w_t &= \beta_8 + \beta_9 \left(Y + T - W'\right)_t + \beta_{10} \left(Y + T - W'\right)_{t-1} + \beta_{11} t + u_{3t} \\
\text{Identity: } Y_t &= C_t + I_t + C_t \\
\text{Identity: } Y_t &= W_t' + W_t + P_t \\
\text{Identity: } K_t &= K_{t-1} + I_t
\end{aligned}
$$

其中：C表示消费支出；Y表示税后收入；P表示利润；W表示个人工资；W'表示政府工资；K表示资本存货；T表示税收。

生活中的模型1：凶杀犯罪率模型

$$
\begin{aligned}
\text{murdpc} &= \alpha_1 \text{polpc} + \beta_{10} + \beta_{11}\text{incpc} + u_1 \\
\text{polpc} &= \alpha_2 \text{murdpc} + \beta_{20} + \text{ other factors.}
\end{aligned}
$$

其中： $murdpc$表示人均凶杀犯罪数； $polpc$表示人均警员数； $incpc$表示人均收入。

生活中的模型2：住房支出-储蓄模型

$$
\begin{aligned}
\text{housing} &= \alpha_1 \text{saving} + \beta_{10} + \beta_{11}\text{inc} + \beta_{12} educ + \beta_{13}\text{age} + u_1 \\
\text{saving} &= \alpha_2 \text{housing} + \beta_{20} + \beta_{21}\text{inc} + \beta_{22} educ + \beta_{23}\text{age} + u_2
\end{aligned}
$$

其中： $housing$表示住房支出； $saving$表示家庭储蓄； inc表示家庭收入； $educ$表示教育水平; age表示年龄。

联立方程模型的特点

联立方程模型的本质是**内生变量**问题：

- 每一个方程都有其经济学因果关系（保持其他条件不变的）
- 样本数据只是各种变量的最终结果，但其中蕴含复杂相互因果互动关系
- 特定方程的参数估计，往往跟其他方程有联系
- 直接使用OLS方法估计参数将会不可靠

松露案例：变量说明

变量	含义	单位
P	松露市场价格	美元/盎司
Q	松露产量或需求量	盎司
PS	松露替代品的市场价格	美元/盎司
DI	当地居民可支配收入	美元/人
PF	生产成本(小猪的租金)	美元/小时

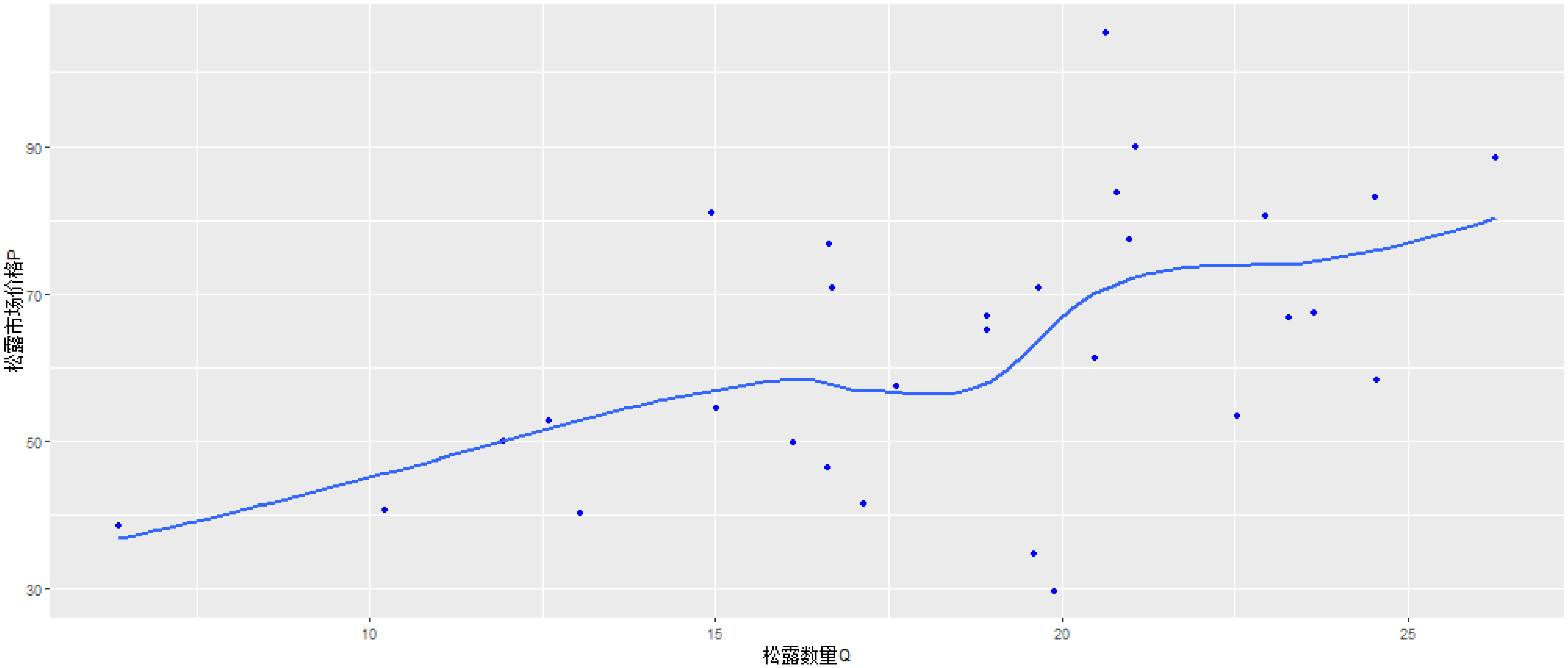
松露案例：数据表

id	P	Q	PS	DI	PF
1	29.64	19.89	19.97	2.103	10.52
2	40.23	13.04	18.04	2.043	19.67
3	34.71	19.61	22.36	1.87	13.74
4	41.43	17.13	20.87	1.525	17.95
5	53.37	22.55	19.79	2.709	13.71
6	38.52	6.37	15.98	2.489	24.95
7	54.33	15.02	17.94	2.294	24.17
8	40.56	10.22	17.09	2.196	23.61

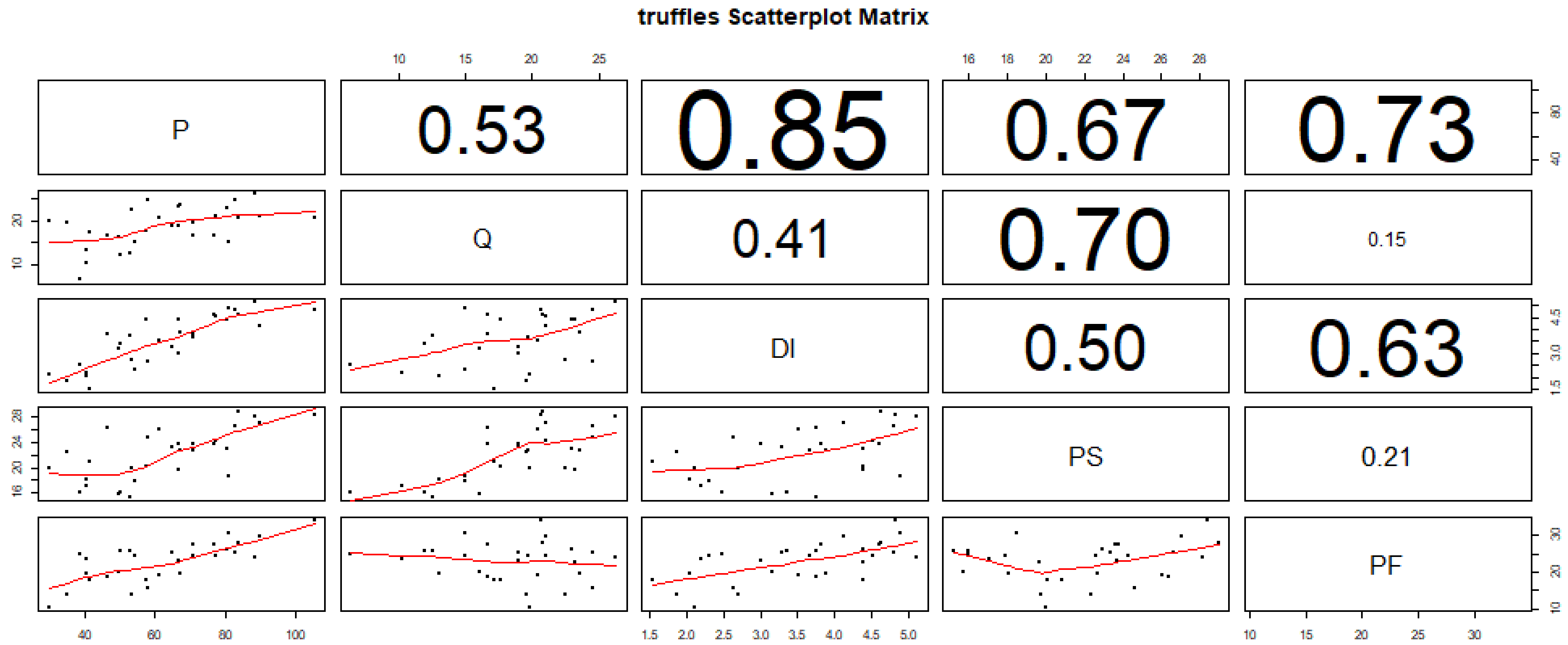
Showing 1 to 8 of 30 entries

Previous 1 2 3 4 Next

松露案例：散点图(P VS Q)



松露案例：矩阵散点图


truffles Scatterplot Matrix
P
Q
DI
PS
PF
0.53
0.85
0.67
0.73
0.41
0.70
0.15
0.50
0.63
0.21

松露案例：简单线性回归

从最简单线性回归模型开始。通常我们会使用价格(P)和产量(Q)数据直接做简单线性回归建模：

$$
\begin{aligned}
P &= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 Q + e_1 \qquad \text{(simple P model)} \\
Q &= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 P + e_2 \qquad \text{(simple Q model)}
\end{aligned}
$$

松露案例：简单线性回归

我们都知道，两个变量的线性回归是不对称的，因此有：

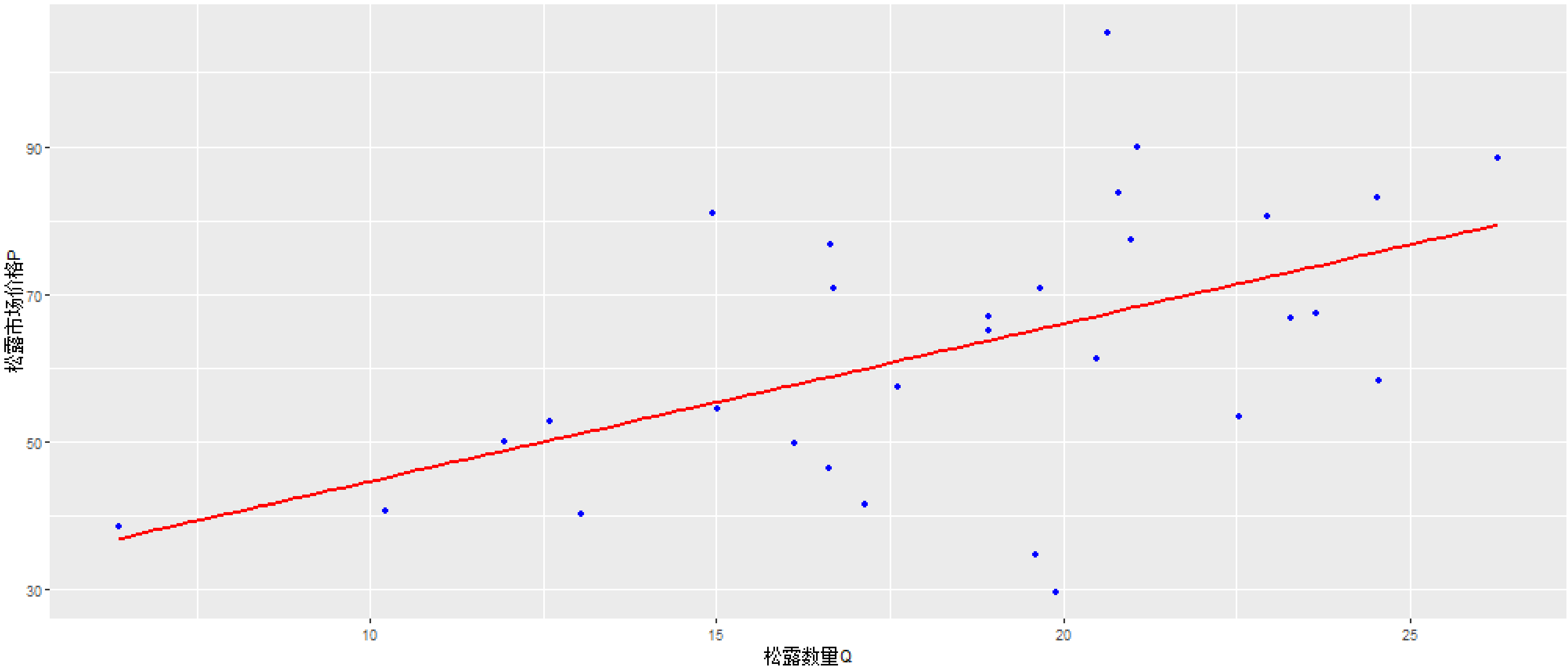
- 简单的价格(P)模型回归结果如下：

$$
\begin{array}{lll}
\widehat{P} = & +23.23 & +2.14Q \\
(\mathrm{t}) & (1.8748) & (3.2831) \\
(\mathrm{se}) & (12.3885) & (0.6518) \\
(\mathrm{fitness}) R^2 = 0.2780; \bar{R}^2 = 0.2522 \\
\quad F^* = 10.78;\ p = 0.0028
\end{array}
$$

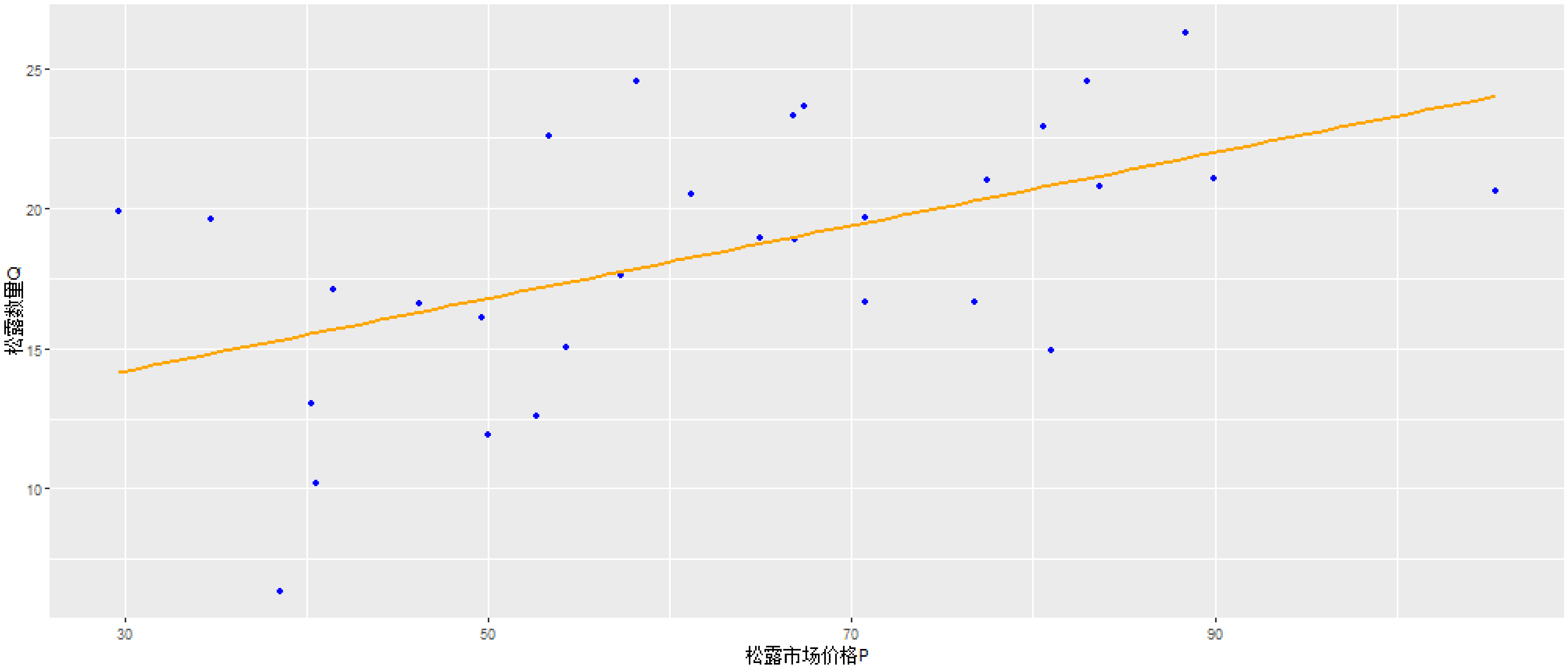
- 简单的数量(Q)模型回归结果如下：

$$
\begin{array}{lll}
\widehat{Q} = & +10.31 & +0.13P \\
(\mathrm{t}) & (3.9866) & (3.2831) \\
(\mathrm{se}) & (2.5863) & (0.0396) \\
(\mathrm{fitness}) R^2 = 0.2780; \bar{R}^2 = 0.2522 \\
\quad F^* = 10.78;\ p = 0.0028
\end{array}
$$

松露案例：样本回归线1



松露案例：样本回归线2



松露案例：多元线性回归

当然，我们也可以继续使用更多的变量作为自变量X，构建如下的回归模型：

$$
\begin{aligned}
P &= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 Q + \hat{\beta}_3 DI + \hat{\beta}_2 PS + e_1 && \text{(added P model)} \\
Q &= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 P + \hat{\beta}_2 PF + e_2 && \text{(added Q model)}
\end{aligned}
$$

- 我们努力地想让这些方程更加“合理”、“可信”。

松露案例：多元线性回归

- 增加变量的价格(P)模型回归结果如下：

$$
\begin{array}{lllll}
\widehat{P} = & -13.62 & +0.15Q & +12.36DI & +1.36PS \\
(\text{t}) & (-1.4987) & (0.3032) & (6.7701) & (2.2909) \\
(\text{se}) & (9.0872) & (0.4988) & (1.8254) & (0.5940) \\
\multicolumn{5}{l}{(\text{fitness})R^2 = 0.8013; \bar{R}^2 = 0.7784} \\
\multicolumn{5}{l}{\qquad F^* = 34.95;\ p = 0.0000}
\end{array}
$$

- 增加变量的数量(Q)模型回归结果如下：

$$
\begin{array}{llll}
\widehat{Q} = & +20.03 & +0.34P & -1.00PF \\
(\text{t}) & (16.3938) & (15.5436) & (-13.1028) \\
(\text{se}) & (1.2220) & (0.0217) & (0.0764) \\
\multicolumn{4}{l}{(\text{fitness})R^2 = 0.9019; \bar{R}^2 = 0.8946} \\
\multicolumn{4}{l}{\qquad F^* = 124.08; p = 0.0000}
\end{array}
$$

18.2 联立方程模型的表达和定义

联立方程模型的一般表达：代数式1

联立方程模型形态1：

$$
\begin{array}{lllll}
Y_{t1} = & + \gamma_{12}Y_{t2} + \cdots + \gamma_{1m}Y_{tm} & +\beta_{11}X_{1t} + \beta_{12}X_{t2} + \cdots + \beta_{1k}X_{tk} & +\varepsilon_{t1} \\
Y_{t2} = \gamma_{21}Y_{t1} + & \cdots + \gamma_{2m}Y_{tm} & +\beta_{21}X_{t1} + \beta_{22}X_{t2} + \cdots + \beta_{2k}X_{tk} & +\varepsilon_{t2} \\
\vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \\
Y_{tm} = \gamma_{m1}Y_{t1} + \gamma_{m2}Y_{t2} + \cdots & & +\beta_{m1}X_{t1} + \beta_{m2}X_{t2} + \cdots + \beta_{mk}X_{tk} & +\varepsilon_{tm}
\end{array}
$$

- **内生变量**或联合应变量(m个)：$Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$
- **前定变量**(K个)：$X_1, X_2, \cdots, X_k$
- **结构随机干扰项**(m个)：$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$

- **内生变量系数** γ
- **前定变量系数** β
- **观测个数** $t = 1, 2, \cdots, T$

联立方程模型的定义：内生变量和前定变量

内生变量（endogenous vaviables）：由模型决定的变量。

- 如 $Y_{t1}; Y_{t2}; \cdots; Y_{tm}$

前定变量（predetermined variables）：是**外生变量**和**滞后内生变量**的合称。

- **外生变量**（exdogenous vaviables）：不由模型决定的变量，包括**当前期的**和**滞后期的**
  - 当前期的外生变量 $X_{t1}, X_{t2}, \cdots, X_{tk}$。
  - 滞后期的外生变量，如 X_{t1}的外生滞后变量： $X_{t-1,1}, X_{t-2,1}, \cdots, X_{t-(T-1),1}$；以及 X_{tk}的外生滞后变量： $X_{t-1,k}, X_{t-2,k}, \cdots, X_{t-(T-1),k}$等。
- **滞后内生变量**（lagged endogenous vaviables）：当前时期下内生变量的滞后变量。
  - 如 Y_{t1}的滞后内生变量： $Y_{t-1,1}, Y_{t-2,1}, \cdots, Y_{t-(T-1),1}$；以及 Y_{tm}的滞后内生变量：$Y_{t-1,m}, Y_{t-2,m}, \cdots, Y_{t-(T-1),m}$等

联立方程模型的定义：结构方程和结构参数

结构方程（structural equations）：直接刻画经济结构或行为关系的方程系统。

- 见前述**代数式1**

结构参数（structural parameters）：结构方程中代表经济结果或行为关系的参数。具体又包括**内生结构系数**和**外生结构系数**

- **内生结构系数**：如上述结构方程中的 $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \cdots, \gamma_{1m}; \cdots; \gamma_{m1}, \gamma_{m2}, \cdots, \gamma_{mm}$
- **外生结构系数**：如上述结构方程中的 $\beta_{11}, \beta_{12}, \cdots, \beta_{1m}; \cdots; \beta_{m1}, \beta_{m2}, \cdots, \beta_{mm};$

联立方程模型的一般表达：代数式2

联立方程模型形态2：我们也可以将前述代数式1整理成

$$
\begin{aligned}
\gamma_{11}Y_{t1} + \gamma_{12}Y_{t2} + \cdots + \gamma_{m,m-1}Y_{t,m-1} + \gamma_{1m}Y_{tm} + \beta_{11}X_{t1} + \beta_{12}X_{t2} + \cdots + \beta_{1k}X_{tk} &= \varepsilon_{t1} \\
\gamma_{21}Y_{t1} + \gamma_{22}Y_{t2} + \cdots + \gamma_{m,m-1}Y_{t,m-1} + \gamma_{2m}Y_{tm} + \beta_{21}X_{t1} + \beta_{22}X_{t2} + \cdots + \beta_{2k}X_{tk} &= \varepsilon_{t2} \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad & \vdots \\
\gamma_{m1}Y_{t1} + \gamma_{m2}Y_{t2} + \cdots + \gamma_{m,m-1}Y_{t,m-1} + \gamma_{mm}Y_{tm} + \beta_{m1}X_{t1} + \beta_{m2}X_{t2} + \cdots + \beta_{mk}X_{tk} &= \varepsilon_{tm}
\end{aligned}
$$

联立方程模型的一般表达：矩阵式

联立方程模型形态3：**矩阵表达。**将上述代数式2的m个方程进一步表达为矩阵形式

$$
\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_m \end{bmatrix}_t \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1m} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mm} \end{bmatrix} +
$$

$$
\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_m \end{bmatrix}_t \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \cdots & \beta_{km} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_m \end{bmatrix}_t
$$

联立方程模型的一般表达：矩阵式

进一步可以表达为:

$$
\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{y}_t'\boldsymbol{\Gamma} & +\boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{B} & =\boldsymbol{\varepsilon}_t' \\
(1*m)(m*m) & (1*k)(k*m) & (1*m)
\end{array}
$$

复习本科知识：加粗大写表示**矩阵**（matrix），加粗小写表示**向量**（vector）。其中**向量**默认情形下都是**列向量**（column vector）。对其**转置**（transpose）即为**行向量**（row vector）。

联立方程模型的一般表达：矩阵式

对于**内生结构参数矩阵** $\mathbf{\Gamma}$：

- 为确保每个方程中有一个**因变量**，则矩阵 $\mathbf{\Gamma}$每列中至少有一个元素为1
- 如果矩阵 $\mathbf{\Gamma}$表现为上**三角矩阵**（upper triangular matrix），那么联立方程模型就表现为**递归模型**（recursive model）。

$$\begin{aligned}
y_{1t} &= & f_1\left(\mathbf{x}_t\right)+\varepsilon_{t1} \\
y_{2t} &= & f_2\left(y_{t1},\mathbf{x}_t\right)+\varepsilon_{t2} \\
\vdots & & \vdots \\
y_{mt} &= & f_m\left(y_{t1},y_{t2},\ldots,y_{t,m-1},\mathbf{x}_t\right)+\varepsilon_{mt}
\end{aligned}$$

对于**外生结构参数矩阵** $\boldsymbol{B}$：

联立方程模型的定义：约简方程和约简系数（代数表达）

约简型方程（reduced equations）：仅用**前定变量**和**随机干扰项**来表达一个内生变量的方程。

$$
\begin{aligned}
Y_{t1} &= \quad + \gamma_{12}Y_{t2} + \cdots + \gamma_{1m}Y_{tm} \; + \beta_{11}X_{1t} + \beta_{12}X_{t2} + \cdots + \beta_{1k}X_{tk} \; + \varepsilon_{t1} \\
Y_{t2} &= \gamma_{21}Y_{t1} + \quad \cdots + \gamma_{2m}Y_{tm} \; + \beta_{21}X_{t1} + \beta_{22}X_{t2} + \cdots + \beta_{2k}X_{tk} \; + \varepsilon_{t2} \\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
Y_{tm} &= \gamma_{m1}Y_{t1} + \gamma_{m2}Y_{t2} + \cdots \; + \beta_{m1}X_{t1} + \beta_{m2}X_{t2} + \cdots + \beta_{mk}X_{tk} + \varepsilon_{tm}
\end{aligned}
$$

以上**结构方程**（代数式1）可以转化为如下**简约方程**：

$$
\begin{aligned}
Y_{t1} &= \; +\pi_{11}X_{t1} + \pi_{12}X_{t2} + \cdots + \pi_{1k}X_{tk} \; + v_{t1} \\
Y_{t2} &= \; +\pi_{21}X_{t1} + \pi_{22}X_{t2} + \cdots + \pi_{2k}X_{tk} \; + v_{t2} \\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
Y_{tm} &= +\pi_{m1}X_{t1} + \pi_{m2}X_{t2} + \cdots + \pi_{mk}X_{tk} + v_{tm}
\end{aligned}
$$

约简系数（reduced coefficients）：约简方程中对应的系数。如 $\pi_{11}, \pi_{12}, \cdots, \pi_{1k}$和 $\pi_{m1}, \pi_{m2}, \cdots, \pi_{mk}$等。**约简随机干扰项**：指约简方程中的 $v_1, v_2, \cdots, v_m$。

联立方程模型的定义：约简方程和约简系数（矩阵表达）

$$
\begin{aligned}
Y_{t1} &= +\pi_{11}X_{t1} + \pi_{12}X_{t2} + \cdots + \pi_{1k}X_{tk} \quad +v_{t1} \\
Y_{t2} &= +\pi_{21}X_{t1} + \pi_{22}X_{t2} + \cdots + \pi_{2k}X_{tk} \quad +v_{t2} \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
Y_{tm} &= +\pi_{m1}X_{t1} + \pi_{m2}X_{t2} + \cdots + \pi_{mk}X_{tk} + v_{tm}
\end{aligned}
$$

上述约简方程的代数形式，可以表达为如下矩阵形式：

$$
\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_m \end{bmatrix}_t =
$$

$$
\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_m \end{bmatrix}_t
\begin{bmatrix}
\pi_{11} & \pi_{12} & \cdots & \pi_{1m} \\
\pi_{21} & \pi_{22} & \cdots & \pi_{2m} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\pi_{m1} & \pi_{m2} & \cdots & \pi_{mm}
\end{bmatrix}
+ \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix}_t
$$

联立方程模型的定义：约简方程和约简系数（矩阵表达）

上述矩阵可以进一步表达为：

$$\underset{(1*m)}{\boldsymbol{y}_t'} = -\underset{(1*k)(k*m)}{\boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{\Pi}} + \underset{(1*m)}{\boldsymbol{v}_t'}$$

并进一步记为：

$$\underset{(1*m)}{\boldsymbol{y}_t'} = -\underset{(1*k)(k*m)(m*m)}{\boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}} + \underset{(1*m)(m*m)}{\boldsymbol{\varepsilon}_t'\boldsymbol{\Gamma}^{-1}}$$

从而结构方程系数（/随机干扰项）和约简方程系数（/随机干扰项）有如下对应关系：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Pi} &= \boldsymbol{B}\boldsymbol{\Gamma}^{-1} \\ \boldsymbol{v}_t' &= \boldsymbol{\varepsilon}_t'\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\end{aligned}$$

联立方程模型的定义：随机干扰项的方差协方差矩阵

结构方程随机干扰项 $\boldsymbol{\varepsilon}'_t$：

$$\boldsymbol{y}'_t\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{x}'_t\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\varepsilon}'_t$$

约简方程随机干扰项 $\boldsymbol{v}'_t$：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}'_t &= -\boldsymbol{x}'_t\boldsymbol{\Pi} + \boldsymbol{v}'_t = -\boldsymbol{x}'_t\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Gamma}^{-1} + \boldsymbol{\varepsilon}'_t\boldsymbol{\Gamma}^{-1} \\ \boldsymbol{y}'_t &+ \boldsymbol{x}'_t\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{v}'_t\end{aligned}$$

假设**结构随机干扰项**期望为0，方差为常数。也即：$\mathbf{E}[\varepsilon_\mathbf{t}|\mathbf{x_t}] = \mathbf{0}; \mathbf{E}[\varepsilon_\mathbf{t}\varepsilon'_\mathbf{t}|\mathbf{x_t} = \mathbf{\Sigma}]$

则容易证明**约简随机干扰项**的期望和方差分别为：

$$\begin{aligned}E\left[\mathbf{v}_t|\mathbf{x}_t\right] &= \left(\mathbf{\Gamma}^{-1}\right)'\mathbf{0} = \mathbf{0} \\ E\left[\mathbf{v}_t\mathbf{v}'_t|\mathbf{x}_t\right] &= \left(\mathbf{\Gamma}^{-1}\right)'\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Gamma}^{-1} = \mathbf{\Omega} \\ \mathbf{\Sigma} &= \mathbf{\Gamma}'\mathbf{\Omega}\mathbf{\Gamma}\end{aligned}$$

联立方程模型的定义：常用样本统计量

给定全部T个样本数据集：

$$[\mathbf{Y} \quad \mathbf{X} \quad \mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1' & \mathbf{x}_1' & \boldsymbol{\varepsilon}_1' \\ \mathbf{y}_2' & \mathbf{x}_2' & \boldsymbol{\varepsilon}_2' \\ \vdots & & \\ \mathbf{y}_T' & \mathbf{x}_T' & \boldsymbol{\varepsilon}_T' \end{bmatrix}$$

则联立方程可以记为：

$$\mathbf{Y\Gamma} + \mathbf{XB} = \mathbf{E}$$

结构随机干扰项期望和方差可以记为：

$$\begin{aligned} E[\mathbf{E}|\mathbf{X}] &= \mathbf{0} \\ E\left[(1/T)\mathbf{E}'\mathbf{E}|\mathbf{X}\right] &= \boldsymbol{\Sigma} \end{aligned}$$

联立方程模型的定义：常用样本统计量

假设如下条件成立：

$$(1/T)\mathbf{X}'\mathbf{X} \to \mathbf{Q}$$
$$(1/T)\mathbf{X}'\mathbf{E} \to \mathbf{0}$$

则约简方程可以记为：

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\Pi} + \mathbf{V} \qquad \leftarrow \mathbf{V} = \mathbf{E}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$$

从而可以得到如下常用统计量：

$$\frac{1}{T}\begin{bmatrix} \mathbf{Y}' \\ \mathbf{X}' \\ \mathbf{V}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{X} & \mathbf{V} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{I}'\mathbf{Q}\mathbf{I} + \boldsymbol{\Omega} & \mathbf{I}\mathbf{I}'\mathbf{Q} & \boldsymbol{\Omega} \\ \mathbf{Q}\mathbf{I} & \mathbf{Q} & \mathbf{0}' \\ \boldsymbol{\Omega} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix}$$

案例1：凯恩斯收入决定模型（2方程模型）

以凯恩斯收入决定的联立方程为例（结构模型）：

$$\begin{cases} C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \varepsilon_t & \text{(消费函数)} \\ Y_t = C_t + I_t & \text{(收入恒等式)} \end{cases}$$

上述结构模型中：

内生变量有2个： $c_t; Y_t$

前定变量有1个，其中：

- **外生变量**有1个： I_t
- **滞后内生变量**有0个

案例1：凯恩斯收入决定模型（2方程模型）

上述**结构模型**，可以变换为为如下**约简方程**：

$$
\begin{cases}
Y_t = \dfrac{\beta_0}{1-\beta_1} + \dfrac{1}{1-\beta_1} I_t + \dfrac{\varepsilon_t}{1-\beta_1} & \text{(变换方程1)} \\
C_t = \dfrac{\beta_0}{1-\beta_1} + \dfrac{\beta_1}{1-\beta_1} I_t + \dfrac{\varepsilon_t}{1-\beta_1} & \text{(变换方程2)}
\end{cases}
$$

进一步可记为如下约简方程形式：

$$
\begin{cases}
Y_t = \pi_{11} + \pi_{12} I_t + v_{t1} & \text{(约简方程1)} \\
C_t = \pi_{21} + \pi_{22} I_t + v_{t2} & \text{(约简方程2)}
\end{cases}
$$

易知：**结构系数**共有2个 $\beta_0; \beta_1$；而**约简系数**共有4个 $\pi_{11}, \pi_{12}; \pi_{21}, \pi_{22}$（实际上只有3个！）

案例1：凯恩斯收入决定模型（2方程模型）

其中**约简系数**和**结构系数**的关系为：

$$
\begin{cases}
\pi_{11} = \dfrac{\beta_0}{1-\beta_1}; & \pi_{12} = \dfrac{1}{1-\beta_1} \\
\pi_{21} = \dfrac{\beta_0}{1-\beta_1}; & \pi_{22} = \dfrac{\beta_1}{1-\beta_1} \\
v_{t1} = \dfrac{\varepsilon_t}{1-\beta_1}; & v_{t2} = \dfrac{\varepsilon_t}{1-\beta_1}
\end{cases}
$$

案例2：小型宏观经济模型（3方程联立模型）

考虑如下的**小型宏观经济模型**（结构方程）：

$$\left\{\begin{aligned} \text{consumption: } c_t &= \alpha_0 + \alpha_1 y_t + \alpha_2 c_{t-1} + \varepsilon_{t,c} \\ \text{investment: } i_t &= \beta_0 + \beta_1 r_t + \beta_2 \left(y_t - y_{t-1}\right) + \varepsilon_{t,j} \\ \text{demand: } y_t &= c_t + i_t + g_t \end{aligned}\right.$$

其中： c_t表示消费； y_t表示产出； i_t表示投资； r_t表示利率； g_t表示政府支出。

内生变量有3个： $c_t; i_t; Y_t$

前定变量有4个，其中：

- **外生变量**有2个： $r_t; g_t$
- **滞后内生变量**有2个： $y_{t-1}; c_{t-1}$

结构系数共有6个： $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2; \beta_0, \beta_1, \beta_2;$

案例2：小型宏观经济模型（3方程联立模型）

上述**结构方程**可以变换为如下**约简方程**：

$$
\begin{cases}
c_t =&[\alpha_0(1-\beta_2)+\beta_0\alpha_1+\alpha_1\beta_1 r_t+\alpha_1 g_t+\alpha_2\left(1-\beta_2\right)c_{t-1}-\alpha_1\beta_2 y_{t-1} \\
&+(1-\beta_2)\,\varepsilon_{t,c}+\alpha_1\varepsilon_{t,j}]/\Lambda \\
i_t =&[\alpha_0\beta_2+\beta_0\left(1-\alpha_1\right)+\beta_1\left(1-\alpha_1\right)r_t+\beta_2 g_t+\alpha_2\beta_2 c_{t-1}-\beta_2\left(1-\alpha_1\right)y_{t-1} \\
&+\beta_2\varepsilon_{t,c}+\left(1-\alpha_1\right)\varepsilon_{t,j}]/\Lambda \\
y_t =&[\alpha_0+\beta_0+\beta_1 r_t+g_t+\alpha_2 c_{t-1}-\beta_2 y_{t-1}+\varepsilon_{t,c}+\varepsilon_{t,j}]/\Lambda
\end{cases}
$$

其中：$\Lambda = 1-\alpha_1-\beta_2$。或者将上述**约简方程**记为：

$$
\begin{cases}
c_t = \pi_{11}+\pi_{12}r_t+\pi_{13}g_t+\pi_{14}c_{t-1}+\pi_{15}y_{t-1}+v_{t1} \\
i_t = \pi_{21}+\pi_{22}r_t+\pi_{23}g_t+\pi_{24}c_{t-1}+\pi_{25}y_{t-1}+v_{t2} \\
i_t = \pi_{31}+\pi_{32}r_t+\pi_{33}g_t+\pi_{34}c_{t-1}+\pi_{35}y_{t-1}+v_{t3}
\end{cases}
$$

易知**约简系数**共有15个！！

案例2：小型宏观经济模型（3方程联立模型）

思考：

- 结构方程和约简方程有什么用?
- （结构方程中的）消费函数，利率 i_t不会对消费 c_t产生影响?
  - 从约简方程中则可以很快得到答案 $\frac{\Delta c_t}{\Delta r_t} = \frac{\alpha_1\beta_1}{\Lambda}$
- （结构方程中的）消费函数，收入 y_t对消费 c_t产生影响，具体是来自什么原因?
  - 进行中介变换也容易得到答案 $\frac{\Delta c_t}{\Delta y_t} = \frac{\Delta c_t/\Delta r_t}{\Delta y_t/\Delta r_t} = \frac{\alpha_1\beta_1/\Lambda}{\beta_1/\Lambda} = \alpha_1$

案例2：小型宏观经济模型（3方程联立模型）

因为约简方程的矩阵形式可以表达为：

$$\boldsymbol{y}_t' = -\boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{\Pi} + \boldsymbol{v}_t' = -\boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Gamma}^{-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t'\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$$

容易得到如下相关矩阵：

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} c & i & y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & r & g & c_{-1} & y_{-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\alpha_0 & -\beta_0 & 0 \\ 0 & -\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -\alpha_1 & -\beta_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma}^{-1} = \frac{1}{\Lambda}\begin{bmatrix} 1-\beta_2 & \beta_2 & 1 \\ \alpha_1 & 1-\alpha_1 & 1 \\ \alpha_1 & \beta_2 & 1 \end{bmatrix}$$

案例2：小型宏观经济模型（3方程联立模型）

根据约简方程的矩阵表达式:

$$\boldsymbol{y}_t' = -\boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{\Pi} + \boldsymbol{v}_t' = -\boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Gamma}^{-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t'\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$$

根据前述计算结果，则可以得到约简系数与结构系数的关系为:

$$\boldsymbol{\Pi}' = \frac{1}{\Lambda}\begin{bmatrix} \alpha_0(1-\beta_2)+\beta_0\alpha_1 & \alpha_1\beta_1 & \alpha_1 & \alpha_2(1-\beta_2) & -\beta_2\alpha_1 \\ \alpha_0\beta_2+\beta_0(1-\alpha_1) & \beta_1(1-\alpha_1) & \beta_2 & \alpha_2\beta_2 & -\beta_2(1-\alpha_1) \\ \alpha_0+\beta_0 & \beta_1 & 1 & \alpha_2 & -\beta_2 \end{bmatrix}$$

其中: $\Lambda = 1-\alpha_1-\beta_2$。

18.3 OLS估计方法还合适么？

内生变量问题

以凯恩斯收入决定模型为例，我们将可以证明 Y_t 和 u_t 将会出现相关，从而违背CLRM假设。

$$\begin{cases} C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + u_t \qquad (0 < \beta_1 < 1) & \text{(消费函数)} \\ Y_t = C_t + I_t & \text{(收入恒等式)} \end{cases}$$

将上述结构方程进行变换，得到：

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta_0 + \beta_1 Y_t + I_t + u_t \\ Y_t &= \frac{\beta_0}{1-\beta_1} + \frac{1}{1-\beta_1} I_t + \frac{1}{1-\beta_1} u_t && \text{(式1：约简方程)} \\ E(Y_t) &= \frac{\beta_0}{1-\beta_1} + \frac{1}{1-\beta_1} I_t && \text{(式2：两边取期望)} \end{aligned}$$

内生变量问题

进一步地:

$$
\begin{aligned}
Y_t - E(Y_t) &= \frac{u_t}{1-\beta_1} && \text{(式1 - 式2)} \\
u_t - E(u_t) &= u_t && \text{(式3：期望等于0)} \\
cov(Y_t, u_t) &= E([Y_t - E(Y_t)][u_t - E(u_t)]) && \text{(式4：协方差定义式)} \\
&= \frac{E(u_t^2)}{1-\beta_1} && \text{(式5：方差定义式)} \\
&= \frac{\sigma^2}{1-\beta_1} \neq 0 && \text{(式6：方差不为0)}
\end{aligned}
$$

因此，凯恩斯模型的需求方程，将会不满足CLRM假设中 Y_t 与 u_t 不相关的假设。从而使用OLS方法对需求方程不能得到**最优线性无偏估计量**（BLUE）。

系数的OLS估计量是有偏的

下面将进一步证明，使用OLS方法估计 β_1 是有偏的，也即 $E(\hat{\beta}_1) \neq \beta_1$。证明过程如下：

$$
\begin{cases}
C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + u_t & (0 < \beta_1 < 1) \qquad (\text{消费函数}) \\
Y_t = C_t + I_t & (\text{收入恒等式})
\end{cases}
$$

$$
\hat{\beta}_1 = \frac{\sum c_t y_t}{\sum y_t^2} = \frac{\sum C_t y_t}{\sum y_t^2} = \frac{\sum [(\beta_0 + \beta_1 Y_t + u_t) y_t]}{\sum y_t^2} = \beta_1 + \frac{\sum u_t y_t}{\sum y_t^2} \qquad (\text{式1})
$$

对式1两边取期望，因此有：

$$
E(\hat{\beta}_1) = \beta_1 + E\left(\frac{\sum u_t y_t}{\sum y_t^2}\right)
$$

问题是： $E\left(\frac{\sum u_t y_t}{\sum y_t^2}\right)$ 是否等于0？我们可以证明它将不等于0（证明过程见后）。

证明附录1

$$
\begin{aligned}
\frac{\sum c_t y_t}{\sum y_t^2} &= \frac{\sum (C_t-\bar{C})(Y_t-\bar{Y})}{\sum y_t^2} = \frac{\sum (C_t-\bar{C}) y_t}{\sum y_t^2} \\
&= \frac{\sum C_t y_t - \sum \bar{C} y_t}{\sum y_t^2} = \frac{\sum C_t y_t - \sum \bar{C}(Y_t-\bar{Y})}{\sum y_t^2} \\
&= \frac{\sum C_t y_t - \bar{C}\sum Y_t - \sum \bar{C}\bar{Y}}{\sum y_t^2} = \frac{\sum C_t y_t - \bar{C}\sum Y_t - n\bar{C}\bar{Y}}{\sum y_t^2} = \frac{\sum C_t y_t}{\sum y_t^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum (\beta_0 + \beta_1 Y_t + u_t)\, y_t}{\sum y_t^2} = \frac{\sum \beta_0 y_t + \sum \beta_1 Y_t y_t + \sum u_t y_t}{\sum y_t^2} \\
&= \frac{\beta_1 \sum (y_t + \bar{Y}) y_t + \sum u_t y_t}{\sum y_t^2} = \beta_1 + \frac{\sum y_t u_t}{\sum y_t^2}
\end{aligned}
$$

$$
\Leftarrow \sum y_t = 0; \qquad \frac{\sum Y_t y_t}{y_t^2} = 1
$$

证明附录2

依概率取极限：

$$\operatorname{plim}\left(\hat{\beta}_1\right) = \operatorname{plim}(\beta_1) + \operatorname{plim}\left(\frac{\sum y_t u_t}{\sum y_t^2}\right)$$

$$= \operatorname{plim}(\beta_1) + \operatorname{plim}\left(\frac{\sum y_t u_t / n}{\sum y_t^2 / n}\right) = \beta_1 + \frac{\operatorname{plim}(\sum y_t u_t / n)}{\operatorname{plim}(\sum y_t^2 / n)}$$

而我们已经证明过：

$$cov(Y_t, u_t) = E([Y_t - E(Y_t)][u_t - E(u_t)]) = \frac{E(u_t^2)}{1 - \beta_1} = \frac{\sigma^2}{1 - \beta_1} \neq 0$$

因此， $E\left(\frac{\sum u_t y_t}{\sum y_t^2}\right) \neq 0$得证。

数值模拟：人为控制的总体

$$
\begin{aligned}
C_t &= \beta_0 + \beta_1 Y_t + u_t \qquad (0 < \beta_1 < 1) \qquad &(\text{消费函数}) \\
Y_t &= C_t + I_t \qquad &(\text{收入恒等式})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_t &= 2 + 0.8 Y_t + u_t \qquad (0 < \beta_1 < 1) \qquad &(\text{消费函数}) \\
Y_t &= C_t + I_t \qquad &(\text{收入恒等式})
\end{aligned}
$$

人为控制的总体被设置为:

- $\beta_0 = 2, \beta_1 = 0.8, I_t \leftarrow$ 给定值
- $E(u_t) = 0, var(u_t) = \sigma^2 = 0.04$
- $E(u_t u_{t+j}) = 0, j \neq 0$
- $cov(u_t, I_t) = 0$

数值模拟：模拟数据集

给定条件下的模拟数据为：

Y	C	I	u
18.1570	16.1570	2	-0.3686
19.5998	17.5998	2	-0.0800
21.9347	19.7347	2.2	0.1869
21.5514	19.3514	2.2	0.1103
21.8843	19.4843	2.4	-0.0231
22.4265	20.0265	2.4	0.0853
25.4094	22.8094	2.6	0.4819
22.6952	20.0952	2.6	-0.0610

Showing 1 to 8 of 20 entries Previous 1 2 3 Next

数值模拟：手工计算

根据前述公式，可以计算得到回归系数：

容易计算出： $\sum u_t y_t$ =3.8000

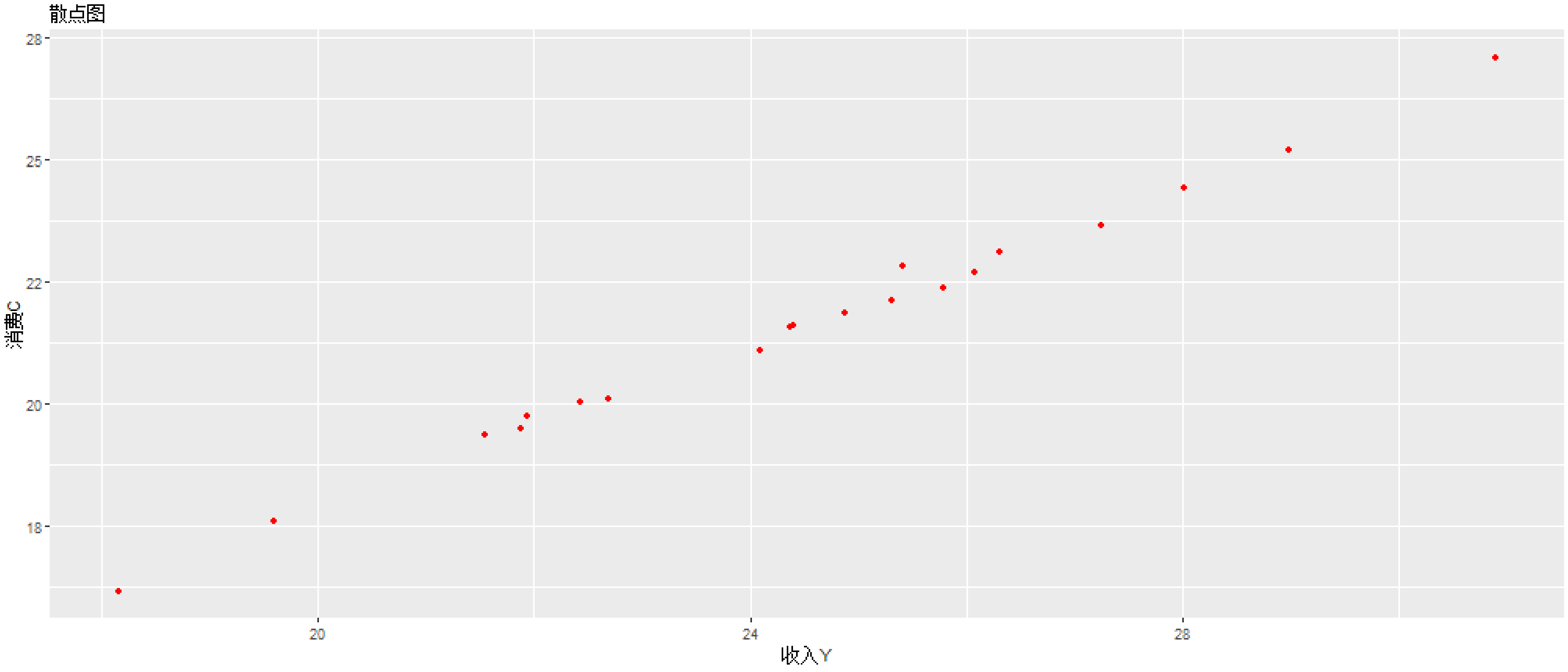
以及: $\sum y_t^2$ =184.0000

以及： $\frac{\sum u_t y_t}{\sum y_t^2}$ =0.0207

因此： $\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum u_t y_t}{\sum y_t^2}$ =0.8+0.0207= 0.8207

这也意味着： $\hat{\beta}_1$ 比真值 $\beta_1 = 0.8$ 有0.0207的偏差。

数值模拟：散点图



数值模拟：回归报告1

下面我们利用模拟的数据，进行回归分析，得到原始报告：

```
Call:
lm(formula = mod_monte$mod.C, data = monte)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-0.2700 -0.1586 -0.0013  0.0927  0.4631

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   1.4940     0.3541    4.22  0.00052 ***
Y             0.8207     0.0143   57.21  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:
0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.2 on 18 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.995,    Adjusted R-squared:  0.994
F-statistic: 3.27e+03 on 1 and 18 DF,  p-value: <2e-16
```

数值模拟：回归报告2

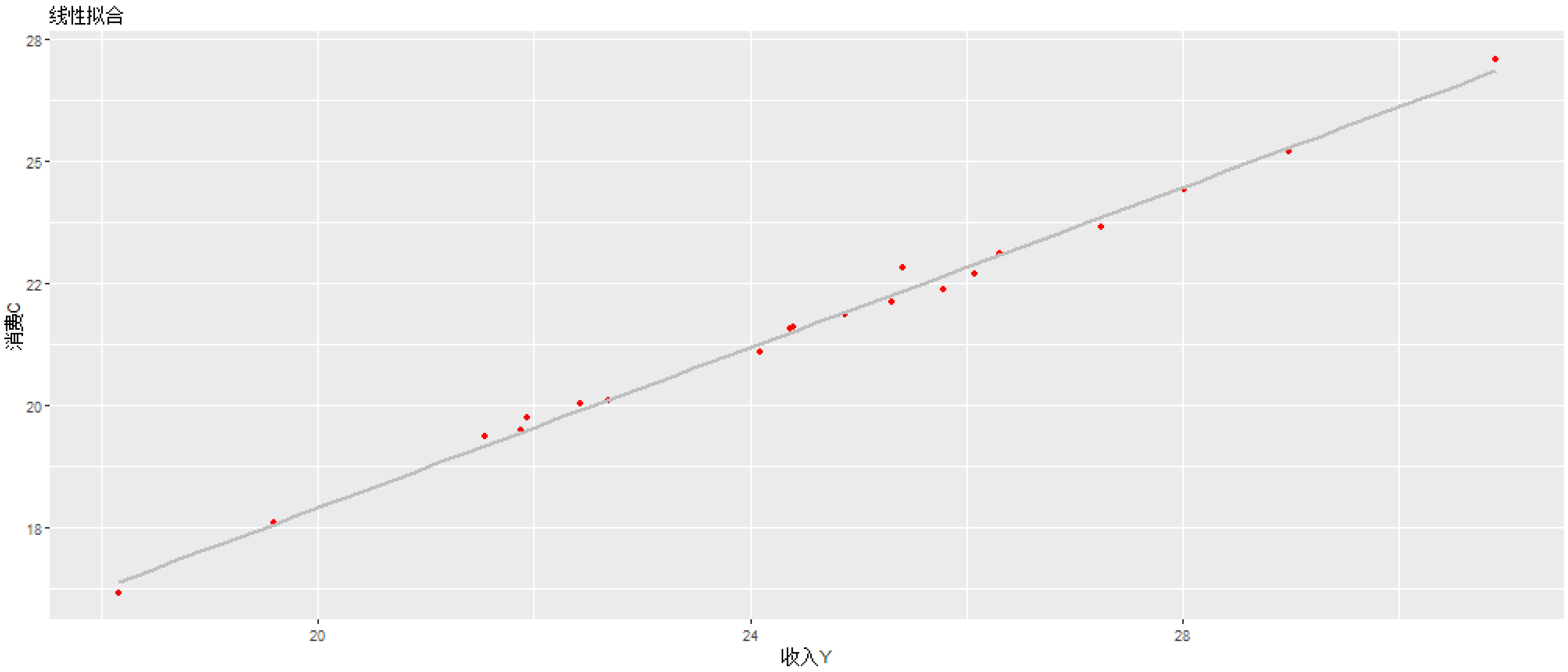
下面我们对原始报告进行整理，得到精简报告：

$$
\begin{array}{lll}
\widehat{C} = & +1.49 & +0.82Y \\
(\text{t}) & (4.2188) & (57.2090) \\
(\text{se}) & (0.3541) & (0.0143) \\
(\text{fitness}) n = 20; & & R^2 = 0.9945; \bar{R}^2 = 0.9942 \\
& F^* = 3272.87; p = 0.0000 &
\end{array}
$$

这样直接OLS回归的结果也表明是有偏的。

数值模拟：样本回归线

这是样本回归线。



结论和要点

- 与单方程模型对比，联立方程模型涉及多于一个因变量或内生变量，从而有多少个内生变量就需要有多少个方程。
- 联立方程模裂的一个特有性质是，一个方程中的内生变量(即回归子)作为解释变量而出现在方程组的另一个方程之中。
- 这使得内生解释变量变成了随机的，而且常常和它作为解释变量所在方程中的误差项有相关关系。
- 在这种情况下，经典OLS未必适用，因为这样得到的估计量是不一致的。就是说，不管样本容量有多大，这些估计量都不会收敛于其真实总体值
- 凯恩斯模型的蒙特卡洛模拟，说明了当一个回归方程中的回归元与干扰项相关时(这正是联立方程模型的典型情况)，用OLS方法估计其参数会内在地导致偏误。

本章结束