

## 第 8 章 线性规划的其他算法

线性规划之所以非常广泛地应用,关键原因是拥有特别有效的算法——单纯形法。单纯形法能按照既定的步骤解决实践中产生的大型的线性规划问题。然而,单纯形法只是线性规划实践工作者常用的算法宝库的一部分。现在开始分析线性规划问题的其他算法。

本章首先介绍 3 种算法,这 3 种算法实际上是单纯形法的变体。接下来的 3 节内容将介绍对偶单纯形法(一种对灵敏度分析特别有用的单纯形法的变体)、参数线性规划(灵敏度分析体系的一种延伸)和上界法(单纯形法的最新进展,处理具有上界变量问题的方法)。我们对这些算法的介绍不会像在第 4 章和第 5 章介绍单纯形法那样深入,目标只是简要介绍这些算法的主要思路。

4.9 节介绍了线性规划的另一种算法,是一种在可行域内部移动的算法。我们将在 8.4 节更深入地讨论这种内点算法。

与线性规划问题不同,线性目标规划不是只拥有一个单独的目标(最大化或最小化  $Z$ )。相反,它拥有多个目标,要求我们必须努力地同时实现这些目标。一些规范化技术使得一个线性目标规划问题得以转化为线性规划问题,因此仍然可以使用基于单纯形法的求解。

### 8.1 对偶单纯形法

对偶单纯形法基于第 6 章提出的对偶理论。要阐述该算法背后所隐含的基本思路,使用 6.3 节中表 6.10 和表 6.11 介绍的一些术语来描述任意一对原问题和对偶问题的互补性基解是有帮助的。特别地,让我们回顾一下,当原问题基解可行时,这两个互补的基解称为原问题可行解。反之,当互补的对偶基解对于对偶问题可行时,则称它们是对偶可行解。让我们再回顾一下,一个互补的基解仅当它既是原问题可行解也是对偶可行解时,才是对应于它问题的最优解(正如表 6.11 右侧所说明的)。

对偶单纯形法可以视为单纯形法的影像。单纯形法直接处理原问题的基本解,这些基本解对原问题是可行的,但不是对偶可行。然后,单纯形法通过推导达到对偶也可行(单纯形法中的最优检验数),而且移向一个最优解。与此相反,对偶单纯形法在原问题中直接处理的基本解对于对偶问题是可行的而对原问题是不可行的。然后,对偶单纯形法通过推导达到原问题也可行而且移向一个最优解。

不仅如此,对偶单纯形法在解决问题时仿佛单纯形法也正被同时应用于它的对偶问题。如果我们让它们的初始基本解互补,在这两种方法进行的全过程中,每一次迭代都会获得互补基本解。

对偶单纯形法在一些特殊情况下非常有用。通常而言,获得原问题的初始 BF 解比获得对偶初始 BF 解更容易。然而,有时我们必须引入一些人工变量以构建初始 BF 解。

在这种情况下,我们可能更容易以一个对偶 BF 解开始并使用对偶单纯形法。不仅如此,我们可能需要的迭代更少,因为没有必要使那些人工变量为 0。

当一个问题的初始基解(不包括人工变量)既非原问题可行也非对偶问题可行时,也可以通过把单纯形法和对偶单纯形法结合成“原对偶”算法,这一算法的目的是达到原可行和对偶同时可行。

正如在第6章、第7章和4.7节几次提到的,对偶单纯形法的另一个重要且主要的应用是与灵敏度分析结合起来。假定已经通过单纯形法获得了最优解,但这时模型需要(或出于你对灵敏度分析的兴趣)变化。如果先前的最优解已经不再是原问题可行的(但仍满足最优检验),可以马上从这个对偶BF解开始并应用对偶单纯形法。比起用单纯形法从头开始求解这个新问题,以这种方式使用对偶单纯形法常常可以更快地获得新的最优解。

对偶单纯形法也可以从一开始就用于解决大型线性规划问题,因为它是一种相当有效的算法。根据最强版计算机经验,对偶单纯形法在求解实践中表明,对特别大型的问题它经常比单纯形法更有效率。

对偶单纯形法的运算规则与单纯形法的运算规则类似。事实上,一旦方法开始,唯一不同的就是选择入基变量和出基变量以及停止计算的标准。

(对一个最大化问题)要开始对偶单纯形法,我们必须使所有方程(0)中的系数为非负(因此这个基本解是对偶可行的)。这个基本解是不可行的(最后一个基本解除外),只是因为有些变量是负的。该算法逐步减小目标函数的值,并总是保持方程(0)中的系数为非负,直到所有变量是非负的。这样得到的基本解是可行的(它满足所有等式),并且根据单纯形法的方程(0)系数非负准则,它是最优的。

下面总结对偶单纯形法的详细过程。

### 8.1.1 对偶单纯形法的总结

#### 1. 初始化

在把所有“ $\geq$ ”形式的函数约束转化为“ $\leq$ ”形式后(通过两边同乘以-1),按需要引入剩余变量以建立描述问题的一组方程。寻找一个基本解,使得基变量方程(0)的系数是0,且基变量的方程(0)系数为非负(因此,如果这个解是可行的,它就是最优的),然后进行可行性检验。

#### 2. 可行性检验

检查所有的基变量是否都是非负的。如果是,那么这个解是可行的,因而也是最优的,算法停止;否则,进行迭代。

#### 3. 迭代

步骤1:确定出基变量。选择值为负且拥有最大绝对值的基变量。

步骤2:确定入基变量:将含有出基变量方程的某一倍数加到(0)行方程上,该行方程系数首先达到0的非基变量作为入基变量。这个选择是通过检查方程(含有出基变量的方程)系数为负的非基变量,并以方程(0)系数与该方程系数比值中的最小绝对值所对应的非基变量作为入基变量。

步骤3:确定新的基本解。从当前的方程组出发,按照高斯消元法求解基本量。当令非基变量等于0时,每个基变量(和Z)等于出现该变量(系数+1)的一个方程新的右端项值,返回到可行性检验。

要完全理解对偶单纯形法,必须意识到该算法的运行与单纯形法被运用于对偶问题中的互补基本解一样(事实上,这一解释正是构建对偶单纯形法的原因)。迭代过程的步骤1,选择出基变量等同于确定绝对值最大的变量对应于对偶问题中方程(0)的值为负且绝对值最大的变量(表6.3)。步骤2,确定入基变量等同于确定对偶问题中的出基变量。方程(0)中最先达到0的系数对应于对偶问题中最先达到0的变量。这两个算法终止的准则也是互补的。

### 8.1.2 一个例子

我们现在通过应用对偶单纯形法求解Wyndor Glass公司的对偶问题(表6.1)说明这一算

法。通常情况下,这个方法直接应用于我们所关心的问题(原问题)。但是,我们选择这个问题是因为已经在表4.8中看到了单纯形法应用于它的对偶问题(即原问题<sup>①</sup>),因此可以对这两种方法进行比较。为了比较方便,我们继续用 $y_i$ 而不是 $x_j$ 。

在最大化形式下,待求解问题为

$$\text{Max } Z = -4y_1 - 12y_2 - 18y_3$$

s. t.

$$y_1 + 3y_3 \geq 3$$

$$2y_2 + 2y_3 \geq 5$$

且

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

既然右端项的值允许为负值,我们没有必要引入人工变量作为初始基变量,我们简单地把函数约束转化为“≤”形式并引入松弛变量充当初始基变量。这样,初始方程组即如表8.1第0次迭代所列。注意到所有方程(0)的系数都是非负的,因此如果解是可行的,那么,就是最优的。

表8.1 对偶单纯形法应用于Wyndor Glass公司的对偶问题

迭代	基变量	方程	系数						右端项
			Z	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	
0	Z	(0)	1	4	12	18	0	0	0
	$y_4$	(1)	0	-1	0	-3	1	0	-3
	$y_5$	(2)	0	0	-2	-2	0	1	-5
1	Z	(0)	1	4	0	6	0	6	-30
	$y_4$	(1)	0	-1	0	-3	1	0	-3
	$y_2$	(2)	0	0	1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
2	Z	(0)	1	2	0	0	2	6	-36
	$y_3$	(1)	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	1
	$y_2$	(2)	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

初始的基本解是 $y_1=0, y_2=0, y_3=0, y_4=-3, y_5=-5$ ,而且, $Z=0$ ,这个解不是可行解,因为存在负值。出基变量是 $y_5$ ( $5>3$ ),入基变量是 $y_2$ ( $12/2<18/2$ ),得到第二组方程,在表8.1中以迭代1标记。对应的基本解是 $y_1=0, y_2=\frac{5}{2}, y_3=0, y_4=-3, y_5=0$ ,且 $Z=-30$ ,不是可行解。

下一个出基变量是 $y_4$ ,入基变量是 $y_3$ ( $6/3 < 4/1$ ),得到表8.1的最后一组方程。对应的基本解是 $y_1=0, y_2=\frac{3}{2}, y_3=1, y_4=0, y_5=0$ ,且 $Z=-36$ ,它是可行解,因此是最优解。

正如我们在表4.8中通过单纯形法得到的,这个问题的对偶问题<sup>②</sup>的最优解是 $x_1^*=2, x_2^*=6, x_3^*=2, x_4^*=0, x_5^*=0$ 。建议对比表8.1和表4.8,并对比这两个互为镜像方法的互补的步骤。

① 回顾6.1节中的对称性质,指出对偶问题的对偶即是最初的原问题。

② 6.3节提出的最优基解互补性表明了怎样从原问题最终单纯形表的第0行读取对偶问题的最优解。不管最终表是利用单纯形法还是对偶单纯形法获得的,这个相似的结论都成立。

如前所述,对偶单纯形法的一个重要应用为当灵敏度分析的结果在初始模型中出现很小变化时,它常被用于很快重新求解一个问题。特别是当原问题的基本解为非可行解时(一个或多个右端项为负值),但仍满足最优化测试(在第(0)行没有负的系数),可以立即从该对偶可行解出发应用对偶单纯形法求解,例如,当一个违背原最优解新的约束被加入初始模型时会出现上述情形,假定表 8.1 求解的问题开始时不包含它的第一个约束( $y_1 + 3y_3 \geq 3$ )。在删去第一行后,

表 8.1 中第 1 次迭代表明最优解为  $y_1 = 0, y_2 = \frac{5}{2}, y_3 = 0, y_4 = -3, y_5 = 0$ , 且  $Z = -30$ 。现假定灵敏度分析用于增加原来省去的约束  $y_1 + 3y_3 \geq 3$ , 这个约束违反了原来的最优解, 因为  $y_1 = 0$  和  $y_3 = 0$ 。这个约束(包括它的松弛变量  $y_4$ )将作为第一行增加到表 8.1 中间的那个表中。不管这个表是应用单纯形法还是对偶单纯形法得到的初始最优解(可能经过多次迭代), 对这个表应用对偶单纯形法将导致再一次迭代后得到新的最优解。

假如希望了解应用对偶单纯形法的其他例子, 可参阅本书网站的相关部分。

## 8.2 参数线性规划

在 7.2 节的最后我们讲述了参数线性规划及其在系统地进行灵敏度分析方面的应用, 这种分析是通过逐渐地改变各种模型参数进行的。我们现在给出运算过程, 首先是  $c_j$  参数改变的情况, 然后是  $b_i$  参数改变的情况。

### 8.2.1 参数 $c_j$ 的系统改变

在  $c_j$  参数改变的情况下, 通常的线性规划模型的目标函数为

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

替换为

$$Z(\theta) = \sum_{j=1}^n (c_j + a_j \theta) x_j$$

式中:  $a_j$  是给定的输入常数, 代表系数改变的相对比率。因此,  $\theta$  从 0 逐渐增加时, 系数以这一相对比率改变。

$a_j$  的赋值可能代表进行系统的灵敏度分析时  $c_j$  同时发生的变化, 由这些变化幅度增加所引起的效果。它们也可能基于由  $\theta$  所度量的一些因素的变化而导致一些系数(如单位利润)会同时发生的变化。这个因素可能是无法控制的, 如经济形势。然而, 它也可能是受决策者控制的, 如从一些活动转换到另一些活动时用到的设备数量和员工数量。

对任意给定的  $\theta$  值, 对应的线性规划问题的最优解可以通过单纯形法获得。这个解也许已经通过解  $\theta = 0$  时的最初问题而得到。然而, 我们的目标是找到改变了线性规划问题(最大化函数  $Z(\theta)$ , 约束于最初的约束)的最优解。这个最优解是  $\theta$  的函数, 因此, 在求解时需要能够确定当  $\theta$  从 0 增加到任意确定正数的过程中, 最优解什么时候变化以及怎样变化(如果它确实发生变化)。

图 8.1 说明当  $\theta$  增加时, 最优解(给定  $\theta$ )的目标函数值  $Z^*(\theta)$  是怎样变化的, 事实上,  $Z^*(\theta)$  总是拥有这种分段线性且是凸状的形式(参见习题 8.2-7)。对应的最优解只在函数  $Z^*(\theta)$  斜率改变的  $\theta$  值处(当  $\theta$  在增加时)发生变化。因此, 图 8.1 描述了一个问题, 这个问题对于不同的  $\theta$  值有 3 个不同的解是最优的。第一个对应  $0 \leq \theta \leq \theta_1$ , 第二个对应  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , 第三个

对应  $\theta \geq \theta_2$ , 因为每个  $x_j$  的值在这些  $\theta$  的区间上都保持不变,  $Z^*(\theta)$  的值随着  $\theta$  变化只是由于  $x_j$  的系数作为  $\theta$  的线性函数而变化。这一求解过程直接基于灵敏度分析过程, 研究  $c_j$  参数引起的变化(7.2节例2a和例3)。参数线性规划唯一的基本差别是表达变化的方式是  $\theta$  而不是特定的数字来表示。

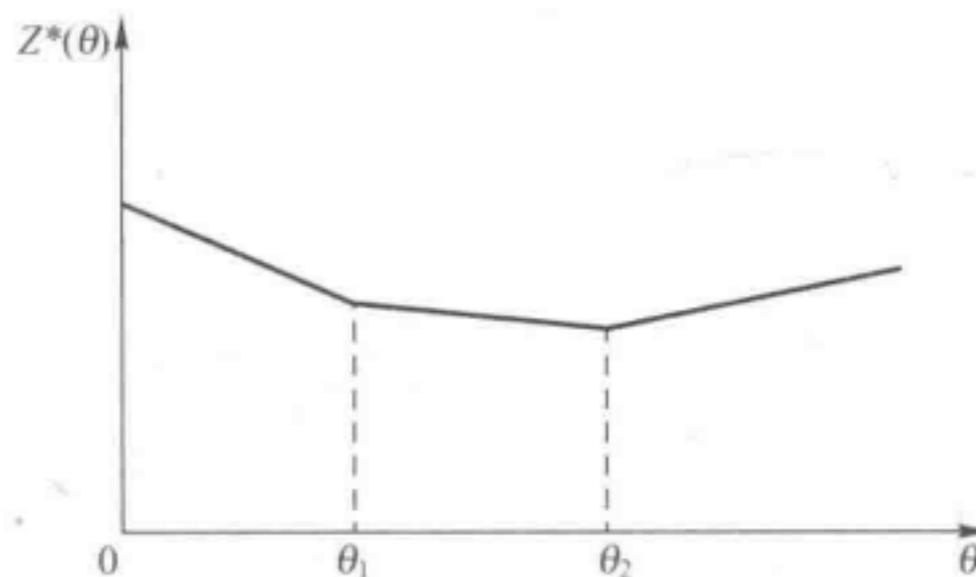


图 8.1 参数线性规划随  $\theta$  参数系统变化时的目标函数值

例: 为了说明求解过程, 假定 3.1 节提出的最初的 Wyndor Glass 公司问题中  $a_1 = 2, a_2 = -1$ , 因而

$$Z(\theta) = (3+2\theta)x_1 + (5-\theta)x_2$$

从  $\theta=0$  时的最终单纯形表(表 4.8)开始求解, 我们看到它的方程(0):

$$(0) \quad Z + \frac{3}{2}x_4 + x_5 = 36$$

会首先由最初( $\theta=0$ )系数发生的这些变化加到方程的左边:

$$(0) \quad Z - 2\theta x_1 + \theta x_2 + \frac{3}{2}x_4 + x_5 = 36$$

因为  $x_1$  和  $x_2$  都是基变量(分别出现在方程(3)和(2)中)。所以它们都需要从方程(0)中代数消去:

$$\begin{aligned} & Z - 2\theta x_1 + \theta x_2 + \frac{3}{2}x_4 + x_5 = 36 \\ & + 2\theta \times \text{方程(3)} \\ & - \theta \times \text{方程(2)} \\ (0) \quad & \hline \\ & Z + \left( \frac{3}{2} - \frac{7}{6}\theta \right)x_4 + \left( 1 + \frac{2}{3}\theta \right)x_5 = 36 - 2\theta \end{aligned}$$

最优化检验告诉我们只要非基变量的系数仍然非负, 当前的基本可行解将维持最优:

$$\frac{3}{2} - \frac{7}{6}\theta \geq 0, \text{ 对 } 0 \leq \theta \leq \frac{9}{7} \text{ 成立}$$

$$1 + \frac{2}{3}\theta \geq 0, \text{ 对所有 } \theta \geq 0 \text{ 成立}$$

因而, 在  $\theta$  增加到超过  $\theta = \frac{9}{7}$ ,  $x_4$  需要作为入基变量来进行单纯形法的另一步迭代去寻找新的最优解。然后, 表 8.2 将继续增加直到另一系数变为负数, 如此循环直到  $\theta$  增加到希望的值。现在总结一下整个过程, 并在表 8.2 中完成了这个例子。

表 8.2  $c_j$  的参数线性规划应用于 Wyndor Glass 公司的例子

$\theta$ 范围	基变量	方程	系数						右端项	最优解
			Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$		
$0 \leq \theta \leq \frac{9}{7}$	$Z(\theta)$	(0)	1	0	0	0	$\frac{9-7\theta}{6}$	$\frac{3+2\theta}{3}$	$36-2\theta$	$x_4=0$ $x_5=0$
	$x_3$	(1)	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	$x_3=2$
	$x_2$	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	$x_2=6$
	$x_1$	(3)	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	$x_1=2$
$\frac{9}{7} \leq \theta \leq 5$	$Z(\theta)$	(0)	1	0	0	$\frac{-9+7\theta}{2}$	0	$\frac{5-\theta}{2}$	$27+5\theta$	$x_3=0$ $x_5=0$
	$x_4$	(1)	0	0	0	3	1	-1	6	$x_4=6$
	$x_2$	(2)	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3	$x_2=3$
	$x_1$	(3)	0	1	0	1	0	0	4	$x_1=4$
$\theta \geq 5$	$Z(\theta)$	(0)	1	0	$-5+\theta$	$3+2\theta$	0	0	$12+8\theta$	$x_2=0$ $x_3=0$
	$x_4$	(1)	0	0	2	0	1	0	12	$x_4=12$
	$x_5$	(2)	0	0	2	-3	0	1	6	$x_5=6$
	$x_1$	(3)	0	1	0	1	0	0	4	$x_1=4$

### 8.2.2 参数 $c_j$ 系统变化时参数线性规划过程小结

- (1) 令  $\theta=0$ , 用单纯形法求解该问题。
- (2) 使用灵敏度分析过程(参见 7.2 节案例 2a 和 3)将  $\Delta c_j = a_j \theta$  引入方程(0)。
- (3) 增加  $\theta$  至有一个非基变量在方程(0)的系数成为负数(或者直到  $\theta$  增加到希望的值)。
- (4) 以该变量作为入基变量做单纯形法的一步迭代来寻找新的最优解。返回(3)。

### 8.2.3 参数 $b_j$ 的系统变化

对于  $b_j$  参数的系统变化情况, 原线性规划模型的一个改动是  $b_j$ , 由  $b_i + a_i \theta$  取代,  $i=1, 2, \dots, m$ , 其中  $a_i$  是给定输入常数, 这样, 问题变为

$$\text{Max } Z(\theta) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

s. t.

$$\sum_{j=1}^p \alpha_{ij} \leq \beta_i + \alpha_i \theta, i = 1, 2, \dots, m$$

且

$$x_j \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$$

目的是确定  $\theta$  的函数的最优解。

在这个公式中, 对应的最优函数值  $Z^*(\theta)$  总是具有如图 8.2 所示的分段线性且具有凹状的形式。最优解中的基变量组仍然只在  $Z^*(\theta)$  斜率改变处发生变化。然而, 与前面情况不同的是, 当  $\theta$  增加时, 这些变量的值在斜率改变处之间随着  $\theta$  的函数(线性)而变化。原因是增加  $\theta$  的

值改变了初始方程组右端项的值,进而引起最终方程组右端项的值的改变,也就是说,引起最终基变量值的改变。图8.2描绘了对于不同 $\theta$ 值有3组最优基变量的问题。第一组 $0 \leq \theta \leq \theta_1$ ,第二组 $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ ,第三个组 $\theta \geq \theta_2$ 。在 $\theta$ 的每个这样的区间里,尽管 $c_j$ 固定,然而,因为 $x_j$ 的值在改变, $Z^*(\theta)$ 的值随着 $\theta$ 变化而变化。

下面的求解过程总结与刚才提出的参数 $c_j$ ,系统变化的求解过程很相似。原因是改变 $b_j$ 的值等同于改变对偶问题目标函数的系数。因而,对原问题执行这一过程正好与同时对对偶问题应用参数 $c_j$ ,系统变化的参数线性规划过程互补。因此,对偶单纯形法(参见8.1节)被用于获得每一个新的最优解,并且适用的灵敏度分析情况(参见7.2节)是案例1,但这些不同仅是主要的差异。

### 8.2.4 参数 $b_j$ 系统变化时参数线性规划过程小结

- (1) 令 $\theta=0$ ,运用单纯形法求解问题。
- (2) 运用灵敏度分析过程(7.2节案例1)把改变量 $\Delta b_i = a_i \theta$ 引入右侧一列。
- (3) 增加 $\theta$ 值直到基变量对应的右侧一列的值为负(或直到 $\theta$ 增加到希望的值)。
- (4) 以该变量作为出基变量进行对偶单纯形法的一步迭代以寻找新的最优解,然后返回(3)。

**例:**为了在一定程度上说明这个过程,并在过程中揭示与参数 $c_j$ 变化过程的对偶关系,我们现在把它应用到Wyndor Glass公司的对偶问题(表6.1)。特别地,假定 $a_1=2$ 且 $a_2=-1$ ,那么函数约束成为

$$y_1 + 3y_3 \geq 3 + 2\theta$$

或

$$-y_1 - 3y_3 \leq -3 - 2\theta$$

$$2y_1 + 2y_3 \geq 5 - \theta$$

或

$$-2y_1 + 2y_3 \leq -5 + \theta$$

这样,这个问题的对偶问题就正好是表8.2中考虑的示例。

在表8.1中, $\theta=0$ 时此问题已经得到解决,因此从该节得到的最终单纯形表出发。应用针对7.2节的案例1的灵敏度分析过程,我们发现表中右侧一列的值如下

$$Z^* = \mathbf{y}^* \bar{\mathbf{b}} = [2, 6] \begin{bmatrix} -3 - 2\theta \\ -5 + \theta \end{bmatrix} = -36 + 2\theta$$

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{S}^* \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 - 2\theta \\ -5 + \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{2\theta}{3} \\ \frac{3}{2} - \frac{7\theta}{6} \end{bmatrix}$$

因此,该表中的两个基变量为

$$y_3 = \frac{3+2\theta}{3}$$

和

$$y_2 = \frac{9-7\theta}{6}$$

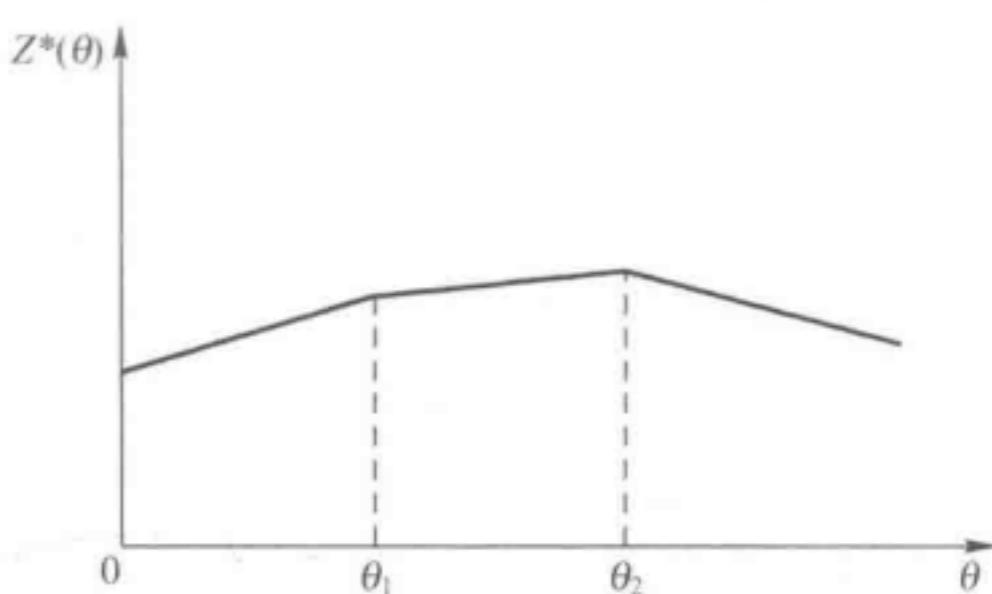


图8.2  $b_j$ 参数线性规划随 $\theta$ 参数系统变化的目标函数值

在  $0 \leq \theta \leq \frac{9}{7}$  之内仍然保持非负。增加  $\theta$  到超过  $\theta = \frac{9}{7}$  时, 要求使  $y_2$  成为出基变量, 用对偶单纯形法进行下一步迭代, 照此分析, 表 8.3 对此过程进行了总结。

我们建议同时追溯表 8.2 和表 8.3 以观察这两个过程的对偶关系。

表 8.3 应用于 Wyndor Glass 公司例子对偶问题的  $b_j$  参数线性规划

$\theta$ 范围	基变量	方程	系数						右端项	最优解
			Z	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$		
$0 \leq \theta \leq \frac{9}{7}$	$Z(\theta)$	(0)	1	2	0	0	2	6	$-36+2\theta$	$y_1=y_4=y_5=0$
	$y_3$	(1)	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{3+2\theta}{3}$	$y_3=\frac{3+2\theta}{3}$
	$y_2$	(2)	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{9-7\theta}{6}$	$y_2=\frac{9-7\theta}{6}$
$\frac{9}{7} \leq \theta \leq 5$	$Z(\theta)$	(0)	1	0	6	0	4	3	$-27-5\theta$	$y_2=y_4=y_5=0$
	$y_3$	(1)	0	0	1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5-\theta}{2}$	$y_3=\frac{5-\theta}{2}$
	$y_1$	(2)	0	1	-3	0	-1	$\frac{3}{2}$	$\frac{-9+7\theta}{2}$	$y_1=\frac{-9+7\theta}{2}$
$\theta \geq 5$	$Z(\theta)$	(0)	1	0	12	6	4	0	$-12-8\theta$	$y_2=y_3=y_4=0$
	$y_5$	(1)	0	0	-2	-2	0	1	$-5+\theta$	$y_5=-5+\theta$
	$y_1$	(2)	0	1	0	3	-1	0	$3+2\theta$	$y_1=3+2\theta$

书的网页包括参数  $b_j$  的系统变化另一种案例。

### 8.3 上界法

在线性规划问题中, 一些或者全部的变量  $x_j$  拥有上界约束  $x_j \leq u_j$  是十分常见的。这里,  $u_j$  是代表  $x_j$  的最大可行值的正常数。我们在 4.8 节指出决定单纯形法计算时间长短的最重要因素是函数约束的数量, 而非负约束的数量则相对不重要。因此, 函数约束中含有大量的上界约束极大地增加所需的计算量。

上界法通过从函数约束中移除上界约束并把它们视为类似非负约束个别处理, 避免了增加的计算量<sup>①</sup>。用这种方法移除上界约束只要没有变量增加到超过它的上界就不会有问题。单纯形法唯一一次增加变量的值是当入基变量的值增加以获得一个新的 BF 解。因此, 上界法简单地以通常的方式把单纯形法应用于该问题的剩余部分(即无上界约束)。但是有一个附加限制, 就是每个新 BF 解必须满足除普通的下界(非负性)约束之外的上界约束。

为实现这个想法, 注意到具有一个上界约束  $x_j \leq u_j$  的决策变量总可以替换为

$$x_j = u_j - y_j$$

式中:  $y_j$  就作为决策变量。换句话说, 可以选择以大于 0 的量( $x_j$ )作为决策变量或以小于  $u_j$  ( $y_j = u_j - x_j$ ) 的量作为决策变量(我们将把  $x_j$  和  $y_j$  称作互补的决策变量)。因为

$$0 \leq x_j \leq u_j$$

① 上界法假定变量除了上界约束外还有通常的非负性约束。如果一个变量有不同于 0 的下界, 如  $x_j \geq L_j$ , 那么, 可以通过  $x'_j = x_j - L_j$  把这个约束转化为一个非负性约束。

同时有

$$0 \leq y_j \leq u_j$$

这样,在单纯形法的任意点上,既可以

- (1) 使用  $x_j, 0 \leq x_j \leq u_j$ ;
- (2) 也可以用  $u_j - y_j$  替换  $x_j, 0 \leq y_j \leq u_j$ 。

准则:从选项(1)开始。

任何时候,只要  $x_j = 0$ , 使用选项(1), 那么,  $x_j$  是非基变量。

任何时候,只要  $x_j = u_j$ , 使用选项(2), 那么,  $y_j = 0$  是非基变量。

只在  $x_j$  达到另一个极限值时改变选择。

因此,只要一个基变量达到它的上界,就要改变选择并使用它的互补决策变量作为新的非基变量(出基变量)定义新的BF解。这样,在单纯形法基础上所做的实质修改就在于选择出基变量的准则。

让我们回顾一下,单纯形法选择的是随入基变量的值增加时最先成为负数从而不可行的那个变量作为出基变量。现在所做的修改是当入基变量值增加时,选择替换那个以任何方式,要么变为负数要么超过它的上界,最先成为不可行的变量(注意:存在一种可能,即入基变量可能因超过它的上界从而最先成为不可行,因此,它的互补决策变量成为出基变量)。如果出基变量达到0,那么,视作一般问题用单纯形法继续进行。然而,反过来,如果达到它的上界,那么,改变选择并使它的互补决策变量成为出基变量。

### 8.3.1 一个例子

为了说明上界法,考虑如下问题:

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2 + 2x_3$$

s. t.

$$4x_1 + x_2 = 12$$

$$-2x_1 + x_3 = 4$$

且

$$0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 15, 0 \leq x_3 \leq 6$$

这样,所有3个变量都有上界约束( $u_1 = 4, u_2 = 15, u_3 = 6$ )。

对确定初始BF解( $x_1 = 0, x_2 = 12, x_3 = 4$ ),两个等式约束已符合高斯消元法形式,并且在这个解中没有一个变量超过它的上界,因此 $x_2$ 和 $x_3$ 可以作为初始基变量而不必引入人工变量。不过,为获得方程(0),我们需要从目标函数中以代数方法消去这些变量,如下所述:

$$\begin{aligned}
 & Z - 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\
 & + (4x_1 + x_2 = 12) \\
 & + (-2x_1 + x_3 = 4) \\
 (0) \quad & \hline \\
 & Z - 2x_1 = 20
 \end{aligned}$$

初始方程(0)表明初始的入基变量为 $x_1$ ,开始第一步迭代。既然没有包括上界约束,那么,初始的方程组和选择出基变量的相应计算列于表8.4。第二列表示在一些基变量(包括 $x_1$ )成为不可行之前,入基变量可以从0增加到多少。与方程(0)相邻的最大值正是 $x_1$ 的上界约束。对方程(1),因为 $x_1$ 的系数为正数, $x_1$ 增加到3使该方程的基变量( $x_2$ )从12减少到它的下界值0。对方程(2),因为 $x_1$ 的系数为负值, $x_1$ 增加到1使该方程的基变量( $x_3$ )从4增加到它的上界6。

表 8.4 上界法例子中初始出基变量的方程与计算

初始方程组	$x_1$ 最大可行值
(0) $Z - 2x_1 = 20$	$x_1 \leq 4$ (因为 $u_1 = 4$ )
(1) $4x_1 + x_2 = 12$	$x_1 \leq \frac{12}{4} = 3$
(2) $-2x_1 + x_3 = 4$	$x_1 \leq \frac{6-4}{2} = 1 \leftarrow$ 最小值 (因为 $u_3 = 6$ )

因为表 8.4 中方程(2)拥有  $x_1$  最小的最大可行值, 所以该方程中的基变量( $x_3$ )成为出基变量。但是, 因为  $x_3$  达到它的上界, 于是, 用  $6-y_3$  取代  $x_3$ , 所以  $y_3=0$  成为下一个 BF 解的非基变量, 而且成为方程(2)中新的基变量。这一替代将导致方程的下述改变

$$\begin{aligned} (2) \quad & -2x_1 + x_3 = 4 \\ \rightarrow & -2x_1 + 6 - y_3 = 4 \\ \rightarrow & -2x_1 - y_3 = -2 \\ \rightarrow & x_1 + \frac{1}{2}y_3 = 1 \end{aligned}$$

因此, 从其他方程中用代数方法消去  $x_1$  后, 第二个完整的方程组为

$$\begin{aligned} (0) \quad & Z + y_3 = 22 \\ (1) \quad & x_2 - 2y_3 = 8 \\ (2) \quad & x_1 + \frac{1}{2}y_3 = 1 \end{aligned}$$

相应的 BF 解是  $x_1 = 1, x_2 = 8, y_3 = 0$ 。通过进行最优化检验, 确定这也是一个最优解, 所以  $x_1 = 1, x_2 = 8, x_3 = 6 - y_3 = 6$  是初始问题要求的解。

书的网站包括上界法另一种案例。

## 8.4 内点算法

在 4.9 节, 我们讨论了 1984 年在线性规划领域的惊人发展, 也就是 AT&T 贝尔实验室的 Narendra Karmarkar 发明的一种与单纯形法有很大不同的算法。这是一种解决大型线性规划问题的强有力算法。我们现在通过描述他的算法<sup>①</sup>的一个相对基本的变异方法(“仿射”或“仿射缩放”变异方法)介绍 Karmarkar 算法的性质(IOR Tutorial 在 Solve Automatically by the Interior-Point Algorithm 题目下包括这一变异方法)。

本节我们将在一个直观层面讨论 Karmarkar 的主要思想, 避开数学细节。特别地, 我们将绕过一定的细节, 这些细节对算法的完整实施是必需的(如怎样找一个初始可行的试验解), 但是对基本概念性理解来说并非关键。所描述的这个思想可以总结如下。

概念 1: 穿透可行域内部指向一个最优解。

概念 2: 沿着以最快可能速度增加目标函数值的方向移动。

概念 3: 变换可行域, 使当前试验解位于可行域的中心附近, 因而, 在概念 2 实现的基础上获

<sup>①</sup> 在 Karmarkar 的著作出现后不久, 一些研究人员包括 E. R. Barnes、T. M. Cavalier 和 A. L. Soyster 重新发现, 这个变异的基本方法实际上是由一名俄罗斯数学家 I. I. Dikin 于 1967 年提出的。还可以参阅 R. J. Vanderbei, M. S. Meketon, and B. A. Freedman, “A Modification of Karmarkar’s Linear Programming Algorithm,” *Algorithmica*, 1(4) (Special Issue on New Approaches to Linear Programming): 395–407, 1986。

得一个大的改进。

为了说明贯穿整节的思想,我们使用下面的例子:

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2$$

s. t

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

在图 8.3 中用图示方式描述了这个问题,由图中可以看出,最优解是  $(x_1, x_2) = (0, 8)$ , 且  $Z = 16$ 。

你会看到使用内点算法解决这个小型例子时需要大量的工作。原因是这个算法是针对有效解决大型问题而设计的,而对小型问题这个算法的效率比单纯形法(或图解法)要差很多。

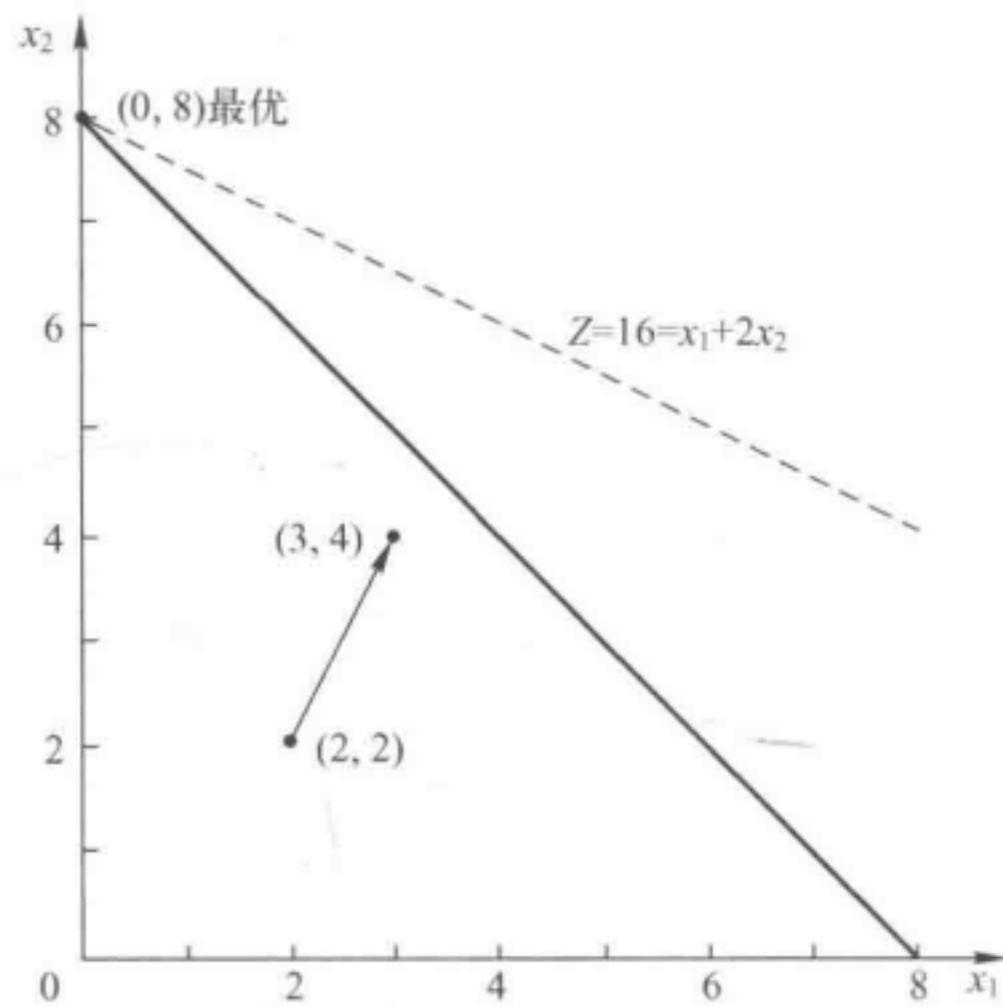


图 8.3 内点算法示例

### 8.4.1 概念 1 和概念 2 梯度的相关性

本算法开始于一个内部试验解,这个解(与所有后续试验解相似)位于可行域的内部,也就是在可行域的边界以内。因此,该解一定不在 3 条直线( $x_1 = 1, x_2 = 0, x_1 + x_2 = 8$ )的任意一条上,这 3 条线是图 8.3 中可行域的边界(不能用位于边界上的试验解是因为这将导致在算法中的某一点上出现未定义被 0 除的数学运算)。我们任选一点  $(x_1, x_2) = (2, 2)$  作为初始的试验解。

下面开始实施概念 1 和概念 2,注意到图 8.3 中,从  $(2, 2)$  开始移动,最快可能增加  $Z$  的方向是垂直(并指向)目标函数线  $Z = 16 = x_1 + 2x_2$ 。我们已经通过从  $(2, 2)$  到  $(3, 4)$  的箭头显示了这个方向。利用向量加法,有

$$(3, 4) = (2, 2) + (1, 2)$$

式中:向量  $(1, 2)$  是目标函数的梯度(我们将在 13.5 节更广泛的非线性规划内容背景下进一步讨论梯度,这部分内容中与 Karmarkar 算法相似的算法早已经被使用)。 $(1, 2)$  的分量正好是目标函数中的系数。这样,在随后的修改中,梯度  $(1, 2)$  定义了移动的理想方向,其移动的距离问题将在后面讨论。

线型规划问题以扩展形式改写后,该算法实际上就可用于求解线性规划问题。以  $x_3$  作为例子中函数约束的松弛变量。我们看到的形式为

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2$$

s. t

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

以矩阵表示时(与第 5 章稍有不同,因为现在松弛变量已被并入符号中),扩展形式一般可写为

$$\text{Max } Z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

s. t

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

且

$x \geq 0$

本例中,有

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = [1, 1, 1], \mathbf{b} = [8], \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

注意:现在  $\mathbf{c}^T = [1, 2, 0]$  是目标函数的梯度。

图 8.4 描述了本例的扩展形式。可行域现在由向量  $(8, 0, 0)$ 、 $(0, 8, 0)$  和  $(0, 0, 8)$  组成三角形。这个可行域的内部的点满足  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ 。这 3 个  $x_j > 0$  条件的每一个都有迫使  $(x_1, x_2)$  脱离图 8.3 中构成可行域边界的 3 条直线之一的作用。

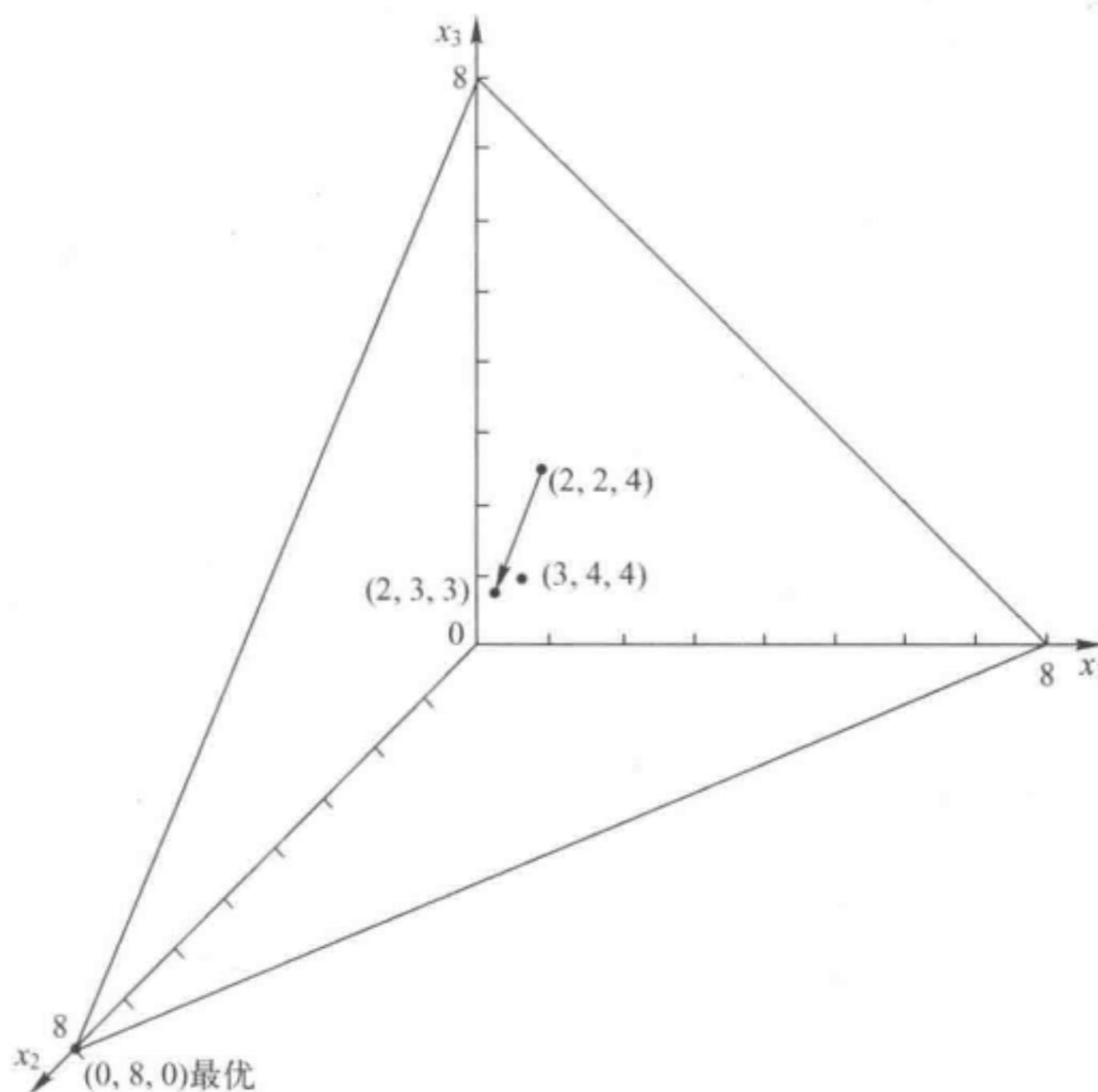


图 8.4 扩展形下的内点算法示例

### 8.4.2 使用投影梯度以实现概念 1 和概念 2

在扩展形式中,本例的初始试验解是  $(x_1, x_2, x_3) = (2, 2, 4)$ , 加上梯度  $(1, 2, 0)$  得到

$$(3, 4, 4) = (2, 2, 4) + (1, 2, 0)$$

然而,现在有个棘手的问题。算法不能从  $(2, 2, 4)$  移动到  $(3, 3, 4)$ , 因为  $(3, 4, 4)$  是不可行的。当  $x_1 = 3$  且  $x_2 = 4$  时,  $x_3 = 8 - x_1 - x_2 = 1$  而不是 4。点  $(3, 4, 4)$  位于三角形可行域下侧, 如图 8.4 所示。因此,为了保证解仍然可行,算法通过作垂直于这个三角形的直线而把点  $(3, 4, 4)$  投影(间接地)到可行的三角形区域。因为从  $(0, 0, 0)$  到  $(1, 1, 1)$  的向量垂直于这个三角形, 所以通过  $(3, 4, 4)$  的垂线可由方程

$$(x_1, x_2, x_3) = (3, 4, 4) - \theta(1, 1, 1)$$

给出,其中  $\theta$  是一个标量。由于三角形满足方程  $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ , 因此这条直线与三角形交于点  $(2, 3, 3)$ 。因为

$$(2, 3, 3) = (2, 2, 4) + (0, 1, -1)$$

所以,目标函数的投影梯度(投影于可行域上的梯度)是  $(0, 1, -1)$ 。正是这个投影梯度为算法定

义了从 $(2,2,4)$ 移动的方向,如图8.4中的箭头所示。

有一个公式可以用于直接计算投影梯度。通过定义投影矩阵 $P$ 为

$$P = I - A^T (AA^T)^{-1}A$$

投影梯度为

$$\mathbf{c}_p = P\mathbf{c}$$

例如

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以

$$\mathbf{c}_p = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

从 $(2,2,4)$ 沿着投影梯度 $(0,1,-1)$ 方向的移动,按下面公式从0开始增加 $a$ 进行:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 4a\mathbf{c}_p = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 4a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

其中,使用系数4只是为了给 $a$ 赋予一个上界1以维持可行性(所有 $x_j \geq 0$ )。注意到增加 $a$ 到 $a=1$ 将导致 $x_3$ 减少到 $x_3 = 4 + 4(1)(-1) = 0$ ,当 $a>1$ 时就得到 $x_3<0$ 。因此, $a$ 表示离开可行域之前可移动距离的比例。

为了移动到下一个试验解, $a$ 应增加多少?因为 $Z$ 的增加值与 $a$ 成比例,所以在当前迭代点上,赋予接近上界1的某个值有利于以一个相对大的步长逼近最优。但是,赋予太接近1的值带来的问题是:下一个试验解将遭遇约束边界的阻碍而难以在下一步迭代中形成大的改进。因此,试验解位于可行域中心附近(或至少邻近最优解附近那一部分可行域中心),以及不能太接近任何约束边界,这是很有帮助的。基于这种考虑,Karmarkar提出 $a=0.25$ 对他的算法将是“安全”的。在实践中,有时也会用到很大的值(如 $a=0.9$ )。针对本例(和本章末尾的问题)的计算,我们选定 $a=0.5$ (IOR Tutorial中使用 $a=0.5$ 作为默认值,但 $a=0.9$ 也是可行的)。

### 8.4.3 实现概念3的中心化方案

现在只剩下一步就可以完成算法描述了,即一个特殊的方案用于转换可行域以使当前试验解位于中心附近。我们刚刚阐述了试验解位于中心附近的好处,但这一中心化方案的另一个重要好处是随着算法向最优解收敛时,它使投影梯度的方向保持指向更接近最优解的位置。

中心化方案的基本思想简单易懂:简单改变每个变量的尺度(单位)因而试验解在新的坐标

系里与每条约束边界等距(Karmarkar 的最初算法应用了一种更复杂的中心化方案)。

例如,图 8.3 有 3 个约束边界,每一个对应扩展形式的问题中 3 个变量的其中之一取 0 值,即  $x_1=0, x_2=0$  和  $x_3=0$ ,图 8.4 显示了这 3 个约束边界与  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$  ( $x_1+x_2+x_3=8$ ) 的平面相交形成可行域的边界。初始试验解是  $(x_1, x_2, x_3)=(2, 2, 4)$ ,因此,当各变量的长度单位被使用时,这个解距离约束边界  $x_1=0$  和  $x_2=0$  均为 2 个单位。距离边界  $x_3=0$  为 4 个单位。然而,不管在哪种情况下,这些长度单位都是任意的而且能够被转化为希望的值而不改变问题本身。

$$\tilde{x}_1 = \frac{x_1}{2}, \tilde{x}_2 = \frac{x_2}{2}, \tilde{x}_3 = \frac{x_3}{4}$$

因此,为了使当前试验解  $(x_1, x_2, x_3)=(2, 2, 4)$  转化为

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = (1, 1, 1)$$

在这个新的坐标下(以  $2\tilde{x}_1$  替换  $x_1, 2\tilde{x}_2$  替换  $x_2, 4\tilde{x}_3$  替换  $x_3$ ),问题变为

$$\text{Max } Z = 2\tilde{x}_1 + 4\tilde{x}_2$$

s. t.

$$2\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 + 4\tilde{x}_3 = 8$$

且

$$\tilde{x}_1 \geq 0, \tilde{x}_2 \geq 0, \tilde{x}_3 \geq 0$$

图 8.5 描绘了这个问题。

注意到图 8.5 中的试验解  $(1, 1, 1)$  与 3 条约束边界  $\tilde{x}_1=0, \tilde{x}_2=0, \tilde{x}_3=0$  是等距的。对于随后的每一次迭代也一样,问题被再次调整尺度以获得与之相同的性质,因此当前试验解在当前坐标下总是  $(1, 1, 1)$ 。

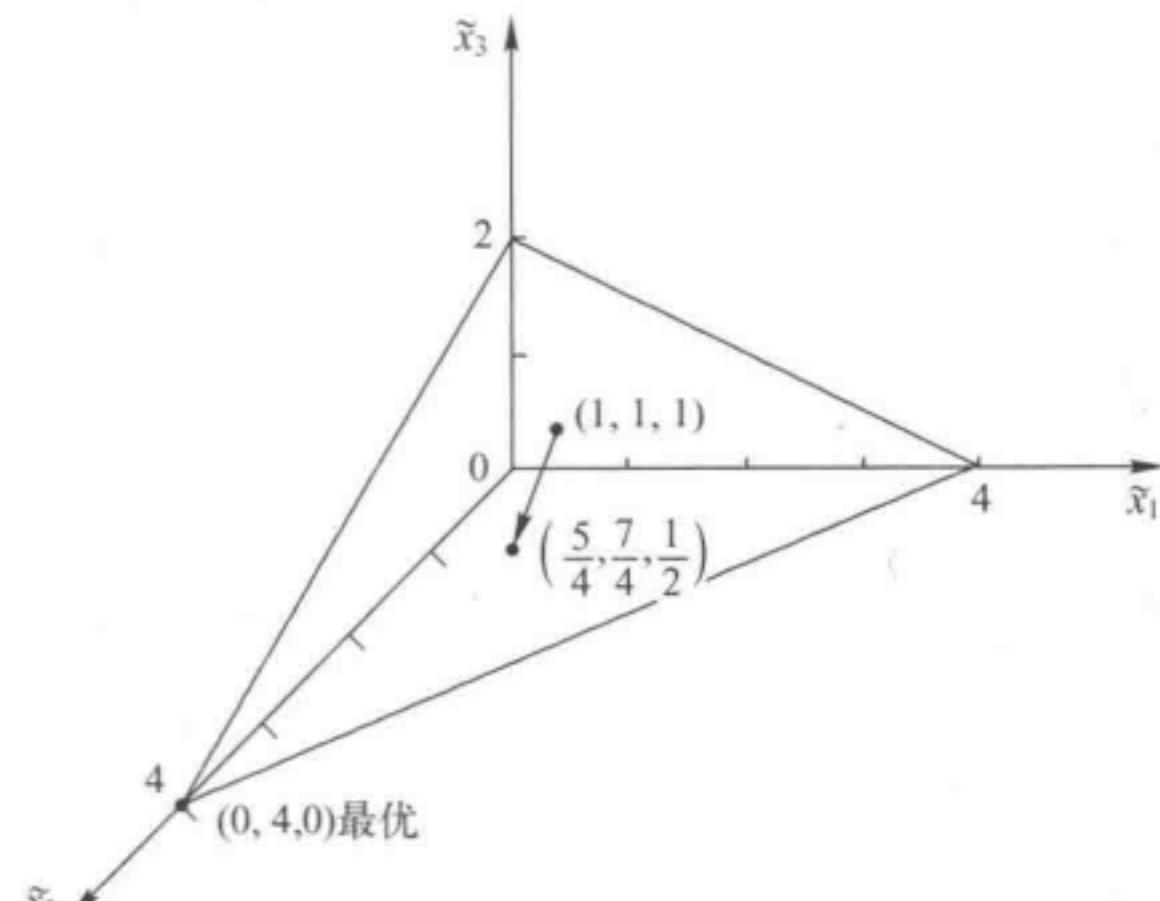


图 8.5 迭代 1 调整尺度后的示例

#### 8.4.4 本算法的总结与说明

现在让我们总结并说明这个算法。我们将详细完成例子中的第一步迭代,然后给出一般过程的一个总结,最后将这个总结应用于第二步迭代。

**迭代 1:** 给定的初始试验解  $(x_1, x_2, x_3)=(2, 2, 4)$ ,让  $D$  成为相应的对角矩阵,从而有  $\mathbf{x}=D\tilde{\mathbf{x}}$ 。因此,有

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

那么,调整尺度的变量就是下式的分量:

$$\tilde{\mathbf{x}} = D^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{2} \\ \frac{x_2}{2} \\ \frac{x_3}{4} \end{bmatrix}$$

在这些新坐标下,  $A$  和  $c$  成为

$$\tilde{A} = AD = [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = [2 \ 2 \ 4]$$

$$\tilde{c} = Dc = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

因此,投影矩阵为

$$\begin{aligned} P &= I - \tilde{A}^T (\tilde{A} \tilde{A}^T)^{-1} \tilde{A} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \left( [2 \ 2 \ 4] \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} [2 \ 2 \ 4] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 16 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因此,投影梯度为

$$c_p = P \tilde{c} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

定义  $\nu$  为含有最大绝对值的向量  $c_p$  的负分量的绝对值,所以本例中  $\nu = |-2| = 2$ ,在当前坐标下,现在算法从当前试验解  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = (1, 1, 1)$  移动到下一个试验解。

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{a}{\nu} c_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0.5}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

如图 8.5 所示(选择  $\nu$  的这个定义,对下一试验解中本方程  $a=1$  时,将使得  $\tilde{x}$  的最小分量等于 0)。在原坐标系下,这个解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = D \tilde{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

这就完成了这次迭代,这个新的解将用于开始下一步迭代。  
对于任何迭代,这些步骤可以总结如下。

### 8.4.5 内点算法总结

(1) 给定当前试验解  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 令

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

(2) 计算  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{AD}$  和  $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{D}\mathbf{c}$ 。

(3) 计算  $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}^T (\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{A}}^T)^{-1} \tilde{\mathbf{A}}$  和  $\mathbf{c}_p = \mathbf{P} \tilde{\mathbf{c}}$ 。

(4) 找出  $\mathbf{c}_p$  拥有最大绝对值的负分量, 并令  $\nu$  等于这个绝对值。然后计算

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{a}{\nu} \mathbf{c}_p$$

式中:  $a$  是  $0 \sim 1$  的一个可选常数(如  $a=0.5$ )。

(5) 计算  $\mathbf{x} = \mathbf{D} \tilde{\mathbf{x}}$  作为下一步迭代(步骤(1))的试验解(如果这一试验解与前一个试验解相比无实质上的改变,那么,算法实际上已经收敛于一个最优解,因此算法停止)。

现在让我们把这一总结应用于本例的迭代 2。

**迭代 2:**

步骤(1):

给定当前试验解  $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, 2\right)$ , 令

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(注意: 调整尺度的变量为

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}x_1 \\ \frac{2}{7}x_2 \\ \frac{1}{2}x_3 \end{bmatrix}$$

所以,在这些新的坐标下,BF 解为

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{D}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{D}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{16}{7} \\ 0 \end{bmatrix}$$

和

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{D}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

如图8.6所示。)

步骤(2)：

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{AD} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

和

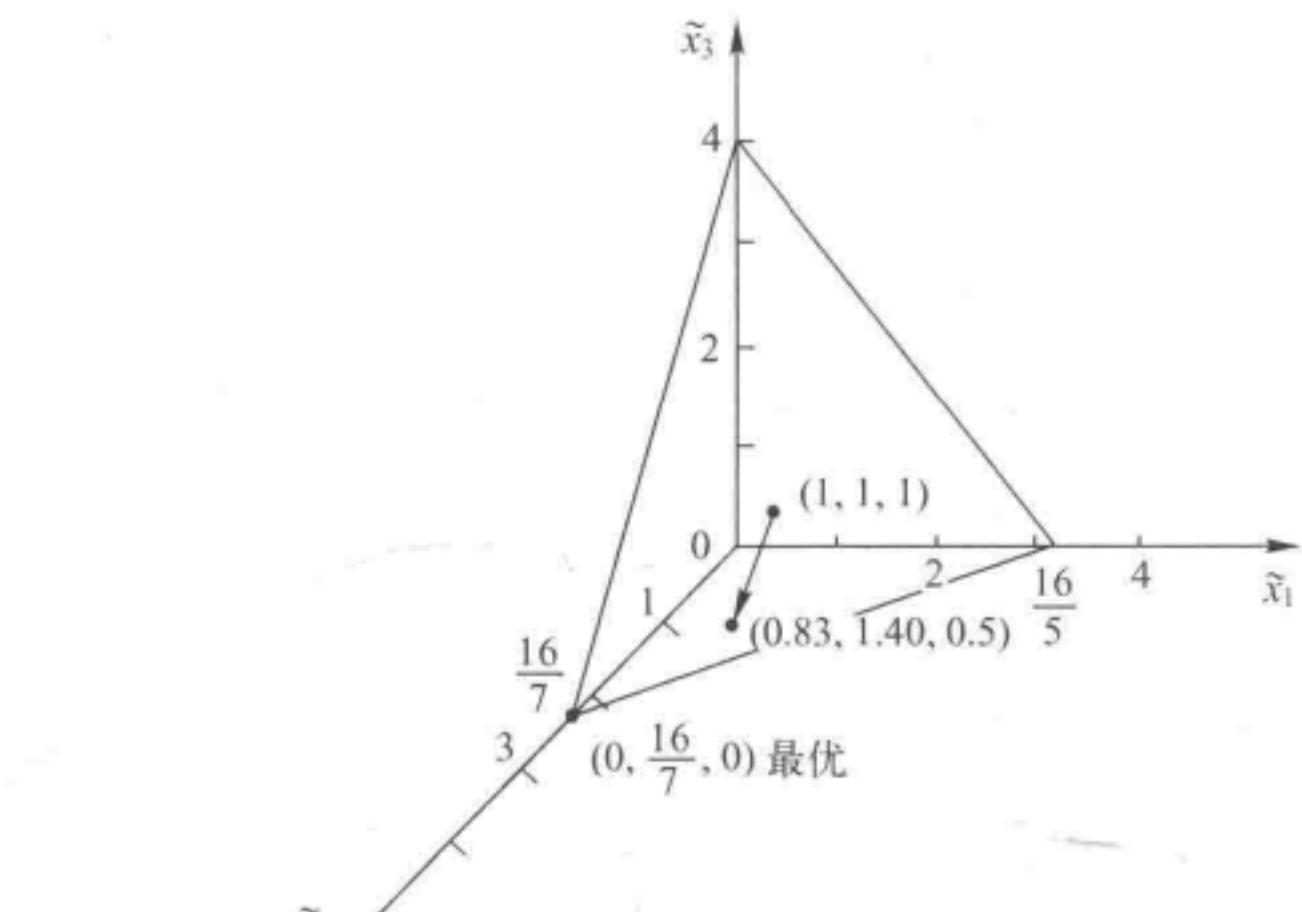


图8.6 迭代2次调整尺度后示例

$$\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{D}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

步骤(3)：

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{13}{18} & -\frac{7}{18} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{7}{18} & \frac{41}{90} & -\frac{14}{45} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{14}{45} & \frac{37}{45} \end{bmatrix}$$

和

$$\mathbf{c}_p = \begin{bmatrix} -\frac{11}{12} \\ \frac{133}{66} \\ -\frac{41}{15} \end{bmatrix}$$

步骤(4)：

$$\left| -\frac{41}{15} \right| > \left| -\frac{11}{12} \right| \quad \nu = \frac{41}{15}$$

所以，有

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0.5}{41} \begin{bmatrix} -\frac{11}{12} \\ \frac{133}{60} \\ -\frac{41}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{273}{328} \\ \frac{461}{328} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.83 \\ 1.40 \\ 0.50 \end{bmatrix}$$

步骤(5)：

$$\mathbf{x} = \mathbf{D} \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{1365}{656} \\ \frac{3227}{656} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.08 \\ 4.92 \\ 1 \end{bmatrix}$$

是迭代 3 的试验解。

因为其余的迭代重复上述计算,在此不再赘述。不过,在迭代 3 刚获得的试验解基础上调整尺度之后形成新的可行域我们在图 8.7 中描述了。同以前一样,调整尺度总是把试验解设置为  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = (1, 1, 1)$ , 与约束边界  $\tilde{x}_1 = 0, \tilde{x}_2 = 0, \tilde{x}_3 = 0$  的距离相等。注意:在图 8.5、图 8.6 和图 8.7 中,迭代序列和尺度调整把最优解向  $(1, 1, 1)$  移动,同时其余 BF 解远离该点。最后,经过足够的迭代,调整尺度后,最优解将非常接近  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = (0, 1, 0)$ , 而其余两个 BF 解将在  $\tilde{x}_1$  和  $\tilde{x}_3$  轴上远离初始位置。接着该迭代的步骤(5)将产生一个解,该解在原始坐标系中非常靠近最优解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 8, 0)$ 。

图 8.8 显示了问题没有扩展之前在原  $x_1 = x_2$  的坐标系中的算法进行过程。3 个点  $(x_1, x_2) = (2, 2), (2.5, 3.5)$  和  $(2.08, 4.92)$  分别是迭代 1、迭代 2 和迭代 3 的试验解。然后,我们作了一条通过这些点并超出一段距离的平滑曲线展示算法在逼近  $(x_1, x_2) = (0, 8)$  过程中后续迭代的轨迹。

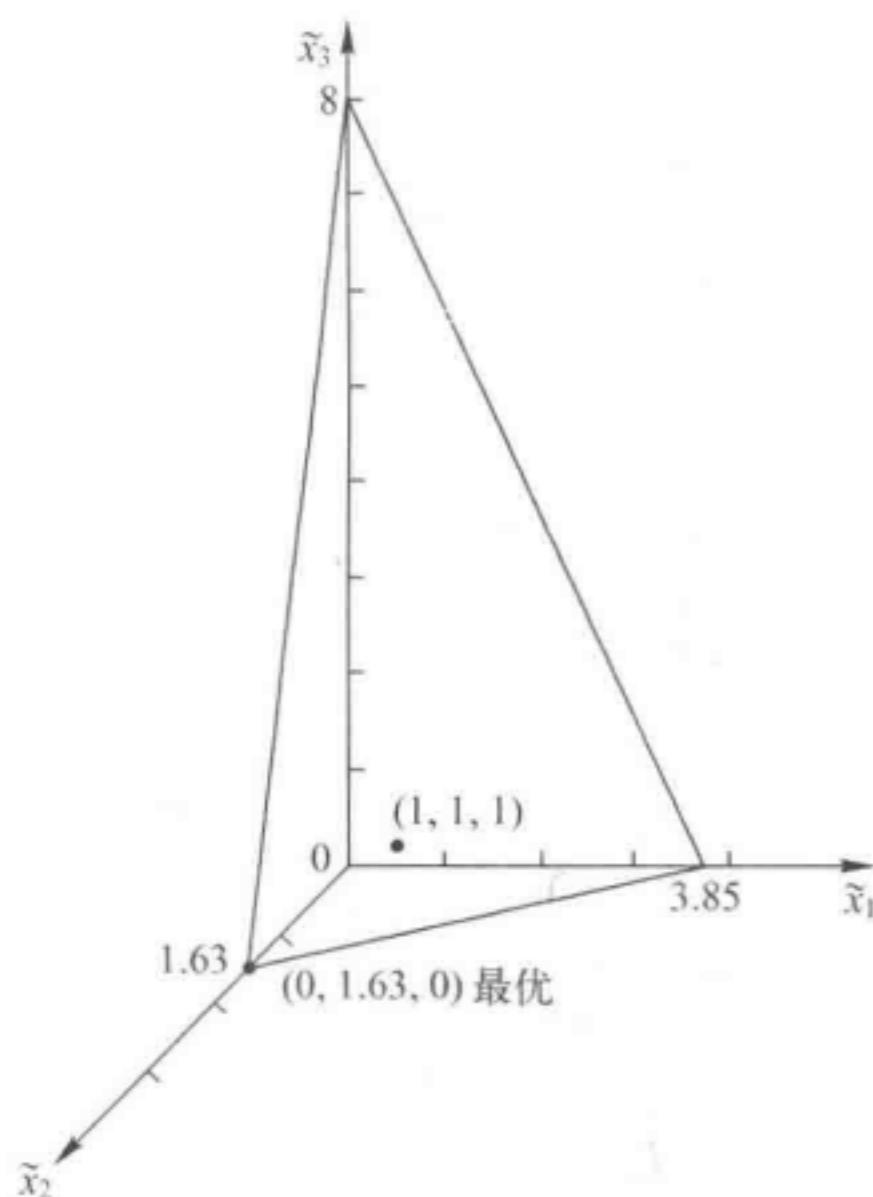


图 8.7 迭代 3 调整尺度后示例

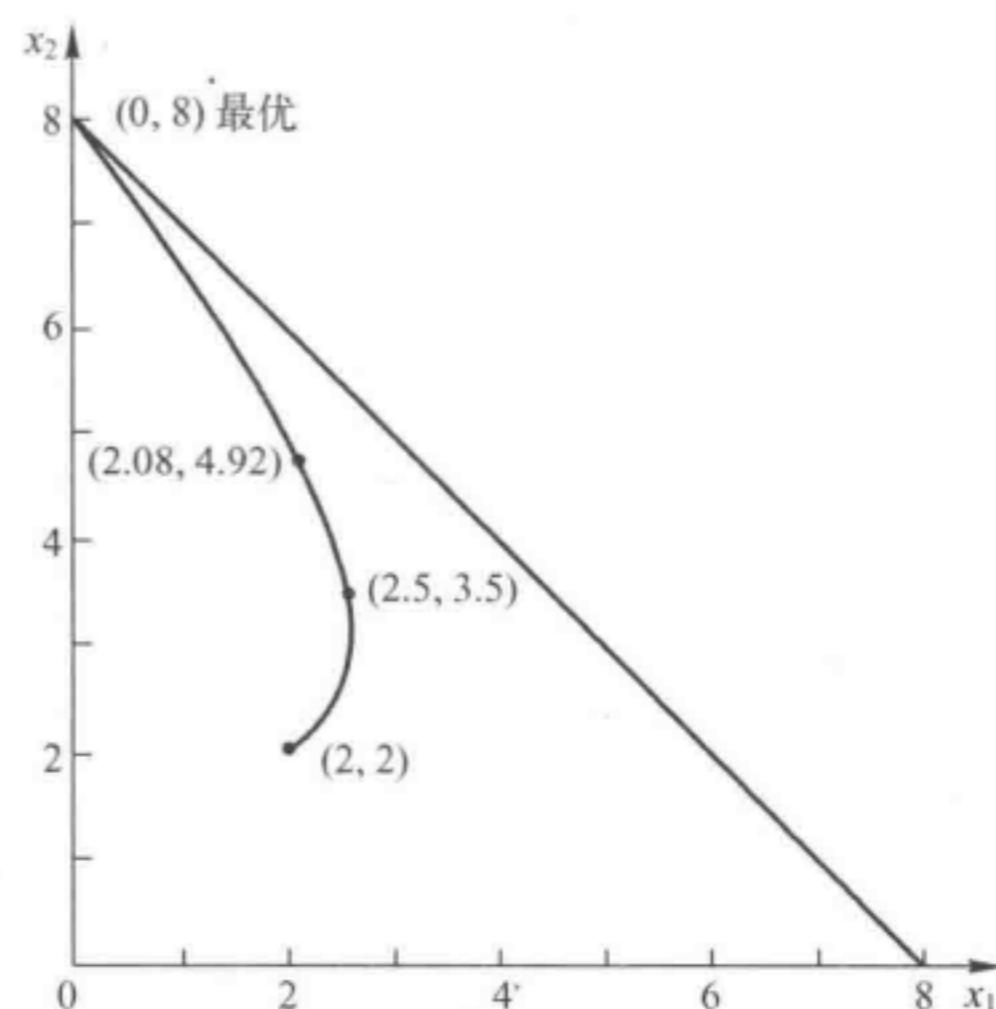


图 8.8 本例在原  $x_1-x_2$  坐标系中内点算法的轨迹

对这个特定的例子,函数约束正好是非等式约束。不过,对这个算法而言,等式约束也不会产生任何困难。因为由算法处理这些约束只是在任何需要转化为等式的扩展形式( $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ )完成之后进行的,而不论以何种方式取得扩展形式。为了说明这个问题,假定本例中的唯一改变是把约束  $x_1 + x_2 \leq 8$  改为  $x_1 + x_2 = 8$ 。这样,图 8.3 中的可行域刚好变为点  $(8,0)$  和点  $(0,8)$  之间的线段。给定该线段内部的一个初始可行试验解,如  $(x_1, x_2) = (4,4)$ , 该算法就可以按照提出的恰好有两个变量时的 5 步总结所述进行,这里  $\mathbf{A} = [1 \ 1]$ , 对每步迭代,投影梯度沿这条线段指向  $(0,8)$  的方向。取  $a = \frac{1}{2}$ , 迭代 1 从点  $(4,4)$  移动到  $(2,6)$ , 迭代 2 从  $(2,6)$  移动到  $(1,7)$  等(习题 8.4-3 要求验证这些结果)。

尽管本例的任意个版本都只有一个函数约束,然而,正如已经说明的,拥有多于一个约束只导致计算过程的一个改变(不是更大范围的计算)。例子中有一个单独的函数约束意味着  $A$  只拥有单独的一行,因此步骤(3)的  $(\tilde{A}\tilde{A}^T)^{-1}$  项就是向量乘积  $\tilde{A}\tilde{A}^T$  所得到数值的倒数。多个函数约束意味着  $A$  有多行,因而,  $(\tilde{A}\tilde{A}^T)^{-1}$  是由矩阵乘积  $\tilde{A}\tilde{A}^T$  得到的矩阵的逆阵。

结束前,我们常要加上一个注释以更完整地理解算法,对于特别小型的例子,该算法要求相对大量的计算并经多次迭代后,获得仅是最优解的一个近似值。3.1节的图解法在图8.3中立刻找到了最优解,而且单纯形法只要求一步快速地迭代,然而,不要被这一对比而忽视了内点算法的有效性。这个算法是为解决拥有成百上千条函数约束的大型问题而设计的。对于这样的问题,单纯形法通常需要数千步迭代,通过“穿过”可行域内部,内点算法只要求少得多的迭代次数(尽管每步迭代要做更多的工作),这使内点算法有时能有效地解决大型线性规划问题。这些问题可能在单纯形法和对偶单纯形法的解决范围之外。因此,与这里提出的算法类似的一些内点算法将在线性规划中发挥重要作用。

4.9节介绍了内点算法与单纯形法的对比,还讨论了内点算法与单纯形法的互补作用,包括它们怎样被组合进一个混合的算法中。

最后,我们必须强调一点,通过描述1984年Karmarkar提出的开创性算法的一个初等变异方法,本节只是提供一个对内点算法应用于线性规划的概念性介绍。1984年以来,许多顶尖的研究人员已经对内点算法做了许多关键性的改进,这仍将成为一个重要的研究领域,对这个高级专题的更深入介绍超出了本书的范围,感兴趣的读者可以从本章参考文献中找到详细内容。

## 8.5 结 论

对于优化后分析,对偶单纯形法和参数线性规划特别有价值,在其他背景下它们也可能非常有用。

通常情况下,一些变量或全部变量有明显的上界。上界法为这些情况下简化单纯形法提供了一种方法,它可以极大地减少大型问题的计算量。

数学规划计算机软件包通常包括这3种程序,并且这3种程序被广泛地使用。因为它们的基本结构在很大程度上基于第4章中提出的单纯形法。

现在已经提出了很多其他专用算法以利用特殊类型的线性规划问题的特殊结构(如第9章和第10章将讨论)。目前,在这一领域已有非常多的研究。

Karmarkar的内点算法开创了研究如何解决线性规划问题的另一关键路线。现在,这个算法的变异方法为高效地解决某些非常大型的问题提供了强有力的过程。

## 参 考 文 献

- [1] Hooker, J. N.: “Karmarkar’s Linear Programming Algorithm,” *Interfaces*, **16**: 75–90, July–August 1986.
- [2] Jones, D., and M. Tamiz: *Practical Goal Programming*, Springer, New York, 2010.
- [3] Luenberger, D., and Y. Ye: *Linear and Nonlinear Programming*, 3rd ed., Springer, New York, 2008.
- [4] Marsten, R., R. Subramanian, M. Saltzman, I. Lustig, and D. Shanno: “Interior-Point Methods for Linear Programming: Just Call Newton, Lagrange, and Fiacco and McCormick!,” *Interfaces*, **20**: 105–116, July–August 1990.
- [5] Murty, K. G.: *Optimization for Decision Making: Linear and Quadratic Models*, Springer, New York, 2010.
- [6] Vanderbei, R. J.: “Affine-Scaling for Linear Programs with Free Variables,” *Mathematical Programming*, **43**: 31–44, 1989.
- [7] Vanderbei, R. J.: *Linear Programming: Foundations and Extensions*, 4th ed., Springer, New York, 2014.

[8] Ye, Y.: *Interior-Point Algorithms: Theory and Analysis*, Wiley, Hoboken, NJ, 1997.

## 习 题

某些习题(或其中一部分)左端的符号意义如下:

I: 我们建议你使用 IOR Tutorial(输出记录了你的工作)中的上述程序之对参数线性规划而言, 这些程序只应用于  $\theta=0$ , 在这之后你应该手工继续计算。

C: 通过使用 IOR Tutorial 中内点算法的自动程序解决问题。

习题上有星号表示书后有该题的部分答案。

8.1-1 考虑如下问题。

$$\text{Max } Z = -x_1 - x_2$$

s. t.

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_2 \geq 3$$

$$-x_1 + x_2 \leq 2$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

I(a) 用图解法求解此题。

(b) 用对偶单纯形法手工求解此题。

(c) 在图上描绘对偶单纯形法执行的路径。

8.1-2\* 应用对偶单纯形法手工解决以下问题。

$$\text{Min } Z = 5x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

s. t.

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4$$

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 10$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

8.1-3 应用对偶单纯形法手工解决以下问题。

$$\text{Min } Z = 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4$$

s. t.

$$2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_4 \geq 5$$

$$8x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 \geq 8$$

$$3x_1 + 8x_2 + x_3 + 4x_4 \geq 4$$

且

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$$

8.1-4 考虑以下问题。

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

s. t.

$$3x_1 + x_2 \leq 12$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$5x_1 + 3x_2 \leq 27$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

I(a)用原始单纯形法(表格形式)求解此题,找出每步迭代得到的对偶问题的互补基解。

(b)用对偶单纯形法手工求解此问题的对偶问题,将得到的一系列基解与(a)中得到的互补基解作比较。

8.1-5 考虑7.2节中灵敏度分析案例1的例子。在该例中,表4.8中的初始单纯形表发生了改变, $b_2$ 从12变为24,因而,最终单纯形表右侧一列的数字分别变为54、6、12和-2。从这个修改过的最终单纯形表开始,用对偶单纯形法求解如表7.5所列的新的最优解。列出你的求解步骤。

8.1-6\* 考虑习题7.2-2(a)部分。从修改后的最终表出发,使用对偶单纯形法重新优化。

8.2-1\* 考虑以下问题。

$$\text{Max } Z = 8x_1 + 24x_2$$

s. t.

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

假定Z代表利润并且两个业务活动的员工的适当轮换将可能或多或少地改变目标函数。特别地,假定活动1的单位利润可增加到超过8(最大值18)。同时付出的代价是活动2的单位利润从24减少该数量的2倍。这样Z实际上可以表示为

$$Z(\theta) = (8+\theta)x_1 + (24-2\theta)x_2$$

式中: $\theta$ 也是一个决策变量,满足 $0 \leq \theta \leq 10$ 。

I(a)用图解法求最初问题的解。然后,用扩展图解法的过程来求解该问题的参数扩展形式,即寻找关于 $\theta$ 函数的最优解和最优值 $Z(\theta)$ ,满足 $0 \leq \theta \leq 10$ 。

I(b)用单纯形法求解最初问题的最优解,然后用参数线性规划求函数最优解和最优值 $Z(\theta)$ 。满足 $0 \leq \theta \leq 10$ ,绘出 $Z(\theta)$ 的图形。

(c)确定最优的 $\theta$ 值,然后说明如何能通过只求解两个通常的线性规划问题而直接确定该最优值(提示:凸函数在某一个端点获得最大值)。

I8.2-2 应用参数线性规划寻找下述问题函数的最优解 $\theta, 0 \leq \theta \leq 20$ 。

$$\text{Max } Z(\theta) = (20+4\theta)x_1 + (30-3\theta)x_2 + 5x_3$$

s. t.

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 30$$

$$8x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 75$$

$$6x_1 + x_2 + x_3 \leq 45$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

I8.2-3 考虑以下问题。

$$\text{Max } Z(\theta) = (10-\theta)x_1 + (12+\theta)x_2 + (7+2\theta)x_3$$

s. t.

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 30$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 20$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

(a) 应用参数线性规划为这个问题寻找作为  $\theta$  的函数最优解,  $\theta \geq 0$ 。

(b) 为这个问题构建对偶模型。然后, 应用 8.2 节后面一部分所描述的方法为这个对偶问题寻找作为  $\theta$  的函数的最优解,  $\theta \geq 0$ 。图解说明这一代数过程在做些什么, 把所获得的基本解与 (a) 部分得到的互补的基本解做对比。

I8.2-4\* 应用针对参数  $b_i$  系统变化的参数线性规划程序寻找以下问题的  $\theta$  函数的最优解,  $0 \leq \theta \leq 25$ 。

$$\text{Max } Z(\theta) = 2x_1 + x_2$$

s. t.

$$x_1 \leq 10 + 2\theta$$

$$x_1 + x_2 \leq 25 - \theta$$

$$x_2 \leq 10 + 2\theta$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

图解说明这个代数过程是怎样进行的。

I8.2-5 应用参数线性规划为以下问题的  $\theta$  函数寻找一个最优解,  $0 \leq \theta \leq 30$ 。

$$\text{Max } Z(\theta) = 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4$$

s. t.

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 135 - 2\theta$$

$$2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 78 - \theta$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 30 + \theta$$

且

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$$

然后, 找出使最优值  $Z(\theta)$  达到最大值的  $\theta$  值。

I8.2-6 考虑习题 7.2-3。应用参数线性规划寻找作为  $\theta$  的函数最优解  $-20 \leq \theta \leq 0$  (提示: 用  $-\theta'$  替换  $\theta$ , 然后从 0 开始增加  $\theta'$ )。

I8.2-7 考虑如图 8.1 所示的参数  $c_j$  系统地改变时的参数线性规划的函数  $Z^*(\theta)$ 。

(a) 解释为什么这个函数是分段线性的。

(b) 说明这个函数必须为凸。

I8.2-8 考虑如图 8.2 所示的参数  $b_i$  系统改变时参数线性规划的函数  $Z^*(\theta)$ 。

(a) 解释为什么这个函数是分段线性的。

(b) 说明这个函数必定是凹的。

$$I8.2-9 \text{ 令 } Z^* = \text{Max} \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j \right\}$$

s. t.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

且

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

式中: $a_{ij}$ 、 $b_i$  和  $c_j$  是固定的常数且令  $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$  为对应的最优对偶解, 然后, 令

$$Z^{**} = \text{Max} \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j \right\}$$

s. t.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + k_i, i = 1, 2, \dots, m$$

式中: $k_1, k_2, \dots, k_m$  是给定的常数, 且  $x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$  说明下式成立

$$Z^{**} \leq Z^* + \sum_{i=1}^m k_i y_i^*$$

8.3-1 考虑以下问题。

$$\text{Max } Z(\theta) = 2x_1 + x_2$$

s. t.

$$x_1 - x_2 \leq 5$$

$$x_1 \leq 10$$

$$x_2 \leq 10$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

I(a) 图解法求解这个问题。

(b) 应用上界法人工求解这个问题。

(c) 在图上描绘出上界法的路径。

8.3-2\* 应用上界法人工求解以下问题。

$$\text{Max } Z = x_1 + 3x_2 - 2x_3$$

s. t.

$$x_2 - 2x_3 \leq 1$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8$$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_3 \leq 2$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

8.3-3 应用上界法人工求解以下问题。

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4$$

s. t.

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 5$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 \leq 5$$

且

$$0 \leq x_j \leq 1, j = 1, 2, 3, 4$$

8.3-4 应用上界法人工求解以下问题。

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5$$

s. t.

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 \leq 6$$

$$4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + x_5 \leq 15$$

且

$$0 \leq x_j \leq 1, j=1, 2, 3, 4, 5$$

8.3-5 同时应用上界法和对偶单纯形法人工求解以下问题。

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$$

s. t.

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 15$$

$$x_2 + x_3 \geq 10$$

且

$$0 \leq x_1 \leq 25, 0 \leq x_2 \leq 5, 0 \leq x_3 \leq 15$$

C8.4-1 重新考虑8.4节中用来说明内点算法的例子。假定初始可行试验解换成 $(x_1, x_2) = (1, 3)$ 。从这个解出发,手工进行两步迭代。然后,使用IOR Tutorial 中的自动程序检验你的运算。

8.4-2 考虑以下问题。

$$\text{Max } Z = 3x_1 + x_2$$

s. t.

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

I(a)图解法求解这个问题,并找出所有 CPF 解。

C(b)从初始试验解 $(x_1, x_2) = (1, 1)$ 出发,手工进行8.4节提出的内点算法的4步迭代。然后,使用IOR Tutorial 中的自动程序检验你的运算。

(c)针对本问题,画出与图8.4、图8.5、图8.6、图8.7和图8.8相应的图形。在每个图形中,找出当前坐标系下的基本(或角点)可行解(试验解可以用于决定投影梯度)。

8.4-3 考虑以下问题。

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2$$

s. t.

$$x_1 + x_2 = 8$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

C(a)在8.4节的末尾,我们讨论了从 $(x_1, x_2) = (4, 4)$ 出发,使用内点算法如何解决这个问题。通过手工进行两步迭代验证得出的结果。然后,使用IOR Tutorial 中的自动程序检验你的运算。

(b) 使用这些结果预测在进行一次迭代时下一个试验解会是多少。

(c) 在这个应用问题中,假定算法采用停止运算的判断准则是当两个连续的试验解在任何分量中相差不多于0.01时,停止运算。使用在(b)中得到的预测估计最终试验解和达到这个最终试验解所需的迭代步骤总数。这个解距离最优解 $(x_1, x_2) = (0, 8)$ 有多近?

8.4-4 考虑以下问题。

$$\text{Max } Z = x_1 + x_2$$

s. t.

$$x_1 + x_2 \leq 9$$

$$2x_1 + x_2 \leq 9$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

I(a) 图解法求解此题。

(b) 找出在原始  $x_1 - x_2$  坐标系中目标函数的梯度。如果你从最初开始并沿着梯度的方向移动到可行域的边界，相对于最优解你最终停止在哪个位置。

C(c) 从初始试验解  $(x_1, x_2) = (1, 1)$  出发，使用 IOR Tutorial 进行 8.4 节提出的内点算法的 10 步迭代。

C(d) 令  $a = 0.9$ ，重做(c)。

8.4-5 考虑以下问题。

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 5x_2 + 7x_3$$

s. t.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

I(a) 画出可行域。

(b) 找到目标函数的梯度，然后寻找可行域上的投影梯度。

(c) 从初始试验解  $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$  出发，由人工进行 8.4 节提出的内点算法的 2 步迭代。

C(d) 从这个相同的初始试验解出发，使用 IOR Tutorial 进行这个算法的 10 步迭代。

C8.4-6 从初始试验解  $(x_1, x_2) = (2, 2)$  出发，使用 IOR Tutorial 对 3.1 节提出的 Wyndor Glass 公司问题执行 8.4 节所示内点算法的 1~5 步迭代，画出类似图 8.8 的图形以显示该算法在原  $x_1 - x_2$  坐标系下的轨迹。