Projet IPI: chemins de poids minimum

Romain PEREIRA

04/12/2017

Table des matières

Préambule

Ce projet est réalisé dans le cadre de mes études à l'ENSIIE.
Le but est d'implémenter des algorithmes de recherche de 'chemin le plus court', dans des graphes orientés.
Ce document rapporte mon travail, et explique les choix techniques que j'ai pris.

On considère (X, A) un graphe.

- n : Card(X)
- X : sommets du graphe
- A : arcs du graphe
- s : sommet 'source', celui à partir duquelle les chemins sont construits
- t : sommet 'target', celui vers lequel on souhaite construire un chemin

1 Recherche de chemin le plus court

1.1 Parcours en largeur (graphes non-pondérés)

On considère ici un graphe où les arcs sont non pondérés.
'Le chemin le plus court' entre 2 sommets corresponds à une famille d'arcs, dont le cardinal minimum.
On souhaite codder l'information

- 'il existe un arc entre le sommet 'u' et le sommet 'v' '

Cette information est un booléen, et peut donc être coddée sur un bit. J'économise ainsi beaucoup de mémoire. (8 fois plus que si l'arc était coddé sur un octet), en representant mes arcs sur un tableau de bit.

Soit 'b' l'indice d'un bit dans un tableau d'octet. Pour y accéder, il faut récuperer l'indice b_o de l'octet correspondant dans le tableau, et l'indice b_b du bit sur cet octet.

En posant :

- b_o = b / 8 (quotient de la division euclidienne de 'b' par 8)
- b_b = b % 8 (reste de la division euclidienne de 'b' par 8)

on s'assure de l'unicité,

- b = 8 b_o + b_b

(SCHEMA)

De plus, on peut également faire une transformation entre 2 coordonnées ('u', 'v') et le bit 'b'. On souhaite que le bit 'b' soit à 1 s'il y a un arc entre 'u' et 'v', sur 0 sinon. Pour cela, j'utilise la bijection :

- u = b % n
- v = b / n
- b = n * v + u (Rappel : 'n' est le nombre de sommet dans le graphe)

Je ne perd pas de temps en lecture / écriture dans le tableau des arcs, car ces changements de coordonnées ne necessite que 1 multiplication, 1 addition, et quelques operations sur les bits (diviser par 8 <=> décaler les bits de 3 vers la droite)

De plus, en réduisant la mémoire utilisé, je rends mon programme plus 'cache-friendly', le rendant plus rapide. Le processeur écrit des blocs mémoire du programme dans sa mémoire cache : plus les données sont compactes, moins il aura à faire des allés/retours entre la mémoire du programme et sa mémoire cache.

POur enregistrer les sommets en fonction de leur profondeur dans le graphe, et ainsi les visiter dans l'ordre de leur profondeur, j'utilise une file FIFO (1er

entré, 1er sorti).
(VOIR STRUCTURE DE DONNEES 'list')

Chaque sommet 'u' de mon graphe possède un attribut pointant vers un autre sommet du graphe. Une fois l'algorithme de parcours terminé, cet attribut pointe vers le prédécesseur de 'u', dans le chemin le plus court allant de 's' à 't', et passant par 'u'. Pour reconstruire le chemin, il suffit de regarder recursivement les prédécesseurs, en partant du sommet 't' jusqu'à ce que l'on ait atteint 's'. La complexité de la reconstruction est en O(m), où 'm' est la longueur du chemin.

(SCHEMA DE LA REMONTE)

Cette modélisation permet d'optimiser les coûts de stockage, et la remonté est d'un coût négligeable devant le temps de résolution du chemin. Elle sera réutiliser dans Dijkstra et A*

1.2 Algorithme de Dijkstra (graphes pondérés positivement)

On considère ici un graphe où les arcs sont pondérés avec des poids positifs. 'Le chemin le plus court' entre 2 sommets corresponds au chemin avec la somme des poids de ses arcs minimum.
L'algorithme de Dijkstra nous est fourni dans le sujet. Remarquons que si le poids de tous les arcs sont identiques, on retrouve l'algorithme de parcours en largeur.

1.2.1 1ère approche

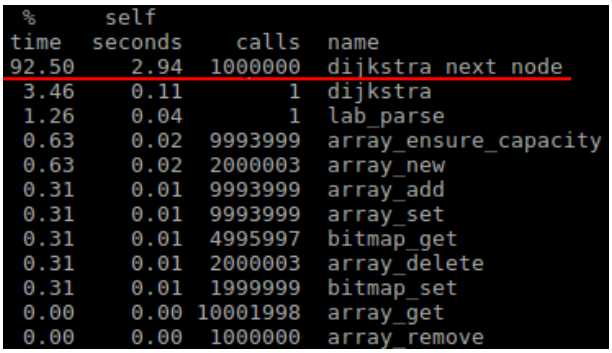
Ma 1ère implementation (voir 'dijkstra.c.bkp') reprends le squelette du parcours en largeur. La seule différence réside dans le choix du prochain sommet à visiter.
Dans le parcours en largeur, les sommets sont visités dans leur ordre d'apparation dans la liste (1er entré, 1er sorti). Trouver le prochain sommet à visiter est d'une complexité **O(1)**.

Dans l'algorithme de Dijkstra, les sommets sont visités par ordre du poids de leur chemin à 's'. Ainsi, si la file de visite contient 'm' sommets, trouver le prochain sommet à visiter devient en complexité **O(m)**

1.2.2 File de priorité ('Priority Queue')

Après avoir implementé Dijkstra avec cette 1ère approche, j'ai étudier le temps d'execution du programme.
Il s'est avéré que mon programme passe, en moyenne, plus de 70% de son temps d'execution à chercher le prochain sommet à visiter. (l'opération 'trouver un sommet 'u' non visité minimisant 'd(u)').

Ainsi, j'ai decidé d'implémenter des 'files de priorités', et plus précisement des 'tas binaire'. Cette structure de donnée est une file, permettant de définir des



% time	self seconds	calls	name
92.50	2.94	1000000	dijkstra_next_node
3.46	0.11	1	dijkstra
1.26	0.04	1	lab_parse
0.63	0.02	9993999	array_ensure_capacity
0.63	0.02	2000003	array_new
0.31	0.01	9993999	array_add
0.31	0.01	9993999	array_set
0.31	0.01	4995997	bitmap_get
0.31	0.01	2000003	array_delete
0.31	0.01	1999999	bitmap_set
0.00	0.00	10001998	array_get
0.00	0.00	1000000	array_remove

FIGURE 1 – *résultat de 'gprof' sur 'tests/exo3/06'*

priorités parmis les éléments, et d'effectuer les 4 opérations élémentaires suivantes (avec 'm' le nombre d'élément dans la file) :

- 'insérer un élément' : **O(log m)**
- 'extraire l'élément ayant la plus grande priorité' : **O(log m)**
- 'tester si la file de priorité est vide' : **O(1)**
- 'diminuer la priorité d'un élément déjà inséré' : **O(log m)**

les détails techniques peuvent être trouvé en annexe [3], ou directement dans mon implementation. *(voir queue.[c,h])*

1.3 Algorithme A* (graphes pondérés et fonctions heuristiques)

L'algorithme A* est une extension de l'algorithme de Dijkstra.
Avec l'algorithme de Dijkstra, on parcourt le graphe en largeur selon le poids de ses arcs. Avec A*, on effectue la même opération, mais on ajoute une heuristique aux poids des arcs. *'Une heuristique est une méthode de calcul qui fournit rapidement une solution réalisable, pas nécessairement optimale ou exacte, pour un problème d'optimisation difficile.* [2]

Cette heuristique permet de modifier l'ordre de priorité dans lequel les sommmets seront visités dans le graphe. Bien quel fait perdre l'optimalité, elle permet d'orienter la recherche dans le graphe, rendant la recherche plus rapide. (et avec une heuristique bien conçu au problème, on s'assure tout de même une solution proche de l'optimal)

Remarquons également qu'en utilisant une heuristique nulle (qui renvoie toujours '0'), on obtient très exactement l'algorithme de Dijkstra. C'est d'ailleurs comme cela que je l'ai re-implementé Dijkstra, une fois l'algorithme A* implementé et optimisé. (une version de l'algorithme de Dijkstra 'stand-alone' est toujours disponible dans le fichier 'dijstra.c.bkp')

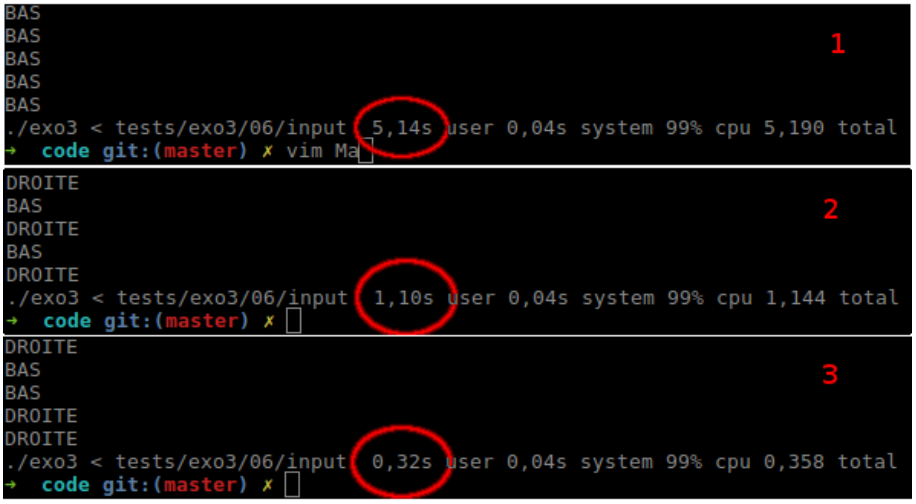


FIGURE 2 – *Temps d'execution des algorithmes*

Ces résultats sont ceux appliqués au test exo3/06
(graphe de 1 000 000 de sommets, on cherche le plus court chemin entre les 2 sommets les plus distants)

- 1 : Dijkstra sans file de priorité
- 2 : Dijkstra avec file de priorité
- 3 : A* avec file de priorité, et fonction heuristique (distance de Manhattan)

2 Application : resolution labyrinthe

Dans l'exercice 3, on nous propose de résoudre des labyrinthes. Nous allons bien evidemment nous servir des fonctions algorithmes préalablement implementé.

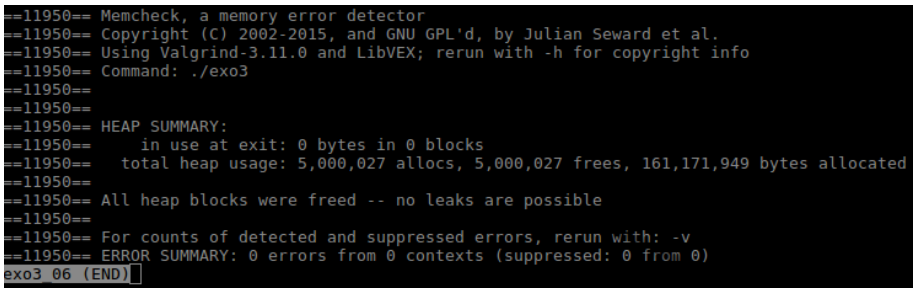


FIGURE 3 – *résultat de 'valgrind' sur 'tests/exo3/06')*

3 A propos de l'implémentation

Ci joint, vous trouverez mon implémentation en language 'C'.

3.1 Structures de données

J'ai implémenté plusieurs structures de données, afin d'optimiser les algorithmes. Je les ai conçu de manière générique, afin de pouvoir m'en reservir plus tard dans d'autre projet. Si vous souhaitez plus de détail, je vous conseille de regarder les fichiers '.h' correspondants.

- 'list' : liste doublement chainée. Elle sont plus efficace que des listes simplement chainées (insertion et deletion). Elles me servent file FIFO et LIFO.

- 'array' : tableau dynamique générique. Le tableau grossit automatiquement si besoin lors de l'insertion.

- 'bitmap' : tableau d'octet. Cette structure facilite les opérations sur les bits.

- 'pqueue' : une file de priorité ('Binary Priority Queue' ci-dessus)

- 'node' : sommet d'un graphe. Cette representation m'a permis de créer un système d'héritage, rendant mon code plus modulaire. (n'importe quel structure héritant de 'node' est compatible avec tous les algorithmes implémentés.)

- graphes : pas de structure explicit implémenté. Mes graphes sont representés sous forme de tableau de sommet.

3.2 Qualité logiciel

Mes programmes passent les tests fournis.
De plus, j'ai debuggé l'integralité du code à l'aide de l'outil 'valgrind'. Il ne semble y avoir ni fuite mémoire, ni dépassement de tampon, ni accès à de la mémoire non initialisé. (tester sur le set de test fourni).

J'ai optimisé mon programme à l'aide de l'outil 'gprof'. D'où par exemple, l'utilisation du 'define' ARRAY_ITERATE implementé dans le fichier 'array.h'.

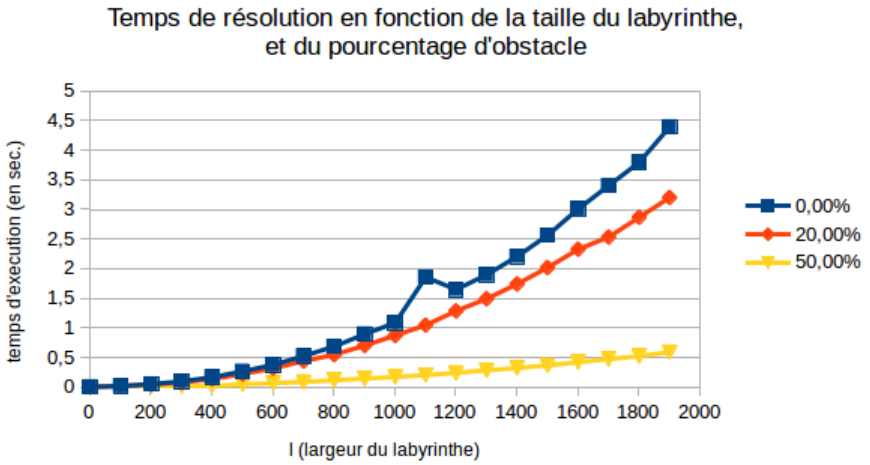


FIGURE 4 – *Temps de résolution de labyrinthe avec Dijkstra (A* heuristique nulle)*

Ce 'define' me permet d'itérer rapidement sur les tableaux, en utilisant l'arithmetique des pointeurs.

J'ai généré des labyrinthes aléatoires, afin d'obtenir ces courbes : Dans le cas exterme à 0% d'obstacles, on a l * l sommets (case vide du labyrinthe) dans le graphe, d'où l'allure quadratique de la courbe.

4 Sources

Références

[1] Dr. Mike POUND, Sean RILEY, 24 Février 2017,
Maze Solving - Computerphile,
https ://www.youtube.com/watch ?v=rop0W4QDOUI.

[2] Wikipédia, Heuristique, 31 Octobre 2017,
https ://fr.wikipedia.org/wiki/Heuristique_ (mathématiques).

[3] Wikipédia, Binary Heap, 15 Décembre 2017,
https ://en.wikipedia.org/wiki/Binary_ heap.

[4] Mary K. VERNON, Priority Queues, 3 Septembre 2016,
http ://pages.cs.wisc.edu/ vernon/cs367/notes/11.PRIORITY-Q.html.