计量经济学II

(Econometrics II)

胡华平

西北农林科技大学

经济管理学院数量经济教研室

huhuaping01@hotmail.com

2021-09-26

模块04：联立方程模型（SEM）

Chapter 18. 为什么要关心联立方程模型？

Chapter 19. 联立方程模型的识别问题

Chapter 20. 联立方程模型的估计方法

Chapter 18. 为什么要关心联立方程模型？

18.1 联立方程模型的本质

18.2 联立方程模型的表达和定义

18.3 OLS估计方法还合适么？

18.1 联立方程模型的本质

联立方程模型的形态

联立方程模型（simultaneous equations model,SEM）：由多个方程组成的、方程之间存在相互关联的、联合影响的**内生变量**的方程系统。其基本形式如下：

$$\begin{cases} Y_{1i} = \beta_{10} + \gamma_{12} Y_{2i} + \beta_{11} X_{1i} + u_{i1} \\ Y_{2i} = \beta_{20} + \gamma_{21} Y_{1i} + \beta_{21} X_{1i} + u_{i2} \end{cases}$$

需求-供给模型：

$$
\begin{aligned}
\text{Demand function: } Q_t^d &= \alpha_0 + \alpha_1 P_t + u_{t1}, \quad \alpha_1 < 0 \\
\text{supply function: } Q_t^s &= \beta_0 + \beta_1 P_t + u_{t2}, \quad \beta_1 > 0 \\
\text{Equilibrium condition:} Q_t^d &= Q_t^s
\end{aligned}
$$

凯恩斯收入决定模型（Keynesian model of income determination）：

$$\begin{cases} C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \varepsilon_t & \text{(消费函数)} \\ Y_t = C_t + I_t & \text{(收入恒等式)} \end{cases}$$

投资储蓄的IS宏观经济模型：

$$
\begin{aligned}
\text{Consumption function: } C_t &= \beta_0 + \beta_1 Y_{dt} & < \beta_1 < 1 \\
\text{Tax function: } T_t &= \alpha_0 + \alpha_1 Y_t & 0 < \alpha_1 < 1 \\
\text{Investment function: } I_t &= \gamma_0 + \gamma_1 r_t \\
\text{Definition: } \gamma_{dt} &= Y_t - T_t \\
\text{Government expenditure: } G_t &= \bar{G} \\
\text{National income identity: } Y_t &= C_t + I_t + G_t
\end{aligned}
$$

其中：Y表示国民收入；Y_d表示可支配收入；r表示利率；$\bar{G}$表示给定政府支出水平。

货币市场均衡的LM宏观经济模型：

$$
\begin{aligned}
\text{Money demand function: } M_t^d &= a + bY_t - cr_t \\
\text{Money supply function: } M_t^s &= \bar{M} \\
\text{Equilibrium condition: } M_t^d &= M_t^s
\end{aligned}
$$

其中： Y表示收入； r表示利率; $\bar{M}$表示给定货币供给量。

克莱因模型（Llein's model）：

$$\text{Consumption function: } C_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 \left(W + W'\right)_t + \beta_3 P_{t-1} + u_{t1}$$
$$\text{Investment function: } I_t = \beta_4 + \beta_5 P_t + \beta_6 P_{t-1} + \beta_7 K_{t-1} + u_{t2}$$
$$\text{Demand for labor: } w_t = \beta_8 + \beta_9 \left(Y + T - W'\right)_t + \beta_{10} \left(Y + T - W'\right)_{t-1} + \beta_{11} t + u_{t3}$$
$$\text{Identity: } Y_t = C_t + I_t + C_t$$
$$\text{Identity: } Y_t = W'_t + W_t + P_t$$
$$\text{Identity: } K_t = K_{t-1} + I_t$$

其中：C表示消费支出；Y表示税后收入；P表示利润；W表示个人工资；W'表示政府工资；K表示资本存货；T表示税收。

$$
\begin{aligned}
\text{murdpc} &= \alpha_1 \,\text{polpc} + \beta_{10} + \beta_{11}\text{incpc} + u_1 \\
\text{polpc} &= \alpha_2 \,\text{murdpc} + \beta_{20} + \text{ other factors.}
\end{aligned}
$$

其中：*murdpc*表示人均凶杀犯罪数；*polpc*表示人均警员数；*incpc*表示人均收入。

生活中的模型2：住房支出-储蓄模型

$$
\begin{aligned}
\text{housing} &= \alpha_1 \text{saving} + \beta_{10} + \beta_{11}\text{inc} + \beta_{12} educ + \beta_{13}\text{age} + u_1 \\
\text{saving} &= \alpha_2 \text{housing} + \beta_{20} + \beta_{21}\text{inc} + \beta_{22} educ + \beta_{23}\text{age} + u_2
\end{aligned}
$$

其中：$housing$表示住房支出；$saving$表示家庭储蓄；inc表示家庭收入；$educ$表示教育水平; age表示年龄。

联立方程模型的本质是**内生变量**问题：

- 每一个方程都有其经济学因果关系（保持其他条件不变的）
- 样本数据只是各种变量的最终结果，但其中蕴含复杂相互因果互动关系
- 特定方程的参数估计，往往跟其他方程有联系
- 直接使用OLS方法估计参数将会不可靠

松露案例：案例背景

松露是美味的食材。它们是生长在地下的食用菌。我们考虑如下的松露供求模型:

$$\begin{cases} \text{Demand: } Q_{di} = \alpha_1 + \alpha_2 P_i + \alpha_3 PS_i + \alpha_4 DI_i + e_{di} \\ \text{Supply: } Q_{si} = \beta_1 + \beta_2 P_i + \beta_3 PF_i + e_{si} \\ \text{Equity: } Q_{di} = Q_{si} \end{cases}$$

> 其中：
>
> - Q_i =某一特定市场上松露的交易量;
> - P_i =松露的市场价格;
> - PS_i =松露替代物的市场价格;
> - DI_i =当地居民每月人均可支配收入;
> - PF_i =生产要素的价格，在本例中是搜索松露过程中租用小猪的每小时租金。

松露案例：变量说明

变量	含义	单位
P	松露市场价格	美元/盎司
Q	松露产量或需求量	盎司
PS	松露替代品的市场价格	美元/盎司
DI	当地居民可支配收入	美元/人
PF	生产成本(小猪的租金)	美元/小时

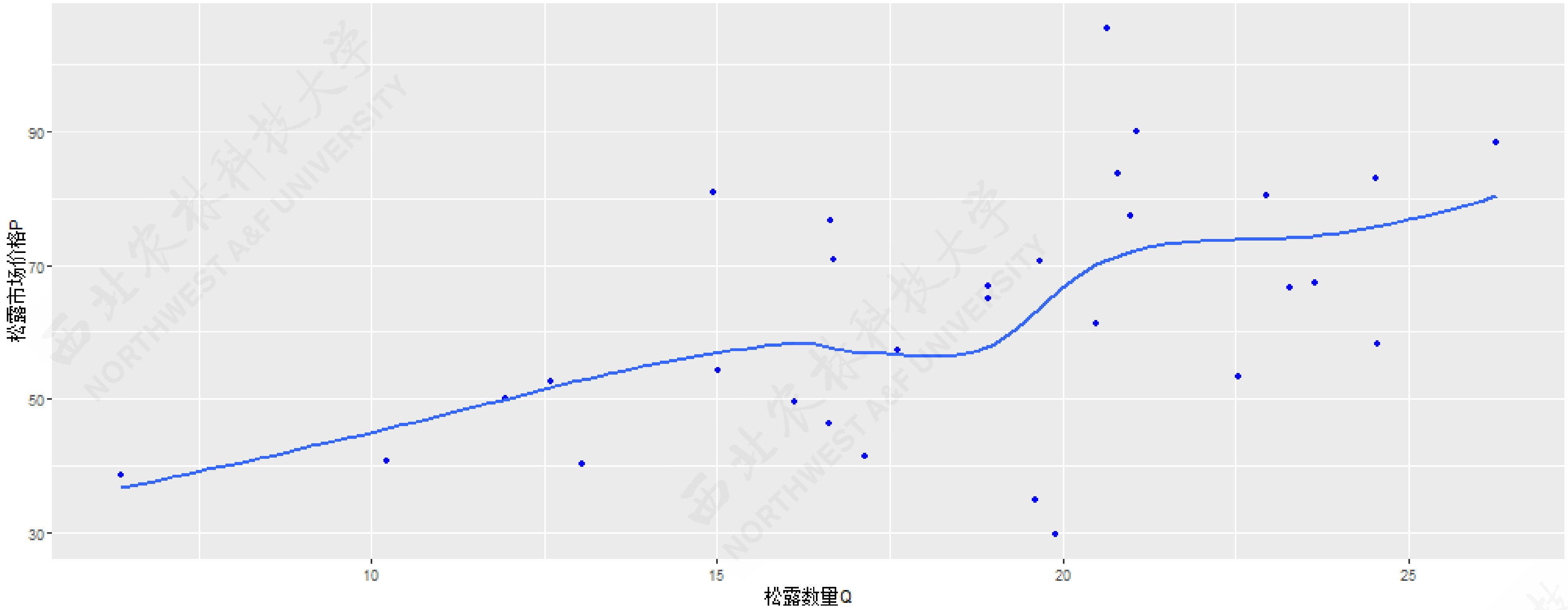
松露案例：数据表

id	P	Q	PS	DI	PF
1	29.64	19.89	19.97	2.103	10.52
2	40.23	13.04	18.04	2.043	19.67
3	34.71	19.61	22.36	1.87	13.74
4	41.43	17.13	20.87	1.525	17.95
5	53.37	22.55	19.79	2.709	13.71
6	38.52	6.37	15.98	2.489	24.95
7	54.33	15.02	17.94	2.294	24.17
8	40.56	10.22	17.09	2.196	23.61

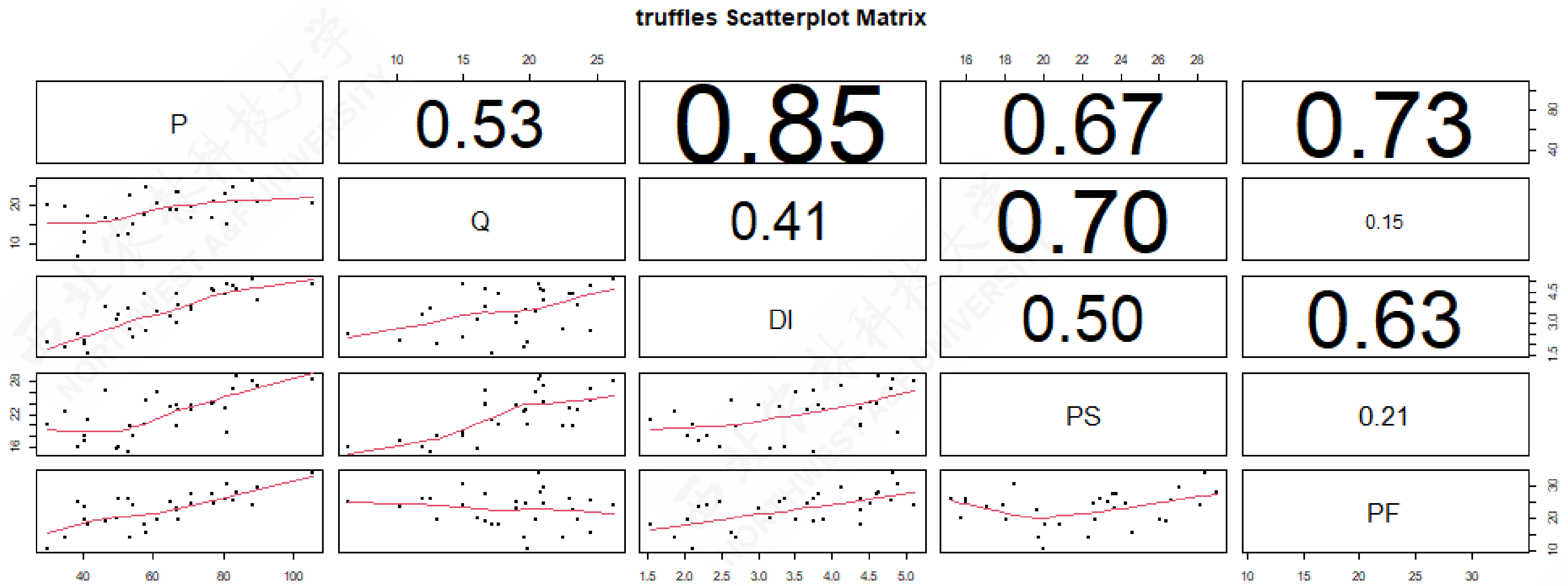
Showing 1 to 8 of 30 entries

Previous 1 2 3 4 Next

松露案例：散点图(P VS Q)



松露案例：矩阵散点图



truffles Scatterplot Matrix
P
0.53
0.85
0.67
0.73
Q
0.41
0.70
0.15
DI
0.50
0.63
PS
0.21
PF

从最简单线性回归模型开始。通常我们会使用价格(P)和产量(Q)数据直接做简单线性回归建模：

$$
\begin{aligned}
P &= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 Q + e_1 && \text{(simple P model)} \\
Q &= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 P + e_2 && \text{(simple Q model)}
\end{aligned}
$$

松露案例：简单线性回归

我们都知道，两个变量的线性回归是不对称的，因此有：

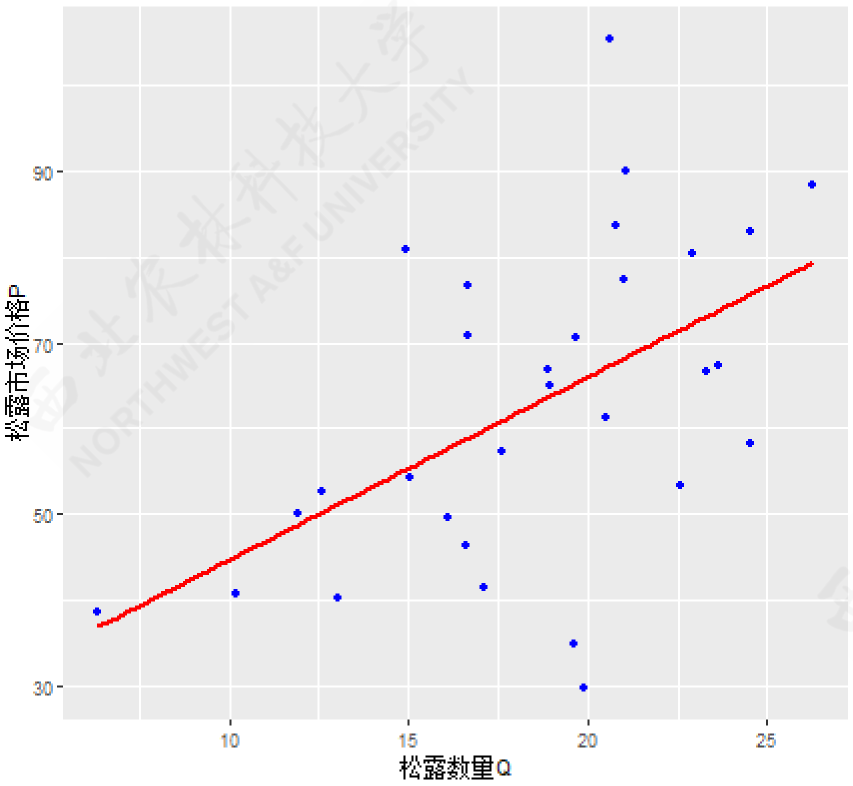
- 简单的价格(P)模型回归结果如下：

$$
\begin{array}{lll}
\widehat{P} = & +23.23 & +2.14Q \\
(\mathrm{t}) & (1.8748) & (3.2831) \\
(\mathrm{se}) & (12.3885) & (0.6518) \\
(\mathrm{fitness}) & R^2 = 0.2780; & \bar{R}^2 = 0.2522 \\
 & F^* = 10.78; & p = 0.0028
\end{array}
$$

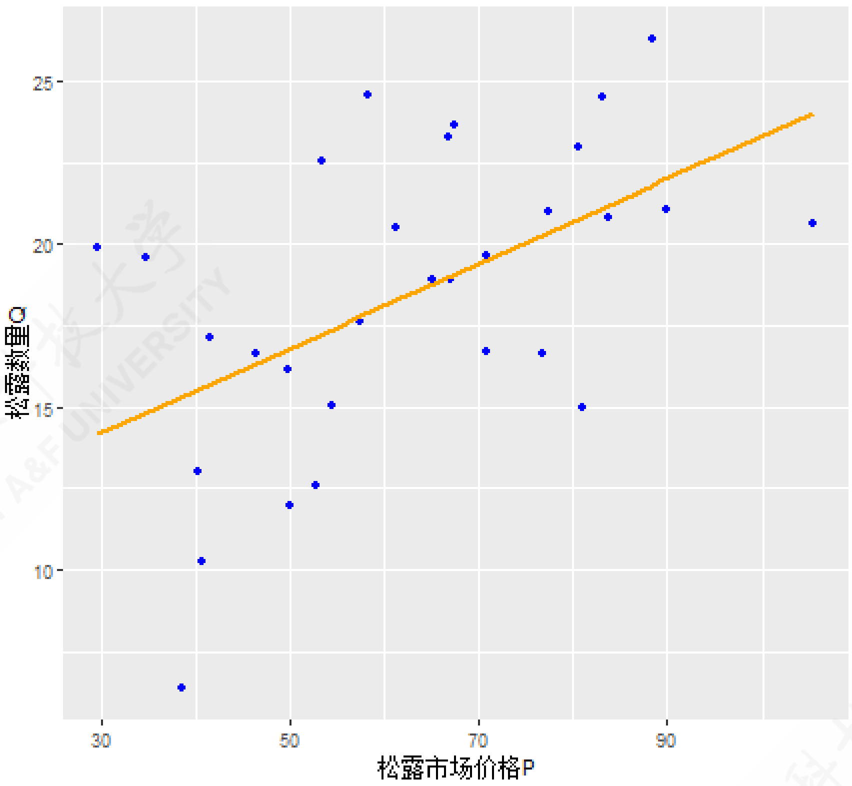
- 简单的数量(Q)模型回归结果如下：

$$
\begin{array}{lll}
\widehat{Q} = & +10.31 & +0.13P \\
(\mathrm{t}) & (3.9866) & (3.2831) \\
(\mathrm{se}) & (2.5863) & (0.0396) \\
(\mathrm{fitness}) & R^2 = 0.2780; & \bar{R}^2 = 0.2522 \\
 & F^* = 10.78; & p = 0.0028
\end{array}
$$

松露案例：样本回归线



松露市场价格P
90
70
50
30
10
15
20
25
松露数量Q



松露数量Q
25
20
15
10
30
50
70
90
松露市场价格P

当然，我们也可以继续使用更多的变量作为自变量X，构建如下的回归模型：

$$
\begin{aligned}
P &= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 Q + \hat{\beta}_3 DI + \hat{\beta}_2 PS + e_1 && \text{(added P model)} \\
Q &= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 P + \hat{\beta}_2 PF + e_2 && \text{(added Q model)}
\end{aligned}
$$

- 我们努力地想让这些方程更加“合理”、“可信”。

松露案例：多元线性回归

- 增加变量的价格(P)模型回归结果如下：

$$
\begin{array}{llllll}
\widehat{P} = & -13.62 & +0.15Q & +12.36DI & +1.36PS \\
\text{(t)} & (-1.4987) & (0.3032) & (6.7701) & (2.2909) \\
\text{(se)} & (9.0872) & (0.4988) & (1.8254) & (0.5940) \\
\text{(fitness)} & R^2 = 0.8013; \bar{R}^2 = 0.7784 \\
 & F^* = 34.95;\ p = 0.0000
\end{array}
$$

- 增加变量的数量(Q)模型回归结果如下：

$$
\begin{array}{lllll}
\widehat{Q} = & +20.03 & +0.34P & -1.00PF \\
\text{(t)} & (16.3938) & (15.5436) & (-13.1028) \\
\text{(se)} & (1.2220) & (0.0217) & (0.0764) \\
\text{(fitness)} & R^2 = 0.9019; \bar{R}^2 = 0.8946 \\
 & F^* = 124.08; p = 0.0000
\end{array}
$$

18.2 联立方程模型的表达和定义

结构化SEM (I)：代数表达式A

结构化的SEM(Structural SEM system)：是直接描述经济结构或行为的方程组。

结构化的SEM代数表达式（形式A）可以表达为:

$$
\begin{cases}
Y_{t1} = \quad + \gamma_{21}Y_{t2} + \cdots + \gamma_{m1}Y_{tm} + \beta_{11}X_{1t} + \beta_{21}X_{t2} + \cdots + \beta_{k1}X_{tk} + \varepsilon_{t1} \\
Y_{t2} = \gamma_{12}Y_{t1} + \quad \cdots + \gamma_{m2}Y_{tm} + \beta_{12}X_{t1} + \beta_{22}X_{t2} + \cdots + \beta_{k2}X_{tk} + \varepsilon_{t2} \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
Y_{tm} = \gamma_{1m}Y_{t1} + \gamma_{2m}Y_{t2} + \cdots \quad + \beta_{1m}X_{t1} + \beta_{2m}X_{t2} + \cdots + \beta_{km}X_{tk} + \varepsilon_{tm}
\end{cases}
$$

- 内生变量或联合应变量(m个): $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$
- 前定变量(K个): $X_1, X_2, \cdots, X_k$
- 结构随机干扰项(m个): $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$

- 内生变量系数 γ
- 前定变量系数 β
- 观测个数 $t = 1, 2, \cdots, T$

结构化SEM (I)：结构系数

$$
\begin{cases}
Y_{t1} = \quad\quad + \gamma_{21}Y_{t2} + \cdots + \gamma_{m1}Y_{tm} & +\beta_{11}X_{1t} + \beta_{21}X_{t2} + \cdots + \beta_{k1}X_{tk} & +\varepsilon_{t1} \\
Y_{t2} = \gamma_{12}Y_{t1} + \quad\quad \cdots + \gamma_{m2}Y_{tm} & +\beta_{12}X_{t1} + \beta_{22}X_{t2} + \cdots + \beta_{k2}X_{tk} & +\varepsilon_{t2} \\
\quad \vdots \quad \vdots \quad\quad \vdots & \quad\quad\quad \vdots & \\
Y_{tm} = \gamma_{1m}Y_{t1} + \gamma_{2m}Y_{t2} + \cdots & +\beta_{1m}X_{t1} + \beta_{2m}X_{t2} + \cdots + \beta_{km}X_{tk} & +\varepsilon_{tm}
\end{cases}
$$

结构系数(Structural coefficients)：是结构化SEM中的参数，它们反映了经济结果或行为的关系。包括：

> - 内生 结构系数: $\gamma_{11}, \gamma_{21}, \cdots, \gamma_{m1}; \cdots; \gamma_{1m}, \gamma_{2m}, \cdots, \gamma_{mm}$
> - 外生结构系数: $\beta_{11}, \beta_{21}, \cdots, \beta_{m1}; \cdots; \beta_{1m}, \beta_{2m}, \cdots, \beta_{mm};$

结构化SEM (I)：结构变量

$$
\begin{cases}
Y_{t1} = \quad\quad + \gamma_{21}Y_{t2} + \cdots + \gamma_{m1}Y_{tm} & +\beta_{11}X_{1t} + \beta_{21}X_{t2} + \cdots + \beta_{k1}X_{tk} & +\varepsilon_{t1} \\
Y_{t2} = \gamma_{12}Y_{t1} + \quad\quad \cdots + \gamma_{m2}Y_{tm} & +\beta_{12}X_{t1} + \beta_{22}X_{t2} + \cdots + \beta_{k2}X_{tk} & +\varepsilon_{t2} \\
\quad \vdots \quad \vdots \quad\quad \vdots & \quad\quad \vdots & \\
Y_{tm} = \gamma_{1m}Y_{t1} + \gamma_{2m}Y_{t2} + \cdots & +\beta_{1m}X_{t1} + \beta_{2m}X_{t2} + \cdots + \beta_{km}X_{tk} & +\varepsilon_{tm}
\end{cases}
$$

- **内生变量**(Endogenous variables)： 由SEM决定的那些变量。
- **前定变量**(Predetermined variables)：那些不由SEM本身在当期（**current time period**）决定的变量。

> **内生变量**，例如: $Y_{t1}; Y_{t2}; \cdots; Y_{tm}$

> **前定变量**，例如: $X_{..}$

- **结构随机干扰项**(Structural disturbance)：也即结构化SEM系统中的随机干扰项。例如： $\varepsilon_{t1}; \varepsilon_{t2}; \cdots; \varepsilon_{tm}$

前定变量(Predetermined variables)：那些不由SEM本身在当期（**current time period**）决定的变量。具体又包括：

- **外生变量**(exogenous variables)
- **滞后内生变量**(lagged endogenous variables)

$$
\begin{cases}
Y_{t1} = \quad + \gamma_{21}Y_{t2} + \cdots + \gamma_{m1}Y_{tm} + \beta_{11}X_{1t} + \beta_{21}X_{t2} + \cdots + \beta_{k1}X_{tk} + \varepsilon_{t1} \\
Y_{t2} = \gamma_{12}Y_{t1} + \quad \cdots + \gamma_{m2}Y_{tm} + \beta_{12}X_{t1} + \beta_{22}X_{t2} + \cdots + \beta_{k2}X_{tk} + \varepsilon_{t2} \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
Y_{tm} = \gamma_{1m}Y_{t1} + \gamma_{2m}Y_{t2} + \cdots \quad + \beta_{1m}X_{t1} + \beta_{2m}X_{t2} + \cdots + \beta_{km}X_{tk} + \varepsilon_{tm}
\end{cases}
$$

结构化SEM (I)：前定变量

- 外生变量: 那些不被SEM本身决定的变量，它们既不会在**当期**（current period)被SEM决定，也不是在**滞后期**(lagged period)被SEM说决定。
- 滞后内生变量(Lagged en]dogenous variables)：是当期内生变量的滞后变量。

当期外生变量:

- $X_{t1}, X_{t2}, \cdots, X_{tk}$.

滞后外生变量:

- 变量 X_{t1}的滞后期变量:
  $X_{t-1,1}; X_{t-2,1}; \cdots; X_{t-(T-1),1}$
- 变量 X_{tk}的滞后期变量:
  $X_{t-1,k}; X_{t-2,k}; \cdots; X_{t-(T-1),k}$
- $\cdots$

滞后内生变量:

- 变量 Y_{t1}的滞后变量:
  $Y_{t-1,1}; Y_{t-2,1}; \cdots, Y_{t-(T-1),1}$
- 变量 Y_{tm}的滞后变量：
  $Y_{t-1,m}; Y_{t-2,m}; \cdots; Y_{t-(T-1),m}$
- $\cdots$

结构化SEM (I)：前定系数

$$
\begin{cases}
Y_{t1} = \quad + \gamma_{21}Y_{t2} + \cdots + \gamma_{m1}Y_{tm} + \beta_{11}X_{1t} + \beta_{21}X_{t2} + \cdots + \beta_{k1}X_{tk} + \varepsilon_{t1} \\
Y_{t2} = \gamma_{12}Y_{t1} + \quad \cdots + \gamma_{m2}Y_{tm} + \beta_{12}X_{t1} + \beta_{22}X_{t2} + \cdots + \beta_{k2}X_{tk} + \varepsilon_{t2} \\
\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
Y_{tm} = \gamma_{1m}Y_{t1} + \gamma_{2m}Y_{t2} + \cdots \quad + \beta_{1m}X_{t1} + \beta_{2m}X_{t2} + \cdots + \beta_{km}X_{tk} + \varepsilon_{tm}
\end{cases}
$$

前定系数(Predetermined coefficients): 是指前定变量前的系数.

> 例如:
>
> - 所有的 $\beta_{..}$

通过简单的变形，结构化SEM的代数表达式A，可以转换为如下的代数表达式B：

$$
A:\begin{cases}
Y_{t1} = \quad + \gamma_{21} Y_{t2} + \cdots + \gamma_{m1} Y_{tm} + \beta_{11} X_{1t} + \beta_{21} X_{t2} + \cdots + \beta_{k1} X_{tk} + \varepsilon_{t1} \\
Y_{t2} = \gamma_{12} Y_{t1} + \quad \cdots + \gamma_{m2} Y_{tm} + \beta_{12} X_{t1} + \beta_{22} X_{t2} + \cdots + \beta_{k2} X_{tk} + \varepsilon_{t2} \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
Y_{tm} = \gamma_{1m} Y_{t1} + \gamma_{2m} Y_{t2} + \cdots \quad + \beta_{1m} X_{t1} + \beta_{2m} X_{t2} + \cdots + \beta_{km} X_{tk} + \varepsilon_{tm}
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow B:\begin{cases}
\gamma_{11} Y_{t1} + \gamma_{21} Y_{t2} + \cdots + \gamma_{m-1,1} Y_{t,m-1} + \gamma_{m1} Y_{tm} + \beta_{11} X_{t1} + \beta_{21} X_{t2} + \cdots + \beta_{k1} X_{tk} = \varepsilon_{t1} \\
\gamma_{12} Y_{t1} + \gamma_{22} Y_{t2} + \cdots + \gamma_{m-1,2} Y_{t,m-1} + \gamma_{m2} Y_{tm} + \beta_{12} X_{t1} + \beta_{22} X_{t2} + \cdots + \beta_{k2} X_{tk} = \varepsilon_{t2} \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\gamma_{1m} Y_{t1} + \gamma_{2m} Y_{t2} + \cdots + \gamma_{m-1,m} Y_{t,m-1} + \gamma_{mm} Y_{tm} + \beta_{1m} X_{t1} + \beta_{2m} X_{t2} + \cdots + \beta_{km} X_{tk} = \varepsilon_{tm}
\end{cases}
$$

采用矩阵语言(Matrix language)，前述结构化SEM还可以进一步表达为 **矩阵形式** (matrix expression):

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_m \end{bmatrix}_t
\begin{bmatrix}
\gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1m} \\
\gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2m} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mm}
\end{bmatrix} + \\
&\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_m \end{bmatrix}_t
\begin{bmatrix}
\beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m} \\
\beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2m} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\beta_{k1} & \beta_{k2} & \cdots & \beta_{km}
\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_m \end{bmatrix}_t
\end{aligned}
$$

结构化SEM (2)：矩阵表达式

简单起见，我们可以将结构化SEM的**矩阵形式**一般化记为：

$$
\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{y}_t'\boldsymbol{\Gamma} & +\boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{B} & =\boldsymbol{\varepsilon}_t' \\
(1*m)(m*m) & (1*k)(k*m) & (1*m)
\end{array}
$$

其中：

- 粗体大写英文字母和希腊字母表示 **矩阵**(matrix)
- 粗体小写英文字母和希腊字母表示**列向量**(column vector)

对于 内生系数矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}$:

- 为了确保每一个方程起码有1个 **因变量**，则矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的每1列起码要有1个元素含有常数1
- 如果矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}$ 是一个**上三角矩阵**(upper triangular matrix)，那么SEM将会是一个**递归模型**(recursive model)系统。
- 同时，为了保证SEM的参数估计解存在，矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}$ 必须是**非奇异矩阵**(nonsingular matrix).

$$
\left\{\begin{aligned}
y_{1t} &= & f_1\left(\mathbf{x}_t\right)+\varepsilon_{t1} \\
y_{2t} &= & f_2\left(y_{t1}, \mathbf{x}_t\right)+\varepsilon_{t2} \\
&\vdots & \vdots \\
y_{mt} &= & f_m\left(y_{t1}, y_{t2}, \ldots, \mathbf{x}_t\right)+\varepsilon_{mt}
\end{aligned}\right.
$$

外生系数矩阵 $\boldsymbol{B}$:

$$
\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \cdots & \beta_{km} \end{bmatrix}
$$

> 需要注意的是：SEM系统是有截距的，因此我们要记住外生系数矩阵的**第1列**都是截距系数。

约简化SEM (I):代数表达式

约简方程(Reduced equations): 将1个**内生变量**(endogenous variable)，表达成只包含**前定变量**(predetermined variables)和**随机干扰项**的方程。

$$
\begin{cases}
Y_{t1} = +\pi_{11}X_{t1} + \pi_{21}X_{t2} + \cdots + \pi_{k1}X_{tk} + v_{t1} \\
Y_{t2} = +\pi_{12}X_{t1} + \pi_{22}X_{t2} + \cdots + \pi_{k2}X_{tk} + v_{t2} \\
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
Y_{tm} = +\pi_{1m}X_{t1} + \pi_{2m}X_{t2} + \cdots + \pi_{km}X_{tk} + v_{tm}
\end{cases}
$$

上面，我们把结构化方程里的每1个内生变量，都表达为了约简方程，这样的方程系统被称为**约简化SEM**系统。

- 约简系数(Reduced coefficients): 也即约简化SEM系统里的所有参数.
- 约简随机干扰项(Reduced disturbance): 也即约简化SEM系统里随机干扰项

$$
\begin{cases}
Y_{t1} = +\pi_{11}X_{t1} + \pi_{21}X_{t2} + \cdots + \pi_{k1}X_{tk} + v_{t1} \\
Y_{t2} = +\pi_{12}X_{t1} + \pi_{22}X_{t2} + \cdots + \pi_{k2}X_{tk} + v_{t2} \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
Y_{tm} = +\pi_{1m}X_{t1} + \pi_{2m}X_{t2} + \cdots + \pi_{km}X_{tk} + v_{tm}
\end{cases}
$$

约简系数:

- $\pi_{11}, \pi_{21}, \cdots, \pi_{k1}$
- $\pi_{1m}, \pi_{2m}, \cdots, \pi_{km}$.

约简随机干扰项

- $v_1, v_2, \cdots, v_m$。

约简化SEM (2):矩阵表达式

$$
\begin{cases}
Y_{t1} = +\pi_{11}X_{t1} + \pi_{21}X_{t2} + \cdots + \pi_{k1}X_{tk} + v_{t1} \\
Y_{t2} = +\pi_{12}X_{t1} + \pi_{22}X_{t2} + \cdots + \pi_{k2}X_{tk} + v_{t2} \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
Y_{tm} = +\pi_{1m}X_{t1} + \pi_{2m}X_{t2} + \cdots + \pi_{km}X_{tk} + v_{tm}
\end{cases}
$$

对于上述代数形式的约简**SEM**，我们也可以表达为如下矩阵形式的约简**SEM**:

$$
\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_m \end{bmatrix}_t =
$$

$$
\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_m \end{bmatrix}_t
\begin{bmatrix}
\pi_{11} & \pi_{12} & \cdots & \pi_{1m} \\
\pi_{21} & \pi_{22} & \cdots & \pi_{2m} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\pi_{m1} & \pi_{m2} & \cdots & \pi_{mm}
\end{bmatrix}
+ \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix}_t
$$

约简化SEM (2):矩阵表达式

简单起见，我们可以把矩阵形式的约简SEM，进一步记为：

$$
\begin{array}{lll}
\boldsymbol{y}_t' & =\boldsymbol{x}_t'\mathbf{\Pi} & +\boldsymbol{v}_t' \\
(1*m) & \quad (1*k)(k*m) & \quad (1*m)
\end{array}
$$

- 约简系数矩阵记为:

$$
\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \cdots & \pi_{1m} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \cdots & \pi_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \pi_{m1} & \pi_{m2} & \cdots & \pi_{mm} \end{bmatrix}
$$

- 约简随机干扰项记为:

$$
\boldsymbol{v}_t' = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix}_t
$$

显然，我们可以从**结构化SEM**推导得到**约简化SEM**：

$$
\begin{cases}
Y_{t1} = \quad + \gamma_{21}Y_{t2} + \cdots + \gamma_{m1}Y_{tm} + \beta_{11}X_{1t} + \beta_{21}X_{t2} + \cdots + \beta_{k1}X_{tk} + \varepsilon_{t1} \\
Y_{t2} = \gamma_{12}Y_{t1} + \quad \cdots + \gamma_{m2}Y_{tm} + \beta_{12}X_{t1} + \beta_{22}X_{t2} + \cdots + \beta_{k2}X_{tk} + \varepsilon_{t2} \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
Y_{tm} = \gamma_{1m}Y_{t1} + \gamma_{2m}Y_{t2} + \cdots \quad + \beta_{1m}X_{t1} + \beta_{2m}X_{t2} + \cdots + \beta_{km}X_{tk} + \varepsilon_{tm}
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow
\begin{cases}
Y_{t1} = + \pi_{11}X_{t1} + \pi_{21}X_{t2} + \cdots + \pi_{k1}X_{tk} + v_{t1} \\
Y_{t2} = + \pi_{12}X_{t1} + \pi_{22}X_{t2} + \cdots + \pi_{k2}X_{tk} + v_{t2} \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
Y_{tm} = + \pi_{1m}X_{t1} + \pi_{2m}X_{t2} + \cdots + \pi_{km}X_{tk} + v_{tm}
\end{cases}
$$

对于结构化SEM的矩阵形式：

$$\boldsymbol{y}_t'\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\varepsilon}_t'$$

以及约简化SEM的矩阵形式：

$$\boldsymbol{y}_t' = \boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{\Pi} + \boldsymbol{v}_t'$$

- 不难发现二者系数矩阵存在如下关系：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Pi} &= -\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Gamma}^{-1} \\ \boldsymbol{v}_t' &= \boldsymbol{\varepsilon}_t'\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\end{aligned}$$

- 其中：

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1m} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mm} \end{bmatrix}$$

结构化SEM与约简化SEM的关系：矩关系(Moments)

下面，我们来关注一下二者**随机干扰项**的一阶矩和二阶矩，以及它们之间的关系：

- 首先，我们假定**结构随机干扰项**满足如下条件：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[\varepsilon_{\mathbf{t}}|\mathbf{x_t}] &= \mathbf{0} \\
\mathbf{E}[\varepsilon_{\mathbf{t}}\varepsilon'_{\mathbf{t}}|\mathbf{x_t}] &= \mathbf{\Sigma} \\
E\left[\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}'_s|\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_s\right] &= \mathbf{0}, \quad \forall t, s
\end{aligned}
$$

- 随后，我们将能够证明**约简随机干扰项**将满足：

$$
\begin{aligned}
E\left[\mathbf{v}_t|\mathbf{x}_t\right] &= \left(\mathbf{\Gamma}^{-1}\right)'\mathbf{0} = \mathbf{0} \\
E\left[\mathbf{v}_t\mathbf{v}'_t|\mathbf{x}_t\right] &= \left(\mathbf{\Gamma}^{-1}\right)'\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Gamma}^{-1} = \mathbf{\Omega} \\
\text{where: } \mathbf{\Sigma} &= \mathbf{\Gamma}'\mathbf{\Omega}\mathbf{\Gamma}
\end{aligned}
$$

结构化SEM与约简化SEM的关系：给定样本数据*

在给定的样本数据下，我们可以按行来得到数据矩阵(假设总共有 T个样本观测数):

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{X} & \mathbf{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1' & \mathbf{x}_1' & \boldsymbol{\varepsilon}_1' \\ \mathbf{y}_2' & \mathbf{x}_2' & \boldsymbol{\varepsilon}_2' \\ \vdots & & \\ \mathbf{y}_T' & \mathbf{x}_T' & \boldsymbol{\varepsilon}_T' \end{bmatrix}
$$

那么，**结构化SEM**可以表达为：

$$
\mathbf{Y\Gamma} + \mathbf{XB} = \mathbf{E}
$$

结构随机干扰项的1阶矩和2阶矩可以表达为:

$$
\begin{aligned}
E[\mathbf{E}|\mathbf{X}] &= \mathbf{0} \\
E\left[(1/T)\mathbf{E}'\mathbf{E}|\mathbf{X}\right] &= \boldsymbol{\Sigma}
\end{aligned}
$$

结构化SEM与约简化SEM的关系：给定样本数据*

假定：

$$
\begin{aligned}
&(1/T)\mathbf{X}'\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Q} \text{ (a finite positive definite matrix)} \\
&(1/T)\mathbf{X}'\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

那么约简化**SEM**可以表达为：

$$
\mathbf{Y} = \mathbf{X\Pi} + \mathbf{V} \qquad \leftarrow \mathbf{V} = \mathbf{E\Gamma}^{-1}
$$

此外，我们还可以得到如下一些有用的样本统计量：

$$
\frac{1}{T}\begin{bmatrix} \mathbf{Y}' \\ \mathbf{X}' \\ \mathbf{V}' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{X} & \mathbf{V} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \mathbf{I}'\mathbf{QI} + \boldsymbol{\Omega} & \mathbf{II}'\mathbf{Q} & \boldsymbol{\Omega} \\ \mathbf{QI} & \mathbf{Q} & \mathbf{0}' \\ \boldsymbol{\Omega} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix}
$$

案例：凯恩斯收入决定模型（2方程模型）

以凯恩斯收入决定的联立方程为例（结构模型）：

$$
\begin{cases}
C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \varepsilon_t & \text{(消费函数)} \\
Y_t = C_t + I_t & \text{(收入恒等式)}
\end{cases}
$$

上述结构模型中：

内生变量有2个： $c_t; Y_t$

前定变量有1个，其中：

- **外生变量有1个：** I_t
- **滞后内生变量有0个**

> **思考提问：** 怎样把这个结构模型转变为约简模型？（考点）

案例I：凯恩斯收入决定模型（2方程模型）

上述结构模型，可以变换为为如下约简方程：

$$\begin{cases} Y_t = \dfrac{\beta_0}{1-\beta_1} + \dfrac{1}{1-\beta_1} I_t + \dfrac{\varepsilon_t}{1-\beta_1} & \text{(变换方程1)} \\ C_t = \dfrac{\beta_0}{1-\beta_1} + \dfrac{\beta_1}{1-\beta_1} I_t + \dfrac{\varepsilon_t}{1-\beta_1} & \text{(变换方程2)} \end{cases}$$

进一步可记为如下约简方程形式：

$$\begin{cases} Y_t = \pi_{11} + \pi_{21} I_t + v_{t1} & \text{(约简方程1)} \\ C_t = \pi_{12} + \pi_{22} I_t + v_{t2} & \text{(约简方程2)} \end{cases}$$

易知：**结构系数共有2个** $\beta_0; \beta_1$；**而约简系数共有4个** $\pi_{11}, \pi_{21}; \pi_{12}, \pi_{22}$（实际上只有3个！）

其中约简系数和结构系数的关系为：

$$
\begin{cases}
\pi_{11} = \dfrac{\beta_0}{1-\beta_1}; & \pi_{12} = \dfrac{1}{1-\beta_1} \\
\pi_{21} = \dfrac{\beta_0}{1-\beta_1}; & \pi_{22} = \dfrac{\beta_1}{1-\beta_1} \\
v_{t1} = \dfrac{\varepsilon_t}{1-\beta_1}; & v_{t2} = \dfrac{\varepsilon_t}{1-\beta_1}
\end{cases}
$$

案例2：小型宏观经济模型（3方程联立模型）

考虑如下的**小型宏观经济模型**（结构方程）：

$$
\begin{cases}
\text{consumption: } c_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_t + \alpha_2 c_{t-1} + \varepsilon_{t,c} \\
\text{investment: } i_t = \beta_0 + \beta_1 r_t + \beta_2 (y_t - y_{t-1}) + \varepsilon_{t,j} \\
\text{demand: } y_t = c_t + i_t + g_t
\end{cases}
$$

其中： c_t表示消费； y_t表示产出； i_t表示投资； r_t表示利率； g_t表示政府支出。

内生变量有3个： $c_t; i_t; Y_t$

前定变量有4个，其中：

- **外生变量有2个**： $r_t; g_t$
- **滞后内生变量有2个**： $y_{t-1}; c_{t-1}$

结构系数共有6个： $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2; \beta_0, \beta_1, \beta_2;$

上述结构方程可以变换为如下约简方程：（HOW TO??）

$$
\begin{cases}
c_t = [\alpha_0(1-\beta_2) + \beta_0\alpha_1 + \alpha_1\beta_1 r_t + \alpha_1 g_t + \alpha_2(1-\beta_2)c_{t-1} - \alpha_1\beta_2 y_{t-1} \\
\quad +(1-\beta_2)\varepsilon_{t,c} + \alpha_1\varepsilon_{t,j}]/\Lambda \\
i_t = [\alpha_0\beta_2 + \beta_0(1-\alpha_1) + \beta_1(1-\alpha_1)r_t + \beta_2 g_t + \alpha_2\beta_2 c_{t-1} - \beta_2(1-\alpha_1)y_{t-1} \\
\quad +\beta_2\varepsilon_{t,c} + (1-\alpha_1)\varepsilon_{t,j}]/\Lambda \\
y_t = [\alpha_0 + \beta_0 + \beta_1 r_t + g_t + \alpha_2 c_{t-1} - \beta_2 y_{t-1} + \varepsilon_{t,c} + \varepsilon_{t,j}]/\Lambda
\end{cases}
$$

其中：$\Lambda = 1 - \alpha_1 - \beta_2$。或者将上述约简方程记为：

$$
\begin{cases}
c_t = \pi_{11} + \pi_{21} r_t + \pi_{31} g_t + \pi_{41} c_{t-1} + \pi_{51} y_{t-1} + v_{t1} \\
i_t = \pi_{12} + \pi_{22} r_t + \pi_{32} g_t + \pi_{42} c_{t-1} + \pi_{52} y_{t-1} + v_{t2} \\
i_t = \pi_{13} + \pi_{23} r_t + \pi_{33} g_t + \pi_{43} c_{t-1} + \pi_{53} y_{t-1} + v_{t3}
\end{cases}
$$

易知约简系数共有15个！！

思考：

- 结构方程和约简方程有什么用？
- （结构方程中的）消费函数，利率 i_t不会对消费 c_t产生影响？
  - 从约简方程中则可以很快得到答案 $\frac{\Delta c_t}{\Delta r_t}=\frac{\alpha_1\beta_1}{\Lambda}$
- （结构方程中的）消费函数，收入 y_t对消费 c_t产生影响，具体是来自什么原因？
  - 进行中介变换也容易得到答案 $\frac{\Delta c_t}{\Delta y_t}=\frac{\Delta c_t/\Delta r_t}{\Delta y_t/\Delta r_t}=\frac{\alpha_1\beta_1/\Lambda}{\beta_1/\Lambda}=\alpha_1$

案例2：小型宏观经济模型（3方程联立模型）

因为约简方程的矩阵形式可以表达为：

$$\boldsymbol{y}_t' = -\boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{\Pi} + \boldsymbol{v}_t' = -\boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Gamma}^{-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t'\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$$

容易得到如下相关矩阵：

$$\begin{aligned}\mathbf{y}' &= \begin{bmatrix} c & i & y \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}' &= \begin{bmatrix} 1 & r & g & c_{-1} & y_{-1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -\alpha_1 & -\beta_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\alpha_0 & -\beta_0 & 0 \\ 0 & -\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}^{-1} = \frac{1}{\Lambda}\begin{bmatrix} 1-\beta_2 & \beta_2 & 1 \\ \alpha_1 & 1-\alpha_1 & 1 \\ \alpha_1 & \beta_2 & 1 \end{bmatrix}$$

根据约简方程的矩阵表达式：

$$\boldsymbol{y}_t' = -\boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{\Pi} + \boldsymbol{v}_t' = -\boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Gamma}^{-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t'\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$$

根据前述计算结果，则可以得到约简系数与结构系数的关系为：

$$\boldsymbol{\Pi}' = \frac{1}{\Lambda}\begin{bmatrix} \alpha_0(1-\beta_2)+\beta_0\alpha_1 & \alpha_1\beta_1 & \alpha_1 & \alpha_2(1-\beta_2) & -\beta_2\alpha_1 \\ \alpha_0\beta_2+\beta_0(1-\alpha_1) & \beta_1(1-\alpha_1) & \beta_2 & \alpha_2\beta_2 & -\beta_2(1-\alpha_1) \\ \alpha_0+\beta_0 & \beta_1 & 1 & \alpha_2 & -\beta_2 \end{bmatrix}$$

其中： $\Lambda = 1-\alpha_1-\beta_2$。

> **难点**：矩阵的逆的计算。
>
> 掌握了就是快刀一把，手起刀落，麻利干脆！

附录：逆矩阵求解方法和步骤

A.用初等行运算（高斯一若尔当）来求逆矩阵：

1. 构造**增广矩阵**
2. 对增广矩阵进行多次变换，直至达到目标。

B.用余子式、代数余子式和伴随来求逆矩阵

1. 计算**余子式矩阵**和**代数余子式矩阵**
2. 计算**伴随矩阵**：就是代数余子式矩阵的**转置**
3. 计算原矩阵**行列式**：原矩阵**顶行**的每个元素乘以其对应"代数余子式矩阵"**顶行**元素。
4. 计算得出逆矩阵：**1/行列式 X 伴随矩阵**

18.3 OLS估计方法还合适么？

内生变量问题

以凯恩斯收入决定模型为例，我们将可以证明 Y_t 和 u_t 将会出现相关，从而违背CLRM假设。

$$\begin{cases} C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + u_t & (0 < \beta_1 < 1) \quad \text{(消费函数)} \\ Y_t = C_t + I_t & \text{(收入恒等式)} \end{cases}$$

将上述结构方程进行变换，得到：

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + I_t + u_t$$

$$Y_t = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} + \frac{1}{1-\beta_1} I_t + \frac{1}{1-\beta_1} u_t \qquad \text{(式1：约简方程)}$$

$$E(Y_t) = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} + \frac{1}{1-\beta_1} I_t \qquad \text{(式2：两边取期望)}$$

进一步地：

$$Y_t - E(Y_t) = \frac{u_t}{1-\beta_1} \qquad \text{(式1 - 式2)}$$

$$u_t - E(u_t) = u_t \qquad \text{(式3：期望等于0)}$$

$$cov(Y_t, u_t) = E([Y_t - E(Y_t)][u_t - E(u_t)]) \qquad \text{(式4：协方差定义式)}$$

$$= \frac{E(u_t^2)}{1-\beta_1} \qquad \text{(式5：方差定义式)}$$

$$= \frac{\sigma^2}{1-\beta_1} \neq 0 \qquad \text{(式6：方差不为0)}$$

因此，凯恩斯模型的需求方程，将会不满足CLRM假设中 Y_t 与 u_t 不相关的假设。从而使用OLS方法对需求方程不能得到**最优线性无偏估计量**（BLUE）。

系数的OLS估计量是有偏的

下面将进一步证明，使用OLS方法估计 β_1 是有偏的，也即 $E(\hat{\beta}_1) \neq \beta_1$。证明过程如下：

$$\begin{cases} C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + u_t & (0 < \beta_1 < 1) \quad \text{(消费函数)} \\ Y_t = C_t + I_t & \quad \text{(收入恒等式)} \end{cases}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum c_t y_t}{\sum y_t^2} = \frac{\sum C_t y_t}{\sum y_t^2} = \frac{\sum [(\beta_0 + \beta_1 Y_t + u_t) y_t]}{\sum y_t^2} = \beta_1 + \frac{\sum u_t y_t}{\sum y_t^2} \qquad \text{(式1)}$$

对式1两边取期望，因此有：

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1 + E\left(\frac{\sum u_t y_t}{\sum y_t^2}\right)$$

问题是：$E\left(\frac{\sum u_t y_t}{\sum y_t^2}\right)$ 是否等于0？我们可以证明它将不等于0（证明过程见后）。

证明附录I

$$
\begin{aligned}
\frac{\sum c_t y_t}{\sum y_t^2} &= \frac{\sum (C_t-\bar{C})(Y_t-\bar{Y})}{\sum y_t^2} = \frac{\sum (C_t-\bar{C})y_t}{\sum y_t^2} \\
&= \frac{\sum C_t y_t - \sum \bar{C} y_t}{\sum y_t^2} = \frac{\sum C_t y_t - \sum \bar{C}(Y_t-\bar{Y})}{\sum y_t^2} \\
&= \frac{\sum C_t y_t - \bar{C}\sum Y_t - \sum \bar{C}\bar{Y}}{\sum y_t^2} = \frac{\sum C_t y_t - \bar{C}\sum Y_t - n\bar{C}\bar{Y}}{\sum y_t^2} = \frac{\sum C_t y_t}{\sum y_t^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum\left(\beta_0+\beta_1 Y_t+u_t\right) y_t}{\sum y_t^2} = \frac{\sum \beta_0 y_t + \sum \beta_1 Y_t y_t + \sum u_t y_t}{\sum y_t^2} \\
&= \frac{\beta_1 \sum\left(y_t+\bar{Y}\right) y_t + \sum u_t y_t}{\sum y_t^2} = \beta_1 + \frac{\sum y_t u_t}{\sum y_t^2}
\end{aligned}
$$

$$
\Leftarrow \sum y_t = 0; \qquad \frac{\sum Y_t y_t}{y_t^2} = 1
$$

证明附录2

依概率取极限：

$$\operatorname{plim}\left(\hat{\beta}_1\right) = \operatorname{plim}(\beta_1) + \operatorname{plim}\left(\frac{\sum y_t u_t}{\sum y_t^2}\right)$$

$$= \operatorname{plim}(\beta_1) + \operatorname{plim}\left(\frac{\sum y_t u_t / n}{\sum y_t^2 / n}\right) = \beta_1 + \frac{\operatorname{plim}(\sum y_t u_t / n)}{\operatorname{plim}(\sum y_t^2 / n)}$$

而我们已经证明过：

$$cov(Y_t, u_t) = E([Y_t - E(Y_t)][u_t - E(u_t)]) = \frac{E(u_t^2)}{1-\beta_1} = \frac{\sigma^2}{1-\beta_1} \neq 0$$

因此， $E\left(\frac{\sum u_t y_t}{\sum y_t^2}\right) \neq 0$得证。

数值模拟：人为控制的总体

$$\begin{aligned} C_t &= \beta_0 + \beta_1 Y_t + u_t \qquad (0 < \beta_1 < 1) \qquad &\text{(消费函数)} \\ Y_t &= C_t + I_t \qquad &\text{(收入恒等式)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_t &= 2 + 0.8 Y_t + u_t \qquad (0 < \beta_1 < 1) \qquad &\text{(消费函数)} \\ Y_t &= C_t + I_t \qquad &\text{(收入恒等式)} \end{aligned}$$

人为控制的总体被设置为：

- $\beta_0 = 2, \beta_1 = 0.8, I_t \leftarrow$ 给定值
- $E(u_t) = 0, var(u_t) = \sigma^2 = 0.04$
- $E(u_t u_{t+j}) = 0, j \neq 0$
- $cov(u_t, I_t) = 0$

给定条件下的模拟数据为：

Y	C	I	u
18.1570	16.1570	2	-0.3686
19.5998	17.5998	2	-0.0800
21.9347	19.7347	2.2	0.1869
21.5514	19.3514	2.2	0.1103
21.8843	19.4843	2.4	-0.0231
22.4265	20.0265	2.4	0.0853
25.4094	22.8094	2.6	0.4819
22.6952	20.0952	2.6	-0.0610

Showing 1 to 8 of 20 entries

Previous 1 2 3 Next

根据前述公式，可以计算得到回归系数：

容易计算出：$\sum u_t y_t$ =3.8000

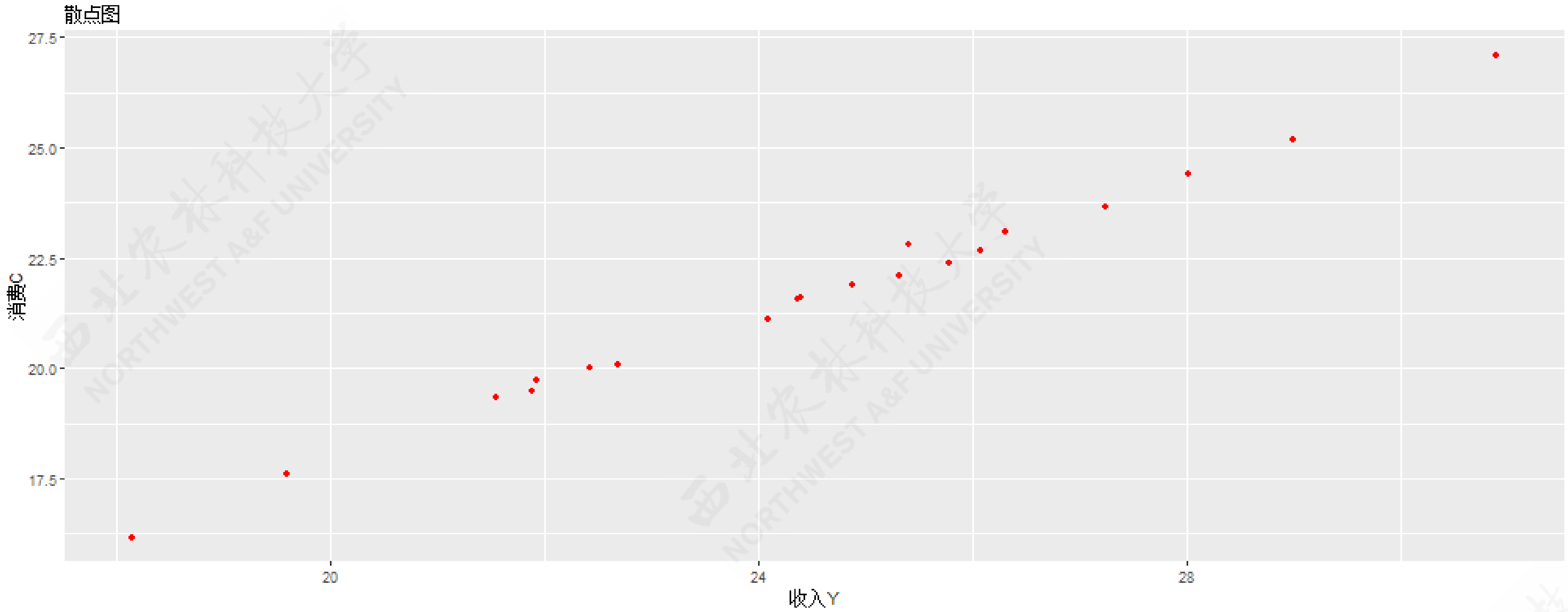
以及: $\sum y_t^2$ =184.0000

以及：$\frac{\sum u_t y_t}{\sum y_t^2}$ =0.0207

因此：$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum u_t y_t}{\sum y_t^2}$ =0.8+0.0207= 0.8207

这也意味着：$\hat{\beta}_1$ 比真值 $\beta_1 = 0.8$ 有0.0207的偏差。

数值模拟：散点图



下面我们利用模拟的数据，进行回归分析，得到原始报告：

```
Call:
lm(formula = mod_monte$mod.C, data = monte)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max 
-0.27001 -0.15855 -0.00126  0.09268  0.46310 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)  1.49402    0.35413   4.219 0.000516 ***
Y            0.82065    0.01434  57.209  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.1946 on 18 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9945,	Adjusted R-squared:  0.9942 
F-statistic:  3273 on 1 and 18 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

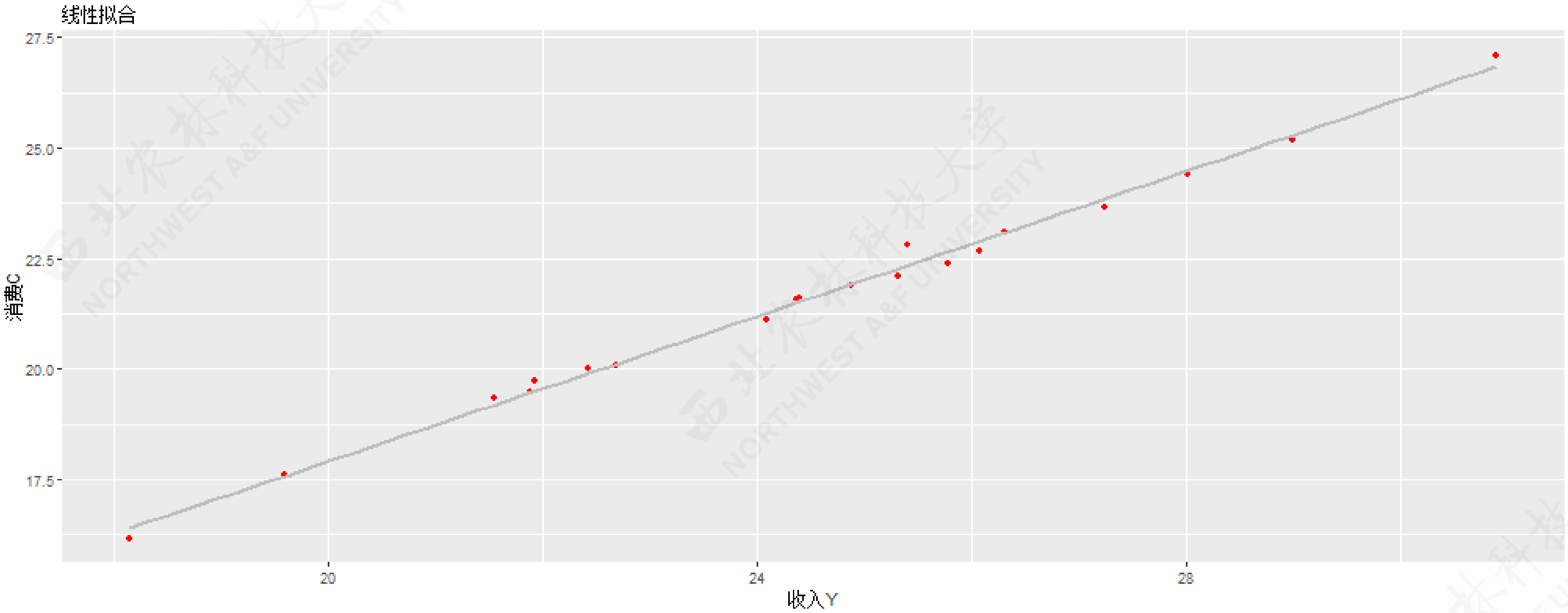
数值模拟：回归报告2

下面我们对原始报告进行整理，得到精简报告：

$$
\begin{array}{llll}
\widehat{C} = & +1.49 & +0.82Y \\
\text{(t)} & (4.2188) & (57.2090) \\
\text{(se)} & (0.3541) & (0.0143) \\
\text{(fitness)} n = 20; & & R^2 = 0.9945; \bar{R}^2 = 0.9942 \\
& F^* = 3272.87; p = 0.0000 & &
\end{array}
$$

这样直接OLS回归的结果也表明是有偏的。

这是样本回归线。



结论和要点

- 与单方程模型对比，联立方程模型涉及多于一个因变量或内生变量，从而有多少个内生变量就需要有多少个方程。
- 联立方程模裂的一个特有性质是，一个方程中的内生变量(即回归子)作为解释变量而出现在方程组的另一个方程之中。
- 这使得内生解释变量变成了随机的，而且常常和它作为解释变量所在方程中的误差项有相关关系。
- 在这种情况下，经典OLS未必适用，因为这样得到的估计量是不一致的。就是说，不管样本容量有多大，这些估计量都不会收敛于其真实总体值
- 凯恩斯模型的蒙特卡洛模拟，说明了当一个回归方程中的回归元与干扰项相关时(这正是联立方程模型的典型情况)，用OLS方法估计其参数会内在地导致偏误。

本章结束