第6章 对偶理论

在线性规划早期发展阶段的众多重要发现中，对偶概念及其分支是其中最重要的内容之一。对于任何一个线性规划问题都具有对应的、称为对偶(Dual)问题的线性规划问题。对偶问题与原问题(Primal)之间的关系在众多领域中都非常有用。例如，我们很快可以看到在4.7节中所描述的影子价格问题实际上就是通过获得对偶问题的最优解得到的。同样，本章还将提出许多对偶理论的重要应用。

为了更加清晰地阐述，在前三节假设我们所研究的对偶问题对应的原问题采用的是标准形式(但并没有限定 b_i 值必须是正的)。对应其他形式的原问题将在6.4节进行讨论。我们在本章开始将讨论对偶的基本理论及应用。之后，我们将对对偶问题进行经济上的解释(6.2节)，并深入研究对偶问题与原问题之间的关系(6.3节)。6.5节集中讨论对偶问题在灵敏度分析中所起的作用。灵敏度分析将在下一章详细分析，灵敏度分析，是指基本过程模型参数变化后对最优值的作用。

6.1 对偶理论的实质

下表左侧给出了原问题的标准形式(可能是从另一种形式转换过来的)，原问题对偶问题在右侧给出。

原问题	对偶问题
$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	$\text{Min } W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
s. t.	s. t.
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i,\ i = 1,2,\cdots,m$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \geqslant c_j,\ i = 1,2,\cdots,n$
且	且
$x_j \geqslant 0, j=1,2,\cdots,n$	$y_j \geqslant 0, j=1,2,\cdots,m$

因此，当原问题是求最大值时，对偶问题是求最小值。对偶问题与原问题使用相同的变量，但是位置并不相同，总结如下。

(1) 原问题目标函数系数是对偶问题约束方程的约束右端项。

(2) 原问题约束方程的约束右端项是对偶问题目标函数的系数。

(3) 原问题一个变量在所有约束方程中的系数是对偶问题一个约束方程中的全部系数。

为了加强比较，看一下这两个问题的矩阵形式(就像我们在5.2节开始时介绍的那样。其中 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{y}=[y_1,y_2,\cdots,y_m]$ 都是行向量，但是 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 全部是列向量。

原问题	对偶问题
$\text{Max } Z=\boldsymbol{cx}$	$\text{Min } W=\boldsymbol{yb}$
s. t.	s. t.
$A\boldsymbol{x}\leqslant \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{yA}\geqslant \boldsymbol{c}$
且	且
$\boldsymbol{x}\geqslant 0$	$\boldsymbol{y}\geqslant 0$

3.1 节中的 Wyndor Glass 公司例子的原问题与对偶问题的代数形式和矩阵形式如表 6.1 所列。

表 6.1 Wyndor Glass 公司例子的原问题与对偶问题

原问题代数形式	对偶问题代数形式
Max $Z=3x_1+5x_2$ s. t. $x_1 \qquad \leqslant 4$ $\quad 2x_2 \leqslant 12$ $3x_1+2x_2 \leqslant 18$ 且 $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$	Min $W=4y_1+12y_2+18y_3$ s. t. $y_1 \quad +3y_3 \geqslant 3$ $\quad 2y_2+2y_3 \geqslant 5$ 且 $y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0, y_3 \geqslant 0$
原问题矩阵形式	**对偶问题矩阵形式**
Max $Z=[3,5]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ s. t. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}$ 且 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	Min $W=[y_1, y_2, y_3]\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$ s. t. $[y_1, y_2, y_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \geqslant [3,5]$ 且 $[y_1, y_2, y_3] \geqslant [0,0,0]$

这个对于线性规划问题的原问题——对偶问题如表 6.2 所列。同样可以帮助我们理解两个问题之间的对应关系。它展示了线性规划问题中所有的变量(a_{ij}, b_i 和 c_j),以及它们是怎么构造这两个问题的。所有原问题的标题都是水平的,而对于对偶问题的标题,则需要把书旋转一下。对于原问题,每一列(除了右端项列)给出了不同的约束方程同一个变量的系数,之后是目标函数系数,而每一行(除了最下边一行)给出了对于同一个约束方程的参数。对于对偶问题,每行(除了右端项)给出了全部约束方程中对于同一个变量的系数,然后是目标函数的系数,而每一列(除了最右边的)给出了同一个约束方程的参数。另外,右端项列给出了原问题的约束右端项和对偶问题的目标函数系数,而最下边一行给出了原问题的目标函数系数和对偶问题的约束右端项。

表 6.2 由 Wyndor Glass 公司例子得出的原问题对偶问题的线性规划表

<table>
<tr><td colspan="9">(a)典型案例</td></tr>
<tr><td colspan="3" rowspan="3"></td><td colspan="5">原问题</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">系数</td><td>右端项</td><td></td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>x_2</td><td>…</td><td>x_n</td><td></td><td rowspan="7">目标函数系数(最小值)</td></tr>
<tr><td rowspan="6">对偶问题</td><td rowspan="4">系数</td><td>y_1</td><td>a_{11}</td><td>a_{12}</td><td>…</td><td>a_{1n}</td><td>$\leqslant b_1$</td></tr>
<tr><td>y_2</td><td>a_{21}</td><td>a_{22}</td><td>…</td><td>a_{2n}</td><td>$\leqslant b_2$</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>⋮</td></tr>
<tr><td>y_m</td><td>a_{m1}</td><td>a_{m2}</td><td>…</td><td>a_{mn}</td><td>$\leqslant b_m$</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">右端项</td><td>Ⅳ</td><td>Ⅵ</td><td>…</td><td>Ⅵ</td><td></td></tr>
<tr><td>c_1</td><td>c_2</td><td>…</td><td>c_n</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="5">目标函数系数(最大值)</td><td></td></tr>
</table>

（续）

(b) Wyndor Glass 公司案例			
	x_1	x_1	
y_1	1	0	≤4
y_2	0	2	≤12
y_3	3	2	≤18
	Ⅵ	Ⅵ	
	3	5	

因此，我们现在可以得到原问题与对偶问题的一般关系，描述如下。

（1）任何一个问题的约束方程中参数都是另一个问题中变量的系数。

（2）任何一个问题目标函数的系数都是另一个问题的约束右端项。

因此，在这两个问题当中的各个数据之间都有着直接的对应关系，表 6.3 将给出相应总结。这些直接的对应关系在对包含灵敏度分析在内的对偶理论的许多应用当中都起着重要的作用。

本书网站将给出另一种原问题和对偶问题的表格，用于建立对偶问题的线性规划模型。

表 6.3　原问题与对偶问题实体之间的联系

一个问题		另一个问题
约束 i	←————→	变量 j
目标函数	←————→	右端项

6.1.1　对偶问题的起源

对偶理论是在 5.3 节介绍的单纯形表分析的基础上建立的（尤其是第 0 行）。为了分析原因，我们继续使用表 5.9 中最终单纯形表中第 0 行的符号，只是将最终表中的 $\boldsymbol{W}^*$ 替换 $\boldsymbol{Z}^*$，同时在提及其他单纯形表时将 $\boldsymbol{z}^*$ 和 $\boldsymbol{y}^*$ 的星号去掉。因此，在对于原问题使用单纯形法的每一次迭代过程中，第 0 行的当前数据都会在表 6.4 中表示出来。对于变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的系数，由前面的内容可知，用 $z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ 表示一个向量，单纯形法在达到当前单纯形表的过程中，通过减去初始单纯形表中的系数 $-c$ 得到这个向量（不要将向量 z 与目标函数的 Z 弄混淆了）。类似地，由于初始单纯形表中第 0 行的变量 $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ 系数全都是 0，$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ 代表一个向量，单纯形法需要将这个向量加到这些系数上。同时，通过观察，我们可以得出原模型中数量与参数之间的关系为

$$W = \boldsymbol{y}\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}\boldsymbol{A}$$

所以

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i, \ j = 1, 2, \cdots, n$$

表 6.4　单纯形表中的第 0 行

迭代	基变量	方程	系数									右端项
			Z	x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}	
任何	Z	(0)	1	z_1-c_1	z_2-c_2	…	z_n-c_n	y_1	y_2		y_m	W

为了说明 Wyndor Glass 公司的例子,第一个方程给出 $W=4y_1+12y_2+18y_3$,这个方程就是表 6.1 中右边方框内对偶问题的目标函数。第二个方程组给出 $z_1=y_1+3y_3$ 和 $z_2=2y_2+2y_3$,这组方程就是表 6.1 中对偶问题的约束方程左端。因此,通过减去这些"≥"约束方程的右端($c_1=3$ 和 $c_2=5$),(z_1-c_1) 和 (z_2-c_2) 就可以解释为约束方程的剩余变量。

接下来的关键是,单纯形法试图利用这些符号去实现什么(依照最优性检验)。它通过寻找一组基变量和相应的基可行解,使得第 0 行的全部系数都为非负。这时的解便是最优解,则停止迭代。通过使用表 6.4 中的符号,这一目标可以解释如下:

最优解的条件为

$z_j-c_j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n$

$y_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m$

当我们替代了前边对于 z_j 的解释后,最优解的条件说明,单纯形法可以解释成这样一种方法,即寻找下面一组 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的值,使得

$$W=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

s. t.

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geqslant c_j,\ j=1,2,\cdots,n$$

且

$$y_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m$$

但是,方框中的内容,除了没有关于 W 要达到的目标外,其余的部分正好是一个对偶问题。为了完成这个方框内的模型,探讨一下缺少的这个目标应该是什么形式。

因为 W 就是 Z 的当前值,而且由于原问题中的目标是求 Z 的最大值。因此,第一反应就是 W 也应该是求最大值。但是,由于如下几个原因,可以说明 W 也是求最大值。这一结论是不正确的,这个新问题的可行解只能是那些原问题所有可行解中满足最优解条件的。因此,只有原问题当中的最优解才能是新问题的可行解。所以,我们可以得出,原问题中 Z 的最优值是新问题中 W 的可能值里最小的,所以 W 是最小的(关于这一问题的完整证明,我们将在 6.3 节给出)。将这个目标添加到上边方框内的模型中,我们就得到了对偶问题的完整形式。

从而,对偶问题可以被视为线性规划问题中对单纯形法目标的重新解释,也就是为原问题找到一个解,这个解要满足最优检验。在达到这个原问题最优解之前,当前单纯形表中第 0 行相应的 y(松弛变量的系数)必须是对偶问题的非可行解。但是,达到这个原问题最优解之后,相应的 y 必须是对偶问题的最优解(用 y^* 标记)。因为它是一个可行解,而这个可行解同时又是 W 的最小可能值。这个最优解($y_1^*,y_2^*,\cdots,y_m^*$) 就是 4.7 节介绍的原问题中资源的影子价格。最优解 W 也是最优解 Z 的值,也就是说,两个问题最优解的值是相等的。同时也说明,对于原问题的可行解 x 与对偶问题的可行解 y,永远存在 $\boldsymbol{cx}\leqslant\boldsymbol{yb}$。

为了更清楚地解释,我们在表 6.5 的左边给出了 Wyndor Glass 公司这个例子应用单纯形法进行迭代过程中原问题与对偶问题的第 0 行。在原问题与对偶问题中,第 0 行都被分解成 3 个部分:决策变量的系数(x_1,x_2)、松弛变量系数(x_3,x_4,x_5)和右端项(Z 的值)。松弛变量系数给出了对偶问题中相应变量(y_1,y_2,y_3)的值。每一个第 0 行都给出了对偶问题相应的解,并展示在表 6.5,y_1、y_2、y_3 所在列当中。为了解释其余的两列,我们回忆 (z_1-c_1) 和 (z_2-c_2) 是对偶问题约束方程中的剩余变量。所以,增加了这些剩余变量之后,对偶问题的完整形式为:

$$\text{Min } W=4y_1+12y_2+18y_3$$

s. t.

$$\begin{aligned} y_1 \quad\quad &+3y_3 \quad -(z_1-c_1)=3 \\ 2y_2 &+2y_3 \quad -(z_2-c_2)=5 \end{aligned}$$

且

$$y_1\geqslant 0, y_2\geqslant 0, y_3\geqslant 0$$

因此,通过使用 y_1、y_2、y_3 所在列当中的数字,可以通过如下的方法来计算剩余变量:

$$z_1-c_1=y_1+3y_3-3$$

$$z_2-c_2=2y_2+2y_3-5$$

所以,剩余变量中每一个负值都表示对应的约束条件不满足。表格的最右端一列当中是经过 $W=4y_1+12y_2+18y_3$ 计算得出的对偶问题目标函数的值。

与表 6.4 所展示的一样,表 6.5 中第 0 行右边的所有数量都已经被第 0 行识别出来,而这个过程当中没有任何新的计算。特别是,表 6.5 所列,对偶问题当中的数值已经出现在表 6.4 的第 0 行中(在两行虚线之内)。

对于最开始的第 0 行,表 6.5 中可以看出,因为两个剩余变量的值全是负的,所以相应的对偶问题的解$(y_1,y_2,y_3)=(0,0,0)$是不可行的。第一步迭代成功地将两个负剩余中的一个变为非负的,但是还有一个是负值,所以要继续迭代。经过两步迭代之后,原问题满足了最优检验的条件,因为对偶问题中的全部变量以及剩余变量都已经变为非负。这个对偶问题的解$(y_1^*,y_2^*,y_3^*)=\left(0,\frac{3}{2},1\right)$就是最优解(可以通过直接对对偶问题使用单纯形法证明这个解是最优解),所以 W 和 Z 的最优解就是 $Z^*=36=W^*$。

表 6.5　Wyndor Glass 公司例子中每一步迭代中第 0 行和相应对偶问题的解

	原问题	对偶问题					
迭代	0 行	y_1	y_2	y_3	z_1-c_1	z_2-c_2	W
0	$[-3,-5 \vdots 0,0,0 \vdots 0]$	0	0	0	−3	−5	0
1	$\left[-3,0 \vdots 0,\frac{5}{2},0 \vdots 30\right]$	0	$\frac{5}{2}$	0	−3	0	30
2	$\left[0,0 \vdots 0,\frac{3}{2},1 \vdots 36\right]$	0	$\frac{3}{2}$	1	0	0	36

6.1.2　原问题——对偶问题关系总结

现在,总结一下我们对原问题与对偶问题之间关系的新发现。

弱对偶性(Weak Duality Property):如果 $\boldsymbol{x}$ 是原问题的一个可行解,$\boldsymbol{y}$ 是对偶问题的一个可行解,那么有

$$\boldsymbol{cx}\leqslant \boldsymbol{yb}$$

例如,对于 Wyndor Glass 公司这个例子,原问题的一个可行解 $x_1=3$,$x_2=3$,则目标函数值$Z=\boldsymbol{cx}=24$,而对于对偶问题的一个可行解 $y_1=1$,$y_2=1$,$y_3=2$,则会产生一个更大的目标函数值 $W=\boldsymbol{yb}=52$。很明显,对偶问题目标函数值大于原问题目标函数值。这只是两个问题可行解的一个例子。事实上,对于任意一对原问题与对偶问题的可行解,这种不等性一定存在。因为原问题的最大可行值等于对偶问题的最小可行值,而这一条正好是我们下面要说的性质。

强对偶性(Strong Duality Property):如果 $\boldsymbol{x}^*$ 是原问题的最优解,$\boldsymbol{y}^*$ 是对偶问题的最优解,那

么有如下关系,即

$$cx^* = y^* b$$

因此,这两条性质可以说明,当两个问题中有一个不是最优解,或者两个都不是最优解时,会有 $cx<yb$。当两个都是最优解时,则是上式相等。

弱对偶性描述了原问题与对偶问题的任意一组可行解之间的关系,其中两个解对于它们各自的问题是可行的。在每一步迭代中,单纯形法找到这两个问题的一对特殊解。在这一对解中,原问题的解是可行的,而对偶问题的解是不可行的(最终迭代除外)。下一条性质描述了这种情形以及这一对解之间的关系。

互补解特性:在每一步迭代过程中,单纯形法为原问题生成一个 CPF 解 x,同时为对偶问题生成一个互补解(Complementary Solution)y(在第 0 行中可以找到,松弛变量系数),并且满足 $cx=yb$。如果 x 不是原问题的最优解,那么,y 也不是对偶问题的可行解。

为了说明这个问题,仍以 Wyndor Glass 公司为例。进行了一次迭代之后,$x_1=0,x_2=6$。对于对偶问题 $y_1=0,y_2=\dfrac{5}{2},y_3=0$,则有 $cx=30=yb$。这时,x 是原问题的可行解,但是 y 不是对偶问题的可行解(因为不满足 $y_1+3y_3\geqslant 3$ 这个约束条件)。

对于互补解特性,当使用单纯形法最后一步迭代时依然成立,这时,可以为原问题找到最优解。但是,对于互补解 y,我们在下边这条性质里可以看到还有其他更多的内容需要说明。

最优互补解特性:在最后一步迭代完成时,单纯形法为原问题得到一个最优解 x^*,同时得到一个对偶问题的最优互补解 y^*(在第 0 行中可以找到,松弛变量系数),满足 $cx^*=y^*b$。

这里 y^* 就是原问题中资源的影子价格。

举例来说,在最后一次迭代完成后,有原问题的最优解 $x_1^*=2,x_2^*=6$ 和对偶问题的最优解 $y_1^*=0,y_2^*=\dfrac{3}{2},y_3^*=1$,这时有 $cx^*=36=y^*b$。

在 6.3 节我们会对其中这些性质做更进一步的观察,到时候就会发现,互补解特性可以进行更多考虑。特别是当松弛变量和剩余变量引入原问题与对偶问题中时,原问题的每一个基可行解都在对偶问题中有一个互补的基本解。我们在表 6.4 中已经注意到单纯形法通过 z_j-c_j 得到对偶问题中剩余变量的值。这个结果称为互补松弛的性质,这个性质是关于一个问题中的基变量与另一个问题中的非基变量之间的关系。

在 6.4 节中,当讨论完如何在原问题不是标准形式的情况下构建对偶问题之后,我们将会讨论另一个非常有用的性质,这个性质的概要如下。

对称性(Symmetry Property):对于任意一个原问题和它的对偶问题,两个问题之间的一切关系必定是对称的。这是因为对偶问题的对偶问题是原问题。

因此,前边所讨论的所有性质都忽略了两个问题中哪一个是原问题,哪一个是对偶问题(对于弱对偶性中不等号的方向要求原问题的目标函数是求最大值,而对偶问题的目标函数是求最小值),从而单纯形法可以被应用于两个问题当中的任意一个,并且将同时为另一个问题得到一个互补解,并最终产生一个互补最优解。

到目前为止,我们主要将注意力集中在讨论原问题的可行解或最优解及其在对偶问题当中相对应的解的关系上。但是,很可能存在这样一种情况,那就是原问题没有可行解或者是原问题有可行解但是没有最优解(因为目标函数是无界的)。最后这一条性质就是针对这样一种情况提出的。

对偶定理(Duality Theorem):原问题与对偶问题只存在下面所述的可能关系。

(1) 如果一个问题拥有可行解和有界的目标函数(所以就会有一个最优解),那么,另一个

问题也会有可行解和有界的目标函数。这时，弱对偶性与强对偶性都是可用的。

(2) 如果一个问题拥有可行解，但是目标函数是无界的(所以没有最优解)，那么，另一个问题没有可行解。

(3) 如果一个问题没有可行解，那么，另一个问题或者没有可行解，或者有可行解但是目标函数无界。

6.1.3 应用

如前所述，对偶理论的一个重要应用就是单纯形法可以通过直接解答对偶问题来为原问题寻找到一个最优解。我们在 4.8 节讨论过，约束方程的数量对单纯形法计算过程的影响远远大于变量个数的影响。如果 $m>n$，那么，对偶问题有(n)个约束方程，而原问题有(m)个约束方程，所以对偶问题有更少的约束方程数量。针对对偶问题应用单纯形法比直接对原问题使用单纯形法将会显著地降低计算过程。

弱对偶性与强对偶性描述了原问题与对偶问题之间的重要关系。对偶问题的一个有用应用就是评价原问题的计划方案。举例来说，假设 $\boldsymbol{x}$ 是一个计划要实施的可行方案，如果通过观察对偶问题而得到的另一个可行方案 $\boldsymbol{y}$，使得 $\boldsymbol{cx}=\boldsymbol{yb}$，那么，在这种情况下，即使我们没有使用单纯形法，也可以知道 $\boldsymbol{x}$ 一定是最优解。即使 $\boldsymbol{cx}<\boldsymbol{yb}$，$\boldsymbol{yb}$ 仍然为目标函数 Z 提供了一个最优解的上界。所以，如果 $\boldsymbol{yb}-\boldsymbol{cx}$ 足够小，那么，我们也可以接受这个方案，而不用再继续计算。

对于互补解特性的一个重要的应用是在 8.1 节介绍的对偶单纯形法中的使用。这一算法在原问题上使用时就好像同时在对偶问题上使用单纯形法一样，之所以可以这样使用，就是因为这一条性质的存在。由于单纯形表中第 0 行和右端项相互颠倒，所以，对偶单纯形法保持第 0 行在开始和迭代过程中是非负的，而右端项在开始时可以有负值(迭代的目标就是消除右端项中的负值)。因此，这个算法偶尔会被使用，因为以这种形式建立初始单纯形表会比单纯形法要求的形式建立单纯形表更加简便。它经常用于再优化(见 4.7 节)。因为对原模型的改变将导致对最终单纯形表的修订，使之满足这种形式。这种情况对于特定类型的灵敏度分析非常常见，我们将在下章中分析。

总体来说，对偶理论在灵敏度分析中扮演了重要的角色，在 6.5 节将详细论述。

另一个重要的应用是对于对偶问题的经济解释以及对原问题的分析。我们在 4.7 节中已经看到了一个例子，那就是影子价格。在 6.2 节中，我们将会看到如何将这种解释扩展到整个对偶问题，之后如何扩展到整个单纯形法。

6.2 对偶的经济解释

对于对偶问题的经济解释是直接建立在 3.2 节中介绍的对于原问题的典型解释基础上的(线性规划模型采用标准形式)。为了帮助回忆，我们在表 6.6 中总结了对于原问题的解释。

表 6.6 原问题的经济解释

数量	解释
x_j	第 j 个产品($j=1,2,\cdots,n$)
c_j	第 j 个产品单位利润
Z	所有产品的利润
b_i	第 i 种可用资源数量($i=1,2,\cdots,m$)
a_{ij}	第 j 种产品每单位消耗第 i 种资源数量

6.2.1 对偶问题的解释

为了发现如何从对原问题的解释中发展出对于对偶问题的经济解释①,我们注意到表6.4中 W 就是当前单纯形表中 Z 的值。由于

$$W=b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_my_m$$

因此,每一个 b_iy_i 都可以被解释成:如果原问题目前拥有 b_i 个单位的第 i 种可用资源,那么,可对利润产生多大的贡献。

对偶变量 y_i 可以被解释成每一单位的资源 $i(i=1,2,\cdots,m)$ 种资源对利润的贡献。

换句话说,y_i 的值就是4.7节中所说的影子价格。

举例来说,当单纯形法的第二次迭代找到了 Wyndor Glass 公司问题的最优解时,同时也就找到了对偶变量的最优值(表6.5的最底行) $y_1^*=0, y_2^*=\dfrac{3}{2}, y_3^*=1$。这就是4.7节对这一问题通过作图分析而得出的影子价格。我们回忆前面 Wyndor Glass 公司的例子,在这个例子中资源就是用来生产两种新产品的3个车间的可用生产能力,所以 b_i 表示第 i 个车间每周用来生产产品的总共的小时数,在这里 $i=1,2,3$。正如4.7节所讨论的那样,影子价格就是单独地增加1单位任何一个 b_i,可以给目标函数最优值带来 y_i^* 的增加量(一个星期总共能够增加多少美元的利润)。因此,y_i^* 可以解释为在最优方案中1单位第 i 种资源可以贡献的利润量。

对于对偶变量的解释将引导我们对整个对偶问题进行全面的解释。特别地,由于每一单位的第 j 种产品消耗 a_{ij} 单位的第 i 种资源,因此 $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i$ 可以解释为生产1单位的第 j 种产品($j=1,2,\cdots,n$)时所消耗的各种混合资源对于当前利润的贡献。

对于 Wyndor Glass 公司问题,1单位的产品 j 对应着每个星期生产1批第 j 种产品,在例子里 $j=1,2$,为了生产1批第1种产品,所对应的各种混合资源的消耗是第1个车间1h的制造时间和第3个车间3h的制造时间。为了生产1批第2种产品,对应的各种混合资源的消耗是第2个车间和第3个车间各2h。因此,y_1+3y_3 和 $2y_1+2y_3$ 可以解释成每星期生产的每批各种产品所消耗混合资源对于利润所产生的贡献(千美元/星期)。

对于每种产品 j,同样的或者更多数量的资源组合也可以用于其他方法。但是,如果与将这些资源用于生产 j 产品相比,其他方法使用这些资源不能产生更多的利润,那么,这些方法就不会被考虑。c_j 被解释成第 j 种产品的单位利润,对偶问题当中的每一个约束方程被解释如下。

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geqslant c_j$ 说明,各种资源对于利润的贡献至少应该和将它们用于生产1单位的第 j 种产品产生的利润相等,否则,这些资源就没有被最佳利用。

对于 Wyndor Glass 公司问题,单位利润(千美元/星期)是 $c_1=3$ 和 $c_2=5$。所以,对偶问题约束方程是 $y_1+3y_3\geqslant 3$ 和 $2y_1+2y_3\geqslant 5$。类似地,非负的约束被解释如下:$y_i\geqslant 0$ 说明,第 i 种资源($i=1,2,\cdots,m$)对于利润的贡献应攻大于0,否则,最好还是根本不用这种资源。

目标函数 $\text{Min } W=\sum_{i=1}^{m} b_iy_i$ 可以视为被各种产品所消耗资源的最小的总隐含价值。对于 Wyndor Glass 公司问题,被两种产品消耗的各种资源的总隐含价值(千美元/星期)为:

---

① 事实上,人们提出了几种存在细微差别的解释。我们这里介绍的这种解释似乎是最有用的,因为它直接解释了在原问题中单纯形法做了些什么。

$$W=4y_1+12y_2+18y_3$$

这种解释还可以通过区别原问题当中对于任何个 BF 解($x_1,x_2,\cdots,x_{n+m}$)中的基变量与非基变量来进一步讨论。回忆基变量中(变量值为非 0)总是会在第 0 行中存在一个 0 系数。因此,再一次观察表 6.4 以及相应的 z_j 方程,我们可以看到

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j, \qquad x_j > 0(j=1,2,\cdots,n)$$

$$y_i = 0, x_{n+i} > 0 \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

(这是 6.3 节中讨论的松弛性的一种。)对于第一个方程,经济学上的解释是:一旦第 j 种产品按照严格确定的水平去生产,那么,它所消耗的资源的边际值一定要等于(不允许超出)这种产品的单位利润。第二个方程表示,一旦这种资源没有被产品完全使用($x_{n+i}>0$),那么,这种资源的边际价值就是 0($y_i=0$)。用经济学术语来说,这种资源属于免费品。对于过度供应的商品,它的价格一定会下降为 0。这是由供求关系法则决定的。这些可以说明,应该把对偶问题求最小值的目标函数解释为被消耗的资源的全部隐含价值,而不是资源的分配。

为了更好地说明这两个方程,考虑 Wyndor Glass 问题的最优 BF 解(2,6,2,0,0)。基变量是 x_1、x_2、x_3,所以其第 0 行的系数是 0,就像表 6.5 中最底行所表示的那样。这个最底行同时也给出了对偶问题的解 $y_1^*=0,y_2^*=\dfrac{3}{2},y_3^*=1$,剩余变量($z_1^*-c_1$)= 0 以及($z_2^*-c_2$)= 0。对于 $x_1>0$ 以及 $x_2>0$,这些剩余变量以及直接的计算都表明 $y_1^*+3y_3^*=c_1=3$ 和 $2y_2^*+2y_3^*=c_2=5$。因此,生产一批每种产品所消耗的各种资源确实是等于这种产品的单位利润。第一个生产车间约束方程中的松弛变量 $x_3>0$,所以增加其生产能力的边际价值是 0($y_1^*=0$)。

6.2.2　单纯形法的解释

对于对偶问题的解释同样为在原问题中使用单纯形法做了些什么,提供了经济上的解释。单纯形法的目标就是找出如何使用可用的资源,以实现总利润最大化。为了达到这个目标,我们必须找到这样一个 BF 解来满足对资源有利可图的利用的全部条件(对偶问题的约束条件)。这些条件构成了算法的最优约束条件。对于任意一个给定的 BF 解,这些伴随着基变量的需求(对偶问题的约束)会自动满足。但是,对于非基变量,这些条件可能满足,也可能不满足。

特别地,如果变量 x_i 是一个非基变量,那么,就表示第 j 种产品没有被生产。我们就需要计算每生产 1 单位这种产品所消耗的资源 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_i$,目前能对利润有多大的贡献。利润可能小于、大于或者等于 c_j。如果小于,那么,在单纯形表的第 0 行,$z_j-c_j<0$,因此将这些资源用于这种产品的生产将会更有利润。如果大于($z_j-c_j>0$),则说明这些资源已经被用于生产其他产品,而生产这些其他产品可以比生产本产品产生更多的利润,所以这些资源不应该被转移过来生产第 j 种产品。

类似地,如果松弛变量 x_{n+i} 是一个非基变量,那么,第 i 种资源的 b_i 个单位全部被利用,于是,y_i 是这种资源对于利润的边际贡献。因此,如果 $y_i<0$,那么,可以通过减少对这种资源的使用(也就是增加 x_{n+i})增加利润。如果 $y_i>0$,则说明可以继续增加对这种资源使用。如果 $y_i=0$,这种资源不会对利润有任何影响。

因此,单纯形法就是检查当前 BF 解中所有非基变量,发现哪一个可以更有效地使用资源以产生更多的利润。如果任何一个都不满足条件,则任何一种对资源的改变或减少都不可能增加利润,所以当前的解就是最优解。如果有一个或者多个可以增加利润,那么,单纯形法就挑选出这样一个变量,增加一个单位该变量的生产可以增加最多利润。之后,就把这个非基变量变为基

变量,并给这个变量增加尽可能多的资源来生产它,直到生产它的资源的边际价值改变。这样改进之后的 BF 解又形成了一个新的第 0 行(也就是一个新的对偶解)。之后重复上面的过程,直到找到最优解。

对于对偶问题经济上的解释扩展了我们分析原问题的能力。但是,在 6.1 节中我们已经看到,这种解释只是两个问题之间关系的一部分。在 6.3 节中我们将更深入地讨论这些关系。

6.3 原问题与对偶问题的关系

因为对偶问题也是一个线性规划问题,所以它同样也有角点解,而且,通过使用问题的扩展形式我们可以把这些角点解解释成基本解。由于方程的约束函数是"≥"的形式,所以扩展形式是通过在约束方程 $j\ (j=1,2,\cdots,n)^2$ 左边减去(而不是加上)剩余变量获得的①。这些剩余变量为

$$z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i - c_j, \quad j = 1,2,\cdots,n$$

因此,z_j-c_j 扮演了约束 j 中剩余变量(或者是松弛变量,如果这些约束方程都乘以-1)的角色,每一个角落点解($y_1,y_2,\cdots,y_m$)通过对 z_j-c_j 的解释产生了一个基本解($y_1,y_2,\cdots,y_m,z_1-c_1,\cdots,z_n-c_n$)。所以,一个扩展形式的对偶问题拥有 n 个约束方程,$n+m$ 个变量。每一个基本解拥有 n 个基变量和 m 个非基变量(如表 6.3 所列,对偶问题中的约束方程对应着原问题中的变量,对偶问题中的变量对应着原问题中约束方程)。

6.3.1 互补基本解

在原问题与对偶问题之间的关系中,一个很重要的关系就是原问题与对偶问题基本解之间的直接对应关系。这种对应关系的关键就是原问题基本解的单纯形表的第 0 行,正如表 6.4 或者表 6.5 展示的那样。这样的一个第 0 行可以在原问题的任何一个基本解、可行解或者非可行解中,通过使用表 5.8 中公式获得。

我们再来注意一下表 6.4 和表 6.5,如何直接从第 0 行找到对偶问题的完整解(包括剩余变量)。在第 0 行的系数中每一个原问题的变量都对应着一个对偶问题的变量。表 6.7 给出了总结。接下来,我们先考察任意一个问题,之后继续用 Wyndor Glass 公司问题来说明。

这里我们可以发现一个关键问题,就是直接从第 0 行中读出来的对偶问题解也必须是一个基本解。原因是原问题当中的 m 个基变量要求在第 0 行当中的系数为 0,从而要求对偶问题当中 m 个对应的变量,也就是 m 个非基变量的系数是 0。其余的 n 个变量(基变量)的值也必须是本节最开始给出的一系列方程的解。如果用矩阵的形式表示,这一系列方程可以写成 $\mathbf{z}-\mathbf{c}=\mathbf{y}\mathbf{A}-\mathbf{c}$,在 5.3 节观察到的结果实际上说明了 $\mathbf{z}-\mathbf{c}$ 和 $\mathbf{y}$ 的解是第 0 行中相应的部分。

由于 6.1 节所讨论的对称性(以及表 6.7 中所描述的变量之间的对应关系),原问题基本解与对偶问题基本解之间的对应也是对称的。而且,一对互补的基本解拥有同样的目标函数值,表 6.4 中的 W。

下面让我们总结一下原问题与对偶问题基本解之间的对应关系。第一条性质将 6.1 节讨论的互补解特性扩展到了两个问题的扩展形式,进而扩展到了原问题任意的一个基本解(可行的或者不可行的)。

---

① 你可能想知道,为什么这里没有像在 4.6 节中那样介绍人工变量。这是因为这些变量除了改变可行域,并在单纯形法开始时起到简化作用外没有其他价值。我们现在感兴趣的不是如何在对偶问题中应用单纯形法,也不是改变它的可行域。

互补基本解的特性：原问题当中的每一个基本解在对偶问题中都拥有一个互补的基本解，并且它们各自的目标函数值 Z 和 W 相等。给定一个原问题的单纯形表，从第 0 行可以直接利用在 6.4 给出的关系找到对偶问题的基本解 $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}-\boldsymbol{c})$。

下一条性质指出了如何在互补的基本解中确定基变量与非基变量。互补松弛性在表 6.7 中给出了变量之间的对应关系。原问题基本解与对偶问题基本解中的变量满足表 6.8 中给出的互补松弛关系。而且，这种关系是对称的，所以两个问题的基本解彼此互补。

表 6.7　原问题与对偶问题变量之间的对应关系

	原变量		相应对偶变量	
任意问题	(决策变量) x_j		z_j-c_j(剩余变量) $j=1,2,\cdots,n$	
	(松弛变量) x_{n+i}		y_i(决策变量) $i=1,2,\cdots,m$	
Wyndor Glass 公司问题	决策变量	x_1	z_1-c_1	(剩余变量)
		x_2	z_2-c_2	
	松弛变量	x_3	y_1	(决策变量)
		x_4	y_2	
		x_5	y_3	

表 6.8　互补基本解之间的互补松弛关系

原变量	相应的对偶变量
基变量	非基变量(m 个)
非基变量	基变量(n 个)

这一性质为互补松弛性的原因说明对于任意的一对相对应的变量，如果它们中的一个在其非负的约束中(基变量>0)有松弛变量，那么，在另一个当中一定没有松弛变量(非基变量=0)。我们在 6.2 节中提到过，这条性质对于线性规划问题经济学上的解释十分有用。

例如，为了更生动地说明这两条性质，我们再次考虑 3.1 节所举的 Wyndor Glass 公司问题例子，所有的 8 个基本解(5 个可行解、3 个非可行解)都被列举在表 6.9 中。因此，它的对偶问题(表 6.1)也必须拥有 8 个基本解。原问题每一个基本解的互补解也在表 6.9 中给出。

表 6.9　Wyndor Glass 公司问题的互补基本解

序号	原问题		$Z=W$	对偶问题	
	基本解	是否可行		是否可行	基本解
1	(0,0,4,12,18)	是	0	否	(0,0,0,-3,-5)
2	(4,0,0,12,6)	是	12	否	(3,0,0,0,-5)
3	(6,0,-2,12,0)	否	18	否	(0,0,1,0,-3)
4	(4,3,0,6,0)	是	27	否	$\left(-\frac{9}{2},0,\frac{5}{2},0,0\right)$
5	(0,6,4,0,6)	是	30	否	$\left(0,\frac{5}{2},0,-3,0\right)$
6	(2,6,2,0,0)	是	36	是	$\left(0,\frac{3}{2},1,0,0\right)$
7	(4,6,0,0,-6)	否	42	是	$\left(3,\frac{5}{2},0,0,0\right)$
8	(0,9,4,-6,0)	否	45	是	$\left(0,0,\frac{5}{2},\frac{9}{2},0\right)$

原问题用单纯形法得到的 3 个 BF 解分别是表 6.9 中的第 1 个、第 5 个和第 6 个。已经在表 6.5 中看到如何直接从第 0 行中读出对偶问题的解，从松弛变量系数开始，接下来是最初始的

变量。其他对偶问题的基本解也可以通过为原问题的每一个基本解构造第0行,并运用表5.8底部给出的公式找出来。

对于原问题的每一个基本解,都可以通过使用互补松弛性识别对偶问题的互补解中的基变量与非基变量,因此,通过使用本节开始给出的方程,可以直接获得互补解。例如,考虑表6.9中倒数第二个解(4,6,0,0,-6)。注意到 x_1、x_2 和 x_5 是基变量,因为这些变量不为0。表6.7表明,它们对应的对偶问题变量是 (z_1-c_1)、(z_2-c_2) 和 y_3。表6.8说明这些变量在对偶问题当中是非基变量,所以

$$z_1-c_1=0, z_2-c_2=0, y_3=0$$

因此,对偶问题约束条件的扩展形式为

$$\begin{aligned} y_1 \quad\quad & +y_3 \quad -(z_1-c_1) \quad = 3 \\ 2y_2 & +2y_3 \quad -(z_2-c_2) \quad = 5 \end{aligned}$$

被缩减为

$$\begin{aligned} y_1 \quad\quad & +0 \quad -0 \quad =3 \\ 2y_2 & +0 \quad -0 \quad =5 \end{aligned}$$

所以,可以得到 $y_1=3$ 和 $y_2=\frac{5}{2}$。将这两个值与非基变量的0值结合起来,就得到表6.9中倒数第二行最右面的基本解 $\left(3,\frac{5}{2},0,0,0\right)$。我们注意到,这个对偶问题的基本解是可行的,因为所有的5个变量都满足非负的约束条件。

最后,我们注意到表6.9中的 $\left(0,\frac{3}{2},1,0,0\right)$ 是对偶问题的最优解,因为它是使目标函数值 W(36)最小的基本可行解。

6.3.2 互补的基本解之间的关系

现在,我们把注意力转回研究互补的基本解之间的关系上来,先从它们之间可能的关系开始。表6.9中间的那几列提供了一些有价值的线索。在这些基本解之间,我们发现对于是否可行这个问题的回答,大多数同样满足互补关系。特别是,除了一个特例之外,其他解全都满足,如果一个解是可行的,则另一个解是不可行的(这当中也存在两个解都是不可行的这种可能性,就像第三对解)。唯一的例外是第6对解,而从 $W=Z$ 这一列可以看出,这个解对于原问题是最优解。由于第六个解在对偶问题中也是最优的(互补最优解特性),这个最优解中 $W=36$,而前5个解由于全部小于36,所以这5个解都是不可行的(对偶问题的目标函数是求最小值)。同样的原因,对于原问题,由于最后两个解 $Z>36$,所以它们两个也不是可行解。

这个解释可以被强对偶性支持,也就是说,对于原问题与对偶问题的最优解有 $Z=W$ 支持。

接下来让我们把6.1节中的互补最优解特性扩展为两个问题的扩展形式。

互补的最优基本解特性:任意一个原问题的最优基本解,在其对偶问题当中都拥有一个互补的最优基本解。它们各自的目标函盘值(Z 和 W)相等。给定一个原问题最优解的单纯形表的第0行,可以利用表6.4得到互补的对偶问题的最优解($\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{z}^*-\boldsymbol{c}$)。

为了回顾在这条性质背后的原因,我们注意对偶解($\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{z}^*-\boldsymbol{c}$)必须对对偶问题是可行的,因为原问题最优解条件要求所有的对偶变量(包括剩余变量)必须是非负的。既然这个解是可行的,那么,通过弱对偶性我们可以知道它对对偶问题一定是最优的(由于 $W=Z$,所以 $\boldsymbol{y}^*\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^*$,这里 $\boldsymbol{x}^*$ 是原问题的最优解)。

基本解可以按照它们是否满足以下两个条件进行分类:一个条件是它是否可行,也就是说,是否所有扩展形式中的变量(包括松弛变量)都是非负的;另一个条件是最优性,也就是说,是否第 0 行中的全部系数(也就是对偶问题中的互补的基本解全部变量)都是非负的。我们在表 6.10 中给出了分类后各种不同类型解的命名。举例来说,在表 6.9 中的基本解 1、2、4 和 5 是不满意解,6 是最优解,7 和 8 是超优解,而 3 既不是可行解也不是超优解。

表 6.10　基本解分类

		是否满足最优解?	
		是	不是
是否可行	是	最优解	不满意解
	否	超优解	不可行也不超优

通过给出的定义,表 6.11 总结了互补的基本解之间的一般关系。表 6.11 给出的前 3 个之间的转换关系如图 6.1 所示,因此,当使用单纯形法把原问题中的不满意解向最优解转化的同时,在对偶问题的互补基本解当中也进行着将超优解向可行解转化的过程。相反,有时候直接在原问题上处理超优解,使其转化为可行解,这样会更加简单(或者必要)。这也就是对偶单纯形法的目的。对偶单纯形法将在 8.1 节介绍。

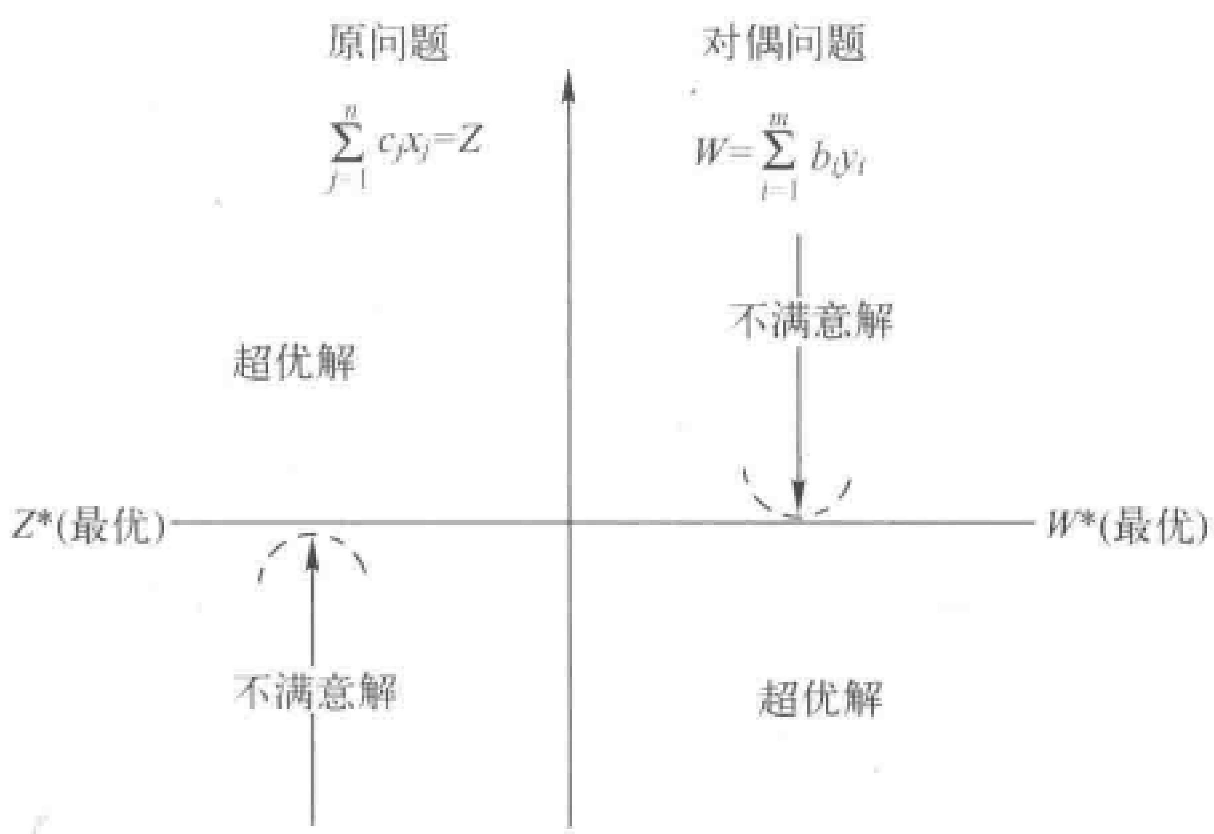

图 6.1　互补基本解之间的类型转换回

表 6.11　互补的基本解之间的关系

		全部基本解	
原问题基本解	互补对偶基本解	原问题可行	对偶可行
不满意解	超优解	是	否
最优解	最优解	是	是
超优解	不满意解	否	是
不可行也不超优	不可行也不超优	否	否

表 6.11 的第三列和第四列介绍了其他两个非常常见的术语,这两个术语用来描述一对互补的基本解。这两个互补的解中,如果原问题的基本解是可行的,我们就称其为原可行解;同样,如果对偶问题对应的互补的基本解是可行的,我们就称其为对偶可行解。通过使用这两个术语,单纯形法通过处理原可行解,努力使其同时也达到对偶可行解。一旦达到这个目的,这两个互补的解就是各自的最优解。

在灵敏度分析中这些关系是非常有用的,下章将详细介绍。

6.4 改造适用于其他原问题形式

一般地,我们都假设原问题是通过我们的标准形式给出的。但是,我们在本章的开头指出,任何一个线性规划问题,无论是否以标准形式给出,都要处理对偶问题。因此,本节我们将注意力放在对原问题的其他形式上,如对偶问题是如何变化的。

4.6 节讨论了每一种非标准形式,并且指出了如何将这些非标准形式转化成方程形式的标准形式。这些转化的方法在表 6.12 中给出了总结。因此,总是可以将任意一个非标准形式的模型转化成标准形式,然后,为标准形式构造一个对偶问题模型。为了说明,我们在表 6.13 中给出了如何找出标准形式模型(标准形式模型一定有对偶问题)的对偶问题模型,可以注意到,我们正是以原问题的标准形式而结束的。由于任何一对原问题与对偶问题都可以转换为这些形式,这表明,对偶问题的对偶问题就是原问题。所以,对于任何的原问题和对偶问题,它们之间的关系一定是对称的。这就是表 6.1 中给出的对称性(没有证明),而表 6.13 进行了证明。

通过对称性可以得到一个结论,那就是前边所讲述的关于原问题与对偶问题之间的关系都是可以颠倒的。

表 6.12 将线性规划问题转化成标准形式

非标准形式	等价的标准形式
Min Z	Max $(-Z)$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i$	$-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant -b_i$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i$ 且 $-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant -b_i$
x_j 无约束	$x_j^+ - x_j^-, x_j^+ \geqslant 0, x_j^- \geqslant 0$

表 6.13 构造对偶问题的对偶问题

对偶问题		转化为标准形式
Min $W=\boldsymbol{yb}$ s. t. $\boldsymbol{yA}\geqslant\boldsymbol{c}$ $\boldsymbol{y}\geqslant 0$	⟶	Max $(-W)=-\boldsymbol{yb}$ s. t. $-\boldsymbol{yA}\leqslant-\boldsymbol{c}$ $\boldsymbol{y}\geqslant 0$
		↓
转化为标准形式		对偶问题
Max $Z=\boldsymbol{cx}$ s. t. $\boldsymbol{Ax}\leqslant\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{x}\geqslant 0$	⟵	Min $(-Z)=-\boldsymbol{cx}$ s. t. $-\boldsymbol{Ax}\geqslant-\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{x}\geqslant 0$

另一个结论就是对于两个问题,哪一个被称为原问题、哪一个称为对偶问题并没有实质上的区别。实际上,你可能会看见一个线性规划问题满足我们所提到的对偶问题的标准形式。我们的习惯是:将按照符合实际问题所建立的模型称为原问题,而不在乎它的形式。

我们在说明如何为一个非标准形式构造一个对偶问题时，并没有包括约束方程是等式和变量是无约束这两种情况。事实上，对于这两种形式是有捷径的。对于等式形式的约束条件同样可以按照"≤"的约束条件形式构造它的对偶问题，只不过在对偶问题当中，相应变量的非负约束条件需要去掉（也就是说，这个变量是无约束的）。由于对称性，在原问题中去掉一个非负的约束，对于对偶问题的影响仅仅是将相对应的不等的约束变成等式的约束。

另一个捷径涉及对于求最大值问题的"≥"约束条件。最直接的方法就是将这些约束全都转化成"≤"的形式，即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i \rightarrow -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant -b_i$$

接下来就可以按照通常的方法来构造对偶问题了。以$-a_{ij}$作为第j个约束方程（这个约束方程含有"≥"的形式）中y_i的系数，以$-b_i$作为目标函数（是求最小值）的系数，这里y_i同样含有非负的约束$y_i \geqslant 0$。现在，假设我们定义了一个新的变量$y_i'=y_i$。用y_i'替代y_i对对偶问题进行解释，这会导致以下的变化：①约束方程j的变量系数变成a_{ij}，目标函数系数为b_i；②变量的约束变为$y_i' \leqslant 0$。捷径就是通过使用y_i'替代y_i，作为对偶变量，于是，在原始约束中的参数（a_{ij}和b_i）立即变成了对偶问题中变量的系数。

这里有一个非常有用的可以帮助记忆对偶问题约束形式的策略。对于求最大值的问题，约束大多数是以"≤"形式出现的。小部分是以"="形式出现的，极个别的是以"≥"形式出现的。类似地，对于求最小值的问题，约束更多的是以"≥"形式出现的，小部分是以"="形式出现的，极个别的是以"≤"出现的。对于任意类型的问题中的一个独立变量的约束，更多的是以非负的形式出现的，一小部分是无约束的，非常个别的一部分变量是以小于0或者等于0作为约束的。现在回忆一下表6.3中的原问题与对偶问题各项之间的对应关系。也就是一个问题中的第i个约束方程对应着另一个问题当中的第i个变量，一个问题中的第i个变量也对应着另一个问题中的第i个约束方程。上面所说的这些大部分、小部分、极个别方法，也可以简称为SOB方法，说明了对偶问题中一个约束方程或者是一个变量的约束是大部分的、小部分的或者极个别的取决于原问题当中与之相对应的项是大部分的、小部分的还是极个别的。下面进行总结。

6.4.1　用SOB方法决定对偶问题约束形式[①]

（1）无论原问题是以最大值形式还是以最小值形式出现，对偶问题自动以与原问题相反的形式出现（即原问题求最大值对偶问题求最小值，原问题求最小值对偶问题求最大值）。

（2）按照表6.14，将原问题当中的约束方程以及对变量的约束条件分别加上大部分、小部分与极个别这样的3种标签。这个标签的种类取决于这个问题是求最大值（使用第二列）还是求最小值（使用第三列）。

（3）对于对偶问题中对变量的约束，使用与原问题中与这个变量相对应的那个约束方程相同的标签（对应关系见表6.3）。

（4）对于对偶问题中每一个约束方程，使用与原问题中与这个约束方程相对应的那个变量约束相同的标签（对应关系见表6.3）。

表6.14第二列与第三列之间的箭头清楚地说明了原问题与对偶问题约束形式之间的对应

---

① 这个特殊的用来帮助记忆约束种类的工具是由Harvey Mudd大学的Arthur T. Benjamin教授所提出的。关于Arthur T. Benjamin教授的一件非常有意思的事情是他本人就是一个非常伟大的人类计算器，他可以用大脑进行6位数的乘法计算。对SOB方法进一步讨论和推导可参见他的著作。

关系。我们注意到,这些对应关系总是发生在一个问题的约束方程与另一个问题中对变量的约束这两者之间,由于原问题既可以是求最大值也可以是求最小值(而对偶问题目标函数的形式与原问题相反),表的第二列给出了原问题以及对偶问题求最大值的形式,而第三列给出了另一个问题的最小值形式。

为了更生动地说明,考虑我们在3.4节开始时给出的那个放射治疗的例子。为了能在表6.14中展示双向的转换,在以这个模型的目标函数取最小值之前,先以这个模型的目标函数取最大值作为原问题。

在表6.15的左侧给出了这个问题的目标函数取最大值的形式。通过使用表6.14的第二列表现这个问题,表中的箭头表明第三列中对偶问题的形式。这些箭头在表6.15中用来展示对偶问题的结果(由于这些箭头,我们把这些约束放在对偶问题的后边,而不是像通常那样放在顶部)。在每一个方程的约束旁边我们加了S、O或者B的标签,分别代表大部分、小部分或者极个别。就像SOB方法所指明的那样,对偶问题约束的标签总是与原问题相对应的约束所拥有的标签相同。

表6.14 原问题—对偶问题对应的形式

标签	原问题(或对偶问题)		对偶问题(或原问题)
	Max Z(或 W)		Min W(或 Z)
	约束 i		变量 y_i(或 x_i)
大部分	$\leqslant$的形式	$\longleftrightarrow$	$y_i \geqslant 0$
小部分	=的形式	$\longleftrightarrow$	无约束
极个别	$\geqslant$的形式	$\longleftrightarrow$	$y_i' \leqslant 0$
	变量 x_j(或 y_j)		约束 j
大部分	$x_j \geqslant 0$	$\longleftrightarrow$	$\geqslant$的形式
小部分	无约束	$\longleftrightarrow$	=的形式
极个别	$x_j' \leqslant 0$	$\longleftrightarrow$	$\leqslant$的形式

表6.15 放射治疗例子的原问题与对偶问题的一种形式

原问题		对偶问题
Max $-Z=-0.4x_1-0.5x_2$		Min $W=2.7y_1+6y_2+6y_3'$
s. t.		s. t.
(S) $0.3x_1+0.1x_2\leqslant 2.7$	$\longleftrightarrow$	$y_1\geqslant 0$ (S)
(O) $0.5x_1+0.5x_2=6$	$\longleftrightarrow$	y_2 无约束 (O)
(B) $0.6x_1+0.4x_2\geqslant 6$	$\longleftrightarrow$	$y_3'\leqslant 0$ (B)
且		
(S) $x_1\geqslant 0$	$\longleftrightarrow$	$0.3y_1+0.5y_2+0.6y_3'\geqslant -0.4$ (S)
(S) $x_2\geqslant 0$	$\longleftrightarrow$	$0.1y_1+0.5y_2+0.4y_3'\geqslant -0.5$ (S)

但是,如果不是为了说明,一般不需要将原问题转化为最大值的形式。使用最初始的最小值形式,表6.16左侧给出了原问题的方程。现在让我们用表6.14的第三列表现这个原问题。箭头给出了对偶问题的形式,并用第二列展示。表6.16右侧展示了对偶问题的结果。同样,这里S、O、B标签显示了SOB方法的使用。

正如表6.15与表6.16中的原问题是等价的,这两个对偶问题也是完全等价的。认识这种等价性的关键就在于这样的事实,对偶每一个版本中的变量是其他版本中变量的负数($y_1'=-y_1$,$y_2'=-y_2$,$y_3=-y_3'$)。所以,对于一个版本如果把变量换成另一个版本中的变量,并且将目标函数

以及约束全部乘以-1,就可以得到另一个版本(习题 6.4-5 会让你验证这一结论)。

如果想了解 SOB 解决对偶问题的其他案例,可以查看本书的网页对应的案例章节。

如果单纯形法被应用于一个含有非正约束变量的原问题或者对偶问题(如表 6.15 中对偶问题中的 $y_3' \leq 0$),这个变量就应该变换成非负的形式(如 $y_3 = -y_3'$)。

表 6.16　放射治疗例子的原问题与对偶问题的另一种形式

原问题		对偶问题
Min $Z = 0.4x_1 + 0.5x_2$ s. t.		Max $W = 2.7y_1' + 6y_2' + 6y_3$ s. t.
(B)　$0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7$	$\longleftrightarrow$	$y_1' \leq 0$　(B)
(O)　$0.5x_1 + 0.5x_2 = 6$	$\longleftrightarrow$	y_2' 无约束　(O)
(S)　$0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6$	$\longleftrightarrow$	$y_3 \geq 0$　(S)
且		
(S)　$x_1 \geq 0$	$\longleftrightarrow$	$0.3y_1' + 0.5y_2' + 0.6y_3 \leq 0.4$　(S)
(S)　$x_2 \geq 0$	$\longleftrightarrow$	$0.1y_1' + 0.5y_2' + 0.4y_3 \leq 0.5$　(S)

当在原问题当中使用人工变量帮助单纯形法解决问题时,对于单纯形表第 0 行中对偶的解释如下:因为人工变量扮演的是松弛变量的角色,它们的系数规定了对偶问题中互补的基本解中相应变量的值,由于使用人工变量,实际上是将原来的实际问题变成了一个简单的人工问题,因此,这个对偶问题实际上也是这个人工问题的对偶问题。但是,当所有的人工变量都变成非基变量时,我们又回到了实际的原问题和对偶问题。在两阶段法中,人工变量应该在第二阶段保留,这样可以帮助很快在第 0 行中读出对偶问题的完整形式。对于大 M 法,由于大 M 加到第 0 行初始化人工变量的系数,所以对偶问题中对应的变量的当前值就是人工变量的负值,也就是负 M。

举例来说,观察一下在表 4.12 中给出的放射治疗的例子中最终单纯形表的第 0 行。当 M 从变量 $\bar{x}_4$ 和 $\bar{x}_6$ 的系数中减去之后,在表 6.15 中给出的对偶问题的最优解是从 x_3、$\bar{x}_4$ 和 $\bar{x}_6$ 的系数中直接读出的$(y_1, y_2, y_3') = (0.5, -1.1, 0)$。与通常一样,对于两个约束方程中的剩余变量是直接从 x_1 和 x_2 的系 $z_1 - c_1 = 0$ 和 $z_2 - c_2 = 0$ 直接读出来的。

6.5　对偶理论在灵敏度分析中的作用

灵敏度分析主要研究改变 a_{ij}、b_i 和 c_j 对最优解产生的影响。但是,改变原问题中的参数值同样会改变对偶问题中对应的值。因此,可以选择使用哪个问题进行研究。由于 6.1 节和 6.3 节中介绍的原问题和对偶问题之间的关系(尤其是互补的基本解特性),因此很容易按照要求在两个问题之间进行转换。在一些问题当中直接分析对偶问题以决定对原问题的影响会更加方便。下面我们来讨论两个这样的例子。

6.5.1　非基变量系数的改变

假设在最初始的原问题的最优解中,非基变量的系数发生改变。这些改变对最优解会有什么影响。它是否仍然可行?它是否仍然最优?

由于所涉及的变量是非基变量,所以变量系数的改变不会影响解的可行性。因此,对于这种情况就只存在一个问题,即这个解是否还是最优的。就像表 6.10 和表 6.11 中指出的那样,这个问题的另一个等价的问法是:是否改变之后的这个原最优解所对应的对偶问题的互补基本解仍然是可行的。由于这样的改变只是影响对偶问题中的一个约束方程,因此,要回答这个问题时只

需简单地检验一下这个互补的基本解是否满足新的约束条件。

我们将在7.2节中通过相关案例解释这个问题。问题的另一个解法可以通过本书网站进行查询。

6.5.2 问题中引入新变量

正如表6.6中指出的那样,模型中的决策变量通常是代表考虑中的各种产品的生产水平。在某些情况下,这些产品是从更大范围的一组产品中挑选出来的,而这一组中的其他产品可能是因为看起来似乎效益不是特别好,所以没有包含进来,或者是这些产品在模型建立好或求出最优解之后才被发现的。对于这两种情况的任意一种,关键问题都是这些之前没有被考虑的产品是否值得投产。换句话说,就是将这些产品加入最开始的模型中是否会改变最优解。

增加一种新产品就意味着在原模型中增加一个新的变量,并且在约束方程和目标函数中给它以合适的系数。而对于对偶问题的唯一影响就是在对偶问题当中增加了一个新的约束(表6.3)。

当这些改变发生后,原来的最优解加上新增加的这个以0为值的变量(非基变量)所组成的新解对于新模型是否仍然是最优的?如前所述,这个问题的另一个等价的说法是原最优解所对应的对偶问题的互补基本解仍然是可行的。同样,如前所述,要回答这个问题只需简单地检验这个互补的基本解是否满足新增加的约束条件。

为了更清楚地说明,我们来考虑3.1节中给出的Wyndor Glass公司的例子。假设现在生产线有一个新的第二种产品加入了考虑当中。我们用$x_{新}$代表整个新增加的产品,改变之后的模型如下:

$$\text{Max } Z=3x_1+5x_2+4x_{新}$$

s. t

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & & +2x_{新} & \leqslant & 4 \\ & 2x_2 & +3x_{新} & \leqslant & 12 \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_{新} & \leqslant & 18 \end{array}$$

且

$$x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,x_{新}\geqslant 0$$

当我们加入松弛变量后,最开始的那个问题在没有包含这个新增加的变量$x_{新}$时的最优解(表4.8)是$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(2,6,2,0,0)$。这个解再加上$x_{新}=0$仍然还是最优解吗?

为了回答这个问题,我们需要检查对偶问题互补的基本解。就像6.3节介绍的互补的最优基本解特性那样,这个解在原问题的最终单纯形表的第0行给出。利用表6.4给出的方法在表6.5中解释。因此,就像表6.5的底行和表6.9的第6行中给出的那样,这个解是$(y_1,y_2,y_3,z_1-c_1,z_2-c_2)=\left(0,\frac{3}{2},1,0,0\right)$

(这个解在6.3节表6.9的倒数第2行给出。)

由于这个解是最初始模型的对偶问题的最优解,它当然会满足表6.1中给出的最初始模型的对偶问题约束条件。但是,这个解还满足这个新的对偶问题的约束吗?

$$2y_1+3y_2+y_3\geqslant 4$$

我们将这个解代入,可以看到

$$2(0)+3\left(\frac{3}{2}\right)+(1)\geqslant 4$$

满足约束条件。所以,这个解仍然是可行的(因此它仍然是最优的)。因此,最初始的原问题解

(2,6,2,0,0),加上这个新增加的变量 $x_{新}=0$ 仍然是最优的。所以,这个新产品不应该投产。

这个方法同样可以非常简单地帮助灵敏度分析预估加在新变量上的系数。通过简单地查看新的对偶问题的约束方程,马上就可以发现这些参数变化多少才可以影响对偶问题的解的可行性,进而分析这些参数变化多少就可以影响原问题解的最优性。

6.5.3　其他应用

我们已经讨论了对偶理论对于灵敏度分析的两个应用,也就是影子价格和对偶单纯形法。正如 4.7 节和 6.2 节中描述的那样,($y_1^*, y_2^*, \cdots, y_m^*$)说明了各种资源的影子价格,也就说明了如果资源总量 b_i 变化将会如何影响 Z,结果的分析将在 7.2 节中做详细的介绍。

总体来说,6.2 节中对于原问题和对偶问题的经济解释为灵敏度分析提供了一些有用的信息。

当我们研究 b_i 的变化或者 a_{ij} 的变化影响时,最初始模型的最优解可能变为超优解(就像表 6.10 中定义的那样)。如果我们想再次获得最优解,对偶单纯形法将会在这个解的基础上被使用(对偶单纯形法将在 8.1 节介绍)。

我们曾在 6.1 节中提到过,有的时候直接在对偶问题上使用单纯形法识别原问题的最优解会更有效。当使用这种方法寻找解时,对于原问题的灵敏度分析将会如下节所述直接对对偶问题进行操作,然后对原问题互补的基本解进行推断(表 6.11)。由于 6.1 节与 6.3 节中所讲述的原问题与对偶问题之间的紧密联系,这种方法与灵敏度分析有直接相关性。

6.6　结　　论

每一个线性规划问题都伴随着一个对偶线性规划问题。在原问题与对偶问题之间有很多有用的关系,利用这些关系可以提高我们分析原问题的能力。例如,对于对偶问题经济学上的解释给出了影子价格的概念,利用影子价格我们可以分析原问题当中所使用资源的边际价值并且可以对单纯形法进行解释。因为单纯形法可以直接应用于这两种问题中的任意一种,以同时解决它们,所以,直接处理对偶问题可以显著地减少计算的复杂程度。对偶理论,包括处理超优解的对偶单纯形法(见 8.1 节)同样在灵敏度分析当中扮演了重要的角色。

参考文献

[1] Dantzig, G. B., and M. N. Thapa: *Linear Programming 1: Introduction*, Springer, New York, 1997.

[2] Denardo, E. V.: *Linear Programming and Generalizations: A Problem-based Introduction with Spreadsheets*, Springer, New York, 2011, chap. 12.

[3] Luenberger, D. G., and Y. Ye: *Linear and Nonlinear Programming*, 3rd ed., Springer, New York, 2008, chap. 4.

[4] Murty, K. G.: *Optimization for Decision Making: Linear and Quadratic Models*, Springer, New York, 2010, chap. 5.

[5] Nazareth, J. L.: *An Optimization Primer: On Models, Algorithms, and Duality*, Springer-Verlag, New York, 2004.

[6] Vanderbei, R. J.: *Linear Programming: Foundations and Extensions*, 4th ed., Springer, New York, 2014, chap 5.

习　　题

某些习题(或其中一部分)左端的符号意义如下。

D:上面列出演示的例子可能会有帮助。

I:可以应用上面列出的程序检查你的作业。

E*:使用 Excel 表格。

习题上有星号表示书后至少给出该题一部分答案。

6.1-1* 为下面给出的每一个满足标准格式的线性规划问题建立对偶问题。

(a) 习题 3.1-6 的模型。

(b) 习题 4.7-5 的模型。

6.1-2 考虑习题 4.5-4 中的线性规划模型。

(a) 为这个模型建立原问题-对偶问题表,并建立对偶模型。

(b) 这个问题中的 Z 无界对对偶问题有什么影响?

6.1-3 对于下面每一个线性规划模型,是应该直接在原问题上应用单纯形法还是应该在对偶问题上应用单纯形法?给出你的建议并解释。

(a) Max $Z=10x_1-4x_2+7x_3$

s. t.

$3x_1-x_2+2x_3\leqslant 25$

$x_1-2x_2+3x_3\leqslant 25$

$5x_1+x_2+2x_3\leqslant 40$

$x_1+x_2+x_3\leqslant 90$

$2x_1-x_2+2x_3\leqslant 20$

且

$x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, x_3\geqslant 0$

(b) Max $Z=2x_1+5x_2+3x_3+4x_4+x_5$

s. t.

$x_1+3x_2+2x_3+3x_4+x_5\leqslant 6$

$4x_1+6x_2+5x_3+7x_4+x_5\leqslant 15$

且

$x_j\geqslant 0$

6.1-4 考虑下面的问题。

Max $Z=-x_1-2x_2-x_3$

s. t.

$x_1+x_2+2x_3\leqslant 12$

$x_1+x_2-x_3\leqslant 1$

且

$x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, x_3\geqslant 0$

(a) 建立对偶问题。

(b) 利用对偶理论说明原问题的最优解有 $Z\leqslant 0$。

6.1-5 考虑下面的问题。

Max $Z=2x_1+6x_2+9x_3$

s. t.

$x_1+x_3\leqslant 3$(资源 1)

$x_2+2x_3\leqslant 5$(资源 2)

且

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

(a) 为这个原问题建立对偶问题。

I(b) 用图形法解决这个对偶问题，并用求出的结果说明原问题中资源的影子价格。

C(c) 用单纯形法解原问题，找出影子价格证明你在(b)中得到的结论。

6.1-6　按照习题 6.1-5 的要求解答本题。

Max $Z = x_1 - 3x_2 + 2x_3$

s. t.

$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 6$（资源 1）

$-x_2 + 2x_3 \leq 4$（资源 2）

且

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

6.1-7　考虑下面的问题。

Max $Z = x_1 + 2x_2$

s. t.

$-x_1 + x_2 \leq -2$

$4x_1 + x_2 \leq 4$

且

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

I(a) 用图形法证明这个问题没有解。

(b) 建立对偶问题。

I(c) 用图形法证明对偶问题目标函数无界。

I6.1-8　建立一个有两个决策变量、两个约束方程、有可行解但是目标函数无界的原问题，并画图。之后，建立这个原问题的对偶问题，并用图形法证明对偶问题没有可行解。

I6.1-9　建立一对原问题与对偶问题，每一个问题有两个决策变量、两个约束方程。每个问题都没有可行解，并用图形法证明。

6.1-10　建立一对原问题与对偶问题，每一个问题有两个决策变量、两个约束方程。原问题都没有可行解，对偶问题有无界解。

6.1-11　利用弱对偶性证明如果原问题与对偶问题都有可行解，那么，两个问题都有最优解。

6.1-12　考虑我们在 6.1 节给出的原问题与对偶问题的标准矩阵形式。利用对偶问题对于原问题的这种形式的定义证明以下结论。

(a) 6.1 节中的弱对偶性。

(b) 如果原问题有无界的可行域，那么，对偶问题没有可行解。

6.1-13　考虑我们在 6.1 节给出的原问题与对偶问题的标准矩阵形式，用 $\boldsymbol{y}^*$ 表示对偶问题的最优解。假设 $\boldsymbol{b}$ 被 $\overline{\boldsymbol{b}}$ 所代替，用 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 表示新的原问题最优解。证明 $\boldsymbol{c}\,\overline{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{y}^*\,\overline{\boldsymbol{b}}$。

6.1-14　对于任意一个标准形式的线性规划问题及其对偶问题，判断下列说法的正误，并证明。

(a) 对于原问题与对偶问题来说，两个问题中约束方程的数量与变量的数量（扩大之前）之和相等。

(b) 在每一步迭代中,单纯形法都分别计算出一个原问题与对偶问题的 CPF 解,所以这个过程中两个问题的目标函数值始终相等。

(c) 如果原问题拥有无界解,那么,对偶问题的最优解的目标函数值一定是 0。

6.2-1 考虑表 4.8 中给出的 Wyndor Glass 公司问题的单纯形表。对于每一个单纯形表,给出下列问题的经济解释。

(a) 第 0 行中松弛变量(x_3, x_4, x_5)系数。

(b) 第 0 行中决策变量(x_1, x_2)系数。

(c) 最终作为结果而选择进入变量(或者最终停止计算时的决策表)。

6.3-1* 考虑下面的问题。

Max $Z = 6x_1 + 8x_2$

s.t.

$5x_1 + 2x_2 \leqslant 20$

$x_1 + 2x_2 \leqslant 10$

且

$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$

(a) 为这个原问题建立对偶问题。

(b) 用图形法解原问题与对偶问题。找出这两个问题的 CPF 解,以及角点中的非可行解。计算这些解的目标函数值。

(c) 利用(b)中得到的信息,绘制一张表格计算这些互补的基本解(使用与表 6.9 相同的标题)。

I(d) 利用单纯形法一步一步解这个问题。在每一步迭代之后找出这个问题的 BF 解以及对偶问题中互补的解,找出相应的角点。

6.3-2 考虑习题 4.1-5 中的那个含有两个约束方程和两个变量的模型。回答习题 6.3-1 中的全部问题。

6.3-3 考虑表 6.1 中给出的 Wyndor Glass 公司模型的原问题与对偶问题。利用表 5.5、表 5.6、表 6.8 和表 6.9 绘制新的表格。在表格的第一列写出非基本变量,第二列写出对偶问题中相对应的变量,第三列写出对偶问题中互补的基本解中的非基变量。利用这张表格解释这个例子的互补松弛性。

6.3-4 假设原问题拥有一个退化的 BF 解(一个或者多个基变量等于 0)作为它的最优解。这个退化的最优解对于对偶问题说明什么?为什么?如果反过来说还正确吗?

6.3-5 考虑下面的问题。

Max $Z = 2x_1 - 4x_2$

s.t.

$x_1 - x_2 \leqslant 1$

且

$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$

(a) 建立对偶问题,并通过观察找到最优解。

(b) 利用互补松弛性以及对偶问题中的最优解找到原问题的最优解。

(c) 假设原问题的目标函数中 x_1 的系数 c_1 可以取任意值。当 c_1 取什么值时对偶问题没有可行解?对于这些值,按照对偶理论对原问题分别代表什么情况?

6.3-6 考虑下面的问题:

Max $Z=2x_1+7x_2+4x_3$

s. t.

$x_1+2x_2+x_3\leqslant 10$

$3x_1+3x_2+2x_3\leqslant 10$

且

$x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, x_3\geqslant 0$

(a) 建立这个原问题的对偶问题。

(b) 利用对偶问题证明原问题中目标函数的值不能超过 25。

(c) 已经可以推测出 x_2 和 x_3 且会包含在原问题的最优解当中。直接利用高斯消元法转换出基本解(和 Z)。同时利用原问题中的等式(0)来转换并识别对偶问题中互补的基本解。分析这两个解是否分别是两个问题的最优解。

I(d) 利用图形法解对偶问题。利用这个解找出原问题最优解中的基变量和非基变量,并利用高斯消元法转化出这个解。

6.3-7　再次考虑习题 6.1-3(b)。

(a) 建立它的对偶问题。

I(b) 用图形法解这个对偶问题。

(c) 利用(b)中的信息找出原问题最优解中的非基变量以及基变量。

(d) 利用(c)的结果并使用高斯消元法得到原问题的最优解。从系统的初始方程开始(不包括等式(0)),建造单纯形表,并设非基变量为 0。

(e) 利用(c)中的结果为这个原问题的最优 CPF 解写出定义方程(见 5.1 节),之后用这个方程得到这个解。

6.3-8　考虑习题 5.3-10 中给出的模型。

(a) 建立对偶问题。

(b) 利用最优解中给出的基变量信息写出非基变量以及对偶问题最优解中的基变量。

(c) 利用(b)中的结果为这个对偶问题的最优 CPF 解写出定义方程(见 5.1 节),之后用这个方程得到这个解。

I(d) 利用图形法解这个问题证明你在(c)中的结论。

6.3-9　考虑习题 3.1-5 中给出的模型。

(a) 建立原问题的对偶问题。

(b) 利用$(x_1,x_2)=(13,5)$是原问题的最优解这一信息找出对偶问题最优的 BF 解中的基变量和非基变量。

(c) 利用(b)中的信息通过转化方程(0)找到对偶问题的这个最优解。通过使用高斯消元法转化这个方程。

I(d) 利用(b)中的结果为这个对偶问题的最优 CPF 解写出定义方程(见 5.1 节)。通过检查这个最优解是否满足方程证明(c)中得到的这个解是不是最优解。

6.3-10　假设你在使用改进单纯形法(见 5.2 节)处理标准形式的原问题时,想同时得到对偶问题中的信息。

(a) 如何识别对偶问题中的最优解?

(b) 在每一步迭代时都获得了个 BF 解之后,如何得到对偶问题当中互补的基本解?

6.4-1　考虑下面的问题。

Max $Z=x_1+x_2$

s. t.

$$x_1+2x_2=10$$

$$2x_1+x_2\geqslant 2$$

且

$x_2\geqslant 0$(x_1 无约束)

(a) 利用 SOB 方法建立对偶问题。

(b) 利用表 6.12 将这个原问题从 6.1 节开头给出的形式转化成标准形式,建立相应的对偶问题。之后,说明得到的对偶问题与从(a)中得到的对偶问题等价。

6.4-2 考虑原问题与对偶问题是以我们在 6.1 节开头介绍的标准的矩阵形式给出的。利用对偶问题的定义证明下列结论。

(a) 如果原问题中的约束方程 $\boldsymbol{Ax}\leqslant\boldsymbol{b}$ 变成 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,对于对偶问题的唯一改变就是去掉非负的约束 $\boldsymbol{y}\geqslant 0$(提示:$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 等价于把约束方程变成 $\boldsymbol{Ax}\leqslant\boldsymbol{b}$ 并且 $\boldsymbol{Ax}\geqslant\boldsymbol{b}$)。

(b) 如果原问题中的约束方程 $\boldsymbol{Ax}\leqslant\boldsymbol{b}$ 变成 $\boldsymbol{Ax}\geqslant\boldsymbol{b}$,对于对偶问题的唯一改变就是去掉非负的约束 $\boldsymbol{y}\geqslant 0$ 变成非正约束 $\boldsymbol{y}\leqslant 0$(提示:$\boldsymbol{Ax}\geqslant\boldsymbol{b}$ 等价于把约束方程变成$-\boldsymbol{Ax}\leqslant-\boldsymbol{b}$)。

(c) 如果把原问题中的非负约束 $\boldsymbol{x}\geqslant 0$ 去掉,对于对偶问题的唯一的改变就是将对偶问题中的约束方程 $\boldsymbol{yA}\geqslant\boldsymbol{c}$ 变成 $\boldsymbol{yA}=\boldsymbol{c}$(提示:对于 $\boldsymbol{A}$ 变量没有约束可以用两个非负的变量表示)。

6.4-3* 为习题 4.6-3 中的线性规划模型建立对偶问题。

6.4-4 考虑下面的问题。

$$\text{Min } Z=x_1+2x_2$$

s. t.

$$-2x_1+x_2\geqslant 1$$

$$x_1-2x_2\geqslant 1$$

且

$$x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0$$

(a) 建立对偶问题。

I(b) 利用图形分析法处理对偶问题判断原问题是否有可行解,如果有,目标函数是否有界。

6.4-5 考虑表 6.15 和表 6.16 中给出的放射治疗例子的对偶问题的两个版本。回顾 6.4 节中的内容说明为什么这两个版本是完全等价的。然后,从表 6.15 一步步地转化到表 6.16 证明等价性。

6.4-6 对于下面的每一个线性规划问题,利用 SOB 方法建立对偶问题。

(a) 习题 4.6-7 中的模型。

(b) 习题 4.6-16 中的模型。

6.4-7 考虑习题 4.6-2 中给出的带等式约束的模型。

(a) 建立这个问题的对偶问题。

(b) 证明(a)中的结果是正确的(也就是说,等式的约束方程在对偶问题中没有非负约束)。为此,首先将原问题转化成标准形式(表 6.12),然后建立对偶问题,接下来把这个对偶问题转化成(a)中得到的形式。

6.4-8* 考虑习题 4.6-14 中没有非负约束的模型。

(a) 建立这个问题的对偶问题。

(b) 证明(a)中的结果是正确的(也就是说,在原问题中没有非负约束在对偶问题当中产生

等式的约束方程)。为此,首先将原问题转化成标准形式,然后建立对偶问题,接下来把这个对偶问题转化成(a)中得到的形式。

6.4-9　考虑表 6.1 中给出的 Wyndor Glass 公司问题的对偶问题。利用表 6.13 中给出的步骤对这个对偶问题进行转变,证明对偶问题的对偶是原问题。

6.4-10　考虑下面的问题。

Min $Z=-x_1-3x_2$

s. t.

$x_1-2x_2\leqslant 2$

$-x_1+x_2\leqslant 4$

且

$x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0$

I (a) 用图形法证明这个目标函数有无界解。

(b) 建立对偶问题。

I(c) 用图形法证明对偶问题没有可行解。

6.5-1　考虑习题 7.2-2 中的模型。直接利用对偶理论判断,当下面的变化独立发生时,最优解是否仍然保持最优性。

(a) 习题 7.2-2 中的(e)问题。

(b) 习题 7.2-2 中的(g)问题。

6.5-2　考虑习题 7.2-4 中的模型。直接利用对偶理论判断,当下面的变化独立发生时,最优解是否仍然保持最优性。

(a) 习题 7.2-4 中的(b)问题。

(b) 习题 7.2-4 中的(d)问题。

6.5-3　考虑习题 7.2-5 中的(d)问题。直接利用对偶理论判断,当下面的变化独立发生时,最优解是否仍然保持最优性。