

第 10 章 网络优化模型

网络起源于众多背景,且具有多种形式,像交通网、电路网和通信网,遍及人们的日常生活。网络表示在不同领域有广泛应用,如生产、销售、工程规划设计、设备调查选定地点、资源管理和金融规划。事实上,网络表示为描绘系统内各组成部分的关系提供了可视化的、概念上的辅助,可用于自然科学、社会科学和经济科学等各领域的虚拟研究。

近年来,运筹学中最令人瞩目的发展就是网络优化模型理论与应用,这两方面的进展都非常快。许多算法问题的突破起到了重要的推动作用,如从计算机科学领域获取的许多理念。因此,现在许多算法和软件都可用于并且正被用于解决规模巨大的问题,这类问题在二三十年前基于常规理论是难以完成的。

许多网络优化模型实际上是特殊类型的线性规划问题,如前面章节讨论的运输问题和分配问题,都可归为这类问题,其网络表示如图 9.3 和图 9.5 所示。

3.4 节所介绍的线性规划的例子,即图 3.13 所示的 Distribution Unlimited 公司通过配送网络进行配货的问题,也可看作网络优化问题。这种特殊形式的线性规划问题也称为最小费用流问题,将在 10.6 节介绍。在接下来的部分,将重新回顾该例,然后用网络方法进行求解。

本章将简略介绍网络方法的发展现状,主要介绍 5 种重要的网络问题以及解决这些问题的一些基本思想(不探究数据结构问题,尽管这对于成功解决大规模应用问题至关重要)。前 3 类问题——最短路径问题、最小生成树问题和最大流问题,都具有特殊的结构,在实际应用中会经常遇见。

第四类问题——最小费用流问题,由于结构具有一般性,因而,为其他许多应用提供了一种通用方法。事实上,最小费用流问题不但涵盖了最短路径和最大流问题,也涵盖了第 9 章的运输问题和指派问题。因为最小费用流问题是一种特殊的线性规划问题,所以能通过一种称为网络单纯形法的简化单纯形法有效解决(由于更一般的网络问题求解更加困难,将不再讨论)。

第五类网络问题涉及确定在规定期限内完成项目的最经济的实施方式。介绍了一种称为 CPM 时间—费用平衡方法的技术,描述项目的网络模型和相关活动的时间—费用平衡,然后用边际费用分析或线性规划求解最优项目计划。

10.1 节介绍了一个原型范例,将用于阐述前 3 种问题的解决方法,10.2 节介绍了一些网络基本术语,接下来的 4 节依次处理前四类问题,10.7 节介绍了网络单纯形法,10.8 节介绍了用于项目管理的 CPM 时间—费用平衡方法(网站的第 22 章还运用网络方法处理了众多类型的项目管理问题)。

10.1 原型范例

最近,Seervada 公园只允许限定数量的观光者和背包者徒步旅行,不允许小轿车进入公园,但是公园巡护员可以在一条狭窄弯曲的道路上开电车或吉普车,这条道路(不包括转弯)如图 10.1 所示,其中位置 O 表示公园入口,其他字母代表巡护站所在位置,线上的数字表示道路的长度。

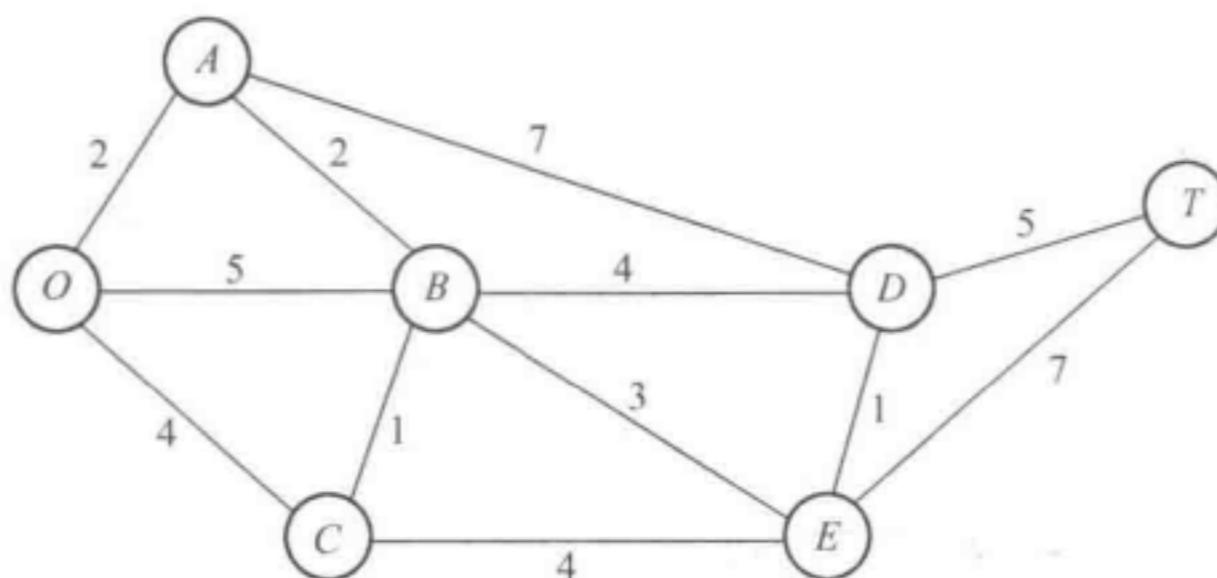


图 10.1 Seervada 公园的道路系统

公园的 T 处有一个优美的景观,在入口和位置 T 之间有少量电车运送游客。

当前公园管理面临 3 个问题。第一个问题是在入口选择哪条路线到达位置 T 的距离最短(这就是将在 10.3 节讨论的最短路径问题的例子)。

第二个问题是需要安装电话线建立起在所有站点间(包括公园入口)的通信联系,由于电话线安装价格较贵,而且在自然条件下电话线容易破裂,需要在路面以下安装,以保证每两点之间都能够有联系。问题是在哪些路段安置电话线可使总的路线最短(这就是我们将在 10.4 节讨论的最小生成树问题的例子)。

第三个问题是由于旅游旺季想要从公园入口坐电车到 T 站的人超出了运送能力,为了尽量避免干扰公园里的生态和野生动物,严格规定了每天每条线路允许行驶的车辆数目(不同的路段有不同的限制,将在 10.5 节详细描述)。因此,在旺季,为了增加每天电车的班次,有些线路将不考虑距离的远近。这个问题属于如何在不违背每条线路的限制条件下,调整不同路段上发车的车次以使公园发车的次数最多(这就是将在 10.5 节详细讨论网络最大流问题)。

10.2 网络术语

对于各种网络及其组成的描述,已经形成了一些相对广泛的术语。尽管我们尽力避免使用这类特殊词汇,但在本章仍然需要引入大量术语。建议读者在本节中注重定义的理解,在以后各节接触到时再进行回顾。为了便于辨识,在每个术语定义时都使用了加粗的黑体字。

一个网络由一系列节点和一系列连接点的线组成,点称为节点(或顶点),如图 10.1 所示的网络中有 7 个圈代表 7 个节点,线称为弧(或链,或边,或支流),如图 10.1 所示的网络中有 12 条弧,表示公园道路系统中的 12 条路段。弧可以用两端的节点来命名,如 AB 是图 10.1 中节点 A 、 B 之间的弧。

网络的弧中可能有某种类型的流通过,例如,在 10.1 节中通过 Seervada 公园路上的电车流,表 10.1 也给出了一些在典型网络中流的例子。如果通过一条弧的流只有一个方向(如单向的街道),这条弧就称为有向弧,方向用代表该弧的线的末端加一个箭头表示。当有向弧用其所连接的两个节点来描述时,起始节点通常写在末端节点的前面,例如,一个有向弧始于节点 A ,终于节点 B ,应当描述成 AB 而不是 BA ,另一种方法是写成 $A \rightarrow B$ 。

表 10.1 典型网络的组件

节点	弧	流
交叉口	道路	车辆
机场	航线	飞机
切换点	线路、频道	信息
泵站	管道	流体
工作中心	加工流程	工作

如果弧中的流允许有两个方向(如两头都能用来抽水的水管),则该弧称为无向弧。为了区分这两种弧,经常用连线来指称无向弧。

尽管无向弧中的流可有两个方向,仍假定流在经过弧时只有一个的方向,而不是在相反方向同时存在两个流(后面的例子要求使用一对方向相反的有向弧)。然而,在确定无向弧中的流时,允许分派一部分反方向的流,但要清楚实际的流是净流(在两个方向上所分配的流之差)。例如,如果一个方向上的流量是10,反方向的流量是4,实际的效果则是6,由原方向的流量10减掉4而得到。即使是对有向弧有时也可用同样的技巧减去之前分配的流。特别是,可以构造一个流经有向弧的“错误”方向的流记录“正确”方向上流的减少量。

只含有向弧的网络称为有向网络,类似地,若网络所有的弧都是无向弧,则称为无向网络。同时含有向弧和无向弧(或所有的弧都是无向弧)的网络,可以根据需要用一对方向相反的有向弧代替每条无向弧,从而转换成有向网络(可根据应用的需要将每对有向弧中的流看作共存的方向相反的流,还是单向的净流)。

如果两个节点之间不是一条弧,那么,一个很自然的问题是它是否由一系列的弧连接。两节点间的路径是指连接两个节点的一组弧的序列。例如,在图10.1中,连接O、T两个节点的一条路径是OB-BD-DT($O \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$)这组弧。若网络中部分或全部弧是有向弧,那么,就要区别有向路径和无向路径。从节点*i*到节点*j*的有向路径是指一组指向节点*j*的有向弧,这样,从节点*i*到节点*j*的路径上的流就是可行的。从节点*i*到节点*j*的无向路径是指一组方向既可指向*j*也可远离*j*的弧(注意:有向路径同样满足无向路径的定义,但反过来不成立)。通常,无向路径的有些弧指向*j*,同时,有些弧远离*j*(如指向*i*)。在10.5节和10.7节中,读者会发现无向路径在分析有向网络时将发挥重要作用。

为了说明上述定义,图10.2给出了一个典型的有向网络(其节点和弧与图3.13相同,即节点A和B表示两个工厂,节点D和E表示两个仓库,节点C表示配送中心,弧表示物流路径)。 $AB-BC-CE(A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E)$ 这组弧是从A至E的一条有向路径,因为沿着这条路径流向E是可行的。 $BC-AC-AD(B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow D)$ 则不是节点B到节点D的有向路径,因为弧AC的方向是远离节点D的(在这条路径中)。然而, $B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow D$ 却是一条由B至D的无向路径,因为 $BC-AC-AD$ 这组弧连接了B和D两个节点(即使弧AC的方向会阻止这条路径中的流)。

作为一个无向路径的例子,假定预先分配给弧 AC_2 单位的从A到C的流,给定该预分配后,给 $B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow D$ 这一无向路径整体分配流量更小的流(如流量为1)是可行的,尽管弧AC的方向会阻碍 $C \rightarrow A$ 的正向流。实际上,分配给弧AC的这一“错误”方向的流量刚好可使其“正确”方向的流量减少1单位。在10.5节和10.7节中,将大量运用该方法为无向路径分配流量,由于无向路径中含有与所分配的流方向相反的弧,其实际效果就是在这些弧的“正确”方向上减去分配的流量。

起点与终点重合的路径称为环。在有向网络中,环既可是有向的,也可是无向的,取决于其所包含的路径是否有向(由于一个有向路径同时也是无向的,因而有向环同时也是无向的,但反之则不然)。例如,在图10.2中, $DE-ED$ 是有向环,而 $AB-BC-AC$ 却不是有向环,因为弧AC与弧AB、BC方向相反。另一方面,由于 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ 是无向路径,故 $AB-BC-AC$ 是无向环。在图10.1所示的无向网络中有许多环,如 $OA-AB-BC-CO$,然而,需要注意的是,路径(一系列不同的

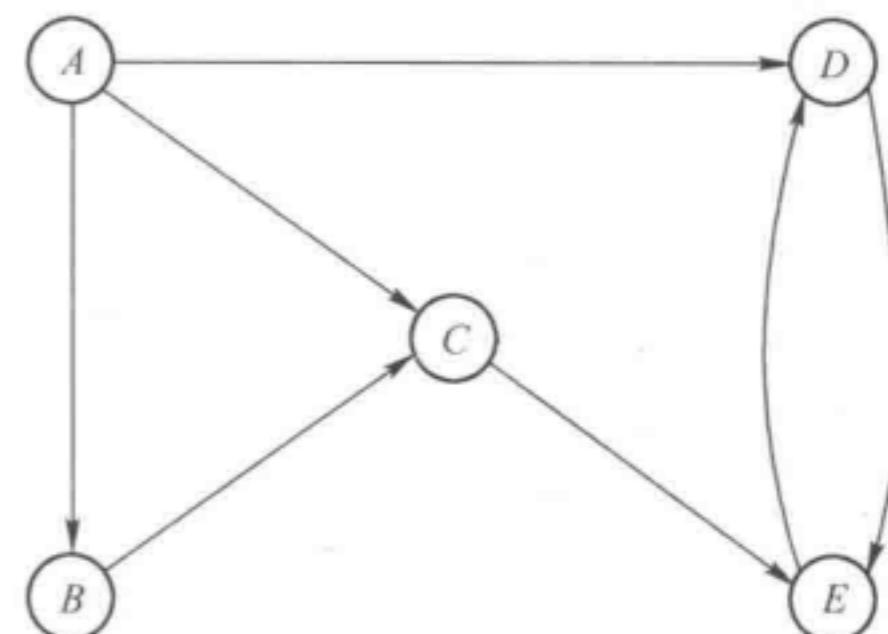


图10.2 图3.13给出的无限配送公司的配送网络为有向网络

弧)的定义排除了那些由于折回而产生环的情况,如图 10.1 中的 $OB-BO$ 就不是一个环,因为 OB 和 BO 是同一弧的两种标记而已。在图 10.2 中, $DE-ED$ 则是一个(有向)环,因为 DE 和 ED 是两个不同的弧。

如果网络中的两个节点之间至少存在一条无向路径,就称这两个节点是连通的(需要注意的是,即使网络为有向网络,上述路径也不必为有向路径)。任意两个节点之间都是连通的网络称为连通网络。可以得出,图 10.1 和图 10.2 的所示网络都是连通网络。然而,对于图 10.2 所示的网络,如果去掉弧 AD 和 CE ,就不再是连通网络了。

考虑一个有 n 个节点的连通网络(图 10.2 中 $n=5$),删除其上的所有弧,按一定的方式每次添加原始网络图中的一个弧(或树枝)就可以“生成”一棵“树”。第一条弧可以连接任一对节点,然后,每条新弧的一端要连在一个已与其他节点相连接的节点上,另一端应连接一个之前未与其他节点相连的新节点上。这样添加弧时不仅能避免形成环,还能保证连通网中节点的数量恰好比弧的数量多 1。每新添加一个新弧就生成一个更大的树,这棵树是一个不含无向环的连通网络。当第 $n-1$ 个弧添加完毕后,由于所生成的树连接了所有 n 个节点,添加工作就可以停止了,这棵树称为生成树,即连接所有 n 个节点、不含无向环的连通网。每个生成树有且仅有 $n-1$ 条弧,即构建一个连通网所需的最少弧数,也是不含无向环的最大弧数。

图 10.3 利用了图 10.2 中的 5 个节点和部分弧演示了树的生成过程,对每一步新弧都有多种选择,所以图 10.3 演示的只是创建一棵生成树的众多方式中的一种。然而,需要注意,在树的生成过程中,怎样使新添加的弧能满足前面图中定义的条件。10.4 节将深入探讨和演示树的生成。

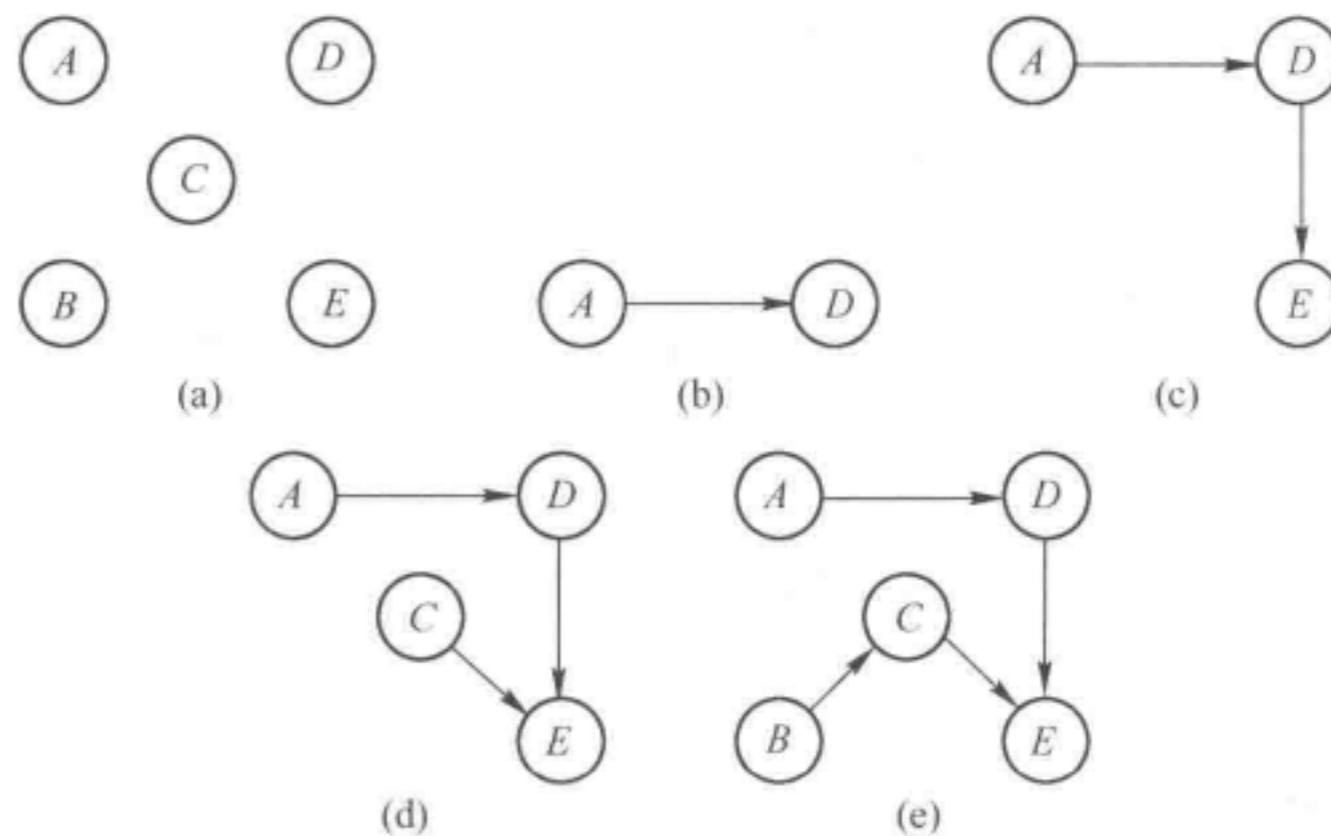


图 10.3 一次增加一条弧生成一棵树的例子

(a) 不含任何弧的节点; (b) 只有 1 条弧的树; (c) 有 2 条弧的树; (d) 有 3 条弧的树; (e) 一颗生成树。

生成树在网络分析中具有重要作用,如它们构成了 10.4 节所讨论的最小生成树问题的基础,此外,生成树(可行的)与 10.7 节讨论的网络单纯形法的基可行解对应。

最后,再介绍几个关于网络流的术语。可在有向弧中传送的流的最大量(可能无穷大)称为弧容量。就节点来说,其差别在于是产生网络流还是吸收网络流,或者既不产生也不吸收。流出量比流入量大的节点称为供给节点(或称源点、源),流入量比流出量大的节点称为需求节点(或称汇聚点、汇),转载节点(或中间节点)则满足流守恒,其流入等于流出。

10.3 最短路径问题

虽然本节末会提到几个其他形式的最短路径问题(包括一些有向网络),但本节主要关注下

面的简单形式:考虑一个包含起点和终点的无向连通网络,每条边(无向弧)都对应一个非负距离,目标是找出从起点到终点的最短路径(总距离最短的路径)。

解决这一问题有个相对简单的算法,其实质是从起点开始搜索,升序排列网络各个节点到起点到的(最短)距离,并选择其中距离最短的那条路径,依次进行迭代搜索,直到所选的路径到达终点时问题也就解决了。首先,将简要介绍这一方法,然后,通过求解 10.1 节中 Seervada 公园管理遇到的最短路径问题进行具体阐述。

10.3.1 最短路径问题的算法

第 n 次迭代的目标:找到离起点最近的第 n 个节点($n=1,2,\dots$ 重复操作,直到第 n 个最近的节点为终点)。

第 n 次迭代的输入: $n-1$ 个离起点最近的节点(在之前的迭代中确定),包括它们的最短路径和与起点的距离(将这些包括起点在内的节点称为解节点,其他节点称为非解节点)

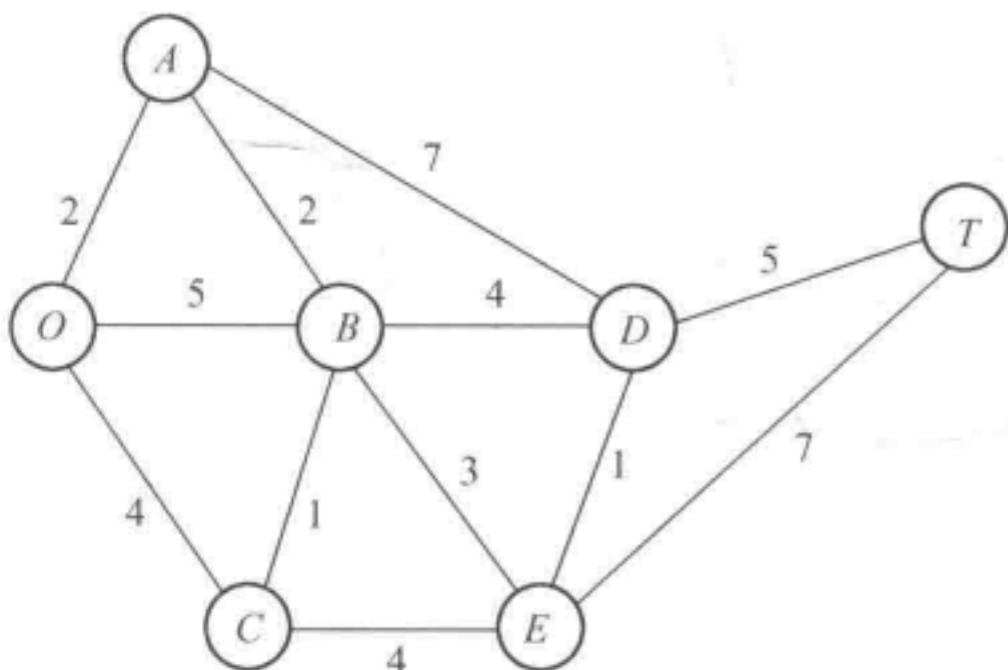
第 n 个最近节点的候选节点:对每个解节点,与其直接连接且距离最小的非解节点就是一个候选节点(距离最小的节点有多个时,会产生多个额外的候选节点)。

第 n 个最近节点的计算:对于每个解节点和其候选节点,把它们之间的距离和该解节点到起点的最短距离相加,总距离最小的候选节点是第 n 个最近节点。

10.3.2 算法在 Seervada 公园最短路径问题中的应用

在如图 10.1 所示的道路系统中,Seervada 公司管理人员需要找到从公园入口(节点 O)到景点(节点 T)的最短路径。表 10.2 显示的是应用上述算法求解这一问题所得的结果(其中第 2 个距离最近的节点有 2 个,从而下一次迭代可直接去找第 4 个距离最近的节点)。第 1 列(n)表示迭代次数,第 2 列为开始当前迭代的解节点,去除了那些不相关的解节点(即不直接与任何非解节点连接的节点),第 3 列给出了第 n 个最近节点的候选节点(与解节点距离最近的非解节点),第 4 列计算出了从起点到每个候选节点的最短路径的距离(也就是从起点到解节点的距离加上该解节点到候选节点的距离),第 5 列为距离起点最近的第 n 个节点,最后 2 列是关于新解节点的信息(也就是从起点到这个节点的最短路径的距离和这条最短路径上最末尾的弧)。

表 10.2 最短路径的算法在 Seervada 公园问题上的应用



n	与非解节点直接连接的解节点	相连的最近非解节点	相应的总距离	第 n 个最近节点	最小距离	上一个节点
1	O	A	2	A	2	OA
2,3	O	C	4	C	4	OC
	A	B	$2+2=4$	B	4	AB
4	A	D	$2+7=9$			
	B	E	$4+3=7$	E	7	BE
	C	E	$4+4=8$			
5	A	D	$2+7=9$			
	B	D	$4+4=8$	D	8	BD
	E	D	$7+1=8$	D	8	ED
6	D	T	$8+5=13$	T	13	
	E	T	$7+7=14$			

现在将上述表格和算法要点直接联系起来。第 n 次迭代的输入为前一次迭代的第 5 列和第 6 列给出,其中,从第 5 列的新解节点和第 2 列的解节点中删除那些没有与非解点直接相连的节点后,作为当前迭代的第 2 列,第 n 个最近节点的候选节点作为当前迭代的第 3 列,在第 4 列上进行第 n 个最近节点的计算,当前迭代的结果记录在最后 3 列。

以表 10.2 中 $n=4$ 为例,本次迭代的目标是找出第 4 个距离起点最近的节点。本次迭代的输入为 3 个与起点距离最近的节点(A 、 B 和 C)和它们的最短距离(分别为 2、4、4),如表中第 5 列和第 6 列所列。接下来将 A 、 B 和 C 三个解节点作为第 2 列,开始第 $n=4$ 次迭代。其中,节点 A 只与一个非解节点(D)直接相连,因而,节点 D 就成为与原点距离最近的第 4 个节点的候选节点,节点 D 与原点的最短距离为节点 A 与原点间的最短距离(如第 6 列所列为 2)加上 A 和 D 间的距离(7),也即 9。与节点 B 直接相连的非解点有 2 个(D 、 E),由于节点 E 距离 B 更近,因而,选择节点 E 为下一个与原点距离最近的第 4 个节点的候选节点。从节点 B 到原点的最短距离与 B 和 E 间的距离之和为 $4+3=7$,如第 4 列所列。与节点 C 相连的非解节点只有 1 个(E),因而, E 再次成为与原点距离最近的第 4 个节点的候选节点,总距离为 $4+4=8$ 。上述 3 个总距离中,值最小的为中间的案例 $4+3=7$,因此本次迭代中非解节点 E 为与原点距离最近的第 4 个节点。在第 5 列和第 7 列记录相关结果,本次迭代结束。

完成表 10.2 所列的迭代工作后,通过表的最后一列从终点追溯到起点的最短路径有两条: $T \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow O$,或者 $T \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow O$ 。因此,从起点到终点的最短路径有两种选择: $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow T$,或者 $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$,两条路径长度均为 13 英里。

10.3.3 用 Excel 电子表格描述并求解最短路径问题

该算法提供了一个特别简单的途径求解复杂的最短路径问题,但有些数学程序软件包并不包含这种算法,而通常包含如 10.7 节将介绍的网络单纯形法,网络单纯形法也是解决此类问题的一个不错的选择。

因为最短路径问题是特殊的线性规划问题,所以当没有更好的方法时常使用单纯形法。尽管不如复杂最短路径问题的专用算法有效,但是对于不太复杂的问题(但比 Seervada 公园问题要复杂得多)还是能胜任的。基于普通单纯形法的 Excel 电子表格可以提供一个简单的途径,用于描述和求解数十条弧和节点组成的最短路径问题。

图 10.4 是对 Seervada 公园最短路径问题的电子表格描述,与 3.5 节用单独的一行表示每个线性规划模型的函数约束不同,该表格提供了一种特殊的结构,即在第 G 列列出所有节点,在第 B 列、第 C 列列出所有的弧,在第 E 列给出对应每条弧的距离(单位:英里)。因为网络图中的所有连接都是无向弧,而通过最短路径是有一定方向性的,所以每个连接都可以用一对方向相反的有向弧代替。这样, B 列和 C 列所列的弧中 $B-C$ 和 $D-E$ 出现了两次,分别为向上的弧和向下的弧,并且每个方向都可被选中,而其他的连接仅作为从左到右方向的弧列出,因而,要选择从起点目标点的最短路径,这是唯一的可能方向。

网络图中从起点到终点最短的路线可理解为在选中的弧上分配流量为 1 的流,现在要做的决策是这条路线应选择哪些弧。流量被分配为 1 的弧将包含在这条路线中,否则不包括,若不包括,则流量为 0。因而,用决策变量来代表需要决策的每条弧,则有

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{不包含弧 } i \rightarrow j \\ 1, & \text{包含弧 } i \rightarrow j \end{cases}$$

决策变量的值在图中的动态单元格 OnRoute(D4:D17) 输入。

在被选中的路径上,每个节点都可以认为有一个流量为 1 的流通过,反之则没有流量。通过

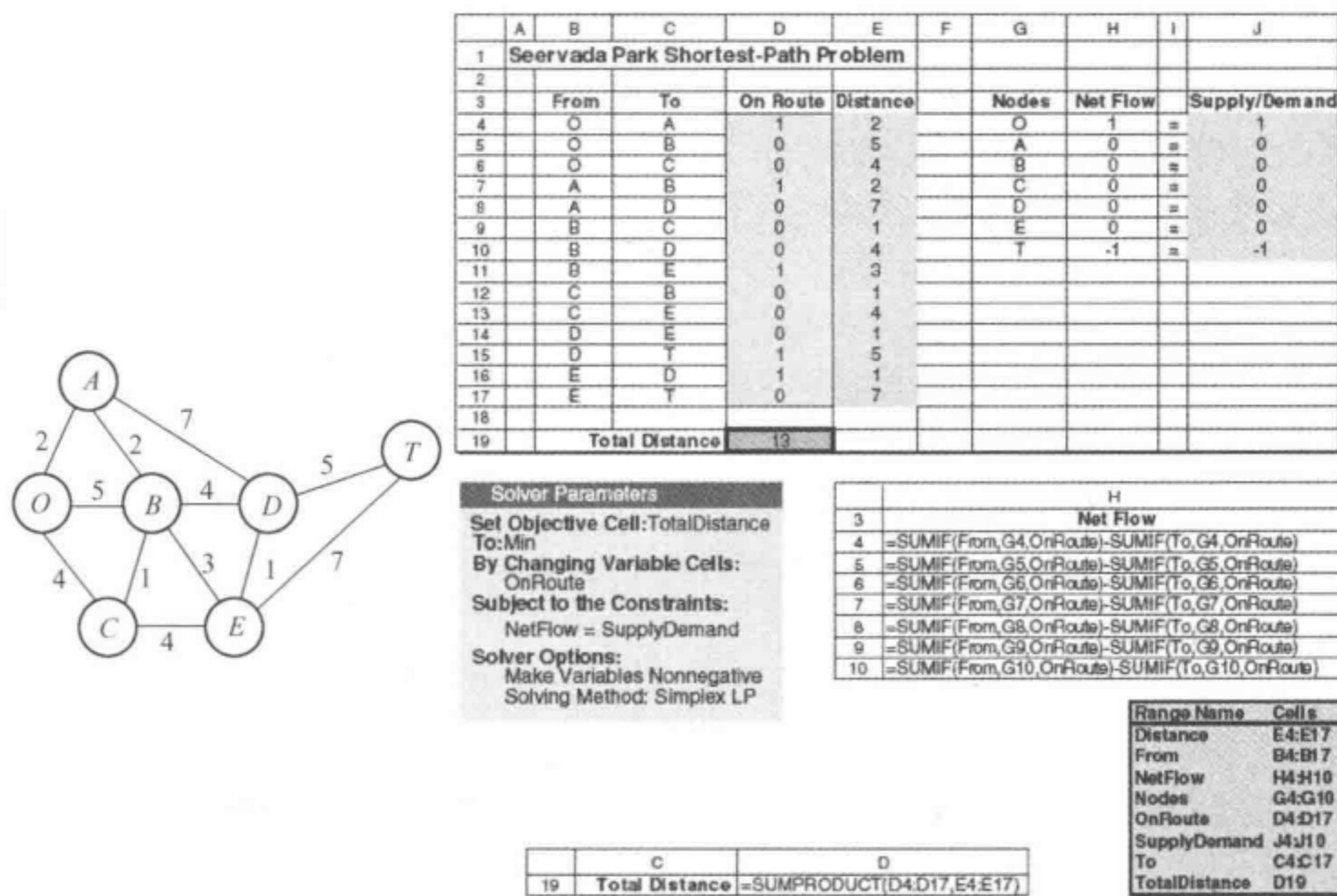


图 10.4 Seervada 公园最短路径问题的电子表格。图中, 动态单元格 OnRoute(D4:D17) 是用 Excel Solver 求得的最优解, 目标单元格 TotalDistance(D19) 给出了最短路的总里程 (mile), 电子表格左侧网络图为图 10.1 中最初给出的 Seervada 公园的道路系统

一个节点的净流量等于流进量减去流出量, 所以起点的净流量为 1, 而目的节点的净流量为 -1, 其他节点的净流量均为 0。这些净流量的相关要求由图 10.4 的第 J 列给出, 根据图底部的公式, H 列的单元格计算出节点的实际净流量, 相应的约束 $\text{NetFlow}(H4:H10) = \text{Supply/Demand}(J4:J10)$, 在 Solver 参数对话框里定义。

根据图 10.4 底部的公式, 目标单元格 TotalDistance(D19) 给出了选中路径的总距离。目标单元格最小化的目标通过 Solver 对话框定义。通过 Solver 运行后, 最优解将显示在 D 列。

应用案例

成立于 1881 年的加拿大太平洋铁路公司(CPR)是加拿大第一家拥有横跨大陆铁路线的公司。CPR 在加拿大的铁路网运营里程超过 14000 mile, 同时还为美国 Minneapolis、芝加哥、纽约等众多城市服务, 此外, 通过与其他公司展开合作, CPR 的业务甚至延伸到了墨西哥的主要商业中心。

每天 CPR 要收装大约 7000 车厢货物, 需要出口运送到穿越北美的目的地。由于这些货物必须通过火车车厢运输, 且在到达目的地之前车厢需要不断地更换火车头, 因此 CPR 需要对这些货物和 1600 个火车头、65000 节车厢、5000 名火车员工及 250 个火车站进行协调。

CPR 管理者求助于 MultiModal Applied Systems 运筹咨询公司, 并与其合作开发了一套解决上述问题的研究方法, 运用大量运筹学技术创造一个新的运营系统。该方法的基础是将火车车厢的流通看成是网络流, 其中每个节点代表一个车站及到达时间。这种描述方法使应用网络优化技术成为可能。例如, 该方法每天要解决很多最短路径问题。

由于该方法的应用, CPR 每年大约节约 1 亿美元。人力效率、火车头效率、燃料消耗及火车速度均得到了极大的改善。现在 CPR 能够向顾客提供可信的交货时间, 并且, 由于服务的改进获得了很多的赞誉。网络优化技术的成功应用, 使 CPR 于 2003 年荣获国际运筹和管理学 Franz Edelman 成就奖一等奖。

材料来源: P. Ireland, R. Case, J. Fall, C. Van Dyke, J. Kuehn, and M. Meketon: "The Canadian Pacific Railway Transforms Operations by Using Models to Develop Its Operating Plans," Interfaces, 34(1): 5-14. Jan. Feb. 2004. (网站提供了本文的链接地址: www.mhhe.com/hillier.)

10.3.4 其他应用

并不是所有的最短路径问题都是使起点到终点之间的距离最短的路程问题。事实上,它甚至可能与路程没有一点关系。这些连接(或弧)可能表示一些其他类型的活动,因此,选择网络中一条路径相当于选择了开展活动的最优次序。连接的长度也可能表示其他意义,如活动的费用,这时的目标将是选择总费用最小的活动次序。本书网站的例题解答部分包含了该类问题的另外一个例子,详述了以最短路径问题的思路建模的过程,并运用最短路径问题的算法和 Solver 数据表格进行了求解。

下面列出了三种类型的应用。

- (1) 使路程总距离最短,如 Seervada 公园问题。
- (2) 使一系列活动的总费用最小(习题 10.3-3)。
- (3) 使一系列活动的总时间最小(习题 10.3-6 和习题 10.3-7)。

上述三种问题可能来源于同一个应用。例如,假如你从一个城镇开车到另一个城镇,中间需要经过若干个城镇,你希望找到一条最好路线。你认为最好路线的标准可能总距离最小,或是总费用最小,还可能是总时间最小。

许多应用要求在有向图中找出从起点到终点的最短有向路径,可通过简单改变前面介绍的算法来处理每次迭代时的有向路径。特别地,当已找出第 n 个节点的候选节点后,只需要考虑从解节点到非解节点的有向弧。

另一种最短路径问题是找到从起点到网络中其他所有节点的最短路径。注意:前面的算法其实已经给出了从起点到除目标点外,比目标点距起点更近的其他节点的最短路径。因此,当所有节点都被看作潜在目标点时,算法只需做出以下改变,即直到所有节点都成为解节点后才停止继续运算。

一种更一般的最短路径问题是找到从每个节点到另外其他每个点的最短路径。另一种类型是放弃“距离”(弧值)的非负约束,也可能被随后加上其他一些约束。所有这些变异问题偶尔会出现在应用中,所以也已被研究者研究。

对于广泛存在的联合优化问题,如某些交通路线或网络设计问题,需要求解大量作为子问题的最短路径问题。虽然我们没有篇幅进一步研究这类问题,但如今这类问题可能是最短路径问题最重要的应用。

10.4 最小支撑树问题

最小支撑树问题与 10.3 节中最短路径问题的形式有些相似。在这两类问题中,所考虑的都是无向连通网络,并且给出的信息包括每条边的正值长度(距离、费用、时间等)。这两类问题均需从所有边中选出一组满足特定的属性的总长度最小的边。对于最短路径问题,被选择路线的特定属性是从起点到终点,对于最小支撑树问题,被选择路线的特定属性是每对节点都要有路线相连。

最小支撑树问题可概括如下。

- (1) 给定网络的节点而不是边,但如果要插入一条边,这条潜在的边的长度已知(边的长度的其他度量包括距离、费用、时间)。
- (2) 期望通过插入足够的边来设计网络,以满足每对节点间都有路线相连的特定要求。
- (3) 目标是在满足这个要求的基础上,寻求一种方式使插入网络中的边的总长度最小。

具有 n 个节点的网络,仅需要 $(n-1)$ 条边即可满足每对节点有一条路线的要求,而不需要更多的边,否则,会增加总长度。这 $(n-1)$ 条边的选取,应恰好能构成一棵支撑树(定义见 10.2 节)。因此,该问题可以归为寻找所有边的总长度最小的支撑树。

图 10.5 以 Seervada 公园问题(见 10.1 节)为例,说明了支撑树的这一概念,根据定义,图 10.5(a) 不是一棵支撑树,因为节点 O, A, B, C 与节点 D, E, T 并不连接。这一网络系统实质上包含两棵树,每一组节点构成一棵树。图 10.5(b) 是该网络系统的扩展,但因为它有两个环($Q-A-B-C-O, D-T-E-O$),所以不是树,它的边过多。因为 Seervada 公园问题有 $n=7$ 个节点,根据 10.2 节所指出的,该网络必须恰好有 $n-7=6$ 条边且没有环才构成一棵支撑树。图 10.5(c) 满足以上条件,因此该网络是最小支撑树问题的一个可行解(边的总长度为 24mile)(很快将了解到,该解不是最优解,因为还可以构造出总长度仅为 14mile 的支撑树)。

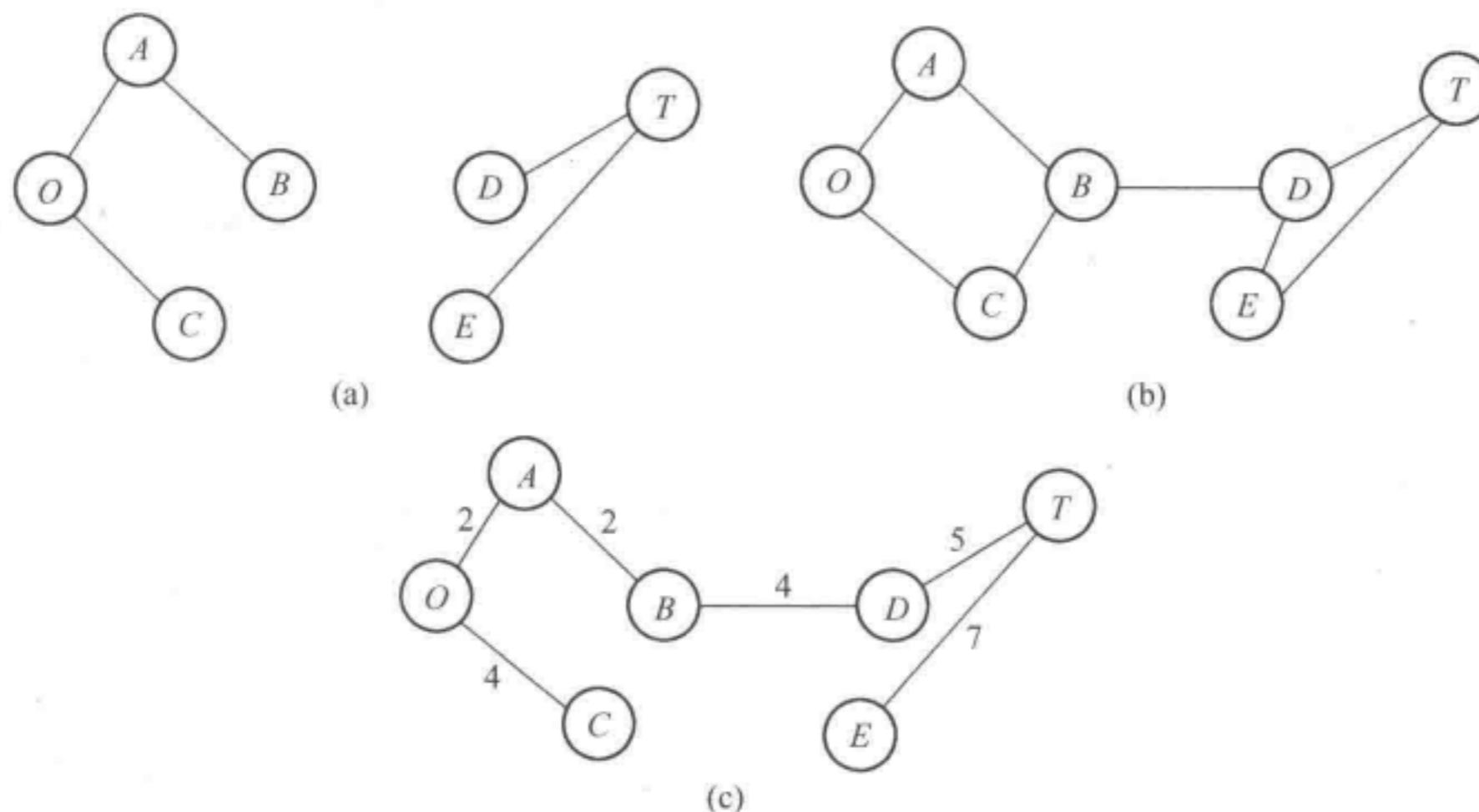


图 10.5 以 Seervada 公园问题为例说明支撑树的概念图解
(a) 非支撑树; (b) 非支撑树; (c) 是支撑树。

10.4.1 应用举例

下面列出了一些最小支撑树问题的主要应用类型。

- (1) 通信网络设计(光缆网络、计算机网络、电话线网络、有线电视网络等)。
- (2) 费用最低的运输网络设计(铁路、公路等)。
- (3) 高压输电网络的设计。
- (4) 线路总长度最短的电子设备线路网络设计(如计算机系统)。
- (5) 管道网络设计。

在这个信息飞速传播的时代,第一种类型的应用尤为重要。在一个通信网络中,只需要插入足够的边以保证每对节点之间都有通路,这样的网络设计正是最小支撑树问题的典型应用。如今,通信网络系统造价都在数百万美元,所以通过最小支撑树优化通信网络是非常重要的。

10.4.2 算法

最小支撑树问题可以用一种简明直接的方式求解,因为它恰好是运筹学问题中的一种特殊类型,其在每一阶段所寻求的最优解最终构成整个过程的最优解。因此,从任意一个节点开始,第一个阶段就是要选取该节点到另一节点最短的那条边,而不考虑对后面的选择造成的影响。

第二阶段就是要在未连接的节点中确定与已连接的节点距离最短的节点，并将其连到网络。重复以上过程，直到所有的节点都已连接（注意：这与图10.3中构造支撑树的过程是相同的，不同的是，本过程在每选取新边时都要遵循一个特殊的规则），最终得到的网络就是一棵最小支撑树。

10.4.3 最小支撑树问题的算法

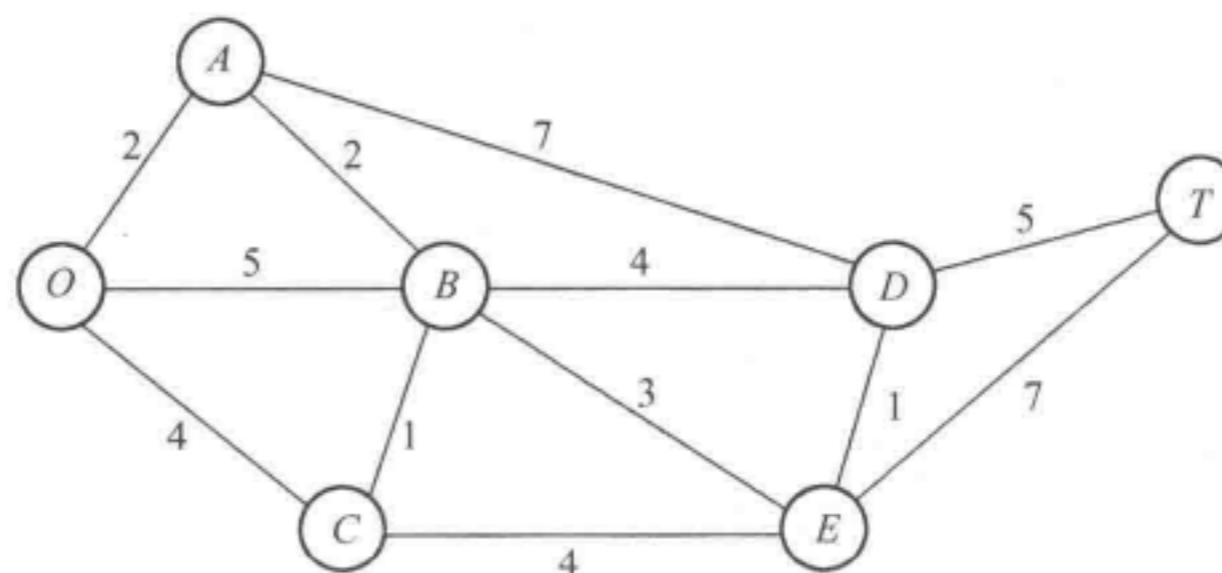
- (1) 任选一个节点，然后将该节点与离它最近的节点进行连接（增加一条边）。
- (2) 确定与已连接节点距离最近的未连接节点，然后连接这两个节点（在它们之间增加一条边）。重复该步骤，直至所有的节点都已被连接。
- (3) 若出现最短距离相等的多个节点：在第1步或第2步中出现最短距离相等的多个节点时，可任意选择其中的一个，最终一定会生成一个最优解。但出现上述情况，也预示着可能有多个最优解。所有这样的最优解都可以通过选择每个最短距离相等的节点，继续进行分析其后连接的所有边而求得。

手动实现本算法最快的方法是下面将要介绍的图上作业法。

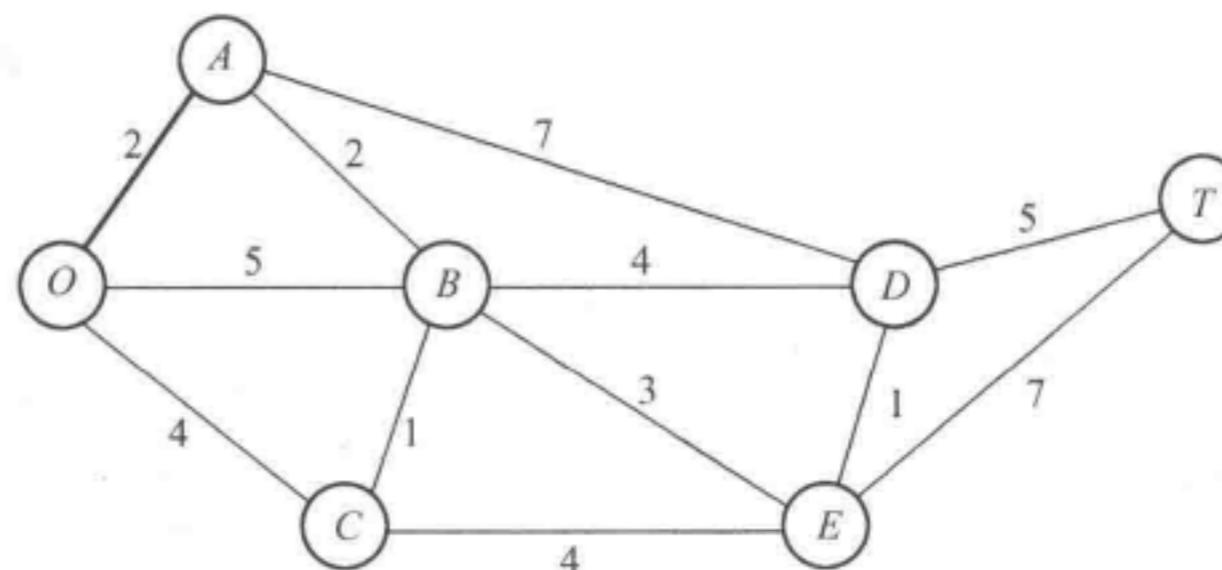
10.4.4 算法在Seervada公园最小支撑树问题上的应用

为了连接公园的所有景点，Seervada公园的管理部门需要对在哪些道路下铺设电话线的问题做出决策，该决策要使铺设电话线路的总长度最短。利用图10.1所给的数据，逐步给出这个问题的答案。

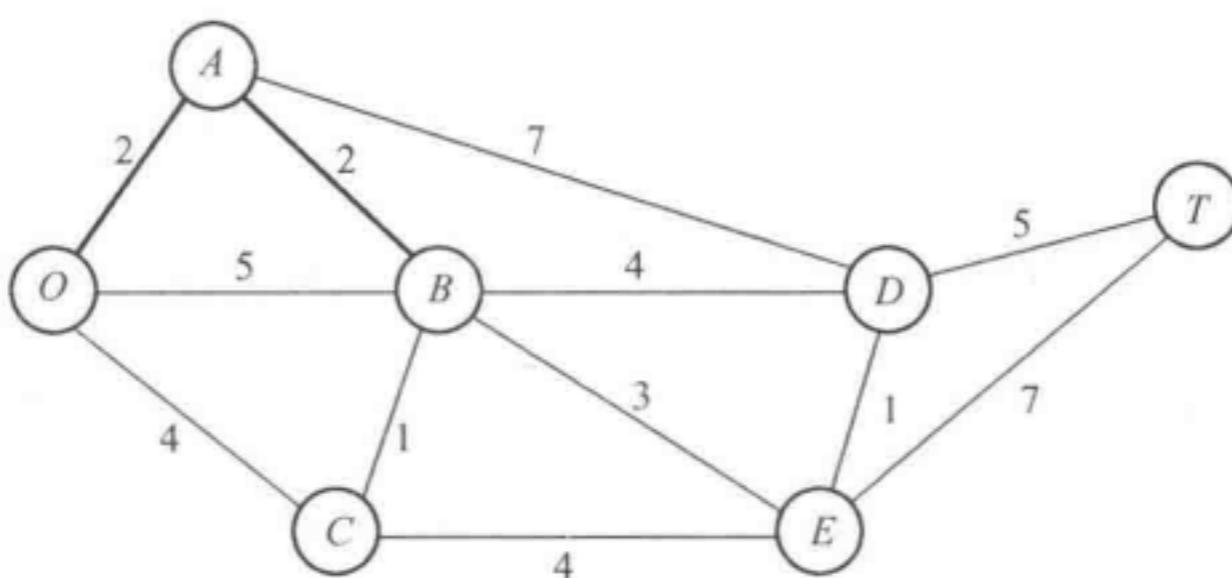
该问题中的节点和节点间的距离如下图所示，其中细线表示节点间潜在的边。



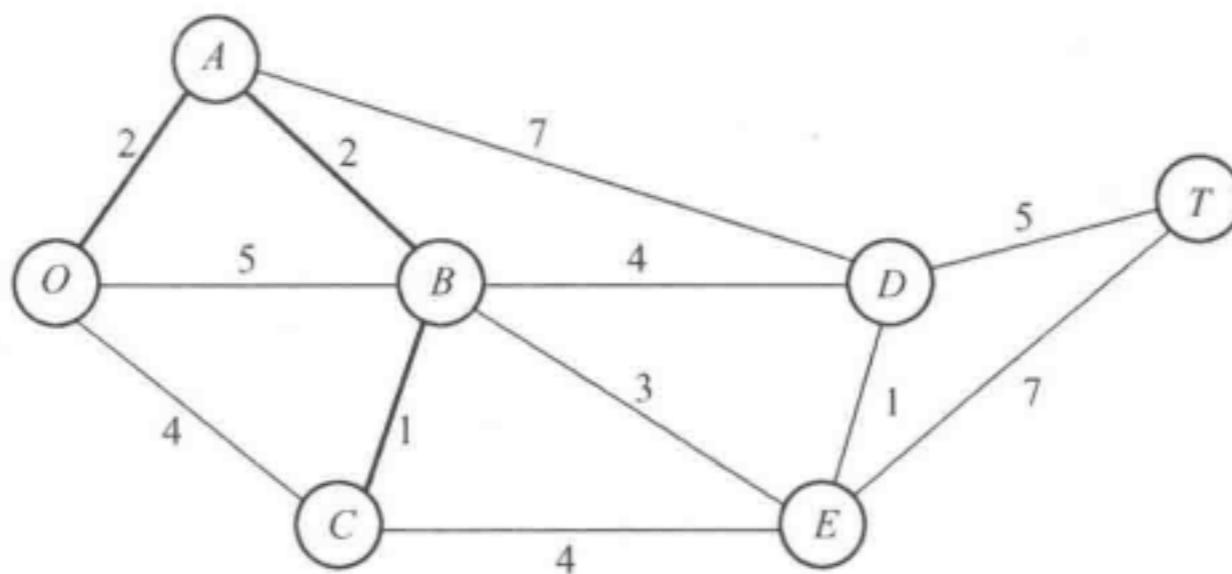
任选节点一个节点，如O，作为初始节点，未连接的节点中与节点O距离最近的节点是A，连接节点O和节点A，如下图所示。



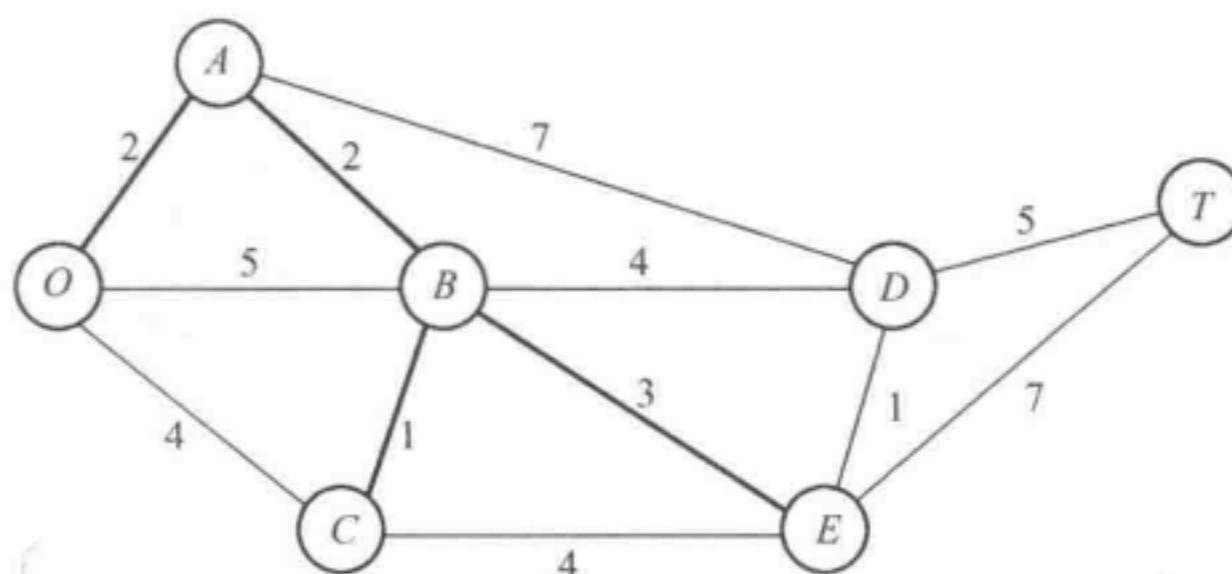
未连接的节点中与节点O或节点A距离最小的节点是节点B（距离节点A最近），连接节点A与节点B。



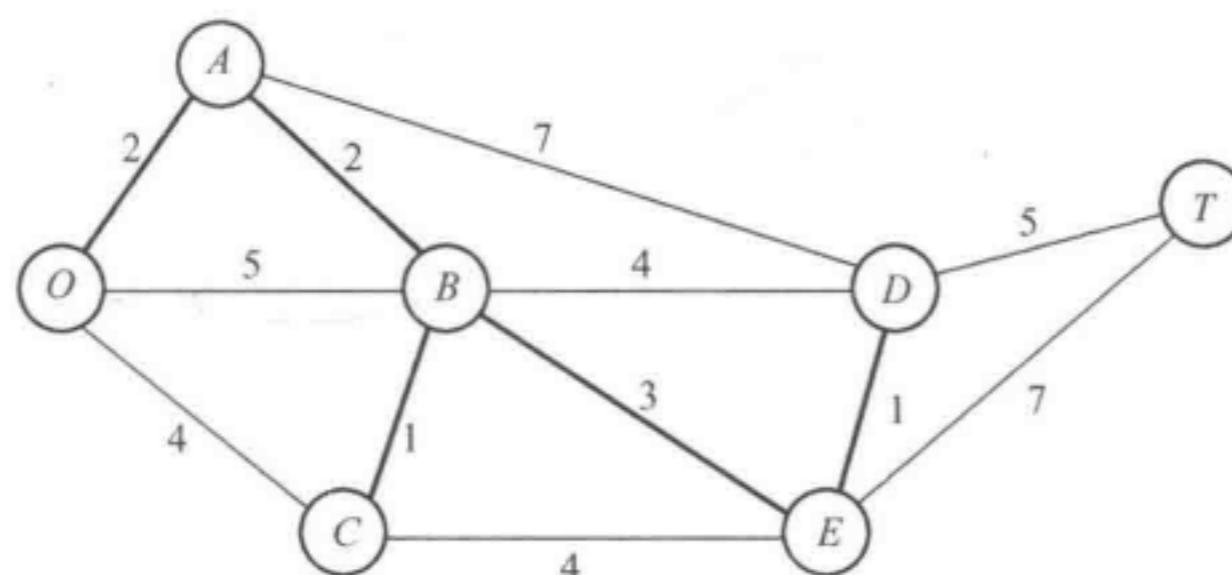
未连接的节点中与节点 O 、 A 或 B 距离最小的节点是节点 C (距离节点 B 最近),连接节点 B 与节点 C ,如下图所示。



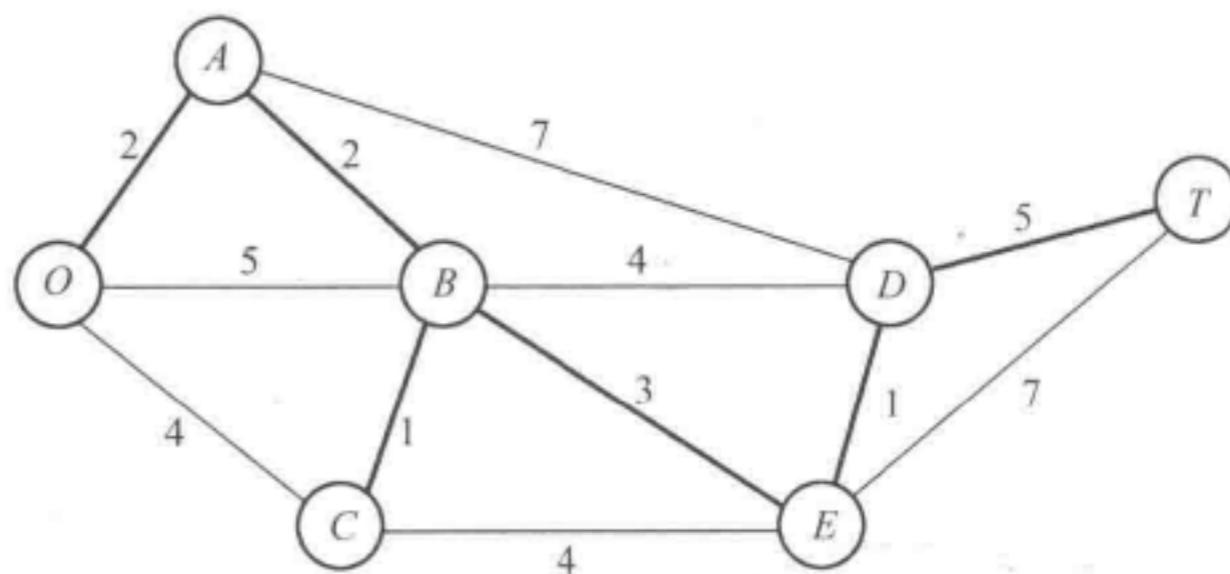
未连接的节点中与节点 O 、 A 、 B 或 C 距离最小的节点是节点 E (距离节点 B 最近),连接节点 B 与节点 E ,如下图所示。



未连接的节点中与节点 O 、 A 、 B 、 C 或 E 距离最小的节点是节点 D (距离节点 E 最近),连接节点 D 与节点 E ,如下图所示。



最后剩余一个未连接的节点 T ,节点 T 与节点 D 距离最小,连接节点 T 与节点 D ,如下图所示。



现在所有的节点都已连接,得到了问题的最优解,电话线路的总长度为 14mile。

尽管看上去初始节点的选取好像会对最终结果(即电话线路的总长度)产生影响,但实际上并不会。建议读者针对本例,选取异于节点 O 的初始节点重复本算法证明这一事实。

最小支撑树问题是本章讨论的一大类网络设计问题之一,在这一领域,目的是为给定的应用问题(最常见的是交通系统)设计最适合的网络,而不是分析已经设计好的网络。

10.5 最大流问题

下面回忆一下 Seervada 公园管理中遇到的第 3 个问题(见 10.1 节),即在旅游旺季客流量高峰期,如何决定电瓶车从公园入口(图 10.1 中的 O 点)到旅游景点(T 点)的线路,可以使每天电瓶车的总出动量最大(每趟电瓶车将按原路线返回,所以只关注出发路线)。为避免过度破坏生态平衡和野生动物的生活区域,公园每条道路上每天流入的电瓶车次数设定了严格上限。对于每条道路,旅游出发方向的路线已经用如图 10.6 所示的箭头表示出来,每个箭头上标出的数字为每天允许从出发点输送的最大电瓶车次数。在这些限制下,一个可行的方案是

每天开放 7 趟电瓶车,其中 5 趟使用路线 $O \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow T$,1 趟使用路线 $O \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow T$,1 趟使用 $O \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow T$ 。然而,由于该方案阻碍了其他任何以 $O \rightarrow C$ 为起始的路线(因为路线 $E \rightarrow T$ 和路线 $E \rightarrow D$ 已经到达了最大容量),所以很容易找到其他更优的可行方案。需要考虑路线的各种组合(以及每条路线分配的电瓶车次数),找出使每天各路输送旅客趟数达到最大的那些路线。这类问题就称为最大流问题。

通常,最大流问题可归纳如下。

(1) 所有流经有向连通网络的流都起源于同一节点,称为源点,终止于另一个点,称为汇点(在 Seervada 公园问题中,源点和汇点分别是公园的入口 O 和旅游景点 T)。

(2) 剩余的其他点称为中间节点(如在 Seervada 公园问题中的 A 点、 B 点、 C 点、 D 点和 E 点)。

(3) 流的方向由箭头标明,弧的容量就是允许的最大流量。在源点,所有的流都从这一点发出,在汇点,所有的流都指向这一点。

(4) 问题的目标是使从源点到汇点的总流量达到最大,该值可以由两种等价的方式来衡量,即源点的流出量或汇点的流入量。

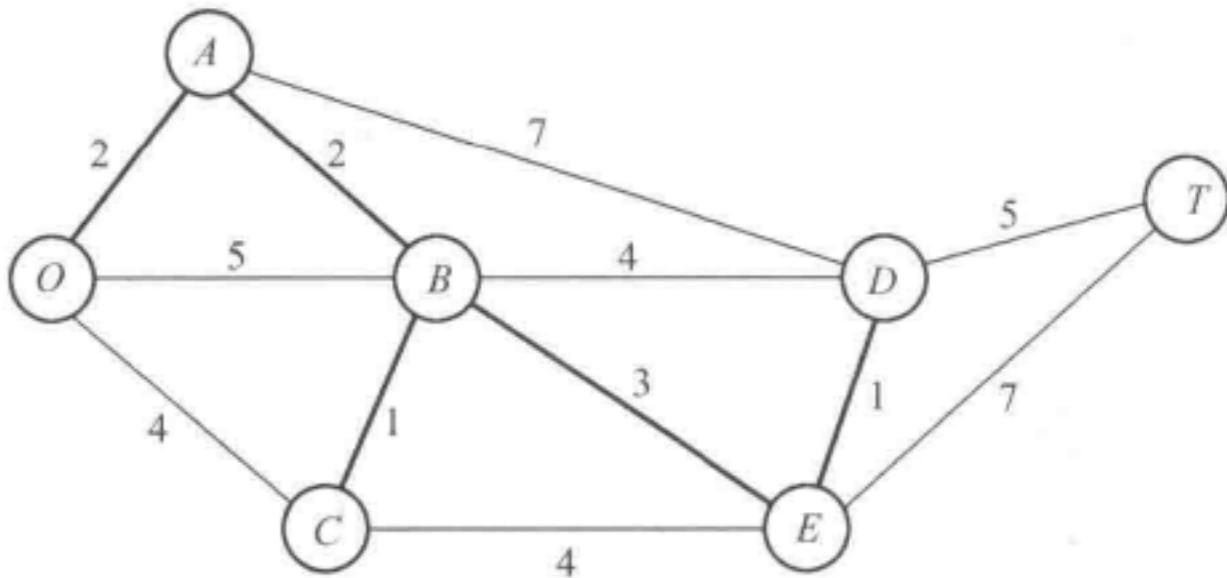


图 10.6 Seervada 公园最大流问题

10.5.1 应用举例

下面最大流问题的几类应用。

- (1) 公司配送网络中,使从工厂到客户的运送量最大。
- (2) 公司供应网络中,使从供应商到工厂的运送量最大。
- (3) 使石油管道系统的石油流量最大。
- (4) 使沟渠系统的水流量最大。
- (5) 使交通网络的车流量最大。

尽管最大流问题中仅有一个源点和一个汇点,但是上述有些实际应用中,流可能来自不止一个节点,也可能终于多个节点,如一个公司的配送网络通常有多个工厂和多个客户。一种解决方法是在问题建模时略作调整,对网络进行扩展,使其满足最大流问题,即在网络中引入一个虚拟源点、一个虚拟汇点和一些新弧。虚拟源点被看做网络中所有流的开端,而在实际中,这些流是以其他节点为源点的。在虚拟源点与每个实际源点之间添加一条始于虚拟源点的弧,这条弧的容量等于实际源点能发出的最大流量。类似地,虚拟汇点被看做所有流的终点,而在实际中,流也是以其他节点为汇点的。在虚拟汇点与每个实际汇点之间添加一条指向虚拟汇点的弧,这些弧的容量等于实际汇点能接收的最大流量。调整后,原网络中的所有节点均变为中间节点,于是,扩展后的网络也只有一个源点(虚拟源点)和一个汇点(虚拟汇点),从而满足最大流问题。

应用案例

Hewlett-Packard(HP)需要提供大量创新性产品以满足十多亿消费者的各种需求,其所提供的产品的广泛性帮助公司取得了无与伦比的市场份额。然而,提供大量相似的产品也会产生很多问题,比如会使销售代理和消费者感到迷惑,影响产品的收益。因而,在产品的种类上寻求一个适当的平衡十分重要。

基于这一考虑,HP公司的高级管理层将产品的种类管理作为一项高优先级的经营战略来抓。数十年来,在应用运筹学解决重要经营问题方面,HP公司一直处于领先地位,公司自然而然地想到召集公司的高级运筹分析师研究上述问题。

解决上述问题的方法的核心是建立一个网络优化模型。经过调查,剔除产品计划中那些回报不高的产品,产品计划中剩余的产品可看做是通过网络的流,就能得到一个最大流问题模型。自2005年开始使用这种方法后,HP公司产生重要变化,能够将越来越多的精力投入到最关键的产品上。从2005年到2008年,公司的利润增长了5亿美元,此后每年的增长幅度达到1.8亿美元。

这些重大成果,使HP公司获得了2009年国际运筹和管理学Franz Edelman成就奖一等奖。

材料来源 J. Ward and 20 co-authors, "HP Transforms Product Portfolio Management with Operations Research," *Interfaces*, 40(1): 17–32. Jan–Feb. 2010. (网站提供了本文的链接地址:www.mhhe.com/hillier.)

10.5.2 算法

由于最大流问题可归结成线性规划问题(见习题10.5-2),所以可用单纯形法求解,可使用第3章和第4章中介绍的任一种线性规划软件包。然而,一个更有效的方法可用来求解这类问题,即增广链算法。这种方法建立在两个直观的概念之上:剩余网络和增广链。

在给弧分配流量后,剩余网络显示了可用于分配其他流的剩余弧容量(称为剩余容量)。例如,考虑图10.6中的弧O→B,其弧容量为7。假设分配给这条弧一个流量为5的流,则弧O→B的剩余容量为7-5=2,即可再分配给弧O→B的流量为2。这种状态在剩余网络中可用如下图所示的方法描述。



节点旁边的数字给出了从该节点到另一节点的弧的剩余容量,也就是说,从 O 到 B 的剩余容量为 2,而右边的 5 则表示可分配给从 B 到 O 的剩余容量(实际上,中和了先前分配给从 O 到 B 的部分流量)。

最初,在未分配任何流之前,Seervada 公园最大流问题的剩余网络外观上如图 10.7 所示,初始网络(图 10.6)中的每条弧都从有向弧变成了无向弧。但原方向上的弧容量并未改变,而其相反方向的弧容量则是零,所以对弧流量的限制没变。

接下来,每当有流量分配给某个弧后,与该流量同向的弧的剩余容量就减少该流量,而与该流量反向的弧的剩余容量则加上该流量。

在剩余网络中,从源点到汇点的有向路径中,如果每条弧都有正的剩余容量,则称该路径为增广链。其中,最小的剩余容量称为该增广链的剩余容量,它表示还可以加到该路径上的流量。因此,每个增广链都为初始网络增加流提供了机会。

增广链算法重复选取某些增广链,并将增广链增加与其剩余容量相等的流,直到找不出增广链为止。此时,从源点到汇点的流量将不能进一步增加。确保最终解一定为最优的关键,是利用增广链抵消网络中先前分配的流,所以不加区别地选择路径分配流量并没有妨碍使用更优的流量分配组合。

综上所述,算法的每次迭代由以下 3 个步骤组成。

10.5.3 最大流问题的增广链算法^①

(1) 在剩余网络中,找出从源点到汇点的有向路径中每个弧上都有正向剩余容量的路径,即找到增广链(如果不存在增广链,该网络已达到最大流)。

(2) 找出该增广链上所有弧中最小的剩余容量,也即该增广链的剩余容量 c^* ,在该增广链中增加流量为 c^* 的流。

(3) 从增广链的每个弧的剩余容量中减去 c^* ,而在每个弧的反方向的剩余容量中加上 c^* ,返回步骤(1)。

在进行步骤(1)时,往往有很多增广链可供选择。尽管用这种方法解决大规模问题时,增广链的正确选择对解决问题的效率非常重要,但这里暂不深入研究(本节的后面将介绍一个找增广链的系统的步骤)。因此,在下面的例子(以及本章最后的问题)中,可随意地选取增广链。

10.5.4 应用算法求解 Seervada 公园最大流问题

下面应用上述方法求解 Seervada 最大流问题(初始网络如图 10.6 所示,该算法的另一个应用例子见本书网站的例题解答部分)。从图 10.7 中的初始的剩余网络开始,通过一两次迭代给出新的剩余网络,其中从 O 到 T 的总流量用粗线标出(紧挨节点 O 和 T)。

第 1 次迭代:在图 10.7 中, $O \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow T$ 是其中一条增广链,其剩余容量为 $\min\{7, 5, 6\} = 5$ 。

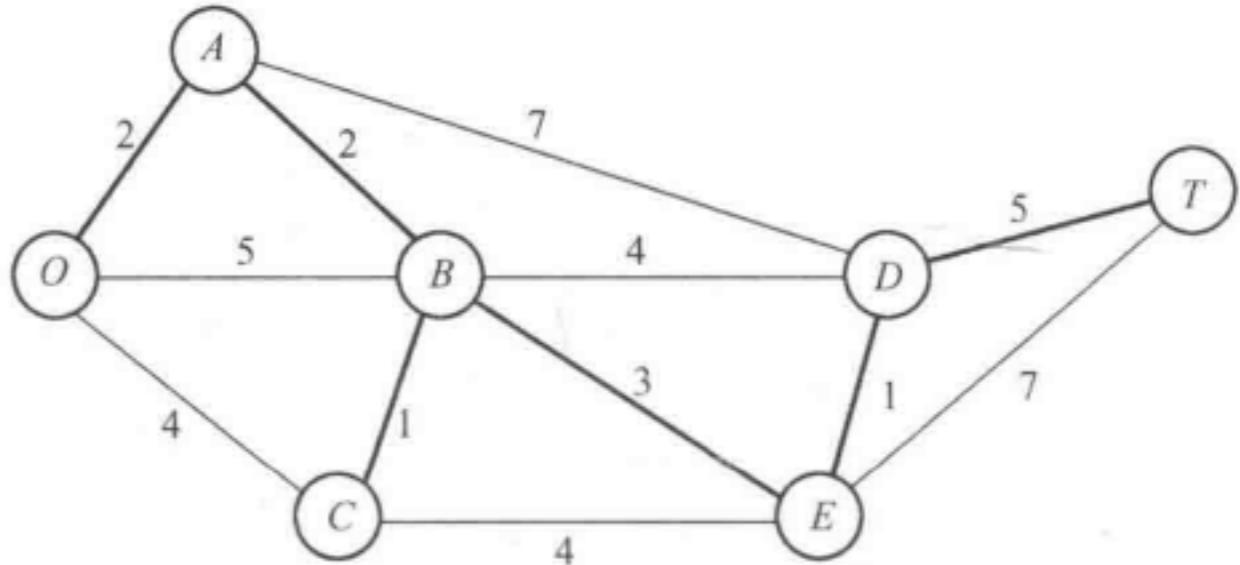
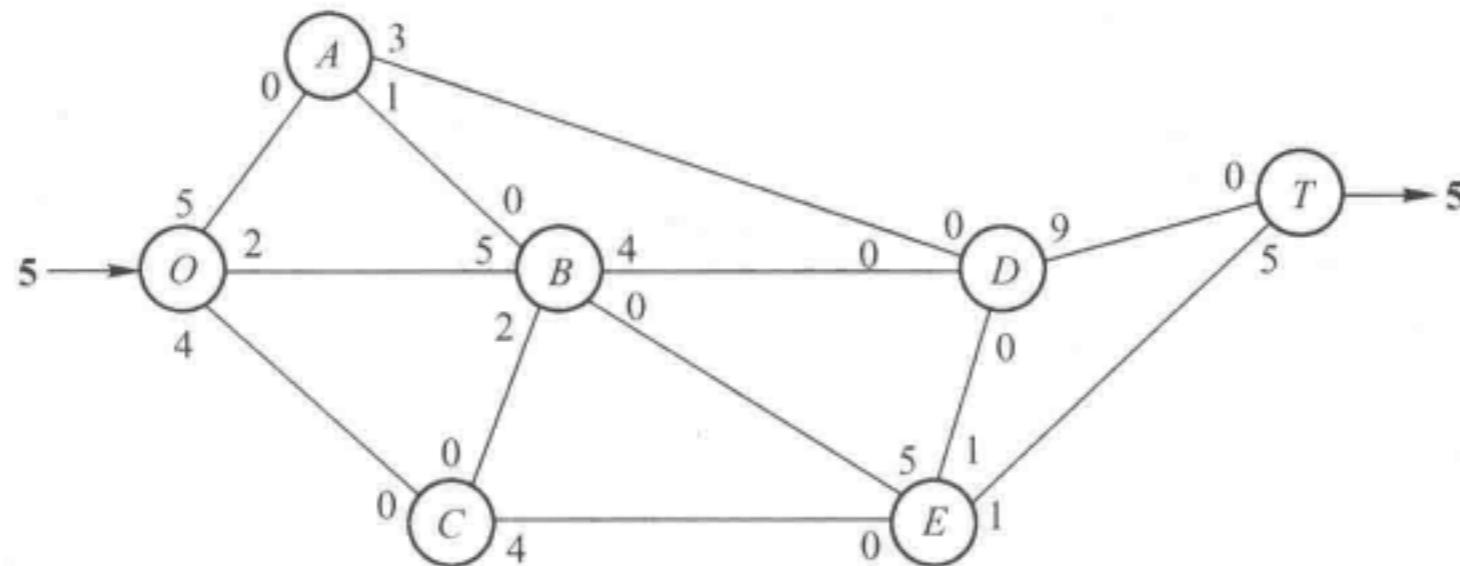


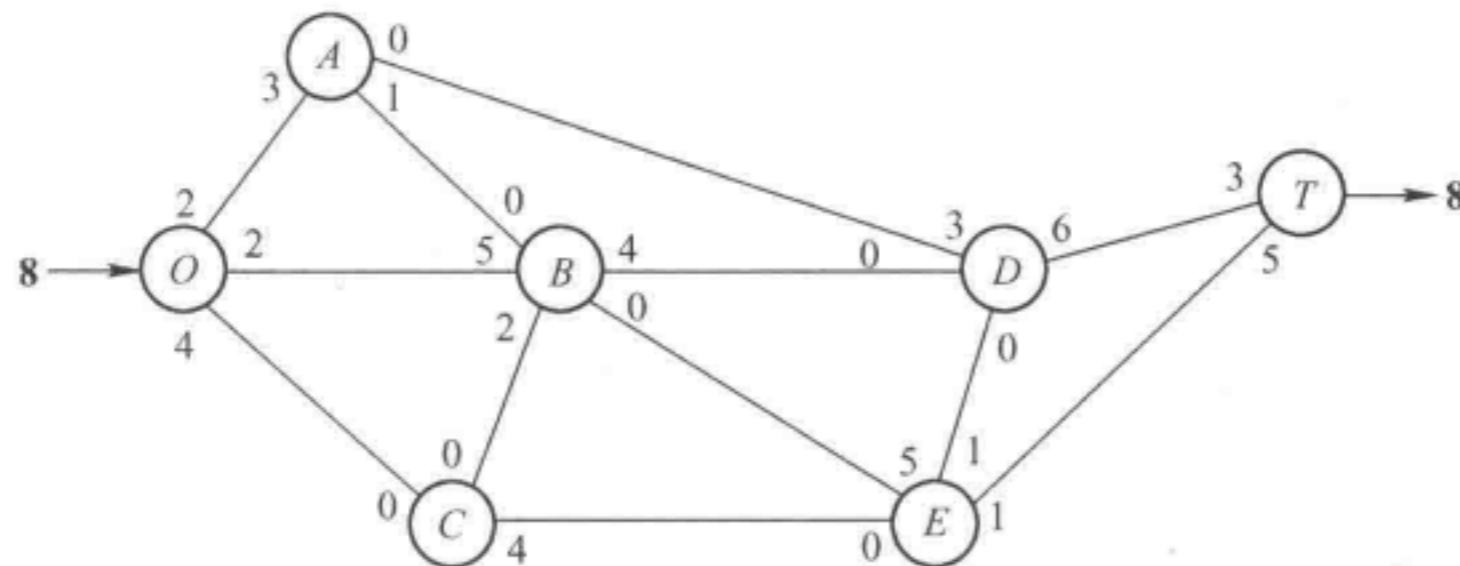
图 10.7 Seervada 公园最大流问题的初始剩余网络

^① 假定弧容量为整数或有理数。

分配给这条路径 5 单位的流量,产生新的剩余网络。

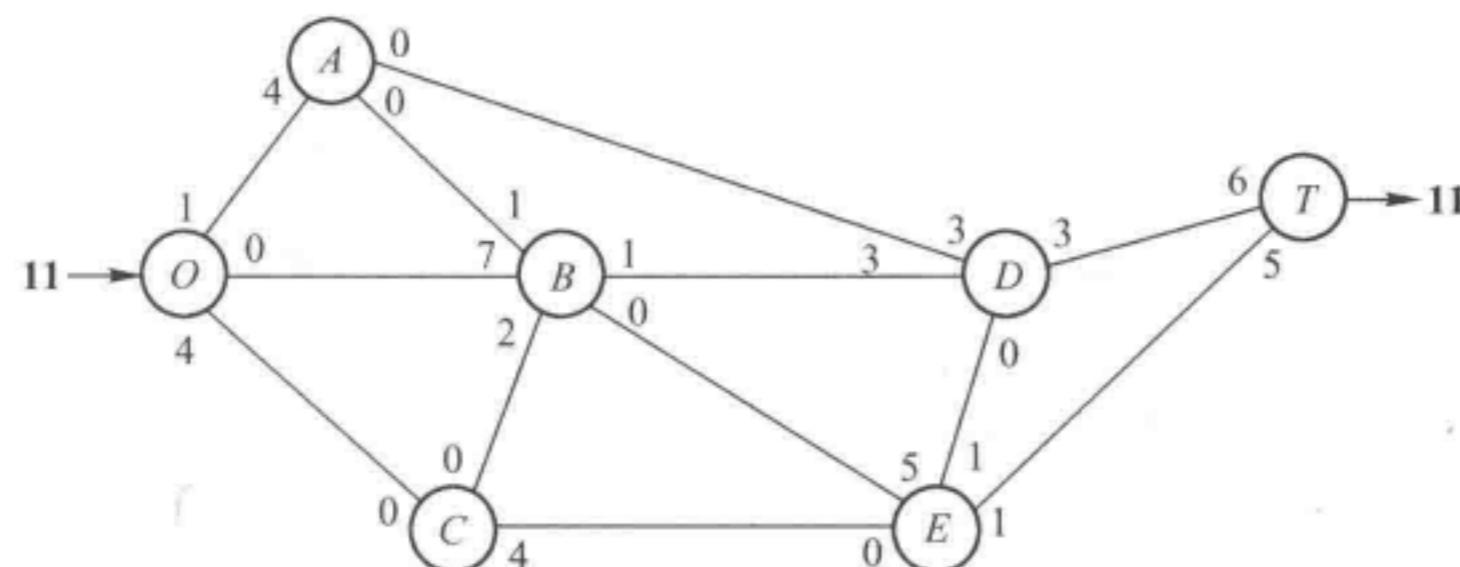


第 2 次迭代:分配 3 单位的流量给增广链 $O \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow T$, 得到新的剩余网络。



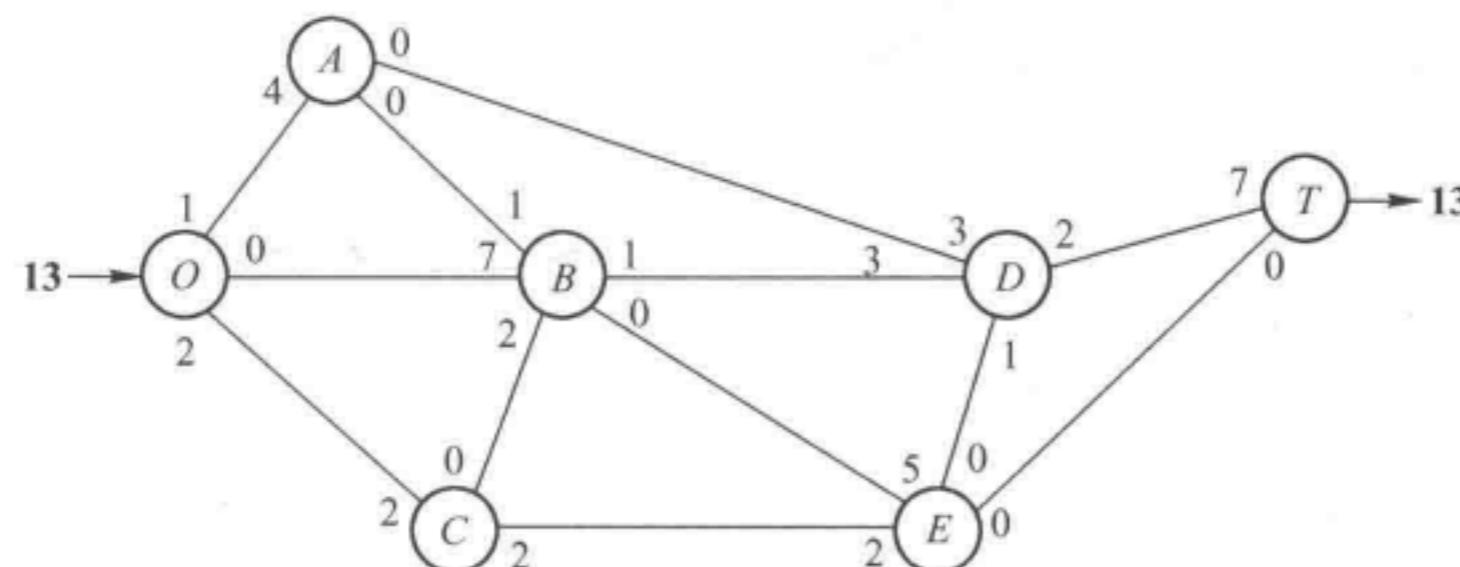
第 3 次迭代:分配 1 单位流量给增广链 $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$ 。

第 4 次迭代:分配 2 单位流量给 $O \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$, 得到新的剩余网络。

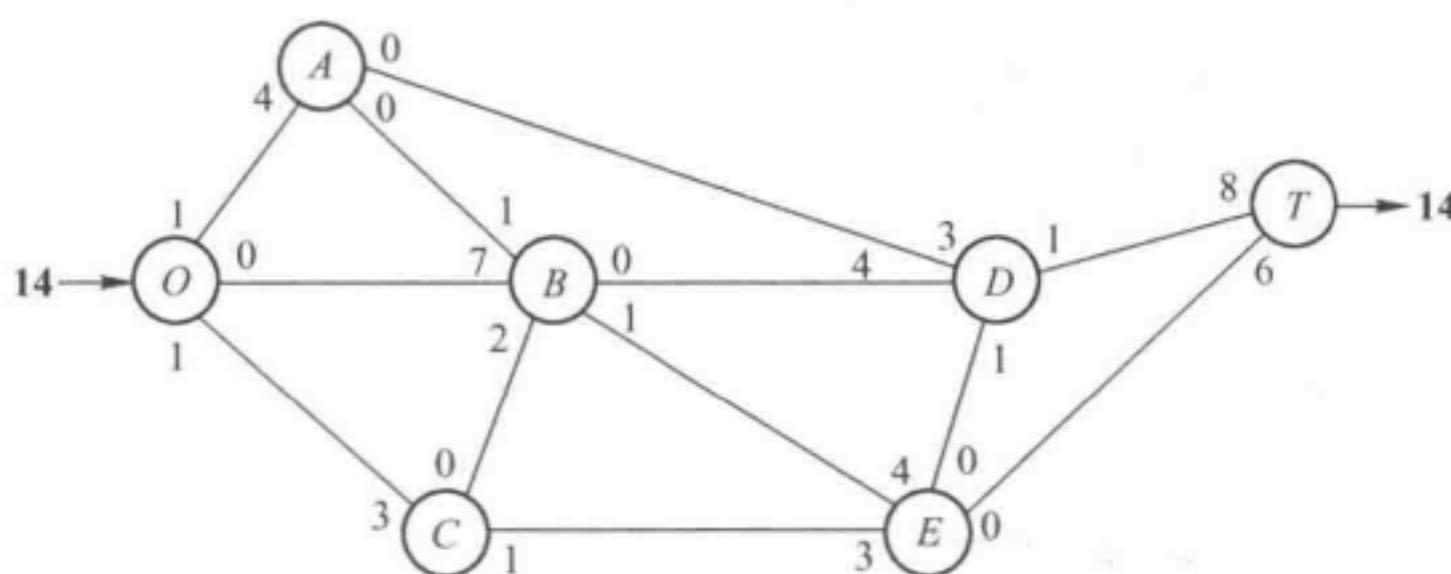


第 5 次迭代:分配 1 单位流量给增广链 $O \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow T$ 。

第 6 次迭代:分配 1 单位流量给 $O \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow T$, 得到新的剩余网络。



第 7 次迭代:分配 1 单位流量给增广链 $O \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$, 得到剩余网络。



已经没有增广链了,所以现在的流量模式是最优的。

这一流量模式既可以通过流量分配的累积,也可以通过最终的剩余容量和初始弧容量的比较得到。如果使用后面介绍的方法,若最后的剩余容量比原来的容量小,沿着其中一条弧上将有流存在,这个流的大小等于上述两容量之差。通过对从最后一步迭代中得到的剩余网络与图 10.6 或图 10.7 进行比较,这种方法得到的最优流量模式如图 10.8 所示。

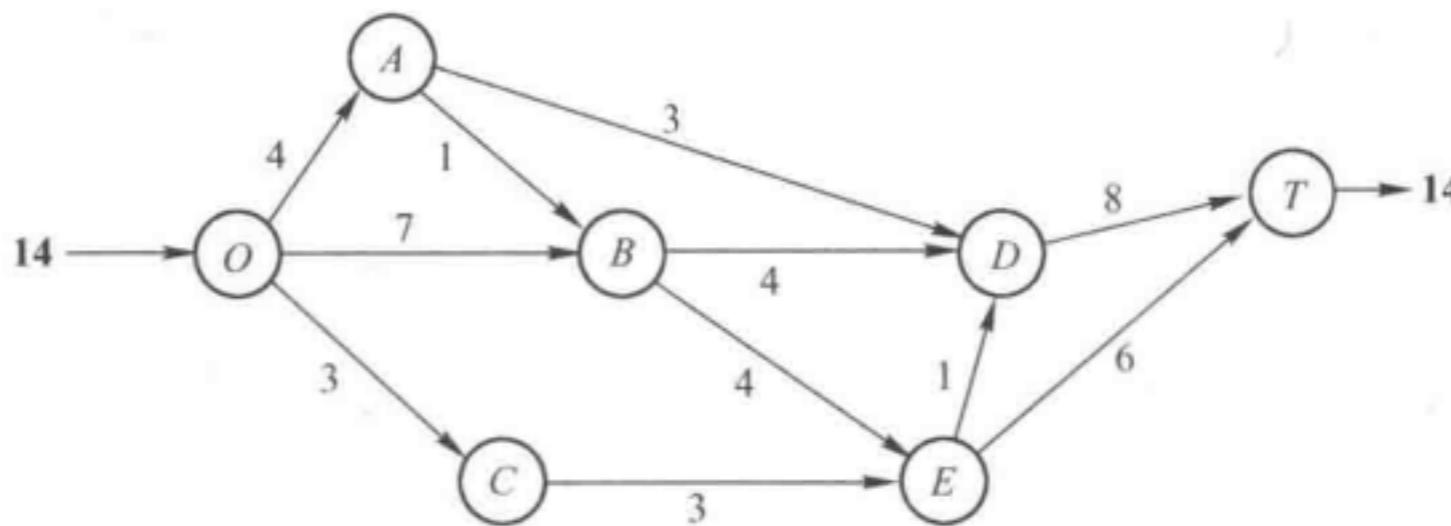


图 10.8 Seervada 公园最大流问题的最优解

这个例子很好地解释了用剩余网络的一条无向弧替代初始网络图中每条有向弧 $i \rightarrow j$ 的原因,以及为何当有流 c^* 分配到 $i \rightarrow j$ 时,会将 $j \rightarrow i$ 的剩余容量增加 c^* 。如果没有这一巧妙的设计,前 6 个迭代将无法进行。但是,从这一点上来讲,就不会存在增广链了(因为没有使用过的 $E \rightarrow B$ 的弧容量为 0)。因此,这个设计允许我们在第 7 次迭代中为 $O \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$ 增加 1 单位流量。事实上,增加的流量使在第 1 次迭代中分配给 $O \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow T$ 的流量中和了 1 单位,取而代之的是分别将 $O \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$ 和 $O \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow T$ 的流量增加 1 单位。

10.5.5 寻找增广链

当涉及一个大网络时,上述算法最大的困难是寻找增广链。下列系统化的步骤可以使问题得到简化。首先,确定从源点出发只通过一条弧就能到达的所有节点,且这条弧具有严格正值的剩余容量。然后,从对满足上述条件的每个节点出发,确定只通过一条弧就能到达的所有新的节点(从那些还未到达的节点中选取),这条弧也需具有严格正值的剩余容量。对于每个新的到达节点重复上述操作,最终可以得到一个包含所有节点的树,从源点出发能够沿着一条具有严格正值的剩余容量的路径到达这些节点。这样,如果增广链存在,通过这种展开式的过程总可以找到增广链。图 10.9 展示了这一过程,其剩余网络是前例第 6 次迭代后得到的。

尽管图 10.9 所示的过程比较简单,但如果能够判断何时得到最优解,就非常有帮助,这样就不会出现路径不存在而仍费力搜索的情况。一个称为最大流最小割定理的重要定理使得做出上述判断成为可能。一条割(Cut)为一组有向弧集,其中包含了由源点指向汇点的所有有向路径的至少一个弧。通过切割网络得到一条割来分析网络的方法有很多。对于任一给定的割,割值(Cut Value)是指其所包含的所有弧的容量之和。最大流最小割定理 (Max Flow Min-cut

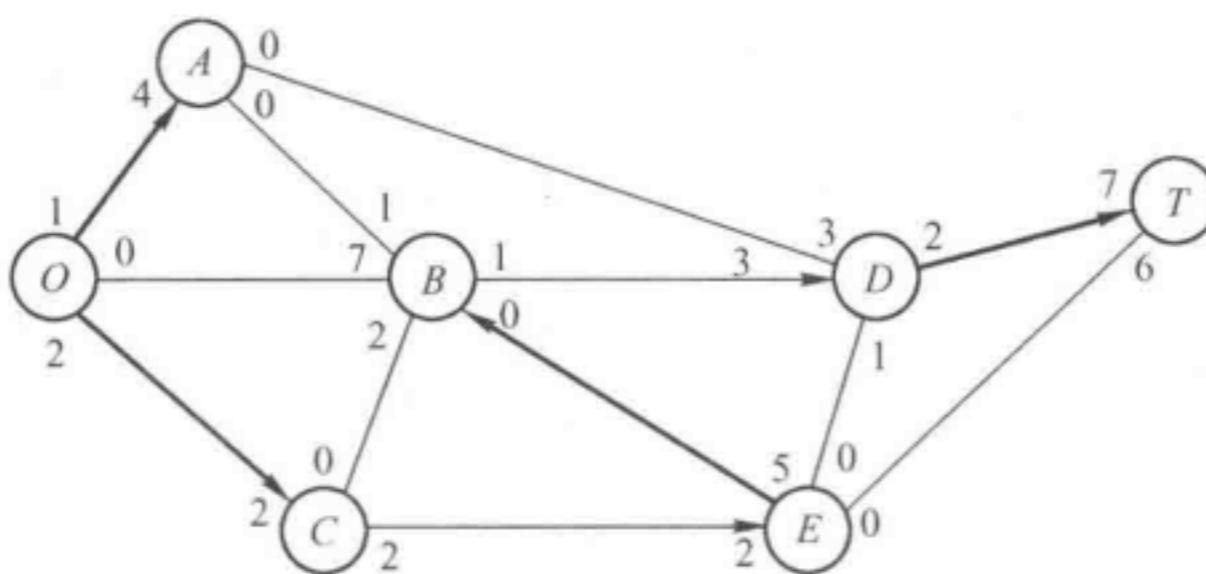


图 10.9 Seervada 公园最大流问题第 7 次迭代寻找增广链的过程

Theorem)指出,对于任意只含一个源点和汇点的网络,从源点到汇点的最大可行流等于网络所有割的最小割值。因而,如果用 F 来表示从源点到汇点的任何可行流的流量,任意一个割都将为 F 提供一个上界,并且最小割值等于 F 的最大值。因此,如果初始网络中存在一个割,其割值与当前求解步骤所得的 F 值相等,则当前的流量分配方式就是最优的。相应地,当剩余网络图中存在一个值为零的割时,也即获得了最优方案。

下面以图 10.7 中的网络图为例说明上述方法,网络的其中一条割如图 10.10 所示。其割值是 $3+4+1+6=14$,也即上面所求得的 F 的最大值,所以这条割就是最小割。同样也要注意到,在第 7 次迭代所产生的剩余网络中 $F=14$,相应割的值为 0,如果已经发现了这一点,就没有必要再去寻找另处的增广链了。

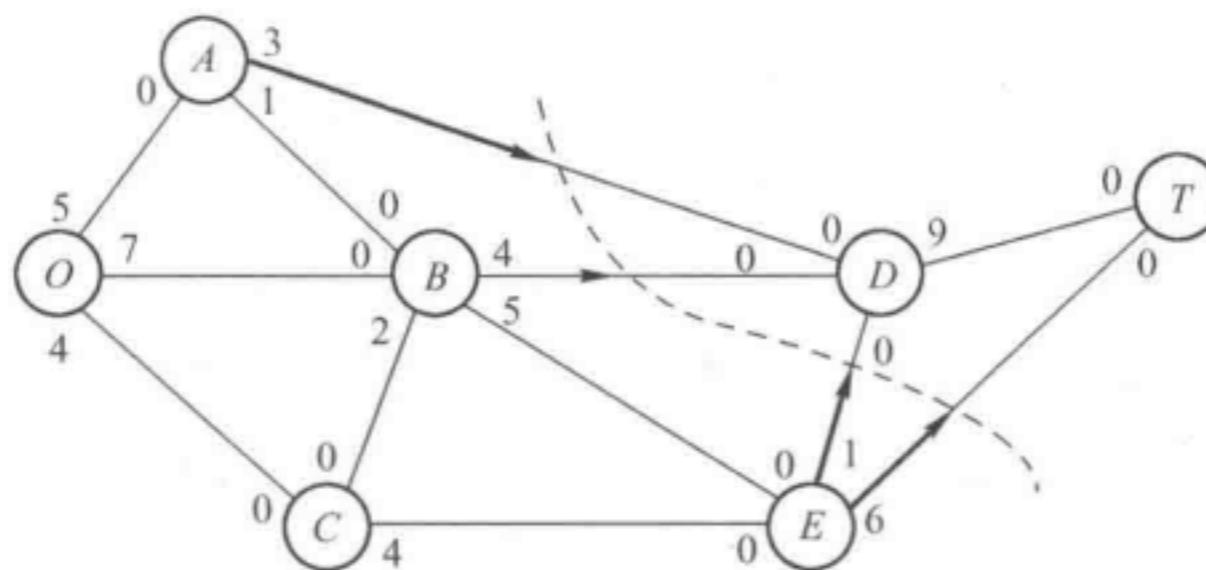


图 10.10 Seervada 公园最大流问题的最小割

10.5.6 用 Excel 描述和求解最大流问题

实践中,大部分最大流问题的规模都远大于 Seervada 公园问题,有些问题有数以千计的点和弧。以上介绍的增广链算法在解决大规模的问题时远比单纯形法更加有效。然而,对于规模适中的问题,运用基于单纯形法的 Excel 求解是比较合理和便捷的。

图 10.11 显示了 Seervada 公园最大流问题的电子表格表示形式。其格式与图 10.4 所示的 Seervada 公园最短路径问题相似。在 B 列和 C 列列出弧,在 F 列列出相对应的弧容量。决策变量是各个弧的流量,其数值通过可变单元格 Flow(D4:D15) 输入。通过图右下角给出的公式,用这些流量计算每个节点的净流量(见 H 列和 I 列)。根据求解对话框 Solver 中的第一组约束($I5:I9 = SupplyDemand$),中间节点(A, B, C, D 和 E)的净流量应该为 0。第二组约束($Flow \leq Capacity$)明确了弧容量限制。从源点(O)到汇点(T)的总流量应与由源点产生的流量(单元格 I4)相等,所以目标单元格 MaxFlow(D17) 应等于单元格 I4。在明确目标单元格的最大化目标值后,单击“Solve”按钮,获得的最优解就显示在 Flow(D4:D15) 区域。

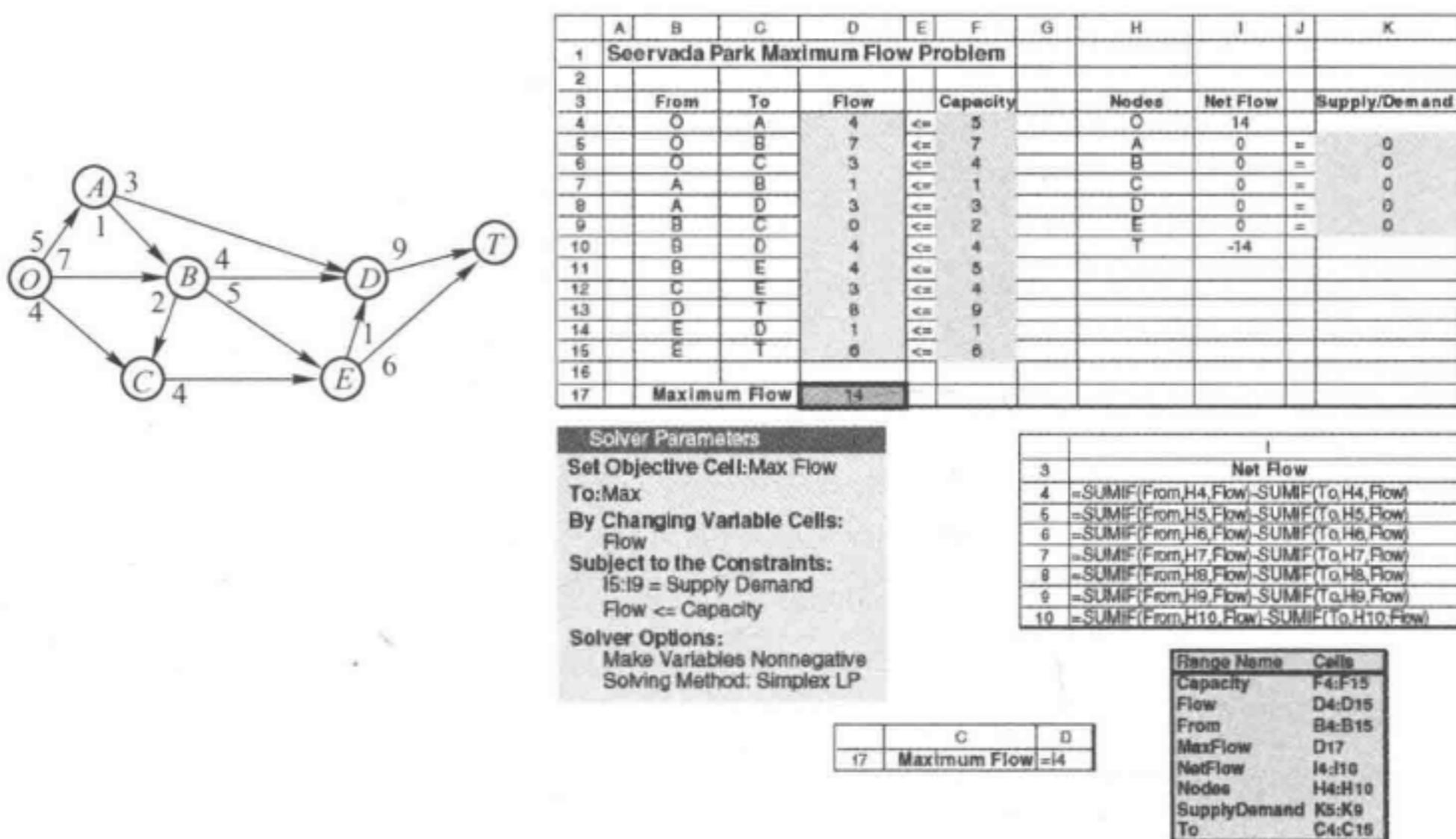


图 10.11 求解 Seervada 公园最大流问题的电子表格, 图中变化单元格 Flow (D4 : D15) 为由 Excel Solver 得到的最优解, 目标单元格 MaxFlow (D17) 给出了网络的最大流, 电子表格左边的网络图为图 10.6 给出的 Seervada 公园的最大流问题

10.6 最小费用流问题

最小费用流问题在网络优化模型中具有核心地位, 因为它不仅具有广泛的应用, 而且求解也非常方便。与最大流问题类似, 它关注的是通过有弧容量限制的网络的流量问题。与最短路径问题类似, 它关注经过一条弧的流量的费用(或距离)。类似于第 9 章的运输问题或指派问题, 它研究具有多个源点(供应节点)和多个终点(需求节点)的问题, 同时还考虑相关的费用。事实上, 此前学习的 4 个问题是特殊形式的最小费用流问题, 我们将做扼要的证明。

最小费用流问题之所以能够有效求解, 是因为它能转化为线性规划模型, 所以能够使用单纯形法的简化方式, 即网络单纯形法来求解。这一算法将在下一节描述。

最小费用流问题描述如下。

- (1) 网络是有向连通网络。
- (2) 至少有一个节点是供应节点。
- (3) 其他节点中至少有一个是需求节点。
- (4) 剩余的其他节点都是中间节点。
- (5) 一条弧的流向只能是按箭头所指的方向, 其最大流量由该弧的容量给出(如果两个方向上都有流, 应该用一对方向相反的弧示)。
- (6) 网络拥有足够数量和充分容量的弧, 使供应节点产生的所有流量都可以到达所有的需求节点。
- (7) 经过每条弧的流的费用与其流量成正比, 流的单位费用已知。
- (8) 目标是在满足给定需求的前提下, 使得通过网络发送供给的总成本最小(目标另一种描述是收益最大)。

10.6.1 一些应用

或许最小费用流问题的最重要应用是公司配送网络的运营。如表 10.3 第 1 行所列,这种应用通常涉及货物从货源地(工厂等)到中间存储设施(如有必要),再到客户的运输计划的制定。

对于有些最小费用流问题的应用,所有的转运节点为处理设施而非中间存储设施。如表 10.3 第 2 行所列的固体垃圾处理的例子,网络中的材料流以固体垃圾的产生地为源点,然后到达垃圾处理设施,将垃圾处理成垃圾场要求形式,最后再送到各垃圾场。然而,目标仍然是如何决策使总费用最低,这里的总费用包括运输费用和处理费用。

表 10.3 最小费用流问题的典型应用

应用类型	供应节点	转运节点	需求节点
配送网络运营	货源	中间存储设施	客户
固体废物管理	固体废物源	处理设施	垃圾场
供应网络运营	供应商	中转仓库	加工设施
产品车间组装	车间	产品的生产	产品的市场
现金流管理	某时间的现金来源	短期投资机会	某时间的现金需求

在其他例子中,需求节点也可能是处理设施。如表 10.3 的第 3 行,目标是针对从不同的可能供应商获得货物,将货物存入仓库(如果需要),然后运到公司的处理设施(工厂等)的过程,找出最小费用方案。由于所有供应商提供的供应总量多于公司的需求,因而,网络应包括一个虚拟需求节点,接受供应商未使用的供应量。

表 10.3 中的另一类应用实例(产品车间组装)说明,弧可以代表实物运输路线以外的事物。这类应用中,公司拥有多个工厂(供应节点),可以不同的成本生产同一种产品。从供应节点出发的每条弧表示在该工厂生产一种的产量,这条弧指向相应的转运节点。这样,转运节点输入端连接的是生产这一产品的各工厂,输出端连接产品相对应的客户(需求节点),目标是决定如何分配各个车间的产量,使得在满足各类产品需求的前提下总费用最小。

表 10.3 的最后一个应用实例(现金流管理)说明了不同的节点可以代表在不同时间发生的事件。在该例中,每一个供应节点表示一个特定时间(或时期),在这一时间,公司有一些可用的现金。类似地,每个需求节点表示在某个时间(或时期),公司将动用这些现金储备,每个节点的需求量代表将会用到的现金额。目标是通过在现金宽裕时期进行投资,使公司获得最大收入。因此,每个转运节点代表选择某种短期投资方式(如存入银行等)。最终所得的网络会有一个流序列,以表示现金可用、投资以及获益后使用的一系列计划安排。

应用案例

任何大型航空公司每天都要面对一个特殊挑战,即怎样有效弥补没有遵守飞行时刻表带来的影响。恶劣的天气或机械故障可能破坏飞机的起降,某个航班的延误或取消都会引起连锁性反应,该航班的延误或取消无法保证下一航班正常起飞。

为了确保飞机仍然执行各自的飞行航班,这种延误和取消可能需要对航班重新分配员工或者调整计划。2.2 节中的应用案例描述了大陆航空公司是如何应用运筹学快速为航班重新分配员工以达到成本最小化的目的。然而,要快速解决为航班重新分配飞机则需要其他方法。

一个航空公司在航班延误和取消的情况下可有两种方法为航班重新分配飞机:一种是换飞机,使随后航班的飞机代替延误或取消的飞机;另一种是应用空闲的飞机代替延误或取消的飞机。然而,当每天发生的延误或取消较多时,快速制定相应决策是一项艰巨的任务。

联合航空公司在应用运筹学解决该问题方面处于领先地位。该问题的建模和求解可以看成是一个最小成本流问题,其中

网络中的每个节点代表一个机场,每条弧代表一个航线,模型的目标是保证飞机飞过整个网络,并且使延误和取消所造成成本最小。当一个状态监控子系统警告运筹控制者延误或取消将要发生时,控制者向模型输入必要的输入变量,接着对模型进行求解,模型在几分钟内提供出新的操作计划。最小化成本流问题的应用减少了大约50%的乘客延误。

资料来源:A. Rakshit, N. Krishnamunhy, and C. Yu: "System Operations Advisor: A Real-Time Decision Support System for Managing Airline Operations at United Airlines." *Interfaces*. 26(2): 50-58, Mar.-Apr. 1996. (以下网址提供本文的链接:www.mhhe.com/hillier.)

10.6.2 建立模型

对于一个有向连通网络,其 n 个节点中至少包含一个供应节点和一个需求节点。决策变量是 X_{ij} =经过弧 $i\rightarrow j$ 的流。

已知的信息包括:

c_{ij} =流经弧 $i\rightarrow j$ 的每单位流的费用;

u_{ij} =弧 $i\rightarrow j$ 的弧容量;

b_i =节点*i*产生的净流量;

b_i 的值取决于节点*i*的性质,其中:

$b_i > 0$,若节点*i*为供应节点;

$b_i < 0$,若节点*i*为需求节点,

$b_i = 0$,若节点*i*为转运节点。

目标是在满足预定需求的情况下,使通过网络传送可用供应量的总费用最小。

可用下面的线性规划表达该问题:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

对任意节点*i*,满足

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1}^n x_{ji} = b_i$$

且对任意弧 $i\rightarrow j$,有

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$$

节点约束的第一项求和表示流出节点*i*的总流量,第二项求和表示流入节点*i*的总流量,所以两者之差就是在节点*i*产生的净流量。

这些节点约束的系数的模式是最小费用流问题关键特征。识别最小费用流问题并非总是很容易,但通过问题建模后,约束系数的模式为识别这类问题一个很好的途径,接下来就可以使用网络单纯形法进行有效求解了。

在有些应用中,通过每个弧 $i\rightarrow j$ 的流量都必须有下界 $L_{ij}>0$ 。当遇到这种情况时,可以使用一个替代变量 $x'_{ij}=x_{ij}-L_{ij}$,则用 $x'_{ij}+L_{ij}$ 替代 x_{ij} ,将模型转换成上面的非负约束的形式。

实际上,并不能保证问题都有可行的解,这一定程度上取决于网络中的弧及弧容量。然而,对一个设计合理的网络,下面的几个条件是必要的。

可行解的性质:最小费用流问题有可行解的一个必要条件为

$$\sum_{i=1}^n b_i = 0$$

即供应节点产生的总流量等于在需求节点吸收的总流量。

如果有些应用的 b_i 值违反了这一条件,通常的解释是供给量或需求量(无论哪一个)为上界而非实际值。这种情形曾在9.1节的运输问题中出现过,当时的做法是:增加一个虚拟收点来接

收额外供给量,或者增加一个发点来产生额外的需求量。现在类似的步骤是:增加一个虚拟需求节点吸收剩余的供给(从每个供应节点到这个节点的弧的弧容量 $c_{ij}=0$),或者增加一个虚拟供应节点产生多余的需求量(从这个节点到每个需求节点的弧的弧容量 $c_{ij}=0$)。

对于很多应用来说, b_i 和 u_{ij} 都有整数值,这就潜在要求流量 x_{ij} 也是整数。幸而与运输问题一样,由于下面的性质,虽然这个变量没有明确的整数约束,仍保证结果为整数解。

整数解性质:对于 b_i 和 u_{ij} 都为整数的最小费用流问题,每个基可行解(包括最优解)的所有基本变量也为整数值。

10.6.3 例子

图 10.12 给出了最小费用流问题的一个例子。该网络实际上是 3.4 节中 Distribution Unlimited 公司的配送网络问题(图 3.13)。图 3.13 给出了 b_i 、 c_{ij} 的值, u_{ij} 的值在这里给出。在图 10.12 中, b_i 的值在节点附近的方括号内标出,所以供应节点($b_i > 0$)是 A 和 B(公司的两个工厂),需求节点($b_i < 0$)是 D 和 E(两个仓库),转运节点($b_i = 0$)是 C(配送中心)。弧上标注的值为 c_{ij} 的值。

本例中,除了两条弧以外,其他弧的容量都超过了所生成的总流量(90),所以实际上可认为 $u_{ij} = \infty$ 。两条例外的弧是弧 $A \rightarrow B$ (对应的 $u_{AB} = 10$)和弧 $C \rightarrow E$ (对应的 $u_{CE} = 80$)。

本例的线性规划模型为

$$\text{Min } Z = 2x_{AB} + 4x_{AC} + 9x_{AD} + 3x_{BC} + x_{CE} + 3x_{DE} + 2x_{ED}$$

满足

$$\begin{aligned} x_{AB} + x_{AC} + x_{AD} &= 50 \\ -x_{AB} + x_{BC} &= 40 \\ -x_{AC} - x_{BC} + x_{CE} &= 0 \\ -x_{AD} + x_{DE} - x_{ED} &= -30 \\ -x_{CE} - x_{DE} + x_{ED} &= -60 \end{aligned}$$

且 $x_{AB} \leq 10$, $x_{CE} \leq 80$, 所有的 $x_{ij} \geq 0$ 。

需要注意这 5 个节点约束(等式约束)中每个变量的系数。每个变量都有两个非零系数,一个 是 +1,另一个是 -1。每个最小费用流问题都具有这一模式,正是这种特殊的结构导致了整数解性质。

这一特殊结构的另一个含义是节点约束中有(任意)一个是冗余的。原因是对这些约束方程求和后,等式两边都为零(假如可行解存在,那么 b_i 的总和为零)。只需 $n-1$ 个非冗余的节点约束方程,就可为求得基可行解提供 $n-1$ 个基变量。在下一节中,读者会看到,使用网络单纯形法时,把 $x_{ij} \leq u_{ij}$ 看做非负约束,所以基变量的总个数是 $n-1$,这导致了生成树的 $n-1$ 个弧和 $n-1$ 个基变量一一对应。后面将会详细阐述。

10.6.4 用 Excel 描述和求解最小费用流问题

Excel 为小规模的最小费用流问题提供了一种简便的建模和求解方法,有时较大规模的问题也可使用。图 10.13 展示了具体做法。其格式几乎与图 10.11 的最大流问题相同,不同的是,现

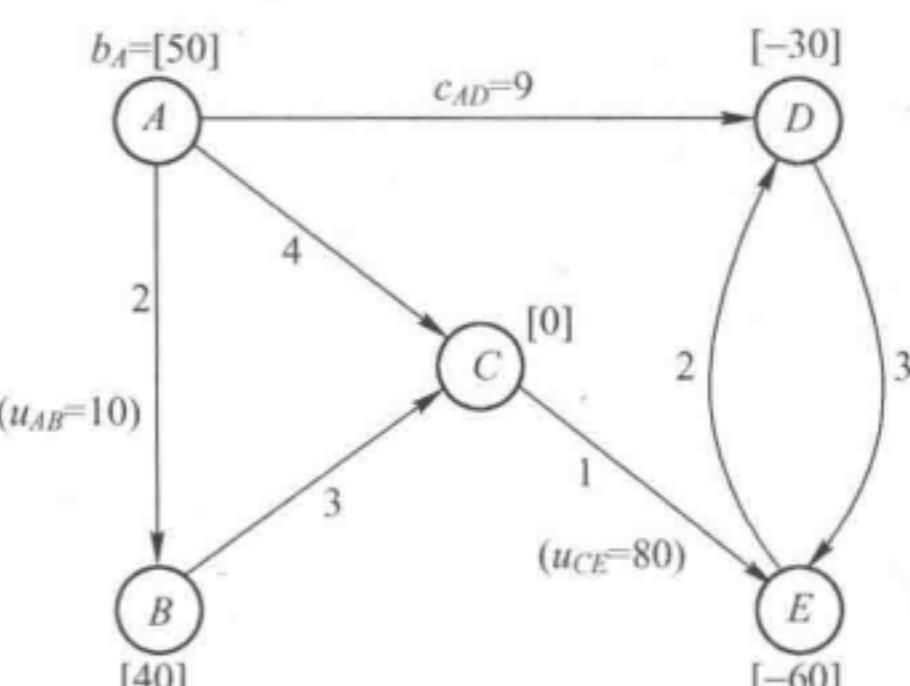


图 10.12 将 Distribution Unlimited 公司的问题看成是一个最小费用流问题

在需要考虑单位费用(c_{ij} , 在第 G 列)。因为每个节点的 b_i 值都是明确的, 所以所有节点都必须包括净流量约束。但是, 仅有两个弧恰好需要弧容量约束。目标单元格 Total Cost(D12)现在给出的是通过网络的流量(运输量)的总费用(其计算等式在图的底部), 所以 Solver 对话框中定义的目标是使这个总费用最小。单击“Solver”按钮后, 可变单元格 Ship(D4:10)显示的就是运行后求得的最优解。

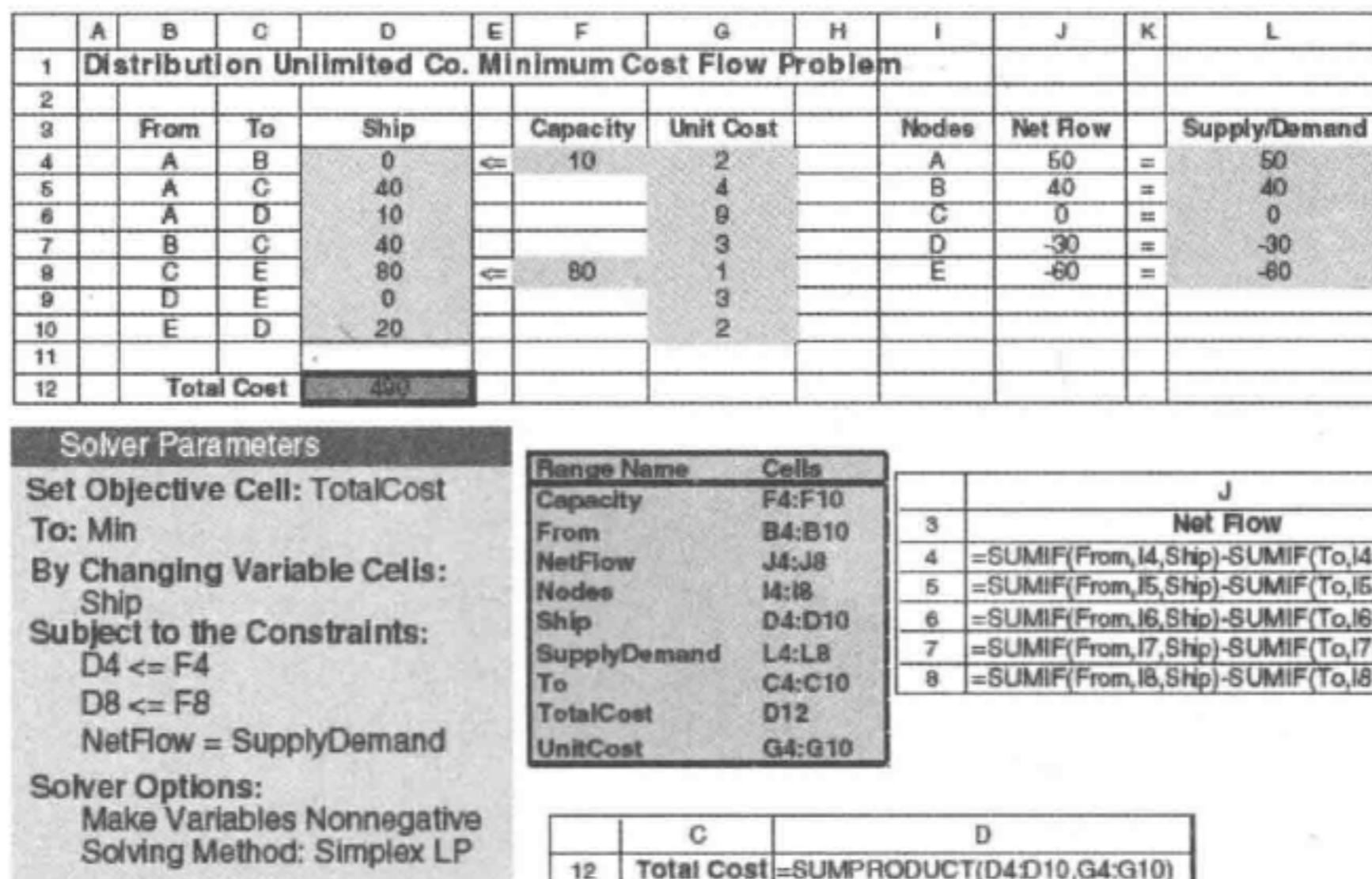


图 10.13 用电子表格对 Distribution Unlimited 公司最小费用流问题进行建模和求解, 图中变化单元格 Ship(D4:10)为应用 Excel Solver 求得的最优解, 目标单元格 Total Cost(D12)给出了通过该网络运送流量的总费用

对于大多数较大规模的最小费用流问题, 下一节将要介绍的网络单纯形法提供了一种高效的求解方法。这种方法对求解下面简要描述的最小费用流问题也有一定的吸引力。一些数学软件包通常包含了该算法。

接下来还将用网络单纯形法求解该例。但是, 首先看一些特殊案例是如何适用于最小费用流问题的网络形式。

10.6.5 特殊案例

运输问题: 将 9.1 节中的运输问题归结为一个最小费用流问题, 为所有货源提供一个供应节点, 且为所有目标点提供一个需求节点, 但转节点不包括在网络中。所有的弧都沿着从供应节点到需求节点这个方向, x_{ij} 表示通过弧 $i \rightarrow j$ 的流量, 对应从供应节点到需求节点的运输量。流量的单位费用 c_{ij} 对应单位运输费用。因为运输问题对 x_{ij} 没有上界约束, 所以所有的 $u_{ij} = \infty$ 。

使用这种方式求解表 9.2 中的 P&T 公司运输问题, 生成如图 9.2 所示的网络图。一般运输问题对应的网络如图 9.3 所示。

指派问题: 在 9.3 节讨论过的指派问题是一种特殊的运输问题, 它也可以归结为相同形式的最小费用流问题。附加因素: ①供应节点的数量等于需求节点的数量; ②每个供应节点 $b_i = 1$; ③对每个需求节点 $b_i = 1$ 。图 9.5 展示了一般指派问题的这种建模形式。

转运问题: 除了不具有(有限的)弧容量, 这一特殊的案例实际上包含了所有最小费用流问题的一般特征。因而, 对于任何最小费用流问题, 只要它的每个弧都可以承受所期望的流, 就可以称为转运问题。

例如, 如图 10.13 所示的 Distribution Unlimited 公司的问题, 如果去掉经由弧 $A \rightarrow B$ 和 $C \rightarrow E$

流容量的上界,那么,它就是一个转运问题。

转运问题通常起源于一般的运输问题,在这些运输问题中,在产地和销地之间分配的物资可以首先通过中转节点。那些中转站可能包括其他产地与销地,额外的转移站也会以转运节点的形式出现。例如,Distribution Unlimited 公司的问题可以看做一般运输问题,有两个产地(图 10.13 中,分别用 A 和 B 表示的两个工厂)、两个销地(分别用 D 和 E 表示的两个仓库),以及一个额外的中转站(用 C 表示的分配中心)。

最短路径问题:现在考虑 10.3 节中描述的最短路径问题。为了将这一问题归结为最小费用流问题,把起点作为供应量为 1 的供应节点,把终点看做需求量为 1 的需求节点,其他节点为转运节点。因为最短路径问题的网络是无向的,但是最小费用流是有向的,因此我们把每条边替换为一对方向相反的有向弧(用带有双向箭头的线表示)。唯一的例外是,供应节点和需求节点不需要双向。用节点 i 和 j 之间的距离作为流的单位费用 c_{ij} 或 c_{ji} 。与前面的案例一样,弧上没有容量限制,所以所有的 $u_{ij} = \infty$ 。

图 10.14 描述了将图 10.1 中提到的 Seervada 公园最短路径问题转化为最小费用流问题。在图 10.1 中靠近弧的数字现在用来表示每一方向上流量的单位费用。

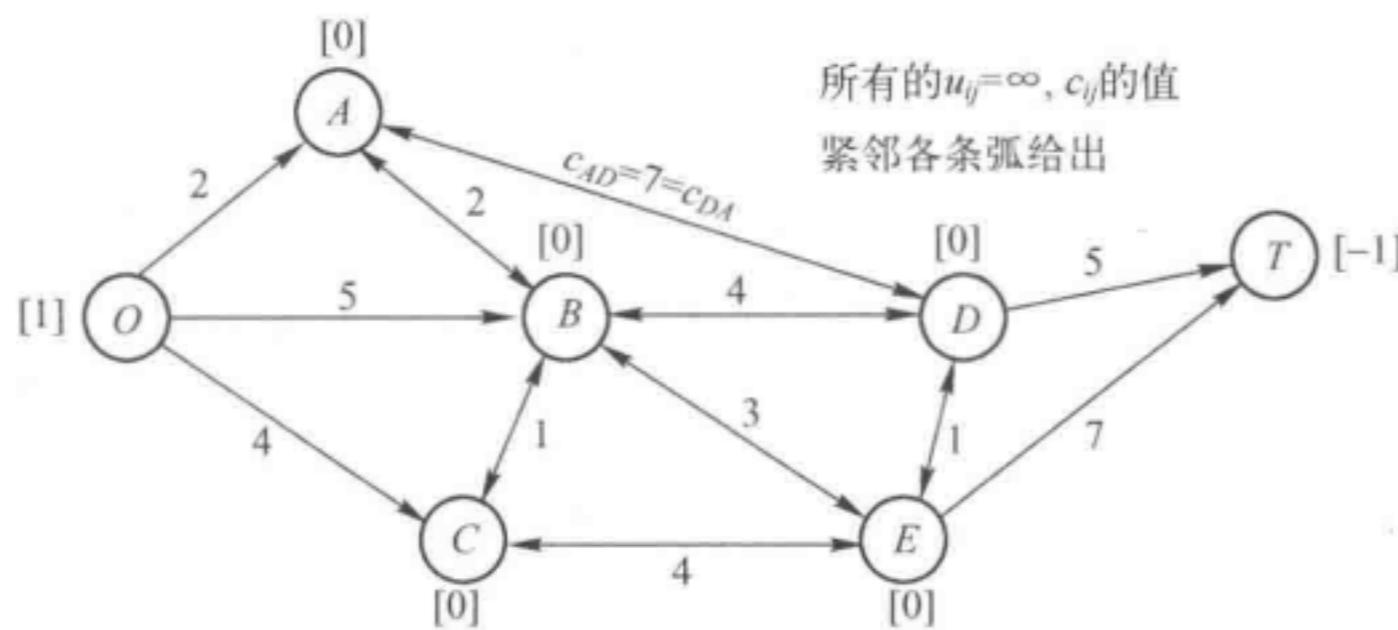


图 10.14 将 Seervada 公园最短路径问题归结为最小费用流问题

最大流问题:最后将讨论的特殊案例是 10.5 节中描述的最大流问题。该案例中的网络提供了一个供应节点(源)、一个需求节点(汇)、其他转载节点以及各种的弧和弧容量。对于这一问题,只需要做 3 处调整就可转化为最小费用流问题。第一,对所有的弧令 $c_{ij} = 0$,以反映最大流问题所缺少的费用度量。第二,选取网络最大可行流量的安全上界值 F ,然后,分别为供应节点和需求节点分配值为 F 的供应量和需求量。第三,添加一条从供应节点指向需求节点的弧,并设其有足够大的单位费用 $c_{OT} = M$ 和无限大的容量($u_{OT} = \infty$)。由于这条弧的单位费用大于 0,且其他所有弧上的单位费用为 0,所以最小费用流问题将以最大可能的流量通过其他弧,从而解决最大流问题。

将这种建模方式应用于图 10.6 所示的 Seervada 公园最大流问题,得到图 10.15 所示的网络,其中各条弧邻近的数字表示弧的容量。

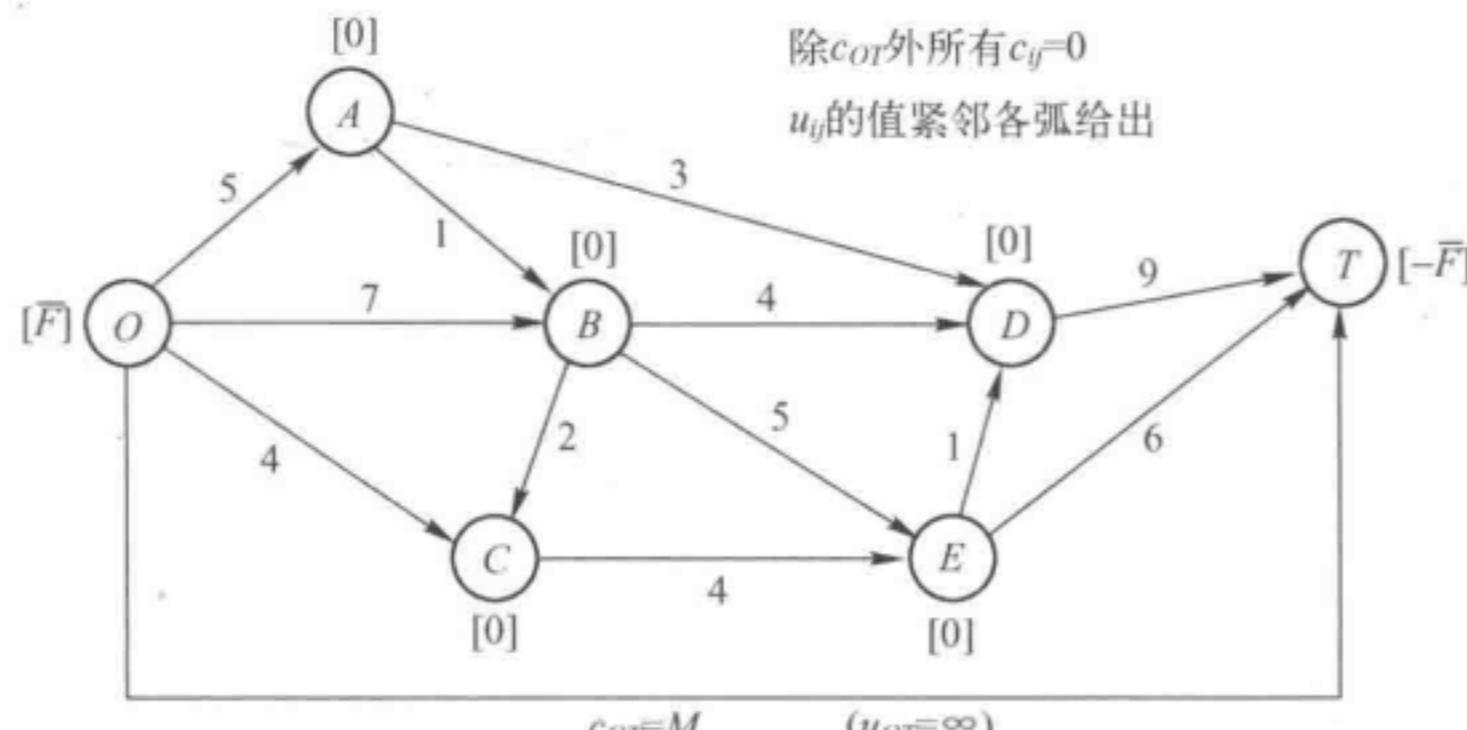


图 10.15 Seervada 公园最大流问题转化为最小费用流问题

10.6.6 小结

除了运输问题外,其他特殊案例都已经在本章和第9章中给出。讨论时,已经给出了高效的专用求解算法。所以,没有必要将这些特殊案例转化为最小费用流问题来解。然而,当很难用计算机编码实现这些专用算法时,可以用网络单纯形法替代。事实上,最近的一些应用表明网络单纯形法十分有效,能很好地替换专用算法。

这些问题是最小费用流问题的特殊情况,其中一个原因是,最小费用流问题和网络单纯形法的潜在原理为这些特殊案例提供了统一的理论;另一个原因是,最小费用流问题的许多应用包括了这些特殊案例的一个或多个特点。所以,有必要了解如何利用这些特点分析解决普通问题。

10.7 网络单纯形法

网络单纯形法是用于解决最小费用流问题的单纯形法的改进方法。因此,在进行每次迭代时有着相同的基本步骤——找到输入基变量,确定出基变量,给出新的基可行解——目的是从当前的基可行解移到另一个相邻的更优的基可行解。只是在执行上述步骤时不是使用单纯形表,而是利用网络结构。

读者可能注意到网络单纯形法与9.2节中的运输单纯形法有一些相似之处。事实上,这两种方法都属于单纯形法的改进形式。运输单纯形法为解决运输问题提供了一种替代算法,类似地,网络单纯形法也为解决一些类型的小费用流问题拓展了思路。

本节只对网络单纯形法的主要概念进行简要的描述,不涉及完整的计算机应用过程所需要的详细过程,至于如何构建初始基可行解,怎样以最有效的方式执行特定的计算(如找入基变量),这些更详细的介绍请阅读参考文献[1]中给出的其他专业参考书。

10.7.1 引入上界法

本节引入8.3节所述的上界法来有效解决弧容量约束 $x_{ij} \leq u_{ij}$ 。与函数约束不同,这些约束都是非负约束,因此,仅当在决定出基变量时才加以考虑。特别是当入基变量从0逐渐增加时,出基本变量是第一个达到下界(0)或上界(u_{ij})的基变量。当一个非基变量等于当其上界 $x_{ij} = u_{ij}$ 时,被 $x_{ij} = u_{ij} - y_{ij}$ 替换,所以 $y_{ij} = 0$ 成为非基变量(详见8.3节)。

有趣的是,在本节中, y_{ij} 有一个网络上的解释。无论 y_{ij} 何时成为一个具有严格正值($\leq u_{ij}$)的基变,这个值都可以被视为从节点 j 到节点 i 的流量(与弧 $i \rightarrow j$ 的方向相反),更准确地说,是对先前从节点 i 到节点 j ($x_{ij} = u_{ij}$)已分配流量的抵消。因此,当 $x_{ij} = u_{ij}$ 由 $x_{ij} = u_{ij} - y_{ij}$ 替代时,正向弧 $i \rightarrow j$ 也可由反向弧 $j \rightarrow i$ 替代,新弧具有弧容量 u_{ij} (最多有流 $x_{ij} = u_{ij}$ 可用来抵消)以及单位费用 c_{ij} (每单位流量可节约成本 c_{ij})。为了反映通过已删除弧的流量 $x_{ij} = u_{ij}$,通过减少 b_i (通过 u_{ij})、增加 b_j (通过 u_{ij}),以转移产生自节点 i 到 j 网络流量的总值。如果 y_{ij} 达到上界成为出基变量时,将 $y_{ij} = u_{ij}$ 替代为 $y_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$,则 $x_{ij} = 0$ 成为新的非基变量,上述步骤将被反转。

图10.12通过一个最小费用流问题展示了上述过程。网络单纯形法生成了一系列基可行解,假设 x_{AB} 是通过反复迭代达到其上界10的出基变量,则 $x_{AB} = 10$ 由 $x_{AB} = 10 - y_{AB}$ 代替, $y_{AB} = 0$ 成为新的非基变量。同时,弧 $A \rightarrow B$ 被弧 $B \rightarrow A$ 替代(其流量为 y_{AB}),新的弧容量为10,单位费用为-2。考虑 $x_{AB} = 10$,将 b_A 从50减小到40,将 b_B 从40增加到50,调整后的

网络如图 10.16 所示。

后面,将用这个例子展示网络单纯形法的全过程。基于网络图 10.16,从 $y_{AB} = 0$ 为非基变量开始,经过迭代 x_{CE} 达到上界 80,因而,被 $x_{CE} = 80 - y_{CE}$ 替代,类似地,下一步迭代 y_{AB} 达到其上界 10。所有这些运算都通过网络直接进行,不需要标记弧流量或跟踪哪些弧是正向弧哪些是反向。使用上界法仅保留节点约束(流出-流入 = b_i)作为唯一的函数约束。最小费用流问题倾向于具有远多于节点的弧数,因而,得到的函数约束数远小于弧容量约束数。网络单纯形法的计算时间随着函数约束数量的增加而急剧增加,但是相对于变量数的增加而增加的相对缓慢。因此,采用上界法可以节约大量计算时间。

然而,这种方法对无容量的最小费用流问题(包括上一节中除最后一类特殊例子以外的所有例子)是不必要的,因为这类问题没有弧容量约束。

10.7.2 基可行解和可行生成树的一致性

应用网络单纯形法最重要的概念是基可行解的网络表示。回顾 10.6 节所述的一些内容,具有 n 个节点,每个基可行解有 $n-1$ 个基变量,每个基变量 x_{ij} 代表通过弧 $i \rightarrow j$ 的流量。这 $n-1$ 条弧称为基本弧(类似地,与非基变量对应的弧 $x_{ij} = 0$ 或 $y_{ij} = 0$,称为非基本弧)。

基本弧的一个关键属性是不会形成无方向的环(该属性可防止求得的解为其他可行解的线性组合而违背基可行解的一个通用属性)。然而,不含无方向环的任意 $n-1$ 条弧的集合可构成一个生成树,因而,任意 $n-1$ 条基本弧的全集会构成一个生成树。

这样,基可行解就能够通过解生成树获得。获得生成树解(Spanning Tree Solution)的步骤如下。

- (1) 对于不在生成树中的弧(即非基本弧),将相应的变量(x_{ij} 或 y_{ij})置为 0。
- (2) 对于在生成树中的弧(即基本弧),通过节点约束构成的线性方程解出相应的变量(x_{ij} 或 y_{ij})。

事实上,网络单纯形法从当前基可行解寻找新的基可行解的效率更高,不用求解线性方程。需要注意的是,上述过程并未考虑基变量的非负约束和弧容量约束,所以得出的生成树解不一定是满足这些约束条件的可行解,这就引出了可行生成树的定义。

可行生成树(Feasible Spanning Tree):既满足节点约束,又满足非负约束或弧容量约束($0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ 或 $0 \leq y_{ij} \leq u_{ij}$)的生成树解。

基于以上的定义,总结出如下的网络单纯形法基本定理。

网络单纯形法基本定理:基本解是生成树解(逆命题也成立),可行生成树解是基可行解解(逆命题也成立)。

现在以图 10.16 所示的网络阐述基本定理的应用。图 10.16 是图 10.12 将 $x_{AB} = 10$ 用 $x_{AB} = 10 - y_{AB}$ 替代的结果,图 10.16 所示的网络的一个生成树如图 10.3(e) 所示,其中有弧 $A \rightarrow D$ 、 $D \rightarrow E$ 、 $C \rightarrow E$ 和 $B \rightarrow C$ 。由这些基本弧,通过下面的过程可以找到生成树解。左侧是 10.6 节中将 $10 - y_{AB}$ 替换 x_{AB} 后给出的节点约束,黑体代表基本弧。右侧从上到下依次表示变量的设置和计算为

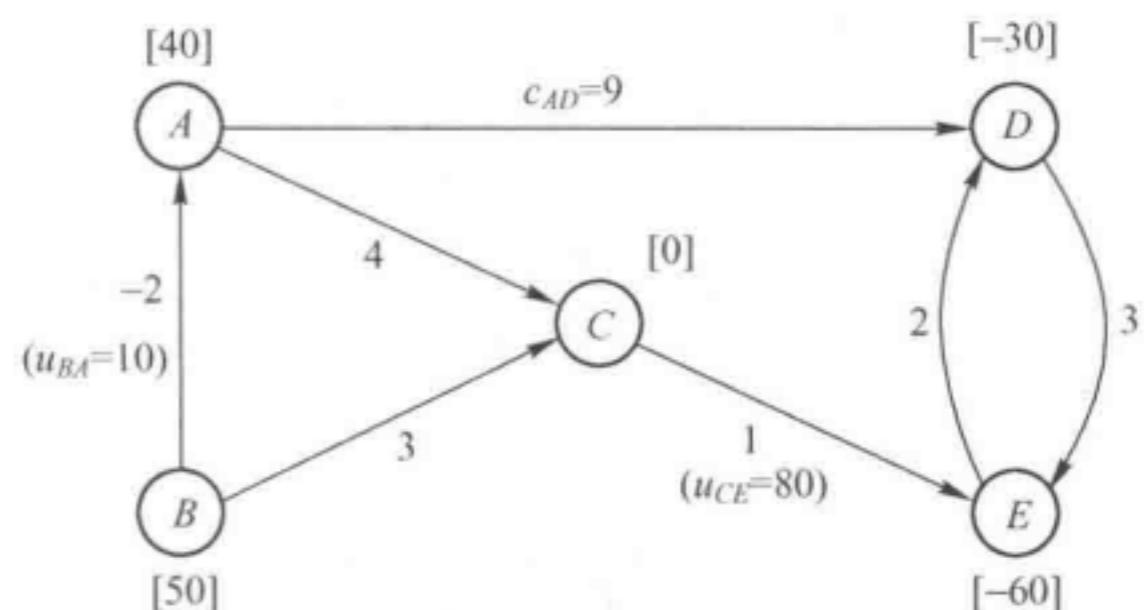


图 10.16 引入上界法调整后的网络

$$\begin{array}{ll}
 \frac{y_{AB} = 0, x_{AC} = 0, x_{ED} = 0}{= 40 \quad x_{AD} = 40} \\
 -y_{AB} + x_{AC} + x_{AD} \\
 y_{AB} \quad +x_{BC} \quad = 50 \quad x_{BC} = 50 \\
 -x_{AC} \quad -x_{BC} + x_{CE} \quad = 0 \quad x_{CE} = 50 \\
 -x_{AD} \quad +x_{DE} - x_{ED} = -30 \quad x_{DE} = 10 \\
 -x_{CE} - x_{DE} + x_{ED} = -60 \quad \text{冗余}
 \end{array}$$

由于这些基变量的值都满足非负约束和一个相关的容量约束($x_{CE} \leq 80$)，因此，该生成树解也是可行生成树解，从而得到基可行解。

将用该解作为初始基可行解解释网络单纯形法。图 10.17 通过网络表示了可行生成树和相应的解，其中弧上的数字现在表示流量(x_{ij} 的值)而不是先前的单位费用 c_{ij} 。

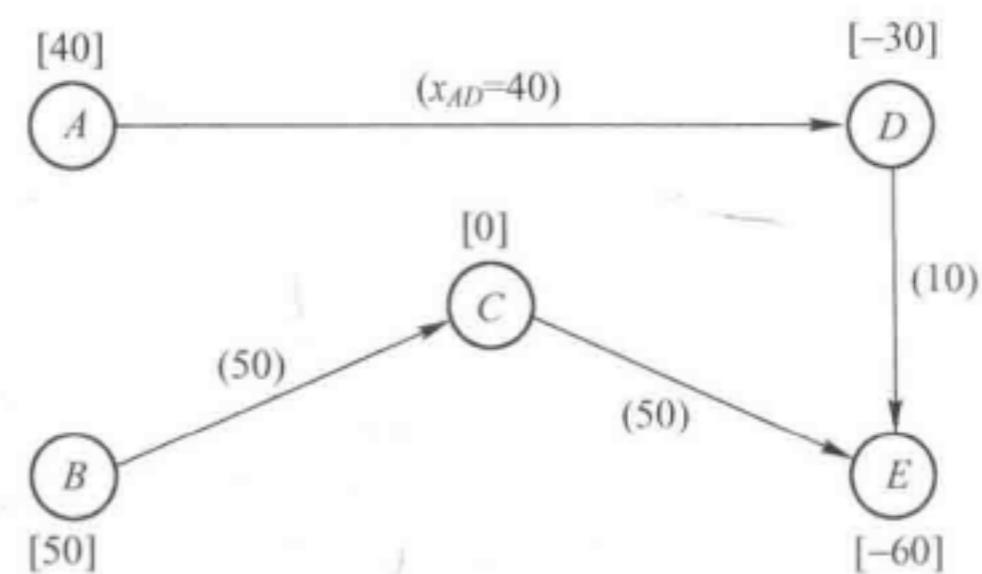


图 10.17 初始可行生成树和解示例

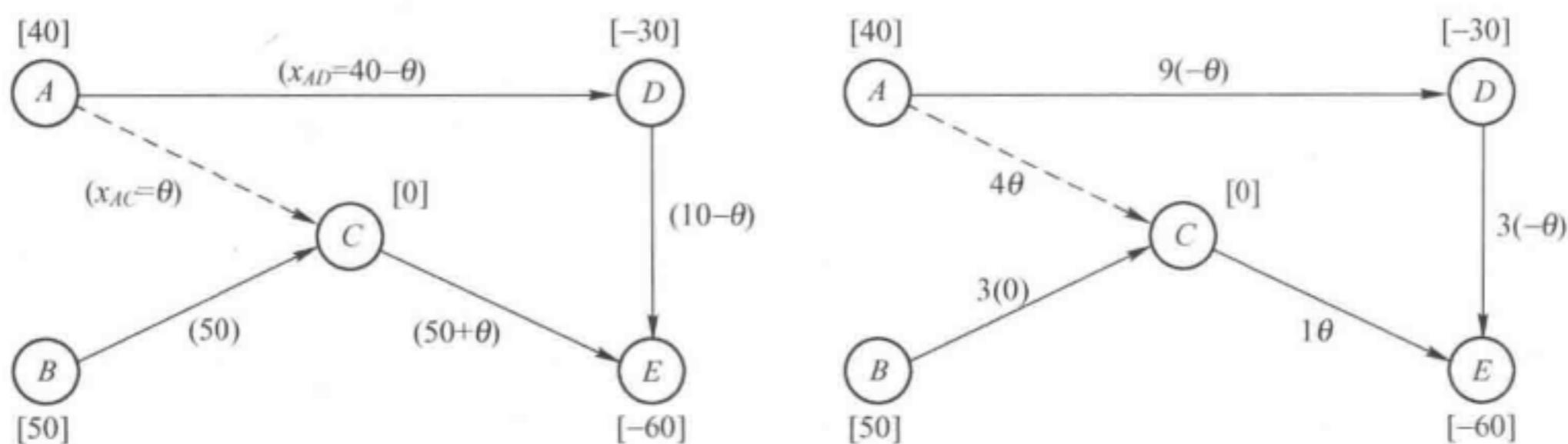
10.7.3 选择入基变量

在开始网络单纯法的迭代之前，先回顾一下标准单纯形法选择入基变量的标准，即选择当非基变量从 0 增加时使目标 Z 增加速率最快的非基变量。现在看一下，不使用单纯形表而使用网络单纯性法应如何做呢？

继续前面的例子，考虑初始基可行解中的非基变量 x_{AC} ，对应着非基本弧 $A \rightarrow C$ 。将 x_{AC} 从 0 增至 θ 意味着需要在图 10.17 中增加流量为 θ 的弧 $A \rightarrow C$ 。在一个生成树上增加非基本弧，从而在生成树中形成了一个独特的无向环，如图 10.18 所示的 $AC-CE-DE-AD$ 。同时，图 10.18 也表明了弧 $A \rightarrow C$ 流量增加 θ 时，对网络中其他弧流量的影响。即在环中与弧 $A \rightarrow C$ 同向的弧(如 $C \rightarrow E$)流量都增加了 θ ，弧 $A \rightarrow C$ 反向的弧(如弧 $D \rightarrow E$ 和 $A \rightarrow D$)流量相应减少 θ ，不在环中的弧($B \rightarrow C$)流量不变。

弧 $A \rightarrow C$ 流量增加 θ 时对 Z (总流量的费用)的增加效果是怎样的呢？图 10.19 给出了回答，即图 10.18 中每条弧的流量变化与单位成本的积。因而， Z 的总变化量为

$$\begin{aligned}
 \Delta Z &= c_{AC}\theta + c_{CE}\theta + c_{DE}(-\theta) + c_{AD}(-\theta) \\
 &= 4\theta + \theta - 3\theta - 9\theta = -7\theta
 \end{aligned}$$

图 10.18 初始可行生成树中弧 $A \rightarrow C$ 流量增加 θ 后的效应图 10.19 初始可行生成树中弧 $A \rightarrow C$ 流量增加 θ 后费用的增加

设 $\theta=1$ ，则 ΔZ 代表了 x_{AC} 增加时 Z 的变化率， $\Delta Z=-7$ 。

因为目标是使 Z 最小化， x_{AC} 增加并不希望 Z 增加，所以 x_{AC} 可以成为候选的入基变量。

还需要对其他非基变量进行同样的分析,以找到最终的入基变量。在本例中,还有另外两个非基变量 y_{AB} 和 x_{ED} ,对应着图 10.16 中的另外两个非基本弧 $B \rightarrow A$ 和 $E \rightarrow D$ 。

图 10.20 显示了在初始可行生成树(图 10.17)中增加弧 $B \rightarrow A$ 及流量 θ 后网络中费用的增加情况。增加弧 $B \rightarrow A$ 后形成了无向环 $BA-AD-DE-CE-BC$,因此,当 $\theta=1$ 时,有

$$\Delta Z = -2\theta + 9\theta + 3\theta + 1(-\theta) + 3(-\theta) = 6\theta = 6$$

当 y_{AB} (通过反向弧 $B \rightarrow A$ 的流)从零开始增加时,Z 不减反升,这一事实说明,该变量不能作为候选入基变量(记住: y_{AB} 从零开始增加事实上意味着通过弧 $A \rightarrow B$ 的流 x_{AB} 从上界 10 减少)。

对于最后一个非基本弧 $E \rightarrow D$ 得到的结果也是类似的。将该弧与流加到初始可行生成树生成了如图 10.21 所示的无向环 $ED-DE$,因此,弧 $D \rightarrow E$ 的流量也增加了 θ ,但其他弧都未受到影响。因此,有

$$\Delta Z = 2\theta + 3\theta = 5\theta = 5 \quad (\theta=1)$$

所以 x_{ED} 也不能作为候选入基变量。

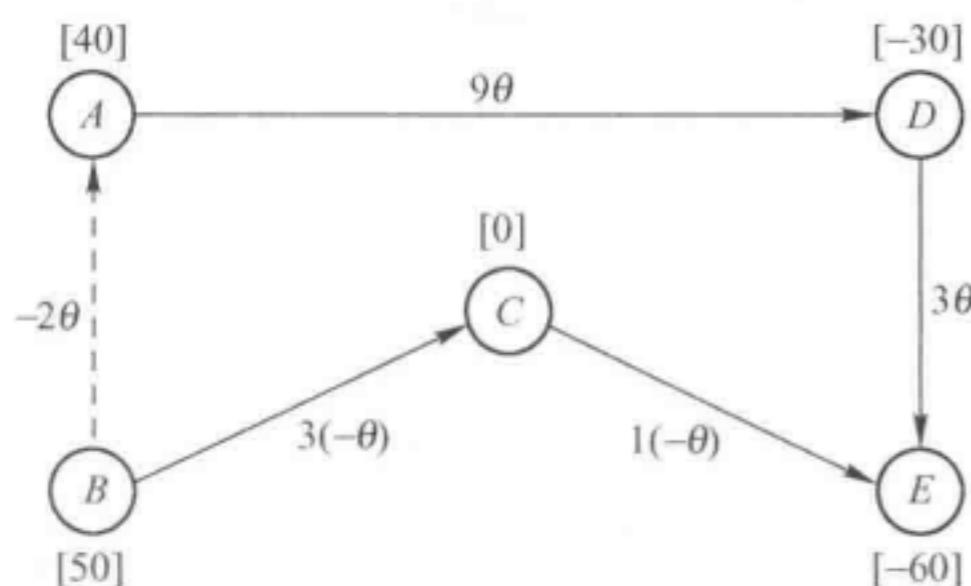


图 10.20 初始可行生成树中增加弧 $B \rightarrow A$ 及流量 θ 后网络中费用的增加情况

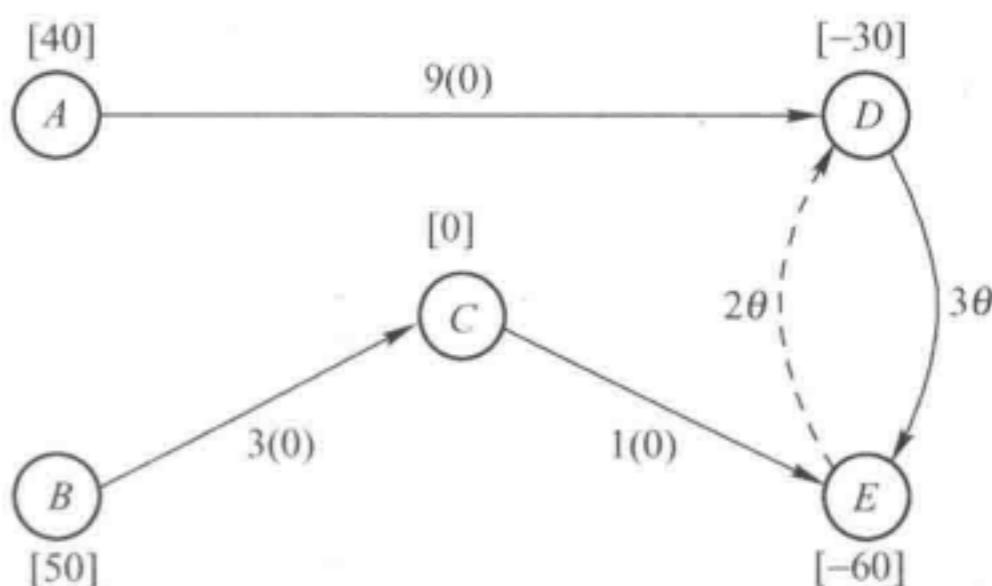


图 10.21 初始可行生成树中增加弧 $E \rightarrow D$ 及流量 θ 后网络中费用的增加情况

因此,有

$$\theta \Delta Z = \begin{cases} -7, & \Delta x_{AC} = 1 \\ 6, & \Delta y_{AB} = 1 \\ 5, & \Delta x_{ED} = 1 \end{cases}$$

只有 x_{AC} 使 Z 减小,所以 x_{AC} 将作为第 1 次迭代的入基变量。如果还存在其他使 ΔZ 为负的非基变量,则将使 ΔZ 绝对值最大的非基变量作为入基变量(如果不存在使 ΔZ 为负的非基变量,则当前基可行解即为最优)。

除识别无向环外,获得网络单纯形法中 ΔZ 的值还可通一种较为有效的代数方法(尤其是对于较大规模的网络)。其过程与运输单纯形法对每个非基变量 x_{ij} 解出 u_i 和 v_j 从而获得 $c_{ij} - u_i - v_j$ 的做法类似(见 9.2 节)。所以本章不再深入介绍这一过程,读者在做本章的习题时可以采用识别无向环的方法。

10.7.4 寻找出基变量和下一个基可行解

确定入基变量后,紧接着下一步需要同时寻找出基变量和下一个基可行解。对于例子中的第 1 次迭代,关键点如图 10.18 所示。 x_{AC} 作为入基变量,弧 $A \rightarrow C$ 的流量 θ 不断从 0 增加,直到其中一个基变量达到下界(0)或上界(u_{ij})。对于随 θ 增大而流量增大的弧只需考虑上界,即

$$x_{AC} = \theta \leq \infty$$

$$x_{CE} = 50 + \theta \leq 80$$

所以 $\theta \leq 30$ 。

对于随 θ 增大而流量减小的弧只需要考虑下界 0, 即

$$x_{DE} = 10 - \theta \geq 0$$

所以 $\theta \leq 10$, 且

$$x_{AD} = 40 - \theta \geq 0$$

所以 $\theta \leq 40$ 。

流量不受 θ 影响的其他弧(如不属于无向环的弧), 即图 10.18 中的弧 $B \rightarrow C$, 可以不予考虑, 因为当 θ 增加时, 其流量没有边界值。

对于图 10.18 中的 5 条弧, x_{DE} 应作为出基变量, 因为当 θ 具有最小值时它达到边界值。在图中, 当 θ 置为 10 时, 新的基可行解的基本弧的流量值为

$$x_{AC} = \theta = 10$$

$$x_{CE} = 50 + \theta = 60$$

$$x_{AD} = 40 - \theta = 30$$

$$x_{BC} = 50$$

相应地, 可生成如图 10.22 所示的可行生成树。

如果出基变量已经达到它的上界, 对于上界法需要在这一点上进行调整(读者在接下来的两次迭代中将会看到)。在本次迭代中由于它是下界 0, 所以不需要进一步讨论。

10.7.5 本例的结尾

本例中, 再经过两次迭代将获得最优解, 下面将重点说明上界法的一些特征。寻找入基变量、出基变量和下一个基可行解的方法与第 1 次迭代类似, 不再重复, 只对这些步骤进行简要总结。

第 2 次迭代: 以如图 10.22 所示的可行生成树开始, 引用图 10.16 中的单位费用数据, 为选择入基变量得出如表 10.4 所列的计算结果。第 2 列表示增加非基本弧(第 1 列表示)后得到的无向环, 第 3 列表示非基本弧流量增加 $\theta=1$ 时环中的流量发生变化, 进而产生相应的网络总费用的增加量。弧 $E \rightarrow D$ 能使 ΔZ 产生最大的负增长, 因此 x_{ED} 即为入基变量。

表 10.4 第 2 次迭代选择入基变量的计算过程

非基本弧	生成的环	$\theta=1$ 时 ΔZ 的值
$B \rightarrow A$	$BA-AC-BC$	$-2+4-3=-1$
$D \rightarrow E$	$DE-CE-AC-AD$	$3-1-4+9=7$
$E \rightarrow D$	$ED-AD-AC-CE$	$2-9+4+1=-2$ 最小值

在满足下列约束条件时, 使通过弧 $E \rightarrow D$ 的流量 θ 尽可能大, 从而求得 θ :

$$x_{ED} = \theta \leq u_{ED} = \infty, \text{ 所以 } \theta \leq \infty;$$

$$x_{AD} = 30 - \theta \geq 0, \text{ 所以 } \theta \leq 30;$$

$$x_{AC} = 10 + \theta \leq u_{AC} = \infty, \text{ 所以 } \theta \leq \infty;$$

$$x_{CE} = 60 + \theta \leq u_{CE} = 80, \text{ 所以 } \theta \leq 20 \leftarrow \text{最小值}.$$

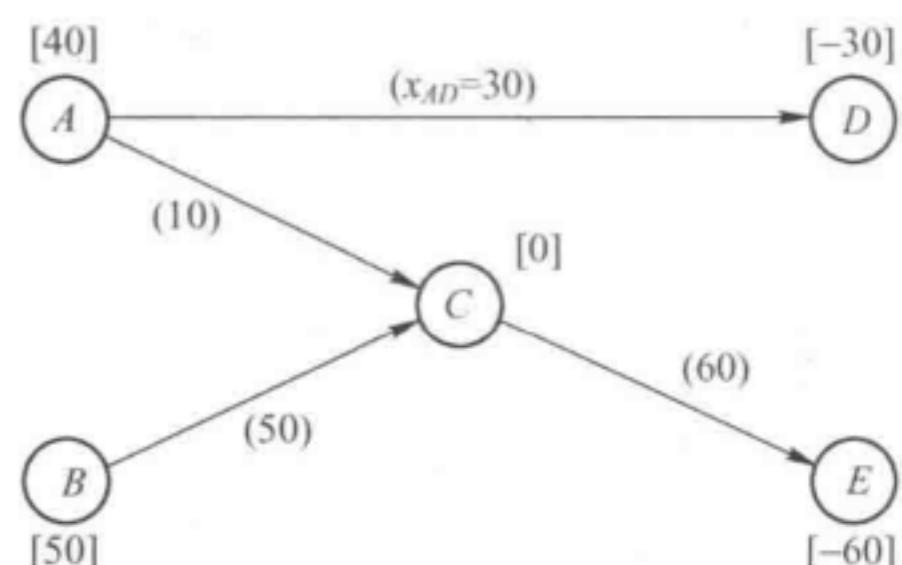


图 10.22 第二个可行生成树和解示例

因为 x_{CE} 达到上界时使 θ 获得最小值 20, 所以 x_{CE} 为出基变量。在上述 x_{ED} 、 x_{AD} 和 x_{AC} 的表达式中, 令 $\theta=20$, 可以得到通过下一个基可行解的基本弧的流(其中 $x_{BC}=50$ 不受 θ 的影响), 如图 10.23 所示。

需要特别注意, 出基变量 x_{CE} 的获得是在其达到上界值 80 时。因此, 根据上界法, x_{CE} 将由 $80-y_{CE}$ 替代, 并将 $y_{CE}=0$ 作为新的非基变量, 同时, 原来的弧 $C \rightarrow E$ 及 $c_{CE}=1$ 、 $u_{CE}=80$ 分别由反向弧 $E \rightarrow C$ 及 $c_{CE}=-1$ 、 $u_{EC}=80$ 替代。调整后的网络图如图 10.24 所示, 其中虚线部分表示非基本弧, 弧上的数字表示单位费用。

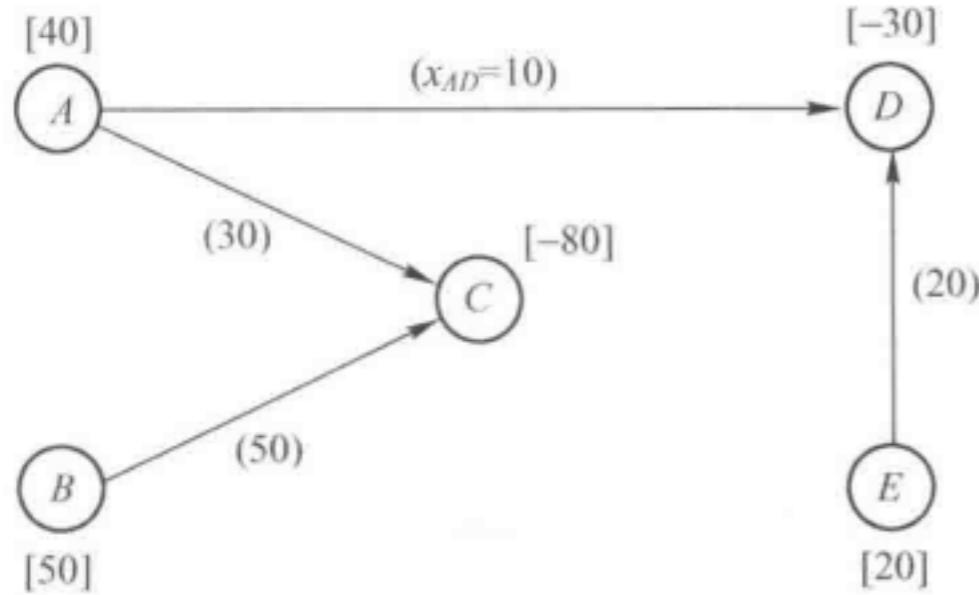


图 10.23 第 3 个可行生成树和解示意图

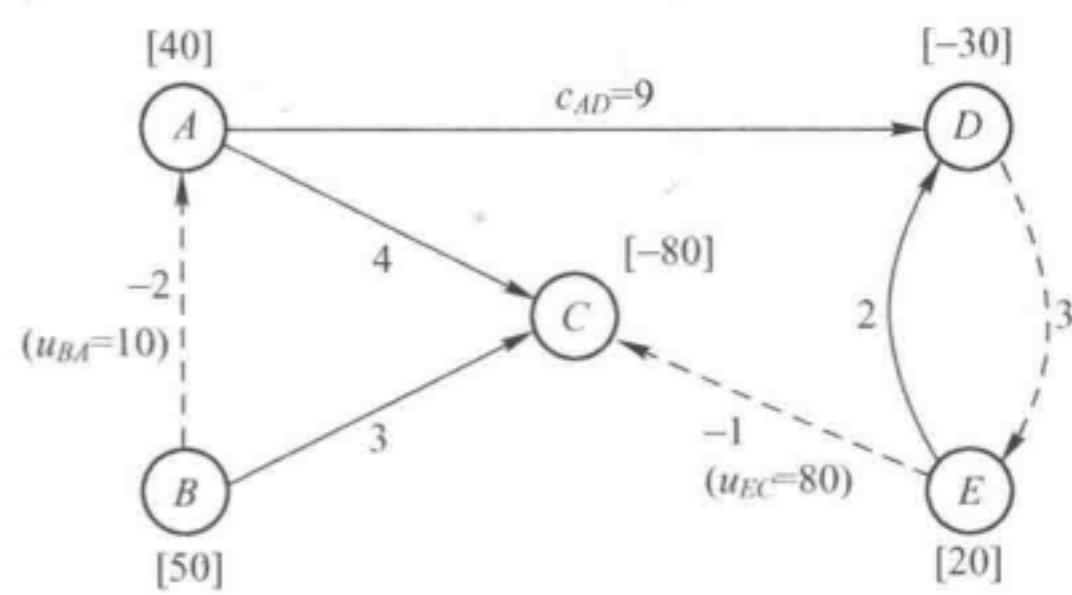


图 10.24 第 2 次迭代后具有单位费用的调整后的网络

第 3 次迭代: 将图 10.23、图 10.24 应用于第 3 次迭代, 通过如表 10.5 所列的计算过程挑选出 y_{AB} (反向弧 $B \rightarrow A$) 作为入基变量。在满足下面约束的条件下增加通过弧 $B \rightarrow A$ 的流量 θ :

$$y_{AB} = \theta \leq u_{AB} = 10, \text{ 所以 } \theta \leq 10 \leftarrow \text{最小值};$$

$$x_{AC} = 30 + \theta \leq u_{AC} = \infty, \text{ 所以 } \theta \leq \infty;$$

$$x_{BC} = 50 - \theta \geq 0, \text{ 所以 } \theta \leq 50.$$

表 10.5 第 3 次迭代选择入基变量的计算过程

非基本弧	生成的环	$\theta=1$ 时 ΔZ 的值
$B \rightarrow A$	$BA-AC-BC$	$-2+3-4=-1$ 最小值
$D \rightarrow E$	$DE-ED$	$3+2=5$
$E \rightarrow C$	$EC-AC-AD-ED$	$-1-4+9-2=2$

y_{AB} 使得 θ 取得最小的上界值为 10, 所以 y_{AB} 成为出基变量。在上面 x_{AC} 和 x_{BC} 的表达式中 ($x_{AD}=10$ 和 $x_{ED}=20$ 保持不变), 令 $\theta=0$, 得出下一个基可行解, 如图 10.25 所示。

与第 2 次迭代一样, 出基变量是在变量 y_{AB} 达到上界时获得的。另外, 在进行这一特殊的选择时有两点需要特别注意。

一是入基变量 y_{AB} 在同一次迭代中同时也是出基变量。当入基变量(从 0 增加时)在其他基变量达到边界时, 它已先到达上界值。这种情况在上界法中偶尔会出现。

二是曾为反向弧的弧 $B \rightarrow A$ ($c_{BA}=-2$, $u_{BA}=10$), 现在需要由其反向弧 $A \rightarrow B$ ($c_{AB}=2$, $u_{AB}=-10$) 替代。毋庸置疑, 反向弧的反向弧仍为原正向弧(图 10.12 中节点 A 、 B 之间的弧), 但是网

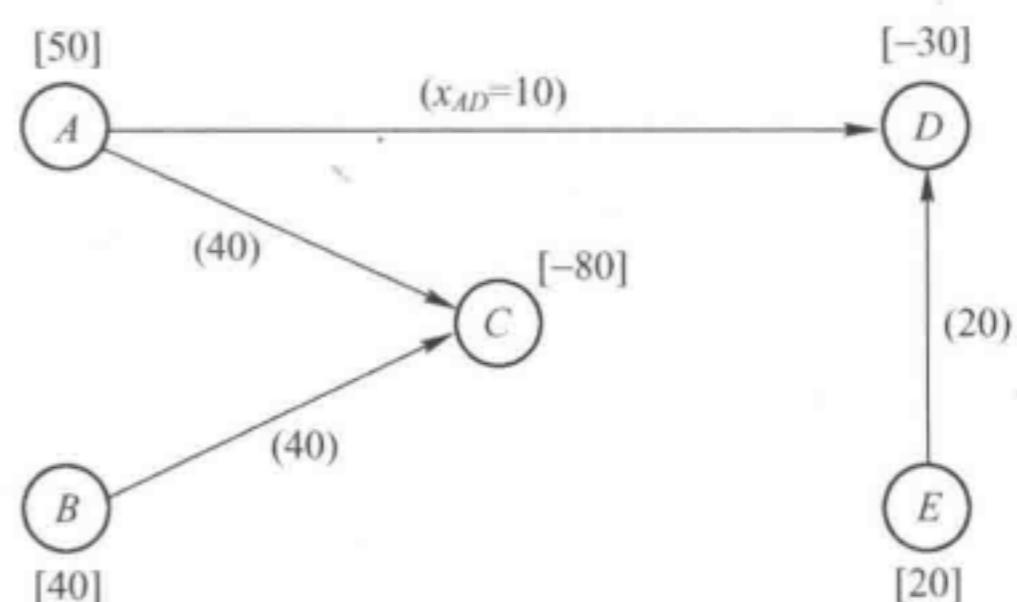


图 10.25 第 4 个(最终)可行生成树和解示例

络流量由节点 B ($b_B = 50 \rightarrow 40$) 向节点 A ($b_A = 40 \rightarrow 50$) 转移了 10。同时, 变量 $y_{AB} = 10$ 由 $y_{AB} = 10 - x_{AB}$ 代替, 且有 $x_{AB} = 0$ 作为新的非基变量。调整后的网络图如图 10.26 所示。

通过最优测试: 使用图 10.25 和图 10.26, 通过表 10.6 所列的计算过程, 利用数学方法继续寻找下一个入基变量。然而, 没有一个非基变量使 ΔZ 的值为负, 即通过任意一个非基变量引入的流量都不能使 Z 值减小, 这就意味着当前的基可行解(图 10.25)通过了最优检测, 应该停止进一步的运算。

表 10.6 第 3 次迭代后的最优测试计算

非基本弧	生成的环	$\theta=1$ 时 ΔZ 的值
$A \rightarrow B$	$AB-BC-AC$	$2+3-4=1$
$D \rightarrow E$	$DE-ED$	$3+2=5$
$E \rightarrow C$	$EC-AC-AD-ED$	$-1-4+9-2=2$

在进行最优测试时, 通过比较调整后的网络(图 10.26)与初始网络(图 10.12), 识别正向弧的流量, 而不是使用反向弧的流量。可以看到, 除了节点 C 和节点 E 之间的弧之外, 其他弧的流向都是一致的。也就是说, 在图 10.26 中, 仅仅弧 $E \rightarrow C$ 是反向弧, 设其流量为 y_{CE} , 因而有 $CE = u_{CE} - y_{CE} = 80 - y_{CE}$, 弧 $E \rightarrow C$ 恰好是非基本弧, 所以通过正向弧 $C \rightarrow E$ 的流量为 $y_{CE} = 0$, $x_{CE} = 80$ 。其他弧的流量都与图 10.25 所给的相同。因此, 最终得出的最优解如图 10.27 所示。

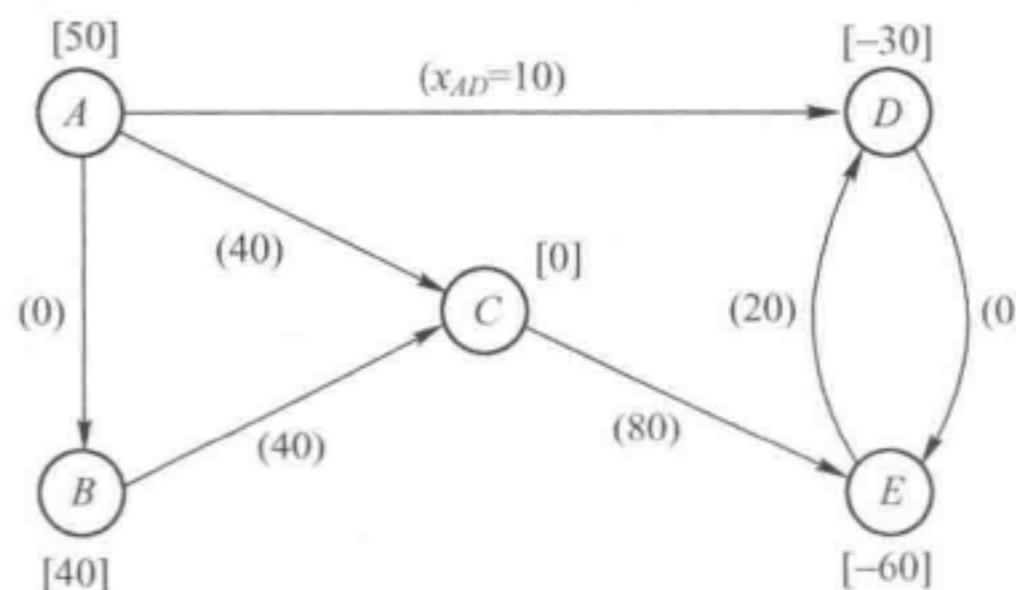


图 10.27 Distribution Unlimited 公司例子的最初网络的最优流模式

10.8 项目的时间-费用平衡优化网络模型

网络能以图形化的方式来描述一个大型项目的活动流程, 如建筑项目、研发项目等。因此。网络理论的一个重要应用领域是辅助这类项目的项目管理。

20世纪50年代后期, PERT(项目评审技术)和CPM(关键路径技术)两种基于网络的运筹学技术开始用于帮助项目管理人员完成相关工作。这些技术起初用于协调不同的项目活动制定计划, 为项目制定实际日程表, 并在项目实施中监测项目过程。多年后, 两种技术的优点被融合, 形成目前通常所指的PERT/CPM技术。现在, 这种用于项目管理的网络方法仍有着广泛的应用。

第 22 章对本章内容进行了补充(基于 PERT/CPM 的项目管理),提供了对 PERT/CPM 特点的完整、详细描述。现在强调这部分内容主要是出于两方面原因:第一,该方法是本章网络最优化模型的代表;第二,该方法解释了类似模型的应用。

项目时间-费用平衡的 CPM 方法是当初 CPM 技术的关键部分。这种方法能帮助解决下面的问题(项目必须在截止日期前完成):假设项目所有的活动都以常规方式进行,项目将无法在截止日期前完成,但是,可以通过花费更多的费用来加速某些活动等方法,满足项目的时间要求。然而,选择什么样的最优方案,才能在项目截止日期前完成项目并使总费用最小呢?

通常的做法是,使用一个网络图描述各项活动以及执行它们的顺序。通过边际分析或线性规划建立优化模型并找到解。与本章前面的其他网络优化模型一样,特殊的结构能高效地寻求这类问题的解。

10.8.1 一个原型实例——Reliable 建筑公司问题

Reliable 建筑公司中标了一份价值 540 万美元的建筑合同,为一家大型制造企业建造一个新车间。制造企业要求车间务必在 40 周内交付使用。

Reliable 公司指派其最优秀的项目经理 David Peny 负责该项目,确保工程进度。

Perty 先生需要在不同的时间为许多员工分配不同的建筑活动。表 10.7 列出了需要完成的不同活动,第 3 列提供了其他重要的信息。对于任意给定的活动,紧前活动(如表 10.7 的第 3 列所列)是指给定活动开始前必须完成的前一个活动。类似地,将给定活动开始后方可开始的后一道活动称为紧后活动。

表 10.7 Reliable 边筑公司项目活动表

活 动	活动 描 述	紧 前 活 动	估 计 工 期
A	挖掘	—	2 周
B	基础	A	4 周
C	砌墙	B	10 周
D	盖屋顶	C	6 周
E	安装外管道	C	4 周
F	安装内管道	E	5 周
G	外墙板装修	D	7 周
H	电力系统	E, G	9 周
I	外部油漆	C	7 周
J	砌墙板	F, I	8 周
K	地板安装	J	4 周
L	内部油漆	J	5 周
M	外固定设备安装	H	2 周
N	内固定设备安装	K, L	6 周

例如,第 3 列的前几项表示。

- (1) 挖掘活动不需要等待其他活动。
- (2) 挖掘活动必须在打基活动之前完成。
- (3) 打基活动必须在砌墙活动之前完工等。

当前活动多于一项紧前活动时,所有的紧前活动都必须在该活动开始前完成。

为了给各项活动安排时间,Perty先生咨询了各工作组的负责人,对每项活动的常规活动时间进行评估,评估结果如表10.7最后一列所列。

如果将各活动时间加起来总计为79周,远远超过40周的工期要求。然而,有些活动是可以同时进行的。在下面的内容中,读者将会看到如何利用网络图可视化表示活动流程,并获得完成项目所需要的总时间(如果各项活动都不延误)。

在本章,读者已经看到赋予权值的网络是如何表示和帮助分析许多种类问题的。类似地,网络图在项目管理时也可起到关键的作用。网络图不仅能够表达各项活动之间的关系、简洁地描述项目的整体计划,也可以帮助项目分析。

10.8.2 项目网络图

用于表示一个项目的网络图称为项目网络图。一个项目网络图由一些节点(常用圆圈或三角形表示)和连接两个不同节点的弧(用箭头表示)组成。

如表10.7所列,描述一个项目需要三种类型的信息。

- (1) 活动信息:将项目分为多个独立的活动(按需要的详细程度)。
- (2) 紧前关系:找出每项活动的紧前活动。
- (3) 时间信息:评估每项活动的工期。

项目网络图应该能够传达上述所有信息。有两种可以相互替代的项目网络图可以满足要求。

第一种是用弧来表示每项活动的AOA(Activity-On-Arc)弧活动项目网络,节点用来分隔活动(发出弧)与其紧前活动(到达弧),弧与弧之间的顺序代表了活动间的次序关系。

第二种是用节点表示每项活动的AON(Activity-On-Node)节点活动项目网络。节点之间的弧用来表示活动的次序,具有紧前活动的节点都有来自其紧前活动的弧指向它。

早期的PERT和CPM都是使用AOA项目网络图表达,并且使用了很多年。但AON项目网络图与AOA项目网络图相比,除了能表达相同的信息外,AON项目网络图还具有以下优点:

- (1) AON项目网络图比AOA项目网络图更容易构建。
- (2) AON项目网络图比AOA项目网络图更容易被无经验的使用者理解,包括许多管理者。
- (3) 当项目发生变化时,AON项目网络图比AOA项目网络图更容易修改。

基于以上原因,AON项目网络图已经比AOA项目网络图得到了更广泛的应用,有望成为项目网络图的标准。因此,接下来只关注AON项目网络图。

图10.28表示了Reliable车间项目的项目网络图。根据表10.7第3列的内容,注意观察弧是如何从紧前活动节点指向当前活动节点的。因为活动A没有紧前活动,于是增加了一个开始活动节点并指向活动

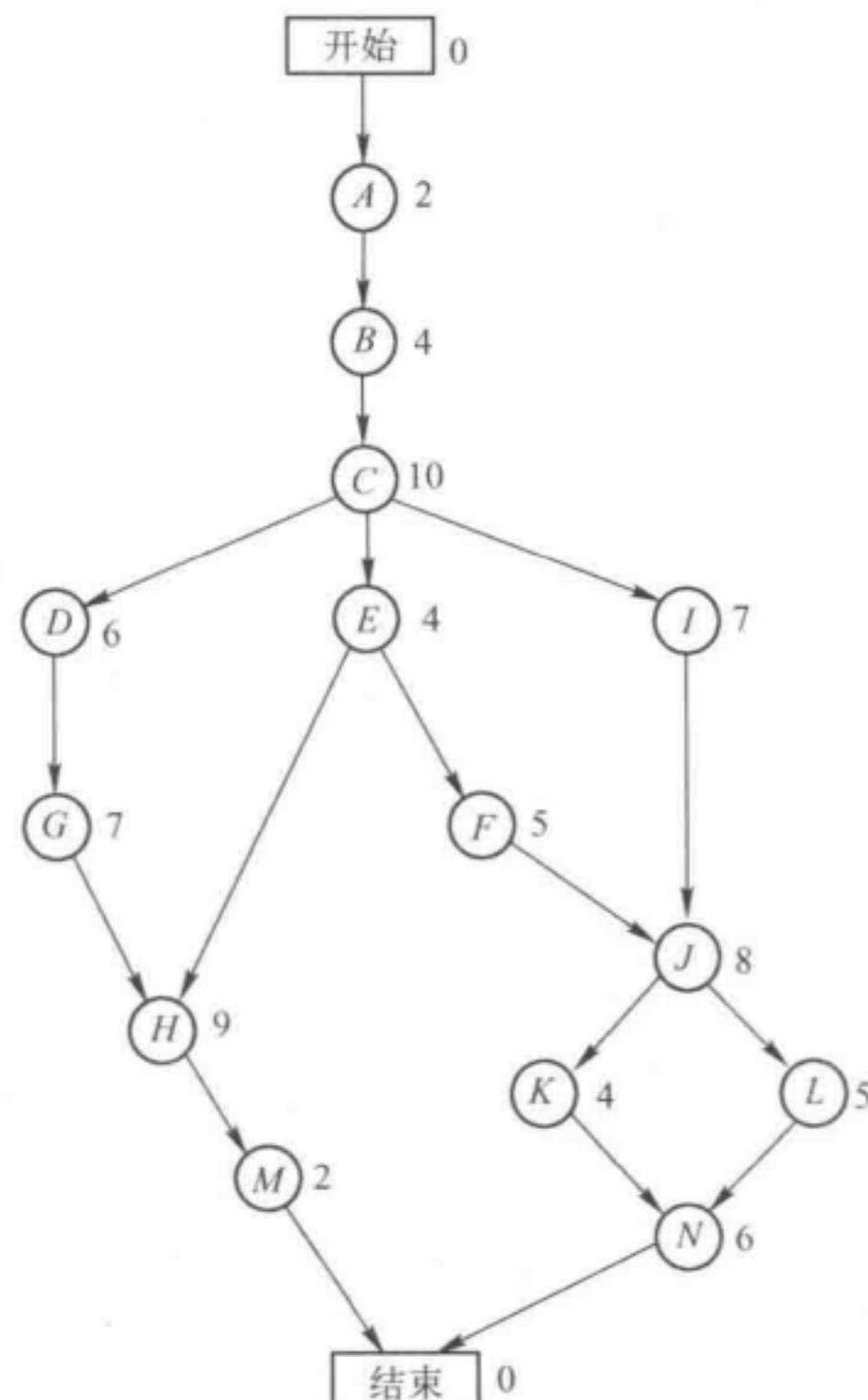


图10.28 Reliable建筑公司车间项目的项目网络

A。类似地,节点 M、节点 N 没有紧后活动,从上述活动发出的弧指向最终节点。因此,这个项目网络图表达了项目所有活动和次序的全貌(增加了项目的开始活动和结束活动)。引用表 10.7 最右一列的数据,节点旁边的数字记录了这项活动的估计工期(以周为单位)。

10.8.3 关键路径

前面计算过,该案例项目所有活动的合计工期是 79 周,但有些活动是可以同时进行的。那么,项目究竟需要多长时间呢?

下面介绍项目网络图中的两个概念的含义。

路径:在项目网络图中,表示从起始活动到结束活动连贯组成的一条线路。**路径长度:**完成该路径上所有活动的持续时间(工期)的总和。

在表 10.8 列出了 Reliable 项目网络图中的 6 条路线及路线的长度。表中,路径最短为 31 周,最长为 44 周。

表 10.8 Reliable 项目网络图的路线及其长度

路 线	长 度
开始→A→B→C→D→G→H→M→结束	$2+4+10+6+7+9+2=40$ 周
开始→A→B→C→E→H→M→结束	$2+4+10+4+9+2=31$ 周
开始→A→B→C→E→F→J→K→N→结束	$2+4+10+4+5+8+4+6=43$ 周
开始→A→B→C→E→F→J→L→N→结束	$2+4+10+4+5+8+5+6=44$ 周
开始→A→B→C→I→J→K→N→结束	$2+4+10+7+8+4+6=41$ 周
开始→A→B→C→I→J→L→N→结束	$2+4+10+7+8+5+6=42$ 周

在这些已经计算出的路径长度中,哪个应该作为该项目的工期呢?下面我们分析导出。

因为在某路径上的各项活动都应该无交叉地按次序完成,所以项目工期不能短于该路径的长度。项目工期也可能长于该路径的长度,由于该路径上有多个紧前活动的活动需要等到持续时间较长的那个紧前活动完成后才能开始进行,而持续时间较长的紧前活动可能位于其他路径中。例如,在表 10.8 中的第二条路径上的活动 H 就有两个紧前活动 G 和紧前活动 E。其中 G 就不在该路径上。活动 C 完成后,活动 E 仅需 4 周就可以完成,而完成活动 D 和完成活动 G 还需要 13 周时间。因此,项目工期应考虑较长的路径。

但项目工期不能用于项目网络图中的最长路径。在这条路径中活动能够不间断地按顺序完成(否则,将不是最长路径)。在这条路径上,到达结束活动的时间正好等于路径的长度。

可以得出一个重要的结论:

(估计)项目工期等于项目网络图中最长路径的长度。这条最长的路径称为关键路径^①(如果最长的路径有多条,则均为关键路径)。

关键路径为

开始→A→B→C→E→F→J→L→N→结束

(估计)项目工期=44 周。

因此,如果没有延误出现,完成项目的总时间应该是 44 周。关键路径上的各活动都是瓶颈活动,任何一个活动完成时间的延误都将延误整个项目。这对于 Perty 先生来说,是一个非

^① 虽然表 10.8 介绍了对较小项目如何列举所有路径和路径长度找出关键路径,但第 22 章中介绍了通常如何用 PERT/CPM 方法更方便地获得各类信息,包括关键路径。

常有价值的信息,他只需把注意力放在关键路径中项目的规划表上,就可以规划出整个项目的时间表。另外,为了缩减项目的工期(合同要求是40周)。关键路径上的活动是主要的缩减对象。

接下来,Perty先生需要决定哪些活动的工期应该缩减,缩减多少,以使项目在40周的最迟完工工期内完成,并且花费的费用最小。他记得CPM提供了一个寻求时间-费用平衡的优秀算法,所以他将使用该算法解决问题。

下面了解一下有关背景。

10.8.4 各项活动的时间-费用平衡

先了解一下赶工的概念。

活动赶工:通过采取增加一定费用的特殊措施,将活动工期缩减到常规值以下。这些特殊措施包括加班、雇用临时帮手、使用节省时间的材料和特殊的设备等。**项目赶工:**通过一些活动赶工使项目工期缩减至常规水平以下。

时间-费用平衡的CPM方法关心的是决定花多少费用用于赶工,使工期达到期望值。时间-费用图可以给出解决这个问题所需要的数据。图10.29是一个典型的时间-费用关系图。注意:图中标号为常规和赶工两个关键点。

常规点:在时间-费用图中表示某个活动以常规方式进行所需要的费用和时间。**赶工点:**在时间-费用图中表示某个活动全赶工时所需要的费用和时间。这时,不再有可用于缩减该活动工期的多余费用。作为一种近似算法,CPM方法假设时间和费用都可以可靠地预测,且没有重大的误差。

对于大多数的应用,假定活动部分赶工的时间和费用为两点连线上的某一点^①(如一半的赶工为常规点与赶工点连线的中点)。这种近似将用于估计时间和费用的必要数据减少到两种情形,即常规情形(获得常规点)和全赶工情形(获得赶工点)。

使用这种方法,Perty先生让员工和项目组负责人收集项目各项活动的上述数据。例如,墙板搭建活动组负责人认为,增加两名员工并且加班能够确保墙板搭建活动工期从8周缩减到6周,且不能再缩小了。接着Perty的手下估算了这种方式进行全赶工的成本,并与常规活动的8周计划进行比较,数据如下:

活动J(墙板搭建)

常规点时间=8周,费用=430000美元

赶工点时间=6周,费用=490000美元

最大缩减时间=8周-6周=2周

节省的每周赶工费用=(490000美元-430000美元)/2=30000美元

以这种方式分析每项活动的时间-费用关系,可以获得如表10.9所列的数据。

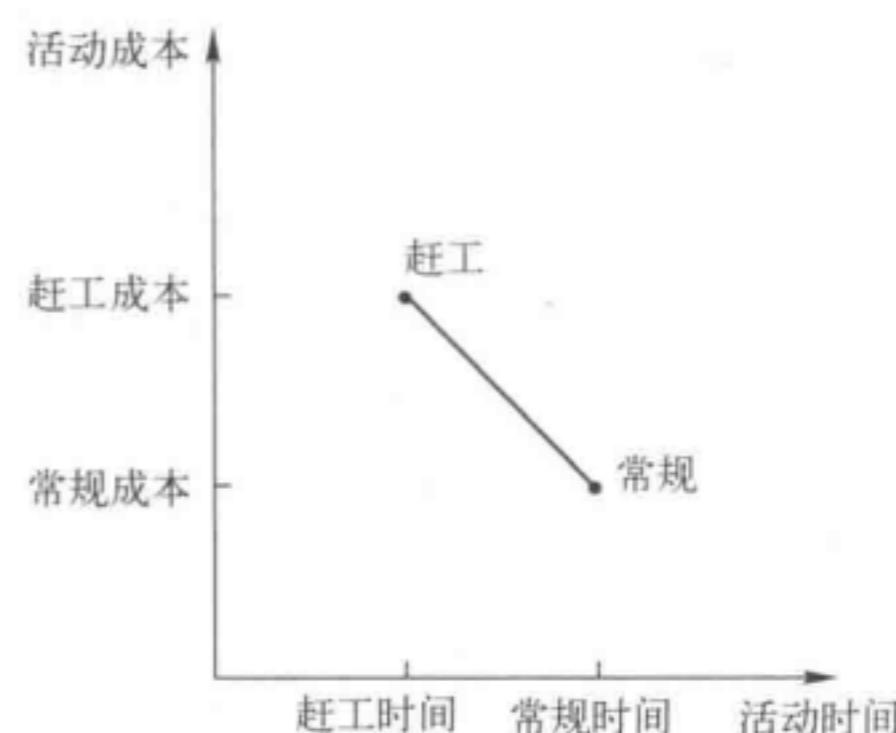


图10.29 一个典型的活动时间-费用图

^① 这是为方便作出的假设,只是一种粗略的近似,因为这种比例性并不总是成立,实际上,时间-费用图是凸曲线,尽管如此,仍可通过简单的线性近似和12.8节介绍的分段规划应用线性规划。

表 10.9 Reliable 项目各活动的时间-费用平衡数据

活动	时间/周		费用/美元		最大缩减 时间/周	每周节省的赶工 费用/美元
	常规	赶工	常规	赶工		
A	2	1	180000	280000	1	100000
B	4	2	320000	420000	2	50000
C	10	7	620000	860000	3	80000
D	6	4	260000	340000	2	40000
E	4	3	410000	570000	1	160000
F	5	3	180000	260000	2	40000
G	7	4	900000	10200000	3	40000
H	9	6	200000	380000	3	60000
I	7	5	210000	270000	2	30000
J	8	6	430000	490000	2	30000
K	4	3	160000	200000	1	40000
L	5	3	250000	350000	2	50000
M	2	1	100000	200000	1	100000
N	6	3	330000	510000	3	60000

10.8.5 哪些活动应该赶工

将表 10.9 中的常规费用和赶工费用分别进行合计, 可得

常规费用总计 = 455 万美元

赶工费用总计 = 615 万美元

该项目公司将只收到 540 万美元, 这包含了表中所列活动的所有成本, 还包括提供给公司的合理利润。在赢得这 540 万美元合同时, Reliable 公司的经理认为, 只要项目总成本控制在常规活动的 455 万美元左右, 540 万美元这个数额就能够带来合理的利润。Perty 先生明白, 他的责任就是尽可能使项目的费用和工期接近预算及合同要求工期。

表 10.8 表明, 如果按常规方式施工, 项目预计工期为 44 周(如果没有任何活动延误)。如果所有活动都以全赶工方式施工, 通过近似计算表明, 工期可能被缩减到只有 28 周。但是这样下来总费用将达到 615 万美元, 因此全赶工方式是不可行的。

然而, Perty 先生想调查只对少数几个活动进行部分或全部赶工而将预期工期缩减到 40 周的可行性。

问题: 将(估计)工期缩减到特定程度时(40 周)赶工费用最小的方式是什么?

解决这个问题的方法之一是用边际费用分析法, 利用表 10.9 最右一列的数据(结合表 10.8), 比较得出项目周期每缩减 1 周费用最小的赶工方式。使用这种方法时, 最简便的方式是建立一个与表 10.10 一样的表, 列出项目网络图中所有路线及其当前长度。开始时, 这些数据可以从表 10.8 复制。

表 10.10 Reliable 项目边际费用分析的初始数据表

赶工活动	赶工费用	路径长度					
		ABCDGHM	ABCEHM	ABCEFJKN	ABCEFJLN	ABCijn	ABCijLN
		40	31	43	44	41	42

由于表10.10中第4条路径最长(44周)。将工期缩减1周的唯一方法,是将这条特殊路线上活动的工期缩减1周。比较表10.9最右边一列给出的活动每周节省的赶工费用,最小的是活动J,为30000美元(注意:活动I虽具有相同的费用,但不在关键路径上)。因此,首先将活动J缩减1周。

变化后,包含活动J的路径长度都会缩减1周(包括表10.10中第2条、第4条、第5条、第6条路径),变化结果见表10.11中的第2行。因为第4条路径仍是最长的(43周),重复上述过程,在这条路径上找到费用最低的活动进行工期缩减。根据表10.9末尾第2列,活动J的可缩减量最大,为2周,因此再将活动J的工期缩减1周。第2次缩减活动J后各路径的长度如表10.11中的第3行所列。

表10.11 Reliable项目边际费用分析过程的最终数据表

赶工活动	赶工费用/美元	路径长度					
		ABCDGHM	ABCEHM	ABCEFJKN	ABCEFJLN	ABCijn	ABCijLN
		40	31	43	44	41	42
J	30000	40	31	42	43	40	41
J	30000	40	31	41	42	39	40
F	40000	40	31	40	41	39	40
G	40000	40	31	39	40	39	40

这时,最长的路径仍是第4条(42周),但活动J已经不能再缩减了。根据表10.9所列,这条路径上的其他活动中,活动F成了费用最小的活动,因而应该缩减活动F的工期,缩减后的结果如表10.11中的第4行所列。同理,将活动F的工期再缩减1周(最多2周),结果如表10.11中的最后一行所列。

这时,最长的路径(第4条、第6条)长度已经达到了期望的40周,所以不需要再进行多余的赶工。赶工活动费用的计算如表10.11的第2列所列,总计140000美元。图10.30显示了最终的项目网络图,加粗线表示关键路径。

由于活动J和活动F的赶工使图10.30中有3条关键路径,原因是这3条路径的长度都是最长的40周。

对于规模较大的网络图,边际费用分析就不再适用,需要使用效率更高的方法。因此,标准的CPM过程采用线性规划替代(通常使用专门的软件开发特殊结构的网络优化模型)。

10.8.6 用线性规划制定赶工决策

用线性规划形式寻找费用最小的赶工活动时,问题可描述如下。

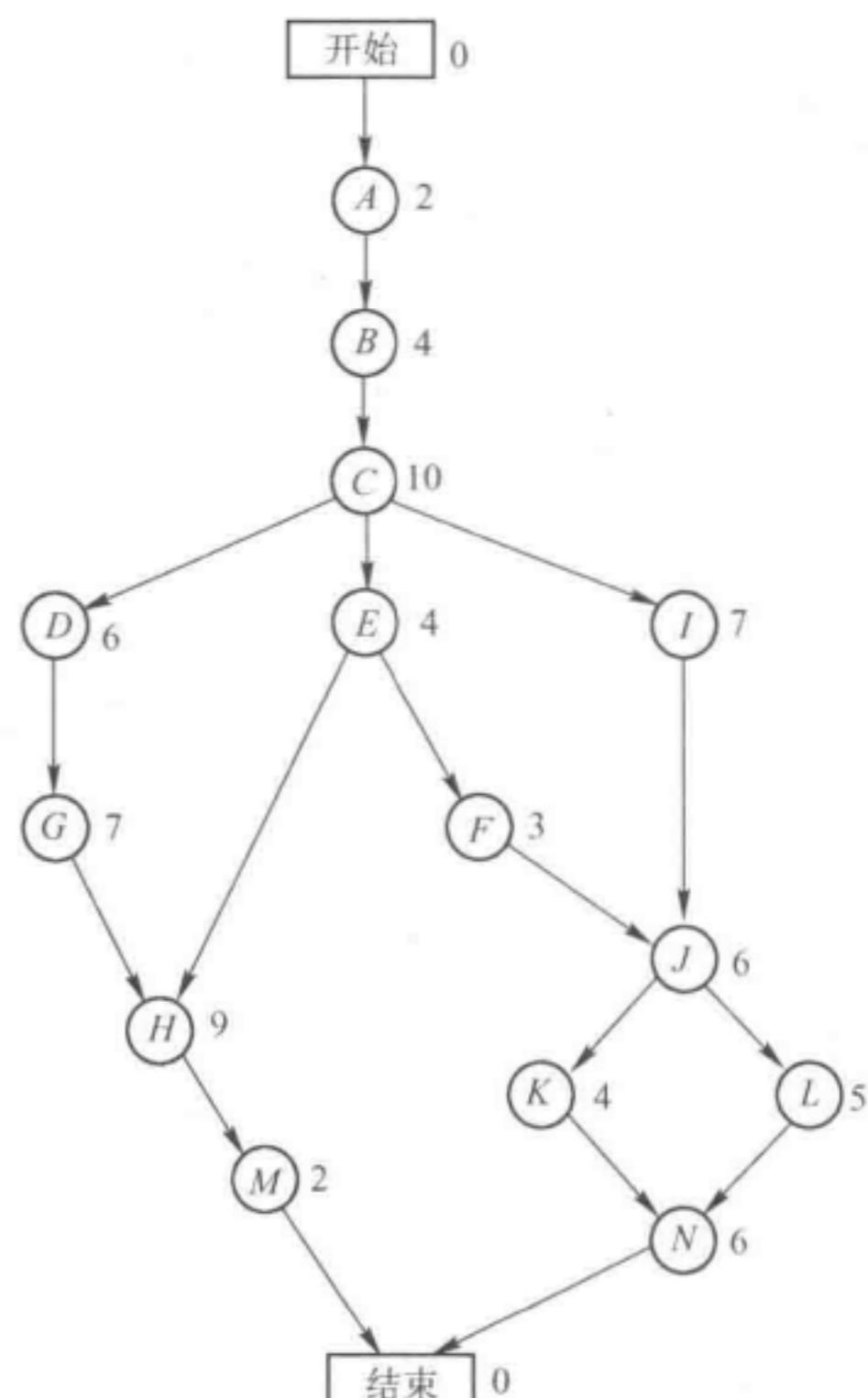


图10.30 Reliable项目赶工活动J、活动F后的项目网络(粗线表示关键路径)

问题重述:令 Z 表示赶工活动的总费用,问题是满足项目工期小于或等于项目经理预期的限制条件下,使 Z 达到最小值。

决策变量为

$$x_j = \text{赶工活动 } j \text{ 缩减的工期}, j=A, B, \dots, N$$

使用表 10.9 的数据表达目标函数,即

$$Z = 100000x_A + 50000x_B + \dots + 60000x_N$$

右边的 14 个决策变量都应非负,且不能超过表 10.9 倒数第 2 列所给出的最大值。另一个约束条件是工期不能多于 40 周,令

$$y_{\text{结束}} = \text{项目工期(即项目到达结束节点时所需要的时间)}$$

则约束条件为

$$y_{\text{结束}} \leq 40$$

为了帮助线性规划给 $y_{\text{结束}}$ 分配恰当的值,给定 x_A, x_B, \dots, x_N 的值,在模型中引入下列辅助变量将带来很大便利。

y_j = 活动 j ($j=B, C, \dots, N$) 的开始时间,对应决策变量 x_A, x_B, \dots, x_N (活动 A 不需要辅助变量,因为作为项目的开始活动将自动为 0)。将结束节点作为一个工期为 0 的活动对待,因此对应活动结束的 $y_{\text{结束}}$ 的定义也与 y_j 的定义一致。

每项活动的开始时间(包括结束)与其紧前活动的开始时间和工期有关。

对于每项活动(B, C, \dots, N , 结束)与其紧前活动,活动的开始时间“ \geq ”紧前活动(开始时间+工期)。

进一步,利用表 10.9 的常规活动时间数据,可知

活动 j 的工期 = 常规时间 $-x_j$

例如,对于项目网络图(图 10.28)中的活动 F ,其紧前活动为 E , E 的工期 = $4-x_E$ 。

两个活动之间有这样的关系,即

$$y_F \geq y_E + 4 - x_E$$

活动 F 直到活动 E 开始并完成工期的 $4-x_E$ 后才能开始。

对于另一个活动 J ,它有两个紧前活动。

它们之间的关系为

活动 F , 工期 = $4-x_F$

活动 I , 工期 = $4-x_I$

$y_J \geq y_F + 5 - x_F$

$y_J \geq y_I + 7 - x_I$

这些不等式表明,活动 J 必须在其两个紧前活动完成后才能开始。

现在,包括所有活动的约束条件,可得到如下的线性规划模型:

$$\text{Min } Z = 100000x_A + 50000x_B + \dots + 60000x_N$$

s. t.

(1) 最大缩减约束:

表 10.9 中倒数第 2 列位

$$x_A \leq 1, x_B \leq 2, \dots, x_N \leq 3$$

(2) 非负约束:

$$x_A \geq 0, x_B \geq 0, \dots, x_N \geq 0$$

$$y_B \geq 0, y_C \geq 0, \dots, y_N \geq 0, y_{\text{完成}} \geq 0$$

(3) 开始时间约束:

如前面的目标函数所述,除了活动 A 没有紧前活动外,有 1 个紧前活动的活动(活动 B、活动 C、活动 D、活动 E、活动 F、活动 G、活动 I、活动 K、活动 L、活动 M)有 1 个时间约束,有 2 个紧前活动的活动(活动 H、活动 J、活动 N、活动结束)有 2 个时间约束。

有 1 个紧前活动	有 2 个紧前活动
$y_B \geq 0 + 2 - x_A$	$y_H \geq y_G + 7 - x_G$
$y_C \geq y_B + 4 - x_B$	$y_H \geq y_E + 4 - x_E$
$y_D \geq y_C + 10 - x_C$	\vdots
\vdots	$y_{\text{结束}} \geq y_M + 2 - x_M$
$y_M \geq y_H + 9 - x_H$	$y_{\text{结束}} \geq y_N + 6 - x_N$

(4) 项目工期约束:

$$y_{\text{结束}} \leq 40$$

图 10.31 显示了利用电子表格来计算线性规划模型的过程。将决策的变量列在可变单元格中,如开始时间(I6:I19)、时间缩减(J6:J19)、项目完成时间(I22)。

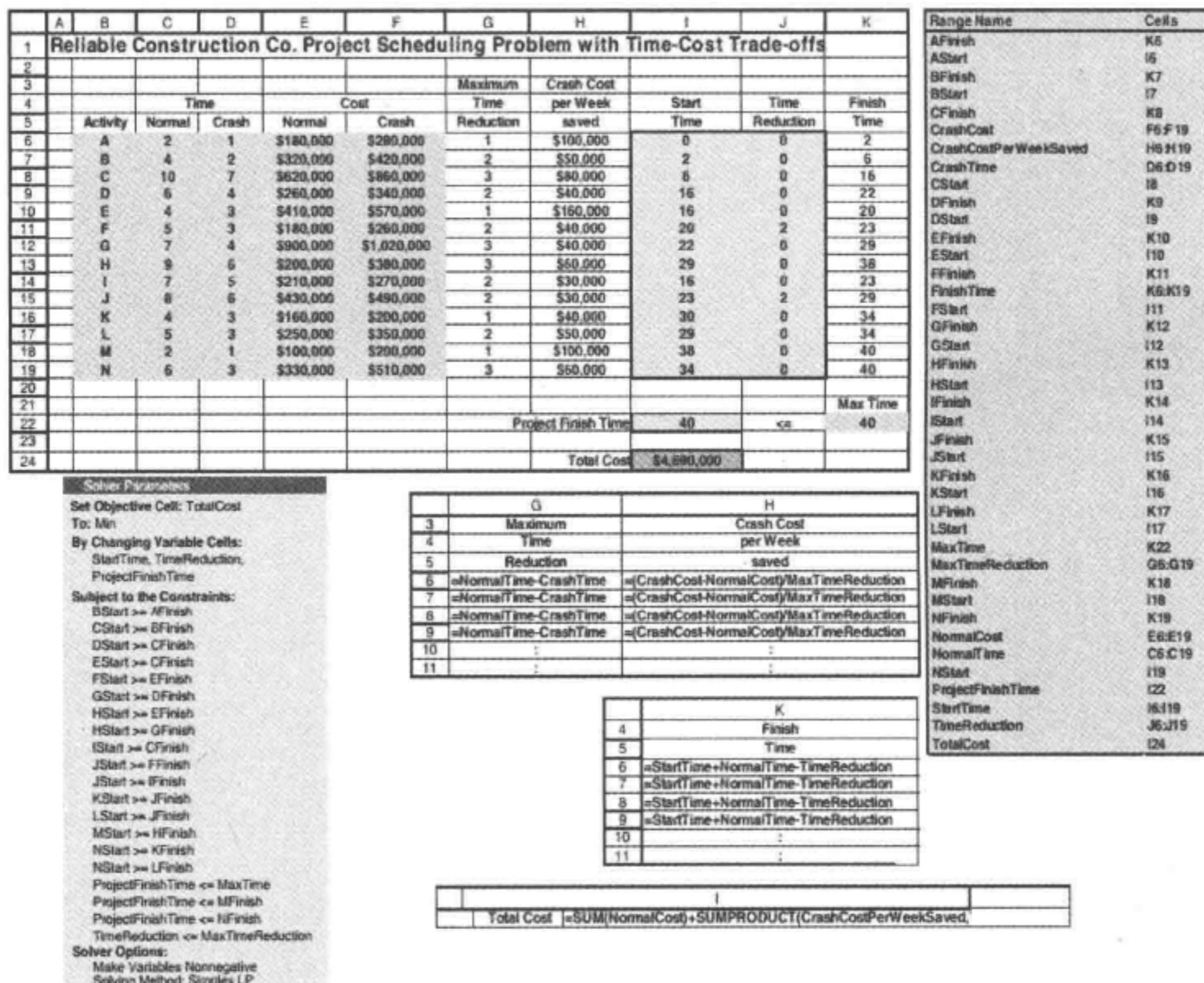


图 10.31 Reliable 项目应用 CPM 时间费用平衡法在电子表格计算的结果
(其中第 I 列、第 J 列显示了最优解)

B 列~H 列引自表 10.9。根据图中底部的等式,G 列和 H 列的数字以从上至下的计算顺序获得。K 列的数字表示活动的完成时间,等于活动开始时间加上常规工期再减去由于赶工而缩减的时间。目标单元格(I24)表示总费用,等于常规时间总和减去赶工缩减的时间之和。

求解对话框的最后一列约束条件,时间缩减($J6:J19 \leq \text{最大时间缩减 } G6:G19$),即每项活动的时间缩减不能超出 G 列所给出的最大值,另外两个前提约束。项目完成时间($I22 \geq M\text{finish}(K18)$)和项目完成时间($I22 \geq N\text{finish}(K19)$)表明,项目不能先于两个紧前活动 M 和活动 N 完成。最后,约束条件项目完成时间($I22 \leq \text{最大时间 } K22$)是一个关键的约束条件,表示项目必须在 40 周内完成。

涉及开始时间($I6:I19$)的开始时间约束表示活动不能在它的任何一个紧前活动完成之前开始。例如,第一个约束条件, $B\text{start}(17) \geq A\text{finish}(K6)$ 表示活动 B 在活动 A (B 的紧前活动)完成前不能开始。当一个活动有一个以上紧前活动时就会增加类似的约束。例如,活动 H 有 2 个紧前活动,活动 E 和活动 G ,相应地,就有 2 个开始时间约束 $H\text{start}(I13) \geq E\text{finish}(K10)$ 和 $H\text{start}(I13) \geq G\text{finish}(K12)$ 。

读者可能注意到,开始时间约束中的“ \geq ”符号表示允许活动在其紧前活动完成后延期一定时间开始。虽然这种延期在模型中是可行的,但对关键路径上的活动是不允许的,因为这时不必要的延期将会增加总费用(必须增加赶工以达到工期约束)。因此,除了非关键路径上的活动,模型的最优方案不会存在这样的延期。

图 10.31 中的第 I 列和第 J 列显示了在单击“Solve”按钮后获得的最优解(注意:最优解中出现了一个延期活动 K ,它开始于 30。其紧前活动 J 完成于 29,因为活动 K 不在关键路径上),这对项目不会有任何影响,结果与图 10.30 利用边际费用分析方法获得的结果是一致的。

读者可以通过本书的网页了解其他有关用线性规划求解 CPM 和边际费用分析的案例。

10.9 结 论

在现实中,网络具有广泛的应用,能够清晰地描述系统组成部分的关系,一些类型的动态网络流往往必须通过网络模型求解。

本章介绍的网络优化模型和算法可以为制定这类决策提供有力的工具。

最小费用流问题在网络优化模型中具有核心作用,不仅因为它应用广泛,还因为通过网络单纯形法能够快速求解。本章介绍的最短路径问题和最大流问题也是网络优化模型的两个基本问题,就像在第 9 章讨论的附加特殊案例一样(运输问题和分配问题)。

本章所有的模型都考虑了现存网络的优化问题,其中最小生成树是优化新网络设计的典型例子。

费用-时间平衡的 CPM 方法为项目管理提供了一个非常好的网络模型解决方法,能够使项目以最少的费用达到工期的限制。

本章仅仅是对网络方法学的当前研究和应用状况作了一些简单的介绍,由于网络具有的组合特性,网络问题通常比较难以解决。然而,在求解方法方面已取得了巨大进步。事实上,近年来,算法的发展已做到能够成功求解大规模的复杂网络问题。

参 考 文 献

- [1] Bazaraa, M. S., J. J. Jarvis, and H. D. Sherali: *Linear Programming and Network Flows*, 4th ed., Wiley, Hoboken, NJ, 2010.
- [2] Bertsekas, D. P.: *Network Optimization: Continuous and Discrete Models*, Athena Scientific Publishing, Belmont, MA, 1998.
- [3] Cai, X., and C. K. Wong: *Time Varying Network Optimization*, Springer, New York, 2007.
- [4] Dantzig, G. B., and M. N. Thapa: *Linear Programming 1: Introduction*, Springer, New York, 1997, chap. 9.

- [5] Hillier, F. S., and M. S. Hillier: *Introduction to Management Science: A Modeling and Case Studies Approach with Spreadsheets*, 5th ed., McGraw-Hill/Irwin, Burr Ridge, IL, 2014, chap. 6.
- [6] Sierksma, G., and D. Ghosh: *Networks in Action: Text and Computer Exercises in Network Optimization*, Springer, New York, 2010.
- [7] Vanderbei, R. J.: *Linear Programming: Foundations and Extensions*, 4th ed., Springer, New York, 2014, chaps. 14 and 15.
- [8] Whittle, P.: *Networks: Optimization and Evolution*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2007.

习题

某些问题(或它们中的一部分)左侧的符号的意义如下。

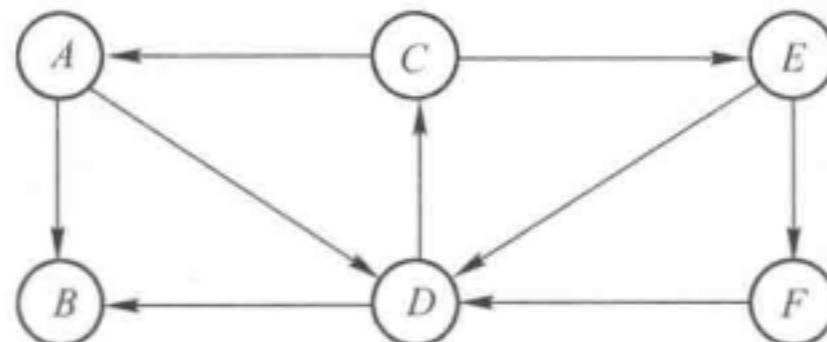
D: 学习辅导中列出的展示例子可能会有帮助。

I: 使用本书所给出的相关程序。

C: 使用软件求解问题。

习题上有星号提示读者习题与章节的部分内容有关。

10.2-1 考虑下面的有向网络图,然后回答问题。



- (a) 在节点 A 与节点 F 之间找到一条有向路径,并指出其他 3 条非有向路径。
 (b) 找到 3 条有向环,并指出一条包含所有节点的非定向环。
 (c) 指出组成一个生成树的弧集合。
 (d) 使用如图 10.3 所示的过程,以一次增加一条弧的方式构建两个生成树,要求与(c)不同的树。

10.3-1 阅读 10.3 节应用案例中概述并在其参考文献中详述的运筹学研究文章。简述网络优化模型如何在该项研究中得到应用的,然后,列出这项研究结果的各类财务与非财务的效益。

10.3-2 假设你需要驾车到一个陌生的城市,通过研究地图决定到达目的地的最短路线。沿途可能经过 5 个城市(分别用 A, B, C, D, E 表示),你将如何选择路线?下表中的数字表示两个城市直达的距离。“—”线表示两个城市无法直接到达。

城 市	距 离						目的 地
	A	B	C	D	E		
始点	40	60	50	—	—	—	—
A		10	—	70	—	—	—
B			20	55	40	—	—
C				—	50	—	—
D					10	60	
E						80	

- (a) 将此问题归结为最短路径问题,并画出网络图。
 (b) 使用 10.3 节介绍的算法解决此最短路径问题。

C(c) 使用电子表格为此问题建模并给出解。

(d) 如果表中的数字代表驾车的费用, 给出问题(b)和问题(c)有关最小费用的答案。

(e) 如果表中的数字代表驾车的时间, 给出问题(b)和问题(c)有关最少时间的答案。

10.3-3 在一个不断发展壮大的小型机场, 当地的航空公司计划购买一辆新的拖车在机场中托运行李。自动化的行李搬运系统将在 3 年后投入使用, 那时拖车将不再使用。由于承载重量, 拖车的使用和维修成本将随着使用年限的增加而快速增加, 也可能 1 年或 2 年后更换新的拖车更加经济。下表给出了在第 i 年年底购买、在第 j 年年底卖出的相关的总成本(购价减去折扣, 再加上运行和维修费用)。请问如何决策才能使 3 年内总费用最小?

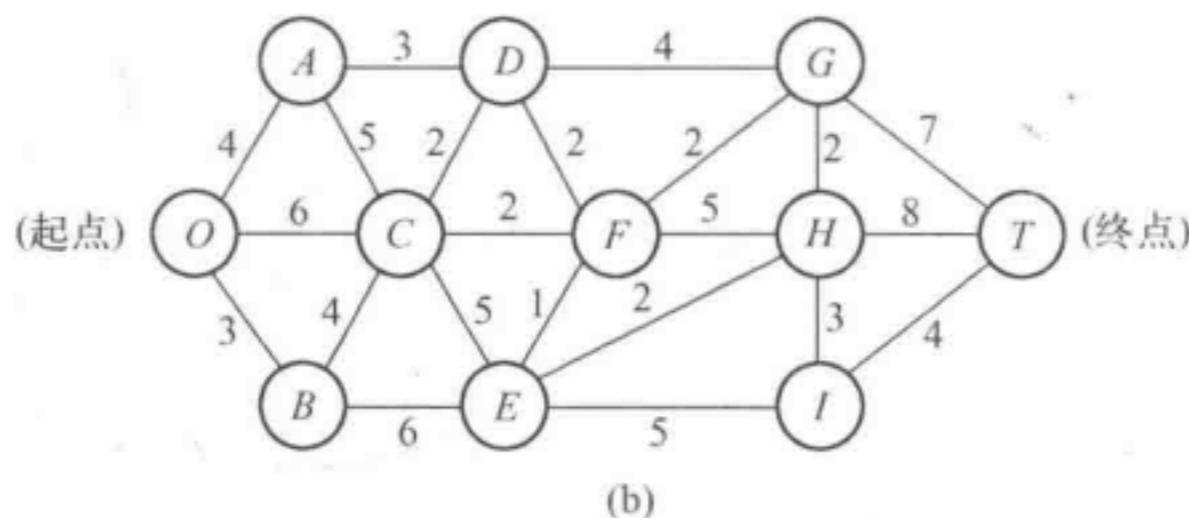
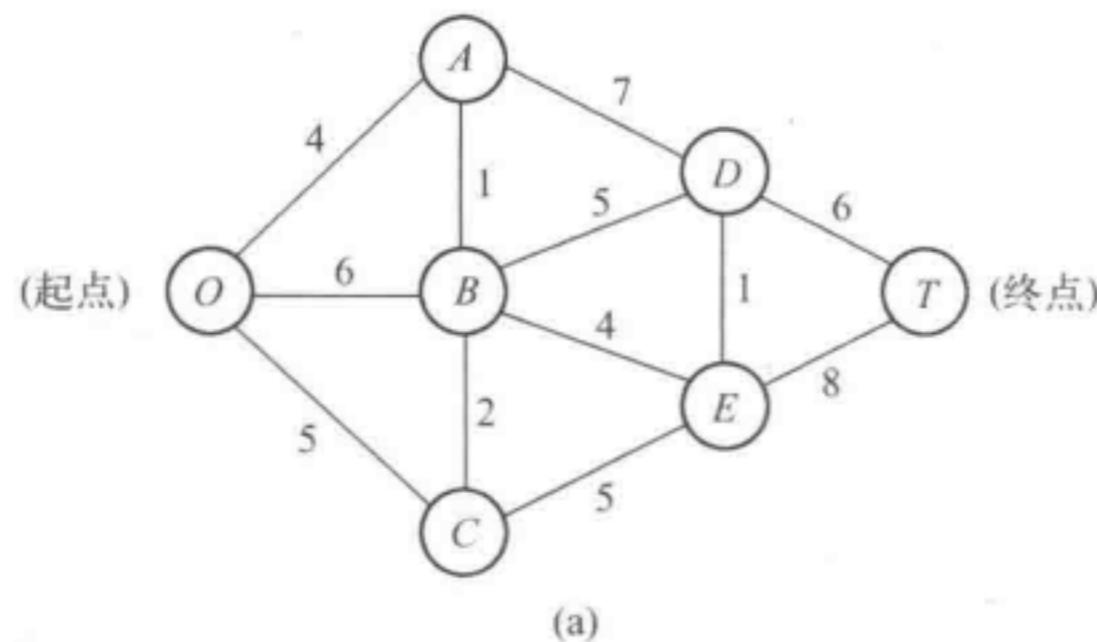
		J		
		1	2	3
i	0	8000 美元	18000 美元	31000 美元
	1		10000 美元	21000 美元
	2			12000 美元

(a) 将此问题归结为最短路径问题。

(b) 使用 10.3 节介绍的算法解决此最短路径问题。

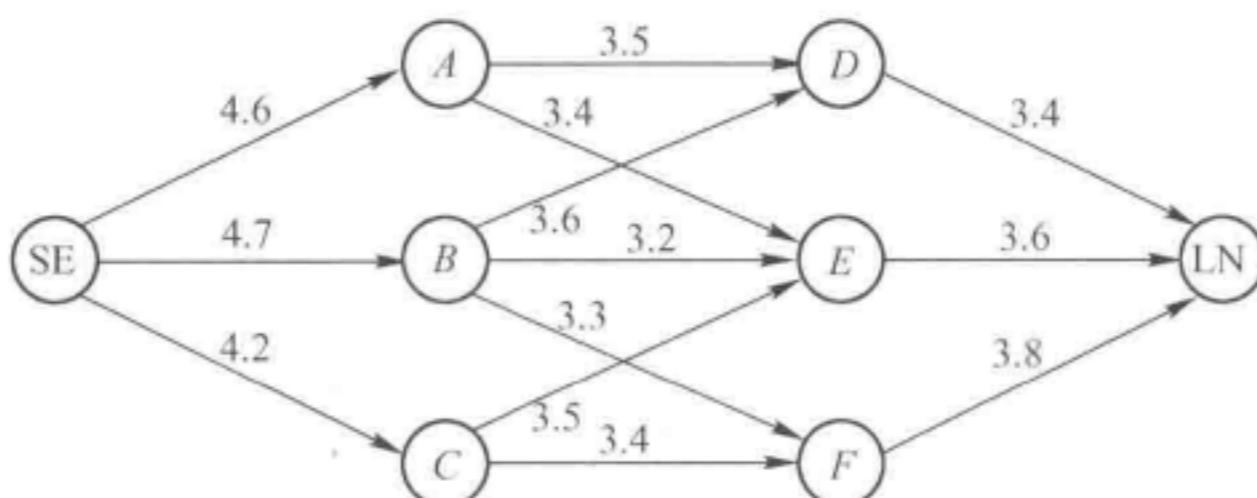
C(c) 使用电子表格为此问题建模并给出解。

10.3-4* 使用 10.3 节介绍的算法寻找下面网络图的最短路径(路径上的数字代表两个节点之间的距离)。



10.3-5 将最短路径问题表述成一个线性规划问题。

10.3-6 Speedy 航空公司拟开通一条从西雅图飞往伦敦的直达航线。按照天气条件, 在下图所示的几条航线可供选择。其中 SE 和 LN 分别代表西雅图和伦敦, 弧上的数字表示由于风向影响而需要飞行时间(根据气象报告), 也代表了油料的消耗。因为油耗费用是巨大的, 所以 Speedy 航空公司的经理希望建立一条费用最小的航线。



(a) 在利用最短路径解决此问题时,什么可以代表最短路径问题中的距离?

(b) 使用10.3节介绍的算法解决此最短路径问题。

C(c) 使用电子表格为此问题建模并给出解。

10.3-7 Quick公司获悉一个竞争对手正计划推出一种有很大市场潜力的新产品。Quick公司也已经计划在20个月后推出类似的产品。现在,研发已接近完成,Quick公司的管理层希望加速上市以应付竞争。

完成此产品必须经过4个不可逾越的阶段,包括当前正以正常速度进行的未完成的研发工作。每一个阶段都可以有优先或赶工两种进度加速完成。下表中的数字代表了每种进度下所需的时间(月数)。

活动方式	时间			
	研究	开发	生产系统设计	初次生产和配送
常规	5月	(4月)	(7月)	(4月)
优先	4月	3月	5月	2月
赶工	2月	2月	3月	1月

管理层已经为这4个阶段分配了总计3000万美元的预算。每阶段在每种进度下的费用如下表所列。

活动方式	时间			
	研究	开发	生产系统设计	初次生产和配送
常规	300万美元	—	—	—
优先	600万美元	600万美元	900万美元	300万美元
赶工	900万美元	900万美元	1200万美元	600万美元

管理层希望在不超出总预算5000万美元的情况下,为每个阶段确定一种进度,使整个进度时间最短。

(a) 将此问题归结为最短路径问题。

(b) 使用10.3节介绍的算法解决此最短路径问题。

10.4-1* 使用10.4节表述的最小支撑树算法,在习题10.3-4的网络图中分别找到最小支撑树。

10.4-2 Wirehouse Lumer公司拟在某个地区的8个树林中进行伐木活动。因此,必须在这8个树林之间开辟出一个通路,使其能相互贯通。下面列出了8个树林之间的距离。管理层现在希望这个通路总的距离最短树林之间的距离。

		树林间距离								
		1	2	3	4	5	6	7	8	
树林	1	—	1.3	2.1	0.9	0.7	1.8	2.0	1.5	
	2	1.3	—	0.9	1.8	1.2	2.6	2.3	1.1	
	3	2.1	0.9	—	2.6	1.7	2.5	1.9	1.0	
	4	0.9	1.8	2.6	—	0.7	1.6	1.5	0.9	
	5	0.7	1.2	1.7	0.7	—	0.9	1.1	0.8	
	6	1.8	2.6	2.5	1.6	0.9	—	0.6	1.0	
	7	2.0	2.3	1.9	1.5	1.1	0.6	—	0.5	
	8	1.5	1.1	1.0	0.9	0.8	1.0	0.5	—	

(a) 将此问题归结为最小支撑树问题。

(b) 使用 10.4 节介绍的算法解决此最小支撑树问题。

10.4-3 Premiere 银行计划不久将用专用的电话线把总部的计算机与每个分支机构的计算机终端连接起来。每个分支机构的计算机不必都与总部的计算机直接相连。这种专用电话线的价格是连接距离(mile)的 100 倍。

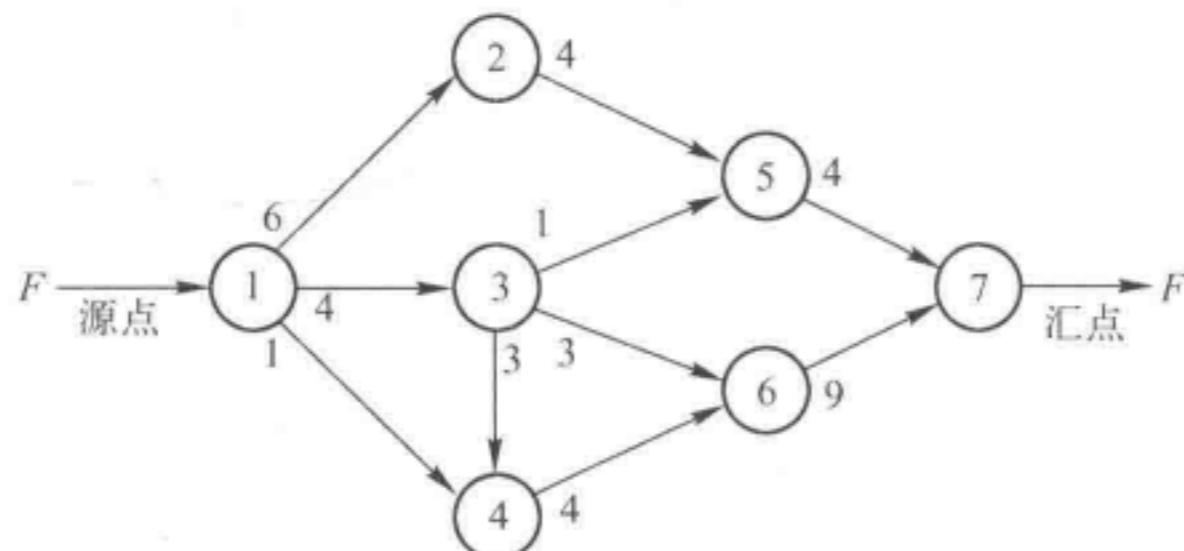
		距 离					
	总部	分支 1	分支 2	分支 3	分支 4	分支 5	
总部	—	190	70	115	270	160	
分支 1	190	—	100	110	215	50	
分支 2	70	100	—	140	120	220	
分支 3	115	110	140	—	175	80	
分支 4	270	215	120	175	—	310	
分支 5	160	50	220	80	310	—	

管理层希望在所有分支结构都能够与总部直接或间接连通的前提下使购买专用电话线的费用最小。

(a) 将此问题归结为最小支撑树问题。

(b) 使用 10.4 节介绍的算法解决此最小支撑树问题。

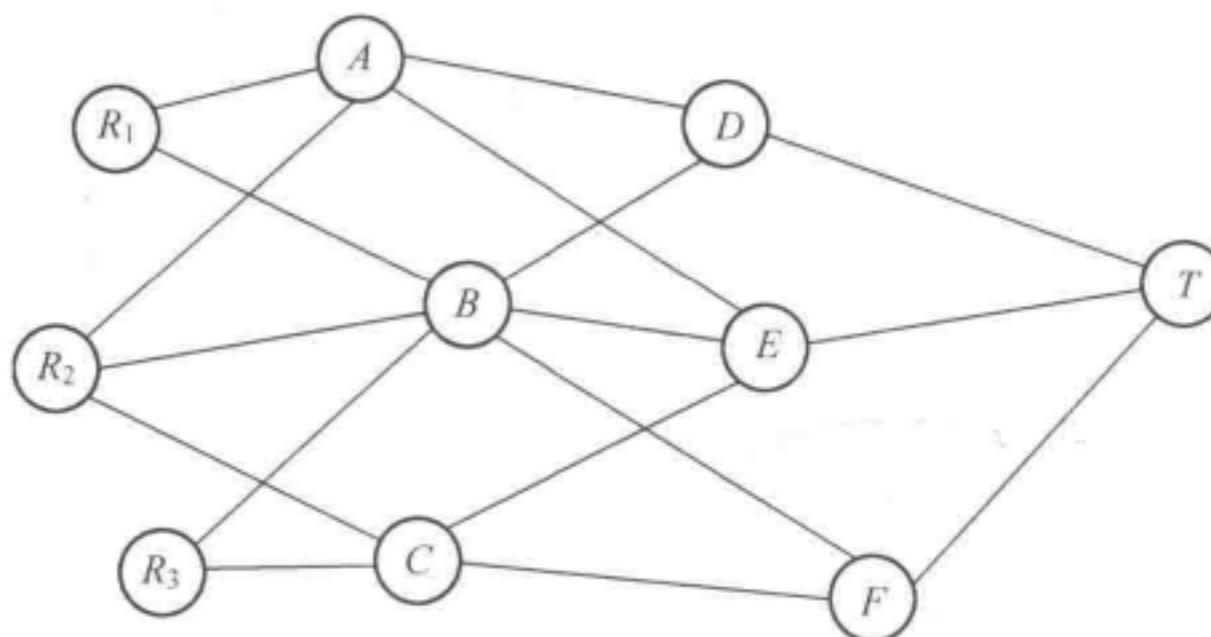
10.5-1* 观察下面的网络图,使用 10.5 节给出的增广链算法,找到从源点到汇点的最大流,紧邻节点的数字表示两节点弧的容量,画出你的结果。



10.5-2 将最大流问题描述为线性规划。

10.5-3 下图描述的是一个水渠系统,其中 R_1, R_2, R_3 代表三条河流, A, B, C, D, E 代表水渠的交汇地点, T 表示水渠终点的一个城市。水渠的长度以千米为单位,左边的表给出了水渠系统

的每日最大流量,城市水资源管理部门希望制定一个方案使到这城市的水流量最大。



	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>		<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>		<i>T</i>
<i>R</i> ₁	75	65	—	<i>A</i>	60	45	—	<i>D</i>	120
<i>R</i> ₂	40	50	60	<i>B</i>	70	55	45	<i>E</i>	190
<i>R</i> ₃	—	80	70	<i>C</i>	—	70	90	<i>F</i>	130

(a) 将此问题归结为最大流问题,分别指出发点(源)、收点(汇)和中间点,并画出完整的网络图,给出每条弧的容量。

(b) 使用10.5节介绍的方法给出解。

C(c) 使用电子表格解此问题。

10.5-4 Texago公司有4个油田、4个炼油厂和4个集散中心。一次大规模的运输行业的罢工大大地缩减了公司从油回到炼油厂的石油运输及炼油厂与集散中心之间的石油产品的运输能力。使用千桶作为原油的度量单位,下表给出了各点之间的最大运输能力。

		炼油厂			
油田	新奥尔良	查尔斯顿	西雅图	圣路易斯	
得克萨斯	11	7	2	8	
加利福尼亚	5	4	8	7	
阿拉斯加	7	3	12	6	
中东	8	9	4	15	

		集散中心			
炼油厂	匹兹堡	亚特兰大	堪萨斯城	旧金山	
新奥尔良	5	9	6	4	
查尔斯顿	8	7	9	5	
西雅图	4	6	7	8	
圣路易斯	12	11	9	7	

公司如何决定从油田回到炼油厂及炼油厂与集散中心之间的运输量才能使到达集散中心的桶数最大。

(a) 画图表示各节点的位置,并用箭头的方向表示原油和石油产品的流向和数量(显示容量)。

(b) 重画网络图,使第1列、第2列分别表示油田、炼油厂和集散中心,并用箭线表示可能的流量。

(c) 优化(b)的网络图,使其描述为一个具有单发点(源)、单收点(汇)及弧容量的最大流问题。

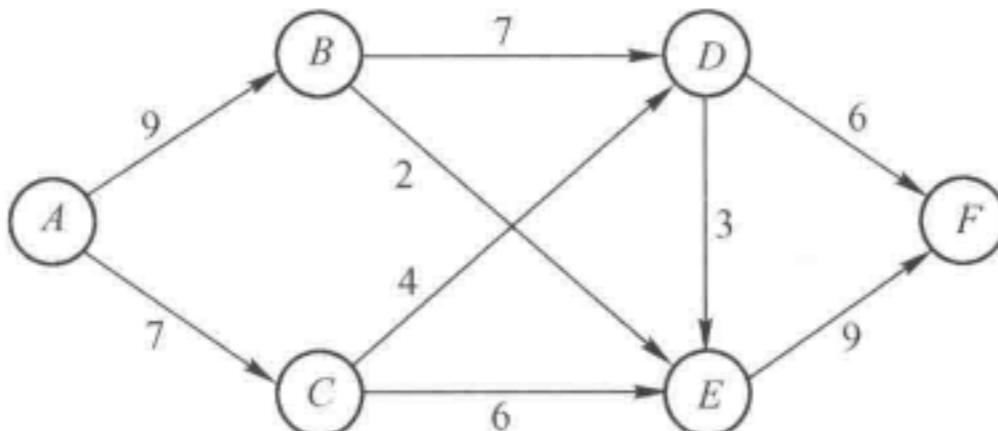
(d) 使用10.5节介绍的方法给出解。

C(e) 使用电子表格解此问题。

10.5-5 Eura铁路系统经营从工业城市Faireparc到港口城市Portstown之间的铁路。这条铁路上的特快客运和货运都比较繁忙。客运列车对时间比较关注,比慢速的货运列车具有优先权(欧洲铁路),所以当客运列车按时刻表通过时,货运列车必须在侧轨上等候让行。现在需要增加货运列车服务,如何规划货运列车的时刻,才能在不改变客运列车时刻的条件下使不中断运行的货运列车数量最多?

连续两趟货运列车之间的间隔至少为 $0.1h$ (时刻表上的时间单位为 $0.1h$,所以每天的运行调度只表明每趟货物列车在时刻 $0.0, 0.1, 0.2, \dots, 23.9$ 时的状况)。两个城市之间有 S 条侧轨,假设每条侧轨 i ($i=1, 2, \dots, S$)的长度足以容纳货运列车 n_i ($i=1, 2, \dots, S$),并且货运列车从侧轨 i 到达侧轨 $i+1$ 需要 t_i 个时间单位(t_0 表示从Faireparc市的出发时刻, t_s 表示到达Portstown市的时刻)。货运列车只能在 $0.1t$ 倍数的时刻才可以进出侧轨,且要满足在到达下一个侧轨前没有被客运列车超出这一条件(当不被超车时设 $\delta_{ij}=1$,当被超车时设 $\delta_{ij}=0$)。另外,如果后面所有倒轨站点都无法再停留货运列车,在被客运列车超过之前需要停留在侧轨上。将此问题归结为最大流问题,并指出网络图中所有节点(包括所有供给节点和需求节点人弧及其弧容量)(提示:对每240单位时间使用一组节点)。

10.5-6 考虑如下图所示的最大流问题网络,节点A和节点F分别代表发点(源)和收点(汇)。有向弧上的数字表示弧容量。



(a) 使用10.5节介绍的增广链算法给出解。

C(b) 使用电子表格解此问题。

10.5-7 阅读在10.5节应用案例中简要描述并在其参考文献中详述的文章。简述最小费用流问题是如何在该项研究中得到应用的,然后,列出由该项研究结果带来的各类财务与非财务的效益。

10.5-8 应用习题10.5-7的方式描述10.5节第2个案例。

10.6-1 阅读在10.6节应用案例中简要描述并在其参考文献中详述的文章。简述最小费用流问题是如何在该项研究中得到应用的,然后,列出由该项研究结果带来的各类财务与非财务的效益。

10.6-2 将习题10.5-6的图看做最小费用流问题,增加弧 $A \rightarrow F$,令 $\bar{F}=20$ 。

10.6-3 一个公司将在两个工厂生产同种产品,而且需要运送到两个仓库。工厂1仅可以不限数量地通过铁路运到仓库1,工厂2仅可以不限数量地通过铁路运到仓库2。可以通过卡车将产品先运到一个集散中心,集散中心最多只能存储50单位产品,超出50单位就必须运往两个仓库。下表给出了每单位可替代的运输费用、两个工厂的生产数量及两个仓库的需求量。

	单位运费				输出	
	集散中心		仓库			
			1	2		
工厂1	3		7	—	80	
工厂2	4		—	9	70	
集散中心			2	4		
配送中心			60	90		

(a) 使用网络图表示最小费用流问题。

(b) 用线性规划解出此问题。

10.6-4 重新考虑习题10.3-3,将其表示为最小费用流问题,并说明网络中各元素代表的意义。

10.6-5 Makonsel公司是一个集团公司,产品在其零售店中销售。产品完工后先存储在2个仓库中直到零售店要求运送。从2个车间到仓库,再从仓库到3个零售店都使用公路运输。假设卡车都是满载的,并将其作为产品的运送单位。下表给出了2个车间每月的产量、车间到每个仓库每车的运送成本和每个仓库每月的最大库存能力。

	单位运费/美元		海运能力		输出
	仓库1	仓库2	仓库1	仓库2	
车间1	425	560	125	150	200
车间2	510	600	175	200	300

对于每个零售店,下表给出了其每月的需求量,从仓库到零售店的每车运输成本及从每个仓库可运输的每月最大数量。

	单位运费/美元			海运能力		
	R01	R02	R03	R01	R02	R03
仓库1	470	505	490	100	150	100
仓库2	390	410	440	125	150	75
需求量	150	200	150	150	200	150

管理部门现在需要制定一个配送计划(每月从车间到仓库,从仓库到零售店的运输数量),使得总的运输费用最小。

(a) 画出配送网络图,指出网络图中的供给节点、中转节点和需求节点。

(b) 将其归结为一个最小费用流问题,并在网络图中增加必要的数字。

C(c) 使用电子表格解出此问题。

C(d) 不使用电子表格,利用计算机解出此问题。

10.6-6 Audiofile公司生产内置立体声系统。管理层决定将用于内置立体声系统扬声器的生产外包,有3家供应商能够提供这种扬声器。下表给出了3家供应商每1000个扬声器集装箱的价格。

供 应 商	价格/美元
1	22500
2	22700
3	22300

供应商	每集装箱要价
1	(300美元+40美分)/mile
2	(200美元+50美分)/mile
3	(500美元+20美分)/mile

供应商	仓库1/mile	仓库2/mile
1	1600	400
2	500	600
3	2000	1000

	单位费用/美元	
	工厂1	工厂2
	200	700
仓库1	400	500
仓库2	10	6

货物将被运往公司两个仓库中的一个。另外,每家供应商要求支付运输费用,运输费用都根据里程数按一个公司计算。下表给出了各供应商里程数和计算公式。

无论何时,公司的两个工厂都需要一个集装箱的扬声器,并雇用卡车从其中的一个仓库运输。下面给出了每集装箱的运输费用和工厂每月需要的集装箱数。

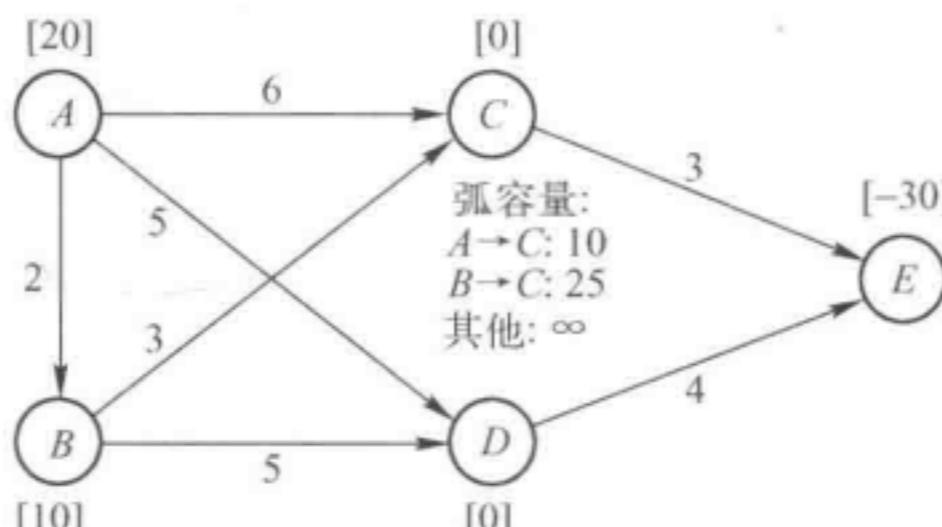
每个供应商每月最多能提供10集装箱。由于运输限制,每家供应商运到每个仓库的数量每月不超过6集装箱,每个仓库运到工厂的运量也不超过每月6集装箱。管理者现在打算确定一种方案,每月从每家供应商处订购多少扬声器,应该运送各仓库多少,各仓库又应该运输到各工厂多少,才能使总的购买费用(包括买价和运费)和仓库到工厂的运输费用最小?

- (a) 画出配送网络图,指出网络图中的供给节点、中转节点和需求节点。
- (b) 将其归结为一个最小费用流问题,在网络图中增加必要的数字,也包括接收不使用供应量的虚拟需求节点(0费用)。

C(c) 使用电子表格解出此问题。

C(d) 不使用电子表格,利用计算机解出此问题。

D10.7-1 观察下面给出的最小费用流。由节点附近的数字给出 b_i (网络流量)的值, c_{ij} (单位费用)由弧上的数字表示, u_{ij} (弧容量)的值由节点C和节点D之间的文字给出。



(a) 通过求解基本弧 $A \rightarrow B$ 、 $C \rightarrow E$ 、 $D \rightarrow E$ 和 $C \rightarrow A$ (反向弧)的可行生成树获取一个初始BF解,另外, $C \rightarrow B$ 为一个非基本弧,并以同样的表示方式画出结果图。

(b) 使用最优测试方法验证初始BF解最优,并存在多个最优解。应用网络单纯形法的迭代寻找另一个最优BF解。利用结果证明其他最优解不是BF解。

(c) 现在再考虑下面的 BF 解。

基本弧	流量	非基本弧
$A \rightarrow D$	20	$A \rightarrow B$
$B \rightarrow C$	10	$A \rightarrow C$
$C \rightarrow E$	10	$B \rightarrow D$
$D \rightarrow E$	20	

从这个 BF 解开始,应用网络单纯形法进行一次迭代,指出入基变量、出基变量和下个 BF 解,但不用再继续进行迭代。

10.7-2 重新考虑习题 10.6-2 中的最小费用流问题。

(a) 通过求解基本弧 $A \rightarrow B$ 、 $A \rightarrow C$ 、 $A \rightarrow F$ 、 $B \rightarrow D$ 和 $E \rightarrow F$ 与非基本弧 $E \rightarrow C$ 、 $F \rightarrow D$ (反向弧)的可行生成树获取一个初始 BF 解。

D,I(b) 用网络单纯形法求出解。

10.7-3 重新考虑在习题 10.6-3 中构建的最小费用流问题。

(a) 求解对于利用两条铁路线加上从工厂 1 经分配中心运送到仓库 2 的可行支撑树,得到一个初始的 BF 解。

D,I(b) 用网络单纯形法求解这个问题。

D,I10.7-4 重新考虑习题 10.6-4 中构建的最小费用流问题。用这个 BF 解作为初始解,使用网络单纯形法求出解。

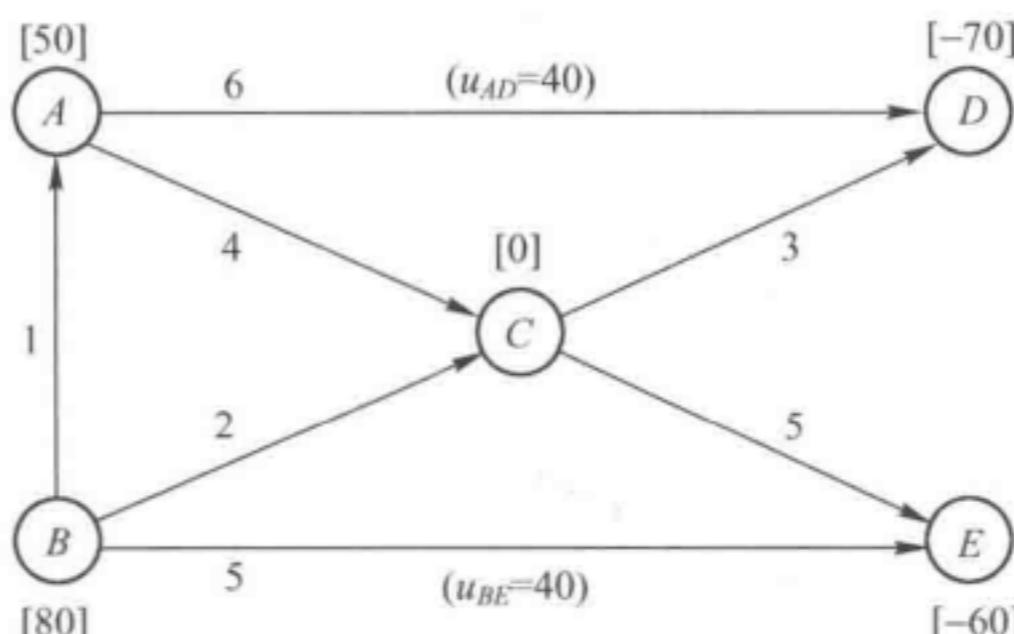
D,I10.7-5 参考表 9.2 给出的 P&T 公司的运输问题,将图 9.2 的网络图看做最小费用流问题。使用西北角规则从表 9.2 中获得初始 BF 解,然后使用网络单纯形法求出解。你可以应用 IOR Tutorial 中的交互程序求解(并证明 9.1 节中给出的最优解)。

10.7-6 思考表 9.12 给出的 Metro Water 区运输问题。

(a) 将此问题转化为最小费用流问题(提示:删除禁止流通的弧)。

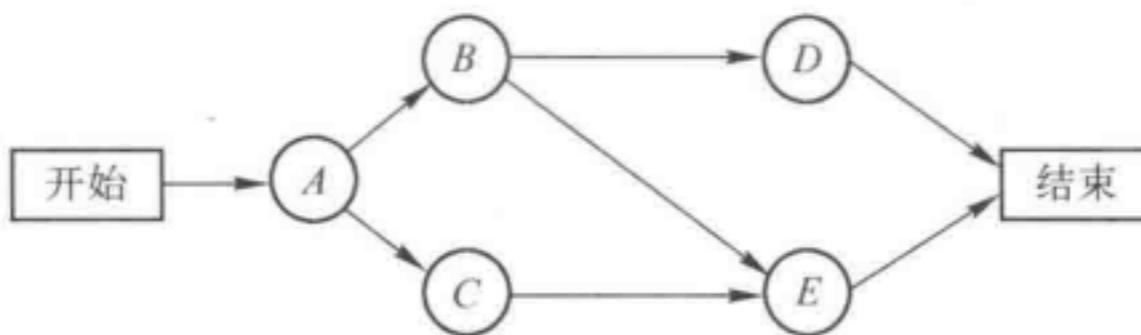
D,I(b) 以表 9.19 给出的数据作为初始 BF 解,使用网络单纯形法求出解(你可以使用 IOR Tutorial 中的交互程序)。与表 9.23 中用运输单纯形法求出的 BF 解的顺序进行比较。

D,I10.7-7 思考下面的最小费用流问题,节点附近的数字表示 b_i (网络流量)的值, c_{ij} (单位费用)由弧上的数字表示,有限制的 u_{ij} (弧容量)的值由弧上括弧内的数字给出。通过求解基本弧 $A \rightarrow C$ 、 $B \rightarrow A$ 、 $C \rightarrow D$ 和 $C \rightarrow E$ 与非基本弧 $D \rightarrow A$ 的可行生成树获取一个初始 BF 解,然后使用网络单纯形法求解。



10.8-1 Tinker 建筑公司准备开始一个新项目,要求在 12 个月内完工。项目包括 4 项活动(A, B, C, D),项目网络图如下图所示。该项目的经理 Sean Murpny 认为以常规活动方式不可能按期完成。因此 Sean 决定使用 CPM 的时间费用平衡方法决定最经济的赶工活动方式。下表是

他搜集的4项活动的资料,使用边际费用分析求解问题。



活动	常规时间/月	赶工时间/月	常规费用/美元	赶工费用/美元
A	8	5	25000	40000
B	9	7	20000	30000
C	6	4	16000	24000
D	7	4	27000	45000

10.8-2 重新思考习题10.8-1的问题。Sean记得在大学期间的运筹学课程上他曾用一个月的时间学习过线性规划,所以Sean决定使用线性规划来解决问题。

(a) 思考网络图中靠上的那条路线,用两个变量的线性规划模型描述怎样施工才能在工期内使费用最小。使用图解法给出答案。

(b) 对网络图中靠下的那条路线重复(a)的做法。

(c) 将(a)和(b)合并为一个线性规划模型,最优解是什么?

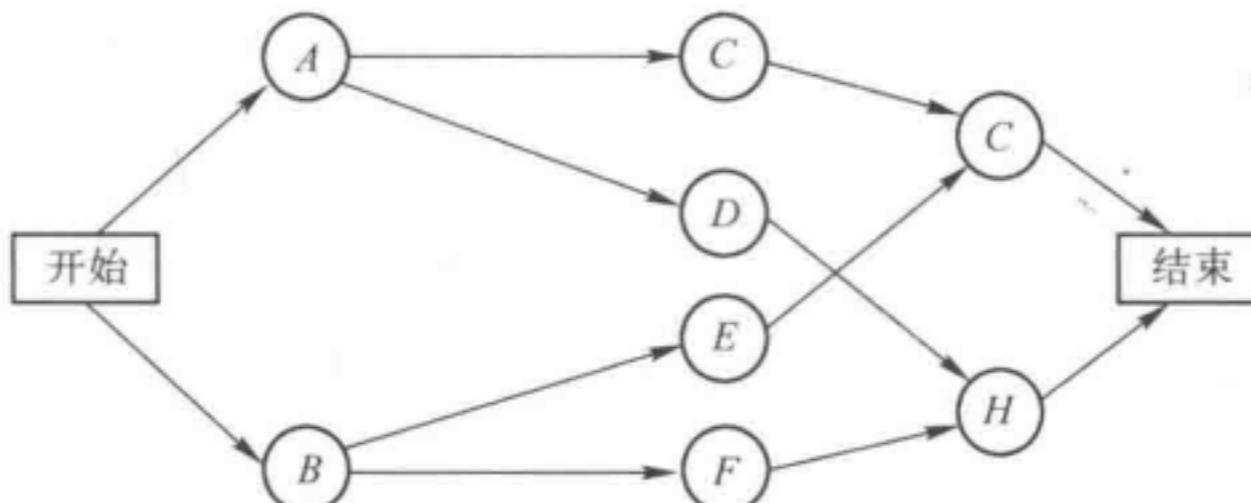
(d) 使用10.8节描述的CPM线性规划方法建立完整的线性规划模型(这个模型比(c)中的规模稍大,也更适用于较复杂的项目网络)。

C(e) 使用Excel求解。

C(f) 使用其他软件求解。

C(g) 将工期限制分别改为11个月、13个月,重复以上(e)和(f)。

10.8-3* Good Homes建筑公司准备开建一个大型的住宅项目。公司总裁Michael Dean正在为该项目进行项目时间规划,Michael已经区别出了5个大的活动(分别用A、B、C、D、E代表),下因是项目网络图,并且搜集了5个项目常规和赶工活动下的一些数据(见下表活动)。



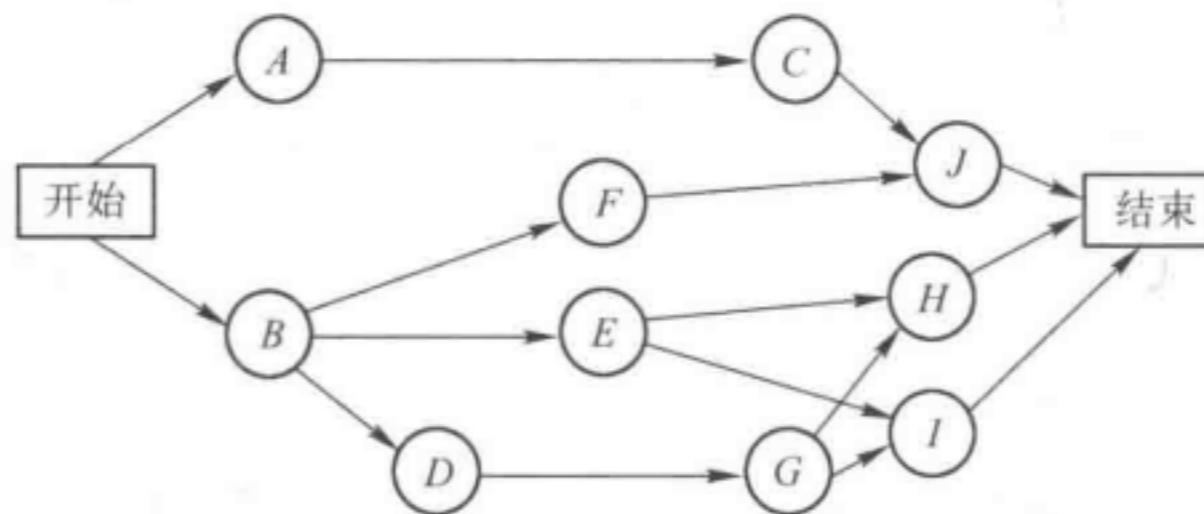
活动	常规时间/周	赶工时间/周	常规费用/美元	赶工费用/美元
A	3	2	54000	60000
B	4	3	62000	65000
C	5	2	66000	70000
D	3	1	40000	43000
E	4	2	75000	80000

表中的费用反映了公司活动的材料、设备的直接费用和直接人工费用。另外，公司还要支付监理、正常的管理费用及资金占用的利息费用等间接费用。Michael 估计这些间接费用每周平均为 5000 美元。他想使项目总的费用最小，因此需要节约这些间接费用。Michael 认为只要赶工一周的费用小于 5000 美元，就应该通过赶工缩短工期。

(a) 使用边际费用分析方法，说明应该对哪些活动进行赶工，赶工后的总费用最少是多少？在这个计划下每项活动的工期和费用各是多少，赶工节省了多少费用？

C(b) 假设一次缩短一周，用线性规划方法重解(a)。

10.8-4 21 世纪音像公司打算拍摄一部本年度最重要的影片(也是消耗最大的)。该影片的制片人 Dusty Holfmer 决定应用 PERT/CPM 方法帮助和控制这部关键影片。他将拍摄过程分为 B 项主要活动(分别标为 A, B, \dots, H)。各活动的关系见下面的项目网络图。



Dusty 获知另一家音像公司将在即将到来的夏季的中期推出一部具有轰动效应的影片。很不幸，他的影片预计也将在那时上映。因此，他和 21 世纪音像公司的高层管理人员一致决定应该加速制作过程，使其能够在夏季初(从现在起 15 个周)完成本年的这部影片。虽然这需要增加一大笔预算，但管理层认为国内外票房的收入将会有更多增长，足以弥补预算的增加。

Dusty 现在想确定在新的 15 周的工期内费用最小的制作方式。为使用 CPM 的时间费用平衡方法，他搜集了下表所列的数据。

活动	常规时间/周	赶工时间/周	常规费用/美元	赶工费用/美元
A	5	3	20	30
B	3	2	10	20
C	4	2	16	24
D	6	3	25	43
E	5	4	22	30
F	7	4	30	48
G	9	5	25	45
H	8	6	30	44

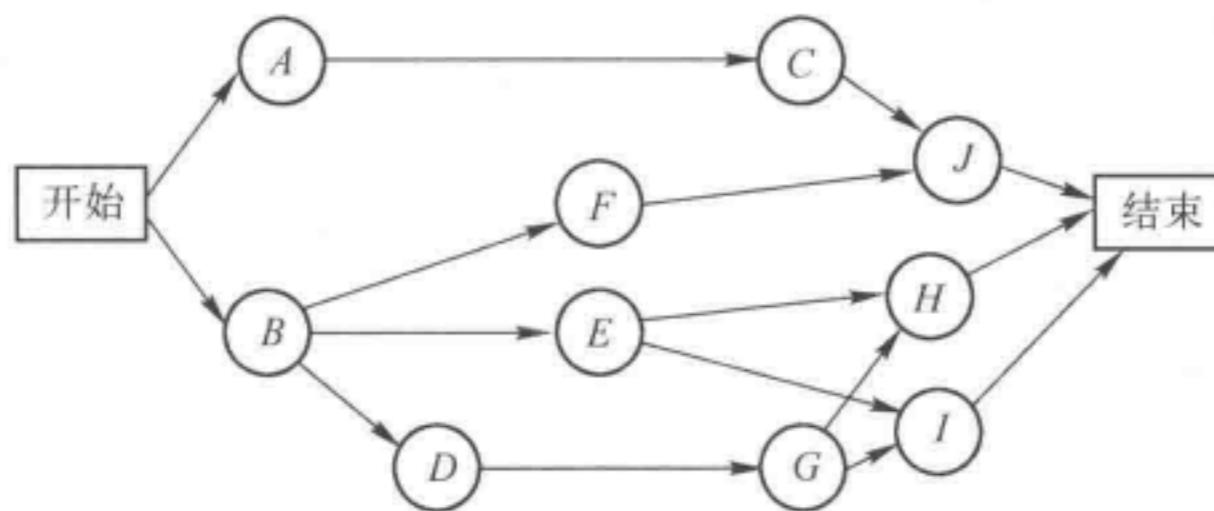
(a) 用线性规划模型描述该问题。

C(b) 用 Excel 求解。

C(c) 使用其他软件求解。

10.8-5 Lockheed 飞行器公司准备开始一个新项目，为美国空军开发一种新型运输机。公司与国防部的合同规定项目在 92 周内完成，延期将支付罚金。

项目设计 10 项活动(分别标为 A, B, \dots, J)，下面的项目网络图给出了各活动之间的次序。管理层打算避免超期完工的重罚，因此决定进行赶工，使用 CPM 的时间-费用平衡方法决定最经济的方案。下表给出了所列的数据。



活动	常规时间/周	赶工时间/周	常规费用/百万美元	赶工费用/百万美元
A	32	28	160	180
B	28	25	125	146
C	36	31	170	210
D	16	13	60	72
E	32	27	135	160
F	54	47	215	257
G	17	15	90	96
H	20	17	120	132
I	34	30	190	226
J	18	16	80	84

(a) 用线性规划模型描述该问题。

C(b) 用 Excel 求解。

C(c) 使用其他软件求解。