第0卷第0期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.0, No.0
201x年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jan., 201x

文章编号: 0583-1431(20xx)0x-0xxx-0x **文献标识码: A**

栅格覆盖的计数表示及超矩阵的行列式

惠慧

南京大学 南京 210093
E-mail: huih1984@163.com

摘 要 在文章[1] 中，$Kasteleyn$($Fisher$和$Temperley$ 同时独立)开创性研究了1×2长方块在栅格上的覆盖数计算问题。那么如果是1×3长方块或者1×4长方块甚至更多，结果又是怎样的呢？文章不打算讨论1×3 长方块，而直接讨论1×4 长方块的情况，因为在4的情况下，计数表达方法存在一个显而易见的推广，从而让问题的研究更集中在延拓后的性质探讨和计算上，而在3 的情形却没有，3的情形相对更为困难。更进一步的看，$1\times(2n)$的长方块的覆盖问题都可以得到延拓，出于聚焦计算问题的需要，这里只讨论1×4的情形。文章对内维数为2 的情形$det(A)=pfaffian^2(A)$ 的结果做了推广，得出本文的一个关键结果即在内维数为4 的情况下，延拓矩阵、行列式以及$pfaffian$ 定义，得到$det(A)=pfaffian^4(A)$。从形式上看，这个结果相当完美！但是计算问题却变的非常的不显然。本文的后半部分则重点讨论超矩阵的一些性质。

关键词 双重维数矩阵; 内维数; 多米诺覆盖; 外积; $pfaffian$;

lattice tilings and hyperdeterminant

Hui HUI

Nanjing University, Nanjing 100190*, P. R. China*
E-mail: *huih19841@163.com*

Abstract The article [1] transfer dimer tiling to determinant of matrix ingenious, finally, get formula of it. so, what about of three,four?this is intreseting.

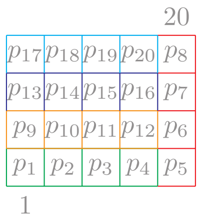
Keywords double dimension matrix; inner dimension; domino tiling; wedge product; pfaffian; trimer; dimer; tertramer

1 引言

关于$dimer$覆盖数的计算问题，起源于[1]的文章，文章给出了$dimer$在$m\times n$的块状上和环面上的覆盖数的计算公式。但是用$tetramer$覆盖的公式却没有研究结果,用$1\times n$覆盖的文章有[3]，但是文章只讨论了被覆盖为$9\times n$的计算公式，本文关注一般性的计算问题。

收稿日期: 200x-xx-xx; 接受日期: 200x-xx-xx
基金项目:

2 表示方法



采用$Kasteleyn$[1]相同的表示方法，$C = (p_1, p_2, p_3, p_4)(p_5, p_6, p_7, p_8)...(p_{N-3}, p_{N-2}, p_{N-1}, p_N)$. 其中$(p_j, p_{j+1}, p_{j+2}, p_{j+3})$为一个长方块的四个连续坐标。

$$p_1 < p_2 < p_3 < p_4, p_5 < p_6 < p_7 < p_8, ..., p_{N-3} < p_{N-2} < p_{N-1} < p_N \tag{2.1}$$

$$p_1 < p_5 < ... < p_{N-3} \tag{2.2}$$

$$a_{(i,j;i+1,j;i+2,j;i+3,j)} = 1, 1 \leq i \leq m-3, 1 \leq j \leq n \tag{2.3}$$

$$a_{(i,j;i,j+1;i,j+2;i,j+3)} = 1, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-3 \tag{2.4}$$

$$a_{(i,j;i',j';i'',j'';i''',j''')} = 0, other \tag{2.5}$$

$$pfaffian(A_4) = \sum_{\sigma = p_1 p_2 \ldots p_N satisfy(1)(2)} sgn\sigma a_{p_1 p_2 p_3 p_4} a_{p_5 p_6 p_7 p_8} \ldots a_{p_{N-3} p_{N-2} p_{N-1} p_N} \tag{2.6}$$

对应的矩阵记为$A_4 = (a_{ijkl})$,满足$a_{jikl} = -a_{ijkl}$，i, j, k, l的任意一个序关系都满足逆序数正负号。这样得到的表达式2.6，仍然称为$pfaffian$。

3 $pfaffian \to det$的转换

定义 3.1 矩阵的内维数和外维数:

$\left[a_{i_1 i_2 \ldots i_n}\right]_m$为$n$个下指标构成的多维矩阵，每个指标取值为$1, 2, \cdots, m$，则$n$称为内维数，$m$称为外维数。此文只考虑$n$为4的情形。

定义 3.2 矩阵行列式:

将$[a_{ijkl}]$表示成矩阵的矩阵形式，内部子矩阵的指标为i, j，外部矩阵指标为k, l，行列式det满足如下性质：

I 系数性质，行列式乘以系数k，与在某个指标中的固定取值上乘以k所得矩阵的行列式相等。如取$l=1$如下：

$$s*det\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{1111}&a_{2111}&\cdots&a_{n111}\\a_{1211}&a_{2211}&\cdots&a_{n211}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1n11}&a_{2n11}&\cdots&a_{nn11}\end{bmatrix}&\cdots&\begin{bmatrix}a_{11n1}&a_{21n1}&\cdots&a_{n1n1}\\a_{12n1}&a_{22n1}&\cdots&a_{n2n1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1nn1}&a_{2nn1}&\cdots&a_{nnn1}\end{bmatrix}\\\vdots&\vdots&\vdots\\\begin{bmatrix}a_{111n}&a_{211n}&\cdots&a_{n11n}\\a_{121n}&a_{221n}&\cdots&a_{n21n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1n1n}&a_{2n1n}&\cdots&a_{nn1n}\end{bmatrix}&\cdots&\begin{bmatrix}a_{11nn}&a_{21nn}&\cdots&a_{n1nn}\\a_{12nn}&a_{22nn}&\cdots&a_{n2nn}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1nnn}&a_{2nnn}&\cdots&a_{nnnn}\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=det\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}sa_{1111}&sa_{2111}&\cdots&sa_{n111}\\sa_{1211}&sa_{2211}&\cdots&sa_{n211}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\sa_{1n11}&sa_{2n11}&\cdots&sa_{nn11}\end{bmatrix}&\cdots&\begin{bmatrix}sa_{11n1}&sa_{21n1}&\cdots&sa_{n1n1}\\sa_{12n1}&sa_{22n1}&\cdots&sa_{n2n1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\sa_{1nn1}&sa_{2nn1}&\cdots&sa_{nnn1}\end{bmatrix}\\\vdots&\vdots&\vdots\\\begin{bmatrix}a_{111n}&a_{211n}&\cdots&a_{n11n}\\a_{121n}&a_{221n}&\cdots&a_{n21n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1n1n}&a_{2n1n}&\cdots&a_{nn1n}\end{bmatrix}&\cdots&\begin{bmatrix}a_{11nn}&a_{21nn}&\cdots&a_{n1nn}\\a_{12nn}&a_{22nn}&\cdots&a_{n2nn}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1nnn}&a_{2nnn}&\cdots&a_{nnnn}\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

II 符号性质，某个指标下的任意两列交换位置，行列式正负号互换，例如下：

$$det\begin{bmatrix}\vdots&\vdots&\vdots\\\begin{bmatrix}a_{111\xi}&a_{211\xi}&\cdots&a_{n11\xi}\\a_{121\xi}&a_{221\xi}&\cdots&a_{n21\xi}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1n1\xi}&a_{2n1\xi}&\cdots&a_{nn1\xi}\end{bmatrix}&\cdots&\begin{bmatrix}a_{11n\xi}&a_{21n\xi}&\cdots&a_{n1n\xi}\\a_{12n\xi}&a_{22n\xi}&\cdots&a_{n2n\xi}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1nn\xi}&a_{2nn\xi}&\cdots&a_{nnn\xi}\end{bmatrix}\\\vdots&\vdots&\vdots\\\begin{bmatrix}a_{111\eta}&a_{211\eta}&\cdots&a_{n11\eta}\\a_{121\eta}&a_{221\eta}&\cdots&a_{n21\eta}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1n1\eta}&a_{2n1\eta}&\cdots&a_{nn1\eta}\end{bmatrix}&\cdots&\begin{bmatrix}a_{11n\eta}&a_{21n\eta}&\cdots&a_{n1n\eta}\\a_{12n\eta}&a_{22n\eta}&\cdots&a_{n2n\eta}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1nn\eta}&a_{2nn\eta}&\cdots&a_{nnn\eta}\end{bmatrix}\\\vdots&\vdots&\vdots\end{bmatrix}$$

$$
= -det\begin{bmatrix}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \begin{bmatrix} a_{111\eta} & a_{211\eta} & \cdots & a_{n11\eta} \\ a_{121\eta} & a_{221\eta} & \cdots & a_{n21\eta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n1\eta} & a_{2n1\eta} & \cdots & a_{nn1\eta} \end{bmatrix} & & \cdots & & \begin{bmatrix} a_{11n\eta} & a_{21n\eta} & \cdots & a_{n1n\eta} \\ a_{12n\eta} & a_{22n\eta} & \cdots & a_{n2n\eta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1nn\eta} & a_{2nn\eta} & \cdots & a_{nnn\eta} \end{bmatrix} & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \begin{bmatrix} a_{111\xi} & a_{211\xi} & \cdots & a_{n11\xi} \\ a_{121\xi} & a_{221\xi} & \cdots & a_{n21\xi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n1\xi} & a_{2n1\xi} & \cdots & a_{nn1\xi} \end{bmatrix} & & \cdots & & \begin{bmatrix} a_{11n\xi} & a_{21n\xi} & \cdots & a_{n1n\xi} \\ a_{12n\xi} & a_{22n\xi} & \cdots & a_{n2n\xi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1nn\xi} & a_{2nn\xi} & \cdots & a_{nnn\xi} \end{bmatrix} & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{bmatrix}
$$

III 加法性质，任意一个列中和式可以分解，例如下

$$
det\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_{1111}+a'_{1111} & a_{2111}+a'_{2111} & \cdots & a_{n111}+a'_{n111} \\ a_{1211}+a'_{1211} & a_{2211}+a'_{2211} & \cdots & a_{n211}+a'_{n211} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n11}+a'_{1n11} & a_{2n11}+a'_{2n11} & \cdots & a_{nn11}+a'_{nn11} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} a_{11n1}+a'_{11n1} & a_{21n1}+a'_{21n1} & \cdots & a_{n1n1}+a'_{n1n1} \\ a_{12n1}+a'_{12n1} & a_{22n1}+a'_{22n1} & \cdots & a_{n2n1}+a'_{n2n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1nn1}+a'_{1nn1} & a_{2nn1}+a'_{2nn1} & \cdots & a_{nnn1}+a'_{nnn1} \end{bmatrix} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\begin{bmatrix} a_{111n} & a_{211n} & \cdots & a_{n11n} \\ a_{121n} & a_{221n} & \cdots & a_{n21n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n1n} & a_{2n1n} & \cdots & a_{nn1n} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} a_{11nn} & a_{21nn} & \cdots & a_{n1nn} \\ a_{12nn} & a_{22nn} & \cdots & a_{n2nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1nnn} & a_{2nnn} & \cdots & a_{nnnn} \end{bmatrix}
\end{bmatrix}
$$

$$
= det\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_{1111} & a_{2111} & \cdots & a_{n111} \\ a_{1211} & a_{2211} & \cdots & a_{n211} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n11} & a_{2n11} & \cdots & a_{nn11} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} a_{11n1} & a_{21n1} & \cdots & a_{n1n1} \\ a_{12n1} & a_{22n1} & \cdots & a_{n2n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1nn1} & a_{2nn1} & \cdots & a_{nnn1} \end{bmatrix} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\begin{bmatrix} a_{111n} & a_{211n} & \cdots & a_{n11n} \\ a_{121n} & a_{221n} & \cdots & a_{n21n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n1n} & a_{2n1n} & \cdots & a_{nn1n} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} a_{11nn} & a_{21nn} & \cdots & a_{n1nn} \\ a_{12nn} & a_{22nn} & \cdots & a_{n2nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1nnn} & a_{2nnn} & \cdots & a_{nnnn} \end{bmatrix}
\end{bmatrix}
$$

$$+det\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}a'_{1111} & a'_{2111} & \cdots & a'_{n111}\\ a'_{1211} & a'_{2211} & \cdots & a'_{n211}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a'_{1n11} & a'_{2n11} & \cdots & a'_{nn11}\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}a'_{11n1} & a'_{21n1} & \cdots & a'_{n1n1}\\ a'_{12n1} & a'_{22n1} & \cdots & a'_{n2n1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a'_{1nn1} & a'_{2nn1} & \cdots & a'_{nnn1}\end{bmatrix}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \begin{bmatrix}a_{111n} & a_{211n} & \cdots & a_{n11n}\\ a_{121n} & a_{221n} & \cdots & a_{n21n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{1n1n} & a_{2n1n} & \cdots & a_{nn1n}\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}a_{11nn} & a_{21nn} & \cdots & a_{n1nn}\\ a_{12nn} & a_{22nn} & \cdots & a_{n2nn}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{1nnn} & a_{2nnn} & \cdots & a_{nnnn}\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

IV 单位元

$$det\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\end{bmatrix}=1$$

V 零项元，单位元中的任何内矩阵交换1所在行列到另一个行列，满足存在$i_1=i_2$而$j_1\neq j_2$则此行列式为0，例如：

$$det\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\end{bmatrix}=0$$

定理 3.3 由上面的性质可以推导出双重维数矩阵的det表达式如下：

$$det(A_{ijkl})=\sum_{\sigma\tau\gamma} sgn\sigma sgn\tau sgn\gamma a_{\sigma(1)\tau(1)\gamma(1)1}a_{\sigma(2)\tau(2)\gamma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)\tau(n)\gamma(n)n}$$

Proof. 由加法性质III 得到左边等于

$$
det\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_{1111} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\begin{bmatrix} a_{111n} & a_{211n} & \cdots & a_{n11n} \\ a_{121n} & a_{221n} & \cdots & a_{n21n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n1n} & a_{2n1n} & \cdots & a_{nn1n} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} a_{11nn} & a_{21nn} & \cdots & a_{n1nn} \\ a_{12nn} & a_{22nn} & \cdots & a_{n2nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1nnn} & a_{2nnn} & \cdots & a_{nnnn} \end{bmatrix}
\end{bmatrix}
$$

$$
+det\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & a_{2111} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\begin{bmatrix} a_{111n} & a_{211n} & \cdots & a_{n11n} \\ a_{121n} & a_{221n} & \cdots & a_{n21n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n1n} & a_{2n1n} & \cdots & a_{nn1n} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} a_{11nn} & a_{21nn} & \cdots & a_{n1nn} \\ a_{12nn} & a_{22nn} & \cdots & a_{n2nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1nnn} & a_{2nnn} & \cdots & a_{nnnn} \end{bmatrix}
\end{bmatrix}
$$

$$\vdots$$

$$
+det\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nnn1} \end{bmatrix} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\begin{bmatrix} a_{111n} & a_{211n} & \cdots & a_{n11n} \\ a_{121n} & a_{221n} & \cdots & a_{n21n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n1n} & a_{2n1n} & \cdots & a_{nn1n} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} a_{11nn} & a_{21nn} & \cdots & a_{n1nn} \\ a_{12nn} & a_{22nn} & \cdots & a_{n2nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1nnn} & a_{2nnn} & \cdots & a_{nnnn} \end{bmatrix}
\end{bmatrix}
$$

对$l=1$分拆成n^3个和式单项，每个单项关于指标$i,j,k,1$，除一个固定项$a_{i_1j_1k_11}$，其余都为0。根据III,再次对单项进行关于$l=2$的分拆，以此类推，进行n次的分拆后，得到最后的和式单项满足除$a_{i_1j_1k_11}\cdots a_{i_nj_nk_nn}$外，关于指标$i,j,k,l$皆为0。若此$n$个数值中存在至少一个为0，则由$I$得到此单项为0，否则此$n$项都不为0，若$i_\xi=i_\eta$，则由$I,V$得此单项为0。由此除去0项，余项满足关于任何一个指标为一个$1\cdots n$的排列,由I,V得到结果。 □

定理 3.4 栅格为N列，M行，$N=4K,n=MN,M\equiv M_1 \pmod 4),N\equiv 0(mod4)$，矩阵$A$的外维数为$n=MN$，如果除

$$a_{i(i+1)(i+2)(i+3)}=-a_{(i+1)(i+2)(i+3)i}=a_{(i+2)(i+3)i(i+1)}=-a_{(i+3)i(i+1)(i+2)},$$

$$a_{i(i+\eta)(i+2\eta)(i+3\eta)} = -a_{(i+\eta)(i+2\eta)(i+3\eta)i} = a_{(i+2\eta)(i+3\eta)i(i+\eta)} = -a_{(i+3\eta)i(i+\eta)(i+2\eta)}$$

外, 其它都为0。那么

$$det(A) = pfaffian(A)^4$$

证明

$det(A)$定义右侧和式单项下标作为元素构成集合:

$$C_l = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} \sigma(1) \\ \tau(1) \\ \gamma(1) \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma(2) \\ \tau(2) \\ \gamma(2) \\ 2 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \sigma(n) \\ \tau(n) \\ \gamma(n) \\ n \end{pmatrix} \right\} \mid \sigma, \tau, \gamma \text{为任意}(1 \cdots n)\text{排列} \right\} \tag{3.1}$$

$pfaffian(A)$定义右侧和式单项下标作为元素构成集合:

$$C_r = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} p_{n-3} \\ p_{n-2} \\ p_{n-1} \\ p_n \end{pmatrix} \right\} \mid \phi = (p_1 p_2 ... p_n) \text{ 满足} 2.1, 2.2 \right\} \tag{3.2}$$

则要证C_l与$C_r \times C_r \times C_r \times C_r$一一对应。

令

函数:

$$f(x,k) = \begin{cases} 0 & \text{x < k} \\ 1 & \text{x} \geq \text{k} \end{cases},$$

集合:

$$\begin{aligned}
A1 &= \{0, 1, ..., \lfloor \frac{M}{4} \rfloor + f(M1, 1) - 1\} \\
A2 &= \{0, 1, ..., \lfloor \frac{M}{4} \rfloor + f(M1, 2) - 1\} \\
A3 &= \{0, 1, ..., \lfloor \frac{M}{4} \rfloor + f(M1, 3) - 1\} \\
A4 &= \{0, 1, ..., \lfloor \frac{M}{4} \rfloor + f(M1, 4) - 1\} \\
B &= \{0, 1, ..., K - 1\}
\end{aligned}$$

将下标元进行分类

$$\begin{aligned}
C_1 = &\{1 + 4iN + 4j \mid i \in A1, j \in B\} \cup \{4 + N + 4iN + 4j \mid i \in A2, j \in B\} \\
&\cup \{3 + 2N + 4iN + 4j \mid i \in A3, j \in B\} \cup \{2 + 3N + 4iN + 4j \mid i \in A4, j \in B\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 = &\{2 + 4iN + 4j \mid i \in A1, j \in B\} \cup \{1 + N + 4iN + 4j \mid i \in A2, j \in B\} \\
&\cup \{4 + 2N + 4iN + 4j \mid i \in A3, j \in B\} \cup \{3 + 3N + 4iN + 4j \mid i \in A4, j \in B\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C_3 = &\{3 + 4iN + 4j \mid i \in A1; j \in B\} \cup \{2 + N + 4iN + 4j \mid i \in A2; j \in B\} \\
&\cup \{1 + 2N + 4iN + 4j \mid i \in A3; j \in B\} \cup \{4 + 3N + 4iN + 4j \mid i \in A4; j \in B\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_4 = &\{4 + 4iN + 4j \mid i \in A1; j \in B\} \cup \{3 + N + 4iN + 4j \mid i \in A2; j \in B\} \\
&\cup \{2 + 2N + 4iN + 4j \mid i \in A3; j \in B\} \cup \{1 + 3N + 4iN + 4j \mid i \in A4; j \in B\}
\end{aligned}
$$

由于列向量元素为以1或者N的等比数列，3.2集合元素中的每一列元素$\begin{pmatrix} p_{i_1} \\ p_{i_2} \\ p_{i_3} \\ p_{i_4} \end{pmatrix}$从属的集合只有四种情形，如下表：

p_{i_1}	C_1	C_2	C_3	C_4
p_{i_2}	C_2	C_3	C_4	C_1
p_{i_3}	C_3	C_4	C_1	C_2
p_{i_4}	C_4	C_1	C_2	C_3

(3.3)

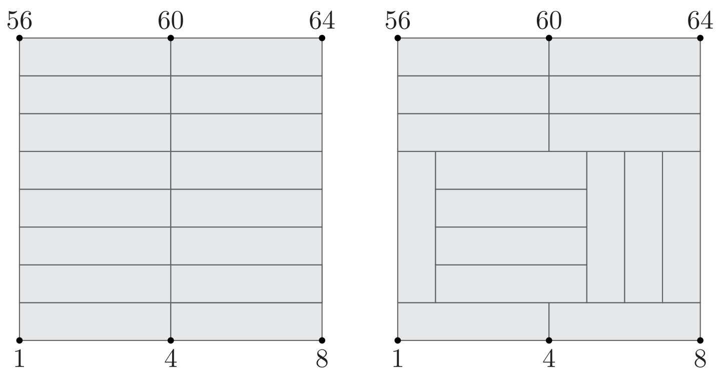
对于一组值，根据2.1，2.2，$\begin{pmatrix} p_{i_1} \\ p_{i_2} \\ p_{i_3} \\ p_{i_4} \end{pmatrix}$只能从属其中一个,其它三种对应于

$$
\begin{pmatrix} p_{i_1} & p_{i_2} & p_{i_3} & p_{i_4} \\ p_{i_2} & p_{i_3} & p_{i_4} & p_{i_1} \end{pmatrix}^i, i = 1, 2, 3
$$

三种变换。将$C_r \times C_r \times C_r \times C_r$分别对应$C_r * \begin{pmatrix} p_{i_1} & p_{i_2} & p_{i_3} & p_{i_4} \\ p_{i_2} & p_{i_3} & p_{i_4} & p_{i_1} \end{pmatrix}^i$, $i = 0, 1, 2, 3$。因此，右侧元素对应一个左侧元素，并且这种对应是一对一的。由3.3列元素和行元素恰好相同，并且列由四个元素构成，交换不会带来符号上的变化，因此符号也是相同的。

□

证明中关于等式右边的式子举例如下：



$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 12 & 16 & 19 & 23 & 26 & 30 & 33 & 37 & 44 & 48 & 51 & 55 & 58 & 62 \\ 2 & 6 & 9 & 13 & 20 & 24 & 27 & 31 & 34 & 38 & 41 & 45 & 52 & 56 & 59 & 63 \\ 3 & 7 & 10 & 14 & 17 & 21 & 28 & 32 & 35 & 39 & 42 & 46 & 49 & 53 & 60 & 64 \\ 4 & 8 & 11 & 15 & 18 & 22 & 25 & 29 & 36 & 40 & 43 & 47 & 50 & 54 & 57 & 61 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 33 & 12 & 19 & 26 & 37 & 30 & 23 & 16 & 44 & 48 & 51 & 55 & 58 & 62 \\ 2 & 6 & 9 & 13 & 20 & 27 & 34 & 38 & 31 & 24 & 41 & 45 & 52 & 56 & 59 & 63 \\ 3 & 7 & 17 & 10 & 21 & 28 & 35 & 14 & 39 & 32 & 42 & 46 & 49 & 53 & 60 & 64 \\ 4 & 8 & 25 & 11 & 18 & 29 & 36 & 22 & 15 & 40 & 43 & 47 & 50 & 54 & 57 & 61 \end{bmatrix}$$

这里举例的两个角标矩阵是满足证明中的第一步的分组性质的。

通过计算机编程，可以验证定理中的部分结果如下：

$$1 \times 4, det(A) = pfaffian(A)^4 = 1^4 = 1$$
$$4 \times 4, det(A) = pfaffian(A)^4 = 2^4 = 16$$
$$5 \times 4, det(A) = pfaffian(A)^4 = 3^4 = 81$$
$$6 \times 4, det(A) = pfaffian(A)^4 = 4^4 = 256$$
$$7 \times 4, det(A) = pfaffian(A)^4 = 5^4 = 625$$
$$8 \times 4, det(A) = pfaffian(A)^4 = 7^4 = 2401$$
$$8 \times 3, det(A) = pfaffian(A)^4 = 1^4 = 1$$

代码参考[4]. 同时计算了一些不是4的倍数的情况：

$$5 \times 5, det(A) = pfaffian(A)^4 = 0$$
$$6 \times 5, det(A) = pfaffian(A)^4 = 0$$
$$7 \times 5, det(A) = pfaffian(A)^4 = 0$$

由上述证明定理自然推广为下述定理：

定理 3.5 令$p_i \equiv p_i^{'}(mod4)$，将2.1,2.2修改为

$$p_1^{'} < p_2^{'} < p_3^{'} < p_4^{'}, p_5^{'} < p_6^{'} < p_7^{'} < p_8^{'}, ..., p_{N-3}^{'} < p_{N-2}^{'} < p_{N-1}^{'} < p_N^{'} \tag{3.4}$$

$$p_1^{'} < p_5^{'} < ... < p_{N-3}^{'} \tag{3.5}$$

，除满足3.3的元素以外，其余都为0，那么仍然有

$$det(A) = pfaffian(A)^4$$

回顾$\det(A) = pfaffian(A)^2$的条件，

$$\alpha = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \cdots, (i_n, j_n)\}$$

$i_k < j_k$和$i_1 < i_2 < \cdots < i_n$

$$\pi_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ i_1 & j_1 & i_2 & j_2 & \cdots & i_n & j_n \end{bmatrix}$$

推广还不是自然的泛化，下面给出一个自然泛化的猜测，

$$\alpha = \{(i_1, j_1, k_1, l_1), (i_2, j_2, k_2, l_2), \cdots, (i_n, j_n, k_n, l_n)\}$$

$i_s < j_s < k_s < l_s$和$i_1 < i_2 < \cdots < i_n$

$$\pi_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 4n-3 & 4n-2 & 4n-1 & 4n \\ i_1 & j_1 & k_1 & l_1 & \cdots & i_n & j_n & k_n & l_n \end{bmatrix}$$

在4×2,[5]这个猜测是正确的，但是稍大一些，如4×3,[6]，4×4,[7]，则不成立。

4 超行列式性质

定义 4.1 双重维数矩阵的乘法:

$$[a_{ij}][b_{ijkl}] = [c_{ijkl}]$$

$$c_{ijkl} = \sum_{\xi}^{n} a_{i\xi} b_{\xi jkl}$$

定理 4.2 乘法定理:

$$det(A_{ij}B_{ijkl}) = det(A_{ij})det(B_{ijkl})$$

证明

法一：

$$\begin{aligned} det(C_{ijkl}) &= \sum_{\sigma\tau\gamma} sgn\sigma sgn\tau sgn\gamma c_{\sigma(1)\tau(1)\gamma(1)1} c_{\sigma(2)\tau(2)\gamma(2)2} \cdots c_{\sigma(n)\tau(n)\gamma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma\tau\gamma} sgn\sigma sgn\tau sgn\gamma (\sum_{\xi}^{n} a_{\sigma(1)\xi} b_{\xi\tau(1)\gamma(1)1} \sum_{\xi}^{n} a_{\sigma(2)\xi} b_{\xi\tau(2)\gamma(2)2} \\ &\cdots \sum_{\xi}^{n} a_{\sigma(n)\xi} b_{\xi\tau(n)\gamma(n)n}) \\ &= \sum_{\tau\gamma} sgn\tau sgn\gamma (\sum_{\sigma} sgn\sigma \sum_{\xi}^{n} a_{\sigma(1)\xi} b_{\xi\tau(1)\gamma(1)1} \sum_{\xi}^{n} a_{\sigma(2)\xi} b_{\xi\tau(2)\gamma(2)2} \\ &\cdots \sum_{\xi}^{n} a_{\sigma(n)\xi} b_{\xi\tau(n)\gamma(n)n}) \\ &= \sum_{\tau\gamma} sgn\tau sgn\gamma (det(A_{ij}) \sum_{\sigma} sgn\sigma b_{\sigma(1)\tau(1)\gamma(1)1} b_{\sigma(2)\tau(2)\gamma(2)1} \cdots b_{\sigma(n)\tau(n)\gamma(n)n}) \\ &= det(A_{ij})det(B_{ijkl}) \end{aligned}$$

法二：用外积来证明.

令

$$\omega_i = \sum_{j_\sigma=1}^{n} \sum_{k_\sigma=1}^{n} \sum_{l_\sigma=1}^{n} b_{ij_\sigma k_\sigma l_\sigma} f_1^{j_\sigma} \wedge f_2^{k_\sigma} \wedge f_3^{l_\sigma} \tag{4.1}$$

做基底变换如下：

$$(f_1^1, f_1^2, ..., f_1^n) = (e_1^1, e_1^2, ..., e_1^n)X_1$$
$$(f_2^1, f_2^2, ..., f_2^n) = (e_2^1, e_2^2, ..., e_2^n)X_2$$
$$(f_3^1, f_3^2, ..., f_3^n) = (e_3^1, e_3^2, ..., e_3^n)X_3$$

则

$$f_1^{j_\sigma} \wedge f_2^{k_\sigma} \wedge f_3^{l_\sigma} = \sum_{\xi_1=1}^{n}\sum_{\xi_2=1}^{n}\sum_{\xi_3=1}^{n} x_1^{\xi_1 j_\sigma} x_2^{\xi_2 k_\sigma} x_3^{\xi_3 l_\sigma} e_1^{\xi_1} \wedge e_2^{\xi_2} \wedge e_3^{\xi_3} \tag{4.2}$$

从而，

$$\begin{aligned}\omega_i &= \sum_{j_\sigma=1}^{n}\sum_{k_\sigma=1}^{n}\sum_{l_\sigma=1}^{n} b_{ij_\sigma k_\sigma l_\sigma} f_1^{j_\sigma} \wedge f_2^{k_\sigma} \wedge f_3^{l_\sigma} \\ &= \sum_{j_\sigma=1}^{n}\sum_{k_\sigma=1}^{n}\sum_{l_\sigma=1}^{n} b_{ij_\sigma k_\sigma l_\sigma} \sum_{\xi_1=1}^{n}\sum_{\xi_2=1}^{n}\sum_{\xi_3=1}^{n} x_1^{\xi_1 j_\sigma} x_2^{\xi_2 k_\sigma} x_3^{\xi_3 l_\sigma} e_1^{\xi_1} \wedge e_2^{\xi_2} \wedge e_3^{\xi_3} \\ &= \sum_{\xi_1=1}^{n}\sum_{\xi_2=1}^{n}\sum_{\xi_3=1}^{n}\sum_{j_\sigma=1}^{n}\sum_{k_\sigma=1}^{n}\sum_{l_\sigma=1}^{n} b_{ij_\sigma k_\sigma l_\sigma} x_1^{\xi_1 j_\sigma} x_2^{\xi_2 k_\sigma} x_3^{\xi_3 l_\sigma} e_1^{\xi_1} \wedge e_2^{\xi_2} \wedge e_3^{\xi_3}\end{aligned} \tag{4.3}$$

进而得到

$$a_{ijkl} = \sum_{j_\sigma=1}^{n}\sum_{k_\sigma=1}^{n}\sum_{l_\sigma=1}^{n} b_{ij_\sigma k_\sigma l_\sigma} x_1^{jj_\sigma} x_2^{kk_\sigma} x_3^{ll_\sigma}$$

由前述定理得到

$$\begin{aligned}\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n &= det(B) f_1^1 \wedge f_1^2 \cdots \wedge f_1^n \wedge f_2^1 \wedge f_2^2 \cdots \wedge f_2^n \wedge f_3^1 \wedge f_3^2 \cdots \wedge f_3^n \\ &= det(B)det(X_1)det(X_2)det(X_3) \\ &\quad e_1^1 \wedge e_1^2 \cdots \wedge e_1^n \wedge e_2^1 \wedge e_2^2 \cdots \wedge e_2^n \wedge e_3^1 \wedge e_3^2 \cdots \wedge e_3^n\end{aligned} \tag{4.4}$$

即证$det(A) = det(B)det(X_1)det(X_2)det(X_3)$ □

定理 4.3 A_{ijkl}的拉普拉斯定理

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(-1)^{i+j+k+l} a_{i,j,k,l} A^*_{i,j,k,l}$$

证明 左边单项都属于右边且符号相同，项数也是相同的，结果是显而易见的。 □

推广的命题是，

$$detA = \sum_{j_1 j_2 \dots j_p}\sum_{k_1 k_2 \dots k_p}\sum_{l_1 l_2 \dots l_p}(-1)^{\sum_{t=1}^{p}(i_t+j_t+k_t+l_t)} M\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_p \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_p \end{pmatrix} A^*\begin{pmatrix} i_{p+1} & i_{p+2} & \cdots & i_n \\ j_{p+1} & j_{p+2} & \cdots & j_n \\ k_{p+1} & k_{p+2} & \cdots & k_n \\ l_{p+1} & l_{p+2} & \cdots & l_n \end{pmatrix}$$

项数上的关系是左边$(n!)^3$,右边是$(\frac{(n!)^3}{(p!(n-p)!))^3})(p!)^3[(n-p)!]^3$结论也比较显然。

定义 4.4 矩阵的克罗内克积

$$
\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ & & \cdots & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2m} \\ & & \cdots & \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mm} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
A_{11}\times B_{11} & A_{12}\times B_{11} & \cdots & A_{1n}\times B_{11} & & \cdots & A_{11}\times B_{1m} & A_{12}\times B_{1m} & \cdots & A_{1n}\times B_{1m} \\
A_{21}\times B_{11} & A_{22}\times B_{11} & \cdots & A_{2n}\times B_{11} & & \cdots & A_{21}\times B_{1m} & A_{22}\times B_{1m} & \cdots & A_{2n}\times B_{1m} \\
 & & & & & \cdots & & & & \\
A_{n1}\times B_{11} & A_{n2}\times B_{11} & \cdots & A_{nn}\times B_{11} & & \cdots & A_{n1}\times B_{1m} & A_{n2}\times B_{1m} & \cdots & A_{nn}\times B_{1m} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
A_{11}\times B_{m1} & A_{12}\times B_{m1} & \cdots & A_{1n}\times B_{m1} & & \cdots & A_{11}\times B_{mm} & A_{12}\times B_{mm} & \cdots & A_{1n}\times B_{mm} \\
A_{21}\times B_{m1} & A_{22}\times B_{m1} & \cdots & A_{2n}\times B_{m1} & & \cdots & A_{21}\times B_{mm} & A_{22}\times B_{mm} & \cdots & A_{2n}\times B_{mm} \\
 & & & & & \cdots & & & & \\
A_{n1}\times B_{m1} & A_{n2}\times B_{m1} & \cdots & A_{nn}\times B_{m1} & & \cdots & A_{n1}\times B_{mm} & A_{n2}\times B_{mm} & \cdots & A_{nn}\times B_{mm}
\end{bmatrix}
$$

5 计算

类似Kasteleyn[1]中将计算的矩阵表达成$D = z(Q_n \times E_m) + z^{'}(F_n \times Q_m)$ 由上面的定义，这里关于$tetramer$的计算也可以表达成两个类型的和式。假设矩形方块为$n \times m$,

$$
Q_n = \begin{bmatrix}
0 & 0 & \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&\cdots&0 \\ 0&0&0&1&0&\cdots&0 \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0 \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0 \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0 \\ &&\cdots&&&& \\ 0&0&0&0&\cdots&0& \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&\cdots&0 \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0 \\ 1&0&0&0&1&\cdots&0 \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0 \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0 \\ &&\cdots&&&& \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0 \end{bmatrix} & 0 & 0 & \cdots \\
\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&\cdots&0 \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0 \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0 \\ 0&1&0&0&0&\cdots&0 \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0 \\ &&\cdots&&&& \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0 \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&\cdots&0 \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0 \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0 \\ 0&1&0&0&0&\cdots&0 \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0 \\ &&\cdots&&&& \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0 \end{bmatrix} & 0 & \cdots \\
0 & \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&\cdots&0 \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0 \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0 \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0 \\ 0&0&1&0&0&\cdots&0 \\ &&\cdots&&&& \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0 \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&\cdots&0 \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0 \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0 \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0 \\ 0&0&1&0&0&\cdots&0 \\ &&\cdots&&&& \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0 \end{bmatrix} & \cdots \\
0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \ddots
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_n^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_n^2 & \cdots & 0 \\ A_n^{1T} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_n^{2T} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & & \end{bmatrix}_n
$$

$Q_n \times E_m$ 那么有结果$D = z(Q_n \times E_m) + z^{'}(E_n \times Q_m)$。

6 展望

在内维数为2的情形，特征值和特征向量是研究矩阵非常有用的工具，在内维数为4的情形如何展开研究？显然，仍可以通过$det(\lambda E - A) = 0$求出特征值，并满足这些特征值的乘积恰好等于$det(A)$。但是对任意的可逆矩阵却没有相似变换保证对E做完变换后保持不变。什么样的变换能保证E不变？什么样的矩阵可以通过类似内维数为2的情况进行相似变换后对角化？这些问题很值得研究。

致谢 本文作者感谢郭学军教授的鼓励与帮助.

参　考　文　献

[1] P. W. Kasteleyn, The statistics of dimers on a lattice, *Physica.*, 1961, 27.

[2] Richard Kenyon, Andrei Okounkov, What is ... a dimer?, *Notices of the American Mathematical Society* MARCH 2005 VOLUME 52, NUMBER 3.

[3] RICHARD J. MATHAR PAVING RECTANGULAR REGIONS WITH RECTANGULAR TILES: TATAMI AND NON-TATAMI TILINGS.*arXiv:1311.6135v1 [math.CO]*, 24 Nov 2013

[4] IndexMatrix

[5] val42

[6] val34

[7] val44