南京大學

研 究 生 毕 业 论 文

（申请硕士学位）

论　文　题　目 环面Dimer覆盖数的2-进性质及覆盖数计算法的推广

作　者　姓　名 惠慧

学科、专业方向 基础数学

指　导　教　师 郭学军 教授

研　究　方　向 代数数论

2011 年 4 月

学　　　　　号 ： MG0821009

论文答辩日期 ： 2011 年 5 月 31 日

指 导 教 师 ：　　　　　（签字）

One Property of Dimer Covering On Tyre Face And The Computation of Number about 1×4 Tetramer Covering on Planar

by

Hui Hui

Directed by

Professor Xuejun Guo

Mathematics Department

Nanjing University

May 2010

Submitted in partial fulfilment of the requirements
for the degree of Master in Pure Mathematics

毕业论文题目：环面Dimer覆盖数的2-进性质及覆盖数计算法的推广

基础数学 专业 2011 级硕士生姓名： 惠慧

指导教师（姓名、职称）： 郭学军 教授

摘 要

本文对二维面上的多聚物覆盖数的代数性质作了两个方面的探讨。在文献[Kasteleyn, 1961]中，作者对二维二次格二聚物完全覆盖给出了严格的结果。在此基础之上本文对环面上的结果在2进数下的代数性质给出计算。第二部分对平面上的1×4的四聚物覆盖给出讨论，据此提出有趣的矩阵内维数的概念。

关键词： Dimer; Tetramer; 内维数

THESIS: One Property of Dimer Covering On Tyre Face And The Computation of Number about 1×4 Tetramer Covering on Planar

SPECIALIZATION: Pure Mathematics

POSTGRADUATE: Hui Hui

MENTOR: Professor Xuejun Guo

Abstract

This paper discusses two aspects of algebraic properties about polymer covering on two-dimensional face. In biblography[Kasteleyn, 1961],author have given a rigorous solution to combinatorial problem for a very special case,viz.that of a two-dimensional quadratic lattice,completely covered with dimers.On the base of it,this article gives the computation of number on tyre face on the 2-adic situation.Then,on the second section,I discuss the problem that is about the computation of number of covering on quartic lattice by 1×4 tetramer, and then raise the interesting notion inner dimension of matrix.

Keywords: Dimer; Tetramer; Inner Dimension

目　　录

第一章　环面覆盖数2进性质

$Kasteleyn$在文章[Kasteleyn, 1961]中提到矩形平面和环面上$dimer$覆盖数的计算方法，而说对于一般的覆盖问题是很难找到通解的，至于三维空间中的覆盖问题更是遥不可及。从$Kasteleyn$这篇影响深远的文章发表以来，这个在物理化学界的热点问题引起了数学界的浓厚兴趣，近年来数学家们开始用代数几何，组合，概率的方法对此问题做了渐深的探讨，一些与椭圆曲线，模形式相联系。问题非常的多，$JamesPropp$综合了一些问题在文献[Propp, 1999]中提出了32个问题，文献[Henry Cohn 等, 2002]中提出了两个猜测与三个公开问题。可见这个方向可以研究的问题很多。这里设法对一些问题进行探讨。$Dimer$覆盖数，对于矩形平面为$2n \times 2n$的情况，文章[Cohn, 2000]中给出了$\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{n}(4cos^2\pi i/(2n+1)+4cos^2\pi j/(2n+1)) = 2^n f(n)^2.f(n)$是奇整数的证明，对于环面的情形没有给出计算，本文就$2t \times 2t$情形对环面$dimer$覆盖数中的每一个和式单项进行一些类似的计算。

1. 计算：

$$Z_{mn}^{(t)}(Z,Z') = \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{\frac{1}{2}m}\prod_{l=1}^{n} 2[z^2 sin^2\{2k\pi/m\} + {z'}^2 sin^2\{(2l-1)\pi/n\}]^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{\frac{1}{2}m}\prod_{l=1}^{n} 2[z^2 sin^2\{(2k-1)\pi/m\} + {z'}^2 sin^2\{2l\pi/n\}]^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{\frac{1}{2}m}\prod_{l=1}^{n} 2[z^2 sin^2\{(2k-1)\pi/m\} + {z'}^2 sin^2\{(2l-1)\pi/n\}]^{\frac{1}{2}}$$

$$\overset{\text{m=n=2t}}{=} \prod_{k=1}^{t}\prod_{l=1}^{2t}[4-{\zeta_{2t}}^{2k-1}-{\zeta_{2t}}^{1-2k}-{\zeta_t}^{l}-{\zeta_t}^{-l}]^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{t}\prod_{l=1}^{2t}[4-{\zeta_{2t}}^{2k-1}-{\zeta_{2t}}^{1-2k}-{\zeta_{2t}}^{2l-1}-{\zeta_{2t}}^{1-2l}]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\prod_{k=1}^{t}\prod_{l=1}^{t}[4-{\zeta_{2t}}^{2k-1}-{\zeta_{2t}}^{1-2k}-{\zeta_t}^{l}-{\zeta_t}^{-l}]^{1)}$$

$$+\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{t}\prod_{l=1}^{t}[4-{\zeta_{2t}}^{2k-1}-{\zeta_{2t}}^{1-2k}-{\zeta_{2t}}^{2l-1}-{\zeta_{2t}}^{1-2l}]^{2)}$$

下面对1), 2)分别进行讨论。为了方便讨论，令$2t = 2^r m$,m是奇数。

先看1), $1)=\prod_{k=1}^{t}\prod_{l=1}^{t}[4-{\zeta_{2t}}^{2k-1}-{\zeta_{2t}}^{1-2k}-{\zeta_t}^{l}-{\zeta_t}^{-l}]$

引理1.

$Q_2(\zeta_{2^rm})/Q_2$扩张的分歧指数$e=\varphi(2^r)$,令s是满足$2^s\equiv 1(modm)$的最小正整数,则剩余类域次数$f=s$。

证明：令s是满足$p^s\equiv 1(modm)$的最小正整数,$e(Q_p(\zeta_{p^rm})/Q_p)=p^{r-1}(p-1)$, $f(Q_p(\zeta_{p^rm})/Q_p)=s$ ([冯克勤, 2000],p297). 取$p=2$,即得。

为了方便起见，下面在不产生歧义的情况下用ζ代表ζ_{2t}.计$2-adic$赋值$(Q_2,2)$在扩域$Q_2(\zeta_{2^rm})$中的扩充为$(Q_2\,(\zeta_{2^rm}),\boldsymbol{P})$. 考虑$4-\zeta^{2k-1}-\zeta^{1-2k}-\zeta^{2l}-\zeta^{-2l}$的$\boldsymbol{P}-adic$指数。$norm(\zeta)=\pm\zeta^{2^{2r-2}(2^s-1)}=1$或$-1$,所以$v_P(\zeta)=0$, ζ在剩余类域的乘法群中的阶为m，且有$v_P(1-\zeta^m)=1/2^{r-1}$. 进而有

$$\begin{cases} v_P(1-\zeta^{2^ijm})=1/2^{r-i-1}, i<r,\\ v_P(1-\zeta^{2^ijm})=\infty, i\geq r \end{cases}\quad j\text{是奇数}$$

先来看$4-\zeta^{2k-1}-\zeta^{1-2k}-\zeta^{2l}-\zeta^{-2l}$ 的非整数项

$$\begin{aligned}&\zeta^{2k-1}+\zeta^{1-2k}+\zeta^{2l}+\zeta^{-2l}\\ =&\zeta^{2l}(1+\zeta^{2k-2l-1})(1+\zeta^{-2k-2l+1})\\ =&\zeta^{2l}(1-\zeta^{2^{r-1}m+2k-2l-1})(1-\zeta^{2^{r-1}m-2k-2l+1}), 1\leq k,l\leq 2^{r-1}m.\end{aligned}$$

当$r=1$时，$2^{r-1}=1$,此时$2^{r-1}m+2k-2l-1$或者$2^{r-1}m-2k-2l+1$是可以取到$2^ijm: i\geq r$的，所以$v_P(1-\zeta^{2^{r-1}m+2k-2l\pm 1})=\infty$是存在的，即$1-\zeta^{2^{r-1}m+2k-2l\pm 1}=0$。当且仅当$2k-2l-1=j'm$或者$2k+2l-1=j'm, j'$是奇数时，$v_P(4-\zeta^{2k-1}-\zeta^{1-2k}-\zeta^{2l}-\zeta^{-2l})=2$，满足此条件的$(l,k)$的取值为:

$$\{(l,k)\mid k=2l+m+1\text{或}k=-2l+m+1, l=1,\cdots,(m-1)/2\},$$

$$\{(l,k)\mid k=2l-m+1\text{或}k=-2l+3m+1, l=(m+1)/2,\cdots,m\}。$$

对后面集合，当$l=m$时，$2l-m+1=-2l+3m+1$,所以共有$2m-1$对，得到$2t=2m$时

$$v_2(\prod_{k=1}^{t}\prod_{l=1}^{t}[4-{\zeta_{2t}}^{2k-1}-{\zeta_{2t}}^{1-2k}-{\zeta_t}^{l}-{\zeta_t}^{-l}])=4m-2.$$

此时,

$$1) = \prod_{k=1}^{m}\prod_{l=1}^{(m-1)/2}[4-{\zeta_{2m}}^{2k-1}-{\zeta_{2m}}^{1-2k}-{\zeta_m}^{l}-{\zeta_m}^{-l}]^2$$
$$\prod_{k=1}^{m}[2-{\zeta_{2m}}^{2k-1}-{\zeta_{2m}}^{1-2k}],$$

而其中的乘积项

$$\prod_{k=1}^{m}[2-{\zeta_{2m}}^{2k-1}-{\zeta_{2m}}^{1-2k}]$$
$$=\prod_{k=1}^{m}[1-{\zeta_{2m}}^{2k-1}][1-{\zeta_{2m}}^{1-2k}]$$
$$=\prod_{k=1}^{m}[1-{\zeta_{2m}}^{2k-1}]^2,$$

$\prod_{k=1}^{t}[1-{\zeta_{2t}}^{2k-1}]$在$Q(\zeta_{2t})/Q$的$galois$群作用下不变，知其属于$Q$,所以是整数，因此$\prod_{k=1}^{m}[2-{\zeta_{2m}}^{2k-1}-{\zeta_{2m}}^{1-2k}]$是完全平方数,由此得到$1) = 2^{4m-2}f(m)^2, f(m)$是奇数。

当$r > 1$时，$2^{r-1}m+2k-2l-1$或者$2^{r-1}m-2k-2l+1$中不能分离出偶数项来，令$2^{r-1}m\pm 2k-2l-1 = 2^i jm, i$只能取到0,从而$v_P(1-\zeta^{2^{r-1}m\pm 2k-2l-1}) = 1/2^{r-1}$或者0. 由$2k-2l-1 = j'm = (2j+1)m$,得到$k = jm+(m+1)/2+l$.由$k$的取值情况得到$1\leq jm+(m+1)/2+l\leq 2^{r-1}m$,根据$l$的取值不同对$j$的值进行分类：

$$1\leq l\leq (m-1)/2 : 0\leq j\leq 2^{r-1}-1,$$
$$(m+1)/2\leq l\leq (3m-1)/2 : -1\leq j\leq 2^{r-1}-2,$$
$$\cdots,$$
$$(2^{r-1}-2)m+(m+1)/2\leq l\leq (2^{r-1}-2)m+(3m-1)/2 : 1-2^{r-1}\leq j\leq 0,$$
$$(2^{r-1}-2)m+(3m+1)/2\leq l\leq 2^{r-1}m : -2^{r-1}\leq j\leq -1.$$

共有$2^{r-1}2^{r-1}m$种取值。同样对$-2k-2l-1 = j'm = (2j+1)m$也共有$2^{r-1}2^{r-1}m$种(k,l)取值方法，所以$v_2(1)) = \frac{1}{2^{r-1}}(2^{r-1}2^{r-1}m+2^{r-1}2^{r-1}m) = 2^r m$,由此得到$1) = 2^{2^r m}f(m,r)^2, f(m,r)$是奇数。

再看2),

$$2)=2^{t-1}\prod_{k=1}^{t}[2-{\zeta_{2t}}^{2k-1}-{\zeta_{2t}}^{1-2k}]^{b1)}\prod_{1\le k<l\le t}[4-{\zeta_{2t}}^{2k-1}-{\zeta_{2t}}^{1-2k}-{\zeta_{2t}}^{2l-1}-{\zeta_{2t}}^{1-2l}]^{2^{b2)}}.$$

其中乘积项 $\prod_{1\le k<l\le t}[4-{\zeta_{2t}}^{2k-1}-{\zeta_{2t}}^{1-2k}-{\zeta_{2t}}^{2l-1}-{\zeta_{2t}}^{1-2l}]$ 在$Q(\zeta_{2t})/Q$的$galois$群作用下不变，知其属于Q,所以是整数，所以$b2)$是完全平方数。下面来计算一下$2-adic$指数，前面得到

$\{v_P(1-\zeta^{2^i jm})=1/2^{r-i-1},i<r,j:$奇数$\}$,

$$b1)=\prod_{k=1}^{t}[2-\zeta^{2k-1}-\zeta^{1-2k}]$$

$$=\prod_{k=1}^{2^{r-1}m}[2-\zeta^{2k-1}-\zeta^{1-2k}]$$

$$=\prod_{k=1}^{2^{r-1}m}[1-\zeta^{2k-1}]^2,$$

可得$v_P(\prod_{k=1}^{2^{r-1}m}[1-\zeta^{2k-1}]^2)=2.$

对2)的非整数项进行因式分解

$$\zeta^{2k-1}+\zeta^{1-2k}+\zeta^{2l-1}+\zeta^{1-2l}$$

$$=\zeta^{2l-1}(\zeta^{2k-2l}+\zeta^{2-2k-2l}+1+\zeta^{2-2l-2l})$$

$$=\zeta^{2l-1}(\zeta^{2k-2l}+1)(\zeta^{2-2k-2l}+1)$$

$$=\zeta^{2l-1}(1-\zeta^{2^{r-1}m+2k-2l})(1-\zeta^{2^{r-1}m+2-2k-2l})$$

当$r=1$时，$2^{r-1}m+2k-2l$或$2^{r-1}m+2-2k-2l$是奇数，所以$(1-\zeta^{2^{r-1}m+2k-2l})\neq 0$,当$2k-2l=j'm,j'$为偶数时，有$v_P(1-\zeta^{2^{r-1}m+2k-2l})=1$,对于$1\le k\le l\le m$,取不到$k-l=j'm$.在$1\le k\le l\le m$内，$2^{r-1}m+$

$2-2k-2l$取到$j'm$的情况共有$(m-1)/2$种，所以$v_2(\frac{1}{2}\prod\limits_{k=1}^{t}\prod\limits_{l=1}^{t}[4-\zeta^{2k-1}-\zeta^{1-2k}-\zeta^{2l-1}-\zeta^{1-2l}])=2m.$

当$r>1$时，$2^{r-1}m+2k-2l$或$2^{r-1}m+2-2k-2l$是偶数，首先考虑$2^{r-1}m+2k-2l$是m倍数的情形，即$k-l=j'm$。对k的取值不同得到l的取值分类：

$k=1: l=1, m+1, 2m+1, ...(2^{r-1}-1)m+1;$

$k=2: l=2, m+2, 2m+2, ...(2^{r-1}-1)m+2;$

...

$k=m: l=m, 2m, 3m, ...2^{r-1}m;$

$k=m+1: l=1, m+1, 2m+1, 3m+1, ...(2^{r-1}-1)m+1;$

...

$k=2^{r-1}m: l=m, ..., (2^{r-1}-1)m, 2^{r-1}m.$

将

$2^{r-1}m+2k-2l=j'2^rm$

单独列出。由于

$1-2^{r-1}m\leq k-l\leq 2^{r-1}m-1$，

所以

$2^{r-1}m+2-2^rm\leq 2^{r-1}m+2k-2l\leq 2^{r-1}m+2^rm-2,$

j'只能取到$0,1.$

令

$2^{r-1}m+2k-2l=0,$

则

$k-l=-2^{r-2}m.$

根据k的取值得到l的取值

$k=1: l=1+2^{r-2}m;$

...

$k=2^{r-2}m: l=2^{r-1}m$

共$2^{r-2}m$种情形。而

$$2^{r-1}m+2k-2l=1$$

刚好是上面l和k交换的情形。

再考虑$2^{r-1}m+2-2k-2l$是m倍数的情形，即

$$k+l-1=j'm$$

根据k的取值得到l的取值：

$$k=1:l=m,2m,...,2^{r-1}m;$$

...

$$k=2^{r-1}m:l=1,...,(2^{r-1}-1)m+1$$

将

$$2^{r-1}m+2-2k-2l=j'2^rm$$

单独列出，

由于

$$-2^rm\leq -k-l\leq -2，$$

所以

$$2^{r-1}m+2-2^{r+1}m\leq 2^{r-1}m+2-2k-2l\leq 2^{r-1}m-2,$$

j'只能取到$0,-1$.令

$$2^{r-1}m+2-2k-2l=0,$$

则

$$k+l=2^{r-2}m+1.$$

对k的取值分类，

$$k=1:l=2^{r-2}m;$$

...

$$k=2^{r-2}m:l=1.$$

令

$$2^{r-1}m+2-2k-2l=-2^rm,$$

则

$k + l = 2^{r-2}m + 2^{r-1}m + 1.$

$k = 2^{r-2}m + 1 : l = 2^{r-1}m;$

...

$k = 2^{r-1}m : l = 2^{r-2}m + 1;$

现在上面情况下

$v_P(4 - \zeta^{2k-1} - \zeta^{1-2k} - \zeta^{2l-1} - \zeta^{1-2l}) = 2$

分离出2的阶数为$2^{r+1}m$,除此，剩余的情况先看

$2^{r-1}m + 2k - 2l = j'm$

分离出来的2的阶数。对k的情况进行分别讨论：

$k = 1 : l = 1, m + 1, 2m + 1, ...\overline{1 + 2^{r-2}m}, ..., (2^{r-1} - 1)m + 1,$

此时

$2^{r-1}m+2k-2l = 2^{r-1}m, 2^{r-1}m-2m, 2^{r-1}m-4m, ..., 2^{r-1}m-(2^r-2)m.$

得到

$1 - \zeta^{2^{r-1}m}, 1 - \zeta^{2^{r-1}m-2m}, ..., \overline{0}, ..., 1 - \zeta^{2^{r-1}m-(2^r-2)m}$

所有的阶数为

$1 + \frac{1}{2^{r-2}}2^{r-3} + \frac{1}{2^{r-3}}2^{r-4} + ...\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{r-2}}2^{r-3} = r - 1.$

...,

$k = m : l = m, 2m, 3m, ..., \overline{m + 2^{r-2}m}, ..., (2^{r-1})m,$

得到阶数为$r - 1.m$项合计得到2的阶数为$(r - 1)m$

$k = m + 1 : l = 1, m + 1, 2m + 1, 3m + 1, ..., \overline{m + 1 + 2^{r-2}m}, ..., (2^{r-1} - 1)m + 1,$

此时得到

$1 - \zeta^{2^{r-1}m+2m}, 1 - \zeta^{2^{r-1}m}, ..., \overline{0}, ..., 1 - \zeta^{2^{r-1}m-(2^r-4)m}.$

所有阶数仍然为$r - 1$

...,

如此得到2的阶数和为$(r-1)2^{r-1}m$。

再看

$$1-\zeta^{2^{r-1}m+2-2k-2l}=0$$

时,由$1-\zeta^{2^{r-1}m+2k-2l}$造成的2的若干阶数也是要排除掉的，此种情况如下：

$$\begin{cases} k+l=2^{r-2}m+1 \quad \text{或} \quad 2^{r-2}m+2^{r-1}m+1 \\ k-l=jm \end{cases}$$

得到$r=2$时，$j=0$，k,l取值为2重。

$r>2$时，j的取值为

$-(2^{r-2}-1),...,-1,1,...,2^{r-2}-1$，

j取奇数对应于的lk取值对每个j为二重。得到这部分产生的2的阶数为2,再看

$$2^{r-1}m+2-2k-2l=j'm$$

分离出来的2的阶数,显然得到和上面的一样阶数，所以合计得到2的阶数为$2^{r+1}m+(r-1)2^{r}m-4$,所以2)的阶数为$2^{r+1}m+(r-1)2^{r}m-5$。

2. 结论：

将上述计算作为结论列举如下：

$$\prod_{k=1}^{t}\prod_{l=1}^{t}[4-{\zeta_{2t}}^{2k-1}-{\zeta_{2t}}^{1-2k}-{\zeta_t}^{l}-{\zeta_t}^{-l}]=\begin{cases} 2^{4m-2}f(m,r)^2: t=m \\ 2^{2^{r}m}f(m,r)^2: t=2^{r-1}m \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{t}\prod_{l=1}^{t}[4-{\zeta_{2t}}^{2k-1}-{\zeta_{2t}}^{1-2k}-{\zeta_{2t}}^{2l-1}-{\zeta_{2t}}^{1-2l}]=\begin{cases} 2^{2m}f(m,r)^2: t=m \\ 2^{2^{r+1}m+(r-1)2^{r}m-5}f(m,r)^2: \\ t=2^{r-1}m \end{cases}$$

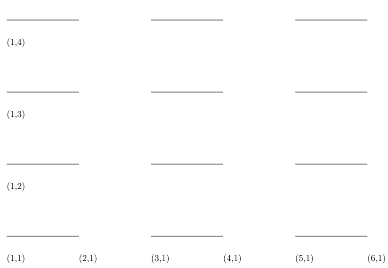
上述中的$f(m,r)$都是奇数。

第二章　1×4 覆盖平面的计算

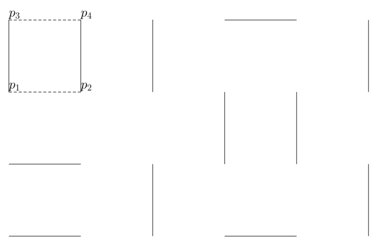
2.1　Dimer覆盖平面方法

回顾$Kasteleyn$在文献[Kasteleyn, 1961]中对平面上的二次格用$dimer$覆盖所得覆盖方法数的巧妙计算。

考虑平面上$m \times n$的长方形栅格Q_{mn},用$dimer$去覆盖，每个$dimer$占据两个相连的单位方格。用点来表示一个栅格，即得一个覆盖为下图。用一组数字来表示每个点可以用两种方法：$(i,j), i = 1, ..., m; j = 1, ..., n$或$p = (j+1)m + i, i = 1, ..., m; j = 1, ..., n$.这样一个$dimer$水平放置就占据$(i,j)$和$(i+1,j)$两个点，竖直放置就占据$(i,j)$和$(i,j+1)$两个点，这样一个覆盖$C$就是一组数据对$(p_1,p_2)(p_3,p_4)(p_5,p_6)...(p_{mn-1},p_{mn})$,其中$(p_i,p_{i+1})$为相连的两个点，反之，只要是这样的一组数，肯定也是一个覆盖。这样就得到了覆盖的表示方法。为了方便应用记$C_0 = ((1,1),(2,1))((3,1),(4,1))...((m-1,1),(m,1))((1,2,(2,2))...((m-1,n),(m,n))$称之为标准配置。如图(a)



(a)



(b)

为了一种覆盖只有一种表示，要求C满足$p_1 < p_2, p_3 < p_4, ..., p_{mn-1} < p_{mn}(1) p_1 < p_3 < ... < p_{mn-1}(2)$. 这刚好是与$pfaffian$相对应。令$mn = N$,下面将看到给一个$N \times N$反称矩阵适当赋值，要计算的覆盖数敲好为$pf(A)$。

从覆盖数的角度来看对矩阵A的要求，如果$C = (p_1,p_2)(p_3,p_4)...(p_{N-1},p_N)$是一个覆盖，则要求矩阵元素$a_{p_1p_2}, a_{p_3p_4}, ..., a_{p_{N-1}p_N}$相乘后为$sgn(p_1p_2...p_{N-1}p_N)$,如

果不是覆盖，相乘后为0。

下面来看如何给a_{ij}赋值，如图b，$C_0=(p_1,p_2),(p_3,p_4),C=(p_1,p_3)(p_2,p_4)$，$C_0$与$C$围成一个封闭的路线。按照如下顺序将$C_0$变换到$C$。$p_1,p_2,p_3,p_4$ --→ p_1,p_2,p_4,p_3(将点的顺序按逆时针顺序重排)--→ p_2,p_4,p_3,p_1(将封闭路线上的点向前推进一格)--→ p_2,p_4,p_1,p_3(将点按照C满足的条件(1)进行排序)--→ p_1,p_3,p_2,p_4(将点按照C满足的条件(2)进行排序)。计算表明$sgn(p_1p_3p_2p_4)=-1$。

对于一般的情形，考虑C_0与C围成的封闭路线，当点列按逆时针旋转中向前与向后的点个数相等记为r，那么C边界的向前与向后也都是r 。这样按照上面简单例子的顺序来变换，1).将r对向后排列进行反转，2).向前推进一格过渡到C边界情形，3).按照C最终的条件(1)将r对不合要求的点进行反转，4).按照C最终的条件(2)将r对成组的点进行重排。这样得到的最终符号为$(-1)^r(-1)^{4r-1}(-1)^r=-1$。

C_0与C交错形成的封闭路线可以划分成C_0-边界与$C-$边界重合的一类与C_0与C围成封闭路线一类，两类之间没有公共点，而且在两类内部，也就是说，不同封闭路线之间，不同的重合对之间都不会有公共点。从C_0排列到C排列的变换先按照顺序将形成的封闭路线的那些点移动到一起，然后再像上面提到的四步来变换，最终调整封闭路线上的那些元素其满足条件(2),就可以达到从C_0到C的变换，由于一对相邻的元素在排列中移动，不会引起排列的符号变化，所以排列C的符号就等于-1的那些封闭路线个数次幂。给a_{ij}赋以±1，使得每个封闭路线产生一个负号，那么问题就解决了。由于C_0-边界与$C-$边界是交替出现的，把封闭路线按照横向单位条状划分，得到的每个条中必然含有奇数个方块，而且这些条共有奇数个，因此封闭路线中一点包含奇数个方块。容易看到竖直方向上，$C-$边界的一半数目是一个奇数，这样令A中的元素$a_{p_1p_2}(p_1<p_2)$为

$$a_{(i,j;i+1,j)}=1,1\le i\le m-1,1\le j\le n$$

$$a_{(i,j;i,j+1)}=(-1)^i,1\le i\le m,1\le j\le n-1$$

$a_{(i,j;i+1,j)}=0$,其它

这样就得到了矩阵A，通过公式$det(A)=pf^2(A)$，只要计算$det(A)$就可以了。对矩阵行列式的计算已经有一套非常有效的方法了，所以问题得到了很好的解决。

2.2 推广

是否可以沿着这种方法把问题推广到更一般的情形呢？比如用1×4或者1×6的块去覆盖长方形，覆盖方法数是多少呢？下面本文设法对1×4覆盖长方形进行讨论。

把问题转化成取每个小方块中点，把一个1×4 $tetramer$转化为长为3的直线段。$C=(p_1,p_2,p_3,p_4)(p_5,p_6,p_7,p_8)...(p_{N-3},p_{N-2},p_{N-1},p_N)$.
其中$(p_j,p_{j+1},p_{j+2},p_{j+3}), j=4k+1(k=0,1,...)$为一个$tetramer$的四个连续点。为了一种覆盖对应与一种表示要求满足

$p_1<p_2<p_3<p_4, p_5<p_6<p_7<p_8, ..., p_{N-3}<p_{N-2}<p_{N-1}<p_N(1)$

$p_1<p_5<...<p_{N-3}(2)$

这样的排列与$pfaffian$的排列不同，所以不再能用$pfaffian$来计算了。但是从形式上看这些排列与$pfaffian$要求的排列又很相似，只是作为一个小组的数字个数由2变成了4，$\sum\limits_{\sigma=p_1p_2...p_N satisfy(1)(2)} sgn\sigma a_{p_1p_2p_3p_4}a_{p_5p_6p_7p_8}...a_{p_{N-3}p_{N-2}p_{N-1}p_N}$，对于覆盖单项取值为1否则为0。为了给每个$a_{ijkl}$赋值，将每个覆盖对应一个$dimer$覆盖，假设$dimer$覆盖的矩阵为$(a_{ij})$，那么只要让$a_{ijkl}=a_{ij}a_{kl}$ 即可。所以得到

$a_{(i,j;i+1,j;i+2,j;i+3,j)}=1, 1\le i\le m-3, 1\le j\le n$

$a_{(i,j;i,j+1;i,j+2;i,j+3)}=(-1)^i, 1\le i\le m, 1\le j\le n-3$

$a_{(i,j;i',j';i'',j'';i''',j''')}=0$,其它

为了得到每个下标变量都是从1到N的a_{ijkl},令$a_{jikl}=-a_{ijkl}, a_{kjil}=-a_{ijkl}, a_{ljki}=-a_{ijkl}$。这样得到的$(a_{ijkl}), 1\le i,j,k,l\le N$仍然称之为矩阵，为了区别于一般的矩阵概念，这里引入内维数和外维数概念，内维数为小组成员个数，外维数即指下标变量的个数N。而把上述求值仍称为$pf(A)$。

期望A对应于一个值，和$pf(A)$有关系类似于内维数为2的矩阵和它的$pfaf-fian$的关系。怎样定义这个值是合理的？

这里定义$det(A)=\sum\limits_{\sigma,\tau,\gamma} sgn\sigma sgn\tau sgn\gamma a_{1\sigma(1)\tau(1)\gamma(1)}a_{2\sigma(2)\tau(2)\gamma(2)}...a_{N\sigma(N)\tau(N)\gamma(N)}$
可以证明这样定义的$det(A)$关于任意一个下标作为主序结果是相等的，下面证明之。

证明：$\sum\limits_{\sigma,\tau,\gamma} sgn\sigma sgn\tau sgn\gamma a_{1\sigma(1)\tau(1)\gamma(1)}a_{2\sigma(2)\tau(2)\gamma(2)}...a_{N\sigma(N)\tau(N)\gamma(N)}$

$=\sum\limits_{\sigma,\tau,\gamma} sgn\sigma sgn\tau sgn\gamma a_{\sigma^{-1}(1)1\tau\sigma^{-1}(1)\gamma\sigma(1)}a_{\sigma^{-1}(2)2\tau\sigma^{-1}(2)\gamma\sigma(2)}\cdots$
$a_{\sigma^{-1}(N)N\tau\sigma^{-1}(N)\gamma\sigma(N)}$

$=\sum\limits_{\sigma',\tau',\gamma'} sgn\sigma' sgn\tau' sgn\sigma' sgn\gamma' sgn\sigma' a_{\sigma'(1)1\tau'(1)\gamma'(1)}a_{\sigma'(2)2\tau'(2)\gamma'(2)}\cdots$

$$a_{\sigma'(N)N\tau'(N)\gamma'(N)}$$

$$=\sum_{\sigma',\tau',\gamma'} sgn\sigma' sgn\tau' sgn\gamma' a_{\sigma'(1)1\tau'(1)\gamma'(1)}a_{\sigma'(2)2\tau'(2)\gamma'(2)}...a_{\sigma'(N)N\tau'(N)\gamma'(N)}$$即证。

这样定义的$det(A)$与$pf(A)$之间会有类似于内维数为2的等价关系吗？首先来看，普通矩阵即内维数为2的反称矩阵A,$det(A)=pf^2(A)$

证明

法一：首先易得$pf(A)=\sum\limits_{j=2}^{n}(-1)^j a_{1j}pf(A_{\hat{1}\hat{j}})$.

下证$\sqrt{det(A)}=\sum\limits_{j=2}^{n}(-1)^j a_{1j}\sqrt{det(A_{\hat{1}\hat{j}}}$. $\det(A)=\sum_j a_{ij}C_{ij}$,这里$C_{ij}=(-1)^{i+j}det(A_{ij})$是代数余子式$\det(A\times \mathrm{adj}(A))=\det(A)^n$.

$$\det\begin{pmatrix} 1\,0\,\cdots\,0 \\ 0\,1\,\cdots\,0 \\ a_{31}a_{32}\cdots a_{3n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}\times\det\begin{pmatrix} C_{11}C_{21}\cdots C_{n1} \\ C_{12}C_{22}\cdots C_{n2} \\ C_{13}C_{23}\cdots C_{n3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_{1n}C_{2n}\cdots C_{nn}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} C_{11}\;C_{21} \\ C_{12}\;C_{22}\end{pmatrix}\det(A)^{n-2}$$

因此，$\det(A_{12,12})\det(A)^{n-1}=\det\begin{pmatrix} C_{11}\;C_{21} \\ C_{12}\;C_{22}\end{pmatrix}\det(A)^{n-2}.det(A)\neq 0$

这里$A_{12,12}$是A删除前两行前两列的$(n-2)\times(n-2)$的余子式。

一般的$C_{ii}C_{jj}-C_{ij}C_{ji}=\det(A_{ij,ij})\det(A)$.

这里n是偶数并且A是反称矩阵，因此$det(A_{ii})=0$

而$C_{ij}=(-1)^{n-1}C_{ji}=-C_{ji}$，

因此得到$C_{ij}^2=\det(A_{ij,ij})\det(A)$,

开根号后得到$C_{ij}=sign(C_{ij})\sqrt{\det(A_{ij,ij})\det(A)}$

$\det(A)=\sum_j a_{ij}sign(C_{ij})\sqrt{\det(A_{ij,ij})\det(A)}$

即得$\sqrt{\det(A)}=\sum_j a_{ij}sign(C_{ij})\sqrt{\det(A_{ij,ij})}$，即证。

法二：$det(A)=\sum\limits_{\sigma} sgn\sigma a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}$.
$\sigma=(i_1...i_{s_1})(i_{s_1+1}...i_{s_2})...(i_{s_{k-1}+1}...i_{s_k})=\alpha_1\alpha_2...\alpha_k$，考虑$A$是反称矩阵，可以将$det(A)$的求和一些乘积单项进行合并。显然这些项当且仅当乘积项对应的排列$\beta_1\beta_2...\beta_k$其中β_i为α_i或者α_i^{-1}。
因此，当σ中含有奇轮换时，其对应的乘积项相消。
而当σ中不含有奇轮换时，其对应的系数为2^t。
另一方面，$pf^2(A)$中的单项$a_{1]\sigma(1)}a_2\sigma(2)...a_{n\sigma(n)}$来源于前后两个乘积和项。$\begin{pmatrix} i_1i_2...i_{s_1-1}i_{s_1} \\ i_2i_3...i_{s_1}i_1 \end{pmatrix}$只能分拆成两组$\{(i_1i_2),(i_3i_4),...,(i_{s_1-1}i_{s_1})\}$，$\{(i_2i_3),(i_4i_5),...,(i_{s_1}i_1)\}$,则这两组下标出现于前后两项中的方法有两种。从而最终σ排列单项系数为2^t,因此就有$det(A)=pf^2(A)$。

但是不幸的是这两种方法都不能很容易地推广为内维数为4的情形。实际上对于内维数为4的矩阵$A, det(A)\neq pf^2(A), det(A)\neq pf^4(A)$，即证。

下面对一些特殊情形进行讨论：

1. 内维数$=4$,外维数$=4:$

$$det(A)=\sum_{\sigma,\tau,\gamma} sgn\sigma sgn\tau sgn\gamma a_{1\sigma(1)\tau(1)\gamma(1)}a_{2\sigma(2)\tau(2)\gamma(2)}a_{3\sigma(3)\tau(3)\gamma(3)}a_{4\sigma(4)\tau(4)\gamma(4)}$$

将每个乘积单项下标表达成矩阵形式

即
$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ \sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4) \\ \tau(1)\tau(2)\tau(3)\tau(4) \\ \gamma(1)\gamma(2)\gamma(3)\gamma(4) \end{pmatrix},$$

则矩阵的横向与纵向都是1234的一个排列,所以每个单项都是加一个正负号的a_{1234}^4.
再来看每个单项的符号:

$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ i_1i_2i_3i_4 \\ j_1j_2j_3j_4 \\ k_1k_2k_3k_4 \end{pmatrix} \dashrightarrow \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,2\,3\,4 \\ 1\,2\,3\,4 \\ 1\,2\,3\,4 \end{pmatrix}$产生的符号为$sgn\sigma sgn\tau sgn\gamma$

$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ i_1i_2i_3i_4 \\ j_1j_2j_3j_4 \\ k_1k_2k_3k_4 \end{pmatrix} \dashrightarrow \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,1 \\ 2\,2\,2\,2 \\ 3\,3\,3\,3 \\ 4\,4\,4\,4 \end{pmatrix}$产生的符号为$a_{i\sigma(i)\tau(i)\gamma(i)} \dashrightarrow a_{1234}$对所有$i$产生的符号乘积。

而$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,2\,3\,4 \\ 1\,2\,3\,4 \\ 1\,2\,3\,4 \end{pmatrix} \dashrightarrow \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,1 \\ 2\,2\,2\,2 \\ 3\,3\,3\,3 \\ 4\,4\,4\,4 \end{pmatrix}$产生的符号为1。

因此，每个乘积单项都是a_{1234}^4。

下面按字典序将矩阵按照$i_1i_2i_3i_4j_1j_2j_3j_4k_1k_2k_3k_4$字典序排列，

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,1\,4\,3 \\ 3\,4\,1\,2 \\ 4\,3\,2\,1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,1\,4\,3 \\ 3\,4\,2\,1 \\ 4\,3\,1\,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,1\,4\,3 \\ 4\,3\,1\,2 \\ 3\,4\,2\,1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,1\,4\,3 \\ 4\,3\,2\,1 \\ 3\,4\,1\,2 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,3\,2\,1 \\ 3\,4\,1\,2 \\ 2\,1\,4\,3 \end{pmatrix}$$

共24项，所以最终得到$det(A_4^4) = 4!pf^4(A_4^4)$。

2. 外维数为奇数的反称矩阵A_n^4:

考虑标量矩阵 $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,...\,n \\ \sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)...\sigma(n) \\ \tau(1)\tau(2)\tau(3)...\tau(n) \\ \gamma(1)\gamma(2)\gamma(3)...\gamma(n) \end{pmatrix}$

将σ写成轮换乘积，$\sigma = \alpha_1\alpha_2...\alpha_t$，则存在$\alpha_r$为奇数轮换。因此，$(1, \alpha_1\alpha_2...\alpha_{r-1}\alpha_r\alpha_{r+1}...\alpha_t, \tau, \gamma)$对应项与$(1, \alpha_1\alpha_2...\alpha_{r-1}\alpha_r^{-1}\alpha_{r+1}...\alpha_t, \tau, \gamma)$对应项相消，因此最终有$det(A_n^4) = 0$.

3. 展望:

对于4的倍数阶外维数的内维为4的矩阵，会与它的$pfaffian$之间有什么关系呢？如果确实有等价关系，将期望对新的形式矩阵寻求类似矩阵初等变换的变换，标准型，进而将这里的计算结果写成显式。

更进一步可以考虑内维数为偶数的矩阵，它的行列式与$pfaffian$关系，以及行列式标准型等。

参考文献

[1] 冯克勤, 2000. 代数数论.

[2] Cohn, H., 2000. 2-adic behavior of domino tilings .

[3] Henry Cohn, Michael Larsen, James Propp, 2002. The shape of a typical boxed plane partition .

[4] Kasteleyn, P.W., 1961. The statistics of dimers on a lattice. Physica 27.

[5] Propp, J., 1999. Enumeration of matchings:problems and progress. New Perspectives in Geometric Combinatorics Volume 38.

致　　谢

我非常荣幸在南京大学读了三年的研究生，正如南大的校训“淳朴敦厚，励学敦行”所言，这里的老师和学生身上都透着严谨，朴实，深厚的气息，学术气氛既自由又紧张，大家都在兢兢业业地专注于科研。在这里我学到了很多做人，做学问的道理。在这即将离开的日子回想起给予我无私帮助和共同学习奋斗的良师益友时，心里难免感慨万千。

感念师恩，永记于心。首先，我要感谢我敬爱的导师郭学军教授。在学习上，导师渊博的学识和诲人不倦的态度不停地鞭策着我努力学习。在生活上，导师的宽厚与朴实风范感召我。在论文撰写过程中，郭老师在选题上，开题撰写过程中给予了细心的指导与提携。感谢一直以来您对我的谆谆教导和严格要求。涓涓师恩，铭记于心，只愿师生情谊一生延续。

其次，要感谢秦厚荣，黄兆泳，孙智伟，丁南庆,纪庆忠等老师们，正是在他们的付出和努力下才有数学系的良好学习氛围。同时，感谢杨云，黄丹丹等同门们，他们在学习上给予我很多帮助。

最后，感谢父母这么多年的默默付出与支持。