Estructuras Discretas 2016-2
Tarea 8

Profesora: Laura Freidberg Gojman
Ayudante: José Ricardo Rodríguez Abreu

Fecha de Entrega: 25 de Octubre del 2016

1. Inducción en los números naturales.

1. Usuando inducción, demuestra que:

a) $1 + 2^n \leq 3^n$
b) $5 + 10 + 15 + ... + 5n = \frac{5n(n+1)}{2}$
c) Si $n \geq 2$ y k son números naturales, entonces $(n-1)$ divide a $(n^k - 1)$.

2. Prueba que 2 divide a $n^2 + n$ siempre que n sea un natural no cero.

3. Prueba que si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y $B_1, B_2, \ldots, B_n$ son conjuntos tales que $A_j \subseteq B_j$ entonces

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_j$$

2. Definiciones recursivas e Inducción estructural

1. Encuentra f(2), f(4) y f(5) si f se define recursivamente por:

$f(0) = -1$

$f(1) = 2$

y para n = 2,3,...

a) $f(n+1) = f(n) + 3f(n-1)$
b) $f(n+1) = (f(n))^2 * f(n-1)$

2. Define recursivamente las siguientes funciones:

a) ctes(t) regresa el conjunto de constantes que aparecen en el término t.
   ctes(f (a, c, g(x, y, b))) = {a, c, b}
b) fv(Q) regresa el conjunto de variables libres que aparecen en la fórmula Q.
   $fv(\forall xP\ (x, y) \bigwedge \exists wQ(z, w)) = \{y, z\}$

3. Queremos representar árboles binarios cuyos únicos nodos etiquetados (con elementos del conjunto A) son las hojas. Para ello utilizaremos la siguiente definición recursiva de ´arboles:

1) Si a $\in$ A, entonces hoja(a) es un ´arbol.
2) Si t1, t2 son ´arboles, entonces mkt(t1, t2) es un ´arbol.
3) Son todas las reglas.

Observa que en esta definición no existe el árbol vacío.

a) Define las funciones recursivas “nh”,”nni” que calculan el número de hojas y el número de nodos internos (los que no son hojas) en un árbol respectivamente.

b) Enuncia el principio de inducción estructural para estos árboles y utilízalo para mostrar que:

$$\text{nh(t)} = \text{nni(t)} + 1$$