第 9 章　运输与指派问题

第 3 章指出线性规划具有广泛应用，本章将进一步展开，着重讨论两类重要的线性规划问题。第一类问题称为运输问题，之所以称为运输问题，是因为其很多应用是为了解决货物运输的最优化问题。不过，也有一些重要应用与运输无关，如生产计划问题。

第二类问题称为指派问题，其应用就是指派人员去完成任务。尽管指派问题与运输问题的应用看起来较大差异，然而，接下来读者会发现，指派问题实际上可看作运输问题的一种特殊形式。

下一章还将介绍线性规划的另一种特殊形式——网络优化问题，其中涉及最小费用流问题（见 10.6 节）。届时将看到，运输问题和指派问题实际上都是最小费用流问题的特殊实例。在本章我们将介绍运输问题和指派问题的网络图表示。

运输和指派问题的应用一般涉及大量约束条件和变量，直接用单纯形法的计算机程序求解这两类问题需要大量的计算。幸而此类问题有一个主要特点，即约束条件中大多数系数 a_{ij} 为零，而且系数不为零的部分会呈现出独特的结构。这样，就可利用此类问题的特殊结构设计一种特殊的改进算法，节省计算量。因此，只有对此类问题非常熟悉，才能在遇到时将其识别出来，并运用适当的计算步骤求解。

为了描述这类特殊结构，将介绍约束条件的系数表格，如表 9.1 所列。其中 a_{ij} 表示第 i 个约束条件中的第 j 个变量的系数。后文中，表格中系数全为零的部分将留为空白，系数不为零的地方将标为阴影。

表 9.1　线性规划约束条件的系数表格

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

首先给出一个运输问题的原型范例，建立模型后介绍此类问题的特殊结构，并给出其他应用案例。9.2 节将介绍运输问题的单纯形法，一种用于解决运输问题的改进单纯形法（在 10.7 节，读者将会看到与该算法相关的网络单纯形法，这是单纯形法的另一种改进版本，用于高效解决最小费用流问题，也适用于运输和指派问题），9.3 节重点讲述指派问题，9.4 节介绍一种专门解决指派问题的特殊算法——匈牙利算法。

本书的网站上还提供了本章的补充内容，通过一个完整的案例（包括案例分析），生动展示了企业（本例中为一个炼油厂）在选择新厂址的决策中，如何解决大量的运输问题。

9.1　运输问题

9.1.1　原型范例

P&T 公司的一个主要产品是罐装豌豆。豌豆产自 3 个罐装食品厂（华盛顿州的贝林厄姆附

近、俄勒冈州的尤金和明尼苏达州的挨伯特利),然后,通过卡车运到美国西部的4个分销仓库(加利福尼亚州的萨克拉门多、犹他州的盐湖城、南达科塔州的来比特市和新墨西哥州的阿尔伯克基),如图9.1所示。由于运输费用是主要的开支,管理层就尽可能减少运输费用展开研究。已预估出下一季度每个豌豆产地的产量,并且根据豌豆总产量为每个仓库分配了一定的存储额度。具体数量(以卡车运货量为单位)和每卡车豌豆罐头经由不同路线的运费如表9.2所列。由表9.2可知,共有300卡车豌豆罐头等待运输,现在的问题是怎样安排货物的运输路线可使总运输费用最低。

图9.1 P&T公司工厂和仓库的位置图

表9.2 P&T公司的运输数据

		每卡车的运输成本/美元				
		仓库				产出
		1	2	3	4	
罐头厂	1	464	513	654	867	25
	2	352	416	690	791	125
	3	995	682	388	685	100
分配		80	65	70	85	

如果忽略产地和仓库的地理位置分布,可以给出这个问题的网络图表示,如图9.2所示,左侧表示3个产地,右侧表示4个仓库,箭头代表可能的运送路线,每个箭头旁边的数字代表每车货物通过该路线所需的运送成本。产地和仓库旁边中括号内的数字代表计划从这里运出多少车豌豆罐头(由于仓库是接收货物,因此其旁边的数字为负值)。

图9.2描述的问题实际上是运输问题的线性规划问题。为了构建该问题的模型,用Z表示总运输费用,用$x_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3,4)$表示从产地$i$到仓库$j$运输的豌豆罐头数量。因此,目标就是选择这12个决策变量(x_{ij})的值,使得Z值最小,即

$$\begin{aligned}\text{Min } Z=&464x_{11}+513x_{12}+654x_{13}+867x_{14}\\&+352x_{21}+416x_{22}+690x_{23}+791x_{24}\\&+995x_{31}+682x_{32}+388x_{33}+685x_{34}\end{aligned}$$

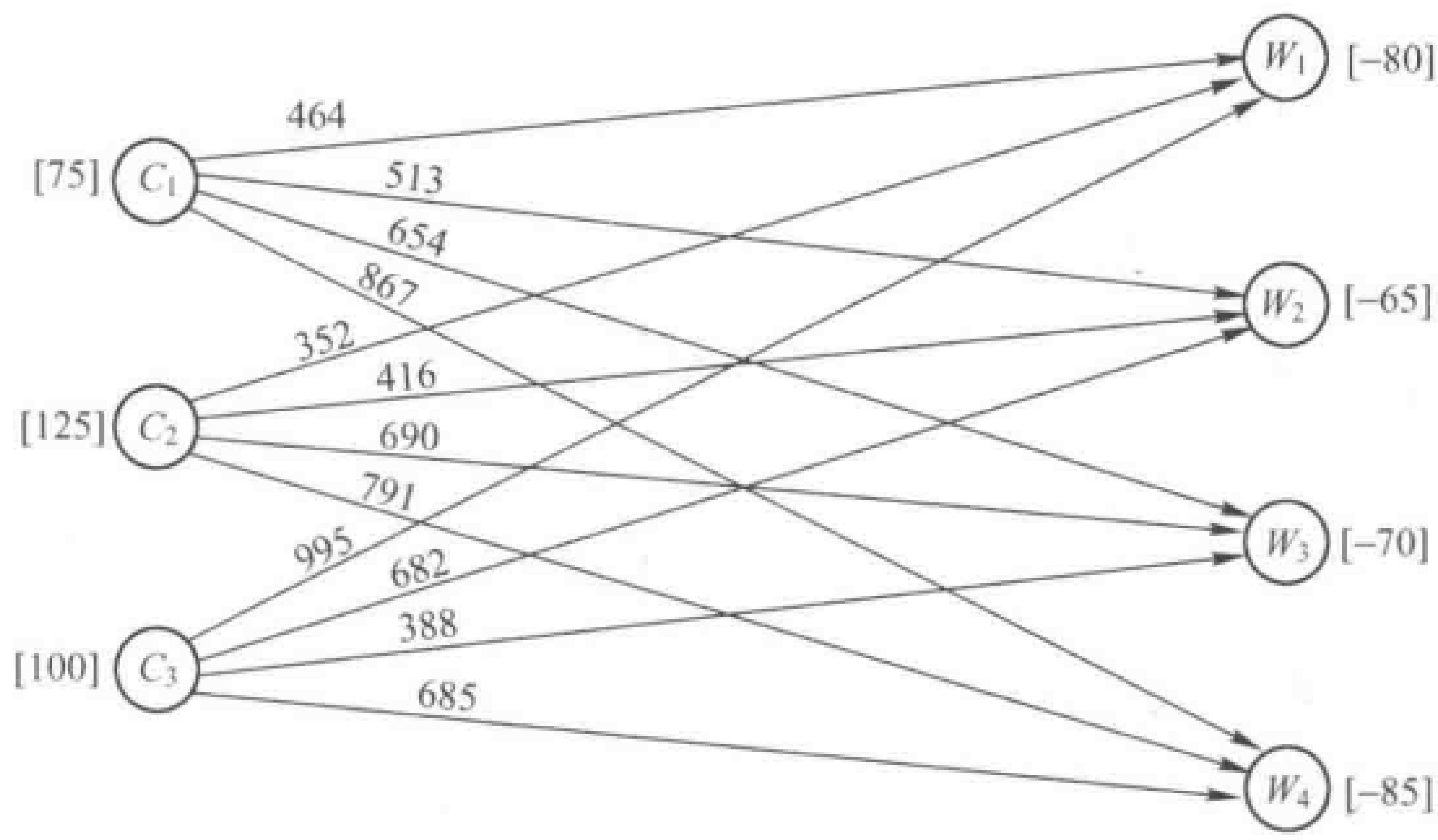

图 9.2　P&T 公司问题的网络表示

s. t.

$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=75$

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=125$

$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=100$

$x_{11}+x_{21}+x_{31}=80$

$x_{12}+x_{22}+x_{32}=65$

$x_{13}+x_{23}+x_{33}=70$

$x_{14}+x_{24}+x_{34}=85$

且

$x_{ij}\geqslant 0(i=1,2,3;j=1,2,3,4)$

表 9.3 列出了约束条件系数。在本节后面的部分读者将会看到，正是因为这种特殊结构，才把此类问题称为运输问题。不过，接下来将首先介绍运输问题模型的其他特征。

表 9.3　P&T 公司的约束条件系数

	约束系数												
	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	罐装食品厂
	1	1	1	1									
					1	1	1	1					罐头约束
									1	1	1	1	
A =	1				1				1				
		1				1				1			仓库约束
			1				1				1		
				1				1				1	

应用案例

宝洁（P&G）公司是全世界规模最大、赢利最高的消费品生产企业，公司在世界范围内生产和销售数百种品牌的消费产品，2012 年的销售额达 830 亿，在 2011 年《财富》杂志推出的“全球最受欢迎的企业”中排名第五位。

公司的历史悠久，可追溯到 19 世纪 30 年代，在漫长的发展历程中公司一直飞速发展。为保持和促进增长，增强公司的全球竞争力，公司进行了一项重要的运筹学研究。在研究开展之前，公司的供应链涵盖数百个供应商、50 多个产品门类、60 多个

工厂、15个分销中心和1000多个消费区。然而,随着公司向国际品牌发展,管理者意识到有必要对工厂进行合并以降低生产制造成本、加快市场供应及减少资本投入。因此,该项研究着眼于重新设计公司北美地区的生产和配送系统。结果削减了近20%的北美工厂,由此,每年的税前成本节约超过2亿美元。

这项研究的主要部分就是对每个产品类别建模并求解其运输问题。在做出工厂是否关闭之类的选择之前,需要求解产品的运输问题,从而得出将该工厂的产品运送到配运中心及消费区的配送成本。

资料来源:J. D. Camrn, T. E. Chorman, F. A. Dill, J. R. Evans, D. J. Swecny, and G. W. Wegryn:"B1endingOR/MS, Judgment, and GIS:Restructuring P&G's Supply Chain."Interfaces, 27(1):128-142. Jan. -Feb. 1997.(以下网址提供本立的链接:www. mhhc. r: om/hillicr。)

9.1.2 运输问题模型

为了给出运输问题的一般模型,我们需要用一些更通用的术语,而非范例中那样的专业术语。实际上,一般的运输问题关注如何把物品从生产地(称为产地)运到仓库(称为销地),并使运输费用最小。原型范例和一般模型之间的术语的对应关系如表9.4所列。

表9.4 运输问题的术语

行号	原型范例	一般问题
1	罐装豌豆的卡车数量	货物的单位数量
2	3个罐头厂	m个产地
3	4个仓库	n个销地
4	第i个罐头厂的产出	从第i个产地提供的货物S_i
5	第j个仓库分配的货物	第j个销地的需求量d_j
6	从第i个罐头厂运送一卡车产品到第j个仓库的运输费用	从第i个产地到第j个销地的单位分销成本c_{ij}

从表9.4第4行和第5行可以看出,每个产地都向销地供应一定单位量的产品,每个销地都需要从产地接收一定单位量的产品。运输问题的模型对供给和需求做出如下假设。

条件假设:每个产地都提供一定数量的产品,所有的产品都需要运往销地(用s_i代表第i个产地供应的产品数量,$i=1,2,\cdots,m$)。同样,每个销地都接收一定数量的产品,所有接收的产品都只能从产地运来(用d_j代表第j个销地接收的产品数量,$j=1,2,\cdots,n$)。

这一假设适用于P&T公司,因为它的每个罐装厂(产地)都有一个固定的产出,并且每个仓库(销地)都有一个固定的需求量。

该假设意味着供给和需求之间需要存在一个平衡,也即所有产地的供给总和应该等于所有销地的需求总和。

可行解性质:运输问题有可行解的充分必要条件为

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

如表9.2所列,对于P&T公司的问题,其供给(产出)量和需求(分配)量均为300卡车,供给量和需求量相等。

在有些实际问题中,供给事实上代表需要分发的最大数量(而非固定数量)。类似地,在其他情况下,需求代表要接收的最大数量(而非固定数量)。由于违背了假设条件,此类问题一般不完全适用运输问题模型。但可以引入虚销地或虚产地来填补实际数量与最大数量的差值,从而重新定义该问题使之适用运输问题模型。我们将在本节末举两个例子说明如何处理这类问题。

表9.4的最后一行列出了运输每单位的成本,即单位成本,单位成本蕴含着以下适用于任何

运输问题的基本假设。

成本假设:任何特定产地至特定销地的运输成本与所需分销的单位数量成正比。因此,运输成本是分销的单位数量与单位分销成本的积(用 c_{ij} 表示产地 i 至销地 j 的单位成本)。

P&T 公司问题也符合这一假设,因为从任何罐头厂到任何仓库的运输费用均与运输量成正比。

对于运输问题模型,所需数据有供给量、需求量和单位成本。这些数据便是模型的参数,可以很方便地总结为如表 9.5 所列的参数表。

模型:任何问题(无论是否含有运输环节),只要其能通过表 9.5 中的参数完全表达,符合条件假设和成本假设,且目标是使分销单位数量所需的费用最小,均适用该运输问题模型。该模型所需参数如表 9.5 所列。

表 9.5　运输问题的参数表

		每单位分销成本				供　给
		销地				
		1	2	…	n	
产地	1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	s_1
	2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	s_2
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	s_m
需求		d_1	d_2	…	d_n	

这样,定义一个运输问题只需填写一个类似表 9.5 的表格(如 P&T 公司问题中的表 9.2),也可采用如图 9.3 所示的网络图来表示(如 P&T 公司问题中的图 9.2)。一些与运输问题无关的问题也可以采用其中任一方式加以表示。本书网站中例题解答部分,还有这类问题的另外一个例子。

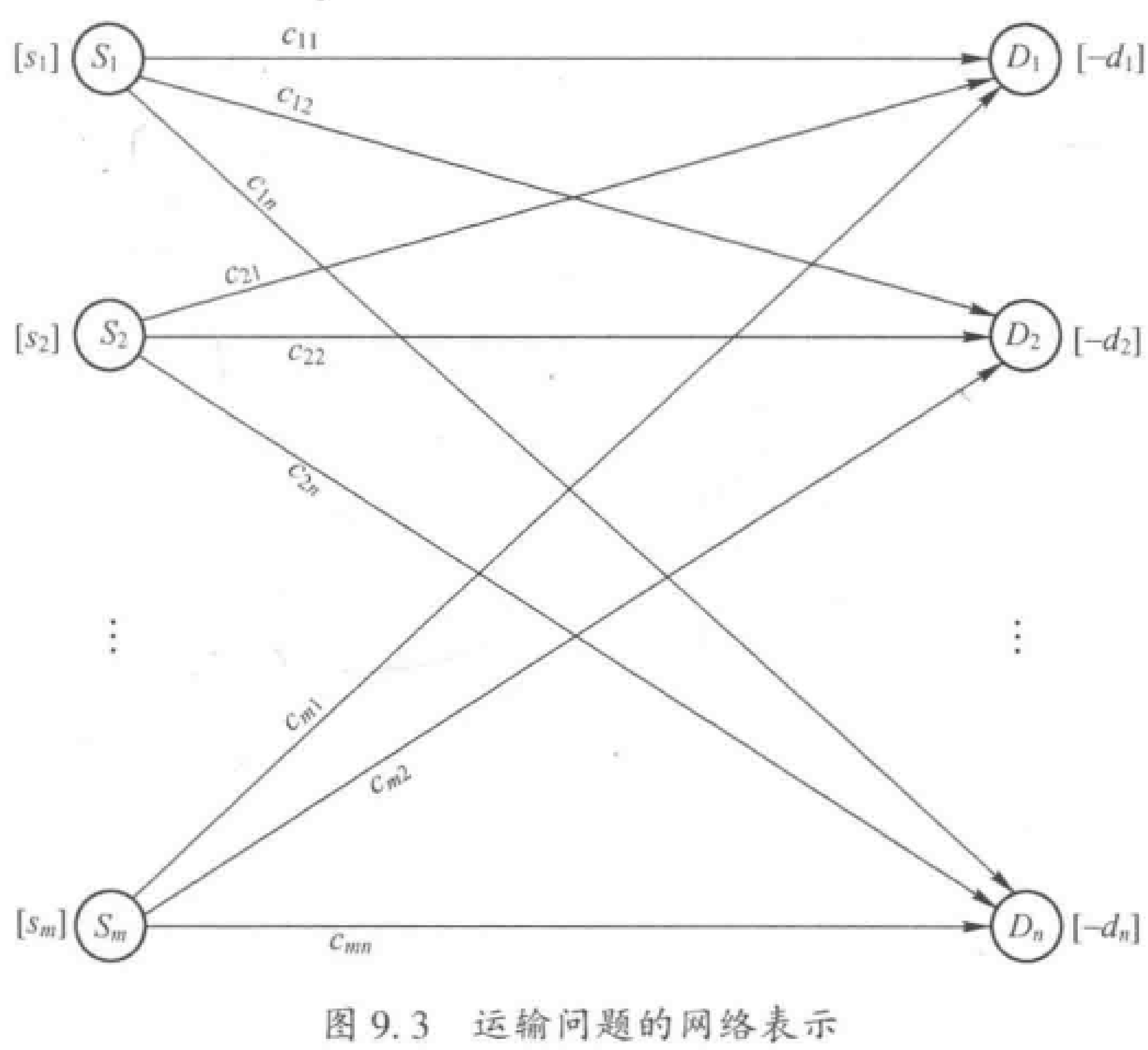

图 9.3　运输问题的网络表示

由于运输问题可以通过参数表和网络图的形式简单表示,所以对此类问题无需写出正规的

数学公式模型。不过,我们还将继续介绍一般运输问题的数学模型,以说明运输问题实际上是一种特殊的线性规划问题。

设 Z 为总分销成本,且 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 是从产地 i 分配至销地 j 的单位数量,则问题的线性规划表达式为

$$\text{Min } Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

s. t.

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=s_i(i=1,2,\cdots,m)$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=d_j(j=1,2,\cdots,n)$$

且

$$x_{ij}\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

注意到其约束系数表格呈现出特殊的结构,如表9.6所列。任何符合这种特殊形式的线性规划问题均是运输问题,而不用考虑其具体内容。实际上,有大量与运输无关的问题都符合这种结构,稍后将举例说明(9.3节所述的指派问题是另外一个例子)。这种结构也是运输问题被视为一类重要的线性规划问题的原因之一。

表9.6 运输问题的约束系数

	约束系数													
	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	…	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mn}	
	1	1	…	1										供应约束
					1	1	…	1						
									…	1	1	…	1	
$\mathbf{A}=$	1				1				…	1				需求约束
		1				1					1			
			…				…		…			…		
				1				1					1	

在很多应用中,模型中的供给量和需求量 s_i、d_i 取值都为整数,因而,在实施上要求分销数量也为整数。由于具有如表9.6所列的特殊结构,所有此类问题均有如下性质。

整数解性质:对于任一 s_i、d_i 为整数的运输问题,其所有基本可行解中(包括最优解)的基本变量(分销量)也均为整数。

9.2节所述求解程序只针对基本可行解,因此将自动获得一个整数最优解(读者将会看到,这一求解过程实际上给出了整数解性质的一个证明,习题9.2-20可以帮助读者理解这一推理过程)。因此,没有必要在模型中增加一个 x_{ij} 必须为整数的约束条件。

与其他线性规划问题一样,一些常用的软件如Excel、LING/LIDO和MPL/CPLEX,都能够用来建立和解决运输问题(及指派问题)。然而,由于这里的Excel方法与读者之前看到的有所区别,以下将详细介绍。

9.1.3 用Excel建立和求解运输问题

如3.5节所述,采用电子数据表建立线性规划模型,一开始需要回答三个问题:决策什么?

对决策的约束是什么？评估这些决策整体效果的测度是什么？由于运输问题是特殊的线性规划问题，所以，用电子表格描述运输问题也需要首先解决上述问题。接下来，将围绕合理表示上述信息和相关数据，介绍电子数据表的设计。

再次以 P&T 公司问题为例。该问题的决策是要求解从每个罐装食品厂到每个仓库的运载量。决策的约束是从罐装食品厂运输的总数量必须等于其产量（供给量），且每个仓库的接收数量等于其分配数量（需求量）。总体效果测度是运输总费用，因而，目标是使运输的总费用最小。

上述信息可产生如图 9.4 所示的电子数据表格，所有来自表 9.2 的数据都显示在如下数据单元格中：单位成本（D5:G7）；供给量（J12:J14）；需求量（D17:G17）；决策变量为运输量，采用可变动的单元格（D12:G14）；输出单元格，包括总运输量（H12:H14）和总接收量（D15:G15），应用了如图 9.4 下半部分所示的 SUM 函数。约束条件：总运输量（H12:H14）= 供给量（J12:J14），总接收量（D15:G15）= 需求量（D17:G17），已在电子表格中明确给出，且已输入 Solver 对话框中。目标单元格是总费用（J17），其 SUMPRODUCT 函数如图 9.4 的右下角所示。在 Solver 参数对话框中，明确了目标就是最小化目标单元格，选择“变量非负”选项规定所有的运输量须为非负值，由于这是一个线性规划问题，因此求解方法选择“单纯形线性规划”。

开始求解时，可在每个可变单元格中键入任意值（如 0），单击“Solver”按钮之后，Solver 将用单纯形法求解运输问题且给出每个决策变量的最优值。最优解将显示在图 9.4 的运输量单元格（D12:G14）中，计算结果 152535 美元则显示在目标单元格总费用（J17）中。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	P&T Co. Distribution Problem									
2										
3		Unit Cost		Destination (Warehouse)						
4				Sacramento	Salt Lake City	Rapid City	Albuquerque			
5		Source	Bellingham	$464	$513	$654	$867			
6		(Cannery)	Eugene	$352	$416	$690	$791			
7			Albert Lea	$995	$682	$388	$685			
8										
9										
10		Shipment Quantity		Destination (Warehouse)						
11		(Truckloads)		Sacramento	Salt Lake City	Rapid City	Albuquerque	Total Shipped		Supply
12		Source	Bellingham	0	20	0	55	75	=	75
13		(Cannery)	Eugene	80	45	0	0	125	=	125
14			Albert Lea	0	0	70	30	100	=	100
15			Total Received	80	65	70	85			
16				=	=	=	=			Total Cost
17			Demand	80	65	70	85			$ 152,535

Solver Parameters

Set Objective Cell: Total Cost
To: Min
By Changing Variable Cells:
ShipmentQuantity
Subject to the Constraints:
TotalReceived = Demand
TotalShipped = Supply
Solver Options:
Make Variables Nonnegative
Solving Method: Simplex LP

Range Name	Cells
Demand	D17:G17
ShipmentQuantity	D12:G14
Supply	J12:J14
TotalCost	J17
TotalReceived	D15:G15
TotalShipped	H12:H14
UnitCost	D5:G7

	H
11	Total Shipped
12	=SUM(D12:G12)
13	=SUM(D13:G13)
14	=SUM(D14:G14)

	C	D	E	F	G
15	Total Received	=SUM(D12:D14)	=SUM(E12:E14)	=SUM(F12:F14)	=SUM(G12:G14)

	J
16	Total Cost
17	=SUMPRODUCT(UnitCost,ShipmentQuantity)

图 9.4　P&T 公司问题作为运输问题考虑时的电子表格

需要注意的是，Solver 只是采用一般单纯形法来求解运输问题，而不是采用专门用于高效求解运输问题的单纯形法的优化版，如下一节将介绍的运输单纯形法。因此，包含这类优化版的软

件包在求解大型运输问题时要比 Excel Solver 快得多。

前面曾提到,有些问题由于违反了条件假设,因此并不符合运输问题模型,但仍可以添加虚销地和虚产地重构这类问题,使之符合运输问题模型。采用 Excel Solver 时则不必进行这种重构,因为对于供给约束条件为"≤"形式或者需求约束条件为"≥"形式的原始模型,单纯形法可以直接求解。然而,问题的规模越大,就越需要进行重构,并采用运输单纯形法(或其他类似的方法),同时使用另一种软件包。

以下两例说明如何对问题进行重构。

9.1.4 一个关于虚销地的例子

北方飞机公司为全球多家航空公司制造商用飞机。生产过程的最后阶段是生产喷气式发动机,并把它们安装到飞机上。公司目前正在为多个合同组织生产,将在近期提供大量飞机,且喷气式发动机的生产必须安排在接下来的 4 个月内。

为了完成合同,公司每个月必须提供的发动机数量如表 9.7 的第 2 列所列。由表 9.7 可知,在 1 月、2 月、3 月和 4 月底,公司分别至少提供的发动机数量为 10 台、25 台、50 台和 70 台。

可用于生产发动机的设施,受同时期内其他产品的生产、维修、革新等工作的影响而变化,由此导致的每个月能够生产的最大数量和每台发动机的生产成本(单位:百万美元)如表 9.7 中的第 3 列和第 4 列所列。

由于生产成本会发生变化,所以有必要在计划安装前一个月或更早之前,生产出一些发动机以减少生产成本。不足之处是,这些发动机在安装之前需要存储,每台发动机每个月的存储成本为 15000 美元[①],如表 9.7 中的最右列所列。

表 9.7 北方航空公司的生产安排数据

月份	计划安装机器数	最大产量/百万美元	生产单位成本/百万美元	单位存储成本/百万美元
1	10	25	1.08	0.015
2	15	35	1.11	0.015
3	25	30	1.10	0.015
4	20	10	1.13	

生产经理要制定一个方案,确定每月生产的发动机数,以使生产和存储费用最低。

建模:建立该问题的数学模型的方法之一是,设 x_j 为 j 月生产的发动机数目,其中 $j=1,2,3,4$。仅采用这 4 个决策变量,该问题可表示为线性规划问题,但不属于运输问题(见习题 9.2-18)。

另一方面,换一个角度来看,我们可将该问题描述成更易求解的运输问题。在该视角下,将采用产地和销地来描述问题,并且定义了以下符号:x_{ij}、c_{ij}、s_i 和 d_j。

由于喷气式发动机是分销产品,每台都在特定月份生产,然后,在特定月份安装(时间上可能不同),则有

产地 i=在第 i 月份生产的发动机($i=1,2,3,4$)

销地 j=在第 j 月份安装的发动机($j=1,2,3,4$)

x_{ij}=在第 i 月份生产、第 j 月份安装的发动机数量

c_{ij}=与每单位 x_{ij} 相关的成本

① 为了建模方便,假定当月生产的发动机如果当月安装,就不产生存储成本,只有那些需要至少存储到下个月的发动机,才产生存储成本,成本的发生时间在月末。

$$=\begin{cases}\text{单位产品的生产和储存成本} & i\leqslant j\\ ? & i>j\end{cases}$$

$s_i=?$

d_j=第 i 月计划安装的数量

相应参数表(不完整)如表 9.8 所列,其中部分单位成本和供应量没有给出。

由于不可能在本月内生产本月之前要安装的发动机,因此,若 $i>j$,x_{ij}必然为 0,这样的 x_{ij}也就没有相关联的实际成本。然而,为了能定义一个运输问题并应用 9.2 节中的步骤求解,需要为这些实际不存在的成本赋值。4.6 节中介绍的大 M 法便是赋值的一个方法,我们可为表 9.8 中实际不存在的费用单元格设定一个足够大的值(方便起见用 M 表示),使相应 x_{ij}值在最终解中均为 0。

表 9.8　北方航空航空公司的部分参数表

		每单位分销成本/百万美元				供　　给
		销地				
		1	2	3	4	
产地	1	1.080	1.095	1.110	1.125	?
	2	?	1.110	1.125	1.140	?
	3	?	?	1.100	1.115	?
	4	?	?	?	1.130	?
需求		10	15	25	20	

表 9.8 中供给列变量的数值并不明确,因为“供给量”,即每月的生产量并不是固定值。事实上,问题的目标就是求得生产量的最优解。然而,为了构成一个运输问题模型,需要为表格每一个单元格设置初值,包括供给列。需要指出的是,这里的供给约束的形式与通常的运输问题的约束形式不同,表现为以总供给为上界,形式为

$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\leqslant 25$

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\leqslant 35$

$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}\leqslant 30$

$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}\leqslant 10$

与标准运输模型的区别在于约束等式变为不等式。

为了与运输问题模型匹配,运用 4.2 节中介绍的松弛变量法转化不等式。本节中每个松弛变量对应一个虚销地,代表每月没有使用的生产能力。通过这种转化,可使每个月的总生产能力相当于运输问题中的供给量。由于与虚销地相对应的需求为没有使用的生产能力总量,这个需求值为

$(25+35+30+10)-(10+15+25+20)=30$

包含这个需求之后,总的生产能力就与需求相等了,也即满足了可行解性质所提出具备可行解的条件。

由于虚拟的分配没有费用发生,虚销地所对应的成本单元格的值应为 0(不适合为本列赋值 M,因为我们并不要求相应的 x_{ij}为 0,而只要其总和为 30 即可)。

最终的参数表如表 9.9 所列,表中将虚销地标识为 5(D)。对于这种表达方式,很容易利用 9.2 节中介绍的求解步骤得到最优的生产计划(见习题 9.2-10 和书后的答案)。

表 9.9　北方航空公司的完整参数表

		每单位分销成本/百万美元					供给
		销地					
		1	2	3	4	5(*D*)	
产地	1	1.080	1.095	1.110	1.125	0	25
	2	*M*	1.110	1.125	1.140	0	35
	3	*M*	*M*	1.100	1.115	0	30
	4	*M*	*M*	*M*	1.130	0	10
需求		10	15	25	20	30	

9.1.5　一个关于虚产地的例子

Metro Water District 是一个对大片区域内水资源分配进行管理的机构。该地区非常干旱,水资源相当匮乏,因此,该地区每年都需要从其他地区购买和引进水资源,主要是从 Colombo、Sacron 和 Calorie 河引进水资源并转售给本区的消费者。该机构的主要客户是 Berdoo、Los Devils、San Go 和 Holly Glass 等市的水务部门。

除了不能将 Calorie 河的水供应给 Holly Glass 市外,该机构可以将以上三条河流引进的水转售给其任何城市。然而,由于水道规划和城市地理因素,为各地域供水的成本不尽相同,每英亩英尺(面积为 1 英亩、深度为 1 英尺的水容积)水的供水成本(单位:10 美元)如表 9.10 所列。该机构的管理者所面临的问题是如何在即将来临的夏季有效分配可用的水资源。

表 9.10 最右一列给出了以百万英亩英尺为单位的三条河可用水资源的数量。该机构必须向每个城市提供一个最低限度的供水量,以满足各个城市的必需供水(San Go 因有独立的水源而除外)。表 9.10 给出每个城市的最低需求量,Los Devils 要求的供水量刚好等于其最低需求量,Berdoo 要求的供水量多于最低需求量 20 个单位,San Go 要求的供水量多于最低需求量 30 个单位,Holly Glass 要求供水量尽可能多。

表 9.10　Metro Water District 水资源数据

	费用/(10 美元/英亩英尺)				供应量/百万英亩英尺
	Berdoo	Los Devils	San Go	Holly Glass	
Colombo River	16	13	22	17	50
Sacron River	14	13	19	15	60
Calorie River	19	20	23	—	50
最低需求量	30	70	0	10	
请求供水量	50	70	30	∞	

管理部门希望在满足 4 个城市最低需求量的同时,以最低的费用来分配三条河的可用水资源。

建模:表 9.10 以河流作为产地,城市作为销地,形式上基本接近运输问题的参数表。然而,存在一个关键问题,即各个销地的需求量并不明确。各个销地的接收量(除了 Los Devils)实际上是决策变量,均有上界和下界。对于一个城市来说,如果其请求供水量不超过其他城市最低需求满足后的剩余可供给量,那么,该请求供水量就是该城市接收量的上界,否则,其接收量的上界就是剩余可供给量。因此,尽管 Holl Gglass 异常干旱,但其接收量仍有确定的上界,该上界为

$$(50+60+50)-(30+70+0)=60$$

然而，与运输问题参数表中的其他数据一样，需求量必须是常量，而不应是有边界的决策变量。为了解决这一问题，假定暂时不必考虑满足各个城市的最低需求，这样，上界就是给各个城市供水量的唯一约束。在这种情况下，请求供水量能否作为运输问题模型中的需求量呢？通过调整，答案是肯定的(你是否看出来需要调整)。

问题和北方航空公司的生产计划问题类似，只是需求过剩和生产过剩的区别。前面引进虚拟销地接收多余的供给量，这里则引进虚产地满足多余的(无效的)需求。虚产地的虚拟供给量为总需求量与实际的总供给量之差，即

$$(50+70+30+60)-(50+60+50)=50$$

相应的参数如表 9.11 所列，由于虚产地的虚拟供水不产生成本，因此相应单元格的成本为 0。同时，由于 Calorie 不能给 Holly Glass 供水，因此用大 M 作为其水资源运输成本。

表 9.11　无最低需求的 Metro Water District 水资源数据

		费用/(10 美元/英亩英尺)				供应量/百万英亩英尺
		Berdoo	Los Devils	San Go	Holly Glass	
产地	Colombo River	16	13	22	17	50
	Sacron River	14	13	19	15	60
	Calorie River	19	20	23	—	50
	虚产地	0	0	0	0	50
需求量		50	70	30	60	

接下来看如何将各个城市的最低需求量引入模型。由于 San Go 没有最低需求量，无需考虑。类似地，由于 Holly Glass 的需求量(60)超过了虚产地供应量值(50)10 个单位，因而，任何可行解中，实际产地对 Holly Glass 的供给量至少为 10，这样，其最低需求量也能够得到保障。因而，Holly Glass 也不需要调整(如果 Holly Glass 的最低需求量大于 10，将和 Berdoo 一样需要修正)。

Los Devils 的最低需求与其需求量相等，所以其整个需求 70 必须由实际产地提供。这里需要用大 M 法，为从虚拟产地输送到 Los Devils 的费用设置一个大 M 值，确保在最优方案中由虚拟产地分配给 Los Devils 的数量为 0。

最后考虑 Berdoo。与 Holly Glass 不同的是，虚产地除了能提供 Berdoo 的额外需求外，至少还能部分提供 Berdoo 的最低需求。由于 Berdoo 的最低需求值为 30，所以必须使调整后虚拟产地供应 Berdoo 的量不超过 20，从而使 Berdoo 的总需求量不超过 50。修正的方法是将 Berdoo 划分为两个销地，一个需求量为 30，从虚产地获得水资源的费用为 M，另一个需求量为 20，从虚产地获得水资源的费用为 0。最终形成的参数表如表 9.12 所列。9.2 节将详细描述该问题的求解过程。

表 9.12　Metro Water District 参数

				费用/(10 美元/英亩英尺)				供应量
			Berdoo (最小)1	Berdoo (额外)	Los Devils	San Go	Holly Glass	
产地	Colombo River	1	16	16	13	22	17	50
	Sacron River	2	14	14	13	19	15	60
	Calorie River	3	19	19	20	23	M	50
	虚产地	4(D)	M	0	M	0	0	50
需求量			30	20	70	30	60	

9.1.6 运输问题小结

即使运用上述两例描述的重构方法,一些产销分配问题也不满足运输问题模型。原因之一在于有些产销问题并不是直接从产地发往销地,而是存在中间存放点。3.4 节的例子(图 3.13)就描述了这样一个问题。其中,产地是两个工厂,销地是两个仓库。然而,从特定的工厂运往特定的仓库可能首先要运经储运中心,或是其他工厂或仓库,而后才到达目的地。费用因运输线路的不同而异,而且,某些运输线路还存在运输上限。尽管从形式上看超出了一般运输问题的范畴,但这类问题仍然是一类特殊的线性规划问题,称为最小费用流问题,我们将在 10.6 节详细讨论。10.7 节给出了解决最小费用流问题的一种行之有效的办法——网络单纯形法。没有对运输路线的运输量规定上限的最小费用流问题可称为转运问题。本书网站的 23.1 节专门讨论转运问题。

另一种情况是,直接从产地发往销地,但可能不符合运输问题的其他假设。如果从产地到销地的费用与运量不成线性关系,则违反了线性成本假设;如果产量或销量不确定,则违反了必要假设。例如,有时在货物运到之前,销地的最终需求是不明确的,并且如果到达量与最终的需求量有差异,会导致费用与运量不成线性关系。如果供给量不确定,生产费用也与产量不成线性关系。例如,在建设新的供应地时,明确生产成本是决策时需要考虑的成本问题之一。目前有很多关于运输问题一般化及其解法的研究①。

9.2 用于运输问题的单纯形法

由于运输问题是特殊的线性规划问题,能够应用第 4 章讲述的单纯形法进行求解。读者将会看到,利用表 9.6 中所列的特殊结构,这种方法中的大量计算可以被极大地简化。这种改进方法称为运输问题的单纯形法。

在阅读的过程中,应当注意如何利用问题的特殊结构简化计算过程。根据问题的特殊结构来改进解决问题的算法,是一种重要的运筹学方法。

9.2.1 运输单纯形法的提出

为了使读者清楚运输单纯形法所做的改进,先回顾一下一般的(未改进的)单纯形法是如何用表格表示运输问题的。首先构造约束参数表(表 9.6),将目标方程转换为求解最大值形式,使用大 M 法为 $m+n$ 引进工变量 $z_1,z_2,\cdots,z_{m+n}$(4.6 节),从而构造出如表 9.13 所列的单纯形表格,表中空白单元格的值均为 0(单纯形法第一次迭代之前,需要用代数方法消除第 0 行初始(人工)基变量的非 0 系数)。

表 9.13 运输问题原始表

		系数								
基变量	方程	Z	…	x_{ij}	…	z_i	…	z_{m+j}	…	右侧
Z	(0)	-1		c_{ij}		M		M		0
	(1)									

① 比如参考文献 K. Holmberg and H. Tuy: "A Production-Transportation Problem with Stochastic Demandand Concave Production Costs," *Mathematical Programming Series A*, **85**: 157-179, 1999。

（续）

		系数								
基变量	方程	Z	…	x_{ij}	…	z_i	…	z_{m+j}	…	右侧
	⋮									
z_i	(i)	0		1		1				s_i
	⋮									
z_{m+j}	$(m+j)$	0		1				1		d_j
	⋮									
	$(m+n)$									

通过一系列迭代，第 0 行将变为如表 9.14 所列的形式。由于表 9.13 中的 0、1 系数的结构，根据 5.3 节中描述的基本原理，u_i 和 v_j 的意义如下：

u_i = 应用单纯形法得到当前单纯形表所进行的迭代过程中，从初始的 0 行（直接地或间接地）减去原始的 i 行的倍数；

v_j = 应用单纯形法得到当前单纯形表所进行的迭代过程中，从初始的 0 行（直接地或间接地）减去原始的 $m+j$ 行的倍数。

表 9.14　运用单纯形法后运输问题表格的第 0 行

		系数								
基变量	方程	Z	…	x_{ij}	…	z_i	…	z_{m+j}	…	右侧
Z	(0)	-1		$c_{ij}-u_i-v_j$		$M-u_i$		$M-v_j$		$-\sum_{i=1}^{m} s_i u_i - \sum_{j=1}^{n} d_j v_j$

根据第 6 章介绍的对偶理论，u_i 和 v_j 的另一个属性是它们均属于对偶变量①。如果 x_{ij} 是非基变量，$c_{ij}-u_i-v_j$ 可理解为 x_{ij} 增长时 Z 的改变率。

必要信息：为了更好地理解，回顾一下单纯形法解决问题的过程。在初始化时，需要得到初始基可行解，这是通过引进人工变量作为初始基变量，并使其值等于 s_i 和 d_j 实现的。最优性检验和第一步迭代（选择入基变量）需要知道当前 0 行，这是通过用先前的第 0 行减去另一行的倍数得到的。第二步（决定出基变量）必须识别随着入基变量增加首先为 0 的基变量，这是通过比较当前入基变量的系数和等式右边值实现的。第三步必须确定新的基可行解，这是通过在当前单纯形表上从某一行之外的其他行中减去该行的倍数实现的。

获得必要信息的简便方法：运输问题单纯形法是如何通过更简单的方法获得上述必要信息呢？在接下来的内容中将会得出答案，这里先给出几点简要的说明。

第一，不需要人工变量，因为有更简单、更方便的方法（需要若干变换）获得初始基可行解。

第二，当前 0 行只需要通过计算 u_i 和 v_j 值就能获得，而不需要使用其他任何一行。由于每个基变量在 0 行必然有一个 0 系数，u_i 和 v_j 可通过以下计算系列等式得到，即

$c_{ij}-u_i-v_j=0$，其中对每一个 i 和 j，x_{ij} 是基变量

以后在讨论运输单纯形法的最优性检验时，会进一步描述这一计算过程。鉴于表 9.13 中的特殊结构，利用 $c_{ij}-u_i-v_j$ 作为表 9.14 中 x_{ij} 的系数，可方便地获得第 0 行。

第三，出基变量不需要入基变量的系数即可简便确定，原因在于问题的特殊结构很容易看出

① 将这些变量标记为 y_i，然后，通过将目标函数变回原来的最小形式，改变表 9.14 中第 0 行的符号，会更容易识别这些变量。

方案是如何随入基变量的增加而改变的,这样,新的基可行并不需要对单纯形表中的行进行代数计算就能迅速确定(后文中读者将看到运输单纯形法如何执行迭代过程的细节)。

基于以上说明,可以得出结论,几乎整个单纯形表(包括维护工作)都可省掉不用,除输入数据(c_{ij}、u_i 和 v_j)之外,运输单纯形法仅需要获得当前的基可行解①,当前 u_i 和 v_j 值,以及由 $c_{ij}-u_i-v_j$ 得到的非基变量 x_{ij}的值。如表 9.15 所列,手工计算时,在运输单纯形表中记录这些迭代信息非常方便(需要注意,在表中 x_{ij}用圆圈标记,以将其与 $c_{ij}-u_i-v_j$ 区开来)。

表 9.15 运输单纯形表的格式

		销地				供应	u_i
		1	2	…	n		
产地	1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	s_1	
	2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	s_2	
	⋮	…	…	…	…	⋮	
	m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	s_m	
需求		d_1	d_2	…	d_n	$Z=$	
	v_j						

每个单元需要加入的信息

如果 x_{ij} 是基变量：c_{ij} x_{ij}

如果 x_{ij} 是非基变量：c_{ij} $c_{ij}-u_i-v_j$

效率的极大提高:读者可以通过同时运用单纯形法和运输单纯形法求解同一个问题来看这两种方法在效率和方便程度上的巨大差异(见习题 9.2-17),这种差异对于只能依靠计算机求解的大规模问题说更加明显。可以通过比较单纯形表与运输单纯形表的规模来初步考察这一差异。例如,对于一个有 m 个产地和 n 个销地的运输问题来说,其单纯形表有 $m+n+1$ 行、$(m+1)(n+1)$ 列(x_{ij}列左边的列除外),运输单纯形表有 m 行、n 列(两个额外的信息行和信息列除外)。现在试着给 m 和 n 赋值(如当 $m=10$、$n=100$ 时,就是一个很典型的中等规模运输问题),看看这两个表的单元格个数随着 m 和 n 的增长将会以怎样的速率增加。

9.2.2 初始化

初始化的目标是获得初始基可行解。因为运输问题中所有的函数约束均为等式约束,单纯形法一般通过引入工变量作为初始基变量求解(见 4.6 节)。所得的基解实际上只对修正的问题是可行的,所以需要大量迭代使人工变量转化为 0 获得真正的基可行解。运输单纯形法不考虑这些问题,而是用一个简单程序,直接在运输单纯形表上构建真正的基可行解。

在论述这个程序前需要指出,运输问题的任何基本解中基变量个数总是比预期的少一个。线性规划问题的每一个约束方程通常都有一个基变量。对拥有 m 个产地和 n 个销地的运输问题来说,约束方程的个数是 $m+n$ 个,而基变量的个数为 $m+n-1$ 个。

原因在于,对于运输问题,所有的约束方程均是等式,而这 $m+n$ 个等式有一个是冗余的重复约束,即使删除也不影响可行域;也就是说,当任何 $m+n-1$ 个等式满足时,另一个等式也自动满足(这个事实可以通过以下例子证明:任一供给量实际上都等于总需求量减去所有其他的供给

① 由于非基变量自动为 0,当前基可行解可完全通过记录基变量的值确定。从现在起,将利用这一方法。

量，任一需求量也都可以通过总供给量减去其他的需求量求得，见习题 9.2-19）。因此，基可行解在运输单纯形表中表现为 $m+n-1$ 个用圆圈标识的非负值，且每行非负值的总和等于供应量，每列非负值的总和等于需求量①。

建立初始基可行解的程序是每次选择 $m+n-1$ 个基变量，每次选择之后，赋给该基变量一个值满足一个额外的约束。因此，经过 $m+n-1$ 次选择之后，就得到一个能满足所有约束的基可行解。目前，存在很多不同的选择基可行解的准则。在描述完创建基可行解的基本过程之后，将列出其中常见的三种。

建立初始基可行解的一般程序②：首先，初步考虑运输单纯形表中所有的产地行和销地列都能够提供一个基变量（配额）。

（1）从所考虑的行和列中根据特定法则选择下一个基变量（配额）。

（2）保证配额的大小恰好能够用完行中剩下的供应量或列中剩下的需求量（较小者）。

（3）进一步考虑删去行或列（剩余的供给量最小的行或剩余的需求量最小的列，如果行的剩余供应量和列的剩余需求量相同，则选择消除行，随后用列作为退化的基变量，如用圆圈标识的 0 配额）。

（4）当只剩下一行或一列时，则在该行或该列中任意选择一个基变量（即那些既没有被选做基变量也不属于删掉的行或列中的变量）作为剩余变量，过程结束，否则，转回步骤（1）。

步骤（1）的可用法则如下。

（1）西北角法。首先选择 x_{11}（也就是从运输单纯形表的西北角开始）。然后，如果 x_{ij} 是最后一个被选择的基变量，且产地 i 的供给有剩余，则选择 $x_{i,j+1}$（即向右移动一列），否则，选择 $x_{i+1,j}$（即向下移动一行）。

例　为了更详尽地介绍西北角法，阐述一下将西北角方法用于 Metro Water District 问题（表 9.12）步骤（1）的一般程序。由于在本例中 $m=4, n=5$，初始基可行解有 $m+n-1=8$ 个基变量。

如表 9.16 所列，首先设定 $x_{11}=30$，正好用尽第 1 列的需求（进一步考虑消除本列）。第一次迭代后第 1 行的剩余供给量为 20，所以下一步选择 x_{12} 作为基变量。由于供给值小于第 2 列的需求值 20，设 $x_{12}=20$，且消除该行（这里根据步骤（3）的说明消除行 1 而不是列 2）。然后，选择 x_{22}，由于第 2 列剩余需求为 0，小于第 2 行供给值 60，设 $x_{22}=0$ 并消除第 2 列。

表 9.16　运用西北角法得到的初始基可行解

		销地					供应	u_i
		1	2	3	4	5		
产地	1	16 30	16 20	13	22	17	50	
	2	14	14 0	13 60	19	15	60	
	3	19	19	20 10	23 30	M 10	50	
	4(D)	M	0	M	0	0 50	50	

① 需要注意的是，任何有 $m+n-1$ 个非 0 变量的可行解不一定是基本解，因为它也有可能是两个或多个退化的基可行解（即部分基变量为 0 的基可行解）的加权平均值。然而，没有必要担心是否将其误作基本解，因为运输问题单纯形法仅构建有效的基可行解。

② 4.1 节中指出，单纯形法是运筹学中系统求解算法的例证，需要注意该过程依次执行的四步构成一次迭代。

(续)

	销地 1	2	3	4	5	供应	u_i
需求	30	20	70	30	60	$Z=2,470+10M$	
v_j							

继续使用这一法则,将最终获得一个完整的初始基可行解,如表9.16所列,其中圆圈标识的数是基变量的值($x_{11}=30,\cdots,x_{45}=50$),且所有其他的变量(如$x_{13}$)均是值为0的非基变量。箭头表示选择基变量的顺序,解决方案中Z的值为

$$Z=16(30)+16(20)+\cdots+0(50)=2470+10M$$

(2) 沃格尔(Vogel)近似法。对需要考虑的行和列,计算罚数,也就是行或列中剩余的最小单位成本和次小单位成本c_{ij}的差值(如果行或列中剩余的两个最小单位成本相同,则罚数为0)。在罚数最大的行或列中,选择剩余单位成本最小的变量(如果罚数最大的行或列不止一个或剩余单位成本最小的变量不止一个,任选一个即可)。

例 现在,应用一般程序来求解MetroWaterDistrict问题,并在步骤(1)中运用沃格尔近似法选择下一个基变量。对于这一法则,使用参数表(而不是在完整的运输单纯形表)会更加方便,可从表9.12开始。在每一次迭代中,计算出待考虑的行和列中的差值之后,用圆圈圈定最大差值,并用方框将所在行或列中的最小单位成本框起来。选择该单位成本对应的基变量作为下一个基变量,这一选择在当前表的右下角列出,相应的行或列将被删除(见一般程序中的步骤(2)和步骤(3))。下次迭代的表与这次相似,只是少了这次迭代中删去的行或列,且从相应的供给量或需求量中减去最后的配额。

对Metro Water District问题应用沃格尔法后得出如表9.17所列的参数表,其中初始基可行解中包含8个基变量,在各参数表的右下角列出。

表9.17 应用沃格尔法求得的初始基可行解

		销地 1	2	3	4	5	供应	行差值
产地	1	16	16	13	22	17	50	3
	2	14	14	13	19	15	60	1
	3	19	19	20	23	M	50	0
	4(D)	M	0	M	$\boxed{0}$	0	50	0
需求		30	20	70	30	60	选择 $x_{44}=30$	
列差值		2	14	0	19	15	消去列4	

		销地 1	2	3	5	供应	行差值
产地	1	16	16	13	17	50	3
	2	14	14	13	15	60	1
	3	19	19	20	M	50	0
	4(D)	M	0	M	$\boxed{0}$	20	0
需求		30	20	70	60	选择 $x_{45}=20$	
列差值		2	14	0	15	消去行4(D)	

	销地 1	2	3	5	供应	行差值

（续）

产地	1	16	16	$\boxed{13}$	17	50	③
	2	14	14	13	15	60	1
	3	19	19	20	M	50	0
需求		30	20	70	40	选择 $x_{13}=50$	
列差值		2	2	0	2	消去行 1	

		销地				供应	行差值
		1	2	3	5		
产地	2	14	14	13	$\boxed{15}$	60	1
	3	19	19	20	M	50	0
需求		30	20	20	40	选择 $x_{25}=40$	
列差值		5	5	7	$M-15$	消去列 5	

		销地			供应	行差值
		1	2	3		
产地	2	14	14	$\boxed{13}$	20	1
	3	19	19	20	50	0
需求		30	20	20	选择 $x_{23}=20$	
列差值		5	5	⑦	消去行 2	

		销地			供应	
		1	2	3		
产地	3	19	19	20	50	
需求		30	20	0	选择 $x_{31}=30$ $x_{32}=20$ $x_{33}=0$	$Z=2460$

本例描述了一般程序中需要特别注意的两个微妙特征。

首先，注意最后的迭代选择三个变量（x_{31}、x_{32} 和 x_{33}）作为基变量，而不像其他迭代一样只选择一个，原因在于此时仅需要考虑一行（第 3 行）。因此，一般程序中的步骤（4）指出，要选择与第 3 行相关的每一个剩余变量作为基变量。

其次，注意倒数第 2 步迭代中设定 $x_{23}=20$，这正好等于行中剩余的供给和列中剩余的需求。然而，根据第（3）步只消除行，留下列为下一步迭代提供一个退化的基变量，而不是同时消除行和列。事实上，最后一步迭代使用第 3 列将 $x_{33}=0$ 选作基变量就是出于这个目的。这一情况的另一个描述如表 9.16 所列，其中，设定 $x_{12}=20$，仅仅消除第 1 行，留下第 2 列为下一步迭代提供一个退化的基变量 $x_{22}=0$。

尽管 0 指派看起来毫无意义，但它确实发挥着重要作用。读者很快就会见到，应用运输单纯形法必须知道当前所有 $m+n-1$ 个基变量，包括值为 0 的变量。

（3）Russell 近似法。对于每个待考虑的产地行 i，选定该行中单位成本 c_{ij} 的最大值作为 $\bar{u}_i$。对于每一待考虑的销地列 j，选定该列中单位成本 c_{ij} 的最大值作为 $\bar{v}_i$。对于每个在这些行和列中没有选择过的变量，计算 $\Delta_{ij}=c_{ij}-\bar{u}_i-\bar{v}_j$。选定 Δ_{ij} 取负值且绝对值最大时所对应的变量（若有最大绝对值相同的负值，任取一个即可）。

例　下面再次运用一般程序解决 Metro Water District 公司问题，并在步骤（1）中应用 Russell

近似法(表9.12)。相应的结果如9.18所列,其中包含有基变量序列。

在迭代1中,第1行中的最大单位成本是$\bar{u}_1=22$,第1列中的最大单位成本是$\bar{v}_1=M$,有

$\Delta_{11}=c_{11}-\bar{u}_1-\bar{v}_1=16-22-M=-6-M$

计算所有的$\Delta_{ij}(i=1,2,3,4;j=1,2,3,4,5)$值,可知$\Delta_{45}=0-2M$具有绝对值最大的负值,所以选$x_{ij}=50$作第一个基变量(配额)。这一配额恰好等于第4行中所有的供给量,所以这一行将被删去。

注意到删去这一行会改变下一次迭代中的$\bar{v}_1$和$\bar{v}_3$,所以在第二次迭代时需要重新计算$j=1$,3时的Δ_{ij}值,同样消去$i=4$,可得此时绝对值最大的负值为

$\Delta_{15}=17-22-M=-5-M$

所以$x_{15}=10$成为第二个基变量(配额),同理消去第5列。

依次进行迭代,读者可以通过验证表9.18中给出的其他配额值验证自己的理解。对于本节或其他小节的其他步骤,读者会发现IOR Tutorial对于进行相关计算和方法阐明都非常有用(见寻找初始基可行解的交互式程序)。

表9.18 运用Russell近似法求得的初始基可行解

迭代	$\bar{u}_1$	$\bar{u}_2$	$\bar{u}_3$	$\bar{u}_4$	$\bar{v}_1$	$\bar{v}_2$	$\bar{v}_3$	$\bar{v}_4$	$\bar{v}_5$	最大负值Δ_{ij}	配额
1	22	19	M	M	M	19	M	23	M	$\Delta_{45}=-2M$	$x_{45}=50$
2	22	19	M		19	19	20	23	M	$\Delta_{15}=-5-M$	$x_{15}=10$
3	22	19	23		19	19	20	23		$\Delta_{13}=-29$	$x_{13}=40$
4		19	23		19	19	20	23		$\Delta_{23}=-26$	$x_{23}=30$
5		19	23		19	19		23		$\Delta_{21}=-24$	$x_{21}=30$
6										与其无关	$x_{31}=0$
											$x_{32}=20$
											$x_{34}=30$
											$Z=2570$

步骤(1)可用法则的比较:现在比较一下上述用来选择下一个基变量的3个法则。西北角法最主要的优点是求解速度快且较易实施。因为它没有关注单位成本c_{ij},通常所得到的解往往远非最优解(注意表9.16中,$x_{35}=10$,而$x_{35}=M$)。多花费些精力找到一个好的初始可行解,会大大减少应用运输单纯形法得到最优解的迭代次数(见习题9.2-7和习题9.2-9)。找到这样的初始可行解则是另外两个法则的目标。

沃格尔近似法是近些年来流行的一种方法,特别是因为它手工计算起来相对容易。由于罚数表示的是未给行或列中单位成本最小的单元格赋值而产生的最小额外单位成本,因而,该方法对总成本考虑得不是非常周全。

Russell近似法提供了另一个可在计算机上快速完成的(但不能手工完成)优秀准则。尽管不太清楚平均来看哪种方法更有效,但很多情况下Russell近似法都能获得比沃格尔法更优的解(例如,沃格尔法获得的最优解为$Z=2460$,而Russell法获得的最优解为$Z=2570$)。对于规模较大的问题而言,可以同时应用两种准则,然后较优的解开始运输单纯形法的迭代。

Russell近似法的一个显著优点,是其直接仿照运输单纯形法的第一步计算(后面读者将会看到),这一定上程度上会简化整个计算过程。特别是定义$\bar{u}_i$和$\bar{v}_j$,并用$c_{ij}-\bar{u}_i-\bar{v}_j$作为$c_{ij}-u_i-v_j$

的估值，这样，当运输单纯形法取得最优解时，就会得到 $c_{ij}-u_i-v_j$ 的值。

现在，用表 9.18 中通过 Russell 近似法获得的初始可行解演示运输单纯形法的其他部分。这样，当前的初始运输单纯形表（在求解 u_i 和 v_j 之前）如表 9.19 所列。

表 9.19　Russell 近似法的初始运输单纯形表（在求解 u_i 和 v_j 之前）

迭代 0	销地 1	2	3	4	5	供给量	u_i
产地 1	16	16	13　40	22	17　10	50	
2	14　30	14	13　30	19	15	60	
3	19　0	19　20	20	23　30	M	50	
4(D)	M	0	M	0	0　50	50	
需求量	30	20	70	30	60	$Z=2570$	
v_j							

下一步将应用最优性检验确认初始解是否为最优。

9.2.3　最优性检验

应用表 9.14 中的标记，可以由单纯形法的标准最优解检验方法（见 4.3 节部分），推导出运输问题的最优性检验方法如下。

最优性检验：对一个基可行解中的所有非基变量 x_{ij}，当且仅对应的 $c_{ij}-u_i-v_j \geqslant 0$ 均成立时，该基可行解才是最优解①。

因此，最优性检验的唯一工作，就是计算在当前基可行解下 u_i 和 v_j 的值，然后计算 $c_{ij}-u_i-v_j$ 的值。

因为若 x_{ij} 为基变量，则 $c_{ij}-u_i-v_j$ 的值需要为 0，因而，当 x_{ij} 为基变量时，u_i 和 v_j 需满足等式 $c_{ij}=u_i+v_j$。

共有 $m+n-1$ 个基变量，所以共有 $m+n-1$ 个上述等式。由于未知变量（u_i 和 v_j）的个数共 $m+n$ 个，可对其中一个任意赋值而不违背上述等式，该变量的选择及赋值不影响 $c_{ij}-u_i-v_j$ 的值（即使当 x_{ij} 为非基变量时），所不同的仅仅是计算上述等式的难易程度。为了容易求解，便捷的选择就是选择行中具有最大配额的 u_i（若有相同的最大值任取何一个即可），并赋值为 0。因为这些等式结构简单，代数求解其余的变量值就变得非常容易了。

为了举例说明，对初始基可行解中的每个基变量，列出了相应的等式：

x_{31}：$19=u_3+v_1$，设 $u_3=0$，得 $v_1=19$

x_{32}：$19=u_3+v_2$，　　$v_2=19$

x_{34}：$23=u_3+v_4$，　　$v_4=23$

① 当有两个或更多等价的退化的基可行解（如具有不同的退化基变量为 0 的相同解）时除外，这时，只要部分基变量满足最优性测试就可得到最优解，后续例子中有对该例外的解释（表 9.23 最后两个相同的解，只有最后一个满足最优标准）。

x_{21}:$14=u_2+v_1$,已知 $v_1=19$,得 $u_2=-5$

x_{23}:$13=u_2+v_3$,已知 $u_2=-5$,得 $v_3=18$

x_{13}:$13=u_1+v_3$,已知 $v_3=18$,得 $u_1=-5$

x_{15}:$17=u_1+v_5$,已知 $u_1=-5$,得 $v_5=22$

x_{45}:$0=u_4+v_5$,已知 $v_5=22$,得 $u_4=-22$

设 $u_3=0$(因为表9.19中第3行的配额数最大),按自上而下的顺序,根据等式可以逐次由已知的值得到未知的值,如等式右侧所示(注意到 u_i 和 v_j 的推导值是由当前基可行解中的基变量 x_{ij}决定的,所以每得到一个新基可行解后,就要重新计算 u_i 和 v_j 的值)。

一旦掌握了这种方法,读者将会发现解决这类等式问题时,直接在运输单纯形表上进行会更加方便,而无需把它们写下来。因此,在表9.19中,读者可以首先写出 $u_3=0$,然后,在其所在行中找出圈定的配额(x_{31},x_{32},x_{34})。对于每个配额,设 $v_j=c_{3j}$,然后在这些列(x_{21})中寻找圈定的配额(除了第3行)。在脑中计算 $u_2=c_{21}-v_1$,找出 x_{23},设 $v_1=c_{23}-v_2$,以此类推,直到填完了所有的 u_i 和 v_j 的值。然后,为每个非基变量 x_{ij}(也就是为每一个没有圈定配额的单元格)计算 $c_{ij}-u_i-v_j$ 的值,并将其结果填入表格内,最终将会得到一个如表9.20所列的完整的运输单纯形表。

表9.20 完整的初始运输单纯形

迭代 0		销地 1	销地 2	销地 3	销地 4	销地 5	供给量	u_i
产地	1	16 / +2	16 / +2	13 / 40	22 / +4	17 / 10	50	−5
	2	14 / 30	14 / 0	13 / 30	19 / +1	15 / −2	60	−5
	3	19 / 0	19 / 20	20 / +2	23 / 30	M / $M-22$	50	0
	4(D)	M / $M+3$	0 / +3	M / $M+4$	0 / −1	0 / 50	50	−22
需求量		30	20	70	30	60	$Z=2570$	
	v_j	19	19	18	23	22		

现在通过检验表9.20中给出 $c_{ij}-u_i-v_j$ 值进行最优性检验。因为这些值中有两个($c_{25}-u_2-v_2=-2$ 和 $c_{44}-u_4-v_4=-1$)是负值,可以得出该初始基可行解不是最优解。因此,还需进一步迭代以找到一个更优的基可行解。

9.2.4 一次迭代过程

从单纯形法的完整性而言,改进版单纯形法的迭代必须确定入基变量(第1步)、出基变量(第2步),最后确定所得的新的基可行解(第3步)。

第1步:确定入基变量。

由于 $c_{ij}-u_i-v_j$ 代表当非基变量 x_{ij}增加时目标函数的变化,入基变量对应的 $c_{ij}-u_i-v_j$ 值应为负值,从而降低总成本 Z。这样,表9.20中入基变量的备选变量为 x_{25}和 x_{44}。接下来,选择 $c_{ij}-u_i-v_j$ 绝对值最大时所对应的变量作为入基变量,本例中入基变量为 x_{25}。

第 2 步：确定出基变量。

在满足供需约束下，从 0 开始不断增加入基变量的值，将引起其他基变量值（配额）的变化，将其中首先减小到 0 的变量作为出基变量。

x_{25}作为入基变量换入后，表 9.20 发生的一系列变化如表 9.21 所列（我们将在入基变量所在的单元格内用一个中间带加号的方框表示，并将相应的 $c_{ij}-u_i-v_j$ 值写在该单元格的右下角）。增加 x_{25}的值时，需将 x_{15}减去相同的量以确保第 5 列中的需求量仍然为 60，还需要将 x_{13}增加同样的量以确保第 1 行的供应量仍为 50，然后，需要将 x_{23}减小该值以确保第 3 列的需求量仍为 70。x_{23}的减少量确保了这一连锁反应的成功完成，因为变化后第 2 行的供应量仍为 60（同样，也可以通过减少 x_{23}值重新分配第 2 行中的供给开始连锁反应，然后，增加 x_{13}的值并减少 x_{15}的值使连锁反应继续）。

表 9.21　增加入基变量 x_{25}引起连锁反应后导致初始运输单纯形表变化简图

		销地				供应
			3	4	5	
产地	1	…	13 40 +	22 +4	17 10 −	50
	2	…	13 30 −	19 +1	15 $\boxed{+}$ −2	60
		…	…	…	…	
需求			70	30	60	

结果表明，单元格（2,5）和（1,3）为接受单元格（Recipient Cells），它们分别从施与单元格（Donor Cells）（1,5）和（2,3）得到了附加的配额（这些单元格已在表 9.21 中分别用加号和减号进行了标识）。注意：单元格（1,5）而非（4,5）为第 5 列的施与单元格，因为单元格（4,5）在第 4 行中已经没有接受单元格来继续连锁反应（同样，如果从第 2 行开始连锁反应，单元格（2,1）也不可能成为该行的施与单元格，因为下一步只能选择（3,1）作为接受单元格，单元格（3,2）或（3,4）作为施与单元格，这样连锁反应将无法完成）。还需要注意，除了入基变量，所有连锁反应中涉及的接受单元格和施与单元格都必须与当前基可行解的基变量对应。

每个施与单元格配额的减少量与入基变量（和其他接受单元格）的增加量完全相等。因此，最小的基变量将作为第一个施与单元格，本例中单元格（1,5）（由于表 9.21 中 10<30）将随着入基变量 x_{25}的增加首先达到 0，这样，x_{15}成为出基变量。

一般而言，入基变量从 0 开始增加时，总会刚好有一个连锁反应（在任一方向）成功完成从而保持可行性。这一连锁反应其实就是从含有基变量的单元格中进行一系列选择：首先从入基变量所在列选择施与单元格，然后从该施与单元格所在行选择接受单元格，再从该接受单元格所在列选择施与单元格，以此类推，直到入基变所在行产生一个施与单元格为止。当一行或一列中有多于一个基变量单元格时，就需要对每个单元格进行尝试，以确定选择哪个为施单元格与或接收单元格（在一行或一列中，最终只会有一个单元格符合要求）。在连锁反应确定以后，含有最小基变量的施与单元格将自动提供出基变量（若同时有两个施与单元格含有相同的最小基变量，任取一个作为出基变量即可）。

第 3 步：确定新的基可行解。

只需通过为每个接收单元格加上出基变量（在变换之前的值）的值，并同时在每个施与单元

格减去同样值,即可获得新的基可行解。表 9.21 中出基变量 x_{15} 的值为 10,为寻找新的基可行解,运输单纯形表变化部分的情况如表 9.22 所列(因为 x_{15} 在新的基可行解中是非基变量,其新配额“0”在这个新表中将不再显示)。

下面着重解释一下在最优性检验中 $c_{ij}-u_i-v_j$ 值的变化情况。因为 10 个单位的配额从施与单元格转移到了接受单元格(表 9.21 和表 9.22),总成本的变化为

$$\Delta Z=10(15-17+13-13)=10(-2)=10(c_{25}-u_2-v_5)$$

表 9.22 显示基可行解变化的运输单纯形表的部分图示

		销地				供应
			3	4	5	
产地	1	…	13 50	22	17	50
	2	…	13 20	19	15 10	60
		…	…	…	…	
需求			70	30	60	

因此,入基变量 x_{25} 从 0 开始增加,每增加 1 单位 x_{25} 会导致总成本降低 2 单位的变化,这正是 $c_{25}-u_2-v_5=-2$ 在表 9.20 中的体现。实际上,另一种获得每个非基变量 x_{ij} 对应的 $c_{ij}-u_i-v_j$ 值的方法(该方法不如上一种方法有效)是先把入基变量从 0 增加到 1 确定连锁反应,然后计算总成本的变化。这一直观的解释可用于验证最优性检验中的计算是否正确。

在解决 Metro Water District 问题之前,先总结一下运输单纯形法的规则。

9.2.5 运输单纯形法小结

初始化:通过本节开始介绍的步骤创建一个初始基可行解,然后对其进行最优性检验。

最优性检验:从配额量最大的行中选定 u_i 和 v_j,设 $u_i=0$,然后对每个基变量 x_{ij} 对应的下标 (i,j) 计算 $c_{ij}=u_i+v_j$,如果对每个非基变量 x_{ij} 的下标 (i,j) 都有 $c_{ij}-u_i-v_j\geq 0$,则当前解是最优解,停止计算,否则,进行以下迭代。

迭代:

(1) 确定入基变量。选择 $c_{ij}-u_i-v_j$ 的值为负值且绝对值最大时所对应的非基变量 x_{ij}。

(2) 确定出基变量。找出那个在入基变量增加时保持可行性的连锁反应。从所有施与单元格中,选择值最小的基变量。

(3) 确定新的基可行解。为每个接受单元格的配额加上出基变量的值,从每一个施与单元格的配额减去相同的值。

将上述步骤应用于 Metro Water District 问题时,会得到如表 9.23 所列完整的运输单纯形法简表。因为第四个简表中所有的 $c_{ij}-u_i-v_j$ 值均非负,由最优性检验可知该简表中的配额是最优的,这与计算所得的结果一致。

读者可以练习一下计算第二个、第三个和第四个表格中 u_i 和 v_j 的值,该练习可以直接在简表上进行,也可以检验一下第二个和第三个简表中的连锁反应,其过程可能比表 9.21 中所列的要复杂些。

表 9.23 Metro Water District 问题运输单纯形表概览

迭代 0		销地 1	销地 2	销地 3	销地 4	销地 5	供应	u_i
产地	1	16; +2	16; +2	13; 40 +	22; +4	17; 10 −	50	−5
	2	14; 30	14; 0	13; 30 −	19; +1	15; $\boxed{+}$ −2	60	−5
	3	19; 0	19; 20	20; +2	23; 30	M; M−22	50	0
	4(D)	M; M+3	0; +3	M; M+4	0; −1	0; 50	50	−22
需求		30	20	70	30	60	Z=2570	
	v_j	19	19	18	23	22		

迭代 1		销地 1	销地 2	销地 3	销地 4	销地 5	供应	u_i
产地	1	16; +2	16; +2	13; 50	22; +4	17; +2	50	−5
	2	14; 30 −	14; 0	13; 20	19; +1	15; 10 +	60	−5
	3	19; 0 +	19; 20	20; +2	23; 30 −	M; M−20	50	0
	4(D)	M; M+1	0; +1	M; M+2	0; $\boxed{+}$ −3	0; 50 −	50	−20
需求		30	20	70	30	60	Z=2550	
	v_j	19	19	18	23	20		

迭代 2		销地 1	销地 2	销地 3	销地 4	销地 5	供应	u_i
产地	1	16; +5	16; +5	13; 50	22; +7	17; +2	50	−8
	2	14; +3	14; +3	13; 20 −	19; +4	15; 40 +	60	−8
	3	19; 30	19; 20	20; $\boxed{+}$ −1	23; 0 −	M; M−23	50	0
	4(D)	M; M+4	0; +4	M; M+2	0; 30 +	0; 20 −	50	−23
需求		30	20	70	30	60	Z=2460	
	v_j	19	19	21	23	23		

(续)

迭代3		销地 1	销地 2	销地 3	销地 4	销地 5	供应	u_i
产地	1	16 +4	16 +4	13 (50)	22 +7	17 +2	50	−7
	2	14 +2	14 +2	13 (20)	19 +4	15 (40)	60	−7
	3	19 (30)	19 (20)	20 (0)	23 +1	M M−22	50	0
	4(D)	M M+3	0 +3	M M+2	0 (30)	0 (20)	50	−22
需求		30	20	70	30	60	$Z=2460$	
	v_j	19	19	20	22	22		

9.2.6 本例的特征

需要注意该例的三个特征。首先,由于基变量 $x_{31}=0$,因而初始基可行解是退化解。不过这个退化的基变量并没有使问题复杂化,因为在第二个简表中单元格(3,1)为接受单元格,使 x_{31} 增加为大于0的值。

其次,第三个简表中产生了另一个退化的基变量(x_{34}),因为在第二个简表中,施与单元格(2,1)和(3,4)中的基变量具有相同的最小值30(这里选择 x_{21} 作为出基变量,如果选择 x_{34},则 x_{21} 将成为退化的基变量)。这个退化的基变量产生了一个难题,因为在第三个简表中,单元格(3,4)成为施与单元格却没有配额可以施与。不过这一点并无大碍,因为给接受单元格加上0,或从施与单元格中减去0,各单元格的配额均未发生变化。然而,这个退化的基变量还是成为出基变量,所以,它在第四个表格中被入基变量代替。基变量集合中的这一变化改变了 u_i 和 v_j 的值。因此,如果第四个简表中任一个 $c_{ij}-u_i-v_j$ 的值为负,该算法会使配额发生实际的变化(当所有的施与单元格都有非退化的基变量时)。

最后,因为第四个表格中没有任何 $c_{ij}-u_i-v_j$ 的值为负值,第三个表格中的配额为最优值。因此,算法多执行了一次迭代。这个额外的迭代是由于退化导致的缺陷,无论是运输单纯形法还是单纯形法中,都会偶尔出现,但其严重性还不足以改变算法。

既然已经学过了运输单纯形法,读者接下来要做的就是检验这种算法能否证明9.1节中的整数解特性部分。习题9.2-20将为读者提供推理分析方面的帮助。

9.3 指派问题

指派问题是一类特殊的线性规划问题,旨在给不同的指派对象指派任务。例如,指派对象可能是需要被分配任务的员工。给人分派工作是指派问题的一个常见的应用。然而,指派对象不一定是指人,也可以指机器、车辆、车间甚至时间段。下面的第一个例子即涉及将机器指派到相应的位置,所以这个例子中的指派对象是机器。另一个例子是将产品生产任务指派给不同的车间。

为了与指派问题的定义一致,这类应用一般应符合下列假设条件。

(1) 指派对象的数目和任务的数目一致(一般用 n 表示)。

(2) 每个指派对象只被指派一项任务。

(3) 每项任务只能被一个指派对象执行。

(4) 指派对象 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 执行任务 $j(j=1,2,\cdots,n)$ 所需的成本为 c_{ij}。

(5) 指派问题的目标是确定如何分配 n 项任务,使完成任务的总成本最小。

任何满足上述假设条件的问题,都可以应用专为指派问题设计的算法得到有效解决。

前三个假设条件非常严格,许多实际的应用并不是完全满足这些假设。不过,通常可以通过对问题进行重构,使其满足上述假设。例如,我以利用虚拟指派对象或虚拟任务达到这一目的。下面将用一些例子详细描述这些技巧。

9.3.1　原型范例

Job Shop 公司购买了三种不同型号的新机器,车间里有四个位置安置这些机器。这些位置中有些更需要安放特定类型的机器,因为它们几乎是工作的核心,具有频繁的输入输出流(新机器之间没有工作流)。问题的目标是将新机器指派到可选的位置上,并使处理材料的费用最小。表 9.24 中列出了每个位置上安放不同的机器可能产生的处理材料的成本(单位:美元/h)。机器 2 不允许安放到位置 2 上,因此,本例中没有列出相应的成本。

表 9.24　Job Shop 公司的材料处理成本数据

		位　　置			
		1	2	3	4
机器	1	13	16	12	11
	2	15	—	13	20
	3	5	7	10	6

为将此问题转化为标准的指派问题,必须为多出的一个位置引入一个虚拟机器。此外,将机器 2 安置在位置 2 的成本设为极大值 M,从而将其排除在最优方案之外。最终的指派任务成本如表 9.25 所列,其中包含了解决这一问题的需要所有数据。可知,该问题的最优方案为将机器 1 安置在位置 4、机器 2 安置在位置 3、机器 3 安置在位置 1,总成本为 29 美元/h。虚拟的机器被指派到位置 2,将来该位置还可以用于安放其他机器。

表 9.25　Job Shop 公司指派问题的成本表

		任务(位置)			
		1	2	3	4
指派对象(机器)	1	13	16	12	11
	2	15	M	13	20
	3	5	7	10	6
	4(D)	0	0	0	0

我们将在介绍指派问题模型之后,讨论如何求解上述问题。

9.3.2　指派问题模型

指派问题的数学模型将用到下述决策变量:

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{如果指派对象 } i \text{ 执行任务 } j\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

式中：$i=1,2,\cdots,n$；$j=1,2,\cdots,n$。因此，x_{ij}是一个值为0或1的二元变量。正如整数规划一章(第12章)所详述的那样，二元变量在运筹学中表示是/非决策时非常重要。本例子中的是/非决策为：指派对象是否应该执行任务j。

假设Z为总成本，指派任务模型为

$$\text{Min } Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}$$

s. t.

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1(i=1,2,\cdots,n)$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1(j=1,2,\cdots,n)$$

$$x_{ij}\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,n)$$

式中：x_{ij}为二元变量。

第一组函数约束是指每个指派对象只能执行一项任务，而第二组函数约束是指每项任务只能由一个指派对象完成。如果删去附加约束x_{ij}是二元变量，模型明显就是一个特殊的线性规划问题，可以很容易求解。恰好这里可以删掉这一约束，原因将在下面说明(该约束可以删去，正是指派问题出现在本章中而不是在整数规划一章的原因)。

现在比较这个模型(没有二元变量约束)和9.1节(包括表9.1)第三部分讲的运输问题模型，可以看出两个模型非常相似。实际上，指派问题也是一种特殊类型的运输问题，只不过产地是指派对象，而销地则是任务，并且

产地的数量m=销地的数量n

每个供给量$s_i=1$

每个需求量$d_j=1$

现在关注一下运输问题模型中的整数解特性。因为此时的s_i和d_j都是整数(=1)，对于指派问题而言，这一特性是指每个可行解(包括最优解)都是整数解。指派问题模型的函数约束使每个变量的值都不大于1，非负约束条件使每个变量的值都不小于0。因此，通过删除二元变量约束，可以应用求解线性规划问题的方法来解决指派问题，而最终的可行解(包括最优解)自然会满足二元变量约束。

正如运输问题可以用网络图描述(图9.3)，指派问题也可以用近似的方式描述，如图9.5所示。第一列列出n个指派对象，第二列列出n个任务，方括弧中的数字代表网络图中某个位置可以提供的指派对象数，所以左边的数自然为1，而右边的数-1表示每项任务需要一个指派对象完成。

对于一个特定的指派问题，人们一般不会列出整个数学模型。通过填写一个成本表，就可以将此问题简化(表9.25)，表中包含了指派对象和任务，可以在一个很小的空间表示出所有的必要数据。

有些问题通常不太符合指派问题模型，如某些指派对象可能会被指派完成多于一项任务。在这种情况下，我们可以将指派对象分解为多个相同的指派对象，使每个指派对象只对应一项任务(表9.29将通过例子说明这一问题)。同理，如果一项任务由多个指派对象完成，那么，这项任务可以被分解为多个相同的任务，从而使指派对象和任务一一对应。

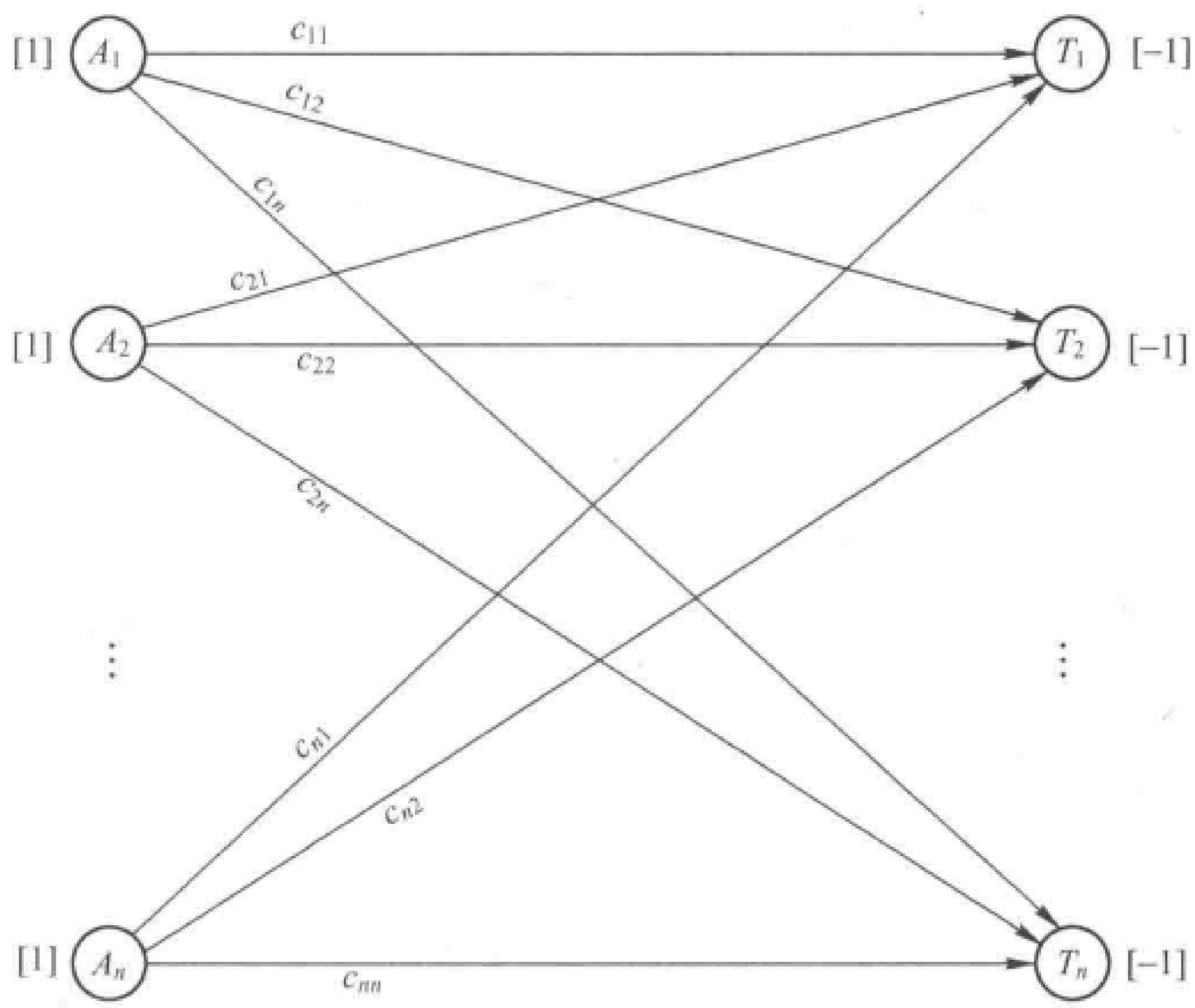

图 9.5　指派问题的网络图

9.3.3　指派问题的求解步骤

解决指派问题时有多种方法,但对于与 Job Shop 公司的例子规模相近问题,用单纯形法可以快速求解,直接应用提供单纯形法的软件包(如 Excel 及其 Solver)求解这类问题会很方便。如果用这种方法求解 Job Shop 公司的问题,就无需在表 9.25 中增加虚拟的机器以满足标准的指派问题模型。对每个地点指派的机器数量的约束条件就可以表示为

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} \leqslant 1 (j = 1,2,3,4)$$

正如本章的 Excel 文件所示,该问题的电子表格形式与图 9.4 中运输问题的表示形式非常接近,不同的是,所有的供给和需求都是 1,且需求的约束条件是“≤1”而非“=1”。

然而,复杂的指派问题用专门的方法求解会更快一些,所以我们建议不要用单纯形法解决复杂的指派问题。

由于指派问题是特殊的运输问题,因此解决指派问题的一种方便且相对快捷的方法,就是运用 9.2 节讲述的运输单纯形法。这一方法需要将成本参数表格转换为相应运输问题的参数表格,如表 9.26(a)所列。

表 9.26　指派问题转化为运输问题时的参数表——以 Job Shop 公司为例

(a) 一般情况

		每单位的分销成本				供给量
		销地				
		1	2	…	n	
产地	1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	1
	2	c_{12}	—	…	c_{2n}	1
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	$m=n$	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{mn}	1
需求量		1	1	…	1	

(b) Job Shop 公司案例

		每单位的分销成本				供给量
		销地(位置)				
		1	2	3	4	
产地(机器)	1	13	16	12	11	1
	2	15	M	13	20	1
	3	5	7	10	6	1
	4(D)	0	0	0	0	1
需求量		1	1	1	1	

例如,表9.26(b)中展示了Job Shop公司问题的参数,此表源自成本表9.25。当用运输单纯形法来求解该运输问题时,得到的最优解为 $x_{13}=0$, $x_{14}=1$, $x_{23}=1$, $x_{31}=1$, $x_{41}=0$, $x_{42}=1$(读者可以在习题9.3-6中对这个解进行验证)。退化的基变量($x_{ij}=0$)和虚拟机器的配额($x_{42}=1$)对于原问题来说没有任何意义,所以实际的指派结果是机器1到位置4、机器2到位置3、机器3到位置1。

利用运输单纯形法求出的最优解中有许多退化的基变量,这并不是巧合。对于任何有 n 个任务的指派问题来说,表9.26(a)所展示的运输问题的模型中都有 $m=n$,也就是说,产地的数量 m 和销地的数量 n 与需要完成的任务量 n 相等。运输问题通常具有 $m+n-1$ 个基变量(配额),因此这种特殊类型的运输问题的每个基可行解中都含有 $2n-1$ 个基变量,且其中有且仅有 n 个 $x_{ij}=1$(对应于 n 个指派)。因此,由于所有的变量都是二值量,总存在 $n-1$ 个退化的基变量($x_{ij}=0$)。正如9.2节末所讨论的,退化的基变量在算法的实施过程中不会产生太大的麻烦,然而,却经常会引起不必要的重复迭代。这些重复计算不会影响指派结果,只会影响到退化的基变量所对应的零指派量的标识。当总有很多退化的基变量时,如果应用单纯形法求解,这些多余的重复迭代就变成一个很严重的缺陷了。

运输问题单纯形法的另一个缺点是,它试图利用一个一般目的的算法解决所有的运输问题。因此,对于指派问题这种特殊类型的运输问题($m=n$,每个 $s_i=1$,每个 $d_j=1$),并没有研究其特殊结构。幸好专门的计算方法已经研发出来了,能够更加高效地解决指派问题。这些算法直接在成本表格上操作,而不会涉及退化的基变量。一旦获得了这些算法中一个算法的计算机程序,就可以很简便地替代运输单纯形法,尤其在指派问题的规模相当大时,这一算法的优势会更加明显。

9.4节将介绍专用于有效解决指派问题的一个算法——匈牙利算法。

例 工厂产品分配问题。

Better Products公司决定让产能过剩的三家工厂生产四种新产品。生产每单位产品都需要消耗工厂的生产能力,因此工厂的可用生产能力由每天可生产的产品数量表示,如表9.27最右侧一列所列。表中最下面一行给出了每种产品为满足计划销售量的日生产率。除了工厂2不能生产产品3外,每家工厂都能生产任何产品。然而,正如表9.27的主体部分所列,各工厂生产各种产品所消耗的成本不尽相同。

表9.27 Better Products公司的数据表格

		每产品的单位成本/美元				生产能力
		1	2	3	4	
工厂	1	41	27	28	24	75
	2	40	29	—	23	75
	3	37	30	27	21	45
需求量	20	30	30	40		

管理者需要决定如何为各工厂分配生产任务,有两个可选方案。

方案1,允许分开生产,即同一种产品可在多家工厂进行生产。

方案2,不允许分开生产。

第二个方案增加了一个约束条件,该约束只会增加按表9.27求得的最优解的成本。另外,方案2的主要优势是消除了一些与产品分离相关联的隐形成本,这些隐形成本包括额外的安装费用、分配费用和管理费用,表9.27中没有体现出来。因此,管理者希望在做出最后决定前对每

个方案都进行分析。对于方案 2，管理者进一步指出，每家工厂应至少生产一种产品。

下面将分别对这两种方案进行建模和求解，其中把方案 1 看作一个运输问题，把方案 2 看作一个指派问题。

对方案 1 建模：

在允许将产品分开生产的情况下，表 9.27 可以直接转变为运输问题的求解表格。工厂变成产地，产品变成销地（反过来也一样），于是，供给为生产能力，需求为产品的生产率。在表 9.27 中只需要做两处修改。首先，由于工厂 2 无法生产产品 3，使工厂 2 生产产品 3 的单位成本为无穷大数 M，这样就不会为其分派生产任务。其次，总生产能力（$75+75+45=195$）超过了总需求量（$20+30+30+40=120$），因此需设置一个需求量为 75 的虚拟销地进行平衡。得到的参数表格如表 9.28 所列。

表 9.28　Better Products 公司问题按方案 1 求解时作为运输问题的参数表格

		每分销单位成本/美元					供给量
		1	2	3	4	5(*D*)	
产地（工厂）	1	41	27	28	24	0	75
	2	40	29	*M*	23	0	75
	3	37	30	27	21	0	45
需求量		20	30	30	40	75	

该运输问题最优解的基变量为

$x_{12}=30, x_{13}=30, x_{15}=15, x_{24}=15, x_{25}=60, x_{31}=20, x_{34}=25$

工厂 1 生产全部的产品 2 和产品 3。

工厂 2 生产 37.5%的产品 4。

工厂 3 生产 62.5%的产品 4 和全部产品 1。

总成本是 $Z=3260$ 美元/天。

对方案 2 建模：

在不能将产品分开生产的情况下，每种商品只能由一家工厂进行生产。因此，产品生产可以看作指派问题，并把工厂当作任务执行者。

管理者指定每家工厂都应被指派生产至少一种产品，由于产品的数目（4）超过工厂的数目（3），因此其中一家工厂要生产 2 种产品。工厂 3 的过剩产能只够再生产一种产品的能力（表 9.27），所以，工厂 1 和工厂 2 中的一家要生产两种产品。

为了在指派问题建模中实现对额外产品生产的指派，可以将工厂 1 和工厂 2 各分为两个指派对象，如表 9.29 所列。

表 9.29　Better Products 公司例子中选择方案 2 时作为指派问题的求解表格

		任务（产品）				
		1	2	3	4	5(*D*)
指派对象（工厂）	1*a*	820	810	840	960	0
	1*b*	820	810	840	960	0
	2*a*	800	870	*M*	920	0
	2*b*	800	870	*M*	920	0
	3	740	900	810	840	*M*

由于指派对象的数量(目前为5)必须与任务数量(目前为4)相等,表9.29中引进了5(D)表示虚任务(产品)。虚任务的作用是为工厂1或工厂2提供虚拟产品,而每家工厂只能接收一种真实产品。生产虚拟产品不需要成本,因此,通常情况下,虚任务的生产成本均为零。唯一的例外是表9.29最下面一行中M的引入。这里之所以引入M,是原因工厂3必须被指派生产一种真实的产品(从第1种、第2种、第3种、第4种中选择一个),无穷大数M可以避免指派给工厂3虚拟产品(在表9.28中,M的作用也是为了防止指派工厂3生产产品2,两者都是为了避免不可行的指派)。

表9.29中的成本数据并不是表9.27或表9.28中所列的单位成本。表9.28中给出了运输问题模型(针对方案1),这时单位成本是合适的,不过现在我们要构建指派问题模型(针对方案2)。对于指派问题,成本c_{ij}是指派对象i执行第j个任务的总成本。在表9.29中,工厂i生产产品j的总成本(每日)是由单位生产成本乘以每日的产量得到的,这两项因子在表9.27中是分开显示的。例如,假设工厂1生产产品1,利用表9.28中对应的的单位成本41美元和需求量20单位(每天生产的单位数),可以得出

工厂1生产1单位产品1的成本=41美元

产品1每日的需求量=20单位

每日工厂1生产产品1的总成本=20×41美元

=820美元

于是,表9.29中指派对象$1a$或$1b$执行任务1的成本为820美元。

该指派问题的最优解为

工厂1生产产品2和产品3

工厂2生产产品1

工厂3生产产品4

虚任务被指派给工厂2,每天的生产总成本$Z=3290$美元。

通常来说,求最优解的方法之一就是将表9.29中的成本数据表转变为等价的运输问题参数表(表9.26),然后用运输单纯形法求解。由于表9.29中有相同的行,可以将5个指派对象组合为供给量分别为2、2、1的3个产地,从而进行简化(参见习题9.3-5)。这种简化同时也为每个基可行解减少了两个退化的基解。因此,即使这种改进后的形式不再适合表9.26(a)中所列的指派问题的形式,却是应用运输单纯形法的一个更为有效的模型。

图9.6展示的是怎样利用Excel及Solver得到最优解,最优解显示在动态单元格任务(C19:F21)中。由于使用的是一般单纯形法,不需要把问题变换为指派问题模型或者运输问题模型。因此,不需要把工厂1和工厂2各分为两个指派对象,也不需要增加虚任务。取而代之的是,工厂1和工厂2各被指派了两个任务,然后在单元格H19、H20和Solver对话框中相应的约束条件中输入"≤"。同样,不再需要大M法防止在单元格E20中为工厂2指派产品3,因为对话框中已经包含了约束条件E20=0。目标单元格(I24)中总成本显示每天的总成本位3290美元。

现在将这种方法与把产品4指派给工厂2和工厂3生产的方案1进行比较。两种方法的指派有些差异,但事实上,每天的总成本却几乎相同(方案1每天3260美元,方案2每天3290美元)。然而,方案1还存在与分开产品相关的一些隐形成本(包括额外的建设、分配和管理成本),都没有包含在其目标函数中。对于任何运筹学方法而言,所运用的数学模型只能提供对整个问题近似的描述,管理者在做出最终决定之前,需要对没能纳入模型中的因素进行考虑。在本案例中,管理者在预估将产品分开生产的弊端之后,决定采用方案2。

图 9.6　Better Products 公司问题按方案 2 变换成指派问题计算时的电子表格模式

9.4　求解指派问题的专用算法

我们在 9.3 节中指出，运输单纯形法可以用来解决指派问题，但为解决这种问题而专门设计的算法会更高效。下面将介绍解决指派问题的一个典型算法，由于该算法是由匈牙利数学家发明的，因此称为匈牙利算法(Hungarianv Algorithm)或匈牙利方法(Hungarian Method)。我们将着重介绍该算法的关键思路，而忽略在计算机上实施算法所需的一些细节。

9.4.1　等价成本表的作用

匈牙利算法直接在成本表上进行操作。更准确地说，该算法将初始成本表变换为一系列等价的成本表，直到等价成本表中出现一个明显的最优解。最终的等价成本表由正数或 0 组成，可以在 0 所在的位置上指派任务。由于总成本不能为负，总成本为零的指派显然是最优的。接下来的问题是如何对初始成本表进行等价变换而得到这一形式。

进行上述变化是基于以下事实：可以对成本表中一行或一列的每个元素加上或减去一个常数，而不使问题发生实际的变化。也就是说，新成本表的最优解一定是旧成本表的最优解，反之亦然。

因此，该算法的第一步，就是从每一行的元素中减去该行中最小的数。通过这一行削减操作，会得到一个等价的新成本表，其中每一行都至少有一个零值。如果此时表中含有不包含零值的列，那么，下一步就要进行列削减操作，从这些不含零值的列中减去该列中最小的数[①]。这时，

① 实施行削减操作和列削减操作不存在先后顺序，但先实施行削减操作在进行列削减操作显得更有条理。

等价的新成本表中任一行和列都含有零值。如果这些零值构成一个完整指派序列,那么,这个指派序列就是问题的最优解,算法结束。

举例说明,考虑表9.25给出的Job Shop公司问题的成本表。为了将该成本表转化为等价的成本表,先在第一行每个元素中减去11,得到

	1	2	3	4
1	2	5	1	0
2	15	M	13	20
3	5	7	10	6
4(D)	0	0	0	0

由于任何可行解在第1行必恰好有一个指派,因而,新表的总成本一定刚好比旧表的总成本小11。因此,使其中一个表的总成本最小的解同样会使另一个表的总成本最小。

需要注意,初始成本表前3行均严格为正,新表的第一行有一个零元素。由于我们的目的就是得到足够的零元素形成一个完整的指派方案,所以这一变换过程还要在其他行和列进行。为了避免出现负值,被减数应该是每行或每列中最小的值。对第2行和第3行重复这一操作,得到下面的表格。

	1	2	3	4
1	2	5	1	$\boxed{0}$
2	2	M	$\boxed{0}$	7
3	$\boxed{0}$	2	5	1
4(D)	0	$\boxed{0}$	0	0

这个成本表具有一个完整指派方案所需要的全部零值,4个方框意味着4个指派构成了一个最优解(正如9.3节中对这个问题的说明),最优解的总成本为$Z=29$(表9.25),也即从第1行、第2行和第3行减下来的值的总和。

然而,最优解并不总是这么容易就能得到,现在我们以Better Products公司在选择方案2时的指派问题为例进行说明,如表9.29所列。

因为这个问题的成本表中除了最后一行,其他每行都有零元素。我们对这个表进行等价变换,首先从每列元素中减去该列的最小元素,结果如下表所列。

	1	2	3	4	5(D)
1a	80	0	30	120	0
1b	80	0	30	120	0
2a	60	60	M	80	0
2b	60	60	M	80	0
3	0	90	0	0	M

现在,每一行或列都含有至少一个零元素,但是由零元素所构成的完整指派方案却不可行,实际上,指派方案的0元素的数量最多为3。因此,为了解决这一问题,必须提出新的办法完成问题求解,而这对于前一个例子实际上是不需要的。

9.4.2 生成额外零元素

新办法就是在不产生负值的情况下增加额外的零元素。现在不是从单一的一行或一列减去一个常数,而是从行和列结合的角度考虑减去或增加一个常数值,以产生新的零值。

该方法首先要在成本表中画一系列的横线或者竖线覆盖所有的零值,而且直线的数量越少

越好，如下表所列。

	1	2	3	4	5(*D*)
1*a*	80	0	30	120	0
1*b*	80	0	30	120	0
2*a*	60	60	*M*	80	0
2*b*	60	60	*M*	80	0
3	0	90	0	0	*M*

可以发现，没被划掉的数中最小的是第 3 列上面两行中的数 30，因而，将表中每个元素中都减掉 30，这两个位置就会变成零。为了保持之前的零值且不产生负值，在被直线覆盖的行和列——行 3、列 2 和列 5(*D*)上再加上 30，这样操作之后即得到下表。

	1	2	3	4	5(*D*)
1*a*	50	0	0	90	0
1*b*	50	0	0	90	0
2*a*	30	60	*M*	50	0
2*b*	30	60	*M*	50	0
3	0	120	0	0	*M*

得到这个成本表的一个简便做法就是从没被划线的位置各减掉 30，然后，在有两条线交叉的位置加上 30。

可以看到，列 1 和列 4 都只有一个零值，且其零值都在同一行（行 3），因此，现在可以在零元素的位置上设定 4 个任务，但仍不能设定 5 个（试一下）。一般而言，覆盖所有零值所需的最少直线数等于零元素所能安排的最大任务数。所以，重复前面的步骤，此时，覆盖所有零元素最少需要 4 条直线（与分配的最大数量一样多），方法见下表。

	1	2	3	4	5(*D*)
1*a*	50	0	0	90	0
1*b*	50	0	0	90	0
2*a*	30	60	*M*	50	0
2*b*	30	60	*M*	50	0
3	0	120	0	0	*M*

没被划掉的数中最小的又是 30，而且出现在行 2*a* 和行 2*b* 的第一个位置。所以，在每个没被划掉的位置减去 30，在被划掉 2 次的位置加上 30（*M* 除外），得到下表。

	1	2	3	4	5(*D*)
1*a*	50	$\boxed{0}$	0	90	30
1*b*	50	0	$\boxed{0}$	90	30
2*a*	$\boxed{0}$	30	*M*	20	0
2*b*	0	30	*M*	20	$\boxed{0}$
3	0	120	0	$\boxed{0}$	*M*

实际上，对于这个表格，有多种在零元素位置上制定指派方案的方法（多个最优解），包括表中用 5 个方框所示的指派方案。表 9.29 所列的总成本为

$$Z=810+840+800+0+840=3290$$

至此，我们已经说明了匈牙利算法的全过程，现总结如下。

9.4.3 匈牙利算法小结

(1) 从每行中所有元素上减掉该行中的最小元素(称为行削减),得打一张新表。

(2) 从新表的每一列中减去该列的最小元素(称为列削减),得到另一张新表。

(3) 检查是否可以得出最优解。可以通过计算覆盖所有零值所需的最少直线数判断,如果直线的数量等于行的数量,则可能得到最优解,这时转步骤(6),否则,转步骤(4)。

(4) 如果直线的数量小于行的数量,按照以下方法进行调整。

① 从未被直线覆盖的数字中挑出最小的数,将所有未被覆盖的数字减掉这个最小的数。

② 在每个直线交叉点的位置加上这个最小的数。

③ 被划掉但是不在划线交叉点上的数保持不变,直接放到下一个表中。

(5) 重复步骤(3)、步骤(4),直到出现一个可行的最优解。

(6) 在零元素的位置上逐个进行指派。从只有一个零元素的行或列开始,因为每一行或每一列都需要恰好进行一次指派,在制定一个指派方案之后,把其所在的行和列都划掉。然后,在没被划掉的行和列中继续进行指派,当然,还要优先考虑只有一个零元素的行和列,这样继续下去,直到所有的行和列都被指派到一个任务、都被划掉为止。

9.5 结　　论

线性规划模型的适用范围很广,可用于解决很多类型的问题。一般单纯形法功能强大,可以解决上述多种问题及其演化版本。不过,其中有些问题模型简单,可根据其特殊结构应用改进算法进行快速求解,改进算法可以大大减少计算机求解大规模问题所需的时间,甚至可以有效解决规模巨大的问题。本章中所研究的两类线性规划问题——运输问题和指派问题,便是很好的例子。这两种问题应用普遍,因此,遇见时能够正确地进行识别,应用最优的算法求解是非常重要的。许多线性规划软件包中都包含这些问题的专用算法。

在10.6节,将重新审视运输问题和指派问题的特殊结构。在那里将会看到,这些问题是最小费用流问题(一种特殊类型的线性规划问题)的一种具体情况。最小费用流问题是指通过网络图来最小化物流的总成本。单纯形法的改进版本——网络单纯形法(见10.7节),可广泛用于解决这类问题,包括它们的特殊情况。

针对特殊类型的线性规划问题(其中许多本书没有提到的问题)的优化算法,大量研究仍在继续。同时,人们还饶有兴趣地运用线性规划解决复杂大系统的运筹问题。不同问题的模型通常会呈现一些特殊的结构,因此正确识别并利用这些特殊结构,是成功应用线性规划解决问题的重要因素。

习　　题

某些习题(或习题部分内容)左侧符号的意义如下。

D:可参考上述示例。

I:建议使用IOR Tutorial中相关的交互程序(可记录操作过程)。

C:用安装任一款可用(或指导老师推荐)软件的计算机求解本问题。

习题序号上的星号表示书后至少给出该题一部分答案。

9.1-1　阅读9.1节中应用花絮的参考文献,参考文献该运筹研究项目进行了全面介绍。

简要叙述运输问题模型在该运筹研究项目中的应用,然后,列出该项研究带来的各中经济与非经济的效益。

9.1-2 Childfair 公司有 3 个工厂生产儿童手推车并运往 4 个分销中心。工厂 1、工厂 2、工厂 3 每月分别生产 12 单位、17 单位、11 单位货物,每个分销中心每月的需求量是 10 单位。每个工厂到各分销中心的距离如下表所列,每单位货物/mile 的运输成本是 100.5 美元。

		距离/mile 分销中心			
		1	2	3	4
工厂	1	800	1300	400	700
	2	1100	1400	600	1000
	3	600	1200	800	900

如何分配每个工厂到每个分销中心的货物量可以使总运输成本最小?

(a) 将该问题看作运输问题并构建参数表。

(b) 画出该问题的网络图。

C(c) 求出最优解。

9.1-3* 汤姆准备今明两天分别购买 3 品脱和 4 品脱的家庭用酒。迪克希望今明两天共出售 5 品脱该酒,并且今天的售价是 3 美元/品脱,明天的售价是 2.7 美元/品脱。哈利打算今明两天总共出售 4 品脱的酒,且今天的售价是 2.9 美元/品脱,明天的售价是 2.8 美元/品脱。

汤姆想知道如何购买才能在满足自身需求的情况下使总成本最小。

(a) 构建该问题的线性规划模型,并创建其初始单纯形表。

(b) 将该问题作为运输问题并构建其参数表。

C(c) 求出最优解。

9.1-4 Versatech 公司决定生产 3 种新产品,5 个分工厂具备这种生产能力。第 1 种产品在这 5 个分工厂的单位制造成本分别是 31 美元、29 美元、32 美元、28 美元和 29 美元,第 2 种产品的单位制造成本分别是 45 美元、41 美元、4 美元、42 美元和亿美元,第 3 种产品在前 3 个分工厂的单位制造成本分别是 38 美元、35 美元和 40 美元,且不能在第 4 个和第 5 个分工厂生产。预计产品 1、产品 2、产品 3 每天的销售额分别为 700 美元、1000 美元、900 美元。5 个工厂每天的产量分别为 400 美元、600 美元、400 美元、600 美元、1000 美元,产品种类不限。假设每个工厂可以在生产能力范围内生产任意数量的某种产品或产品的组合。

管理者想知道如何指派各个工厂生产产品能够使总的生产成本最小。

(a) 将该问题看作运输问题并创建其参数表。

C(b) 求出最优解。

C9.1-5 重新考虑 9.1 节中 P&T 公司的问题。我们了解到,在运输之前,表 9.2 中每单位产品的运输费用可能会发生细微的变化。

用 Solver 生成该问题的灵敏度报告,利用这个报告确定每单位成本允许的变动范围,可以从这些变动范围中得到哪些信息?

9.1-6 Onenote 公司在 3 个工厂为 4 个客户生产某种产品。3 个工厂在下个周期分别可以生产 60 单位、80 单位、40 单位产品。公司已经分别与客户 1、客户 2、客户 3 签订了 40 单位、60 单位、20 单位的销售合同,客户 3 和客户 4 愿意尽可能多地购买剩余的产品。将每单位产品从

工厂 i 运送给客户 J 的净收益如下表所列。

		顾客			
		1	2	3	4
工厂	1	800	700	500	200
	2	500	200	100	300
	3	600	400	300	500

管理者想知道应分别出售给客户 3 和客户 4 多少产品,以及如何配送可以获得最多的利润。

(a) 将该问题看作运输问题且目标函数是总收益最大化,并创建单位收益参数表。

(b) 将该问题看作运输问题且目标函数是总成本最小化,并将(a)中生成的单位收益参数表转换为单位成本参数表。

(c) 在 Excel 数据表上展示(a)中产生数据表。

C(d) 用(c)中的信息和 Excel Solver 求出该问题的最优解。

C(e) 针对(b)生产的模型重复(c)和(d)两步操作,比较两种情况下最优解的异同。

9.1-7 MOVE-IT 公司有两个工厂生产升降机卡车并运往 3 个分销中心。两个工厂生产该产品的成本相同,每部卡车被运往不同分销中心的成本如下表所示。

		分销中心		
		1	2	3
车间	A	800	700	400
	B	600	800	500

公司每周能够生产 60 部升降机卡车。每个工厂每周能够生产卡车的数目不大于 50 部,因而,可以在上述范围内调整两个工厂的生产数目来减少运输成本。每个分销中心每周的需求为 20 部卡车。

管理者的目标是确定如何指派每个工厂的生产数量以及如何制定总的运输方案可以使总的运输成本最小。

(a) 将该问题看做运输问题并创建相应的参数表格。

(b) 用 Excel 数据表格展示该问题。

C(c) 用 Solver 求出最优解。

9.1-8 假设每个分销中心每周可获得的卡车数量为 10~30 部,而各个分销中心获得的卡车总数仍为 60 部,重新求习题 9.1-7 的最优解。

9.1-9 为满足未来 3 个月的销售合同需要,MJK 制造公司要生产足够数量的两种产品。这两种产品都在同一种生产设备上生产,且两种产品需要的单位生产时间相同。由于每个月可用的生产和存储设备不同,所以每个月的生产能力、单位生产成本和单位存储成本也不相同。因此,非常有必要在某个月多生产一种或两种产品并将其存储下来备用。

对未来 3 个月,下表第 2 列给出了各月两种产品能在正常时间(RT)和加班时间(O)生产的总数量。对其中任一种产品,接下来的各列分别给出:①销售合同中的需求量;②在正常时间内生产一单位产品的成本(单位:千美元);③在加班时间内生产一单位产品的成本(单位:千美元);④单位产品存储一个月所需成本。在每种情况下,两种产品的数量用“/”隔开,第一种产品

的数量在左边，第二种产品的数量在右边。

月份	最大产品总量		产品 1/产品 2			
	正常时间	加班时间	销量	单位产品生产成本/千美元		单位产品的存储成本/千美元
				正常时间	加班时间	
1	10	3	5/3	15/16	18/20	1/2
2	8	2	3/5	17/15	20/18	2/1
3	10	3	4/4	19/17	22/22	

生产经理想设计一个计划表，列出在 3 个月中，每个月在正常时间和加班时间（若正常时间被用完）生产两种产品的数量。目标是在满足每个月销售合同的前提下生产和存储的总成本最小。在该问题中没有初始库存，3 个月后也不允许有库存。

(a) 将该问题看作运输问题，并创建相应的参数表。

C(b) 求出最优解。

9.2-1　考虑参数表格如下表所列的运输问题。

		分销中心			供给量
		1	2	3	
产地	1	15	9	13	7
	2	11	M	17	5
	3	9	11	9	3
需求量		7	3	5	

(a) 用 Vogel 近似法手工计算（不要用 IOR Tutorial 中的交互程序）选择初始基可行解的第一个基变量。

(b) 用 Russell 近似法手工计算选择初始基可行解的第一个初始变量。

(c) 用西北角法手工创建一个完整的初始基可行解。

D,I9.2-2*　考虑下列运输问题，其参数表如下。

		销售地					供给量
		1	2	3	4	5	
产地	1	2	4	6	5	7	4
	2	7	6	3	M	4	6
	3	8	7	5	2	5	6
	4	0	0	0	0	0	4
需求量		4	4	2	5	5	

用下列方法求一个初始的基可行解，比较这些解的目标函数的值。

(a) 西北角法。

(b) Vogel 近似法。

(c) Russell 近似法。

D,I9.2-3　考虑下列运输问题，其参数表格如下。

		销售地						供给量
		1	2	3	4	5	6	
产地	1	13	10	22	29	18	0	5
	2	14	13	16	21	M	0	6
	3	3	0	M	11	6	0	7
	4	18	9	19	23	11	0	4
	5	30	24	34	36	28	0	3
需求量		3	5	4	5	6	2	

用下列准则求取一个初始基可行解,比较这些解的目标函数的值。

(a) 西北角法。

(b) Vogel 近似法。

(c) Russell 近似法。

9.2-4 考虑下列运输问题,其参数表格如下。

		销售地				供给量
		1	2	3	4	
产地	1	7	4	1	4	1
	2	4	6	7	2	1
	3	8	5	4	6	1
	4	6	7	6	3	1
需求量		1	1	1	1	

(a) 需要注意的是,这个问题有 3 个明显的特征:①产地的数量等于销地的数量;②每个供应量均为 1;③每个需求量均为 1。具备这 3 个特征的运输问题称为指派问题(如 9.3 节所述)。用整数解特性解释为什么这种类型的运输问题可理解为从产地到销地一一对应的指派关系。

(b) 每个基础可行解中有多少个基变量? 有多少个退化的基变量?

D,I(c) 用西北角法求出初始基可行解。

I(d) 应用运输单纯形法初始化的一般程序创建一个初始基可行解,但不要用 9.2 节针对步骤(1)提供的 3 种方法,而要用下面给出的成本最小化准则选择下一个基变量(在 OR Courseware 相对应的交互程序中,选择“西北角法则”,这样就可以运用任何准则了)。成本最小化规则:对正在考虑的所有行和列,选择拥有最小单位成本 c_{ij} 的变量 x_{ij} 引作为下一个基变量。

D,I(e) 从(c)获得的初始基可行解开始,应用运输单纯形法求最优解。

9.2-5 考虑 9.1 节开头部分给出的运输问题的例子(P&T 公司问题),利用运输单纯形法的最优性检验方法验证所得的解是最优的。

9.2-6 考虑以下运输问题,其参数表格如下。

		销售地					供给量
		1	2	3	4	5	
产地	1	8	6	3	7	5	20
	2	5	M	8	4	7	30
	3	6	3	9	6	8	30
	4(D)	0	0	0	0	0	20
需求量	25	25	20	10	20		

在运输单纯形法经过几次迭代后，会获得一个初始基可行解，其基变量如下：$x_{13}=20, x_{21}=25, x_{24}=5, x_{32}=25, x_{34}=5, x_{42}=0, x_{43}=0, x_{45}=20$。通过手工计算继续两次迭代，之后确定解是否最优，如果是，给出原因。

D,I9.2-7* 考虑以下运输问题，其参数表格如下。

		销售地				供给量
		1	2	3	4	
产地	1	3	7	6	4	5
	2	2	4	3	2	2
	3	4	3	8	5	3
需求量		3	3	2	2	

用下面的各个规则求取一个初始基可行解。每种情况下，从得到的初始基可行解开始，利用运输单纯形法求出一个最优解，比较应用运输单纯形法迭代的最终次数。

(a) 西北角法。

(b) Vogel 近似法。

(c) Russell 近似法。

D,I9.2-8 Cost-Less 公司从 4 个工厂向 4 个零售企业提供产品，从各工厂向各零售企业运输的成本如下表所列。

		零售企业单位销售费用/美元			
		1	2	3	4
车间	1	500	600	400	200
	2	200	900	100	300
	3	300	400	200	100
	4	200	100	300	200

工厂 1、工厂 2、工厂 3 和工厂 4 每月分别生产产品 10 单位、20 单位、20 单位和 10 单位，零售企业 1、企业 2、企业 3 和企业 4 每月分别需求产品 20 单位、10 单位、10 单位和 20 单位。

分销经理 Randy Smith 希望确定每个月该如何向各个零售企业输送货物才能在满足需求的条件下使总运输费用最小。

(a) 将该问题看作运输问题，创建相应的参数表格。

(b) 用西北角法得出一个初始基可行解。

(c) 从(b)所得的初始基可行解出发，应用运输单纯形法求该问题的最优解。

9.2-9 Energetic 公司需要为一个新建筑制定能量系统计划。

该建筑所需的能量分为 3 种：电力、热水和供暖。3 种能量每天的需求如下表所列(测量的单位相同)。

电力	20 单位
热水	10 单位
供暖	30 单位

3 种可能满足这些需求的能源有电力、天然气和可安装在屋顶的太阳能供热系统。屋顶的大小决定了太阳能供热系统所能提供的最大能量为 30 单位，而其他两种能源可提供的能量没有

限制。电力需求只能通过购电来满足(每单位50美元),其他两种能量需求可以通过任一能源或能源组合获得,其单位成本见下表。

	电　力	天 然 气	太 阳 能
热水	90美元	60美元	30美元
供暖	80美元	50美元	40美元

目标是满足所有能量需求的总成本最小。

(a) 将该问题看作运输问题,创建相应的参数表格。

D,I(b) 用西北角法求该问题的一个初始基可行解。

D,I(c) 从(b)得到的初始基可行解开始,利用运输单纯形法求最优解。

D,I(d) 利用Vogel法求该问题的初始基可行解。

D,I(e) 从(d)得到的初始基可行解开始,利用运输单纯形法求取最优解。

I(f) 利用Russell近似法求该问题的初始基可行解。

D,I(g) 从(f)得到的初始基可行解开始,利用运输单纯形法求最优解。比较(c)和(e)利用运输单纯形法求取最优解需要的迭代次数。

D,I9.2-10* 利用运输单纯形法求解表9.9所描述的北部航空公司产品计划问题。

D,I9.2-11* 重新考虑习题9.1-2。

(a) 利用西北角法求取该问题的初始基可行解。

(b) 从(a)所得到的初始基可行解出发,应用运输单纯形法求取一个最优解。

D,I9.2-12 重新考虑习题9.1-3b,利用西北角法和运输单纯形法求取该问题的一个最优解。

D,I9.2-13 重新考虑习题9.1-4,利用西北角法和运输单纯形法求取该问题的一个最优解。

D,I9.2-14 重新考虑习题9.1-6,利用Russell近似法和运输单纯形法求取该习题的一个最优解。

9.2-15 重新考虑习题9.1-7a这一运输问题。

D,I(a) 用9.2节介绍的每种规则求取一个初始基可行解,记录每种求解方法所需的时间,比较各求解时间和目标函数的值。

C(b) 求取该问题的一个最优解。对(a)中每种方法求得的初始基可行解,计算每个解的目标函数值超出最优解目标函数值的百分比。

D,I(c) 对(a)得出的3个初始基可行解,应用运输单纯形法求取(并验证)一个最优解。记录每种情况下花费的时间,比较所需时间和达到最优解需要的迭代次数。

9.2-16 按照习题9.2-5中的要求求解习题9.1-7a。

9.2-17 考虑下列运输问题,其参数表格如下。

		销 售 地		供 给 量
		1	2	
产地	1	8	5	4
	2	6	4	2
需求量	3	3		

(a) 从9.2节中任选一种方法求解该问题的初始基可行解,并用运输单纯形法手工求解该问题(留意一下计算所需的时间)。

(b) 重新将该问题定义为一个一般的线性规划问题,并且用单纯形法手工计算该问题,留意一下这种方法需要的时间并与(a)中的时间比较。

9.2-18 考虑9.1节给出的北部航空公司生产计划问题(表9.7)。将该问题看作线性规划问题,并设决定变量 x_j=第 j 月要生产的喷气发动机的数量($j=1,2,3,4$)。创建该问题的初始单纯形表,比较该表的规模(行数和列数)和看作运输问题求解时相应表(表9.9)的规模。

9.2-19 考虑运输问题(表9.6)的一般线性规划模型。验证9.2节中给出的 $m+n$ 个约束函数(m 个供应约束,n 个需求约束)中有一个是多余的,也就是说,其中任意一约束都可以通过其他 $m+n-1$ 个约束求得。

9.2-20 当处理供应和需求变量中有整数变量的运输问题时,解释为什么运输单纯形法能够确保求取的基可行解的基变量中必有整数值,并首先解释在初始步骤中应用创建初始基可行解的一般程序时(无论选择下一变量用何种方法),为何也会发生上述情况。然后,假设当前的一个基可行解是整数,试解释迭代的第3步为什么必须获得一个新的整数基可行解。最后,解释创建任一初始的基可行解时如何进行初始化操作,才使得运输单纯形法实际上证明了9.1节中的整数解性质。

9.2-21 作为承包商,Susan Meyer需要向3个建筑工地运送沙砾。她可以在城市北部的沙砾矿买到18t,在城市南部的沙砾矿买到14t。建筑工地1、工地2、工地3的沙砾需求量分别为10t、5t、10t。在每个沙砾矿购买每吨沙砾的价格和运送费用如下表所列。

地点	每个工地运送成本/美元			每吨价格/美元
	1	2	3	
北部	100	190	160	300
南部	180	110	140	420

Susan想确定如何从各个矿向各个工地运送沙砾可以使总的购买和运送成本最小。

(a) 构建一个该问题的线性规划模型。用大M法创建初始单纯形表以应用单纯形法(但不用实际计算出来)。

(b) 将该问题定义为运输问题并创建其相应的参数表格。比较该表(和相应的运输单纯形表)的规模与(a)中单纯形表的规模。

D(c) Susan Meyer注意到,她可以直接从北部矿井向工地1和工地2提供沙砾,从南部矿井向工地3提供沙砾。用运输单纯形法的最优性检验(而不是迭代)检验相应的基可行解是否为最优解。

D.I(d) 应用西北角法和运输单纯形法求解(b)定义的问题。

(e) 一般情况下,如(b)中创建的参数表所列,c_{ij}表示从产地 i 到销地 j 运输的单位成本。对(d)中求得的最优解而言,假设每个基变量对应的 c_{ij} 值是固定的,而每个非基变量对应的 c_{ij} 值可能会经过讨价还价而改变,因为工地经理可能会对承包商的服务有所挑剔。用灵敏度分析确定在保持解最优的情况下非基变量对应的 c_{ij} 值的变化范围,并解释为什么这一信息对于承包商有重要意义。

C9.2-22 考虑9.1节和9.2节中所示的Metro Water District问题的运输问题模型和最优解(表9.12和表9.23)。

参数表中给定的数字是估计值,可能不精确,所以管理者打算做一些"如果-怎样"形式的分

析。利用 Excel Solver 生成灵敏度分析报告,然后利用这个报告解释下列问题(在每种情况下,假设只进行一种改变,模型中的其他部分不变)。

(a) 如果向 San Go 运送每立方英尺 Calorie River 水的单位成本是 200 美元而不是 230 美元,表 9.23 中的最优解还能保持最优吗?

(b) 如果向 Los Devils 运送每立方英尺 Sacron Rive 水的单位成本是 160 美元而不是 130 美元,这个解还是最优的吗?

(c) 如果在(a)和(b)中相应的成本同时从最初的 215 美元变为 145 美元,这个解还是最优的吗?

(d) 假设 Sacron River 的供应和 Hollyglass 的需求同时降低同样的数量,如 50 万英尺^3,评估这一变化的影子价格仍然有效吗?

9.2-23 不用生成灵敏度报告,应用 7.1 节和 7.2 节中的灵敏度分析程序对习题 9.2-22 中的 4 个部分进行灵敏度分析。

9.3-1 考虑下列指派问题,其成本表格如下。

		任务			
		1	2	3	4
指派对象	*A*	8	6	5	7
	B	6	5	3	4
	C	7	8	4	6
	D	6	7	5	6

(a) 画出该指派问题的网络图示。

(b) 将该问题看作运输问题并创建相应的参数表格。

(c) 在 Excel 上展示该问题的参数表格。

C(d) 用 Excel Solver 求取一个最优解。

9.3-2 用 4 艘货船从一个港口向其他 4 个港口(记为港口 1、港口 2、港口 3 和港口 4)运送货物,任意一艘船都可以参与这些运送任务。不过由于船只和货物的不同,不同船只与港口组合的装载成本、运输成本和卸载成本也有所不同,如下表所示。

		港口/美元			
		1	2	3	4
船只	1	500	400	600	700
	2	600	600	700	500
	3	700	500	700	600
	4	500	400	600	600

目标是将 4 艘货船指派给 4 个不同的港口,总运输成本最小。

(a) 描述为什么这个问题符合指派问题的一般特征。

C(b) 求取最优解。

(c) 重新将该问题定义为一个等价的运输问题并创建相应的参数表。

D,I(d) 用西北角法求取(c)所定义问题的一个初始基可行解。

D,I(e) 从(d)所得的初始基可行解出发,应用运输单纯形法求取原指派问题的最优指派方案。

D,I(f) 除了(e)所得的最优解外,有没有其他最优解？如果有,用运输单纯形法求出。

9.3-3　重新考虑习题 9.1-4。假设预测产品 1、产品 2、产品 3 下一周期的销售分别降至 280 单位、400 单位、350 单位,而且每个车间都有能力生产其中任一种产品。按管理规定,也就是说,其中 3 个车间负责生产其中一种产品,而另外两个车间不用生产产品。目标是指派不同的车间生产 3 种产品以使生产的总成本最小。

(a) 按照指派问题创建相应的成本表。

C(b) 求取最优解。

(c) 按照运输问题创建相应的参数表格。

D,I(d) 应用 Vogel 法和运输单纯形法求解(c)定义的问题。

9.3-4* 游泳教练准备按年龄的不同,分组培训一批 200m 混合泳接力赛的运动员参加青少年奥林匹克运动会。有运动员擅长多个游泳项目,而教练需要找到最合适的 4 个人选。5 位运动员各个项目的最短时间如下表所列(单位:s)。

	运动员				
项目	Carl	Chris	David	Tony	Ken
仰泳	37.7	32.9	33.8	37.0	35.4
蛙泳	43.4	33.1	42.2	34.7	41.8
蝶泳	33.3	28.5	38.9	30.4	33.6
自由泳	29.2	26.4	29.6	28.5	31.1

目标是选出最合适的 4 位运动员参加 4 个项目,并且使所需要的总时间最短。

(a) 用公式表达该指派问题。

C(b) 求取最优解。

9.3-5　考虑表 9.29 所列的 Better 产品公司采用政策 2 时的指派问题。

(a) 重新按照产地数为 3、销地数为 5 的运输问题创建相应的参数表。

(b) 将 9.3 节中给出的指派问题的最优解转化为(a)中运输问题的一个完整基可行解(包含退化的基变量)。特别要应用 9.2 节中给出的“创建初始基可行解的一般程序”,但每次迭代时步骤(1)中不要用其介绍的 3 种准则,而是根据最优解中下一个车间与产品的指派选择下一个基变量。当只剩下一行或一列时,应用步骤(4)选择其余的基变量。

(c) 对(b)中完整的基可行解只应用运输单纯形法的最优性检验部分,验证 9.3 节中给出的指派问题的最优解实际上是最优的。

(d) 重新按照产地数为 3、销地数为 5 的运输问题创建相应的参数表,比较此运输问题与(a)中定义的运输问题的异同。

(e) 对(d)定义的问题重新执行(b)的计算过程,比较所得基可行解与(b)的基可行解的异同。

D,I9.3-6　应用 Vogel 法和运输单纯形法求解表 9.26(b)所列的 Job Shop 公司的指派问题(如 9.3 节中所得的最优解是 $x_{14}=1, x_{23}=1, x_{31}=1, x_{42}=1$,其余所有的 $x_{ij}=0$)。

9.3-7　重新考虑习题 9.1-7。假设分销中心 1、2、3 分别每周必须获得 10 单位、20 单位、30 单位的产品。为了方便管理,管理者要求每个分销中心只能从一个车间接收产品。指派问题的目标是最小化总的运输费用。

(a) 按照指派问题创建相应的成本表,包括定义相应的指派对象和任务。

C(b) 求取一个最优可行解。

(c) 重新考虑该指派问题看做一个等价的运输问题(有 4 个产地),并创建相应的参数表。

C(d) 求解(c)中定义的问题。

(e) 重新考虑(c)中只有 2 个产地时的情况并创建相应的参数表。

C(f) 求解解决(e)中定义的问题。

9.3-8 考虑下列指派问题,其成本表如下。

		工作		
		1	2	3
人	A	5	7	4
	B	3	6	5
	C	2	3	4

最优解是 $A-3$、$B-1$、$C-2$ 且 $Z=10$。

C(a) 用计算机验证该最优解。

(b) 重新将这个问题看作等价的运输问题并创建相应的参数表。

C(c) 为(b)中定义的运输问题求取 1 个最优解。

(d) 考虑为什么(c)所得的最优基可行解中有一些基变量(退化的)不在指派问题的最优解中。

(e) 现在考虑一下(c)所得的最优基可行解中的非基变量,应用一般线性规划中的灵敏度分析方法分析每个非基变量 x_{ij}的成本 c_{ij},从而确定最优情况下 c_{ij}的变化范围。

9.3-9 考虑 9.3 节中给出的一般指派问题的线性规划模型,创建模型的约束系数表。比较该表与一般运输问题所对应参数的表(表 9.6),解释从哪些方面看一般的指派问题比一般的运输问题的结构更特殊。

I9.4-1 重新考虑习题 9.3-2 中所示的指派问题,应用匈牙利算法求解该问题(读者可运用 IOR Tutorial 中对应的交互程序)。

I9.4-2 重新考虑习题 9.3-4,将其看作如书后答案中所示的指派问题,应用匈牙利算法手动求解该问题(读者可运用 IOR Tutorial 中对应的交互程序)。

I9.4-3 重新考虑 Better 公司问题采用第二项政策时的指派问题,如表 9.29 所列,假设第一个车间生产第一种产品的成本从 820 美元降低到 720 美元,应用匈牙利算法手动求解该问题(读者可运用 IOR Tutorial 中对应的交互程序)。

I9.4-4 应用匈牙利算法手动求解下列指派问题(可运用 IOR Tutorial 中对应的交互程序),其成本表如下表所列。

		工作		
		1	2	3
人	1	M	8	7
	2	7	6	4
	3(D)	0	0	0

I9.4-5 应用匈牙利算法手动求解下列指派问题(可运用 IOR Tutorial 中对应的交互程序),其成本表如下表所列。

		工作			
		1	2	3	4
指派	A	4	1	0	1
	B	1	3	4	0
	C	3	2	1	3
	D	2	2	3	0

I9.4-6 应用匈牙利算法手动求解下列指派问题(可运用 IOR Tutorial 中对应的交互程序),其成本表如下表所列。

		工作			
		1	2	3	4
指派	A	4	6	5	5
	B	7	4	5	6
	C	4	7	6	4
	D	5	3	4	7

案 例

案例 9.1 木材运输问题

Alabama Atlantic 是一家木材公司,拥有 3 个木材产地和 5 个销售市场。产地 1、产地 2、产地 3 每年的产量分别为 1500 万单位、2000 万单位、1500 万单位,5 个市场每年能卖出的木材量分别为 1100 万单位、1200 万单位、900 万单位、1000 万个单位、800 万个单位。

过去,该公司是用火车来运送木材的。随着火车运费的增加,公司正在考虑用船来运输。采用这种方式需要公司在船只使用上进行一些投资,除了投资成本以外,在不同线路上火车运输和船船运输每百万单位的费用如下表所列。

产地	用火车运载木材的单位费用/千美元					用船只运载木材的单位费用/千美元				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	61	72	45	55	66	31	38	24	—	35
2	69	78	60	49	56	36	43	28	24	31
3	59	66	63	61	47	—	33	36	32	26

公司若用船运输,每运输百万单位木材需要在每条路线上对船只的投资如下。

产地	船只投资费用/千美元				
	1	2	3	4	5
1	275	303	238	—	285
2	293	318	270	250	265
3	—	283	275	268	240

考虑到船的使用寿命以及资金的时间价值,这些投资转换为每年的使用成本是表中的 1/10。该问题的目标是确定如何制定运输计划可以使总费用最少(包含运输费用)。

假设你是运输团队的经理,现在由你来决定运输计划,有下列 3 个选项。

选项1,继续仅用火车运输。

选项2,仅用船只运输(只能用火车的地方除外)。

选项3,或者用船只运输,或者用火车运输,由哪种方式运费少来决定。

计算每个选项的结果并进行比较。

最后,由于上述结果是以目前的运输和投资费用为基础,所以目前采用哪个选项还应考虑这些费用在将来会发生哪些变化。针对每个选项请在确保其为最合理选项的前提下,给出一个未来费用的变化范围(注意:为方便使用,本书的网站中提供了本案例的数据文件)。

案例9.2 Texago公司问题研究

该公司为对新炼油厂进行选址,解决了许多运输问题。目前,公司管理层需要决定,炼油厂的规模是否需要在原计划的基础上有所扩大。这就需要对另外的运输问题进行建模求解,分析的一个重点是将两个运输问题并入一个线性规划模型,同时考虑原油从油田到炼油厂的运输和成品油从炼油厂到分销中心的运输。需要针对得到的结果和推荐方案,提交一个管理备忘录进行说明。

案例9.3 项目选择

本案例主要是关于指派问题在一家制药厂的系列应用,决策中涉及到为治疗5种特定类型的疾病而进行的5个新药研发项目。有5个高级科学家可作为这些项目的项目主任,问题是如何建立项目和项目主任间的一一对应关系,需要考虑多种可能的方案。