MPM2 Projet Mathématique 2017-2018

Etienne TAILLEFER DE LAPORTALIERE
Romain PEREIRA
Cyril PIQUET

13/02/2018

Sommaire

Préambule

Ce projet est réalisé dans le cadre de nos études à l'ENSIIE. L'objectif est de modéliser un marché financier et de déterminer les prix et la couverture d'option européenne.

1 Modèle de Cox-Ross-Rubinstein

On a $\boxed{l = 2^N}$ trajectoire possible pour l'évolution du prix de l'actif risqué, entre l'instant initial 1 et l'instant final N.
On a $\boxed{N+1}$ valeurs possibles pour $S_{t_N}^N$

INSERT SCHEMA ICI ILLUSTRANT LES 2 VALEURS PRECEDENTES

1. $\mathbb{Q}$ est la probabilité risque-neutre, vérifiant: $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[T_1^{(N)}] = 1 + r_N$
On note: $q_n = \mathbb{Q}(T_1^{(N)} = 1 + h_N)$ Donc:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[T_1^{(N)}] &= \sum_{t \in T_1^{(N)}(\Omega)} x\mathbb{P}(T_1^{(N)} = t) \\ &= (1+h_n)q_N + (1+b_n)(1-q_n) \\ &= 1 + r_N \\ \Rightarrow & \boxed{q_N = \frac{r_N - b_N}{h_N - b_N}} \end{aligned} \tag{1}$$

2. Soit $p_(N) = \frac{1}{(1+r_N)^N}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f(S_{t_N}^{(N)})]$, le prix de l'option qui paye $f(S_{t_N}^{(N)}$. On a:

- $p_{(0)} = f(s)$
- $$\begin{aligned} p_{(1)} &= \frac{1}{(1+r_N)^1}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f(S_{t_1}^{(N)})] \\ &= \frac{1}{(1+r_N)^1}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f(T_1^{(N)}S_{t_0}^{(N)})] \\ &= \frac{1}{1+r_N}[q_N f[(1+h_N)s] + (1-q_N)f[(1+b_N)s)]] \\ &= [...] \text{ (en se basant sur l'arbre de la figure 1)} \end{aligned} \tag{2}$$
- $$p_{(N)} = \frac{1}{(1+r_N)^N}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}q_N^k(1-q_N)^{N-k}f((1+h_N)^k(1+b_N)^{N-k})$$

1.1 Premier pricer

1.2 Deuxième pricer

1.3 Comparaison

1.4 La couverture

2 Modèle de Black-Scholes

2.1 Le modèle

2.2 Le pricer par la méthode de Monte-Carlo

2.3 Le pricer par formule fermée

3 Convergence des prix

4 EDP de Black-Scholes

5 Références