

目 录

序 言

1 绪 论

- 1.1 概 述 (1)
- 1.2 离散单元法的基本思想 (3)
- 1.3 离散单元法在国内外的的发展状况 (4)

2 刚性块体模型

- 2.1 概 述 (8)
- 2.2 离散单元法的基本方程 (8)
- 2.3 离散单元法的计算机实施 (12)
- 2.4 静态松弛离散单元法 (30)

3 参数选择和本构模型

- 3.1 概 述 (35)
- 3.2 阻 尼 (35)
- 3.3 时 步 (44)
- 3.4 本构模型 (47)

4 圆形刚性颗粒模型

- 4.1 概 述 (60)
- 4.2 力与位移的关系 (61)

4.3	平均应力和平均应变	(66)
4.4	边界条件	(79)
4.5	圆形颗粒离散单元法在编程方面的 主要特点	(83)
5	可变形块体模型	
5.1	概 述	(90)
5.2	充分变形块体模型	(91)
5.3	简单变形块体模型	(106)
6	三维离散单元法	
6.1	概 述	(111)
6.2	三维块体模型	(111)
6.3	力和位移的计算	(133)
6.4	球体模型	(138)
7	离散单元法与其他方法的耦合	
7.1	概 述	(144)
7.2	离散单元法与有限单元法的耦合	(144)
7.3	离散单元法与边界单元法的耦合	(153)
8	前处理器与后处理器	
8.1	概 述	(167)
8.2	离散单元法的单元生成	(167)
8.3	离散单元法的计算机图形处理	(177)

9 应用篇

9.1 概 述	(194)
9.2 离散单元法可靠性的理论验证	(194)
9.3 巷道支护问题	(205)
9.4 边坡工程	(218)
9.5 地下开采问题	(221)
9.6 动载问题	(229)
9.7 冰雪力学问题	(231)
9.8 核废料的热载问题	(236)
9.9 散体介质问题	(241)
9.10 断裂问题	(250)
9.11 渗流问题	(255)
9.12 节理-岩桥的加卸载特性	(260)

参考文献

1 绪 论

1.1 概 述

岩体是一种地质材料，它经受长期的地质构造作用，在一定的地质环境中形成一定的结构，显现出宽广和多变的材料响应范围。岩体与一般工程材料相比，其最大特点是一般具有结构上的不连续性，多为层面和节理面等弱面所切割。实际上，岩体结构的连续性和不连续性都是相对的。如图 1-1 所示，当取样范围较小时，可能碰到完整岩石，逐渐扩大取样范围，则是节理岩体。

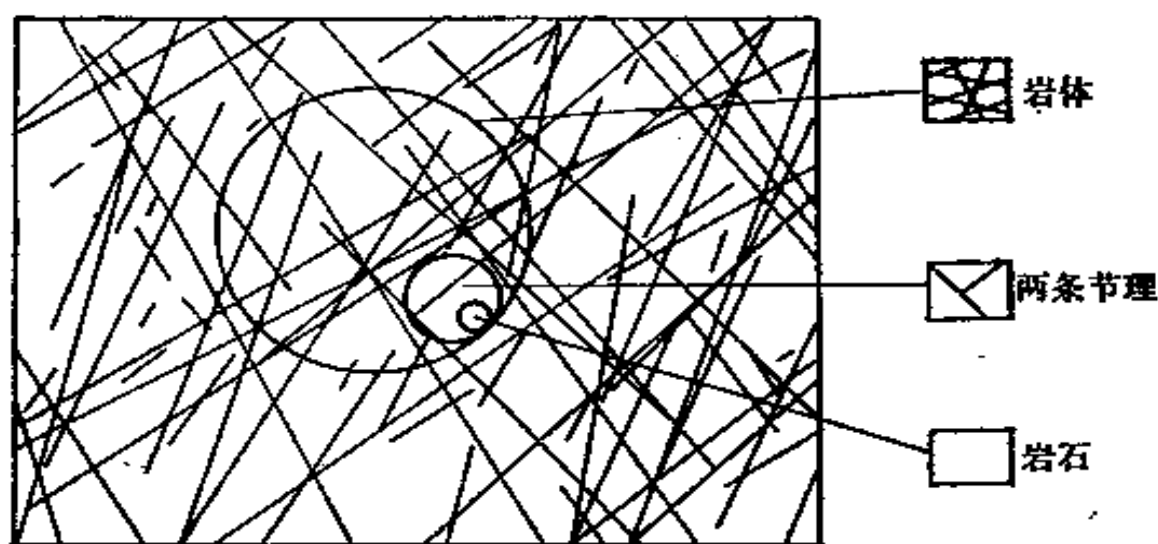


图 1-1 从完整岩石到节理岩体

岩体的性质取决于组成岩体的完整岩石的力学性质，以及岩体在漫长的地质年代中遭受多次应力变化所产生的不连

续面的数量和性质。在这两种控制岩石力学特性的因素中，何者重要，则要视工程的规模和不连续面的数量而定。一般从宏观意义上说，岩体可以视为连续介质，从而可以用弹性力学或塑性力学的方法来进行分析和计算。但在某些情况下，岩体却不能视做连续介质，如地下节理岩体中的巷道（见图 1-2），这时，就不宜用处理连续介质的力学方法进行计算。于是，离散单元法作为一种处理节理岩体的数值方法就应运而生。

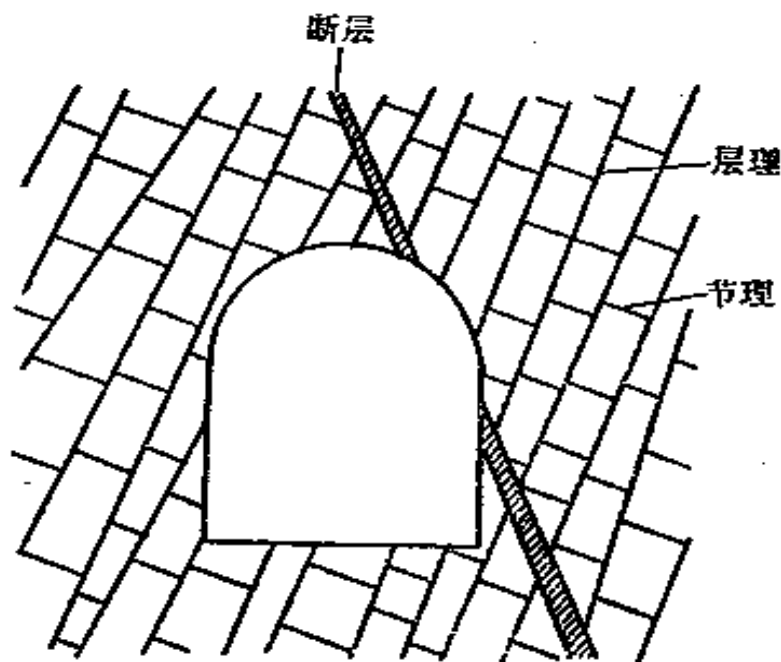


图 1-2 节理岩体中的巷道

近 20 年来，离散单元法有了长足的发展，已成为解决岩土力学问题的一个重要的数值方法，越来越受到人们的重视。因为工程中所见到的岩体其形态常呈非连续结构，所形成的岩石块体运动和受力情况多是几何或材料非线性问题，所以很难用解决连续介质力学问题的有限单元法或边界单元法等数值方法来进行求解，而离散单元法正是充分考虑到岩

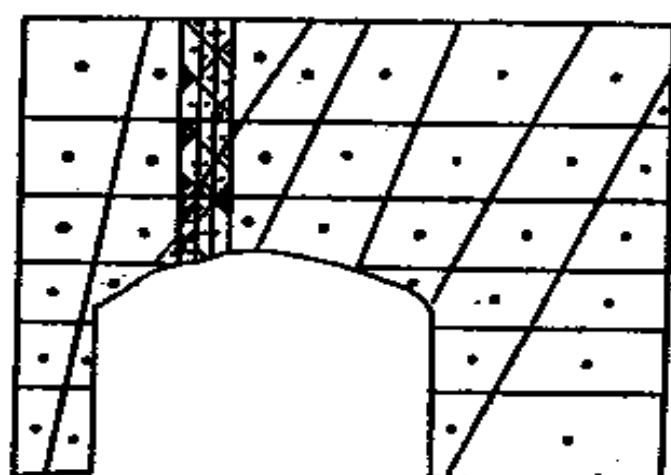
体结构的不连续性，适用于解决节理岩石力学问题。离散单元法除了用于边坡、采场和巷道的稳定性研究以及颗粒介质微观结构的分析外，已扩展到用于研究地震、爆炸等动力过程和地下水渗流、热传导等物理过程。

离散单元法与其他数值方法（如有限单元法、边界单元法等）耦合更能发挥各自方法的优点。例如，用边界单元法考虑远场应力的影响以模拟弹性的性质，用有限单元法作为中间过渡考虑塑性变形，再用离散单元法考虑近场不连续变形的情况，从而极大地扩展了数值方法的解题范围。

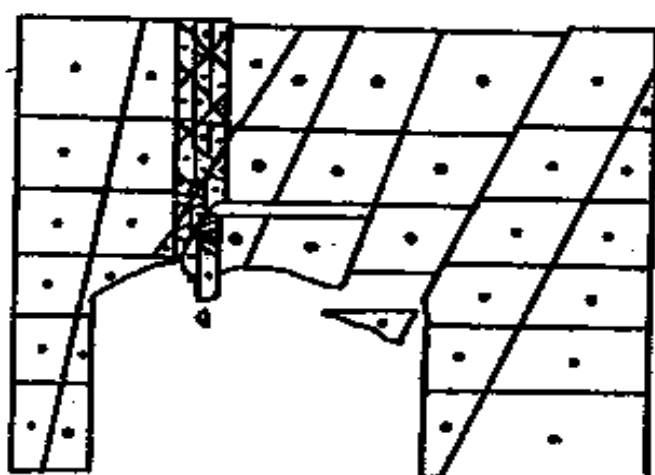
1.2 离散单元法的基本思想

离散单元法也像有限单元法那样，将区域划分成单元（见图 1-3(a)）。但是，单元因受节理等不连续面控制，在以后的运动过程中，单元结点可以分离，即一个单元与其邻近单元可以接触，也可以分开（见图 1-3(b)）。单元之间相互作用的力可以根据力和位移的关系求出，而个别单元的运动则完全根据该单元所受的不平衡力和不平衡力矩的大小按牛顿运动定律确定。

离散单元法是一种显式求解的数值方法。该方法与在时域中进行的其他显式计算相似，例如与解抛物线型偏微分方程的显式差分格式相似。“显式”是针对一个物理系统进行数值计算时所用的代数方程式的性质而言。在用显式法计算时，所有方程式一侧的量都是已知的，而另一侧的量只要用简单的代入法就可求得。这与隐式法不同，隐式法必须求解联立方程组。在用显式法时，假定在每一迭代时步内，每个块体单元仅对其相邻的块体单元产生力的影响，这样，时步就



(a)



(b)

图 1-3 离散单元模型

需要取得足够小，以使显式法稳定。由于用显式法时不需要形成矩阵，因此可以考虑大的位移和非线性，而不必花费额外的计算时间。

1.3 离散单元法在国内外的的发展状况

离散单元法一般认为是 Cundall 于 1971 年提出来的^[1,2]。该法适用于研究在准静力或动力条件下的节理系统

或块体集合的力学问题，最初用来分析岩石边坡的运动。到 1974 年，二维的离散单元法程序趋于成熟^[3]，当时已有屏幕图形输出的交互会话功能。但由于受计算机内存的限制，不少程序是用汇编语言写成，到 1978 年才全部翻译成 FORTRAN IV 的文本^[4]，成为离散单元法的基本程序。与此同时，Cundall 和 Strack 还开发了二维圆形块体的 BALL 程序^[5,6]，用于研究颗粒介质的力学行为，所得结果与 Drescher 等人用光弹技术的实验结果极为吻合^[7]，使 BALL 程序在研究颗粒介质的本构方程方面大放异彩。

Lemos 于 1983 年开发了离散单元法与边界单元法耦合的半平面程序^[8]，并用于计算节理和断裂介质中的应力分布问题^[9]。

Lorig 于 1984 年开发了包括前处理和后处理的离散单元法与边界单元法耦合程序^[10]。翌年，他到澳大利亚英联邦科学与工业发展组织的岩土力学研究所，修改了他原先的程序。这个修改后的程序文本称为 HYDEBE (HYBRID DISCRETE ELEMENT BOUNDARY ELEMENT)，其功能更强，包括一个前处理程序 CREATE，类似于有限单元法程序中的自动划分网格，一个与边界单元法耦合程序 BOUND 和一个离散单元法程序 BLOCK。

Cundall 于 1980 年就开始研究块体在受力后变形以及根据破坏准则允许断裂的离散单元法^[11]，这显然是将块体视为刚体的离散单元法的一个进步。Cundall 称这种方法为 UDEC (UNIVERSAL DISTINCT ELEMENT CODE)，该程序最后于 1985 年完成^[12,13]。UDEC 现已广泛用于岩土力学和采矿工程，被公认为对节理岩体进行数值模拟的一种行之有效的方法。

至于三维离散单元法的发展则要迟些,其主要原因是数据结构复杂,要求计算机应具有较大的容量,并且计算结果的图形显示较为困难,如切一剖面,块体间一般来讲是不接触的,犹如浮在空中,看起来不直观。三维离散单元法程序 3DEC (3-DIMENSIONAL DISTINCT ELEMENT CODE)已由 Cundall 与 ITASCA 咨询集团于 1986 年开发出来^[14]。其基本原理同 UDEC 一样,只是数据结构作了较大的改进。

与二维 BALL 程序相对应的有三维 TRUBAL 程序^[15],除了数据结构外,它的基本原理也同 BALL 程序一样。

三维问题的离散单元法目前尚处于发展阶段,但其算法已经基本成熟^[16,17],已经有了一些利用 3DEC 程序解决工程问题的尝试^[18-20]。可以预期,随着大容量计算机的普及,三维离散单元法用于解决工程实际问题的时刻将指日可待。

[21—31]中列出了近十几年国外发展和应用离散单元法的其他主要文献,以供参考。

离散单元法在我国的研究和应用起步较晚,但发展却非常迅速。目前已在我国的采矿工程、岩土工程以及水利水电工程等科研与设计中得到应用,呈方兴未艾之势。

王泳嘉和钊万禧于 1986 年在第一届全国岩石力学数值计算及模型试验讨论会上,首次向我国岩石力学与工程界介绍了离散单元法的基本原理及几个应用例子^[32,33]。张清在他的书中也辟专门的一章介绍不连续岩体的计算模型和计算方法^[34]。

离散单元法原先是为研究节理岩体的边坡稳定和巷道稳定而开发的,我国学者充分利用离散单元法中个别块体可以

脱离母体而冒落的特点，将其用于放矿的数值模拟和自然崩落法崩落机制及底部结构的稳定性研究，并取得很好的成绩^{〔35-43〕}。

在边坡稳定性研究方面，我国学者用模型试验在边坡失稳的瞬间连续拍摄的像片与离散单元法的计算结果对照，二者结果吻合，再次证明离散单元法的数值模拟可以代替昂贵费时的相似材料模型试验^{〔44-46〕}。离散单元法还曾用于对云浮硫铁矿和盘石镍矿边坡稳定的研究，也取得了很好的效果^{〔47,48〕}。

姚建国将离散单元法用于岩层移动的研究，认为这是一种比较符合矿山工程实际的数值方法^{〔49〕}。关于离散单元法在矿山压力、岩层和地表移动方面的研究还有文献〔50—52〕。

离散单元法与其他数值方法（例如有限单元法或边界单元法）进行耦合以考虑远场连续、近场离散的特点，这方面的工作见文献〔53, 54〕。值得提出的是，刘建武根据 Stewart 和 Brown 提出的静态松弛法^{〔55〕}，首次在我国开发了静态松弛离散单元法程序，并结合二滩电站模型试验的资料进行计算，结果比较满意^{〔56〕}。

其他有关离散单元法原理、应用和研究的文章请见文献〔57—63〕。

2 刚性块体模型

2.1 概 述

顾名思义，离散单元法是将所研究的区域划分成一个个分立的多边形块体单元，单元之间可以看成是角-角接触、角-边接触或边-边接触，而且随着单元的平移和转动，允许调整各个单元之间的接触关系。最终，块体单元可能达到平衡状态，也可能一直运动下去。

目前，工程中常用的数值方法有有限单元法和边界单元法等。有限单元法的理论基础是基于最小势能的变分原理，边界单元法的理论基础是 Betti 互等定理。而本书所介绍的离散单元法，其理论基础是结合不同本构关系的牛顿第二定律，因而可以采用动态松弛法或静态松弛法进行求解。离散单元法的原理虽然比较简单，但在解决非连续介质大变形问题时却是非常实用的。

离散单元法的单元，从性质上分，可以是刚性的，也可以是非刚性的；从几何形状上分，可以是任意多边形，也可以是圆形。本章将要介绍的是刚性块体模型，块体可以是任意多边形。刚性假设对于应力水平比较低的问题（如边坡稳定和放矿模拟等）是合理的。

2.2 离散单元法的基本方程

在解决连续介质力学问题时，除了边界条件外，还有 3

个方程必须满足，即平衡方程、变形协调方程和本构方程。变形协调方程保证介质的变形连续；本构方程即物理方程，它表征介质应力和应变间的物理关系。对于离散单元法而言，由于介质一开始就假定为离散块体的集合(图 2-1(a))，故块与块之间没有变形协调的约束，但平衡方程需要满足。例如对于某个块体 B (见图 2-1)，其上有邻接块体通过边、角作用于它的一组力(见图 2-1(b)) $F_{xi}, F_{yi}(i=1-5)$ ，如果

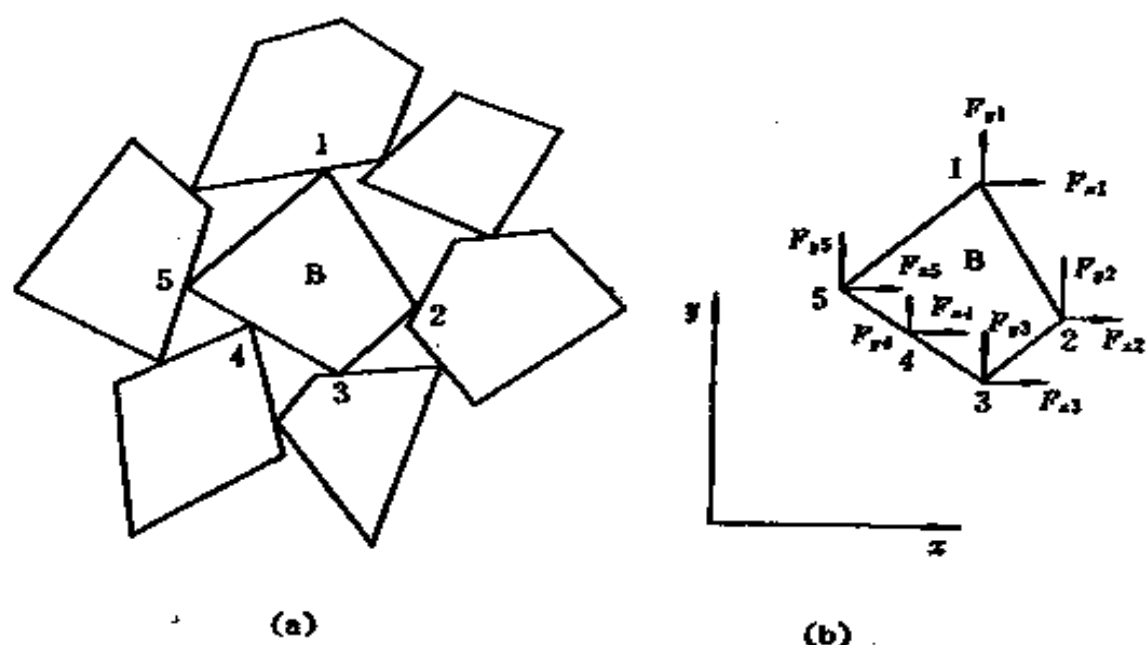


图 2-1 块体的集合及作用于个别块体上的力

考虑重力，则还要加上自重。这一组力对块体的重心会产生合力 F 和合力矩 M 。如果合力和合力矩不等于零，则不平衡力和不平衡力矩使块体根据牛顿第二定律 $F = ma$ 和 $M = I\ddot{\theta}$ 的规律运动。块体的运动不是自由的，它会遇到邻接块体的阻力。这种位移和力的作用规律就相当于物理方程，它可以是线性的，也可以是非线性的。计算按照时步迭代并遍历整个块体集合，直到对每一个块体都不再出现不平衡力和

不平衡力矩为止。

2.2.1 物理方程——力和位移的关系

假定块体之间的法向力 F_n 正比于它们之间法向“叠合” u_n (见图 2-2(a))，即

$$F_n = k_n u_n \quad (2-1)$$

式中， k_n 为法向刚度系数。

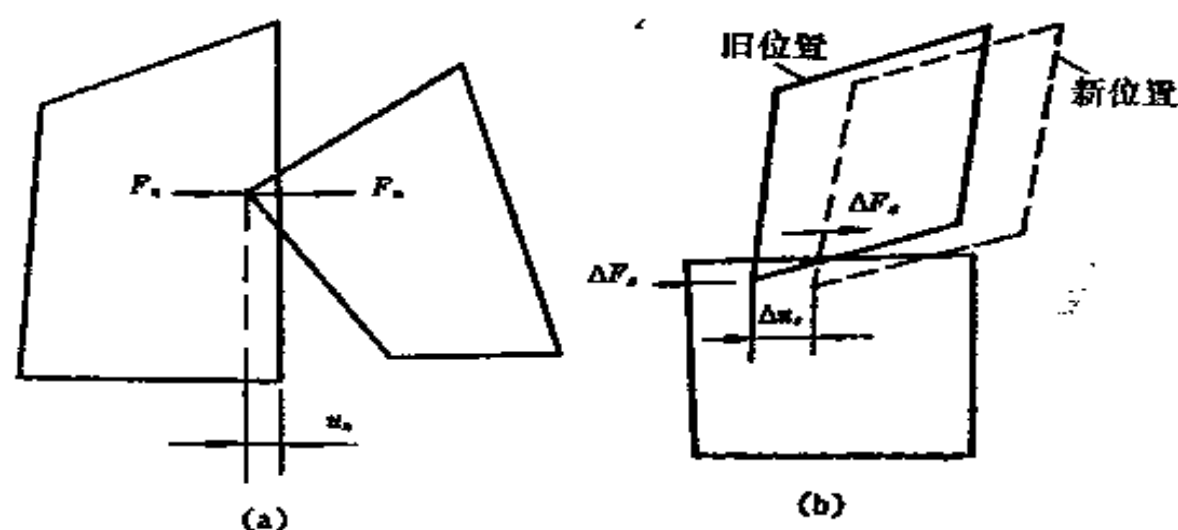


图 2-2 离散单元之间的作用力

这里所谓的“叠合”是计算时假定的一个量，将它乘上一个比例系数作为法向力的一种度量。例如可以增大 k_n 值而将 u_n 取得很小仍然能够表示相等的法向力。

如果两个离散单元的边界相互“叠合”(见图 2-2(b))，则有两个角点与界面接触，可用界面两端的作用力来代替该界面上的力。当然，实际的界面接触情况要远比这种两个角点接触模式复杂，但无法确定究竟哪些点相接触，所以还是采用最为简单的两个角点相接触的“界面叠合”模式。

由于块体所受的剪切力与块体运动和加载的历史或途径有关，所以对于剪切力要用增量 ΔF_s 来表示。设两块体之

间的相对位移为 Δu_s , 则

$$\Delta F_s = k_s u_s \quad (2-2)$$

式中, k_s 为节理的剪切刚度系数。

式(2-1)和(2-2)所表示的力与位移关系为弹性情况, 但在某些情况下弹性关系是不成立的, 需要考虑破坏条件。例如, 当岩块受到张力分离时, 作用在岩块表面上的法向力和剪切力随即消失。对于塑性剪切破坏的情况, 需要在每次迭代时检查剪切力 F_s 是否超过 $C + F_n \tan \varphi$, 这里 C 为粘结力, φ 为内摩擦角; 如果超过, 则表示块体之间产生滑动, 此时剪切力取极限值 $C + F_n \tan \varphi$, 这就是所谓的摩尔-库仑准则。

2.2.2 运动方程——牛顿第二运动定律

根据岩块的几何形状及其与邻近岩块的关系, 可以利用上面讲述的原理, 计算出作用在某一特定岩块上的一组力, 由这一组力不难计算出它们的合力和合力矩, 并可以根据牛顿第二运动定律确定块体质心的加速度和角加速度, 进而可以确定在时步 Δt 内的速度和角速度以及位移和转动量。

例如, 对于 x 方向有加速度

$$a_x = \frac{F_x}{m} \quad (2-3)$$

式中, F_x 为 x 方向的合力; m 为岩块的质量。

对式(2-3)用向前差分格式进行数值积分, 可以得到岩块质心沿 x 方向的速度和位移:

$$\dot{u}_x(t_1) = \dot{u}_x(t_0) + a_x \Delta t$$

$$u_x(t_1) = u_x(t_0) + \dot{u}_x \Delta t$$

式中, t_0 为起始时间; Δt 为时步; $t_1 = t_0 + \Delta t$ 。

对于块体沿 y 方向的运动及其转动, 有类似的算式。

2.3 离散单元法的计算机实施

离散单元法的计算原理虽然很简单, 但在计算机上实施起来却非常复杂, 涉及到很多问题。本节将讨论离散单元法中的 4 个主要问题, 即动态松弛法、力和位移的计算循环、分格检索以及数据结构, 而将时步、阻尼以及前后处理等问题留在以后的章节中讨论。

2.3.1 动态松弛法

离散单元法中所用的求解方法有静态松弛法^[38]和动态松弛法^[64]两种。松弛法作为解联立方程组的一种方法, 在力学中有着重要的应用^[50]。其中, 动态松弛法是把非线性静力学问题化为动力学问题求解的一种数值方法^[69]。该方法的实质是对临界阻尼振动方程进行逐步积分。为了保证求得准静解, 一般采用质量阻尼和刚度阻尼来吸收系统的动能, 当阻尼系数取值稍小于某一临界值时, 系统的振动将以尽可能快的速度消失, 同时函数收敛于静态值。这种带有阻尼项的动态平衡方程, 利用有限差分法按时步在计算机上迭代求解就是所谓的动态松弛法。由于被求解方程是时间的线性函数, 整个计算过程只需要直接代换, 即利用前一迭代的函数值计算新的函数值, 因此, 对于非线性问题也能加以考虑, 这是动态松弛法的最大优点。其具体求解方法可以通过下面的简单例子来说明。

离散单元法的基本运动方程为:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = f(t) \quad (2-4)$$

式中, m 是单元的质量; u 是位移; t 是时间; c 是粘性阻尼系数; k 是刚度系数; f 是单元所受的外载荷。

式(2-4)的动态松弛解法就是假定 $t + \Delta t$ 时刻以前的变量 $f(t)$, $u(t)$, $u(t - \Delta t)$, $\dot{u}(t - \Delta t)$ 以及 $u(t - \Delta t)$ 等已知, 利用中心差分法, 式(2-4)可以变成:

$$m[u(t + \Delta t) - 2u(t) + u(t - \Delta t)]/(\Delta t)^2 + c[u(t + \Delta t) - u(t - \Delta t)]/(2\Delta t) + ku(t) = f(t) \quad (2-5)$$

式中, Δt 是计算时步。

由式(2-5)可以解出:

$$u(t + \Delta t) = \left\{ (\Delta t)^2 f(t) + \left(-\frac{c}{2} \Delta t - m \right) u(t - \Delta t) + [2m - k(\Delta t)^2] u(t) \right\} / \left(m + \frac{c}{2} \Delta t \right) \quad (2-6)$$

由于上式中右边的量都是已知的, 因此可以求出左边的量 $u(t + \Delta t)$ 。再将 $u(t + \Delta t)$ 代入下面两式中, 就可以得到单元在 t 时刻的速度 $\dot{u}(t)$ 和加速度 $\ddot{u}(t)$:

$$\dot{u}(t) = [u(t + \Delta t) - u(t - \Delta t)]/(2\Delta t)$$

$$\ddot{u}(t) = [\ddot{u}(t + \Delta t) - 2\ddot{u}(t) + \ddot{u}(t - \Delta t)]/(\Delta t)^2 \quad (2-7)$$

从以上介绍不难看出, 离散单元法利用中心差分法进行动态松弛求解, 是一种显式解法。它不需要解大型矩阵, 计算比较简单, 也节省计算时间, 并且允许单元发生很大的平移和转动, 因此克服了以往有限单元法和边界单元法的小变形假设, 可以用来求解一些非线性问题。但是离散单元法也有其不足的地方, 如计算时步 Δt 需要很小, 以及需要合理地确定阻尼系数等。

2.3.2 力和位移的计算循环

这里讨论的是如何用动态松弛法作力和位移的计算循环。关于静态松弛法，将在本章末讨论。

在用动态松弛法时，计算循环（见图 2-3）是以时步 Δt 向前差分进行。由于时步选取得非常小，每个单元在一个时步内只能以很小的位移与其相邻接的单元作用，而与较



图 2-3 计算循环

远的单元无关系，所以力在一个时步内只能传递到一个单元（见图 2-4）。用于求每个单元运动大小的基本方程则是牛顿第二运动定律。

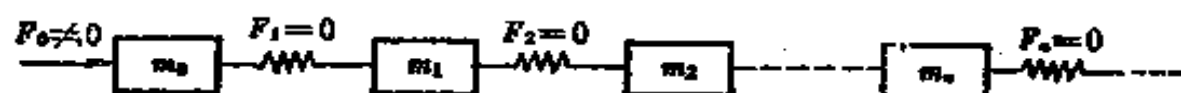


图 2-4 质量块 m_i 受力 F_i 后的瞬时传递特征

由于本章中所讲的单元是刚性的，因此单元之间的相对位移增量等完全由单元的几何尺寸、质心平移和单元绕其质心转角的大小来决定。如图 2-5 所示为在一个循环中所历经的计算过程。

如图 2-5(a) 所示为两个块体 i 和 j 。 x^i , y^i 和 x^j , y^j 分别为 i , j 块体形心的整体坐标； x^o , y^o 为这两

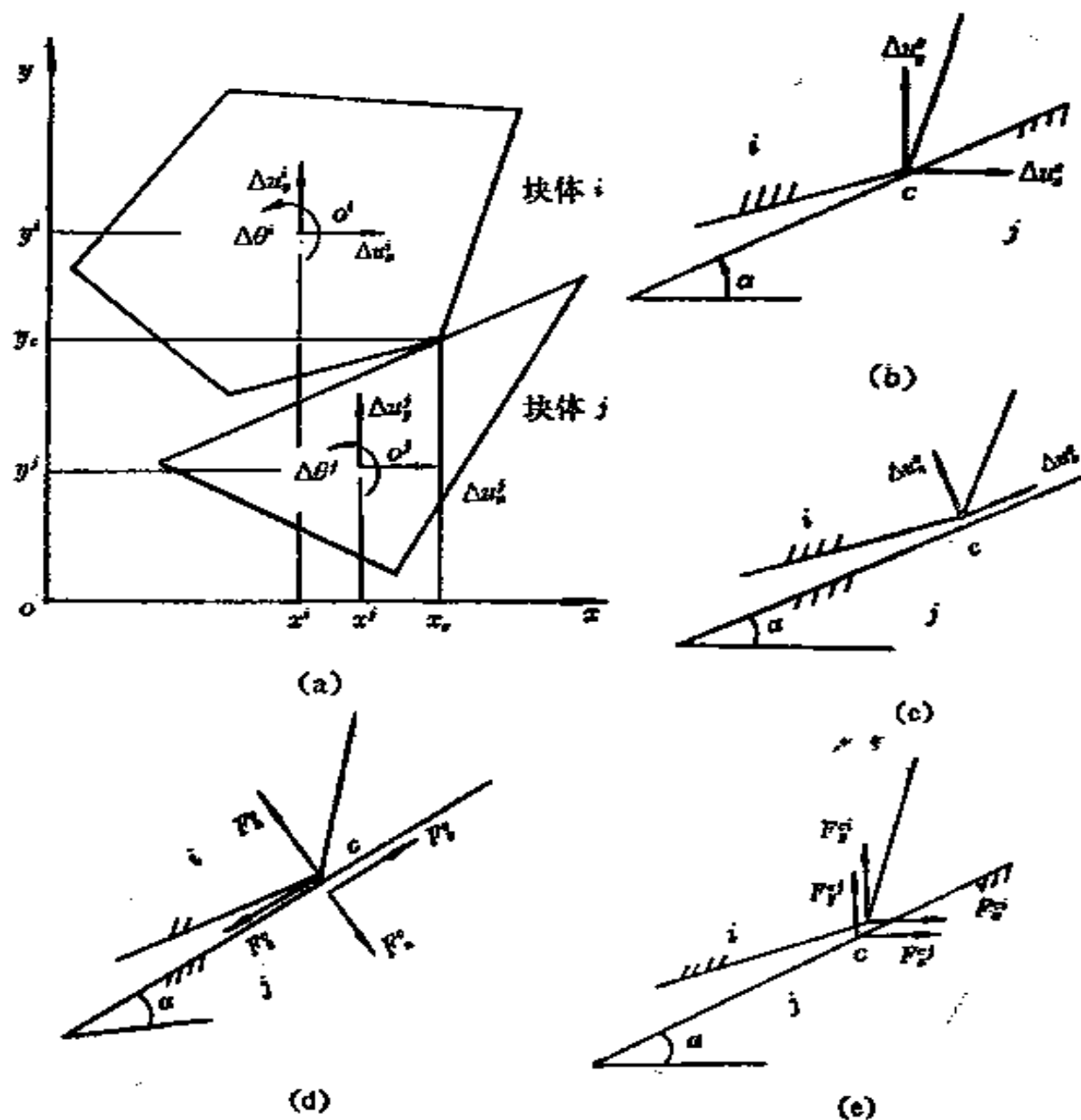


图 2-5 一个循环的计算过程

块体接触点 C 的整体坐标; $\Delta u_x^i, \Delta u_y^i, \Delta \theta^i$ 和 $\Delta u_x^j, \Delta u_y^j, \Delta \theta^j$ 等分别是 i, j 块体位移和转角的增量。图中所示的坐标、位移和转角等均为正方向。现在求在接触点 C 处, 块体相对于 j 块体的位移增量 Δu_x^c 和 Δu_y^c (见图2-5(b))。

一个矢量可以用复数表示为 $re^{i\theta}$ 。该矢量旋转 $\Delta \theta$ 的增量为:

$$\begin{aligned}\frac{d(re^{i\theta})}{d\theta} \cdot \Delta\theta &= ire^{i\theta} \cdot \Delta\theta = (-\sin\theta + i\cos\theta)r\Delta\theta \\ &= (-y + ix)\Delta\theta\end{aligned}\quad (2-8)$$

于是, 根据已知条件和式(2-8)可得:

$$\left. \begin{aligned}\Delta u_z^c &= [\Delta u_z^i - (y^c - y^i)\Delta\theta^i] - [\Delta u_z^j - (y^c - y^j)\Delta\theta^j] \\ \Delta u_x^c &= [\Delta u_x^i + (x^c - x^i)\Delta\theta^i] - [\Delta u_x^j + (x^c - x^j)\Delta\theta^j]\end{aligned}\right\}\quad (2-9)$$

将式(2-9)的整体坐标量经坐标变换, 转换成 i 块体相对于 j 块体沿接触点处法向和切向的位移增量(见图 2-5(c)), 有:

$$\left. \begin{aligned}\Delta u_n^c &= \Delta u_z^c \cos\alpha + \Delta u_x^c \sin\alpha \\ \Delta u_t^c &= -\Delta u_z^c \sin\alpha + \Delta u_x^c \cos\alpha\end{aligned}\right\}\quad (2-10)$$

式中, α 的定义如图 2-5(c)中所示。

引入刚度系数 k_n 和 k_s , 于是法向力和切向力 (见图 2-5(d)) 为:

$$\left. \begin{aligned}F_n^c &:= F_n^c - \Delta u_n^c k_n \\ F_s^c &:= F_s^c + \Delta u_t^c k_s\end{aligned}\right\}\quad (2-11)$$

式中, $:=$ 为赋值记号, 表示右端的值赋予左端的变量。

如果考虑接触点的阻尼力, 并假定阻尼力与位移增量成正比, 则有:

$$\left. \begin{aligned}D_n^c &= -\beta k_n \Delta u_n^c \\ D_s^c &= \beta k_s \Delta u_t^c\end{aligned}\right\}\quad (2-12)$$

式中, β 是块体的刚度阻尼比例系数。

根据不抗拉条件, 若 $F_n^c < 0$, 则令

$$\begin{aligned}F_n^c &= 0, & D_n^c &= 0 \\ F_s^c &= 0, & D_s^c &= 0\end{aligned}$$

若切向力超过摩擦力, 即 $|F_x^c| > \mu F_z^c$ 时, 则令

$$F_x^c := \mu F_z^c \cdot \text{sign}(F_x^c)$$

$$D_x^c = 0$$

式中, μ 为摩擦系数。后一等式成立是因为摩擦滑动本身就在消耗块体的动能, 因此无需再加阻尼力。

再将力转变为整体坐标系下的分量 (见图 2-5(e)) 有:

$$\left. \begin{aligned} F_z^{c,i} &= -(F_x^c + D_x^c) \cos \alpha - (F_y^c + D_y^c) \sin \alpha \\ F_y^{c,i} &= -(F_x^c + D_x^c) \sin \alpha + (F_y^c + D_y^c) \cos \alpha \\ F_x^{c,i} &= -F_z^{c,i} \\ F_y^{c,i} &= -F_y^{c,i} \end{aligned} \right\} \quad (2-13)$$

对所有 i 块体的接触力求和并加上 i 块体所受的载荷, 可得作用于其形心上的合力及合力矩:

$$\left. \begin{aligned} F_{x, \text{sum}}^i &= \sum_c F_z^{c,i} + F_{x, \text{load}}^i \\ F_{y, \text{sum}}^i &= \sum_c F_y^{c,i} + F_{y, \text{load}}^i + F_{y, \text{grav}}^i \\ M_{s, \text{sum}}^i &= \sum_c [F_y^{c,i}(x^c - x^i) - F_z^{c,i}(y^c - y^i)] \end{aligned} \right\} \quad (2-14)$$

式中, $F_{x, \text{load}}^i$, $F_{y, \text{load}}^i$ 和 $F_{y, \text{grav}}^i$ 分别为施加于 i 块体 x , y 方向的载荷和重力。

在求得 i 块体的不平衡力和不平衡力矩后, 就可求得形心的速度和角速度:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_x^i &:= \dot{u}_x^i + \frac{F_{x, \text{sum}}^i \cdot \Delta t}{m^i} \\ \dot{u}_y^i &:= \dot{u}_y^i + \frac{F_{y, \text{sum}}^i \cdot \Delta t}{m^i} \\ \dot{\theta}^i &:= \dot{\theta}^i + \frac{M_{s, \text{sum}}^i \cdot \Delta t}{I^i} \end{aligned} \right\} \quad (2-15)$$

式中, Δt 为时步; m^i 为 i 块体的质量; I^i 为 i 块体的惯性矩。

进一步对式(2-15)积分, 则可得位移和转角的增量, 以及位移和转角的值, 即

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_x^i &= \dot{u}_x^i \cdot \Delta t \\ \Delta u_y^i &= \dot{u}_y^i \cdot \Delta t \\ \Delta \theta^i &= \dot{\theta}^i \cdot \Delta t \end{aligned} \right\} \quad (2-16)$$

$$\left. \begin{aligned} u_x^i &:= u_x^i + \Delta u_x^i \\ u_y^i &:= u_y^i + \Delta u_y^i \\ \theta^i &:= \theta^i + \Delta \theta^i \end{aligned} \right\} \quad (2-17)$$

对 j 块体单元也有类似以上的公式。

上面所列出的运动公式是最简单的情况。如果考虑块体的质量阻尼, 则运动方程需要加上阻尼项。为了不 失一般性, 此时任一块体的运动方程可以写成:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{u}_x + \alpha m\dot{u}_x &= F_x \\ m\ddot{u}_y + \alpha m\dot{u}_y &= F_y + mg \\ I\ddot{\theta} + \alpha I\dot{\theta} &= M \end{aligned} \right\} \quad (2-18)$$

式中, α 为块体的质量阻尼比例系数; g 为重力加速度; 其他符号的意义同前。

对式(2-18)进行一阶中心差分可得:

$$\begin{aligned} m \frac{\dot{u}_x(t + \Delta t/2) - \dot{u}_x(t - \Delta t/2)}{\Delta t} \\ + \alpha m \frac{\dot{u}_x(t + \Delta t/2) + \dot{u}_x(t - \Delta t/2)}{2} &= F_x \\ m \frac{\dot{u}_y(t + \Delta t/2) - \dot{u}_y(t - \Delta t/2)}{\Delta t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha m \frac{\dot{u}_x(t + \Delta t/2) + \dot{u}_x(t - \Delta t/2)}{2} = F_x + mg \\
& I \frac{\dot{\theta}(t + \Delta t/2) - \dot{\theta}(t - \Delta t/2)}{\Delta t} \\
& + \alpha I \frac{\dot{\theta}(t + \Delta t/2) + \dot{\theta}(t - \Delta t/2)}{2} = M
\end{aligned}$$

从上式可以求得 $t + \Delta t/2$ 时刻的速度分量和角速度:

$$\begin{aligned}
& \dot{u}_x(t + \Delta t/2) \\
& = \left[\dot{u}_x(t - \Delta t/2)(1 - \alpha \Delta t/2) + \frac{F_x}{m} \Delta t \right] / (1 + \alpha \Delta t/2) \\
& \dot{u}_y(t + \Delta t/2) \\
& = \left[\dot{u}_y(t - \Delta t/2)(1 - \alpha \Delta t/2) + \left(\frac{F_y}{m} + g \right) \Delta t \right] / (1 + \alpha \Delta t/2) \\
& \dot{\theta}(t + \Delta t/2) \\
& = \left[\dot{\theta}(t - \Delta t/2)(1 - \alpha \Delta t/2) + \frac{M}{I} \Delta t \right] / (1 + \alpha \Delta t/2)
\end{aligned} \tag{2-19}$$

由式(2-19)可以得到 t 到 $t + \Delta t$ 时间内的位移和转角的增量:

$$\left. \begin{aligned}
\Delta u_x &= \dot{u}_x(t + \Delta t/2) \Delta t \\
\Delta u_y &= \dot{u}_y(t + \Delta t/2) \Delta t \\
\Delta \theta &= \dot{\theta}(t + \Delta t/2) \Delta t
\end{aligned} \right\} \tag{2-20}$$

于是, $t + \Delta t$ 时刻的位移和转角为:

$$\left. \begin{aligned}
u_x(t + \Delta t) &= u_x(t) + \Delta u_x \\
u_y(t + \Delta t) &= u_y(t) + \Delta u_y \\
\theta(t + \Delta t) &= \theta(t) + \Delta \theta
\end{aligned} \right\} \tag{2-21}$$

以上算法可归结为图 2-6 所示的循环交错求解特性。由

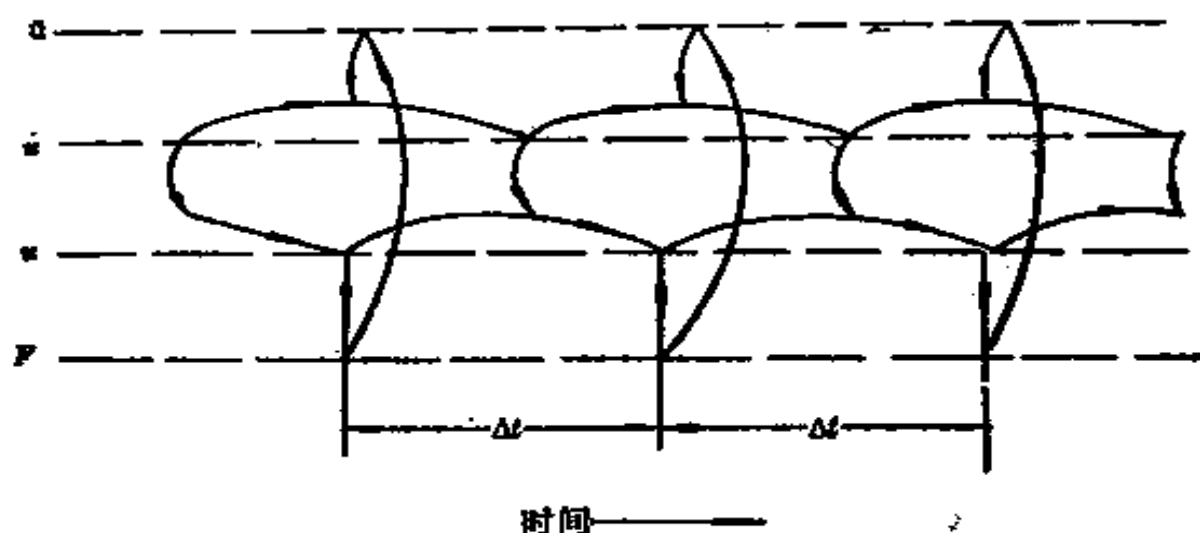


图 2-6 离散单元法的循环交错求解特性

图可见，如果根据边界条件已知位移 $u(t)$ ，则按照前面讲述的公式不难求出力 $F(t)$ ，然后可确定 $\dot{u}(t)$ ，加上前一轮已知的 $\dot{u}(t - \Delta t/2)$ ，进而可求得 $\dot{u}(t + \Delta t/2)$ ，对其积分后得 $u(t + \Delta t)$ 。如此循环往复，直到位移和力收敛，达到平衡状态，或者达到某一循环数为止。

在离散单元法计算中，每个块体的位置随着时步不断变化，下面给出块体坐标和角度变化的公式。

如图 2-7 所示，每个块体有位于其质心的局部坐标。在开始时局部坐标平行于整体坐标，随着块体的运动，局部坐标相对于整体坐

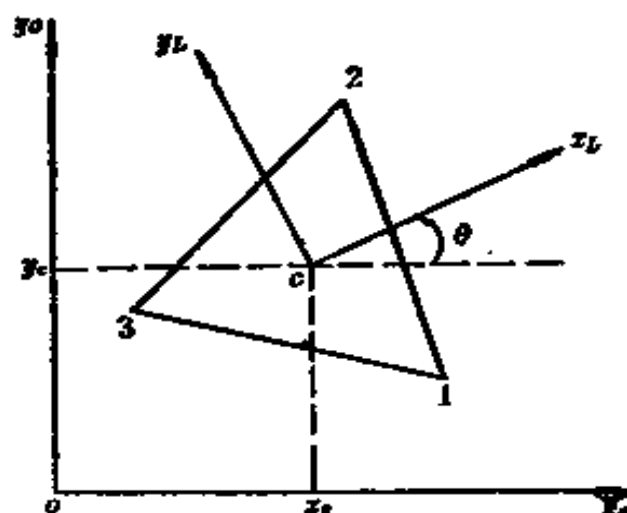


图 2-7 整体坐标与局部坐标

标发生平移和转动。虽然块体每个角的局部坐标不变，但其整体坐标却随时在变。对于图中三角形块体，其角的编号为逆时针顺序，第 i 和 $i+1$ 角点所连的边为第 i 边。

一般来说，块体的局部坐标容易计算。而整体坐标可由局部坐标求出，其公式为：

$$\left. \begin{aligned} x_G &= x_c + x_L \cos \theta - y_L \sin \theta \\ y_G &= y_c + x_L \sin \theta + y_L \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2-22)$$

式中， θ 表示局部坐标相对于整体坐标的转角； x_G 、 x_L 和 x_c 中的下标分别表示整体坐标、局部坐标和块体形心坐标。

因此，如果已知角-边接触的点局部坐标，就可以利用式(2-22)计算出式(2-9)中所用到的接触点整体坐标 x^c 和 y^c 。

如果转角 θ 用其正弦和余弦来表示，则转过 $\Delta\theta$ 后其正弦和余弦分别为：

$$\left. \begin{aligned} \text{SIN}^{\text{new}} &= \text{SIN}^{\text{old}} + \text{COS}^{\text{old}} \cdot \Delta\theta \\ \text{COS}^{\text{new}} &= \text{COS}^{\text{old}} - \text{SIN}^{\text{old}} \cdot \Delta\theta \end{aligned} \right\} \quad (2-23)$$

式中，上标 new 表示新的，old 表示旧的。

显然，根据定义在开始时局部坐标没有转动，而有 $\Delta\theta = \theta = 0$ ，故有 $\text{SIN} = 0$ 和 $\text{COS} = 1$ ，式(2-23)成立。但是，随着循环迭代次数的增加， $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ 会偏离 1，这样，需要用下列公式加以校正。

$$\left. \begin{aligned} \text{SIN} &:= \frac{\text{SIN}}{\sqrt{R}} \\ \text{COS} &:= \frac{\text{COS}}{\sqrt{R}} \end{aligned} \right\} \quad (2-24)$$

式中, $R = \cos^2 + \sin^2$ 。实际上, 因为 $R \approx 1$, 所以可以用 $\sqrt{R} \approx 0.5(R+1)$ 来进行计算。

如果取 $\Delta\theta = \frac{1}{64}$ 弧度对式(2-23)和(2-24)进行试验, 可以证明总的角度变化 $\sum\Delta\theta$ 在 $0-\pi/2$ 之间为均匀增加; 校正公式只要每迭代 10 次使用一次, 即可保证 SIN 和 COS 的绝对误差在 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 的范围内最大不会超过 0.0011。

在式(2-10)和(2-13)中, 要用到块体接触边与整体坐标轴 x 的夹角 α 的正弦和余弦, 可计算如下:

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= (y_a^{i+1} - y_a^i) / L^i \\ \cos \alpha &= (x_a^{i+1} - x_a^i) / L^i \end{aligned} \right\} \quad (2-25)$$

式中, L^i 为 i 边的长度; (x_a^i, y_a^i) , (x_a^{i+1}, y_a^{i+1}) 为 i 边的端点坐标。

2.3.3 分格检索

分格检索实际上是块体接触点的识别问题, 这是离散单元法所特有的一个问题。在有限单元法和边界单元法中, 单元之间的结点是固定的。但在离散单元法中, 允许单元有较大的位移, 此时某一块体可与这些块体接触, 彼时则该块体可与另外一些块体接触, 因此接触点是不固定的。原则上, 在离散块体系统中每一块体都有可能与其他任一块体相接触。例如, 假定有 100 个四边形块体, 每一个块体的任一个角都有可能与其他 99 个块体的任一条边相接触, 于是有:

$$(100 \times 4) \times (99 \times 4) \approx 400^2$$

种可能接触。如果在每一循环中都要检索 16 万次，虽然并非不可能，但是非常费时，实际上做不到。因此，人们想用一些别的办法来检查接触点。在上述算法中检查次数约为 N^2 ， N 为块体系统中所有块体角的总数。那么，能否找到一种检索方法使检查次数减小到 $N \lg N$ 或者甚至 N 呢？研究者们在这方面做了许多工作，其中分格检索是一种比较有效的方法。

对于多边形离散单元法来说，分格检索是首先将所研究的区域划分成方格网（见图 2-8），若想判断块体 ABCD 的 AB 边与哪些块体的边、角相接触，只需在涂有阴影的 15 个网格内检索即可。在计算过程中，每隔若干次循环程序自动检索一次，去掉脱离接触的关系，同时形成新的接触关系。

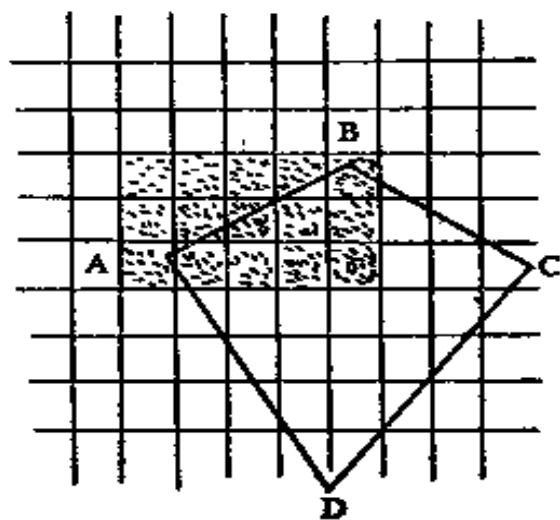


图 2-8 分格检索

那么，何时进行检索呢？可用最大可能位移判断，即在每个时步计算最大可能位移累加值

$$u_{\max} := u_{\max} + \max[\text{ABS}(du)] \quad (2-26)$$

式中， du 是块体角点或形心的位移增量。当 u_{\max} 大于事先给定的限值 CTOL（1—3 个坐标单位）时，就需要重新检索以判断块体之间的接触关系，且此时置 $u_{\max} = 0$ 。

另外，CTOL 还可以作为判断两个块体是否接触的限值。当两个块体的间隙不大于 CTOL 时，就认为它们是相互接触的；反之，当两个原来接触的块体之间距离大于

CTOL 时, 就认为它们分离了。

网格尺寸和数目对计算效率至关重要。如果网格尺寸过大, 虽然会降低访问网格的时间, 但每个网格内的块体角数相对增多, 机器检索可能达到无格检索所需要的时间。如果网格过小, 虽然会降低内存要求, 但是会产生很多空网格, 同样会消费 CPU 时间。因此有一个最优网格尺寸的问题。一般情况下, 所研究的区域尺寸是 100—10 000 个坐标单位, 理想的网格数目应是块体数目的 10%—100%, 最少为 20 个。有了网格数目, 其尺寸也就自然定了。选择网格尺寸的最简单方法是取所研究区域尺寸的十分之一。

需要注意的是, 当块体运动到网格区域外时, 就认为该块体固定不动了。因此, 计算区域应比所研究区域大些。

2.3.4 数据结构

数值计算中常用的数据结构一般是静态的。所谓静态数据结构, 就是在一个数据结构存在期间, 其结构的特性不变。在计算中, 静态数据结构可以用不同的方式来表示, 其中最简单和最普遍的方法是把数据元素存在一组连续的存贮单元中, 每个元素可直接连接下一个元素, 由计算机内存按地址随机地存取, 而不需要指针。但是, 对静态数据结构作插入一个结点或删除一个结点的运算是非常困难的, 几乎要移动一半以上的结点, 而且数据量不易随意扩充。由于离散单元法计算中, 单元之间的接触关系是不固定的, 需要经常建立和修正它们之间的接触关系, 相应地, 它们的数据结构要随时作增加或删除一些结点的运算。因此, 静态数据结构对离散单元法是不合适的, 应该采用另一种数据结构——动态数据结构。

动态数据结构是使用线性链表（一组任意的存贮单元）存放数据元素的一种结构，它可以动态地增加或减少结点。线性链表中的每一个结点除了需要存贮数据元素的值外，还需要有一个能够指示数据元素在表中位置的指针或链信息。因此，对于线性链表来说，整个数据结构是由若干个结点组成，而每个结点又是由数据域和指针两部分组成。如图 2-9

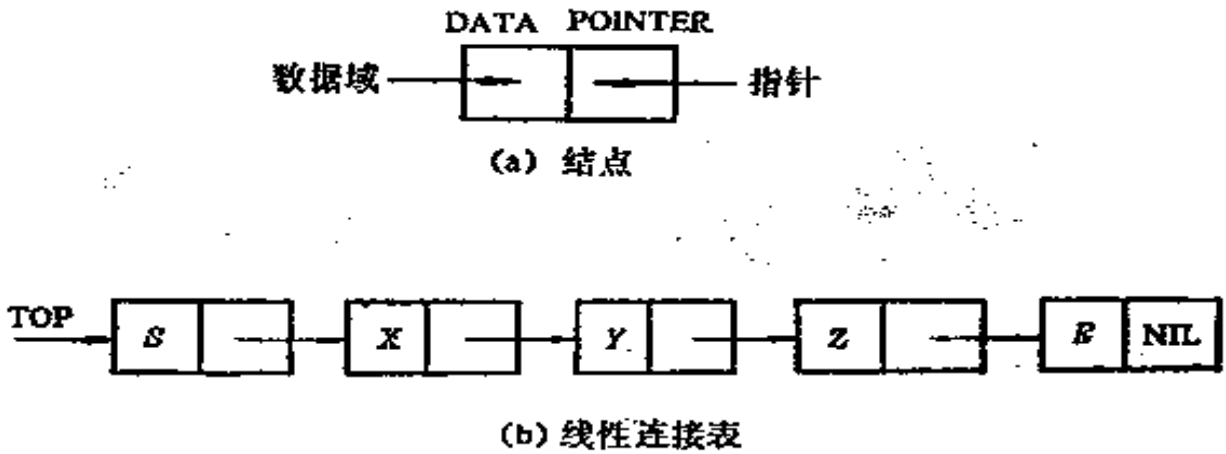


图 2-9 动态数据结构

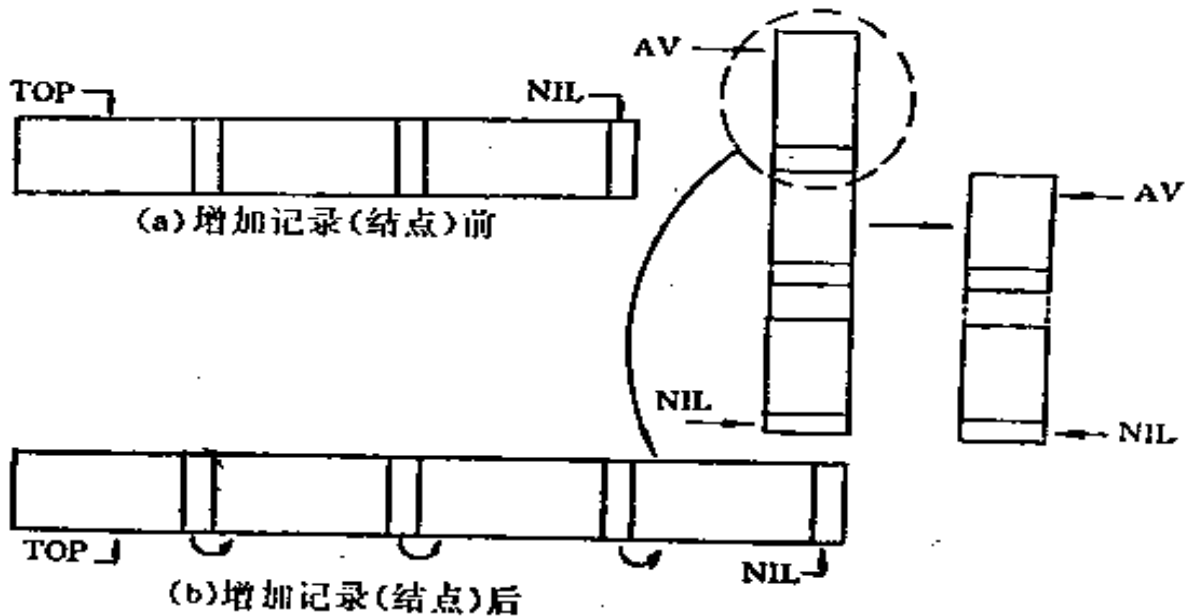


图 2-10 结点的插入

(a)所示,图中数据域存放数据元素的值,而指针存放下一个结点在存储器中的地址。图 2-9(b)中 TOP 为指向第一个结点的特殊指针,称为表头指针; NIL 为链表中最后一个结点的指针,称为空指针,表示已达到表的末端 (一般 NIL 置为零)。

线性链表结构对结点的插入或删除都是十分方便的。如图 2-10 所示,结点的插入需要访问一个可利用表 (也称之为空表,其表头指针用 AV 表示), 从那里获得新结点以

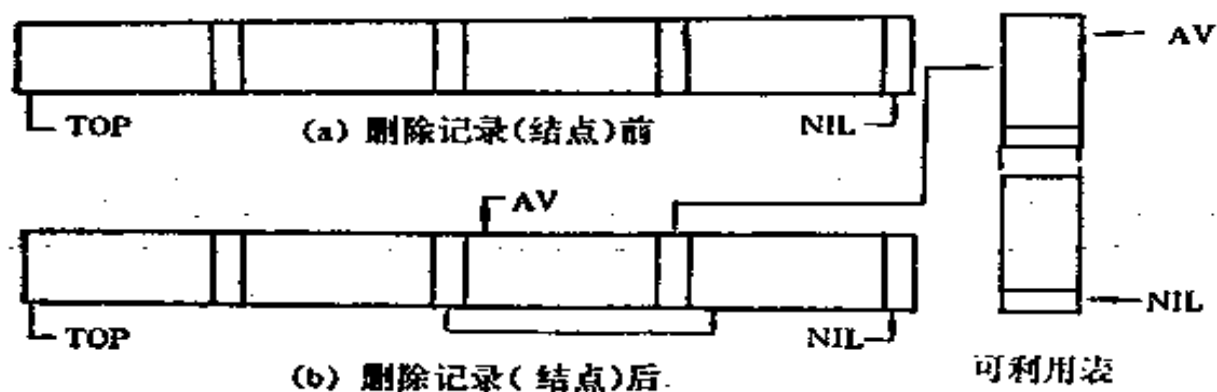


图 2-11 结点的删除

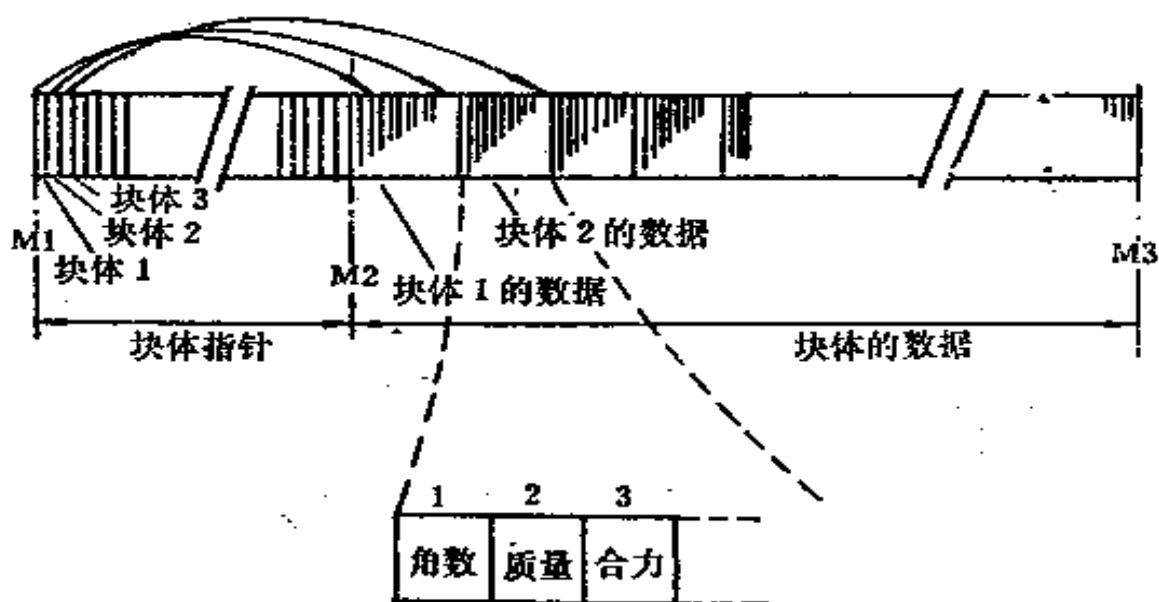


图 2-12 块体数据结构

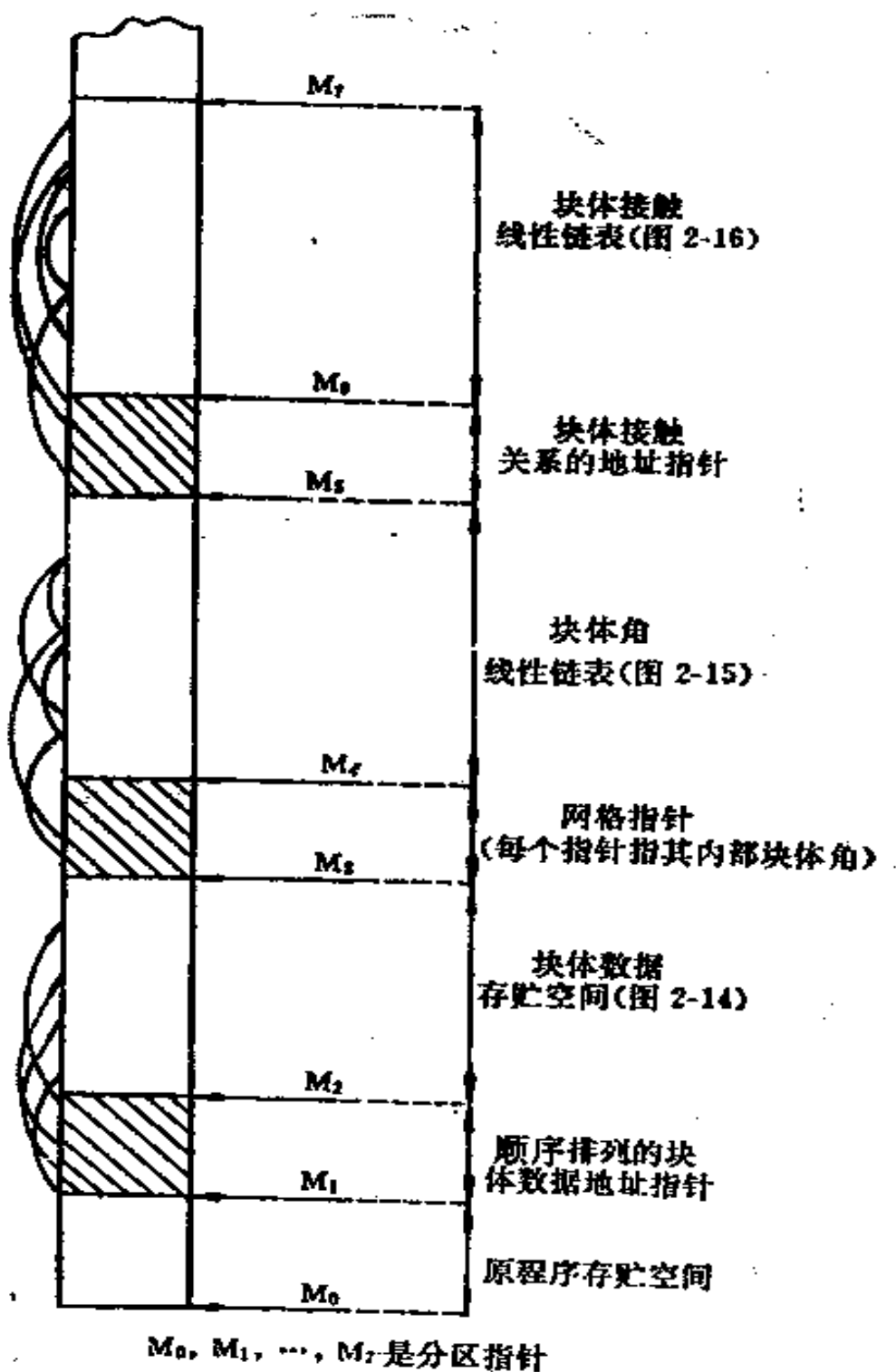
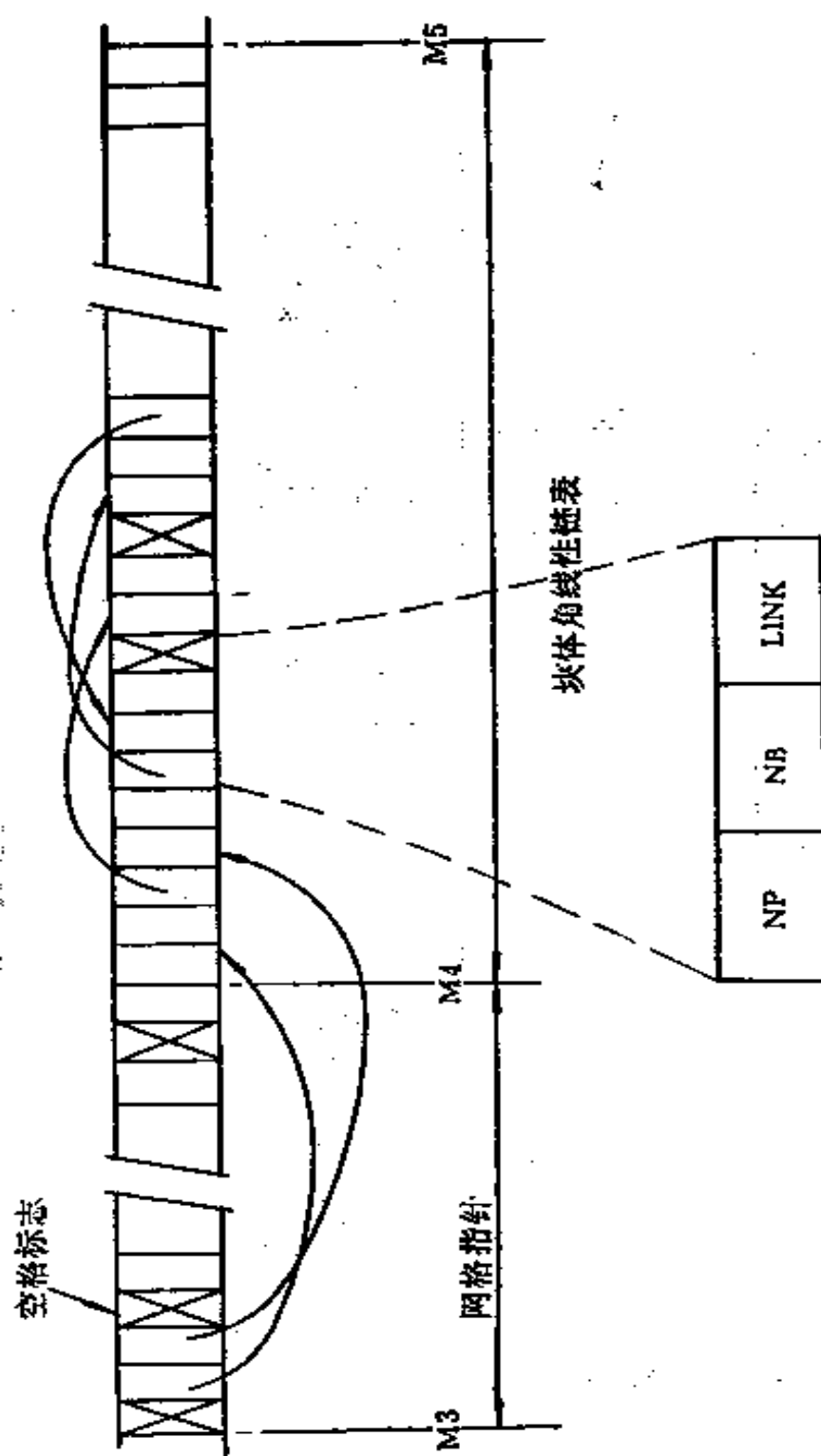


图 2-13 离散单元法数据结构



NP—角编号; NB—块体编号; LINK—下一个角地址或空格标志

图 2-14 块体角的线性链表

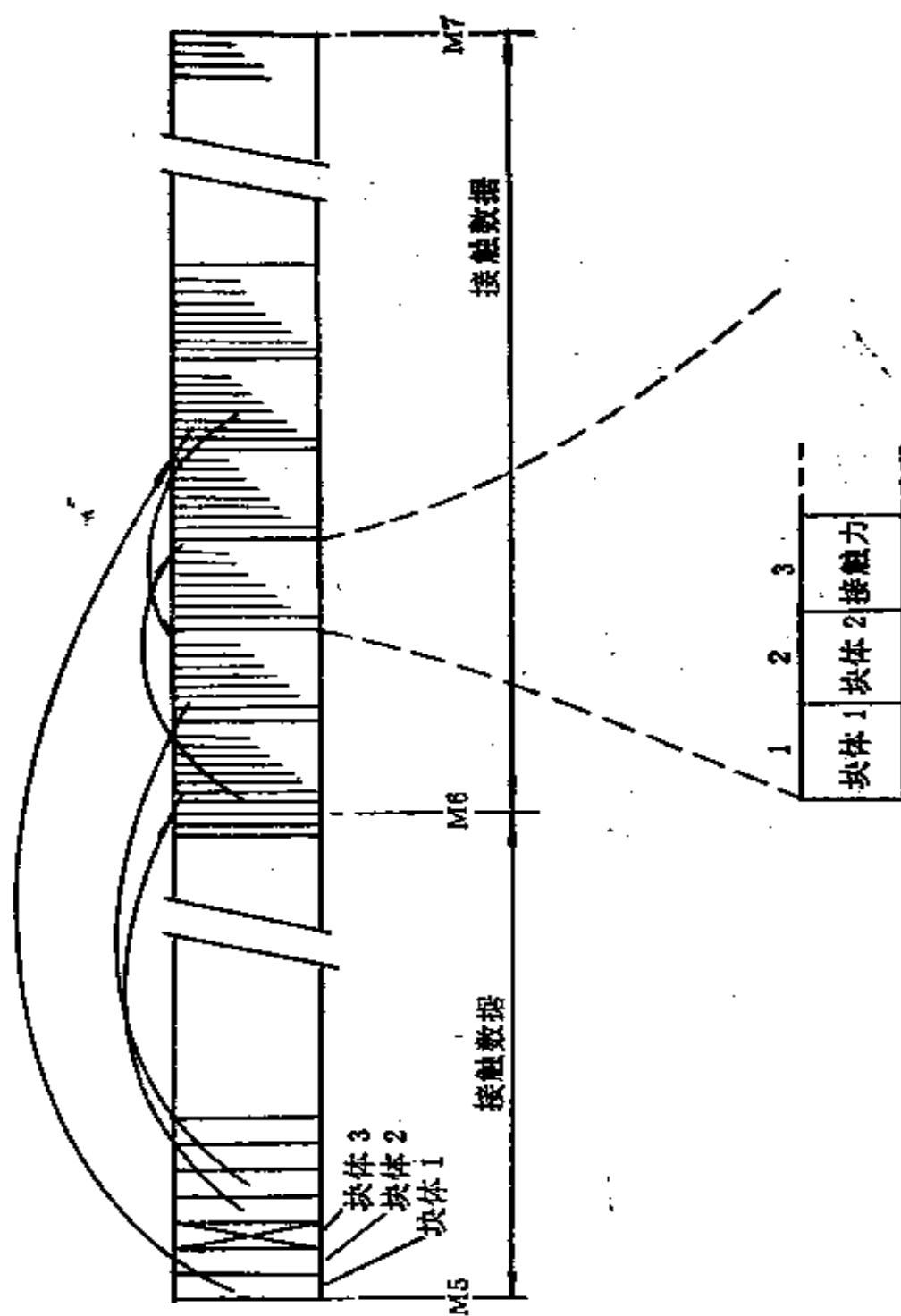


图 2-15 块体接触线性图表

存贮新增加的记录。同样,根据需要也可以删除结点或记录,并把这个废弃的结点返送到可利用表(见图 2-11)。

离散单元法充分利用线性链表这种动态数据结构,形成如图 2-13 所示的一维存贮数据结构。其中,块体数据存贮方式如图 2-12 所示,块体角的线性链表如图 2-14 所示,块体之间的接触线性链表如图 2-15 所示。

2.4 静态松弛离散单元法

静态松弛离散单元法与动态松弛离散单元法在求解方法方面不同,它是直接寻找块体失去平衡后达到再平衡时的力-位移关系,因此,它采用隐式方法解联立平衡方程组,并以完全消除块体的残余力和力矩为目标进行迭代求解。

静态松弛离散单元法的联立平衡方程组一般表达式为:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{xsum} \\ F_{ysum} \\ M_{sum} \end{bmatrix} = 0 \quad (2-27)$$

式中, ΔX , ΔY 和 $\Delta \theta$ 是块体形心的位移; F_{xsum} , F_{ysum} 是块体在 X 和 Y 方向所受的合外力, M_{sum} 是块体所受的合外力矩; A_{mn} ($m, n=1, 2, 3$) 是系数,可由力-位移关系确定。

2.4.1 刚性块体的位移变换式

对于刚性块体来说,块体内任意一点的位移能以块体内另一点为参照点来确定。因此,块体角点的位移可以根据块体形心的位移和转角来确定。如图 2-16 所示。假定块体形

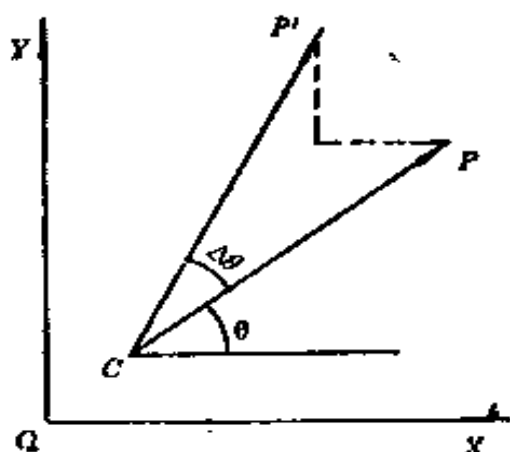


图 2-16 刚体位移

心 C 经历了位移 ΔX , ΔY 以及转角 $\Delta\theta$, 则利用公式 (2-8), 可以得到其上任意一点 P 的位移为:

$$\left. \begin{aligned} \Delta X_P &= \Delta X - (Y_P - Y_C)\Delta\theta \\ \Delta Y_P &= \Delta Y + (X_P - X_C)\Delta\theta \end{aligned} \right\} \quad (2-28)$$

式中, (X_P, Y_P) 是块体上点 P 的坐标; (X_C, Y_C) 是块体

形心的坐标。

2.4.2 刚体位移的计算

刚体位移分量 ΔX , ΔY 和 $\Delta\theta$, 可由块体上任意三点在两种状态下的整体坐标值求得。

考虑如图 2-17

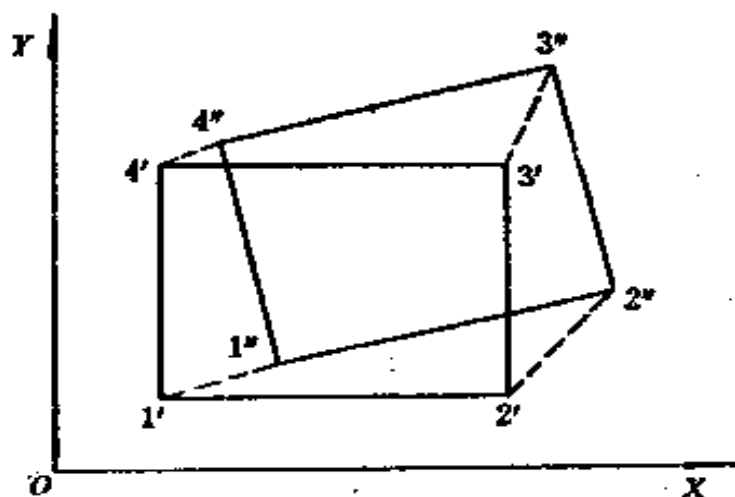


图 2-17 块体位移

中的块体, 并以该块体的角 1 和角 2 为研究对象, 利用式 (2-28) 可以得到:

$$\left. \begin{aligned} X_{1''} - X_{1'} &= \Delta X + \Delta\theta(Y_{C'} - Y_{1'}) \\ Y_{1''} - Y_{1'} &= \Delta Y + \Delta\theta(X_{1'} - X_{C'}) \\ X_{2''} - X_{2'} &= \Delta X + \Delta\theta(Y_{C'} - Y_{2'}) \end{aligned} \right\} \quad (2-29)$$

式中, “'”, “''” 分别表示块体的初始状态和终止状态。

从式 (2-29) 可以看出, 三个方程对应三个未知量 (ΔX ,

ΔY 和 $\Delta \theta$), 因此可以求出刚体位移 ΔX , ΔY 和 $\Delta \theta$ 。另外, 还能通过其他角点的坐标组合求出 ΔX , ΔY 和 $\Delta \theta$, 所以最后可以用它们的平均值作为块体的刚体位移。

2.4.3 静态松弛法的联立方程

下面以图 2-5 中块体 i 和块体 j 的接触为例, 推导式 (2-27) 中系数 A_{mn} 的表达式。假定图中块体 i 的约束被松弛, 而块体 j 是固定的。

由于所有块体都是刚性的, 在接触点 C 处的位移增量可由式 (2-28) 确定:

$$\left. \begin{aligned} \Delta X_c^i &= \Delta X^i - \Delta \theta^i (Y_c - Y^i) \\ \Delta Y_c^i &= \Delta Y^i + \Delta \theta^i (X_c - X^i) \end{aligned} \right\} \quad (2-30)$$

式中, ΔX_c^i , ΔY_c^i 是块体 i 在接触点 C 的位移增量; ΔX^i , ΔY^i 和 $\Delta \theta^i$ 是块体 i 形心的位移增量; X_c , Y_c 是块体接触点 C 的坐标; X^i 和 Y^i 是块体 i 的形心坐标。

上式中 ΔX_c^i 和 ΔY_c^i 是块体 i 相对于块体 j 的位移增量, 这是因为在解的过程中只有块体 i 能够自由移动, 而其他块体都被约束固定。这样, 通过坐标变换可以求出块体 i 相对于块体 j 在接触点 C 的法向和切向位移增量:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_n^c &= -\Delta X_c^i \sin \alpha + \Delta Y_c^i \cos \alpha \\ \Delta u_s^c &= \Delta X_c^i \cos \alpha + \Delta Y_c^i \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2-31)$$

从而根据接触本构关系能够计算出接触点 C 处的力的增量:

$$\left. \begin{aligned} \Delta F_n^c &= -k_n \Delta u_n^c \\ \Delta F_s^c &= k_s \Delta u_s^c \end{aligned} \right\} \quad (2-32)$$

式中, k_n , k_s 分别为接触点的法向和切向刚度。

再对式 (2-32) 进行坐标变换, 可以得到整体坐标系下力

的增量:

$$\left. \begin{aligned} \Delta F_z^{c_i} &= -\Delta F_z^c \cos \alpha - \Delta F_x^c \sin \alpha \\ \Delta F_y^{c_i} &= -\Delta F_z^c \sin \alpha + \Delta F_x^c \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2-33)$$

将式(2-31)和(2-32)代入式(2-33), 整理后可得:

$$\begin{aligned} \Delta F_z^{c_i} &= (-k_s \cos^2 \alpha - k_n \sin^2 \alpha) \Delta X^i + (-k_s \cos \alpha \sin \alpha \\ &\quad + k_n \cos \alpha \sin \alpha) \Delta Y^i + \{k_s [\cos^2 \alpha (Y_c - Y^i) \\ &\quad - \sin \alpha \cos \alpha (X_c - X^i)] + k_n [\cos \alpha \sin \alpha (X_c - X^i) \\ &\quad + \sin^2 \alpha (Y_c - Y^i)]\} \Delta \theta^i \\ &= A_{11}^i \Delta X^i + A_{12}^i \Delta Y^i + A_{13}^i \Delta \theta^i \end{aligned} \quad (2-34)$$

同理, 可以求出块体 i 在接触点 C 所受的 Y 方向和 θ 方向的力以及力矩表达式:

$$\begin{aligned} \Delta F_y^{c_i} &= (-k_s \cos \alpha \sin \alpha + k_n \cos \alpha \sin \alpha) \Delta X^i \\ &\quad + (-k_s \sin^2 \alpha - k_n \cos^2 \alpha) \Delta Y^i \\ &\quad + \{k_s [\cos \alpha \sin \alpha (Y_c - Y^i) - \sin^2 \alpha (X_c - X^i)] \\ &\quad - k_n [\cos^2 \alpha (X_c - X^i) + \cos \alpha \sin \alpha (Y_c - Y^i)]\} \Delta \theta^i \\ &= A_{21}^i \Delta X^i + A_{22}^i \Delta Y^i + A_{23}^i \Delta \theta^i \end{aligned} \quad (2-35)$$

$$\begin{aligned} \Delta M^i &= [A_{31}^i (X_c - X^i) - A_{11}^i (Y_c - Y^i)] \Delta X^i \\ &\quad + [A_{32}^i (X_c - X^i) - A_{12}^i (Y_c - Y^i)] \Delta Y^i \\ &\quad + [A_{33}^i (X_c - X^i) - A_{13}^i (Y_c - Y^i) \\ &\quad - F_y^{c_i} (Y_c - Y^i) - F_z^{c_i} (X_c - X^i)] \Delta \theta^i \\ &= A_{31}^i \Delta X^i + A_{32}^i \Delta Y^i + A_{33}^i \Delta \theta^i \end{aligned} \quad (2-36)$$

式中, $F_z^{c_i}$, $F_y^{c_i}$ 是块体 i 在接触点 C 所受的力。

式(2-34), (2-35)和(2-36)都是以一个接触点为例求得的。如果块体 i 受有多个接触力, 只要对上面几个式子中的 A_{mn}^i 求和, 即可求出式(2-27)中的系数矩阵 $[A_{mn}]$ 。

式(2-27)中的 F_{xsum} , F_{ysum} 和 M_{sum} 可由下式计算:

$$\begin{aligned}
F_{x, \text{sum}}^i &= \sum_c F_x^{c,i} + F_{x, \text{load}} \\
F_{y, \text{sum}}^i &= \sum_c F_y^{c,i} + W + F_{y, \text{load}} \\
M_{\text{sum}}^i &= \sum_c F_y^{c,i} (X_c - X^i) - \sum_c F_x^{c,i} (Y_c - Y^i) + M_{\text{load}}
\end{aligned}
\tag{2-37}$$

式中, $F_{x, \text{load}}$, $F_{y, \text{load}}$ 和 M_{load} 是施加于块体 i 上的荷载和力矩, W 是块体 i 所受到的重力。

因此, 通过解联立式(2-27)即可求出 3 个未知的位移 ΔX , ΔY 和 $\Delta \theta$ 。

从以上的公式推导中可以看出, 静态松弛离散单元法不考虑粘性阻尼和计算时步, 从而避免了动态松弛法确定这些计算参数时所遇到的困难。但是, 该方法也有其缺点, 特别是在求解联立平衡方程组时, 有时会碰到数值奇异或病态问题, 这是该方法需要进一步改进的地方。

3 参数选择和本构模型

3.1 概 述

在用离散单元法计算时，能否选择合理的计算参数和本构关系，对于解的正确与否是至关重要的。如前所述，离散单元法一般采用动态松弛法求解，而用此方法解静力问题所固有的困难是选择阻尼和时步。对于初学者来说，如何选择这两个计算参数，一般是很棘手的问题。此外，利用离散单元法求解问题之前，应针对问题的性质选择合理的本构模型。例如，用离散单元法模拟地震过程时，就应采用摩擦应力与滑动速度相关的粘滑模型。因此，本书将计算参数和本构模型特列一章，对它们进行较为详尽的论述。

3.2 阻 尼

岩块在运动时一般不发生弹跳，这是由于运动时其动能转化为热能而耗散掉的缘故。因此，岩块的运动是不可逆的过程，在离散单元法计算中必须考虑到这一点。否则，如果一个弹性系统中有了动能，就会在平衡位置附近作简谐振动。为了避免这一点，就要采用加阻尼的办法来耗散系统在振动过程中的动能^[68]。特别是在静力问题中，必须加阻尼来吸收系统的动能，以使系统达到稳定的状态。

阻尼可分为粘性阻尼、自适应阻尼和库仑阻尼，下面分

别讨论之。

3.2.1 粘性阻尼

在弹性系统中加粘性阻尼，在物理上可用 Voigt 模型表示（见图 3-1）。其自由振动微分方程为：

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (3-1)$$

式中， m 是集中质量； c 是粘性阻尼系数； k 是弹性刚度系数； u 是位移；“ \cdot ”表示对时间求导。

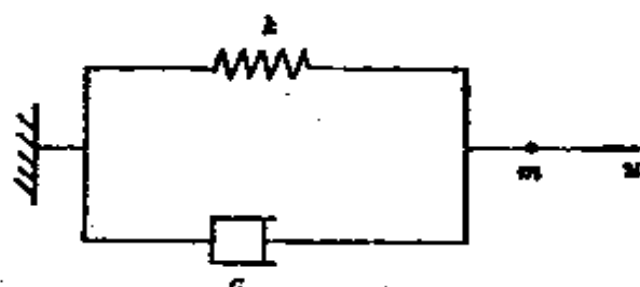


图 3-1 Voigt 模型

令

$$c_c = 2\sqrt{mk} = 2m\omega_n$$

$$\zeta = c/c_c$$

式中， C_c 为临界阻尼系数； ω_n 为无阻尼振动时系统的固有频率，且 $\omega_n = \sqrt{k/m}$ ； ζ 为阻尼比。

于是，式(3-1)可变成：

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = 0 \quad (3-2)$$

令上式的解为 $u = A_0 e^{st}$ (A_0 为待定参数)，则有：

$$s = -\zeta\omega_n \pm i\omega \quad (3-3)$$

式中，

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3-4)$$

下面具体讨论阻尼比 ζ 对粘性阻尼自由振动的影响。

1. 大阻尼振动系统

当 $\zeta < 1$ 时, 称该系统为欠阻尼系统。这时, 式 (3-1) 的通解可由式 (3-3) 得到:

$$\begin{aligned} u &= e^{-\zeta \omega_n t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \\ &= u_0 e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned} \quad (3-5)$$

式中, A, B, u_0 和 φ 均为与边界条件有关的常数。

由式 (3-5) 可知:

(1) ω 为欠阻尼振动的圆频率, 且 $\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ 。如果阻尼比 ζ 不超过 20%, 阻尼圆频率 ω 可近似地等于无阻尼情况下的固有频率, 其误差一般不大于 2%。大多数岩体结构的阻尼比 ζ 在 1%—7% 范围内。

(2) 欠阻尼振动系统的自由振动是非周期的振动, 但是相邻两次同方向通过平衡位置的时间间隔 $T_d = 2\pi/\omega$ 是相等的。这种性质称为等时性, 并称 T_d 为阻尼自然周期。

(3) 自由振动的幅值是按指数规律衰减的, 衰减的快慢取决于 $\zeta \omega_n$ 值, 该值越大, 衰减越快。为了描述幅值的衰减情况, 定义对数阻尼率 δ 为经过一个阻尼自然周期 T_d , 相邻两个幅值之比的自然对数。即

$$\begin{aligned} \delta &= \ln \left(\frac{e^{-\zeta \omega_n T_d}}{e^{-\zeta \omega_n t}} \right) = \zeta \omega_n T_d = 2\pi \zeta \left(\frac{\omega_n}{\omega} \right) \\ &= 2\pi \zeta / \sqrt{1 - \zeta^2} \end{aligned} \quad (3-6)$$

2. 临界阻尼振动系统

$\zeta = 1$ 时的振动系统, 称之为临界阻尼振动系统。此时, $c = c_0$, $\omega = 0$ 。因此, 式 (3-5) 变为:

$$u = u_0 \cos \varphi e^{-\omega_n t} \quad (3-7)$$

这是不发生振动的非周期性运动方程, 同时也是振动发生的临界方程, 所以称 $c_0 = 2\sqrt{mk}$ 为临界阻尼系数。

3. 过阻尼振动系统

$\zeta > 1$ 时的振动系统为过阻尼振动系统。这时 $c > c_0$ ，式(3-4)中的 ω 变为虚数，式(3-1)的通解为：

$$u = e^{-\zeta \omega_0 t} (D e^{\omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1} t} + E e^{-\omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1} t}) \quad (3-8)$$

此时的运动已不是振动。

从以上分析可以看出，不同的阻尼比代表了不同的振动形式。图 3-2 为阻尼比 ζ 分别取 2，1 和 0.2 时的自由振动对比情况。从图 3-2 中不难看出，为了求得系统的准静解，阻尼系数应取得比临界值稍小些，以使系统的响应几乎是“死拍子”，从而加快解的收敛速度。

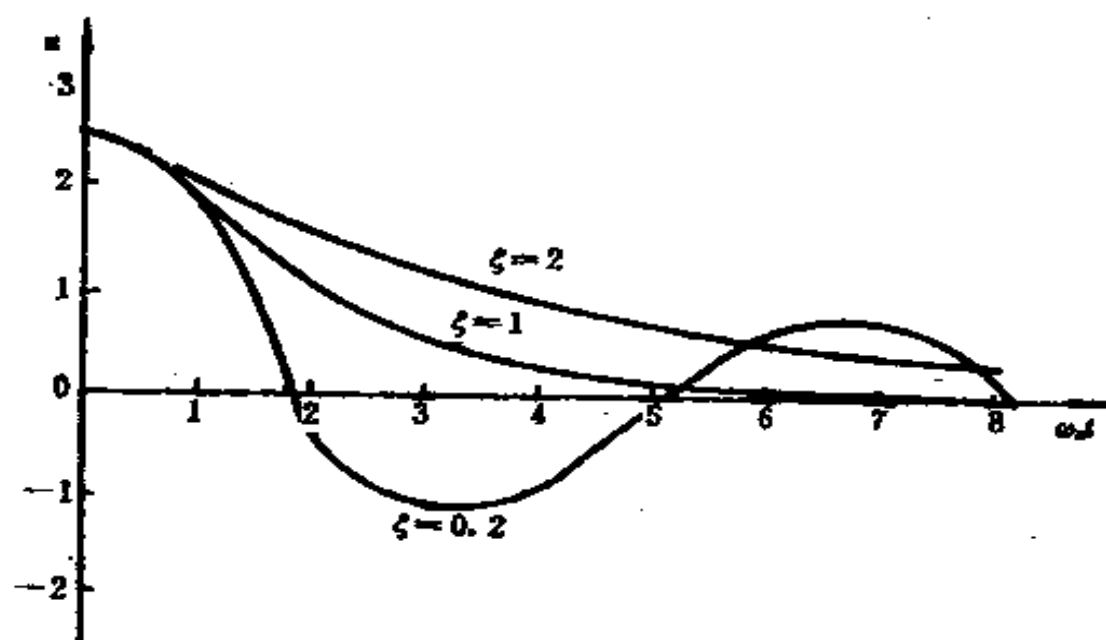


图 3-2 不同阻尼比时的自由振动

工程中常用的粘性阻尼为 Rayleigh 线性比例阻尼^[69]，对于其他形式的阻尼可利用等效阻尼的概念近似地划为线性比例阻尼。对于弹性连续（没有滑移、分离或接触的）系统来说，Rayleigh 线性比例阻尼可表示为：

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (3-9)$$

式中， $[C]$ 是阻尼矩阵； $[M]$ 是质量矩阵； $[K]$ 是刚度阻

尼矩阵； α 和 β 分别是质量阻尼比例系数和刚度阻尼比例系数，并且由下式确定：

$$\alpha = \zeta_{\min} \omega_{\min} \quad (3-10)$$

$$\beta = \zeta_{\min} / \omega_{\min} \quad (3-11)$$

式中， ζ_{\min} 和 ω_{\min} 的意义如图 3-3 所示。

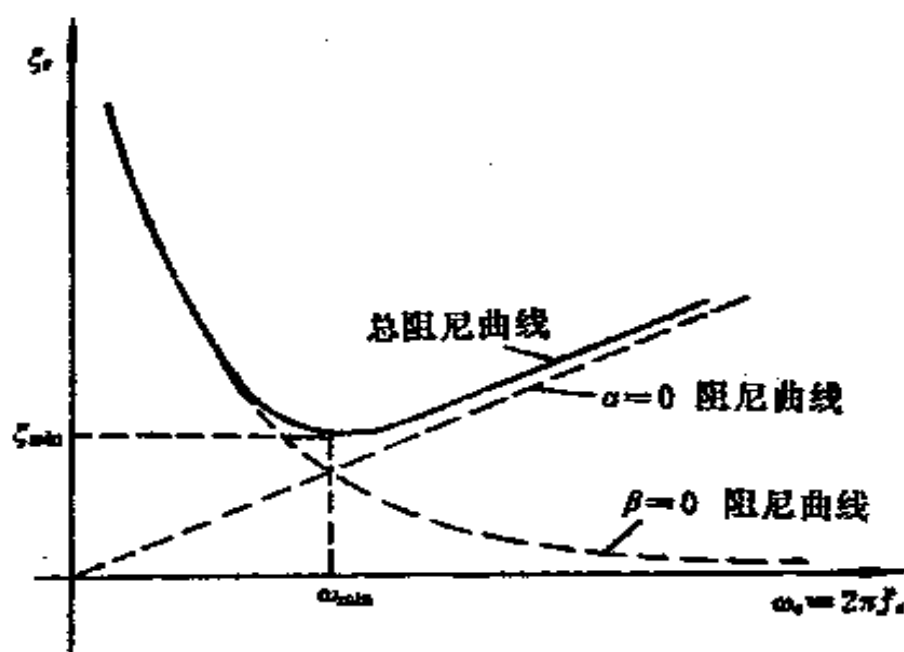


图 3-3 Rayleigh 阻尼曲线

对于振型为 S ，圆频率为 ω_s 的振动系统，Rayleigh 阻尼的作用效果可用下式确定：

$$\zeta_s = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_s}{\omega_{\min}} + \frac{\omega_{\min}}{\omega_s} \right) \zeta_{\min} \quad (3-12)$$

或者

$$\zeta_s = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_s} + \beta \omega_s \right) \quad (3-13)$$

从式(3-13)和图 3-3 可以看出，对于作低频率振动的系统，质量阻尼比较有效，而刚度阻尼则适用于作快速、高频振动的系统。

如前所述，Rayleigh 阻尼理论适用于弹性连续介质的

振动系统，不完全适用于非连续介质系统。因为非连续介质系统随着块体之间的滑移或分离，其振型是不确定的，但阻尼却仍然存在。此时阻尼可以用图 3-4 所示的物理模型来解释。图中质量阻尼 dm 可以想象为把整个系统浸泡在粘性液体中，在物理意义上等价于用粘性活塞将块体单元与一不动点相连，使块体单元的绝对运动受到阻尼。刚度比例阻尼 ds 在物理意义上等价于用粘性活塞把两个接触块体连接起来，使块体单元之间的相对运动受到阻尼。

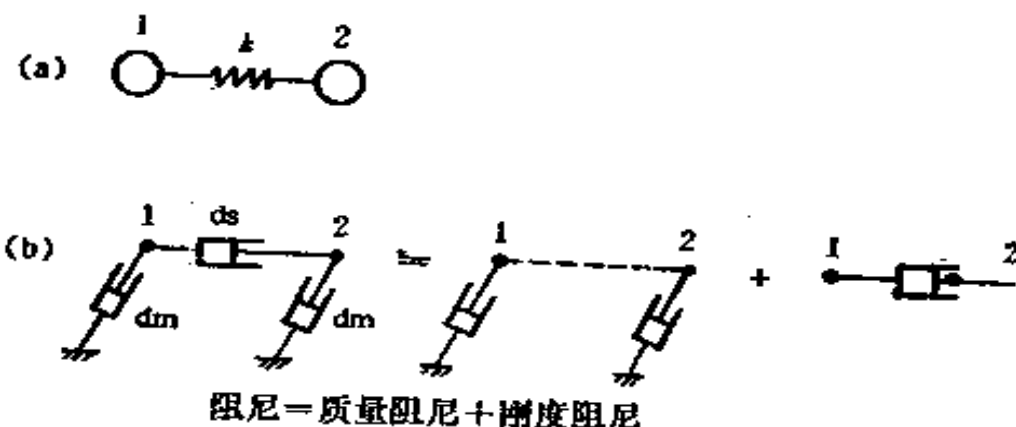


图 3-4 阻尼的物理模型

对于连续的弹性介质来说，其振型、频率 ω_{min} 和阻尼比 ζ_{min} 等能够经过计算与试验得到。但是，对于非连续介质，由于其振型不确定，只能采用试算的办法来确定接近临界阻尼时的振动参数，以使解尽快地收敛。但不能采用过阻尼和过小的欠阻尼，因为过阻尼使块体达到平衡的迭代次数过多，而欠阻尼又使块体的运动表现为振荡，得到的解将不是准静的，而是动态的。

一般情况下，块体之间的分离会导致系统振动波长的缩短和固有振动频率的增大。例如，在无孔洞的弹性连续介质

中, 应力波 (p 波) 的最大波速 c 对于平面应变问题为:

$$c = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (3-14)$$

式中, ρ 是介质密度; E 是弹性模量; ν 是泊松比。系统的固有频率 (或最小频率) f 定义为:

$$f = c/\lambda_{\max} \quad (3-15)$$

式中, λ_{\max} 是系统对应固有频率的最大波长。考虑一个边长为 $l \times w (w > l)$ 的各向同性矩形连续介质, 当在其边界施加压力时, 其应力波最大波长为 $2l$ 。由式 (3-15) 可得最小振动频率 f 为:

$$f = c/(2l) \quad (3-16)$$

从而可得圆频率 ω 为:

$$\omega = 2\pi f = \pi c/l \quad (3-17)$$

由式 (3-17) 可见, 块体越小, 应力波的最大波长也越小, 但振动的固有圆频率越大。这就要求计算时质量阻尼系数的取值较弹性连续介质时要大, 以保证解的稳定。当计算中出现解的不稳定现象时, 可以不考虑刚度阻尼, 而只用质量阻尼, 这时求稳定解所需的频率可以取式 (3-17) 计算所得频率的 2 倍。

系统振动阻尼比 ζ 的确定方法很多, 常用的方法有半功率法和对数减量法等, 这里就不加赘述了。

3.2.2 自适应阻尼

前面介绍的与速度成正比的阻尼在解决问题时, 有时会遇到如下 3 个困难:

(1) 该阻尼中由于引入了体力, 故在某些情况下会得出错误的破坏模式。

(2) 最佳的阻尼系数一般取决于矩阵的特征值。对于线性问题，求特征值的时间几乎是整个动态松弛计算所需的时间；而对于非线性问题，特征值是根本求不出的。

(3) 阻尼系数对于所有块体都是相同的。而实际情况中，常常是所研究的问题其某一部分处于稳定状态，而另一部分处于运动状态。因此，对于不同的区域应采用不同的阻尼才比较合理。

为了克服上述困难，Cundall 提出了两种自适应阻尼^[10,17]。其中，第一种自适应阻尼仍采用粘性阻尼，只是阻尼所吸收的能量与系统的动能变化率之比是定值，采用伺服机理对粘性阻尼系数进行自适应控制。具体方法是先计算能量比率 R ：

$$R = \Sigma E_D / \Sigma \dot{E}_k \quad (3-18)$$

式中， E_D 是阻尼所吸收的能量； \dot{E}_k 是系统动能的变化率。然后根据能量比率的大小来调整阻尼系数。

实验表明，当 R 在 0.5 附近时，阻尼效果接近于临界阻尼。因此，当 R 值大于 0.5 时，应减小阻尼系数 c 的值（每次可减小 1%）；当 R 值小于 0.5 时，应加大阻尼系数 c 的值（每次可增加 10%）。

从式(3-18)还可以得知，当系统趋于稳定状态（平衡或稳定流动）时，动能变化率会趋于零，阻尼力也会随即趋近于零。因此，该阻尼方法的实质是，利用系统动能在达到最大值时一般通过其平衡位置来调整阻尼系数。

第二种自适应阻尼称为局部自适应阻尼。该阻尼力的大小与块体所受的不平衡力成正比，其方向取使块体振动衰减的方向；而不是作稳定运动的方向，即

$$F_d \propto |F| \text{sign}(\dot{F}) \quad (3-19)$$

式中, F_d 是块体所受的阻尼力; F 是块体所受的不平衡力。

应用局部自适应阻尼可以完全克服上述的 3 个困难: 对于稳定状态情况, 体力消失; 阻尼系数既无量纲, 又不取决于边界条件或性质; 阻尼力在系统内各地方是变化的。但是, 局部自适应阻尼总是使系统处于过阻尼状态。

3.2.3 库仑阻尼

库仑阻尼也就是摩擦阻尼, 它是由两个干燥表面相对滑动而形成的 (见图 3-5)。库仑阻尼力等于正压力 N 与摩擦系数 μ 的乘积, 并且假定运动一开始就有摩擦, 摩擦系数 μ 与速度无关。

为了确定阻尼使振幅衰减的大小 (见图 3-6), 可借助功能原理, 令动能变化等于所作的功。由于摩擦阻尼力的方向总是与块体的运动方向相反, 故每一符号的运动方程只对半个循环有效。今任选一个半循环, 由速度等于零和振幅

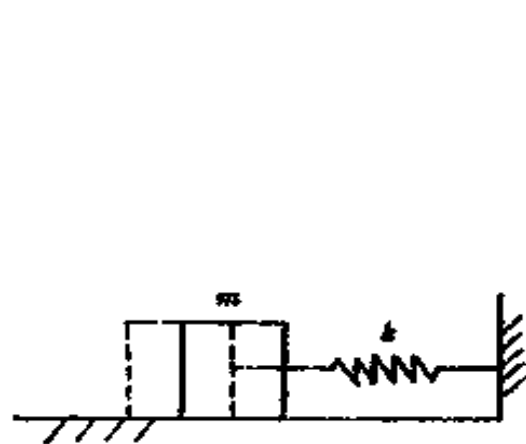


图 3-5 库仑阻尼

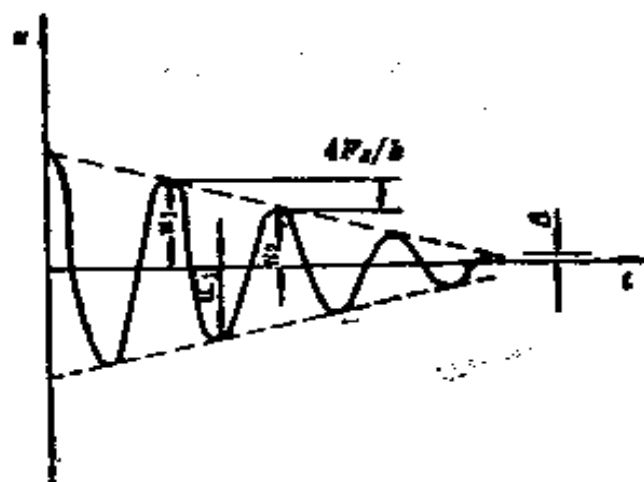


图 3-6 具有库仑阻尼的自由振动

等于 x_1 的极限位置开始, 其动能变化为零, 对质量 m (见图 3-5) 做功等于零, 则有:

$$\frac{1}{2}k(u_1^2 - u_{-1}^2) - F_d(u_1 + u_{-1}) = 0$$

或

$$\frac{1}{2}k(u_1 - u_{-1}) = F_d \quad (3-20)$$

式中, F_d 是库仑阻尼力; u_{-1} 是半个循环后的振幅 (见图 3-6)。

对下半个循环重复上述过程, 振幅将再次减小 $2F_d/k$ 。因此, 每一个循环振幅衰减是不变的, 且等于

$$u_1 - u_2 = \frac{4F_d}{k} \quad (3-21)$$

式中, u_2 是第二个循环的振幅。但衰减是有止境的, 当振幅小于某个 Δ 值时 (见图 3-6), 运动将停止。因为静摩擦力通常大于动摩擦力, 所以在这个位置时弹簧力将不足以克服静摩擦力。

需要指出的是, 库仑阻尼自由振动系统, 其频率与无阻尼时相同, 都等于 $\sqrt{k/m}$, 且振幅随时间线性衰减。

3.3 时 步

3.3.1 单自由度系统的时步计算

如图 3-7 所示为一个具有集中质量 m 和刚度 k 的单自由度弹性振动系统, 其运动方程为:



图 3-7 单自由度弹性系统

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (3-22)$$

式中, u 是位移; \ddot{u} 是加速度。

由中心差分法, \ddot{u} 可写成:

$$\ddot{u} = [u(t+1) - 2u(t) + u(t-1)]/(\Delta t)^2$$

将上式代入式(3-22)中, 有:

$$m[u(t+1) - 2u(t) + u(t-1)]/(\Delta t)^2 + ku(t) = 0$$

或者

$$u(t+1) + [k(\Delta t)^2/m - 2]u(t) + u(t-1) = 0 \quad (3-23)$$

根据差分理论, 方程(3-23)的解为:

$$u(t) = \left[2 - \frac{k}{m}(\Delta t)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2(\Delta t)^4 - 4\frac{k}{m}(\Delta t)^2} \right] / 2$$

为了使解具有振荡特性, $u(t)$ 必须是复数, 即要求:

$$\left(\frac{k}{m}\right)^2(\Delta t)^4 - 4\frac{k}{m}(\Delta t)^2 < 0$$

或

$$\Delta t < 2\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2}{\omega_n} \quad (3-24)$$

又由 $\omega_n = 2\pi/T$ (T 是固有振动周期), 可把上式写成:

$$\Delta t < \frac{T}{\pi} \quad (3-25)$$

理论证明, 系统的最小固有振动周期总是大于其中任何一个单元的最小固有振动周期 T_{\min} , 将后者用于时步计算, 其结果是安全的。因此, 在离散单元法计算中通常取时步为:

$$\Delta t \leq T_{\min}/10 \quad (3-26)$$

式中, T_{\min} 可由下式确定:

$$T_{\min} = 2\pi \cdot \min_{1 \leq i \leq n} \left(\sqrt{\frac{m_i}{k_i}} \right) \quad (3-27)$$

式中, \min 表示取最小值, n 表示单元数。

以上时步计算公式中没有考虑阻尼的影响。但是, 应用显式中心差分求解微分方程时, 阻尼会降低稳定解的时步值。一般认为通常结构大多数是欠阻尼系统, 中心差分法的稳定计算时步为:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}} (\sqrt{1 + \xi^2} - \xi) \quad (3-28)$$

式中, ξ 是系统振动圆频率取最大值 ω_{\max} 时的阻尼比。最大圆频率为

$$\omega_{\max} = \sqrt{\lambda} \quad (3-29)$$

式中, λ 是系统的最大特征值。

3.3.2 确定时步的虚拟密度法

在一般情况下, 重量和惯性质量在数值上相等, 所以对它们不加以区分, 但它们是两个不同的概念。严格地说, 式(3-24)中的 m 是惯性质量。由于时步是由最小块体的质量确定, 因此在刚度一定的条件下, 通过增大最小块体的惯性质量, 能够增大时步, 以提高计算的收敛速度。这里介绍的虚拟密度法, 就是利用上述原理来增大时步, 同时又不降低解的稳定性。

若用 m_I 表示块体的惯性质量, 用 m_G 表示块体的重量, 则块体的运动方程表示为:

$$m_I \ddot{u} = F + m_G \quad (3-30)$$

式中, F 是块体所受的合外力 (不包括重力)。若惯性质量 m_I 取系统内所有块体的平均值, 则

$$m_I = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i^I$$

式中, n 表示系统内共有 n 个块体; m_i^i 是第 i 个块体的惯性质量。则式(3-30)可改写为:

$$u = -\frac{F}{m_1} + \frac{m_G}{m_1} \quad (3-31)$$

式(3-31)表明, 各块体在等外力作用下会有相同的加速度, 且各块体的重力仍然具有原来的作用效果。但需要注意的是, 虚拟密度法只能用来解准静问题, 不能用来解动态问题。

3.4 本构模型

本节介绍一下离散单元法计算中较为常用的几种接触模型及其本构关系。

3.4.1 与速度无关的接触本构模型

1. 弹塑性无张力角-边接触模型

这是一种最简单的接触模型, 在前一章中已有所介绍。该模型认为块体之间不存在拉力, 且当切向力 F_t 达到某一最大值时, 就会发生塑性剪切滑移, 并由下式确定:

$$|F_t| \leq F_n \tan \varphi = (F_t)_{\max}$$

式中, φ 是摩擦角; F_n 是法向力; $(F_t)_{\max}$ 是最大切向力。

此模型的力与位移关系如图 3-8 和图 3-9 所示。图中的法向刚度系数和切向刚度系数可由下面公式近似计算。

如图 3-10 所示的两个接触块体, 其长度和宽度分别为 a 和 b , 其弹性模量为 E , 泊松比为 ν 。则根据弹性力学理论有:

$$2k_n u_n / a = E u_n / b$$

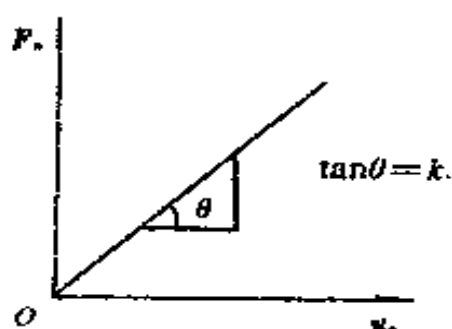


图 3-8 法向力与法向位移

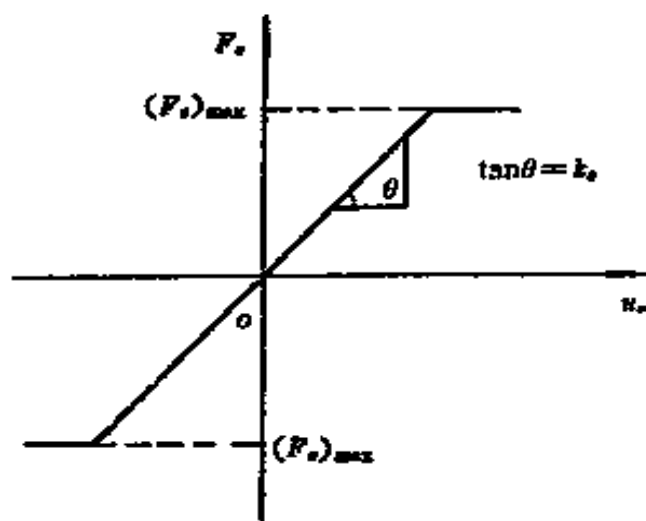


图 3-9 切向力与切向位移

从而可得法向刚度系数:

$$k_n = (Ea)/(2b) \quad (3-32)$$

切向刚度系数 k_s 可由法向刚度系数 k_n 求得

$$k_s = k_n/[2(1 + \nu)] \quad (3-33)$$

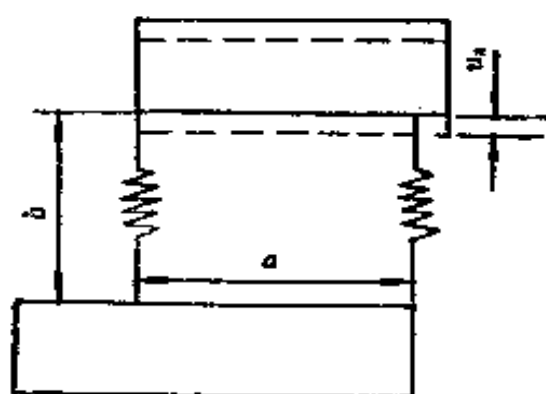


图 3-10 块体接触计算模型

这里需要指出的是, 当

块体之间由角-边接触变成角-角接触时, 即使是一个很小的“叠合”。也会造成块体沿角发生断裂, 因此, 块体之间角-角接触应有一定的判据。图 3-11 所示为块体角-角接触条件。解决块体之间角-角接触的另一方法是将棱角圆弧化 (见图 3-12(a))。设 $n(n_x, n_y)$ 是接触面的单位法向矢量, $C(c_x, c_y)$ 是接触点坐标, $C_1(x_1, y_1)$ 和 $C_2(x_2, y_2)$ 分别是两个角的角点坐标, 则有:

$$\left. \begin{aligned} D_{12} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ n_x &= (x_2 - x_1)/D_{12} \\ n_y &= (y_2 - y_1)/D_{12} \end{aligned} \right\} \quad (3-34a)$$

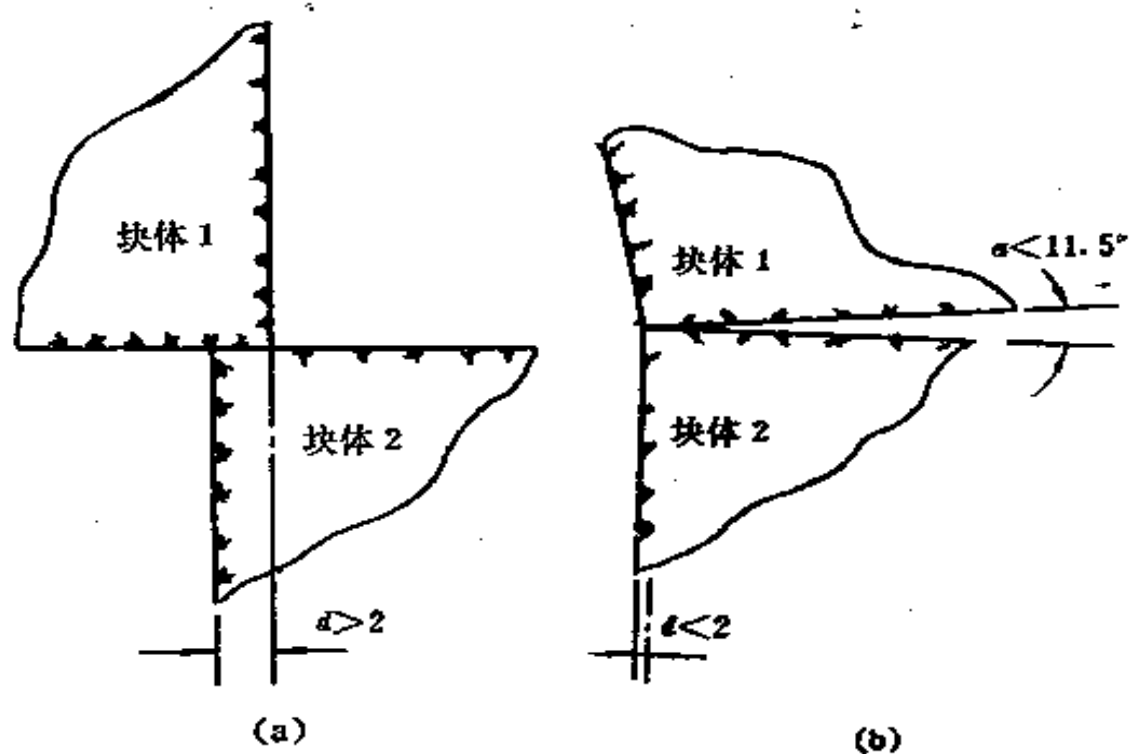


图 3-11 角-角接触形成条件

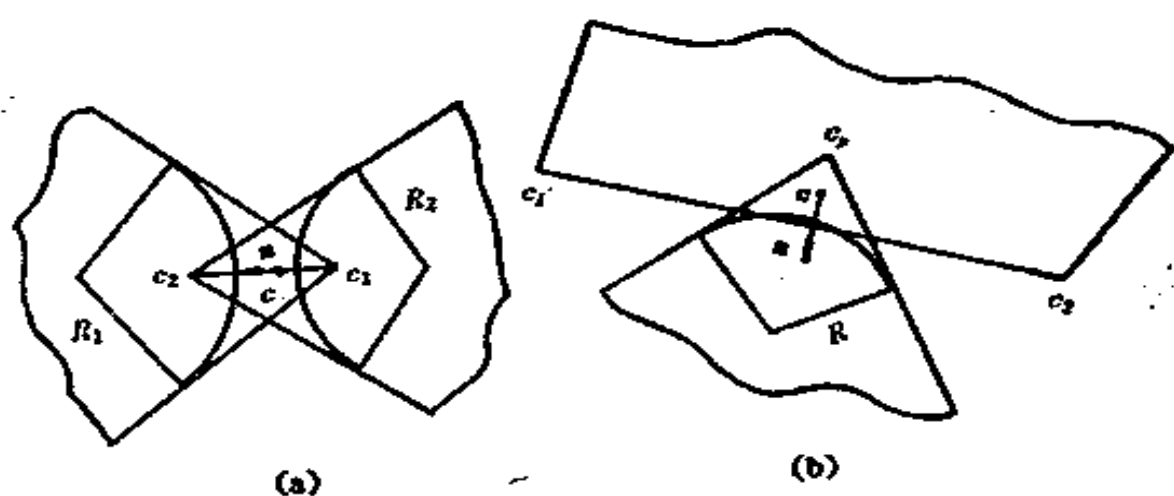


图 3-12 块体棱角的圆弧化

和

$$\left. \begin{aligned} D &= R_1 - R_2 + D_{12} \\ x_c &= x_1 + n_x D \\ y_c &= y_1 + n_y D \end{aligned} \right\} \quad (3-34b)$$

式中, R_1 和 R_2 分别是圆弧半径。

实际上, 对于角-边接触也可对角进行圆弧化 (见图 3-12(b))。此时, 设角的坐标为 $C_p(x_p, y_p)$, 接触边的单位法向矢量为 $n(n_x, n_y)$, 其两端点坐标分别为 $C_1(x_1, y_1)$, $C_2(x_2, y_2)$, 则有:

$$\left. \begin{aligned} D_{12} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ n_x &= -(y_2 - y_1)/D_{12} \\ n_y &= (x_2 - x_1)/D_{12} \end{aligned} \right\} \quad (3-35a)$$

和

$$\left. \begin{aligned} D &= R - n_x(x_p - x_1) - n_y(y_p - y_1) \\ x_c &= x_1 + n_x D \\ y_c &= y_1 + n_y D \end{aligned} \right\} \quad (3-35b)$$

式中, R 是接触角的圆弧半径。

2. 弹塑性无张力边-边接触模型

边-边接触模型与角-边接触不同, 其接触刚度单位是应力/位移, 因此, 接触边作用的是应力。由于应力在接触边的分布不确定, 最为简便的方法是把该应力近似地表示成两个均匀分布的应力 (见图 3-13), 且

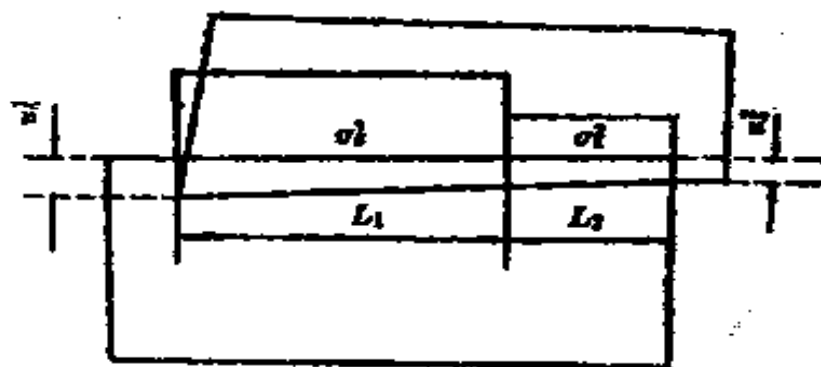


图 3-13 边-边接触模型

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^1 &= k_n u_1^1 \\ \Delta \sigma_1^1 &= k_s u_1^1 \end{aligned} \right\} \quad (3-36)$$

式中, σ_1^1 是法向应力; $\Delta \sigma_1^1$ 是切向应力增量; k_n 和 k_s 分别是法向和切向刚度系数。

由上式可得接触力:

$$\left. \begin{aligned} F_1^1 &= \sigma_1^1 L_1 \\ \Delta F_1^1 &= \Delta \sigma_1^1 L_1 \end{aligned} \right\} \quad (3-37)$$

式中, F_1^1 是法向接触力; ΔF_1^1 是切向接触力。 L_1 由下式计算:

$$L_1 = u_1^1 L / (u_1^1 + u_2^1) \quad (3-38)$$

式中, L 是接触总长度。

同理, 可得 L_2 部分的应力和力。

接触面的塑性剪切破坏准则为:

$$\sigma_s \leq C + \sigma_n \tan \varphi \quad (3-39)$$

式中, σ_s 是切向应力; C 是粘结力; φ 是内摩擦角。

3. Barton—Cundall 节理模型

岩体节理的抗剪强度一般是指当节理的粘结力为零时的抗剪强度。因此, 理论上抗剪强度曲线为一通过原点的斜直线 (见图 3-14 中的 OC), 其表达式为:

$$\sigma_s = \sigma_n \tan \varphi \quad (3-40)$$

式中, φ 是光滑节理面的基本摩擦角, 其他符号意义同前。

实际节理面是凹凸不平的, 甚至是相互嵌合的。因此, 对粗糙节理, 测得的抗剪强度曲线由图 3-14 中的 OA 与 AB 两段直线组成。

当施加于节理面上的正应力较小时, 滑移过程中岩石表面凸出部分互相骑越, 所表现出来的抗剪特性如图 3-14 中

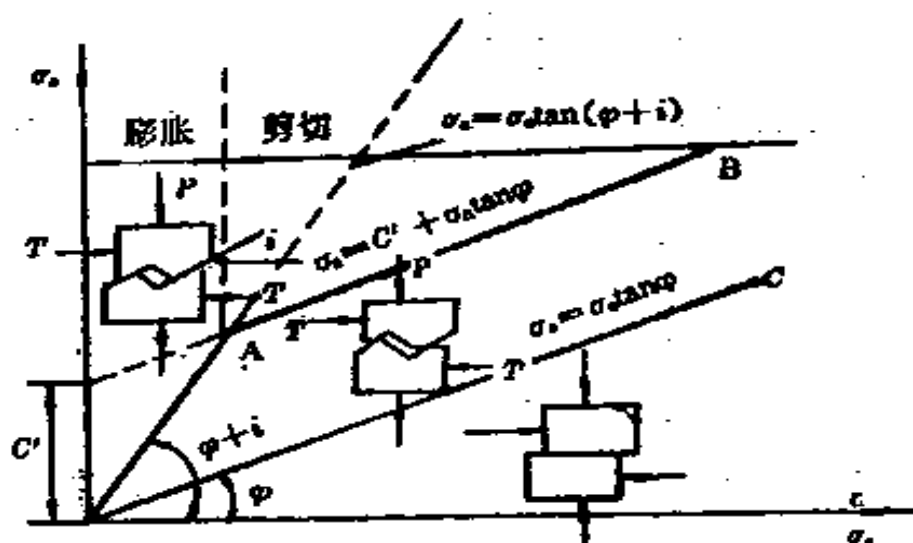


图 3-14 节理的抗剪特性

的 OA 段直线所示，其表达式为：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= k_n(\Delta u_n \tan i + u_n) \\ \sigma_s &= \sigma_n \tan(\varphi + i) \end{aligned} \right\} \quad (3-41)$$

式中， i 是节理的粗糙角或起伏角。

当施加于节理面上的正应力较大时，剪切滑移使粗糙表面的凸出部分被剪掉。此时剪切面的相对滑移为 δ_{max} ，抗剪强度曲线由图 3-14 中的 AB 段直线表示，其表达式为：

$$\sigma_s = C' + \sigma_n \tan \varphi \quad (3-42)$$

式中， C' 是因粗糙表面的凸出部分被剪断而呈现出的似粘结力。

如果重复进行沿此节理的抗剪强度试验，则由于齿凸已被剪掉，于是又得到 OC 段直线表示的强度特性（见图 3-14）。它与 AB 线之间的垂距，表示抗剪强度随表面的光滑程度不同而降低的数量。

前面用 $\sigma_s = \sigma_n \tan(\varphi + i)$ 来表示直线 OA，但该式中 i 值很难确定。为此，Barton 通过模型试验建立了如下经

验公式:

$$\begin{aligned}\sigma_s &= \sigma_n \tan(\varphi + i) \\ &= \sigma_n \tan\left(\varphi + JRC \frac{\sigma_1}{\sigma_n}\right)\end{aligned}\quad (3-43)$$

式中, JRC 是节理的粗糙系数; σ_1 是节理附近岩石的单轴抗压强度。

应用该模型可得岩石剪切面相对滑移过程中, 切向力 F_s 和法向位移 u_n 随切向位移 u_s 的变化曲线如图 3-15 所示。

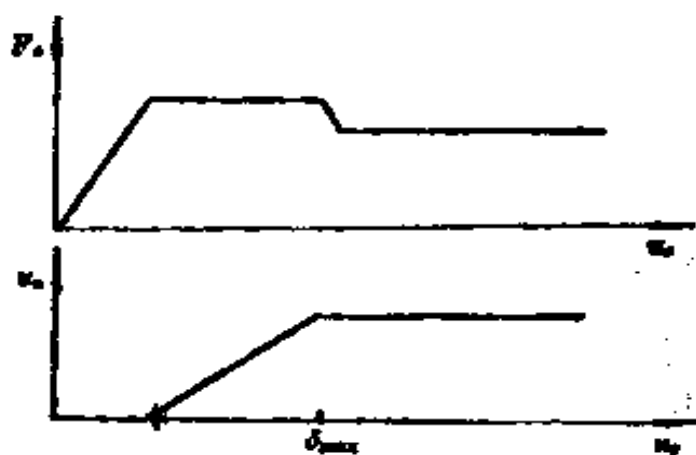


图 3-15 切向力和法向位移随切向位移的变化曲线

4. Byerlee 模型

对于存在节理或断层的岩体, Byerlee 给出了岩石的摩擦滑动强度关系式为:

$$\sigma_s = 0.85\sigma_n \quad (\sigma_n < 200\text{MPa}) \quad (3-44)$$

$$\sigma_s = 50 + 0.60\sigma_n \quad (\sigma_n \geq 200\text{MPa}) \quad (3-45)$$

式中, σ_n, σ_s 分别是剪切滑动面上的正应力和剪应力。这两个公式具有一定的普适性, 与岩石的种类、滑动面的性质以及滑动速度等无关, 而且还可应用到 400°C — 500°C 的温度环境。

对于滑动面之间充填有断层泥的情况, 只要这断层泥不

是由蒙脱土、蛭石和伊利石等组成，上面公式仍然成立。此时，岩石的摩擦滑动就好像根本不存在断层泥一样。

5. Hart—Cundall 节理屈服模型

该模型是 Hart 等根据所做的玄武岩节理模型剪切试验的结果提出来的，它可以用来模拟如图 3-16，图 3-17 和

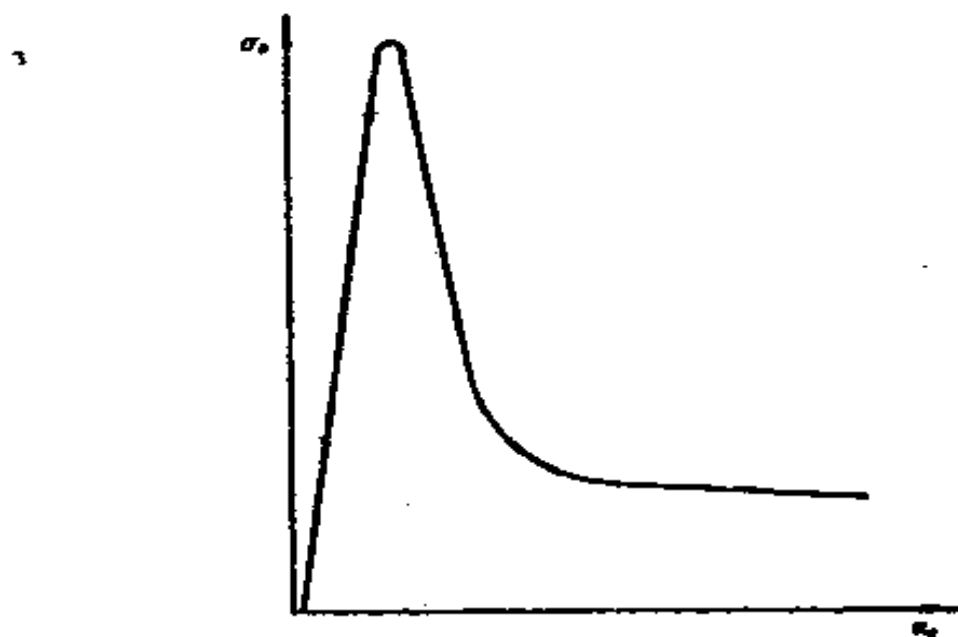


图 3-16 在正应力为常值时的切向应力与切向位移关系（直剪切）

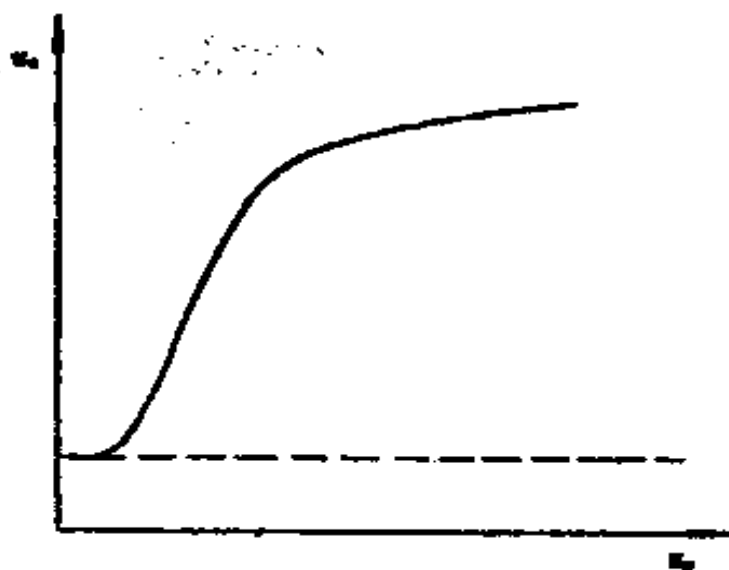


图 3-17 在正应力为常值时的法向位移与切向位移关系

图 3-18 所示的几种剪切强度特性,如峰值强度和残余强度,以及塑性滞环等。

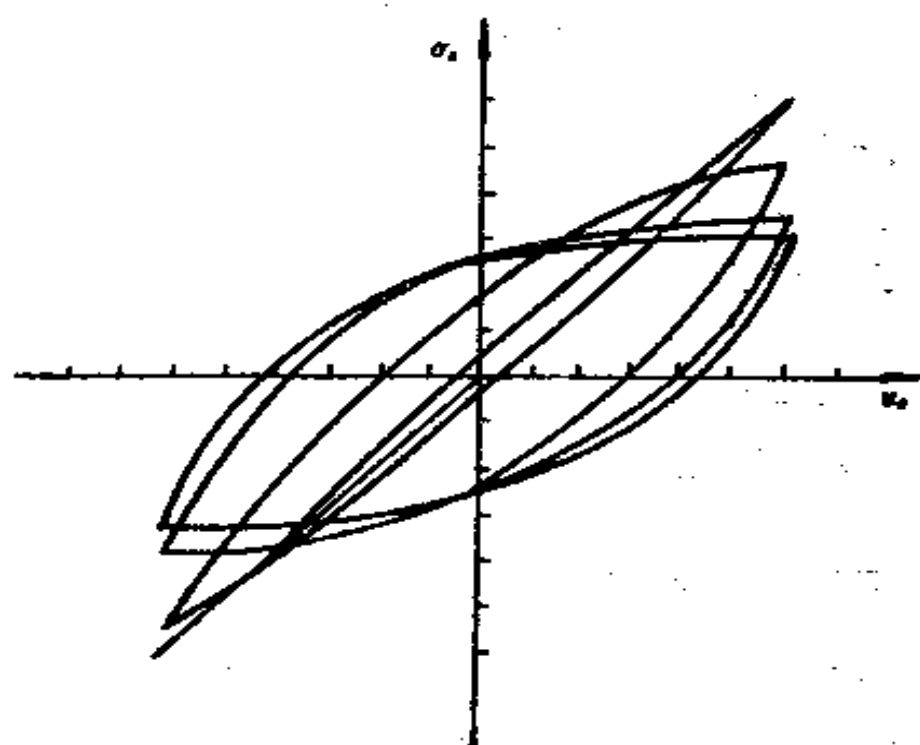


图 3-18 在正应力为常值时的切向应力与切向位移关系 (循环剪切)

该模型可用下面方程表示:

$$k_n = a_n \sigma_n^{(e_n)}$$

$$\sigma_n' = \sigma_n + k_n \Delta u_n$$

$$k_s^{(0)} = a_s \sigma_n^{(e_s)}$$

$$\varphi_e = \varphi + \frac{R}{\{u_s^{(p)} + R/[(\pi/2) - \varphi]\}}$$

$$(\sigma_s)_{\max} = \sigma_n \tan \varphi_e \operatorname{sign}(\Delta u_s)$$

式中, a_n, e_n, a_s, e_s 和 R 是由实测得到的节理参数; φ 是内摩擦角; φ_e 是有效摩擦角; k_n 是法向刚度; $k_s^{(0)}$ 是初始切向刚度; Δu_n 是法向位移增量; σ_n 是法向应力; Δu_s 是切向位移增量; $u_s^{(p)}$ 是累积塑性切向位移; $(\sigma_s)_{\max}$ 是最大切向应力。

当切向位移增量符号与前一个时步的相同时, 定义应力比 $\gamma = \sigma_s / (\sigma_s)_{\max}$, 且当 $t = 0$ 时, $\gamma = 0$; 否则, 设前一个时步的位移增量等于新位移量。由此可得参数:

$$F = [(\sigma_s)_{\max} - \sigma_s] / [(\sigma_s)_{\max}(1 - \gamma)]$$

$$k_s = Fk_s^{(0)}$$

$$\sigma_s := \sigma_s + k_s \Delta u_s$$

$$u_s^{(r)} := u_s^{(r)} + |\Delta u_s| \max(0, 1 - F)$$

$$i = \max[0, \arctan(|\sigma_s| / \sigma_n) - \varphi]$$

$$\sigma_n := \sigma_n + k_n |\Delta u_s| \tan(i)$$

式中, k_s 是切向刚度系数; i 是有效剪胀角。

3.4.2 与速度有关的接触本构模型

岩石接触面之间的滑动可分为稳态滑动和不稳态滑动。如果滑动平稳地发生, 称之为稳态滑动; 否则, 称之为不稳态滑动。不稳态滑动中最重要的一种形式是粘滑, 它表现为滑动表面突然向前滑动、锁住, 然后又开始滑动, 如此往复。一般沿浅部断层发生地震时常常伴有粘滑现象。

最简单和最常用的滑动模型如图 3-19 所示, 该系统由置于摩擦面上的质量块 m 与一刚度为 k 的弹簧 AB 相连而成。当施力端 B 以恒定速度 v_0 沿水平面运动时, 开始质量块不动

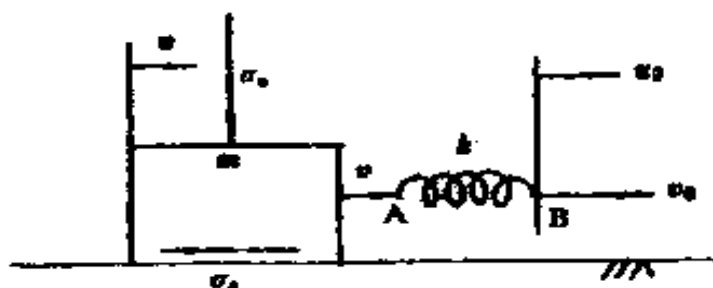


图 3-19 具有摩擦的弹簧-质量块模型

但弹簧中的力随时间而增加，并达到足以克服静摩擦力。假如此时质量块 m 以比 v_0 大的速度突然向前运动，则弹簧中的力将减小，小到不足以克服滑动摩擦力，此时质量块 m 将会停止滑动。质量块静止后，弹簧中的力将再次积累起来，使质量块 m 又发生急剧滑动。这就是所谓的粘滑现象。此过程由弹簧的刚度和块体的动、静摩擦系数所控制。

Ruina 通过试验发现，节理面在恒定正应力 σ_n 作用下（见图 3-19），其摩擦应力 σ_s 与滑动速度 v 及滑动前的状态或历史有关^[79]。为此，他提出了如下两种与速度有关的摩擦模型。

1. 半状态量摩擦本构模型

该模型的本构方程为：

$$\sigma_s = F(v, \theta) = \sigma_* + \theta + A \ln(v/v_*) \quad (3-46)$$

$$d\theta/dt = G(v, \theta) = -(v_0/L)[\theta + B \ln(v_0/v_*)] \quad (3-47)$$

式中， θ 是状态量； σ_* 是稳态滑动时的剪切强度； v_* 是与稳态滑动对应的速度值； A, B 和 L 都是由试验测定的常量，其单位分别为应力、应力和长度。

由上面两式得知，摩擦应力 σ_s 取决于速度项 $A \ln(v/v_*)$ 和特征滑移长度 L 。在恒定速度 v 下摩擦应力 σ_s 按指数规律趋近于稳态值 σ^{**} ：

$$\sigma^{**} = \sigma^{**}(v) = \sigma_* - (B - A) \ln(v/v_*) \quad (3-48)$$

一般情况下， $B > A$ ，因此由上式可得：

$$d\sigma^{**}(v)/dv = -(B - A)/v < 0 \quad (3-49)$$

即 σ_s 与 v 成递减关系变化。

从式 (3-47) 中可以看出，即使当 σ_s 和 v 非连续变化时，状态量 θ 也会随时间连续变化。这意味着滑移速度 v 的

突然变化会导致应力 σ_s 和 $d\theta/dt$ 的变化, 但 θ 本身不会非连续变化。

图 3-20 是该模型的响应示意图。开始时块体以速度 v_* 作稳态滑动, 相对应的剪应力为 σ_* 。当滑移速度突然增至 ev_* 时 ($e \approx 2.71828$), 摩擦应力先突然增至 $\sigma_* + A$, 然后按指数规律衰减至一个新的稳态值 $\sigma_* + (B - A)$, 这时的特征滑移长度为 L 。

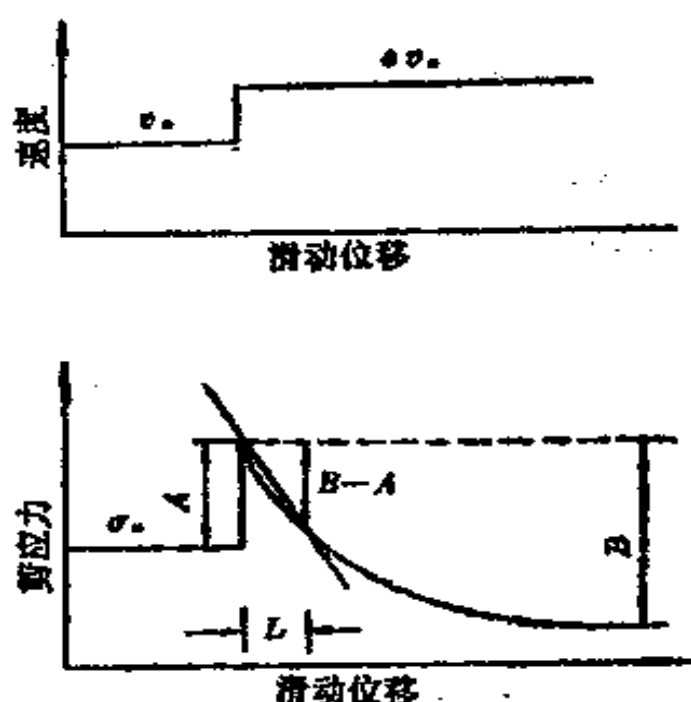


图 3-20 单状态量摩擦模型响应曲线

2. 双状态量摩擦本构模型

该模型与前一模型基本相同, 只不过有两个状态量 θ_1 和 θ_2 。单状态量摩擦模型由于数学上处理比较简单, 所以被广泛采用。但双状态量摩擦模型计算精度高, 与实验结果更为接近。其计算公式为:

$$\sigma_s = \sigma_* + \theta_1 + \theta_2 + A \ln(v/v_*) \quad (3-50)$$

$$d\theta_1/dt = -(v/L_1)[\theta_1 + B_1 \ln(v/v_*)] \quad (3-51)$$

$$d\theta_2/dt = -(v/L_2)[\theta_2 + B_2 \ln(v/v_*)] \quad (3-52)$$

式中, v_* , σ_* , A , B_1 , B_2 , L_1 和 L_2 都是由试验测定的常数; v 是滑动速度。

从式 (3-51) 不难看出, 当状态量 θ_1 趋近于 $-B_1 \times \ln(v/v_*)$ 时, $d\theta_1/dt$ 趋近于零。对于式 (3-52), 也有类似的情况。

若取 $\theta_1 = -A_1 \ln(v/v_*)$, $\theta_2 = -A_2 \ln(v/v_*)$, $A = A_1 + A_2$, $A_1 = -B_1$ 和 $A_2 = -B_2$ 时, 由式 (3-50) 可得:

$$\sigma_s = \sigma_* \quad (3-53)$$

上式表明, 当接触面以速度 v 滑过特征长度 L 后, 摩擦应力 σ_s 趋于稳态值 σ_* 。

4 圓形刚性颗粒模型

4.1 概 述

松散介质（如砂体）中的颗粒位移是相互独立的，它们之间通过接触点相互作用。这种介质的离散特点决定了它在加、卸载过程中所表现出来的复杂特性，因此至今尚未建立起满意的本构模型。建立或验证本构关系需要进行大量的物理试验。然而，由于松散介质内部的应力很难直接测量，只能根据边界条件等估算，因此给试验结果的解释带来了很多困难。新的实验手段（如X射线照像技术）虽然已能测量应变，但尚不能测量诸如砂体中的应力等。

由于颗粒介质内部应力的这种不确定性，人们只能建立松散介质的简化模型，以便能够计算或测定其内部应力和位移。其中最常用的模型是把颗粒视做圆盘或球，用来解析、试验或数值模拟。用于解析的颗粒体一般是等直径和规则排列的，复杂排列和不等直径堆积体很难求解。利用物理试验法，虽然其通用性很强，能够精确地确定各圆盘或球颗粒之间的接触力和位移，但是该方法费用高，所需时间长。也许数值模拟在应用方面比解析方法更为灵活和通用，能够得到试验任何阶段的数据，这是物理模拟所无法比拟的。数值模拟的灵活性和通用性表现在加载方式、颗粒的尺寸和分布，以及颗粒的物理力学性质等方面。

Cundall 应用圓形刚性颗粒模型——离散单元法^[6]，

模拟了圆盘散体的力学特性, 所得结果与 Drescher 和 De Josselin de Jong 的光弹试验结果对比表明, 离散单元法可以代替光弹试验, 是研究圆盘颗粒体力学特性的有力工具。

本章具体介绍一下二维刚性圆形(盘或球)离散单元法的基本原理。

4.2 力与位移的关系

与多边形单元一样, 圆形单元也是靠它们之间接触的“叠合”作用的(见图 4-1), 图中 R_1 和 R_2 分别是两单元的半径, C 是接触点, b 是接触宽度, F_n 是单元之间的对心压力。与图 4-1 所对应的力学模型如图 4-2 所示。

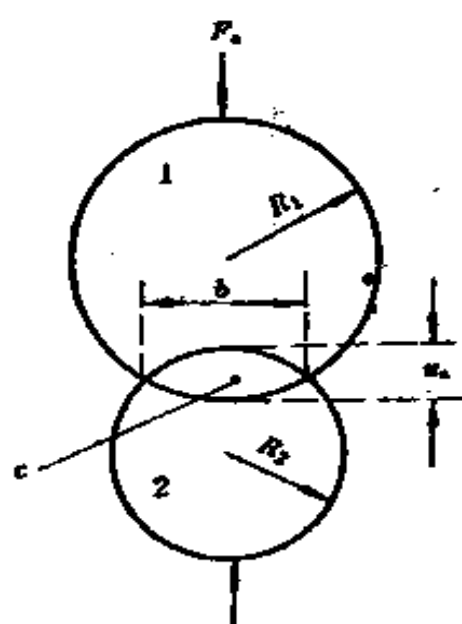


图 4-1 两个相互接触的圆颗粒

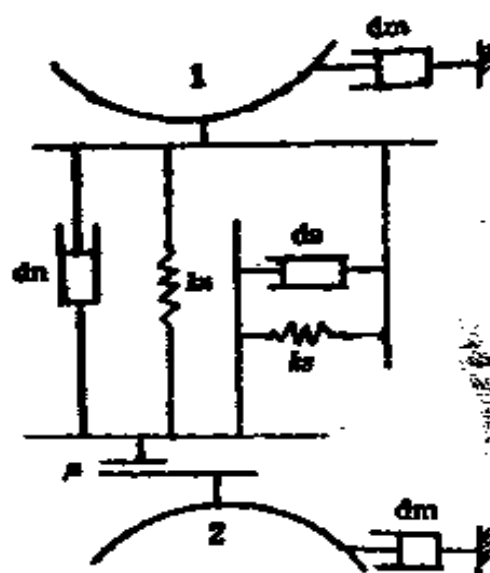


图 4-2 颗粒接触的力学模型

对于圆盘形颗粒, 两个颗粒之间的法向力增量 ΔF_n 和切向力增量 ΔF_t , 分别与它们之间的法向位移增量 Δu_n 和切

向位移增量 Δu_n 成正比, 即

$$\left. \begin{aligned} \Delta F_n &= k_n \Delta u_n \\ \Delta F_t &= k_t \Delta u_t \end{aligned} \right\} \quad (4-1)$$

式中, k_n, k_t 分别是接触点的法向、切向刚度。

颗粒在接触点的法向刚度可由下式导出:

$$\frac{k_n u_n}{b} = E \frac{u_n}{2(R_1 + R_2)}$$

或者

$$k_n = \frac{Eb}{2(R_1 + R_2)} \quad (4-2)$$

式中, E 是颗粒的弹性模量。接触点的切向刚度 k_t 为:

$$k_t = \lambda k_n \quad (4-3)$$

式中, λ 是刚度折减系数, 一般取 0.1—1.0 之间的值。

另外, Kiyama 提出用下式计算颗粒之间的法向刚度:

$$k_n = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)[1.5 + \ln(4R_1/b) + \ln(4R_2/b)]} \quad (4-4)$$

式中, ν 是泊松比, $b = \left[\frac{8R_1 R_2}{\pi(R_1 + R_2)} \left(\frac{1-\nu^2}{E} \right) F_n \right]^{1/2}$, 其他符号意义同前。

对于球形颗粒, 可以应用弹性力学中的赫芝接触理论^[66], 建立作用力和位移的关系为^[61]:

$$u_n = \theta \pi^2 q_0 r_0 \quad (4-5)$$

这里, $\theta = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}$, $q_0 = \left[\frac{3F_n(R_1 + R_2)^2}{2\pi^2 R_1^2 R_2^2 \theta^2} \right]^{1/3}$,

$$r_0 = \left[\frac{3\theta R_1 R_2 F_n}{2(R_1 + R_2)} \right]^{1/3}$$

式中符号意义同前。

由式(4-5) 可以求出两个单元之间的法向力 F_n 与位移 u_n 关系为:

$$F_n = H \cdot u_n^{3/2} \quad (4-6)$$

式中,
$$H = \frac{2E}{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

由于对切向力的计算比较复杂, 仍然假定切向力的增量 ΔF_t 与切向位移的增量 Δu_t 成正比关系, 由理论推导^[72] 可得:

$$\Delta F_t = k_t \Delta u_t \quad (4-7)$$

式中, 切向刚度系数 k_t 为

$$k_t = \left(\frac{E}{1+\nu} \right)^{2/3} \left[12(1-\nu) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} F_n \right]^{1/3} / (2-\nu) \quad (4-8)$$

从上式中可见切向刚度系数与法向力有关。

若两个颗粒的性质不同时, 则它们之间的接触刚度可以采用下式析算:

$$k_{12} = \frac{2k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad (4-9)$$

式中, k_{12} 是颗粒 1 和颗粒 2 之间的接触刚度; k_1 是颗粒 1 的接触刚度; k_2 是颗粒 2 的接触刚度。

下面以两个圆盘颗粒的接触为例 (见图 4-1), 推导接触力 ΔF_n 与 ΔF_t 的计算公式。

规定法向力 F_n 以使单元受压为正, 切向力 F_t 以使单元产生反时针旋转为正 (见图 4-3)。设单元 1 和单元 2 的圆心坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$; 速度矢量分别为 $\dot{u}_{(1),i} = \{\dot{u}_{(1),x}, \dot{u}_{(1),y}\}$ 和 $\dot{u}_{(2),i} = \{\dot{u}_{(2),x}, \dot{u}_{(2),y}\}$; 角速度分别为 $\theta_{(1)}$ 和 $\theta_{(2)}$

(皆为反时针方向)；半径分别为 $R_{(1)}$ 和 $R_{(2)}$ ；质量分别为 $m_{(1)}$ 和 $m_{(2)}$ ； $P_{(1)}$ 和 $P_{(2)}$ 分别为单元 1 和单元 2 与它们连心线的交点 (见图 4-4)。

若两个单元满足如下关系式：

$$D < R_{(1)} + R_{(2)}$$

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

则认为它们接触，接触点 c 在 $P_{(1)}$ 和 $P_{(2)}$ 两点的中央 (见图 4-4)。

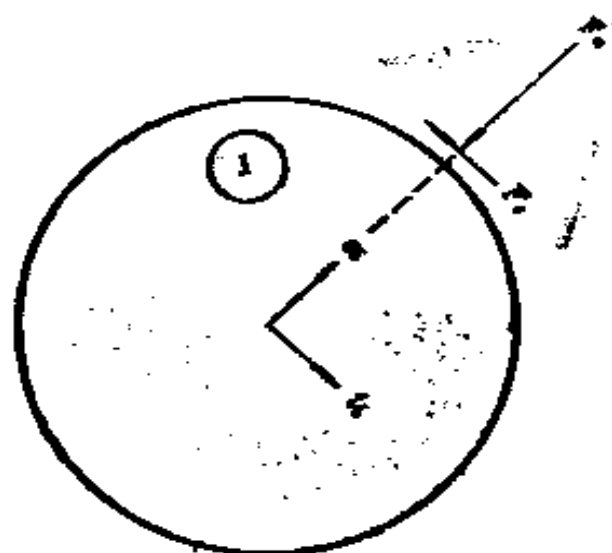


图 4-3 符号约定

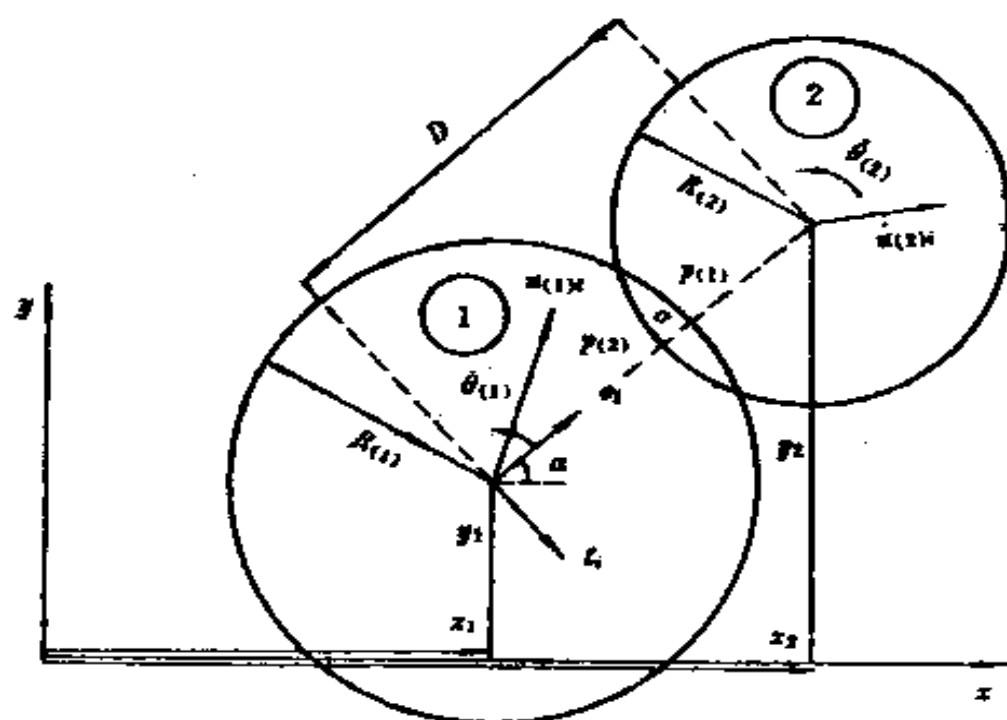


图 4-4 力-位移关系

现在引入两个相互垂直的单位矢量 e_r 和 t_r ，并且定义

它们为:

$$\left. \begin{aligned} e_i &= e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha = \{\cos \alpha, \sin \alpha\} \\ t_i &= e^{i(\pi - \alpha/2)} = \sin \alpha - i \cos \alpha = \{\sin \alpha, -\cos \alpha\} \end{aligned} \right\} \quad (4-10)$$

则单元 1 相对于单元 2 的速度 $v_{(r)i}$ 为:

$$v_{(r)i} = \dot{u}_{(1)i} - \dot{u}_{(2)i} - (\dot{\theta}_{(1)}R_{(1)} + \dot{\theta}_{(2)}R_{(2)})t_i \quad (4-11)$$

以上各式中的 i 代表 1, 2 或 x, y , 利用爱因斯坦求和约定 (即在一单项式中, 同一指标重复出现, 则表示对该指标按顺序 1, 2 或 x, y 轮换求和, 将 $v_{(r)i}$ 分别向 e_i 和 t_i 上投影, 分别得到法向和切向的相对速度 \dot{n} 和 \dot{s} 为:

$$\left. \begin{aligned} \dot{n} &= v_{(r)i}e_i = [\dot{u}_{(1)i} - \dot{u}_{(2)i}]e_i - [\dot{\theta}_{(1)}R_{(1)} + \dot{\theta}_{(2)}R_{(2)}]t_i e_i \\ \dot{s} &= v_{(r)i}t_i = [\dot{u}_{(1)i} - \dot{u}_{(2)i}]t_i - [\dot{\theta}_{(1)}R_{(1)} + \dot{\theta}_{(2)}R_{(2)}]t_i t_i \end{aligned} \right\} \quad (4-12)$$

由于 t_i 垂直 e_i , 所以 $t_i e_i = 0$, $t_i t_i = 1$ 。因此, 上式变成:

$$\left. \begin{aligned} \dot{n} &= [\dot{u}_{(1)i} - \dot{u}_{(2)i}]e_i \\ \dot{s} &= [\dot{u}_{(1)i} - \dot{u}_{(2)i}]t_i - [\dot{\theta}_{(1)}R_{(1)} + \dot{\theta}_{(2)}R_{(2)}] \end{aligned} \right\} \quad (4-13)$$

对上式进行积分, 可得其对应的法向和切向位移增量:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_n &= (\dot{n})\Delta t = \{[\dot{u}_{(1)i} - \dot{u}_{(2)i}]e_i\}\Delta t \\ \Delta u_s &= (\dot{s})\Delta t = \{[\dot{u}_{(1)i} - \dot{u}_{(2)i}]t_i - [\dot{\theta}_{(1)}R_{(1)} + \dot{\theta}_{(2)}R_{(2)}]\}\Delta t \end{aligned} \right\} \quad (4-14)$$

再根据式(4-1), 可以求出法向力和切向力的增量为:

$$\left. \begin{aligned} \Delta F_x &= k_n \Delta u_x = k_n \{ [\dot{u}_{(1)t} - \dot{u}_{(2)t}] e_x \} \Delta t \\ \Delta F_z &= k_n \Delta u_z = k_n \{ [\dot{u}_{(1)t} - \dot{u}_{(2)t}] t_x \\ &\quad - [\dot{\theta}_{(1)} R_{(1)} + \dot{\theta}_{(2)} R_{(2)}] \} \Delta t \end{aligned} \right\} (4-15)$$

求合力、合力矩以及加速度等的方法，同多边形单元一样，这里不再赘述了，请参见 1.2 节。

4.3 平均应力和平均应变

4.3.1 概 述

在连续介质中，应力一般定义为作用于单位面积上的力。对于二维问题，应力则定义为作用于单位线段上的合力。然而，对于松散介质这种定义是不合适的，因为松散介质中的力是非连续的，变化幅度很大。对于应变也存在同样的问题，所以，松散介质采用平均应力和平均应变的概念来表示连续介质中的相应物理量^[15]。

4.3.2 平均应力和平均应变的基本理论

1. 平均应力张量

如图 4-5 所示的一个圆形区域，其半径为 R ，圆心坐标为 $(0,0)$ 。现在来求其内的平均应力。考虑圆内的两个正交平面，它们的法线方向分别为 n_i 和 $n_i + \frac{\pi}{2}$ ，其中 α ， $\alpha + \frac{\pi}{2}$ 分别表示

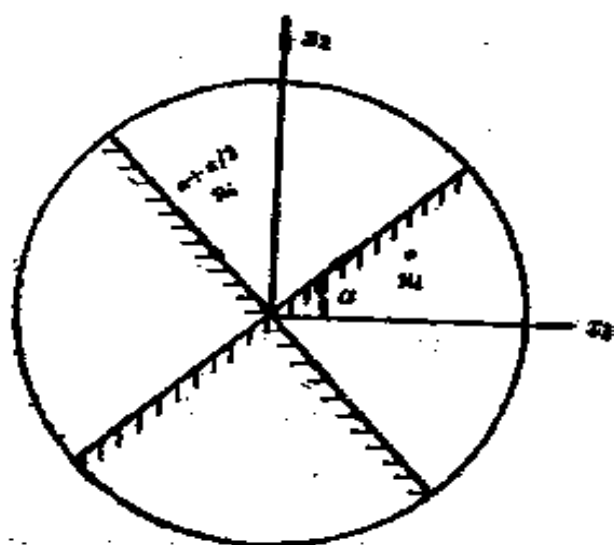


图 4-5 正交平面

两个平面与水平轴 x_1 的夹角。设作用在这两个平面上的法向力矢量分别为 $\overset{\circ}{F}_i$ 和 $\overset{\circ}{F}_i^{\circ+\pi/2}$ ，那么相应的应力矢量 $\overset{\circ}{t}_i$ 和 $\overset{\circ}{t}_i^{\circ+\pi/2}$ 分别为：

$$\left. \begin{aligned} \overset{\circ}{t}_i &= \overset{\circ}{F}_i / (2R) \\ \overset{\circ}{t}_i^{\circ+\pi/2} &= \overset{\circ}{F}_i^{\circ+\pi/2} / (2R) \end{aligned} \right\} \quad (4-16)$$

而应力 $\overset{\circ}{t}_i$ 和 $\overset{\circ}{t}_i^{\circ+\pi/2}$ 又可用相对应的应力张量分量 $\overset{\circ}{\sigma}_{ij}$ 表示成：

$$\left. \begin{aligned} \overset{\circ}{t}_i &= \overset{\circ}{\sigma}_{ji} \overset{\circ}{n}_j \\ \overset{\circ}{t}_i^{\circ+\pi/2} &= \overset{\circ}{\sigma}_{ji}^{\circ+\pi/2} \overset{\circ}{n}_j \end{aligned} \right\} \quad (4-17)$$

式中应用了爱因斯坦求和约定。

另外，法向矢量 $\overset{\circ}{n}_j^{\circ+\pi/2}$ 可用 $\overset{\circ}{n}_j$ 表示：

$$\overset{\circ}{n}_i^{\circ+\pi/2} = -\varepsilon_{jk} \overset{\circ}{n}_k \quad (4-18)$$

式中， ε_{ij} 是二阶置换张量，且定义为

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

将式(4-18)代入式(4-17)中的第二个式子，可得

$$\overset{\circ}{t}_i^{\circ+\pi/2} = -\overset{\circ}{\sigma}_{ji} \varepsilon_{jk} \overset{\circ}{n}_k \quad (4-19)$$

用 $\varepsilon_{rp} \overset{\circ}{n}_p$ 乘方程(4-19)的两边，可得：

$$\varepsilon_{rp} \overset{\circ}{n}_p \overset{\circ}{t}_i^{\circ+\pi/2} = -\overset{\circ}{\sigma}_{ji} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{rp} \overset{\circ}{n}_k \overset{\circ}{n}_p \quad (4-20)$$

利用 Kronecker 的 δ 记号，即

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{当 } i=k \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } i \neq k \text{ 时} \end{cases}$$

有：

$$e_{jk}e_{rp} = \delta_{jr}\delta_{kp} - \delta_{rk}\delta_{pj} \quad (4-21)$$

将(4-21)式代入(4-20)式, 有:

$$\begin{aligned} e_{rp} \dot{\mathbf{n}}_p \cdot \dot{\mathbf{t}}_i &= -\dot{\sigma}_{ji} [\delta_{jr}\delta_{kp} - \delta_{rk}\delta_{pj}] \dot{\mathbf{n}}_k \dot{\mathbf{n}}_p \\ &= -\dot{\sigma}_{ri} \dot{\mathbf{n}}_p \dot{\mathbf{n}}_p + \dot{\sigma}_{pj} \dot{\mathbf{n}}_r \dot{\mathbf{n}}_p \\ &= -\dot{\sigma}_{ri} + \dot{\mathbf{t}}_i \dot{\mathbf{n}}_r \end{aligned} \quad (4-22)$$

由上式可得应力张量 $\dot{\sigma}_{ij}$ (并注意 $e_{rp} \dot{\mathbf{n}}_p = -\dot{\mathbf{n}}_r$):

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\mathbf{n}}_i \dot{\mathbf{t}}_j + \dot{\mathbf{n}}_i \cdot \dot{\mathbf{t}}_j \quad (4-23)$$

上述圆内的应力张量是角 α 的函数, 其中 α 的变化范围为 $0 - \frac{\pi}{2}$ 。则平均应力张量 $\bar{\sigma}_{ij}$ 可定义为:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\int_0^{\pi/2} \dot{\sigma}_{ij} d\alpha}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \dot{\sigma}_{ij} d\alpha \quad (4-24)$$

由合力公式(4-16)和(4-23), 可得由边界应力表示的平均应力张量 $\bar{\sigma}_{ij}$ 。因

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\mathbf{n}}_i \frac{\dot{\mathbf{F}}_j}{2R} + \dot{\mathbf{n}}_i \cdot \frac{\dot{\mathbf{F}}_j}{2R} \quad (4-25)$$

从而式(4-24)可变为:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \dot{\mathbf{n}}_i \frac{\dot{\mathbf{F}}_j}{2R} d\alpha + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \dot{\mathbf{n}}_i \cdot \frac{\dot{\mathbf{F}}_j}{2R} d\alpha$$

设 $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$, 则上式又可变成:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \dot{\mathbf{n}}_i \frac{\dot{\mathbf{F}}_j}{2R} d\alpha + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \dot{\mathbf{n}}_i \frac{\dot{\mathbf{F}}_j}{2R} d\beta \quad (4-26)$$

如图 4-6 所示, 可以将角积分变成坐标积分。

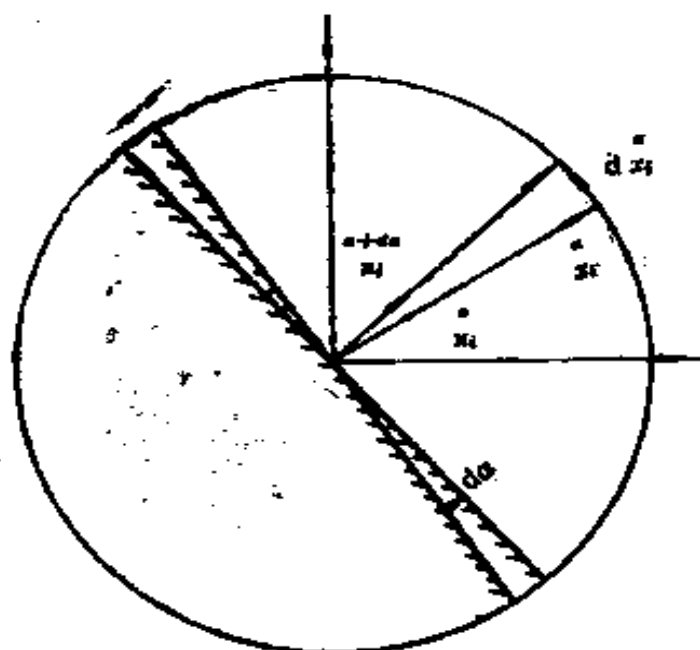


图 4-6 α 角积分

将 $\vec{n}_i R d\alpha = \vec{e}_{ik} d\vec{x}_k$ 代入式(4-26), 可得:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^\pi \vec{F}_j \vec{e}_{ik} d\vec{x}_k$$

对其进行分部积分, 可得:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\pi R^2} \vec{e}_{ik} \vec{F}_j \vec{x}_k \Big|_0^\pi - \frac{1}{\pi R^2} \int_0^\pi \vec{e}_{ik} \vec{x}_k d\vec{F}_j, \quad (4-27)$$

式中, 力 \vec{F}_j 作用于法线方向为 \vec{n}_i 的平面上, 是弧 \widehat{ABC} 上应力的合力 (图 4-7))。由平衡条件 $\vec{F}_j = -\vec{F}_j$ 以及 $\vec{x}_k = -\vec{x}_k$, 则(4-27)式中第一项为零, 这样

$$\sigma_{ij} = -\frac{1}{\pi R^2} \int_0^\pi \vec{e}_{ik} \vec{x}_k d\vec{F}_j, \quad (4-28)$$

上式中力 \vec{F}_j 可用 \widehat{ABC} 上的应力 p_j 表示 (见图 4-7):

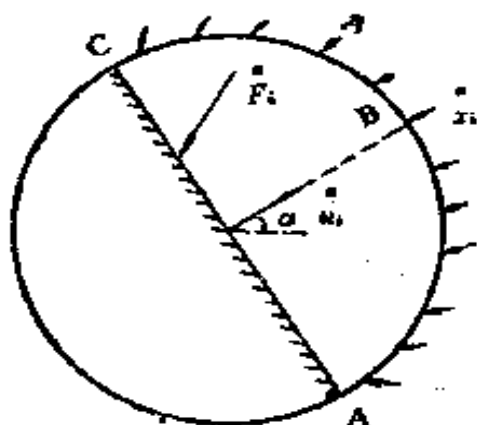


图 4-7 由边界应力表示力 \vec{F}_i ;

$$\vec{F}_i = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R p_j d\theta$$

对 α 求导有:

$$\frac{d\vec{F}_i}{d\alpha} = R \left[\frac{\partial + \pi/2}{p_j} - \frac{\partial - \pi/2}{p_j} \right] \quad (4-29)$$

式中, $\frac{\partial + \pi/2}{p_j}$ 和 $\frac{\partial - \pi/2}{p_j}$ 分别是作用于点 x_j 和 x_j 上的应力。因此式(4-28)变为:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -\frac{1}{\pi R^2} \int_0^\pi \left[R \varepsilon_{ijk} x_k \frac{\partial + \pi/2}{p_j} - R \varepsilon_{ijk} x_k \frac{\partial - \pi/2}{p_j} \right] d\alpha \\ &= -\frac{1}{\pi R^2} \int_0^\pi \left[x_k \frac{\partial + \pi/2}{P_j} + x_k \frac{\partial - \pi/2}{P_j} \right] R d\alpha \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[x_k \frac{\partial}{p_j} \right] R d\beta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[x_k \frac{\partial}{p_j} \right] R d\beta \right\} \quad (4-30) \end{aligned}$$

令 $R d\beta = ds$, $V = \pi R^2$, 则式(4-30)可写为:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V} \int x_k p_j ds \quad (4-31)$$

式中, V 表示一个单位厚度的圆域体积。

2. 位移梯度张量

为了保证整个研究区域的位移连续, 孔隙也应分配给一定的位移。位移梯度矢量 α_{ij} 定义为:

$$\alpha_{ij} = \partial_i u_j \quad (4-32)$$

式中, ∂_i 表示 $\partial/\partial x_i$, u_j 表示位移矢量。

另外, 若 s 方向的位移梯度矢量定义为 α_i , 则:

$$\alpha_i = \frac{du_i}{ds} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{ds} = [\partial_j u_i] v_j = \alpha_{ij} v_j \quad (4-33)$$

式中, $v_j = dx_j/ds$ 表示位移梯度矢量的方向。

现求松散介质在一个圆形区域内的平均位移梯度张量。

如图 4-8 所示, 设圆的半径为 R , 沿方向 v_i 和 v_i 的位移梯度矢量分别为 α_i 和 α_i 。用类似式(4-23)的求法, 可推出:

$$\alpha_{ij} = v_i \alpha_j + v_i \alpha_j \quad (4-34)$$

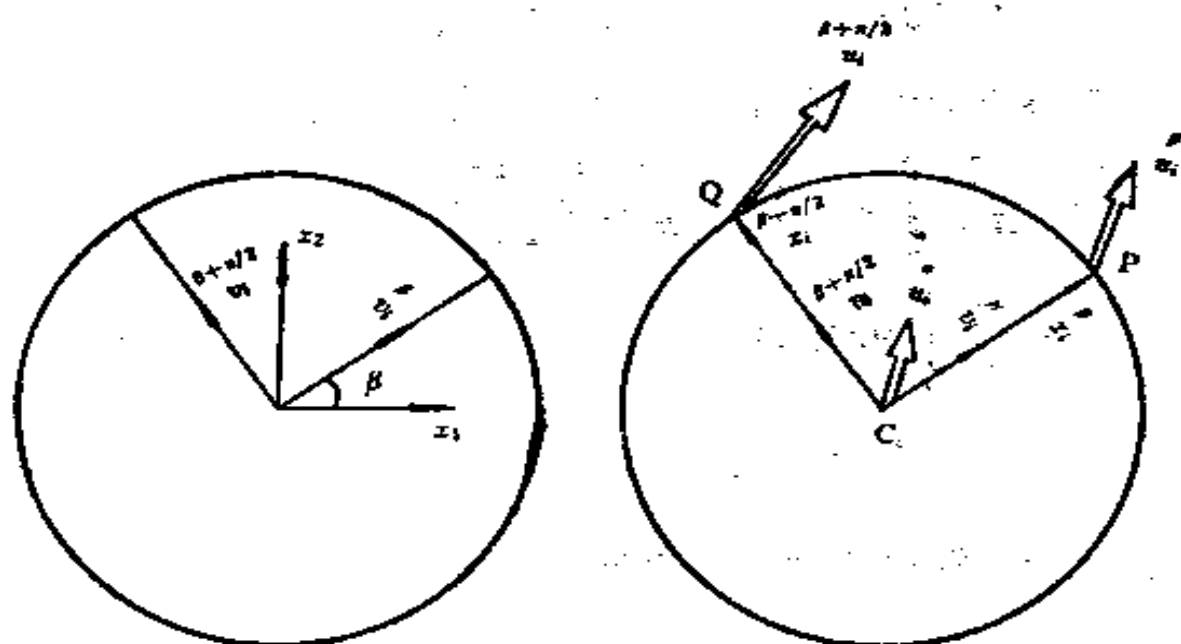


图 4-8 位移梯度

对式(4-34)积分, 可以求得圆内的平均位移梯度矢量为:

$$\overline{\alpha_{ij}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \alpha_{ij} d\beta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[v_i \alpha_j + v_i \alpha_j \right] d\beta \quad (4-35)$$

定义半径 PC 的位移梯度矢量为(图 4-8(b)):

$$\alpha_i = \frac{u_i - u_i}{R} \quad (4-36)$$

式中, $\overset{P}{u}_i$ 和 $\overset{O}{u}_i$ 分别为边界点 P 和圆心 C 处的位移。同样,

$$\overset{P+\pi/2}{\alpha}_i = \frac{\overset{P+\pi/2}{u}_i - \overset{O}{u}_i}{R} \quad (4-37)$$

式中, $\overset{P+\pi/2}{u}_i$ 表示边界 Q 点的位移。

将式(4-36)和(4-37)代入式(4-35)中, 可以得到:

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}_{ij} &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \left[v_i(\overset{P}{u}_j - \overset{O}{u}_j) + \overset{P+\pi/2}{v}_i(\overset{P+\pi/2}{u}_j - \overset{O}{u}_j) \right] R d\beta \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} v_i \overset{P}{u}_j R d\beta - \frac{1}{\pi R^2} \overset{O}{u}_j \int_0^{2\pi} v_i d\beta \quad (4-38) \end{aligned}$$

利用 $v_i d\beta = \varepsilon_{i1} dx_1 / R$, $R d\beta = ds$, 式(4-38) 可变为:

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}_{ij} &= \frac{1}{\pi R^2} \int v_i \overset{P}{u}_j ds - \frac{1}{\pi R^2} \overset{O}{u}_j \int_0^{2\pi} v_i d\beta \\ &= \frac{1}{V} \int v_i \overset{P}{u}_j ds \quad (4-39) \end{aligned}$$

式中, $V = \pi R^2$ 是体积。

4.3.3 圆形颗粒介质的平均应力和平均应变

研究颗粒介质某一区域内的平均应力和平均应变, 一般是以某一点为圆心作圆划分边界 (见图 4-9(a))。这时遇到的麻烦是边界上颗粒的隶属问题。离散单元法确定边界的原则是: 当圆弧通过两个颗粒之间孔隙时, 边界取连接两个颗粒交点的直线段; 当圆弧落入颗粒之内时, 边界取颗粒周边被截取较小的那部分 (见图 4-9(b))。下面分别计算其内部的平均应力张量和平均应变张量。

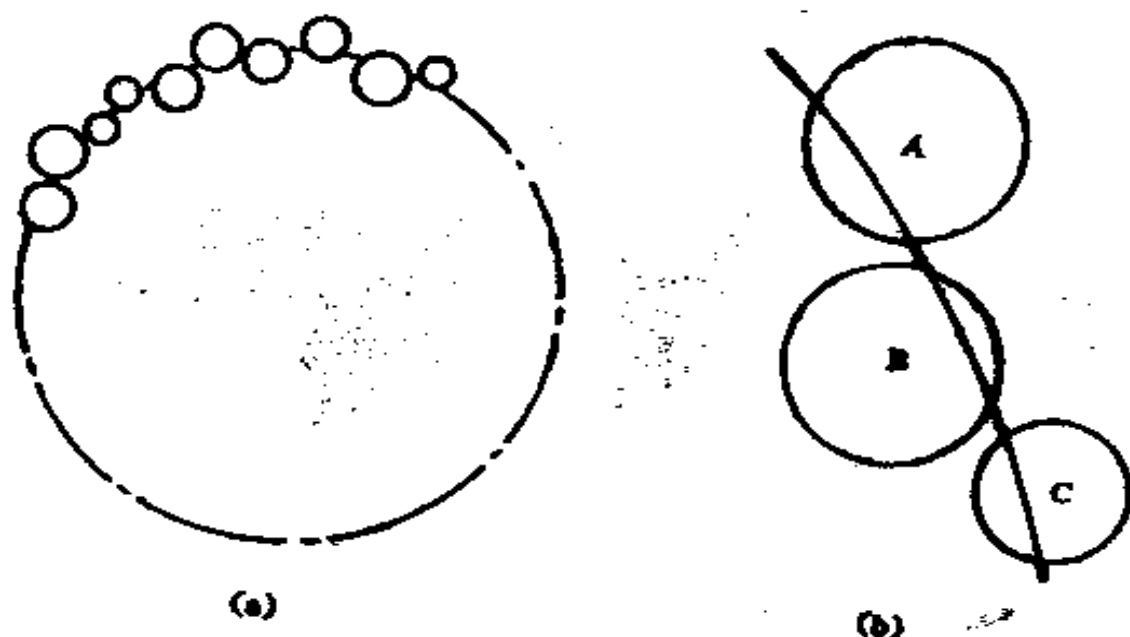


图 4-9 颗粒体的近似圆弧边界

1. 平均应力张量

设所需求解的区域体积为 V ，其内任意一点的坐标为 (x_1, x_2) ，应力为 σ_{ij} 。则平均应力 $\bar{\sigma}_{ij}$ 定义为：

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int \sigma_{ij} dV \quad (4-40)$$

由于在块体之间的空隙中无应力，因此式(4-40)应写成对体积 V 内的所有块体进行积分的形式，即：

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^n \int_{V_k} \sigma_{ij} dV \quad (4-41)$$

式中， n 表示体积为 V 的区域内的块体数目； V_k 是第 k 块体的体积。在不考虑体积力的情况下，每个块体内的应力满足平衡条件 $\partial_i \sigma_{ij} = 0$ 。于是，式(4-41)中的 σ_{ij} 可写成：

$$\sigma_{ij} = \delta_{ik} \sigma_{kj} = (\partial_k x_i) \sigma_{kj} = \partial_k (\sigma_{kj} x_i) - x_i \partial_k \sigma_{kj} \quad (4-42)$$

由式(4-42), 平衡方程和高斯公式, 式(4-41)可表示成:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^n \int_{V_k} \partial_k (x_i \sigma_{kj}) dV = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^n \int_{S_k} x_i \sigma_{kj} n_k ds$$

又由 $P_j = \sigma_{kj} n_k$, 得:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^n \int_{S_k} x_i P_j ds \quad (4-43)$$

式中, S_k 表示第 k 块体的边界; P_j 是其上的牵引力。上式是线积分。由于作用于边界上的牵引力 P_j , 除了在块体接触点 C 以外, 其余全部为零, 所以式(4-43)可写成和的形式:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_{S_k} x_i P_j ds = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^n \sum_{c=1}^m x_i^c T_j^c \quad (4-44)$$

式中, T_j^c 是第 k 块体在接触点 C 上所受的力; m 表示共有 m 个接触点。因为在区域 V 内的所有接触点上都作用有大小相等, 而方向相反的两个力, 所以它们相互抵消。这样, 式(4-44)可变成如下形式:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \sum_B \dot{x}_i \dot{T}_j \quad (4-45)$$

式中, B 表示所求区域的边界; \dot{x}_i, \dot{T}_j 分别是边界上接触点 r 的位置矢量和力矢量 (见图 4-10)。

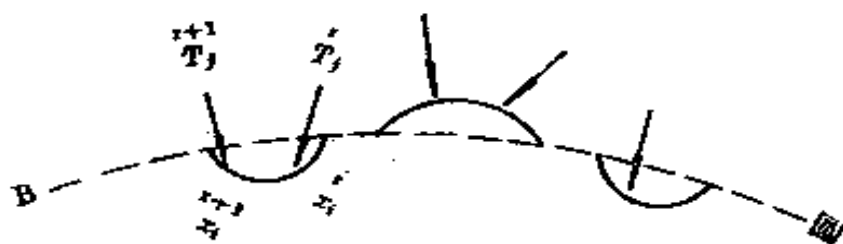


图 3-10 边界 B 的一段

从式(4-45)可以看出, 只要已知所求区域边界上的接触点坐标和力, 就能很容易地算出平均应力, 从而求出主应力及其方向。但需要注意的是, 只有当颗粒直径与圆边界的直径之比相当小时, 才能减小计算误差。

2. 平均应变张量

由前面推导可知, 平均位移梯度张量为:

$$\bar{\alpha}_{ij} = \overline{\partial_i u_j} = \frac{1}{V} \int_B u_j v_i ds \quad (4-46)$$

如图 4-11 所示, 沿颗粒边界的位移可由颗粒形心的位移和转角来确定。沿颗粒之间连线的位移增量可由线段两端点的位移值的线性插值计算。这样, 式(4-46)的积分可用如下方法计算。



图 4-11 沿边界 B 的位移

如果边界 B 与 M 个颗粒相交, 那么将有 $2M$ 个交点。设交点的坐标为 $z_r (r=1, 2, \dots, 2M)$, 连接两个颗粒的线段端点矢量为 z_m 与 $z_{m+1} (m=1, 2, \dots, 2M)$, 且有 $z_{2M+1} = z_1$ 。因此, 式(4-46)的积分可变成对 M 条直线段的积分和对 M 个圆弧的积分:

$$\bar{\alpha}_{ij} = \frac{1}{V} \left\{ \sum_{k=1}^M \int_{P_k} u_j n_i ds + \sum_{k=1}^M \int_{B_k} u_j n_i ds \right\} \quad (4-47)$$

式中, P_k 表示通过第 k 个孔隙的线段, B_k 表示第 k 个圆弧的边界。

沿颗粒周边的积分可用下述方法计算。如图 4-12 所示, 应用高斯公式, 有

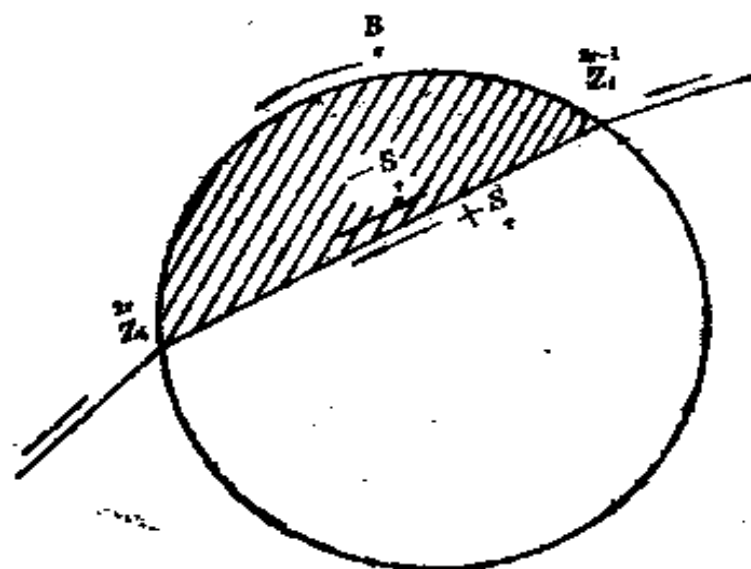


图 4-12 沿颗粒体边界的积分

$$\int_{-S} u_j v_i ds + \int_B u_j v_i ds = \int_V \partial_i u_j dV \quad (4-48)$$

式中, $-S$ 表示积分由 Z_i 到 Z_i^{r-1} , V 表示由 B 和 $-S$ 围成的体积。如果用 S 表示由 Z_i^{r-1} 到 Z_i 的积分路线, 则

$$\int_{-S} u_j v_i ds = - \int_S u_j v_i ds, \text{ 从而式(4-48)可改写成:}$$

$$\int_S u_j v_i ds = \int_B u_j v_i ds + \int_V \partial_i u_j dV \quad (4-49)$$

将上式代入式(4-47)中, 有:

$$\bar{a}_{ij} = \frac{1}{V} \left\{ \sum_{i=1}^M \int_P u_j v_i ds + \sum_{i=1}^M \int_S u_j v_i ds + \sum_{i=1}^M \int_V \partial_i u_j dV \right\} \quad (4-50)$$

式中, P 表示连接 Z_i^{2k} 与 Z_i^{2k+1} 的直线; S 表示连接 Z_i^{2k-1} 与 Z_i^{2k} 的弧线, 如图 4-13 所示。

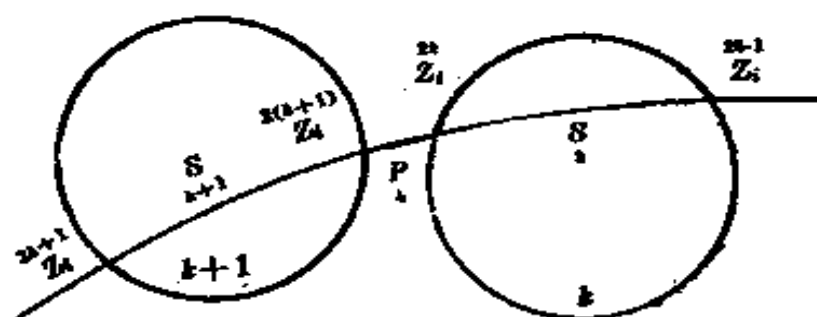


图 4-13 积分路径

当颗粒体受载从一个稳定状态变到另一个稳定状态时, 颗粒 s 上任意一点 x_i 的位移增量 u_i , 可由其圆心位移 $\Delta \dot{v}_i$ 和转角 $\dot{\omega}$ 来确定。如果颗粒 s 在这两种稳定状态时的位置矢量分别为 \dot{x} 和 \dot{y}_i , 则

$$\Delta \dot{v}_i = \dot{y}_i - \dot{x}_i \quad (4-51)$$

此外, 如果半径矢量与颗粒 s 的 x_i 轴夹角在第一和第二稳定状态时分别为 $\dot{\theta}$ 和 $\dot{\eta}$, 则又有:

$$\dot{\omega} = \dot{\eta} - \dot{\theta} \quad (4-52)$$

颗粒 s 上任一点 x_i 处的位移增量可由下式确定:

$$u_i = \Delta \dot{v}_i + \dot{D}_{ij} [x_j - x_{cj}] \quad (4-53)$$

式中, \dot{x}_{cj} 表示颗粒 s 的圆心坐标; \dot{D}_{ij} 表示转动张量, 且有:

$$\dot{D}_{ij} = -(1 - \cos \omega) \delta_{ij} - (\sin \omega) \varepsilon_{ij} \quad (4-54)$$

由式(4-53)可知, 区域圆与颗粒 k 的交点 Z_i^{2k-1} 和 Z_i^{2k} 处的位移分别为:

$$\left. \begin{aligned} u_i^{2k-1} &= \Delta v_i + D_{ij} (Z_j^{2k-1} - x_{cj}) \\ u_i^{2k} &= \Delta v_i + D_{ij} (Z_j^{2k} - x_{cj}) \end{aligned} \right\} \quad (4-55)$$

式(4-50)沿线段 P 和 S 的积分在形式上一样, 可以合并成一项。如果用 L ($k=1, 2, \dots, 2M$) 表示连接点 Z_i^k 与 Z_i^{k+1} 的 $2M$ 个线段, 则式(4-50)可写成:

$$\bar{a}_{ij} = \frac{1}{V} \left\{ \sum_{k=1}^{2M} \int_{L_k} u_j v_i ds + \sum_{k=1}^M \int_V \partial_i u_j dV \right\} \quad (4-56)$$

由于位移沿线 L 由 u_i^k 线性地变化到 u_i^{k+1} , 且 L 的法线矢量为常量, 则沿线段 L 的积分为:

$$\int_{L_k} u_j v_i ds = \frac{1}{2} (u_j^k + u_j^{k+1}) v_i l \quad (4-57)$$

式中, l 是 L 的长度, 且

$$l = \left\{ \left(Z_j^{k+1} - Z_j^k \right) \left(Z_j^{k+1} - Z_j^k \right) \right\}^{1/2} \quad (4-58)$$

将式(4-57)代入(4-56)式, 有

$$\bar{a}_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^{2M} \frac{1}{2} (u_j^k + u_j^{k+1}) v_i l + \frac{1}{V} \sum_{k=1}^M \int_V \partial_i u_j dV \quad (4-59)$$

对于颗粒 r , 由式(4-53)可得:

$$\partial_i u_j = \partial_i \Delta v_j + D_{jk} (\partial_i x_k - \partial_i x_{ck}) \quad (4-60)$$

由于 $\Delta \dot{v}_j$ 和 \dot{x}_{ck} 都是常量, 且 $\partial_i x_k = \delta_{ik}$, 所以

$$\partial_i u_j = \dot{D}_{jk} \delta_{ik} = \dot{D}_{ji} \quad (4-61)$$

又因为 \dot{D}_{ji} 是不变量, 由上式可得:

$$\int_V \partial_i u_j dV = \dot{D}_{ji} \int_V dV = \dot{D}_{ji} \dot{V}_* \quad (4-62)$$

式中, \dot{V}_* 表示由 B 和 S 所围成的体积 (见图 4-12 中的阴影部分), 且当 B 落入圆内时 \dot{V}_* 为负。将式 (4-62) 代入式 (4-59), 可得:

$$\bar{a}_{ij} = \frac{1}{V} \left\{ \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2} \left(u_j^{(i)} + u_i^{(j+1)} \right) \dot{v}_i \dot{l} + \sum_{j=1}^n \dot{D}_{ji} \dot{V}_* \right\} \quad (4-63)$$

由上式可定义平均应变张量 \bar{e}_{ij} 为

$$\bar{e}_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{a}_{ij} + \bar{a}_{ji}) \quad (4-64)$$

4.4 边界条件

用离散单元法研究颗粒介质问题时, 首先应确定颗粒体的边界条件。下面介绍离散单元法中几种比较常用的边界条件。

4.4.1 刚性壁边界

当用刚性壁作边界时, 边界条件可以用刚性壁坐标原点 C 的两个平移速度和一个转动速度来定义 (见图(4-14)), 也可以采用伺服控制机理保证刚性壁所受的法向力不变。

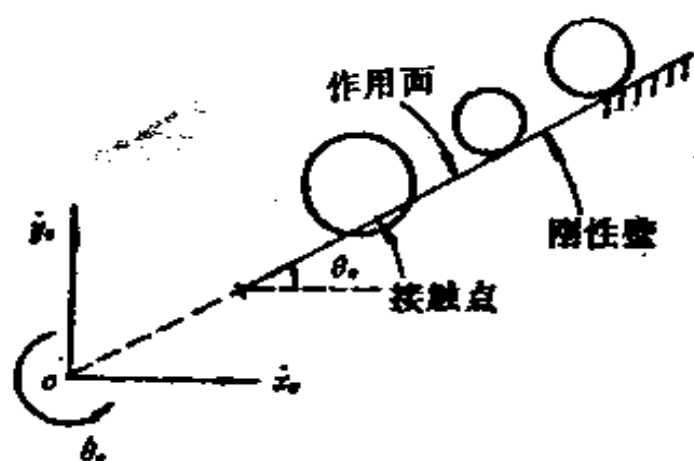


图 4-14 刚性壁边界

4.4.2 颗粒边界

当边界是由颗粒自身组成时，边界是一个凸多边形，并且可以想象为由位于边界颗粒形心处的桩钉所拉紧的弹性皮筋。内部颗粒向外运动，当其形心接触到边界上任意两个相邻颗粒形心的连线时，将变为边界颗粒。颗粒边界条件有如下 4 种控制方式：

1. 应变控制边界

应变控制边界是由边界颗粒的速度来表示的。此方法不考虑边界颗粒所受的外力，并且假定边界颗粒没有角速度。在边界上，每个颗粒形心的速度 u_i 为：

$$\dot{u}_i = \dot{e}_{ji} x_j \quad (4-65)$$

式中， \dot{e}_{ji} 是给定的应变率张量； x_j 是颗粒相对于颗粒体中心的坐标矢量。

2. 应力控制边界

当选择应力控制边界条件时，必须给定边界上的平均应力张量。一般情况下，平均应力张量可以通过对边界颗粒施加集中力来实现。如图 4-15 所示，平均应力张量作用在图

中的虚线上，每条边中点所受的等效集中力为：

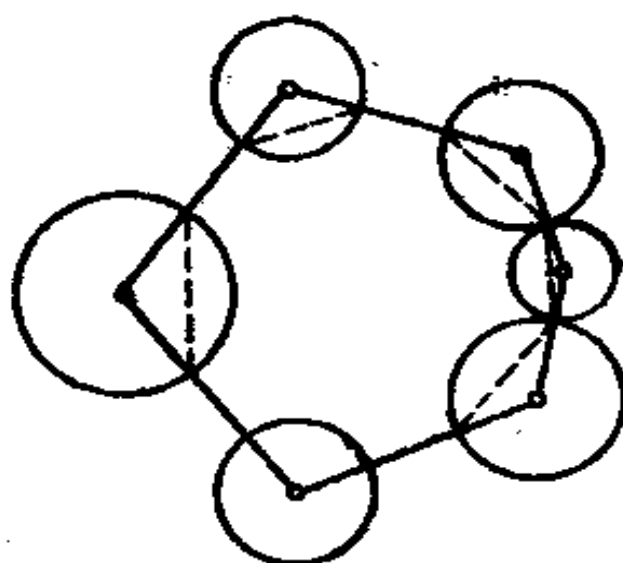


图 4-15 应力控制边界

$$F_i = \sigma_{ij} n_j L \quad (4-66)$$

式中, F_i 表示集中力矢量; σ_{ij} 表示所施加的应力张量; n_j 表示边的单位外法线矢量; L 表示边的长度。

每条边上的力如何传递到颗粒形心上, 这取决于这条边的类型。对于连接颗粒 A 和 B 的边, 集中力可根据力和力矩平衡原理分配到两个颗粒的形心上 (见图 4-16) :

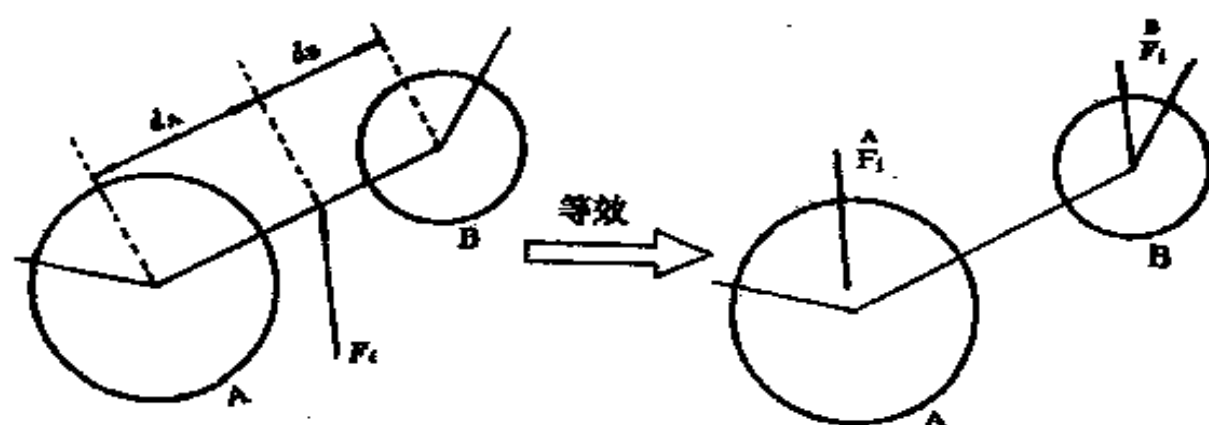


图 4-16 集中力的分配

$$\left. \begin{aligned} F_i^A &= \frac{d_B}{d_A + d_B} F_i \\ F_i^B &= \frac{d_A}{d_A + d_B} F_i \end{aligned} \right\} \quad (4-67)$$

对于位于颗粒内的边，力可直接作用在颗粒的形心上，但应附加一个平衡力矩（见图 4-17）：

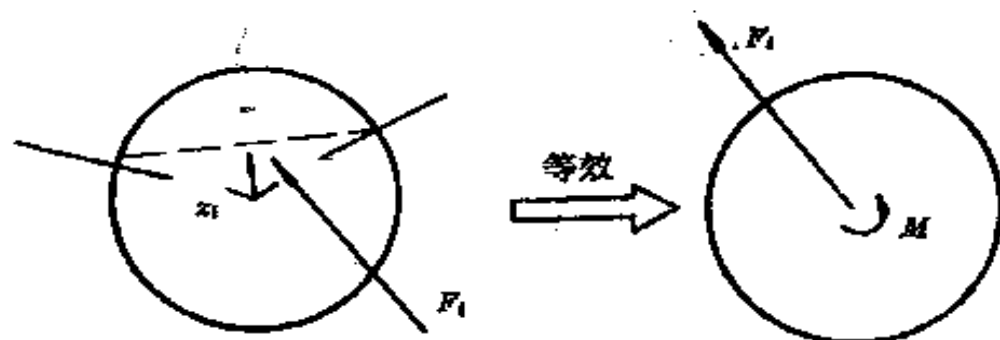


图 4-17 集中力的等效变换

$$M = -\varepsilon_{ij} F_i x_j \quad (4-68)$$

式中， x_j 是颗粒形心到边中点的距离矢量； $\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 。

在一般情况下，由于形心与边的距离很近，力矩 M 是非常小的。

以上两种形式的控制边界都不令人十分满意。当应力接近颗粒体的强度时，应力控制边界上的颗粒将会出现不稳定现象。虽然应变控制的边界不会出现上述现象，但也有其不足之处。例如，各应力分量在计算过程中总是变化的，这给结果的解释带来了许多麻烦，特别是与物理实验对照时更为困难。因此，为了弥补以上两种边界的不足，又提出如下两种控制边界。

3. 伺服控制边界

这种边界仍然是应变控制边界，只是采用伺服原理调整边界颗粒的应变率张量，以便使内部颗粒的平均应力保持不变。其原理是使颗粒体内的平均应力与理想的平均应力之差最小。所采用的伺服控制方程为：

$$\Delta \dot{e}_{11}^{(a)} = \Delta \dot{e}_{22}^{(a)} = G[\bar{\sigma}_0^{(d)} - \bar{\sigma}_0^{(c)}] \quad (4-69)$$

式中，右上标(a)，(d)和(c)分别表示“施加”、“理想”和“计算”； $\Delta \dot{e}_{11}^{(a)}$ 和 $\Delta \dot{e}_{22}^{(a)}$ 是所施加的边界应变率的增量； G 是伺服机获得量。 $\bar{\sigma}_0^{(c)}$ 是研究区域的计算平均应力，且

$$\bar{\sigma}_0^{(c)} = \frac{1}{2A} \sum F_i x_i \quad (4-70)$$

式中， A 是由边界多边形所围成的面积； Σ 表示对所有边界颗粒求和； F_i 表示作用于颗粒上的力矢量； x_i 是颗粒的位置矢量。

4. 边界平均应力的控制

为了消除第一种控制边界所存在的不足，使边界上的集中力得以释放，所有边界的平均应力张量都是间接地通过边界颗粒的运动速度来控制。由于控制速度而不控制应力可能产生大的“叠合”，造成很大的力，因此还应控制应力。这种边界与第三种边界比较相近，只是该边界是对所有的应力张量分量都加以控制，不仅仅对 σ_{xx} 。

4.5 圆形颗粒离散单元法在编程方面的主要特点

圆形颗粒离散单元法也是采用分格检索以及一维可变数组的动态数据结构，但由于圆形颗粒之间只能有一个接触点，计算较为简便易行，因此与多边形离散单元法相比，在

编程方面有其一定的特点。

4.5.1 检索方式

虽然在圆形离散单元法中“网格”仍然保留，但它是利用颗粒的外切正方形进行检索的。如图 4-18 所示，首先在边长大于任意一个颗粒直径的网格内，做颗粒的外切正方形（图中的虚线），若正方形的一个角落入某一网格内，就说该颗粒在此网格中有了一个记录。用此方法，就可保证一个颗粒通过“访问”其周边正方形所“叠合”的网格，确定其所有的相邻颗粒，而无需搜寻整个区域。对于刚性壁，其检索方式更为简单。如果刚性壁过某一网格，就说它在此网格中有了一个记录（见图 4-19）。

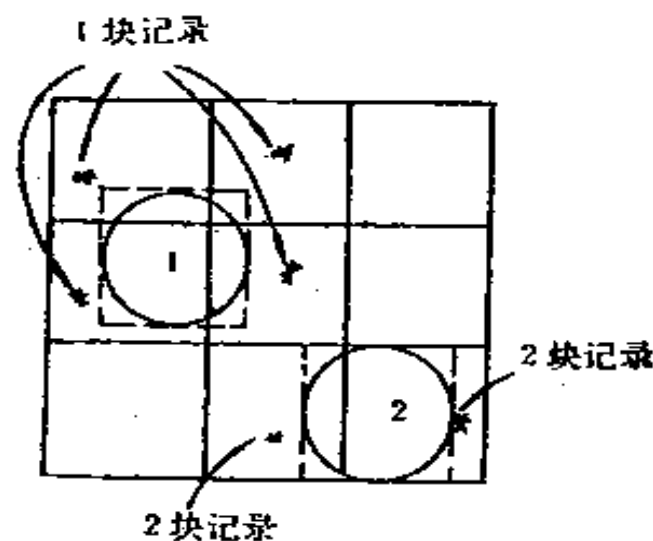


图 4-18 圆形颗粒分格检索方式

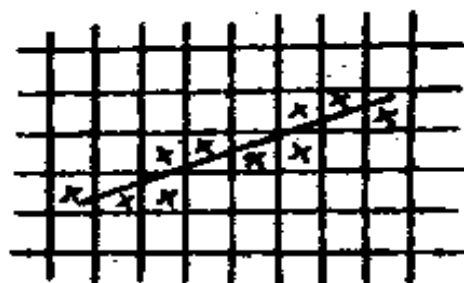


图 4-19 刚性壁的记录
x 表示记录

4.5.2 数据存贮方式

由于采用上述检索方式确定颗粒之间的接触关系，因此圆形颗粒离散单元法的整个数据存贮方式也同多边形离散单元法不同，特别是接触链表不再是顺序存贮数组。圆形颗粒离散单元法的数据结构如图 4-20，图 4-21，图 4-22，图

4-23 和图 4-24 所示。图 4-25 是某一个网格内有不同个接触颗粒时的链表结构。

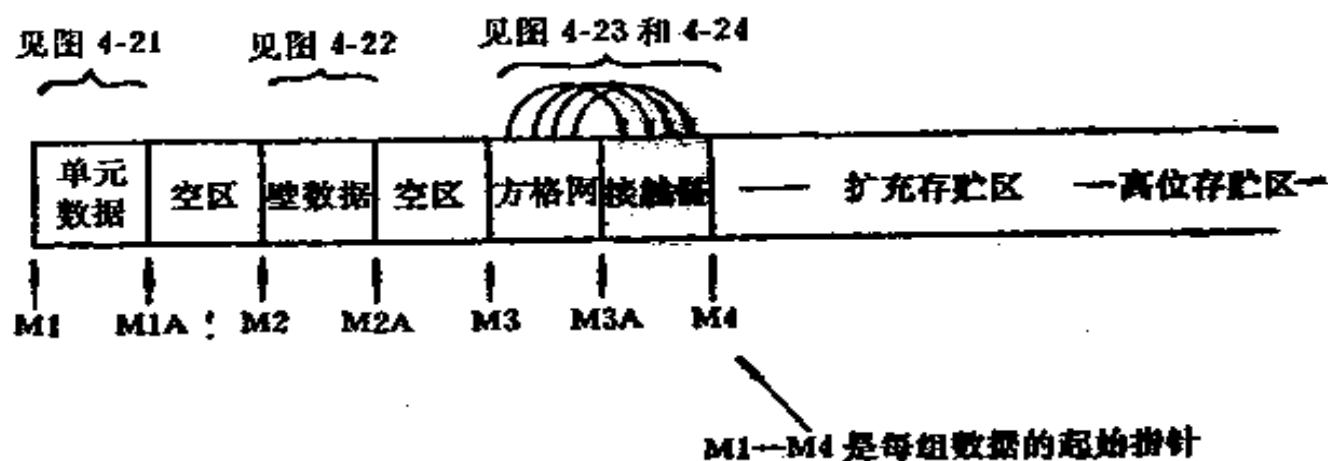


图 4-20 整个动态数据组的存储结构

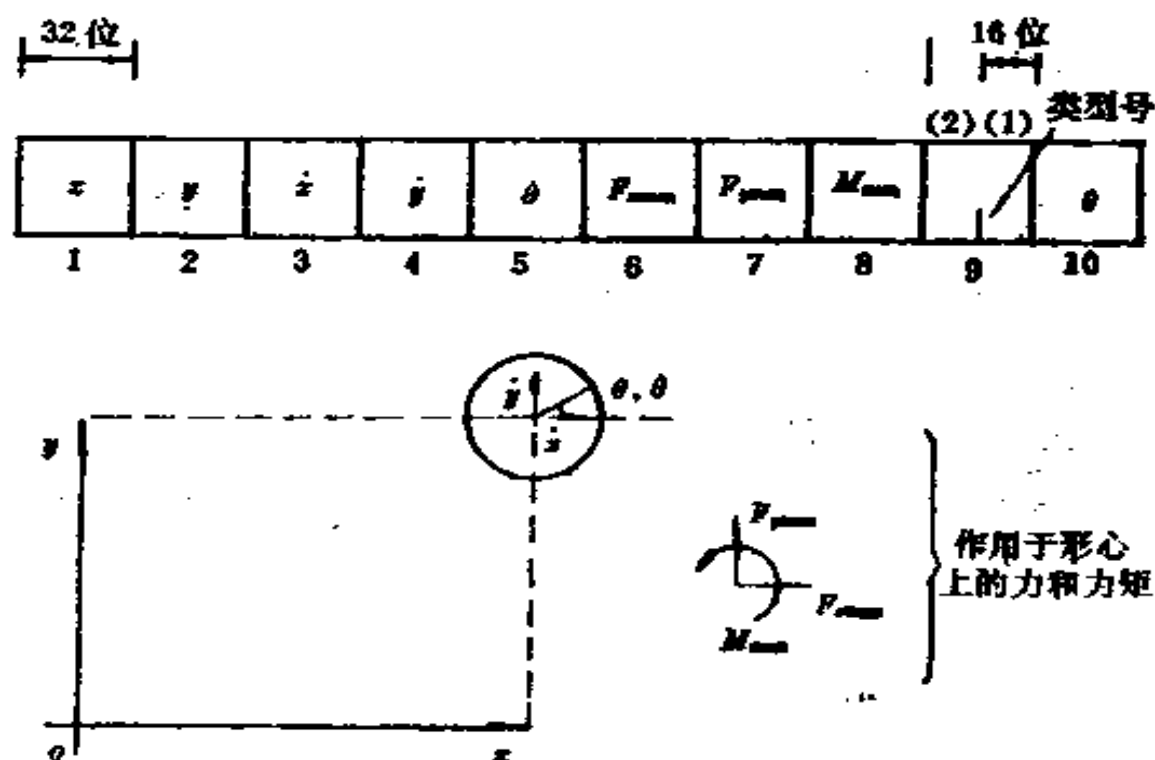


图 4-21 每个颗粒的数据结构

32 位

16 位
类型号

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
x_1	x_2	y_1	y_2	z_1	z_2	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8	θ_9	θ_{10}	θ_{11}	θ_{12}	θ_{13}

P_{max}

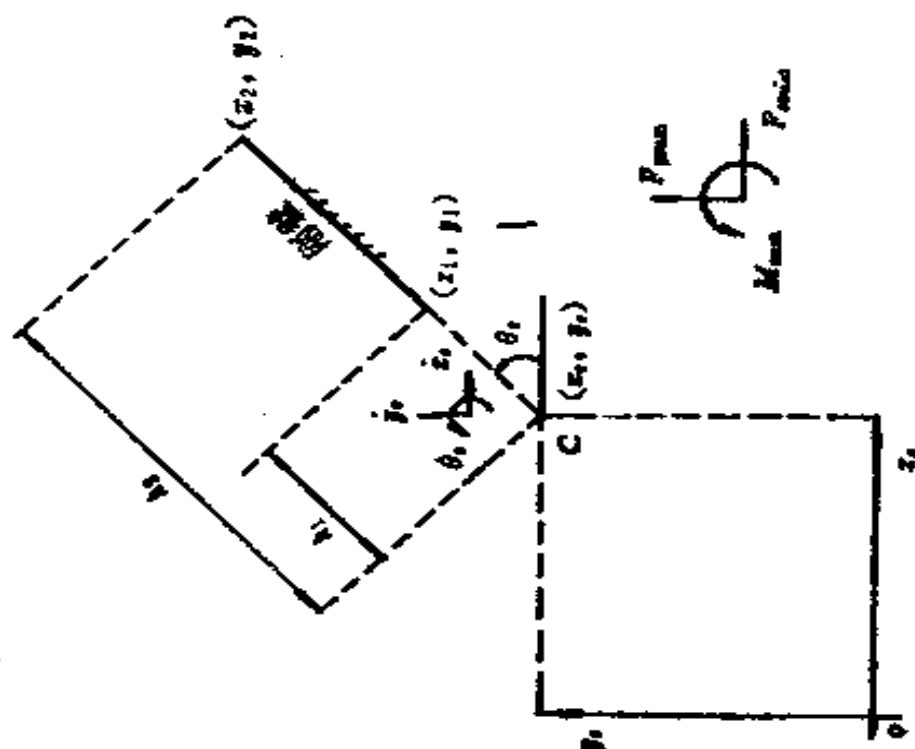


图 4-22 每个刚性壁的数据结构

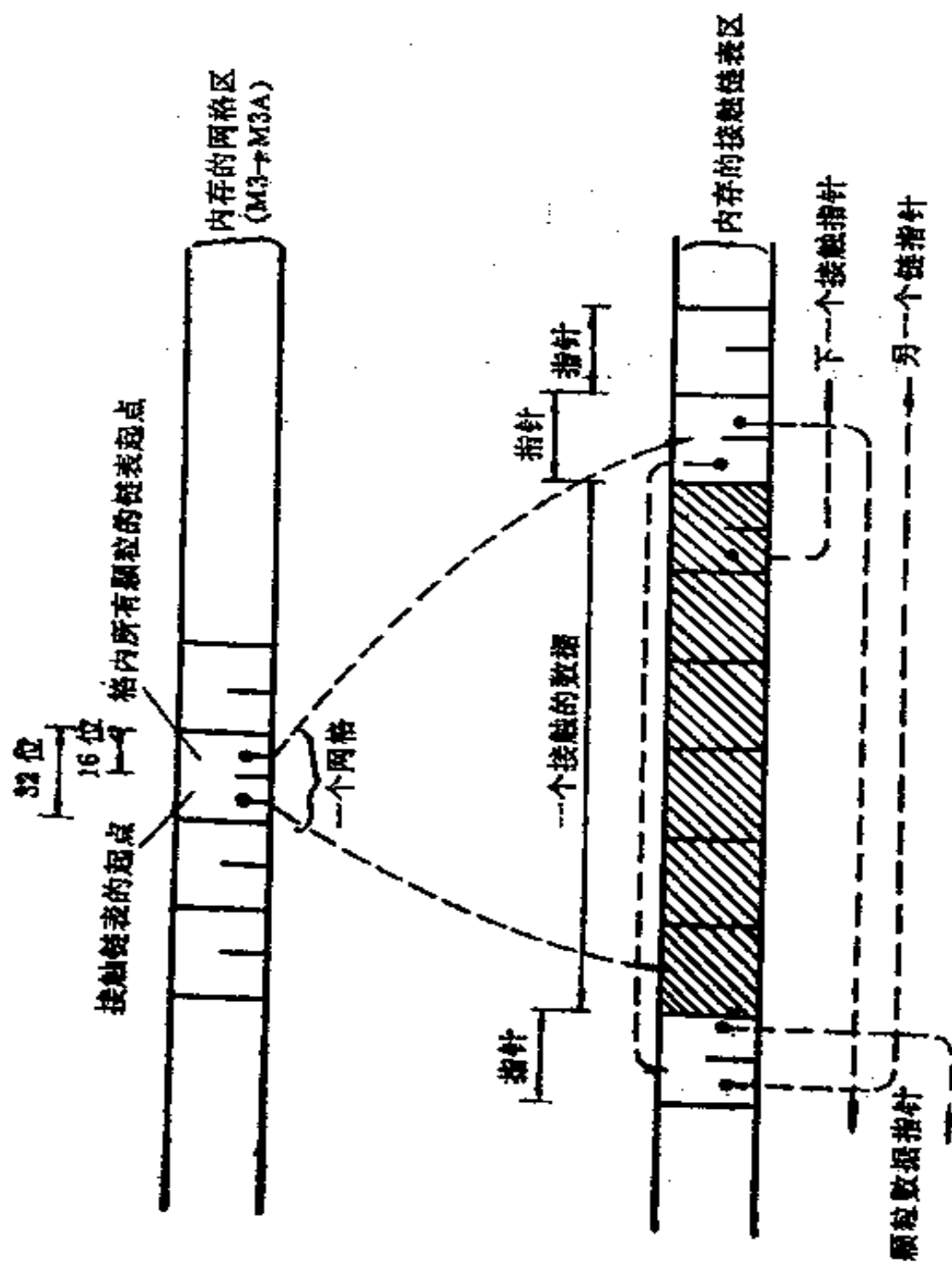
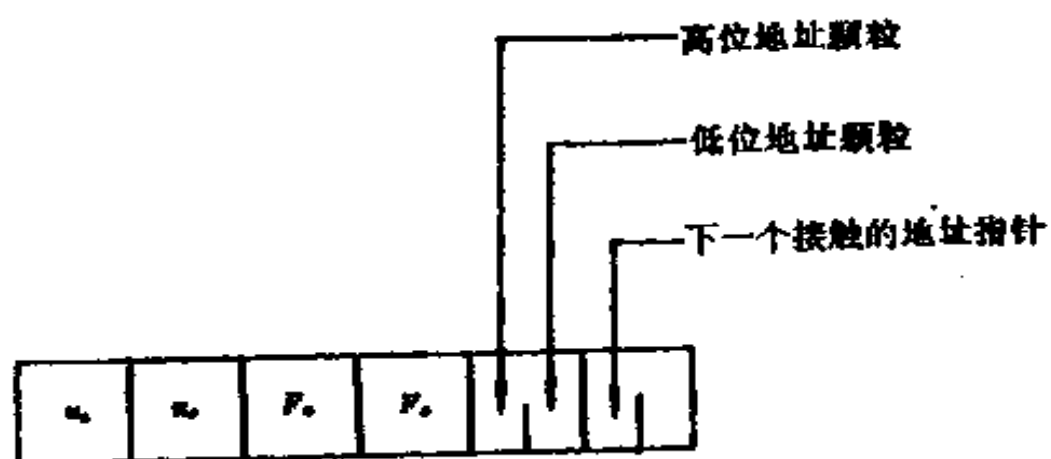


图 4-23 接触链表结构



u_n —法向位移, u_t —切向位移, F_n —法向力, F_t —切向力

图 4-24 接触数据

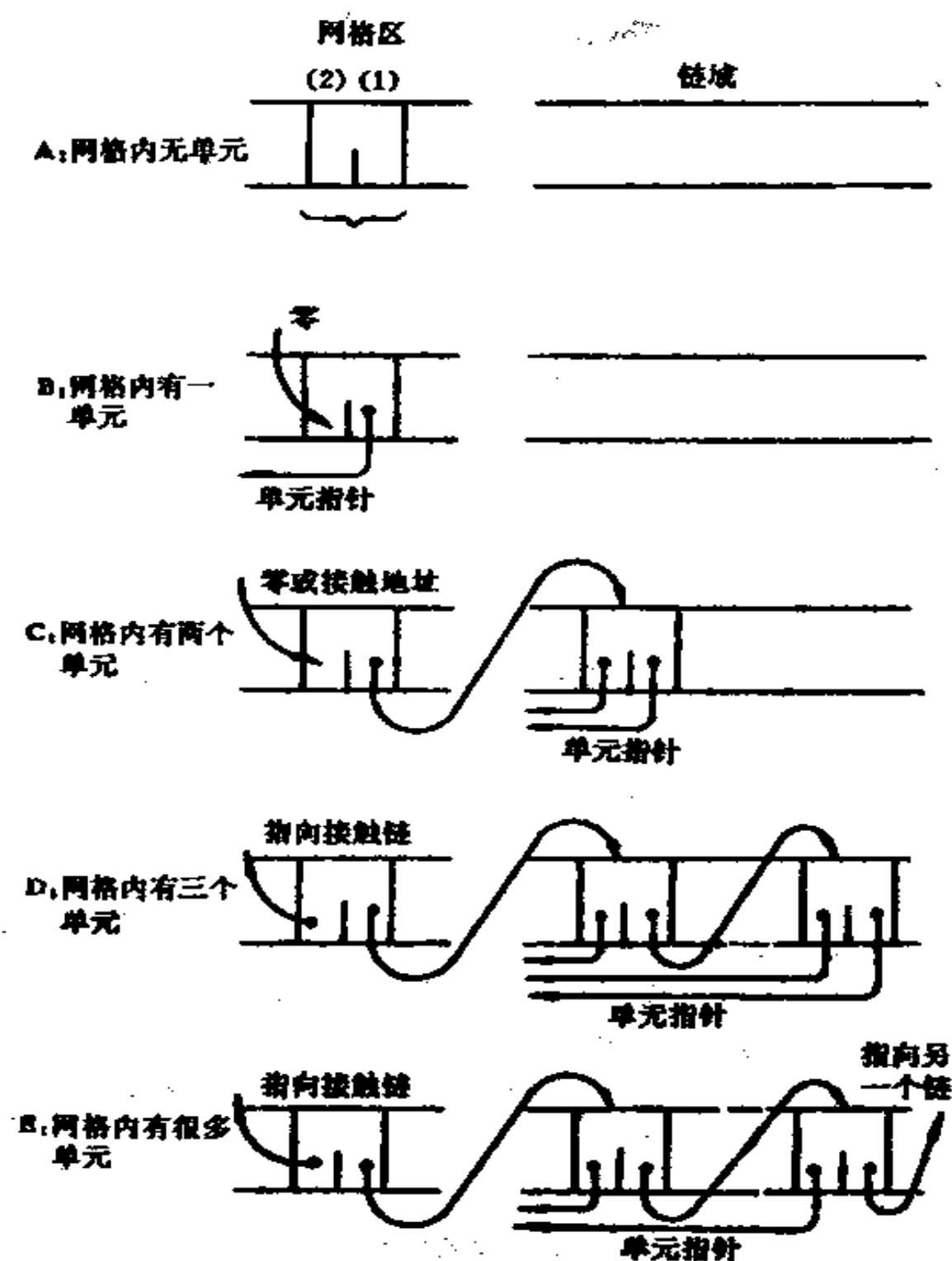


图 4-25 不同个接触颗粒时的链表结构

5 可变形块体模型

5.1 概 述

第二章介绍的刚性块体模型，适合于求解岩体应力水平较低，且可以不考虑材料弹性变形的情况。此时，整个岩体结构的稳定性由不连续面控制。然而，在岩体埋藏较深的情况下，岩体的变形特性就不仅仅取决于节理、断层等结构面。特别是当岩体受到很大的动载时，完整岩石本身的变形，与其刚体位移相比是不容忽略的。在这些情况下，不仅要有模拟节理弱面的不连续单元，而且还应有能模拟连续介质弹性应变的变形单元（见图 5-1）。后者就是本章所要讲述的可变形块体模型^[11]。

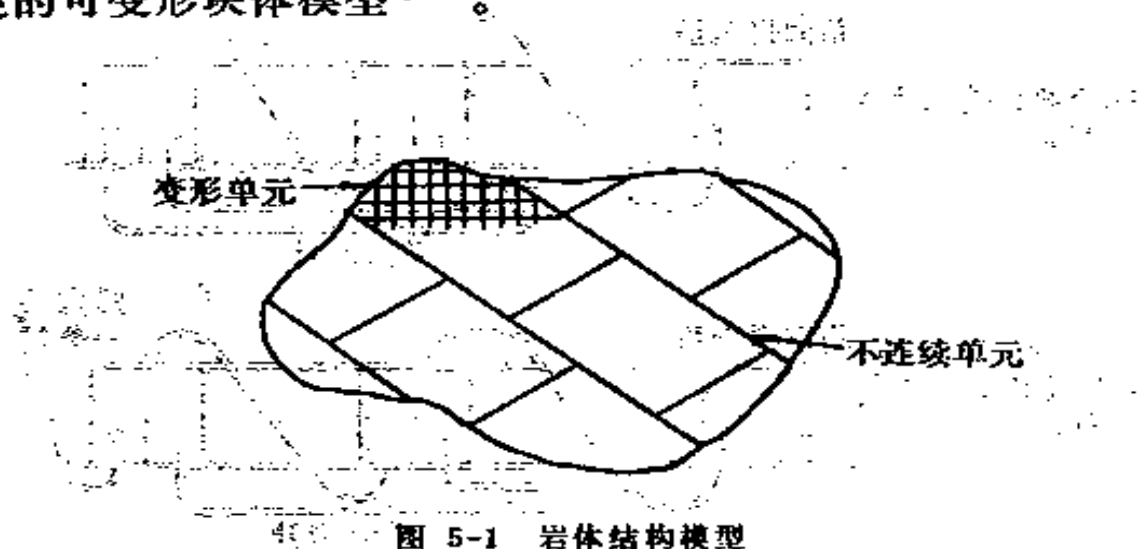


图 5-1 岩体结构模型

可变形离散单元按其变形程度分为充分变形和简单变形两种。下面分别讨论之。

5.2 充分变形的块体模型

充分变形离散单元法的解题思想是在刚性块体模型的基础上, 进一步把块体分解成几个常应变的三角形, 这些三角形的变形采用拉格朗日显式和大应变方法求解。每个块体的变形假定为线性的, 其边在运动过程中始终保持直线段。虽然可以采用能表示曲边的高次单元, 但是那样会使寻找块体之间接触点的工作复杂化, 因此还是采用线性变形假设。

5.2.1 充分变形离散单元法的求解方法

充分变形离散单元法求解内部三角形单元的位移和应变, 采用了高斯定理和 Wilkins 的大变形有限差分法^[71]。

对于函数 f , 由高斯定理知:

$$\int_V f n_i ds = \int_V \partial_i f dV \quad (5-1)$$

式中, V 是函数求解域的体积; s 是 V 的边界; n_i 是 V 的单位外法线矢量; $\partial_i = \partial/\partial x_i$, 表示梯度。

由式(5-1)可以求出函数 f 的梯度在体积 V 上的平均值:

$$\langle \partial_i f \rangle = \frac{1}{V} \int_V \partial_i f dV = \frac{1}{V} \int_V f n_i ds \quad (5-2)$$

式中, $\langle \rangle$ 表示求平均值。

对于一个具有 N 条边的多边形, 上式可写成对 N 条边求和的形式:

$$\langle \partial_i f \rangle = \frac{1}{V} \sum_N \bar{f}_i n_i \Delta s_i \quad (5-3)$$

式中, Δs_i 是多边形的边长; \bar{f}_i 是 f 在 Δs_i 上的平均值。

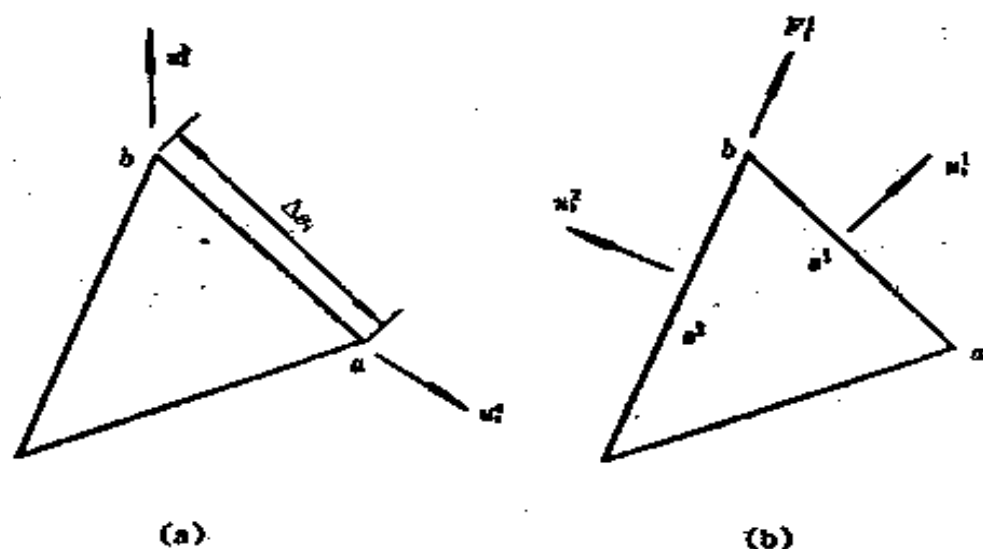


图 5-2 三角形单元
(a) 结点速度矢量 (b) 结点力矢量

如图5-2(a)所示, 以度 \dot{u}_i 代替式(5-3)中的 f_i , 且 \dot{u}_i 取边两端的结点 (即差分网格的角点) a 和 b 的速度平均值, 则速度梯度的平均值可写成

$$\langle \partial_i \dot{u}_i \rangle \approx \frac{1}{2V} \sum_N [(\dot{u}_i^a + \dot{u}_i^b) n_i \Delta s_i] \approx \partial_i \dot{u}_i \quad (5-4)$$

由几何方程可得单元的应变增量 $\Delta \epsilon_{ij}$ 和转角 $\Delta \omega_{ij}$

$$\Delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j \dot{u}_i + \partial_i \dot{u}_j) \Delta t \quad (5-5)$$

$$\Delta \omega_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j \dot{u}_i - \partial_i \dot{u}_j) \Delta t \quad (5-6)$$

式中, Δt 是计算时步。

在应用式(5-5)和式(5-6)求应变和转角时, 首先要消除单元的刚体位移, 其方法如下:

在常应变条件下, 每个单元的几何方程一般展开式为

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} + \omega_{xy} \\ \epsilon_{xy} - \omega_{xy} & \epsilon_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{u}_{x0} \\ \dot{u}_{y0} \end{Bmatrix} \quad (5-7)$$

式中, \dot{u}_{x0} , \dot{u}_{y0} 表示刚体运动速度。

为了消除单元的刚体位移, 如图 5-3 所示, 相对于区域 M 的结点 1, 设 $t = \left(n + \frac{1}{2}\right)$

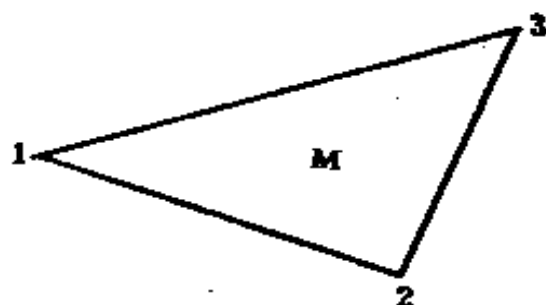


图 5-3 区域 M

$\times \Delta t$ 时, 有:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x(2) - x(1) \\ y_2 &= y(2) - y(1) \\ x_3 &= x(3) - x(1) \\ y_3 &= y(3) - y(1) \end{aligned} \right\} \quad (5-8)$$

式中, (1), (2)和(3) 分别表示结点 1, 2 和 3。设 $t = n\Delta t$ 时, 有:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_{x2} &= \dot{u}_x(2) - \dot{u}_x(1) \\ \dot{u}_{y2} &= \dot{u}_y(2) - \dot{u}_y(1) \\ \dot{u}_{x3} &= \dot{u}_x(3) - \dot{u}_x(1) \\ \dot{u}_{y3} &= \dot{u}_y(3) - \dot{u}_y(1) \end{aligned} \right\} \quad (5-9)$$

由方程(5-7), (5-8)和(5-9)可以导出

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{x2} & \dot{u}_{x3} \\ \dot{u}_{y2} & \dot{u}_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} + \omega_{xy} \\ \epsilon_{xy} - \omega_{xy} & \epsilon_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

从而可得：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= (\dot{u}_{x2}y_3 - \dot{u}_{x3}y_2)/\Delta \\ \varepsilon_{yy} &= (-\dot{u}_{y2}x_3 + \dot{u}_{y3}x_2)/\Delta \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}(-\dot{u}_{x2}x_3 + \dot{u}_{x3}x_2 + \dot{u}_{y2}y_3 - \dot{u}_{y3}y_2)/\Delta \\ \omega_{xy} &= \frac{1}{2}(-\dot{u}_{x2}x_3 + \dot{u}_{x3}x_2 - \dot{u}_{y2}y_3 + \dot{u}_{y3}y_2)/\Delta \end{aligned} \right\} \quad (5-10)$$

式中， $\Delta = x_2y_3 - y_2x_3 \neq 0$ （除非结点1，2和3在一条直线上，但这不可能）。

由式(5-10)，根据如下本构方程求出应力增量 $\Delta\sigma_{ij}$ ：

$$\Delta\sigma_{ij} = \lambda\Delta\varepsilon_v\delta_{ij} + 2\mu\Delta\varepsilon_{ij} \quad (5-11)$$

式中， λ ， μ 是拉梅常数，且

$$\lambda = (Ev)/[(1+\nu)(1-2\nu)], \quad \mu = E/[2(1+\nu)]$$

E 是弹性模量， ν 是泊松比； $\Delta\varepsilon_{ij}$ 是应变增量； $\Delta\varepsilon_v = \Delta\varepsilon_{11} + \Delta\varepsilon_{22}$ 是体积应变增量， $\Delta\varepsilon_{11}$ 和 $\Delta\varepsilon_{22}$ 是主方向应变； δ_{ij} 是 Kronecker 的 delta 记号。

由上式不难求出应力 σ_{ij} ，从而可以得到作用于任意一个结点 N 上的合力：

$$F_i^N = \int_P \sigma_{ij} n_j ds \quad (5-12)$$

由于每个三角形单元内的应力是常量，所以上式可变为：

$$F_i^N = \int_{P_1} \sigma_{ij} n_j ds = \sum_{M=1}^{N_m} \sigma_{ij}^M \Delta s^M n_j^M \quad (5-13)$$

式中， F_i^N 是作用于结点 N 上的合力； P 和 P_1 是积分路径

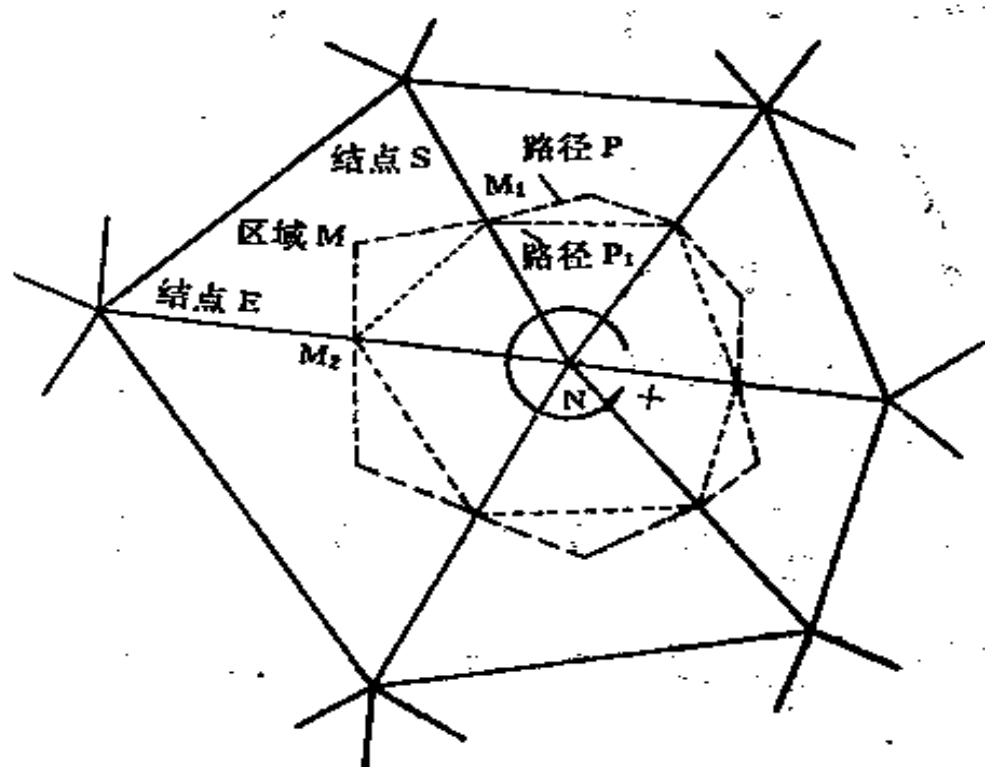


图 5-4 积分路径

(见图 5-4); n , 是积分路径的法线方向 (见图 5-2(b)); Δs 是积分路径的长度; M 是包围结点 N 的所有区域 (由 1 到 N_M)。

式(5-13)的展开形式为:

$$\left. \begin{aligned} F_X^N &= \sum_M \sigma_{XX}^M (Y_2^M - Y_1^M) - \sum_M \sigma_{XR}^M (X_2^M - X_1^M) \\ F_Y^N &= \sum_M \sigma_{XY}^M (Y_2^M - Y_1^M) - \sum_M \sigma_{YR}^M (X_2^M - X_1^M) \end{aligned} \right\}$$

(5-14)

式中, X 和 Y 表示坐标轴方向; 1 和 2 在任一区域 M 内的位置如图 5-4 所示。显然,

$$\left. \begin{aligned} X_2^N - X_1^N &= \frac{1}{2}(X_N + X_B^N) - \frac{1}{2}(X_N + X_S^N) \\ &= \frac{1}{2}(X_B^N - X_S^N) \\ Y_2^N - Y_1^N &= \frac{1}{2}(Y_B^N - Y_S^N) \end{aligned} \right\} \quad (5-15)$$

式中, B 和 S 在区域 M 中的位置如图 5-4 所示。因此, 式 (5-14) 可变成:

$$\left. \begin{aligned} F_x^N &= \frac{1}{2} \sum_M [\sigma_{xx}^M (Y_B^N - Y_S^N) - \sigma_{xr}^M (X_B^N - X_S^N)] \\ F_y^N &= \frac{1}{2} \sum_M [\sigma_{xy}^M (Y_B^N - Y_S^N) - \sigma_{yr}^M (X_B^N - X_S^N)] \end{aligned} \right\} \quad (5-16)$$

由上式可得结点的运动方程:

$$m u_i = F_i^N + F_i^E + m g_i \quad (5-17)$$

式中, m 是由 P 所包围的集聚于结点 N 的质量; u_i 是结点的加速度; F_i^N 是结点 N 所受的外荷载; g_i 是重力加速度 (代表体力)。

再对式 (5-17) 积分, 可得结点速度和位移:

$$\dot{u}_i = \int u_i dt \quad (5-18)$$

$$u_i = \int \dot{u}_i dt \quad (5-19)$$

5.2.2 计算时步

为了保证解的稳定性, 在小于一个时步内, 计算信息

(如应力)不允许由一个结点传递到另一个结点或边。由于在一般介质中应力 p -波的传播速度 v_p 最快, 且为:

$$v_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} \quad (5-20)$$

式中, λ 和 μ 是拉梅常数; ρ 是介质密度。因此, 计算时步 Δt 可由下式确定:

$$\Delta t = \min_{(m, n)} (d/v_p) \quad (5-21)$$

式中, d 是同一三角形区域的两个角 m 和 n 之间的距离。

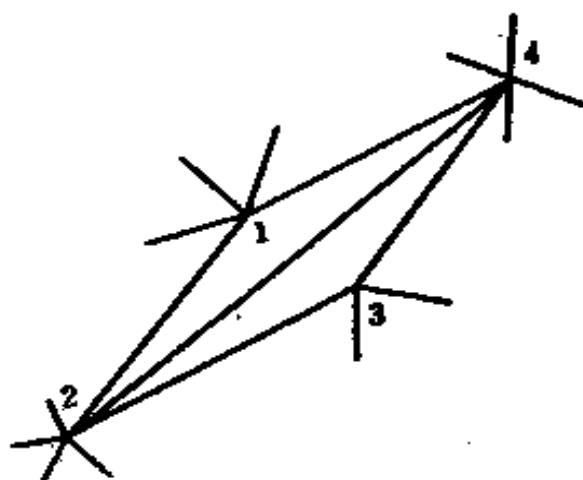


图 5-5 p -波的最短传播路线

考虑如图 5-5 所示的情况, p -波的最短传播路线可能不在同一个三角形区域的两个结点之间, 而是图中的 1 和 3 结点。这时按式 (5-21) 计算的时步 Δt 应乘以比例系数 2α ($\alpha < 0.5$), α 是所有三角形区域高与底边长之比中的最小者。

5.2.3 质 量

下面用大写字母表示三角形区域的质量, 用小写字母表示结点或角的质量。

1. 质心的位置和质量分配原理

一个三角形的质心位置在任意一边的中点与其相对角连线的三分之一处^[65], 且三角形三个角点的坐标平均值与质心的相应坐标相同。例如, 设 $\triangle 123$ 的角点纵坐标分别为 y_1 , y_2 和 y_3 , 其形心的纵坐标为 y_0 , 则有

$$\frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) = y_c$$

根据力矩平衡原理和质心位置，可以将三角形的质量转移到它的三个角点上。设 $\Delta 123$ 的角 1 质量为 m_1 ，整个三角形的质量为 M ，则以其对边为转轴，有：

$$m_1 = \frac{1}{3}M$$

由此可以看出，若将三角形质量平均地分配给三个角，将不会影响质心位置。这就是所谓的质量分配原理。

当三角形 $\Delta 123$ 中加结点 4 时（见图 5-6），设 M 是 $\Delta 123$ 的质量，且 $a/c = \alpha$ ， $b/c = \beta$ ，则三角形的质量分配为：

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{3}\alpha M \\ m_2 &= \frac{1}{3}\beta M \\ m_3 &= \frac{M}{3}(\alpha + \beta) = \frac{M}{3} \\ m_4 &= \frac{M}{3}(\alpha + \beta) = \frac{M}{3} \end{aligned} \tag{5-22}$$

2. 结点质量

根据质量分配原理，对于如图 5-7 所示的情况，结点 1 的集中质量取包围其所有三角形质量的三分之一，即：

$$m_1 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^5 M_i \tag{5-23}$$

式中， m_1 是结点 1 的质量； $M_i (i = 1, 5)$ 是区域的质量。

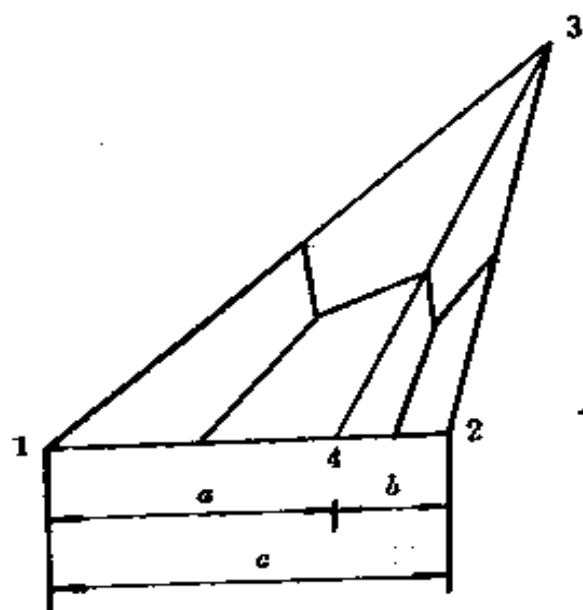


图 5-6 在 $\Delta 123$ 中加一个结点 4

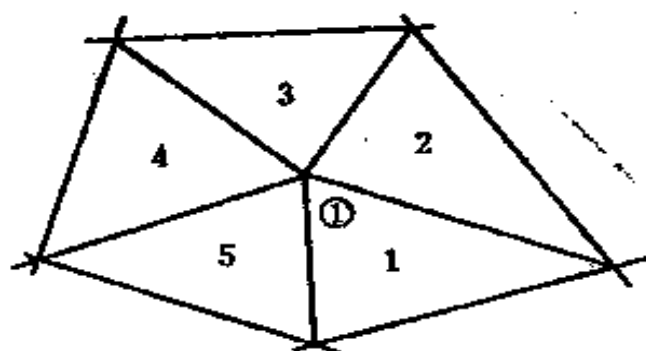


图 5-7 集聚于结点 1 的质量

5.2.4 接触本构关系

1. 角-边接触

为了方便起见,角-边接触的法向力和切向力分别考虑。

(1) 法线方向。如图 5-8 所示,当法向相对位移 u_n 小

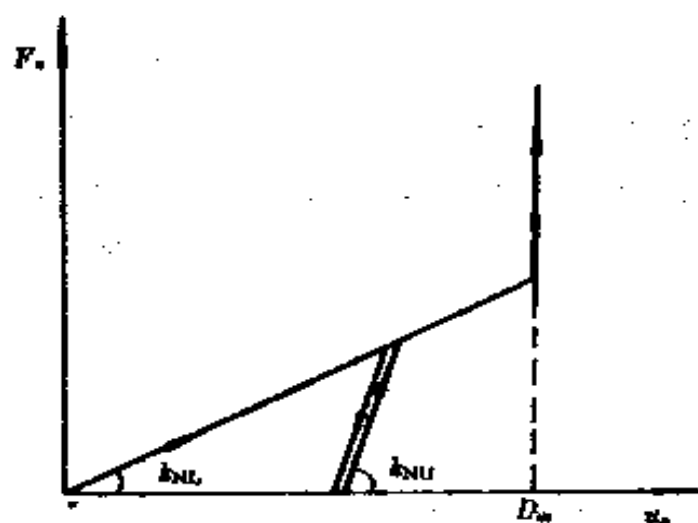


图 5-8 法向力与法向位移

于 D_m 时, 法向力 F_n 与法向相对位移之间无张力线性关系; 当相对位移大于 D_m 时, 接触假定为刚性, 即两个结点一起运动。

(2) 切线方向。

如图 5-9 所示, 切向力 F_t 与切向相对位

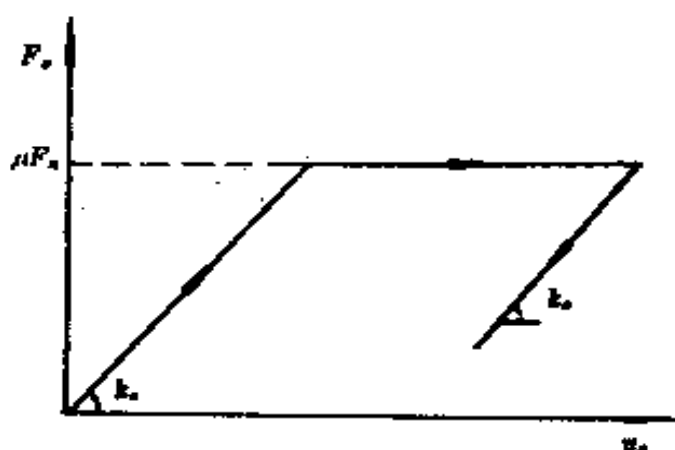


图 5-9 切向力与法向位移

移 u_t 是弹性关系, 且屈服力与法向力 F_n 成正比。

2. 边-边接触关系

两个边的接触就构成了一个“节理单元”。可以采用第三章中所讲述的本构模型, 由已知的法向和

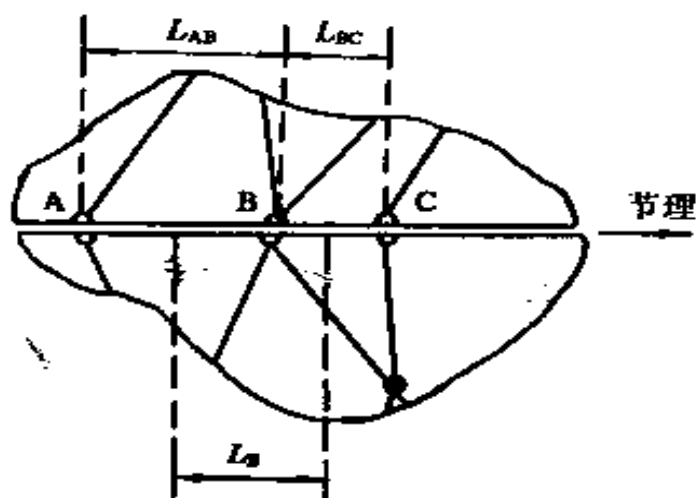


图 5-10 边-边接触

切向位移求出法向和切向的应力。由于充分变形离散单元法采用的是结点力而不是应力, 因此应力需乘以长度换算成力。如图 5-10 所示, 结点 B 的长度 L_B 取其相邻结点距离的平均值, 即

$$L_B = \frac{1}{2} (L_{AB} + L_{BC}) \quad (5-24)$$

式中, L_{AB} , L_{BC} 分别是结点 A 与 B 以及结点 B 与 C 之间的距离。

设 S_{n_j} 为节理的法向刚度系数（单位是应力/位移）， L_j 是该节理的长度， S_n 为接触法向刚度系数（单位是力/位移）。当下式满足时，则用角-边接触关系：

$$S_{n_j} L_j < S_n \quad (5-25)$$

3. 接触力的柔性或刚性传递

一般说来，岩石节理的法向刚度是随法向荷载的增加而增加的。但是，当节理的刚度大大超过其周围岩体的刚度时，节理在法线方向将变“透明了”，即刚度不再影响岩体的力学行为。同时，过大的刚度也会使显式计算时步变小，浪费计算时间。因此，当节理处的相对位移超过预先给定的阈值时，充分变形离散单元法假定法向接触是刚性的，可以计算“锁在一起”的结点之间作用力，而切向滑移可按通常方法计算。

两个结点之间的法向力可由下面方程式导出（见图 5-11）：

$$\left. \begin{aligned} m^a u^a &= f^a + f' \\ m^b u^b &= f^b - f' \end{aligned} \right\} \quad (5-26)$$

式中， m^a 和 m^b 分别是结点 a 和结点 b 的质量； u^a, u^b 分别为结点 a 和结点 b 的加速度； f^a, f^b 分别是结点 a 和结点 b 由有限差分网格计算出的力， f' 是节理上、下面之间的接触传递力。

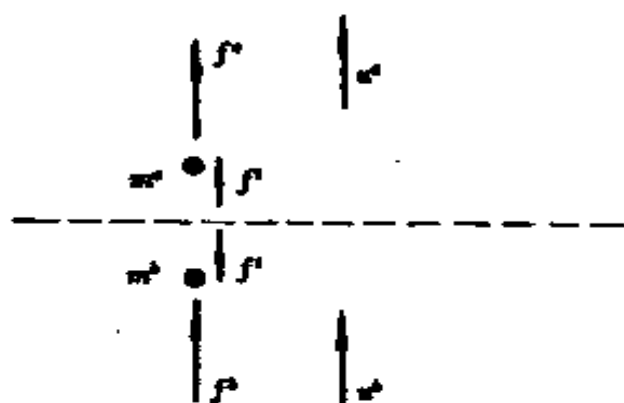


图 5-11 力的传递关系

当结点 a 和 b 在法线方向“锁在一起”时，有

$$u^a = u^b \quad (5-27)$$

将上式代入式(5-26)中，可得：

$$(f^a + f')/m^a = (f^b - f')/m^b$$

从而导出：

$$f' = (m^a f^a - m^b f^b)/(m^a + m^b) \quad (5-28)$$

式(5-28)给出了两个结点在法线方向“锁在一起”时的法向力表达式。由式(5-28)和前面介绍的节理本构关系可以导出切向力。法线方向由刚性接触重新变为柔性接触，则取决于法向力的大小。

若切线方向需要采用刚性或塑性法则，可以采用与上面类似的方法推导切向“锁在一起”时的结点切向力。在这种情况下，当相对剪切速度通过零点时，节理间的接触将由滑移状态变成锁紧状态。而由锁紧状态变回滑移状态则取决于切向力的大小。

5.2.5 差分网格结点的生成

如果给定块体的边界和三角形差分网格的最大边长，三角形差分网格可按下列步骤产生：

(1) 连接块体边界上的对角，直到块体中不存在三边以上的网格为止（见图 5-12(a)）。

(2) 判定各三角形差分网格的边长是否小于给定的最大长度，如果不符合要求，还应对最大边长进行再划分。假如图 5-12(a)中的角 2 与角 4 的连线长度大于给定的边长，就应对它再划分，可以在该线的中点生成一个新结点 7（见图 5-12(b)）。

(3) 网格优化。初次划分的网格总的来说是正确的，但

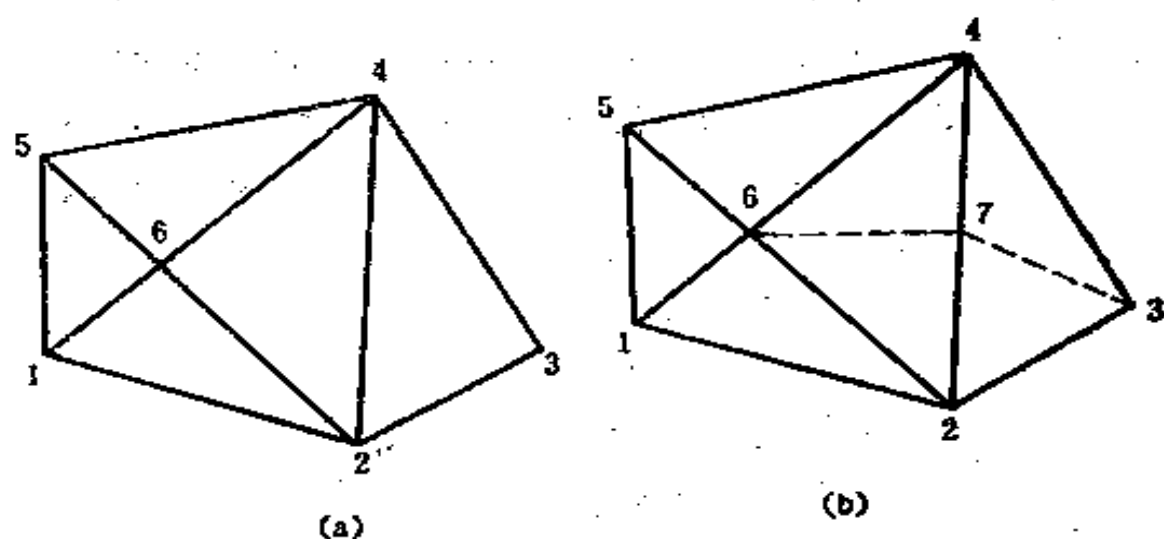


图 5-12 差分网格的划分

有时某些单元太扁，不令人十分满意。此时应调整网格密度，其做法是移动所有内部结点，使之与相邻结点距离大致相等（见图 5-13）。

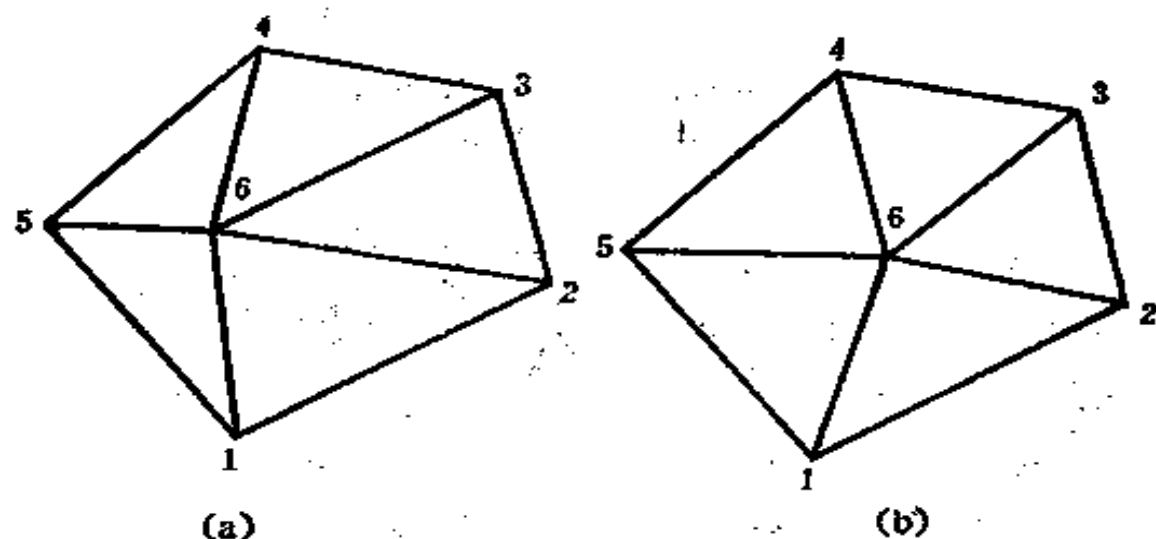


图 5-13 结点移位前(a)和移位后(b)

如前所述，块体之间的接触关系会发生变化，同样，块

体内部的差分网格结点也不是一成不变的。当一个块体的结点接触到另一块体时，一个新结点将在被接触块体的接触点处产生（见图 5-14）。两个块体通过结点接触来传递动量。另一方面，新结点的产生也意味着结点质量和速度的重新分配以及能量的变化。下面分别研究之。

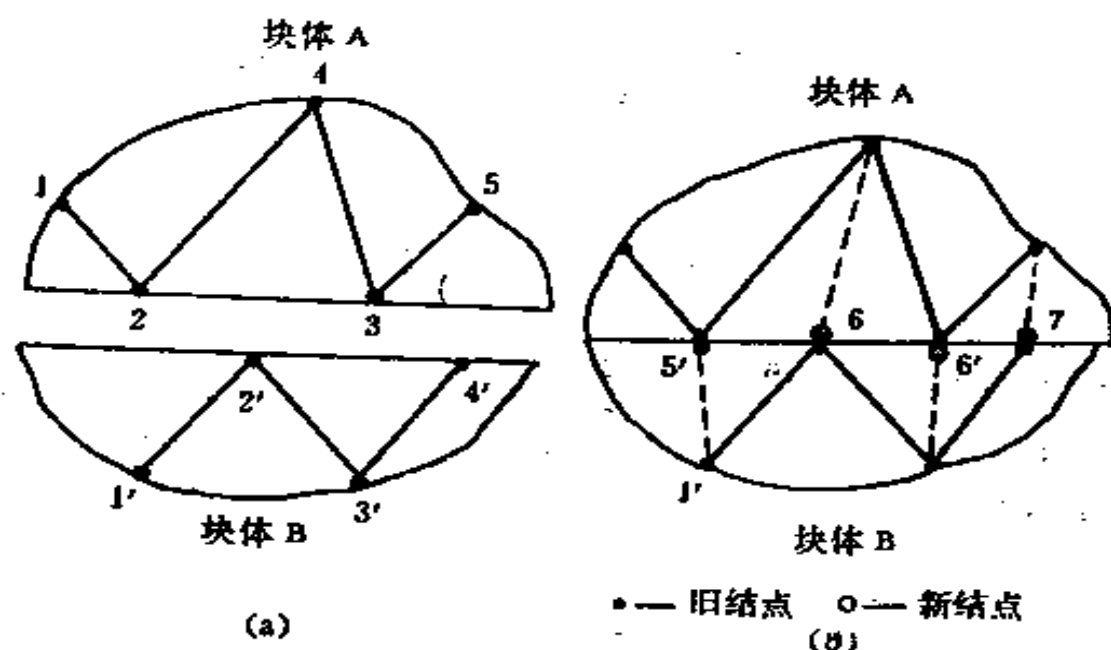


图 5-14 块体接触前(a)和块体接触后(b)

●—旧结点，○—新结点

1. 质 量

如图 5-15 所示，在三角形 $\triangle 123$ 中产生了一个新结点 4，根据 5.2.3 节中的质量分配公式，可知各结点的新质量为（用 * 表示新质量）：

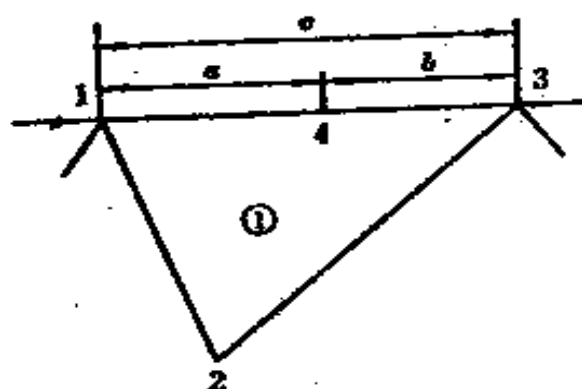


图 5-15 质量的重新分配

$$\left. \begin{aligned} m_1^* &= m_1 - \frac{M_1}{3} + \frac{M_1}{3} \cdot \frac{a}{c} = m_1 - \beta \frac{M_1}{3} \\ m_2^* &= m_2 \\ m_3^* &= m_3 - \alpha \frac{M_1}{3} \\ m_4^* &= \frac{M_1}{3} \end{aligned} \right\} \quad (5-29)$$

式中各符号意义同式(5-22)。

2. 速 度

根据动量守恒定律，有：

$$(m_1 - m_1^*)v_1 + (m_3 - m_3^*)v_3 = m_4^*v_4$$

式中， v_i 表示结点 i 的速度矢量。

将式(5-29)代入上式有：

$$\frac{1}{3}M_1\beta v_1 + \frac{1}{3}M_1\alpha v_3 = \frac{1}{3}M_1v_4$$

由此可得新结点的速度为：

$$v_4 = \beta v_1 + \alpha v_3 \quad (5-30)$$

3. 能量变化

在产生新结点时，动能变化 ΔE_k 为：

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= \frac{1}{3}M_1\beta v_1^2 + \frac{1}{3}M_1\alpha v_3^2 - \frac{1}{3}M_1(\beta v_1 + \alpha v_3)^2 \\ &= \frac{1}{3}M_1\alpha\beta(v_1 - v_3)^2 \end{aligned} \quad (5-31)$$

从上式可以得出如下结论：①能量变化 $\Delta E_k \geq 0$ ，即在新结点产生的同时总是伴随有能量的损失。②能量损失与三角形差分网格的质量成正比。③当接触点趋近于某一个结点时，能量损失趋近于零。

在一般情况下，产生新结点时，总是伴随有局部的能量损失，所以动量和能量守恒不能同时得到满足。但是，在保证质量和动量守恒的条件下，能量变化所带来的计算误差与划分差分网格所固有的其他误差相比，可以忽略不计。

5.2.6 充分变形离散单元法的数据结构

充分变形离散单元法的数据结构，同刚性离散单元法的一样，也是采用一维可变数组线性链表结构。但是充分变形块体由于需要进一步划分差分网格，因此，它的块体链表又分为差分区链表和结点链表。此外，为了研究渗流问题又增加了一个空区链表，以记录块体之间的孔隙变化。

5.3 简单变形块体模型

前面介绍了可以用充分变形离散单元模拟高应力岩体的变形，但这有时不免会消弱离散单元法所具有的简便、有效的特点。那么，是否存在另外一种方法允许块体以比较简单的方式自由变形呢？这里介绍的简单变形块体模型正是为解决此问题而产生的，它是介于刚性块体模型和充分变形块体模型之间的又一种模型。

5.3.1 简单变形块体的变形方式

1. 体积变形

如图 5-16 所示的一个块体在其周围突然受一均布应力 p 的作用。由于应力波波速的限制，在施力的瞬间块体不能作出任何反应，此时块体内部的平均应力 $\bar{\sigma}$ 将等于零。随

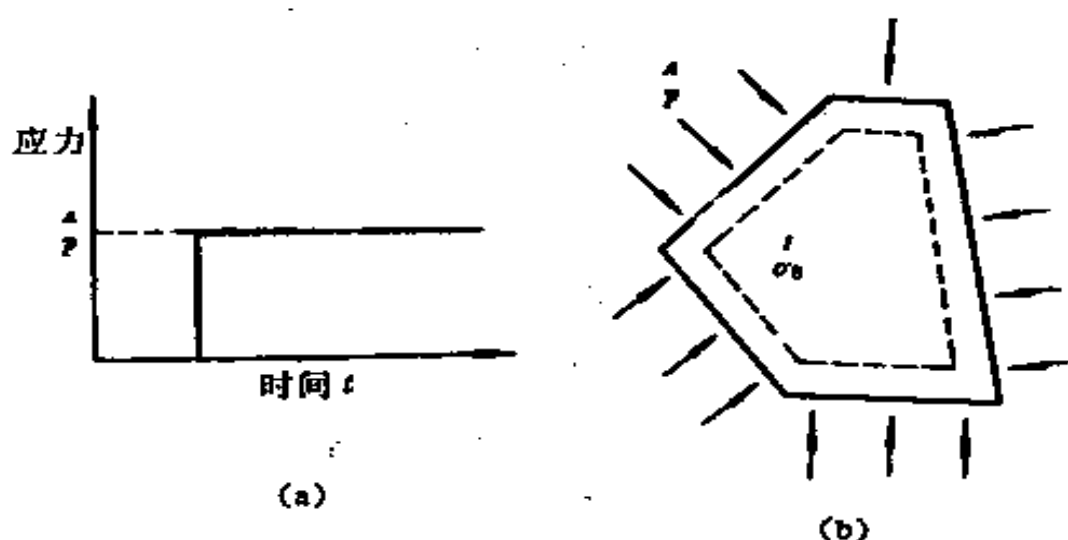


图 5-16 受外力 p 作用的块体

着应力波向块体内部的传播， σ_0 值将逐渐增大起来。同时，由于体积压缩，故块体的边界将逐渐向其形心收缩。

在一个比较大的时域内，块体的内部应力和边界位移（即体应变）表现为在某一位置附近的振荡（见图 5-17）。设块体的体积变化为 ΔV ，则体应变 ε_v 为：

$$\varepsilon_v = \Delta V / V = p / K \quad (5-32)$$

式中， K 是块体的体积模量； V 是块体的体积。振荡的自然圆频率为：

$$\omega_0 = (K / m^c)^{1/2} \quad (5-33)$$

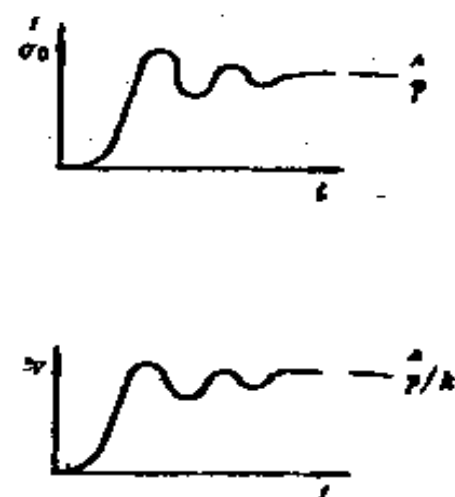


图 5-17 应力和体应变随时间变化的情况

式中, m^* 是块体的有效质量, 可由下式计算:

$$m^* = l^2 m / (4S) \quad (5-34)$$

式中, m 是块体的质量; S 是块体的面积; l 是块体的最大几何长度。

块体在施加外力 $\overset{\Lambda}{p}$ 后的响应, 可用下面中心差分方程表示:

$$\dot{\epsilon}_v := \dot{\epsilon}_v + (\overset{\Lambda}{p} - \overset{\text{I}}{\sigma}_0) \Delta t / m^* \quad (5-35)$$

$$\overset{\text{I}}{\sigma}_0 := \overset{\text{I}}{\sigma}_0 + K \dot{\epsilon}_v \Delta t \quad (5-36)$$

式中, Δt 是计算时步。

2. 其他形式的变形

对于二维问题, 块体的变形总可分解为三个应变 ϵ_{11} , ϵ_{22} 和 $\epsilon_{12} + \epsilon_{21}$ (见图 5-18), 再加上块体的平移 (二个自由度) 和转动 (一个自由度), 每个块体共有 6 个自由度。此时块体的应变率 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 为:

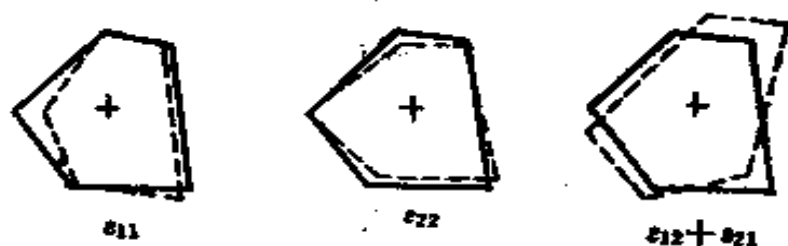


图 5-18 块体的三个应变

$$\dot{\epsilon}_{ij} := \dot{\epsilon}_{ij} + (\overset{\Lambda}{\sigma}_{ij} - \overset{\text{I}}{\sigma}_{ij}) \Delta t / m^* \quad (5-37)$$

式中, $\overset{\Lambda}{\sigma}_{ij}$, $\overset{\text{I}}{\sigma}$ 分别表示施加应力和内应力, 它们的具体表达公式在后面给出。

5.3.2 简单变形块体的应力和位移

简单变形块体模型同刚性块体模型基本一样，也是通过接触刚度来相互作用的。不同点表现在它们计算块体的应力和位移方面。

1. 应力的计算

如第四章所讲述的，在一个封闭体积内平均应力 $\overset{\Delta}{\sigma}_{ij}$ ，可由施加于该体积边界上的集中力根据高斯公式求得。也就是说，式(5-37)中的施加应力 $\overset{\Delta}{\sigma}_{ij}$ 完全可以由作用在块体周边上的接触力表示，即：

$$\overset{\Delta}{\sigma}_{ij} = \sum_C^c \overset{\sigma}{F}_i \overset{\sigma}{X}_j / V \quad (5-38)$$

式中， \sum_C^c 表示对所有接触点求和， V 是块体的体积(对于二维问题是面积 S)， $\overset{\sigma}{F}_i$ 是作用于接触点 C 的集中力， $\overset{\sigma}{X}_j$ 是接触点 C 相对于块体形心的坐标。

由式(5-38)可以计算出方程(5-32)中用到的施加应力 $\overset{\Delta}{p}$ ：

$$\overset{\Delta}{p} = \frac{1}{2}(\overset{\Delta}{\sigma}_{11} + \overset{\Delta}{\sigma}_{22}) = (\sum_C^c \overset{\sigma}{F}_1 \overset{\sigma}{X}_1 + \sum_C^c \overset{\sigma}{F}_2 \overset{\sigma}{X}_2) / (2S) \quad (5-39)$$

例如，对于图 5-19 所示的情况，施加的均布应力 $\overset{\Delta}{p}$ 为：

$$\overset{\Delta}{p} = (\overset{1}{F}_1 \overset{1}{X}_1 + \overset{2}{F}_1 \overset{2}{X}_1 + \overset{3}{F}_1 \overset{3}{X}_1 + \overset{1}{F}_2 \overset{1}{X}_2 + \overset{2}{F}_2 \overset{2}{X}_2 + \overset{3}{F}_2 \overset{3}{X}_2) / (2S)$$

式(5-37)中的块体内应力可按下面公式计算：

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^1 = & \sigma_{ij}^1 + \left[\left(K - \frac{2}{3} G \right) \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} - \sigma_{kj}^A \omega_{ik} \right. \\ & \left. - \sigma_{ik}^A \omega_{jk} \right] \Delta t \end{aligned} \quad (5-40)$$

式中, K 是块体的体积模量; G 是块体的剪切模量; δ_{ij} 是Kroneker delta 函数; ω_{ij} 是斜

对称张量 $\begin{bmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{bmatrix}$,

θ 是块体绕其形心的转速。

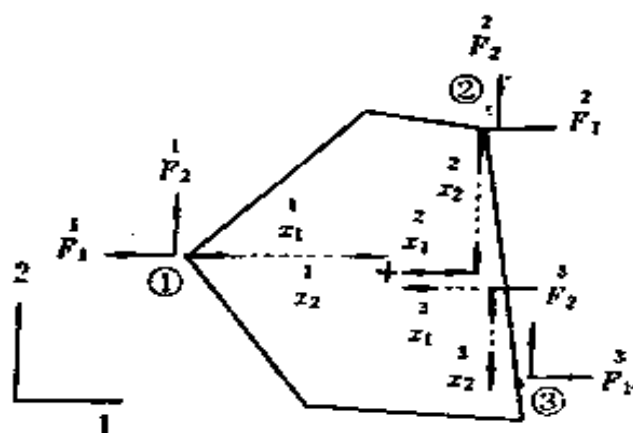


图 5-19 计算均布力 P^A

2. 边界位移的计算

为了计算块体之间的接触力, 必须计算块体边界的位移。在刚性块体模型中, 块体边界的位移完全由块体的形心位移和转角计算, 但是对于变形块体, 块体边界的位移还取决于其应变。例如, 对于体积压缩问题, 块体边界上任意一点的位移矢量其方向指向形心, 大小与该点到形心的距离成正比。

在一般情况下, 块体边界接触点或角点的位移增量为:

$$\Delta u_i^C = (\Delta \varepsilon_{ij} + \Delta \omega_{ij}) X_j^C + \Delta u_i \quad (5-41)$$

式中, C 代表“接触点”或“角”; $\Delta \omega_{ij}$ 和 Δu_i 分别表示块体的刚体转动增量和平移增量; X_j^C 是接触点 C 相对于块体形心的坐标。

由式 (5-41) 应用力-位移关系可以求出接触点的作用力。

6 三维离散单元法

6.1 概 述

正如在绪论中所讲的, Cundall 等人已将离散单元法发展到三维空间^[14], 并在科学研究中得到一定程度的应用。三维离散单元法的原理和解题方法与二维离散单元法基本相同,但由于在三维空间中,块体的运动自由度增加到了6个(3个平移和3个转动),因此使程序的设计与开发遇到了很多困难。例如,对于无论何种形状的块体(凹面体或凸面体),程序都应该能够迅速而有效地判断它们是否接触,并能找到接触面的法线方向,但是,做到这一点实际上并不容易。

本章6.2节将主要详细介绍三维块体模型的数据结构,求解接触点的公共面法以及计算接触力和位移的公式。由于颗粒模型相对来说比较简单,故在6.3节中只给出了它的求解原理和计算公式。

6.2 三维块体模型

6.2.1 基础知识

1. 块体的体积

任何一个块体都可以分解成数个四面体。因此,如果能求出一个四面体的体积,就能求出整个块体的体积。由高斯公式可知

$$\partial X_i / \partial X_i = \frac{1}{V} \int X_i n_i da \quad (6-1)$$

式中, X_i 是块体表面角点的位置矢量; a 是表面积; V 是 a 所围成的体积; n_i 是表面的单位外法线矢量。将式(6-1)的右边积分离散求和, 可得:

$$V = \frac{1}{3} \sum X_i n_i a_i \quad (6-2)$$

式中, \sum 表示对所有表面三角形单元求和。

如果表面是平面, 则 $X_i n_i$ 在此平面上是常量。下面求面积 a_i 和单位法向矢量 n_i 的表达式。

如图 6-1 所示, 一个由矢量 $Z_i^{(*)}$ 和 $Z_j^{(*)}$ 所定义的三角形, 其面积 a_i 为:

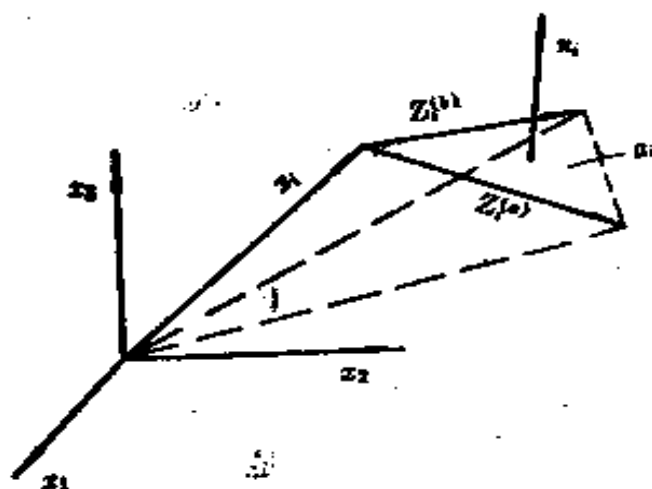


图 6-1 由矢量定义面积 a_i

$$a_i = \frac{1}{2} |s_i| = \frac{1}{2} \sqrt{s_i \cdot s_i} \quad (6-3)$$

且 $s_i = \epsilon_{ijk} Z_i^{(*)} Z_j^{(*)}$

式中, ϵ_{ijk} ($i, j, k = 1, 2, 3$) 是三阶置换张量。在笛卡尔坐标

系下, 当 i, j, k 分别取 1, 2, 3 或 2, 3, 1 或 3, 1, 2, 即正循环时, $\varepsilon_{ijk} = +1$; 当 i, j, k 分别取 3, 2, 1 或 2, 1, 3 或 1, 3, 2, 即逆循环时, $\varepsilon_{ijk} = -1$; 当任何两个下角标相等, 例如, i, j, k 分别取 1, 1, 3 或 2, 3, 2 时, $\varepsilon_{ijk} = 0$ 。同样, 单位法向矢量可以表示为:

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{s}_i / (2a_i) \quad (6-4)$$

将式(6-3)和(6-4)代入式(6-2), 可得:

$$V = \frac{1}{6} \sum X_k \varepsilon_{ijk} Z_i^{(s)} Z_j^{(s)} \quad (6-5)$$

由上式计算所得的体积, 是底面积为 a_i , 顶点在坐标轴原点的四面体的体积。整个块体的体积是所划分成的所有这样四面体的体积之和。为了保证四面体的体积为正, 组成三角形表面的三个角点, 从坐标原点看它们应是反时针排序。

2. 块体的形心位置

块体的形心可由各个四面体的形心和体积确定。具体表达式如下:

$$\mathbf{r}_i = \sum (\mathbf{r}_i^{(N)} V^{(N)}) / V \quad (6-6)$$

式中, \mathbf{r}_i 是块体的形心矢量; $\mathbf{r}_i^{(N)}$ 是第 N 个四面体的形心矢量; V 是块体的体积; $V^{(N)}$ 是第 N 个四面体的体积。

每个四面体的形心可直接由它在块体表面的三个角点矢量 $\mathbf{X}_i^{(1)}$, $\mathbf{X}_i^{(2)}$ 和 $\mathbf{X}_i^{(3)}$ 确定, 其大小是这三个角点矢量的平均矢量的四分之三, 方向是平均矢量方向, 从而有:

$$\mathbf{r}_i^{(N)} = \frac{1}{4} (\mathbf{X}_i^{(1)} + \mathbf{X}_i^{(2)} + \mathbf{X}_i^{(3)}) \quad (6-7)$$

将其代入式(6-6), 可得块体的形心矢量 \mathbf{r}_i 。

3. 惯性矩

一个块体的惯性矩 I 可由下式近似计算:

$$I = \frac{1}{2}(\bar{r})^2 m \quad (6-8)$$

式中, \bar{r} 是块体形心到各角点的平均距离; m 是块体的质量。

6.2.2 数据结构

三维离散单元法也是采用线性链表的数据结构形式。所有数据都存贮在一维可变数组中, 通过 FORTRAN 语言中的 EQUIVALENCE 命令, 该数组可按照人的意愿, 既能存取整型数, 又能存取实型数。为了叙述方便, 我们称每个物理实体 (如一个块体, 一个面或一个接触等) 为一个“数据单元”, 它实际上是一组连续存贮的字元素。各数据单元在主数组中的位置是动态分配的, 并由指针相互连接成线性链表的数据结构形式。当不需要某个数据单元时 (例如块体之间脱离接触时), 可以被可利用表 (空表或堆栈) 收回。如果需要产生新数据单元时, 又可以从可利用表中分配新存贮区。因为当前计算机内存的扩展速度较其处理速度相对快些, 所以数据结构的设计宗旨是占用大量内存存放数据和指针来换取计算时间。这种线性链表数据结构非常适用于多处理器的平行作业, 每个处理器可以处理一定数量的数据单元, 最后由数据总线将各计算结果联接起来。但是, 线性链表数据结构不适用于作矢量处理的超型计算机。

下面分别介绍块体数据结构和接触数据结构。

1. 块体数据结构

刚性块体在三维空间中具有 6 个自由度 (3 个平移和 3

个转动),而充分变形块体需要进一步分割成多个四面体(见图 6-2),每个四面体的角(结点)各有 3 个平移自由度。如图 6-3 所示是一个刚性块体的数据结构。虽然每个块体数据单元在链表中的位置可以是任意的,但在需要时,可以通过总指针给出其存

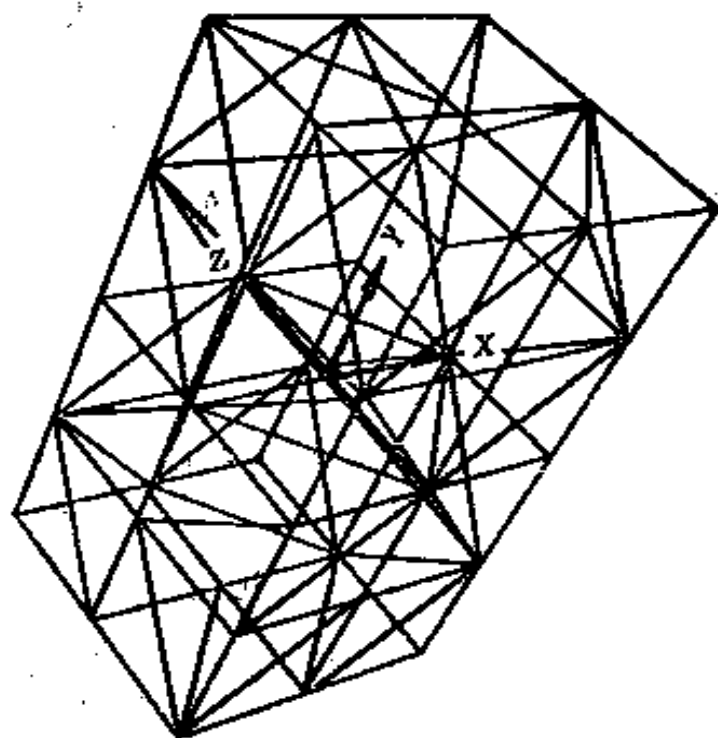


图 6-2 块体的划分

取入口地址。从图 6-3 中可以看出,每个块体的数据单元都有指出该块体的角链表以及面链表的入口指针。在面链表中,每个面元素又给出一个环形链表,用来有顺序地存贮面的各角地址。因此,可以有两种方式访问角点数据:一是利用角链表直接搜索角点,这种方法用于更新块体运动过程中的角点速度和坐标;二是通过块体的面链表可以间接地访问各角点,这在寻找块体接触关系时常用。

充分变形块体的数据结构与刚性块体类似,但是由于其内部进一步离散为四面体,原来的多边形表面也要相应地分割成几个三角形子面,每个子面及其数据结构跟一个普通面一样。块体内部的所有四面体组成一个链表,并由块体数据单元中的一个指针给出它的地址。

在计算中凸面体比较容易处理;故可以把凹面体分割成

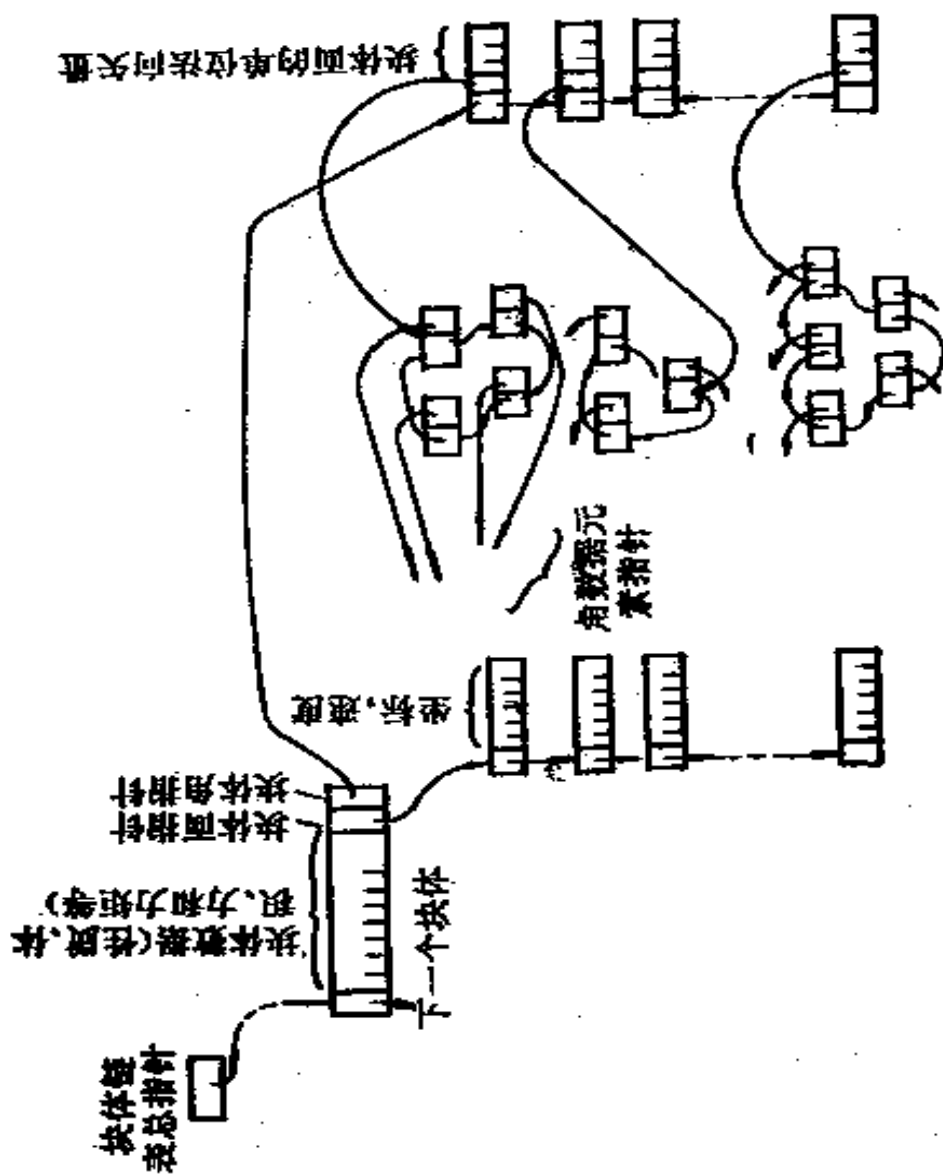


图 6-3 刚性块体的数据结构

几个凸面体,其中有一个是主要的,称之为“母块体”,其他的统称为“子块体”。子块体的处理方法同母块体一样,它们有共同的重心和质量等,在力学计算中把它们当成一个块体处理。

2. 接触数据结构

当两个刚性凸面体发生接触或它们之间距离很近时,则它们在总数据数组中被分配在同一个数据单元中。这个数据单元存贮两个接触块体之间的摩擦力、法向力以及其他相关数据。如果这两个块体中至少有一个是充分变形体,那么在该接触数据单元中还应增加一个指针,该指针给出充分变形体结点的一系列子接触地址。

每个接触数据单元中的主要内容如图 6-4(a) 所示。从整体上看,每个接触都与其它接触相联系;从局部上看,组成接触的块体数据单元也是相互联系的。能够体现上面这种关系的接触链表如图 6-4(b) 所示。根据需要可以通过不同的途径访问每个接触,一旦某个接触被找到,组成接触的块体所在地址就可由接触数据单元中的块体指针来确定。在主循环计算中,在计算接触力前必须搜寻所有的接触,这个过程可以通过与总指针相连的链表来完成。在检索过程中,要想知道某个特定块体的已有接触也是很容易的,例如图 6-4(b) 中,从块体 *C* 的接触指针出发,可以找到块体 *C* 与三个块体接触。

6.2.3 邻近块体的检索

在计算两个块体的接触力前,必须确定它们是否符合接触条件。正如在第二章中所讲述的,对于所有块体两个两个地进行检索是不现实的,所用的检索时间与块体的数目平方

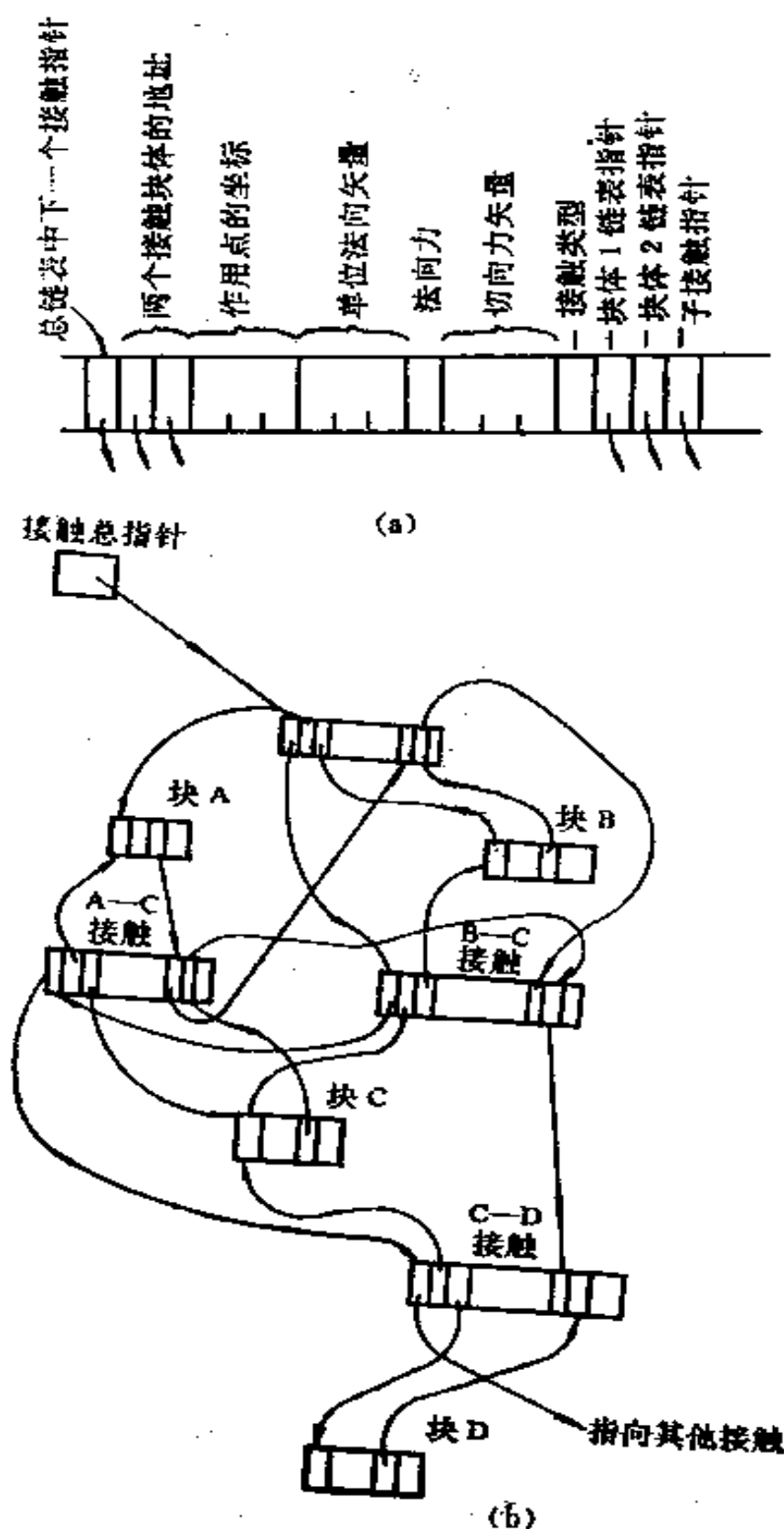


图 6-4 接触数据单元(a)和由四个块体所构成的接触链(b)

成正比。在二维块体模型中，所用的分格检索方法其检索时间与块体数目的一次方成正比。但遗憾的是这种方法不能被移植到三维模型中。

三维块体模型所采用的检索方法与圆形颗粒模型的类似，虽然该方法显得不太精巧，然而可靠和实用。首先将块体所在区域分割成一些有序的正方体盒，这样，每个块体的“轮廓空间”占据一个或几个盒子。所谓的“轮廓空间”是

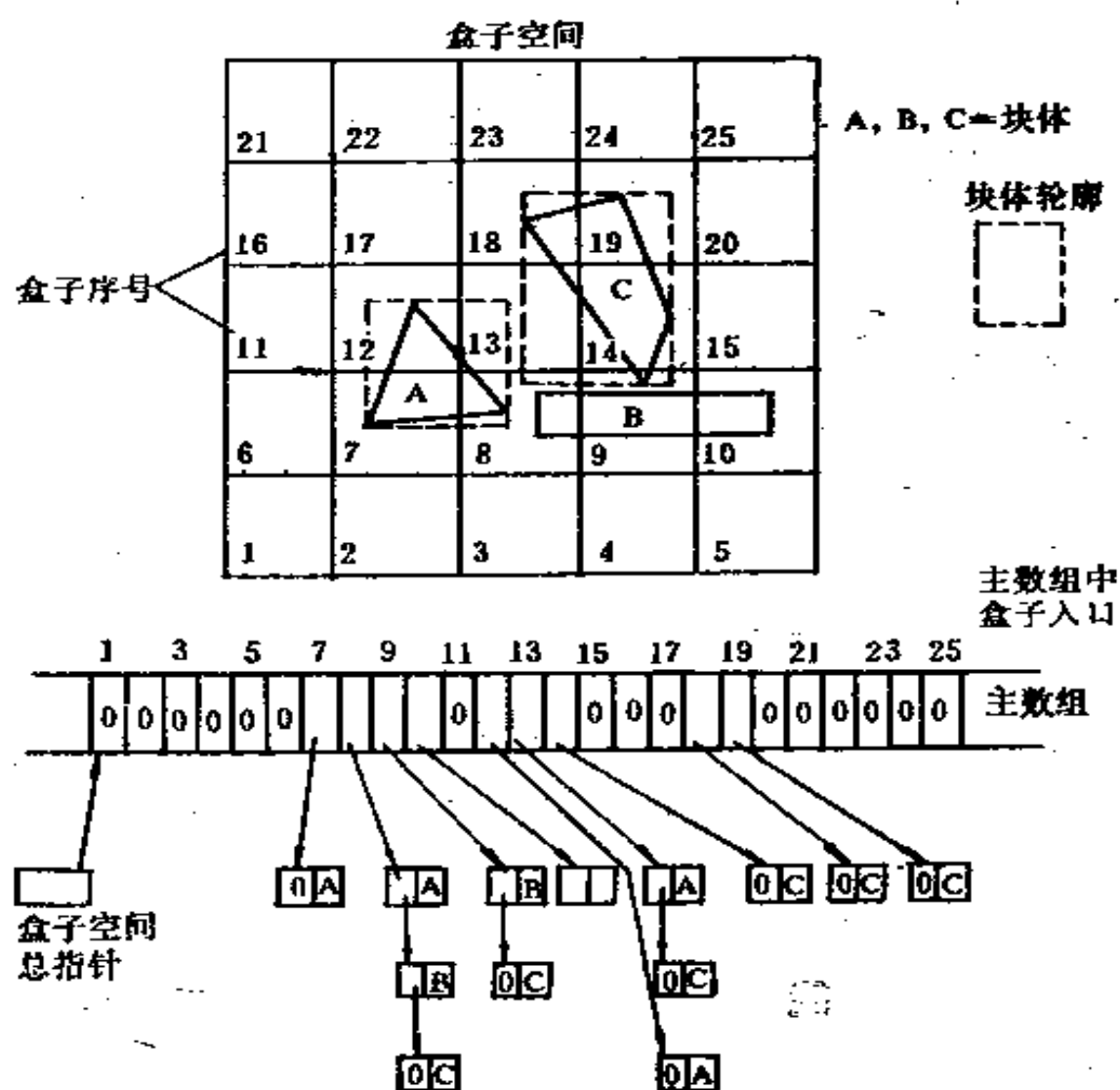


图 6-5 分格检索块体

指包围块体且各边平行于坐标轴的最小三维立方体。每个方盒中的块体地址用线性链表记录下来。由于三维空间中很难描述上述思想，所以在二维空间中解释这种检索方法（见图 6-5）。如果所有的块体都变换到盒子空间，检索某个块体的所有相邻块体的工作就变得相对容易了。“轮廓空间”所占的各个盒子记录了它的所有相邻块体，因此，只要在比“轮廓空间”稍大的范围内搜寻，即可找到它的所有相邻块体。这样，如果盒子体积与块体的平均体积成正比，那么查寻块体所耗总机时就与块体的数目成正比。

由于各块体的形状和大小可能千差万别，因此很难提出一个公式计算盒子的最优尺寸。考虑极限情况，如果只有一个盒子，那么所有的块体都被装入其中，寻找相邻块体的时间将是块体数目平方的倍数。当盒子密度增大时，对某个块体检索到的非相邻近块体的数目将减少。一般来说，盒子最佳密度应在每个块体平均占有一个盒子的量级上。

当计算过程中块体运动时，各个块体在盒子空间中的位置可能发生变化，此时应重新检索块体之间的接触关系。在每个时步，计算位移的可能最大累加值 u_{acc} ：

$$u_{acc} := u_{acc} + \max \{ \text{ABS}(du) \} \quad (6-9)$$

式中， du 是块体任一角点的位移增量。当 u_{acc} 超过预先设定的限值 CTOL 时，块体要重新归盒并检索块体之间接触关系，同时将 u_{acc} 置为零。接触检索是在比块体“轮廓空间”在各尺度方向大 $2 * \text{CTOL}$ 的体积内进行，这样，任何潜在的接触都能被查到。当任何块体移动出盒子空间时，则需把盒子空间增大 10%，这时块体还需要重新归盒。

CTOL 还可用作判定接触形成或取消的限值：如果两个块体之间的间隙不大于 CTOL，则接触形成；相反，如果已

形成的接触其间距大于 CTOL, 则接触被取消。

上述算法既可以保证潜在接触的块体在真正发生物理接触时已有接触数据单元, 又能保证只检索运动块体而不把时间浪费在相对不活动的块体上。

6.2.4 检查块体接触的方法

当两个块体被确定为邻近块体后, 应确定它们是否接触。如果两个块体没有接触, 那么它们之间的最小间隙应大于 CTOL 值。否则, 如果两个块体虽然没有真正接触, 但是它们之间的间隙小于 CTOL, 这时仍然可以认为它们是接触的, 只不过它们之间的作用力为零罢了。这样做的好处是: 由于不是在每个时步内都检索块体之间的接触关系, 一旦块体发生物理接触, 它们之间将产生作用力。

在对块体进行接触检查时, 必须提供一个用于确定接触面的单位法向矢量。当两个块体发生相对滑动时, 该法向矢量能够连续变化, 甚至对于如图 6-6 所示的边-边接触也能处理。

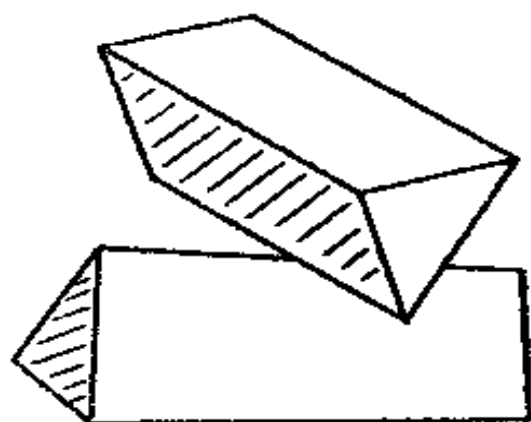


图 6-6 边-边接触

最后需要指出的是, 用于检查接触的方法应能迅速分清接触的类型: 面-边, 角-面, 面-面, 边-边, 边-角以及角-角。这对于选择正确的接触本构关系十分重要。

总之, 检查接触的方法应具有如下功能和特点: 查找迅速, 指出接触类型, 能够计算接触时的最大间距以及单位法向矢量。下面先讲述一下直接查找法及其存在的问题, 最后

给出一个较为理想的方法——公共面法。

1. 两个块体接触的直接检查法

直接检查法就是检查两个块体之间所有可能的接触。在三维空间中，两个块体之间存在多种接触形式，如第一块体的角可与第二个块体的面、角或边接触等。如果第一个块体（块体A）有 v_A 个角、 e_A 个边和 f_A 个面，而第二个块体（块体B）有 v_B 个角、 e_B 个边和 f_B 个面，则不同的接触组合数为：

$$n = (v_A + e_A + f_A)(v_B + e_B + f_B) \quad (6-10)$$

例如，两个正方体将有 676 种可能的接触。实际上不必这样检查，因为一些接触是另外一些接触形式的组合。如果能检查出角-面和边-边接触，则其他形式的接触可由下列方式判定：

(1) 如果 3 个或 3 个以上的角-面接触发生在同一点，则是角-角接触。

(2) 如果对于同一个角存在两个角-面接触时，则该接触是角-边接触。

(3) 如果两个块体之间存在着两个边-边接触，则是边-面接触。

(4) 如果两个块体之间存在三个或三个以上的边-边接触，以及三个或三个以上的角-面接触，则是面-面接触。

即使这样减少检查次数，组合数仍为：

$$n = v_A f_B + v_B f_A + e_A f_B + e_B f_A \quad (6-11)$$

对于两个正方体，检查次数 $n = 240$ 。

通过以上分析可以看出：第一，检查次数是块体边（角或面）数的二次方；第二，检索有时很困难，不可能迅速完成，例如角-面接触，只检索角是否在另一个块体的面上或

面下是不充分的,还必须检查角是否落入组成面的多边形内。

考虑上面提到的条件,接触类型可以在检查过程中确定,每种类型可以轮流检查。确定接触单位法向矢量在涉及面的情况下还容易做到,但对于边-边、边-角或角-角接触就很困难,并且很难保证接触由一种类型过渡到另一种类型时,法向矢量能够连续变化。此外,用直接法计算块体之间的间隙也不是一件容易的事。

为了解决上述困难,提出公共面检查方法。

2. 公共面法

(1) 公共面的概念

如前所述,很难直接判定两个任意形状的多面体之间的接触。但是,如果把问题分解成如下两部分,则很多困难将会得到解决:

- ① 定义一个平分块体之间间隙的“公共面”;
- ② 分别检查每个块体是否与该公共面接触。

公共面类似于一个用弹性挂线悬吊在两个块体之间的金属盘,当两个块体慢慢地靠近时,该盘将发生偏转,最终以一定的角度卡在两个块体之间(见图 6-7)。此时的金属盘面就是块体之间的滑移面。如果把金属盘换成数学上的“公共面”,那么现有的块体接触问题就会迎刃而解。利用公共面检查块体之间的接触具有如下特点(公共面记为 c-p):

- ① 只检查角-面接触。因为所有块体或子块体都是凸面体,面和边接触可由几个角-面接触计算出。
- ② 不必检查潜在的接触点是否在多边形表面的周边内。由于 c-p 等分两块体之间的空间,如果两个块体都与 c-p 接触,那么它们一定相互接触。
- ③ 检查次数只与块体的角数成正比。因为分别计算两

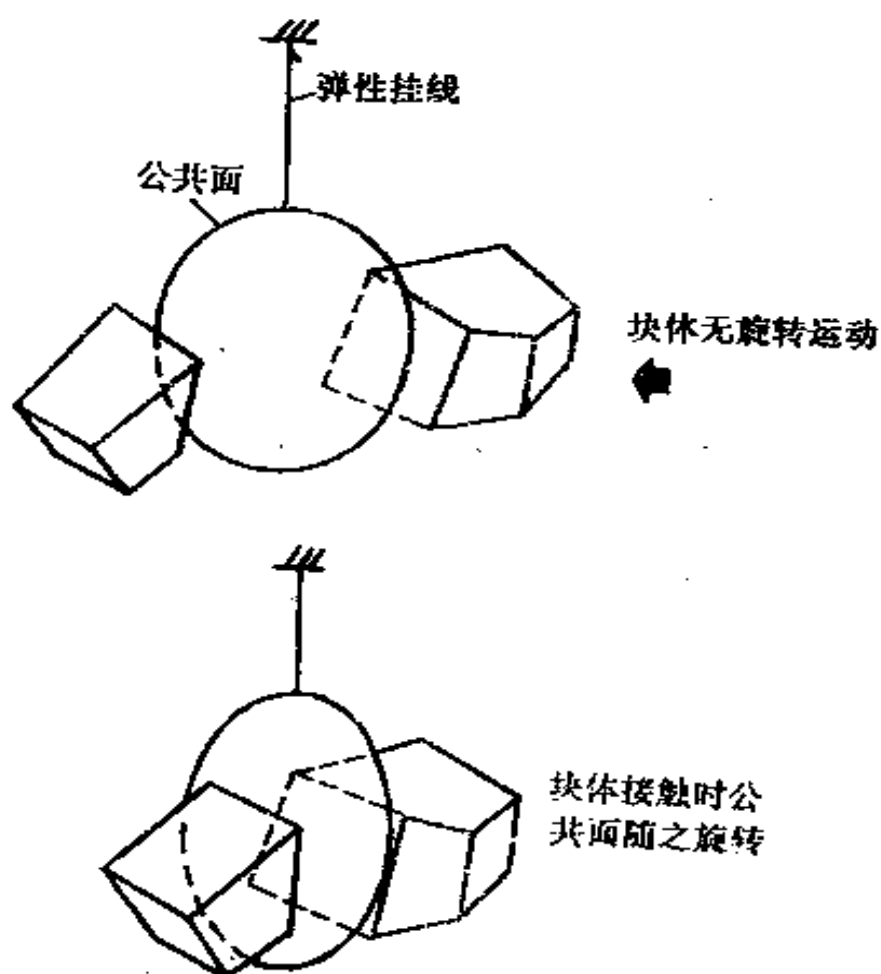


图 6-7 公共面与块体接触

个块体与 c-p 接触，所以检查次数应是块体 A 和块体 B 的角数之和：

$$n = v_A + v_B \quad (6-12)$$

对于两个立方体，检查次数为 16，与直接检查次数 240 相比减少近 15 倍。

④ 接触点的单位法向矢量就是 c-p 的单位法向矢量，因此不必做额外的计算。

⑤ 由于 c-p 在一定位置的法向矢量是唯一的，消除了接触点的法向矢量不连续变化问题。c-p 法向矢量有时可能变化很快（如角-角接触），但当接触类型变化时它不会

突然变化。

⑥ 由于 c-p 平分两块体之间的间隙, 使确定两个块体最小间隙的工作变得非常容易, 只要把两个块体与 c-p 的距离相加即可。

(2) 确定公共面位置的算法

我们已经知道 c-p 能够迅速和方便地检查出接触点, 现在需要找到一个合理的方法来确定 c-p 位置。确定和移动 c-p 的公式只取决于块体的几何形状和位置, 并且在每个计算时步都要与力学计算平行进行。它的算法可用如下语言来描述: “使 c-p 与块体的最近角的间隙最大”。

图 6-8 所示是按上述原则在二维空间形成块体之间 c-p 的几个例子。c-p 的旋转或平移将使 c-p 与最近角的间隙变小或不改变。对于块体叠合情况, 上述算法同样适用, 但是“间隙”和“最近”这两个词需从数值意义上理解。“间隙”意味着“负叠合”, 而“最近”则意味着“正叠合”。所以, 上述算法对于有“叠合”的情况应改写为: “使 c-p 与叠合最大的角之间的叠合最小”。

对于两个原来未接触的块体必须提供它们开始接触时的条件。最初可以假想 c-p 置于两个块体形心的中央, 它的法向单位矢量由一个块体的形心指向另一个块体的形心:

$$\left. \begin{aligned} C_i &= (A_i + B_i)/2 \\ n_i &= Z_i/z \end{aligned} \right\} \quad (6-13)$$

式中, C_i 是 c-p 上的参考点; A_i 是块体 A 形心的位置矢量; B_i 是块体 B 形心的位置矢量; n_i 是 c-p 的法向单位矢量; $Z_i = B_i - A_i$; $z^2 = Z_i \cdot Z_i$ 。

上面的算法可用于平移和旋转 c-p, 以使间隙最大或叠

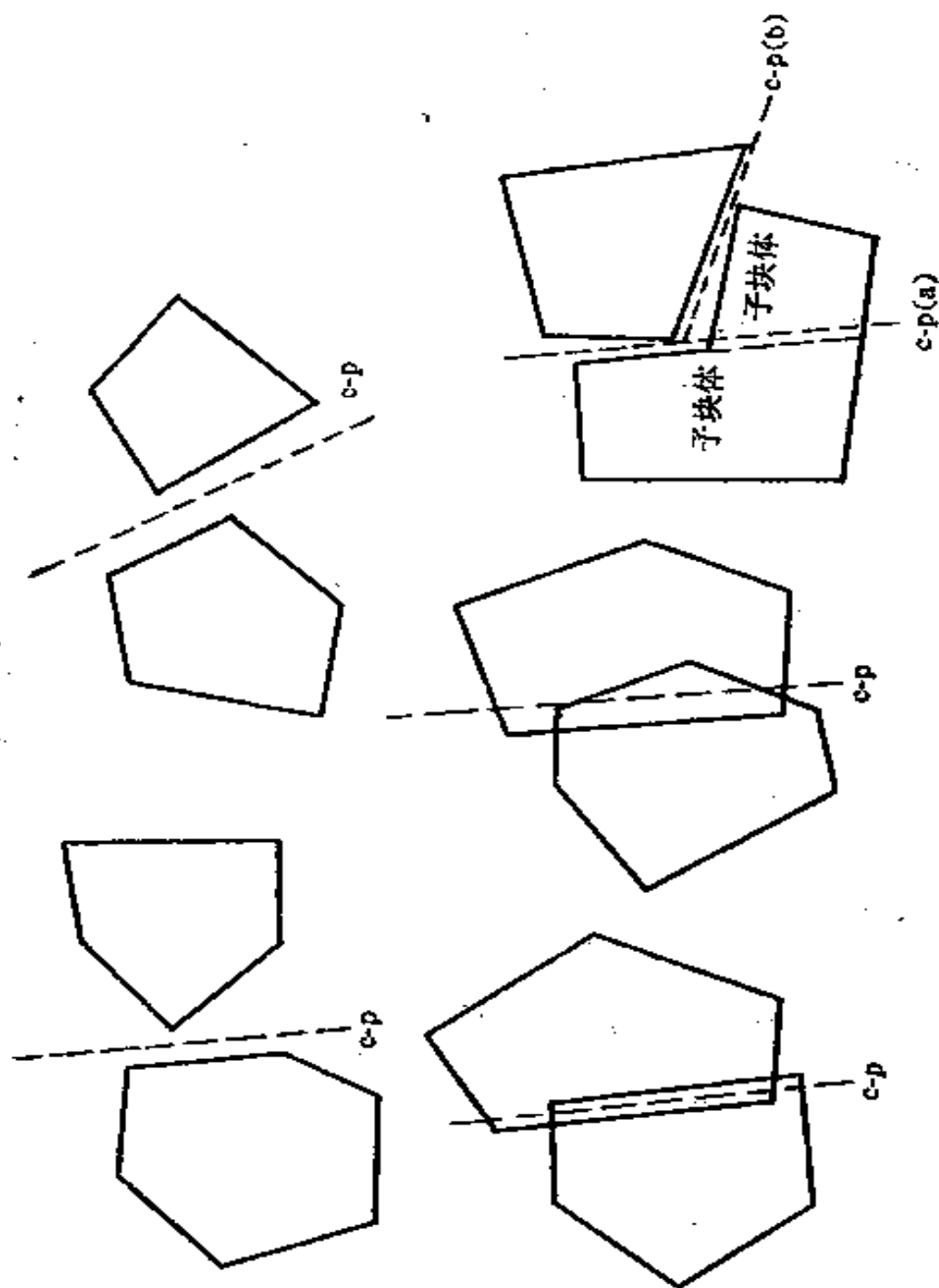


图 6-8 两个块体之间的公共面

合最小。参考点 C_i 的作用是：若 c-p 旋转，则旋转轴通过此点；若两个块体接触，则法向力和切向力作用在 C_i 处。

(3) 公共面的平移

公共面的平移可分为沿 c-p 的法向运动和切向运动两部分。法向平移可以通过检索 c-p 与每个块体最近角的距离 d_A 和 d_B 求出，且

$$\left. \begin{aligned} d_A &= \max[n_i \cdot v_i(A)] \\ d_B &= \min[n_i \cdot v_i(B)] \end{aligned} \right\} \quad (6-14)$$

式中， d_A 是块体 A 的角与 c-p 最近的距离（间隙为负）； d_B 是块体 B 的角与 c-p 最近的距离（间隙为正）； $v_i(A)$ 是块体 A 的角位置矢量； $v_i(B)$ 是块体 B 的角位置矢量。

由式(6-14)可得 c-p 参考点的移位矢量为：

$$C_i := [C_i + (d_A + d_B)n_i]/2 \quad (6-15)$$

以及块体之间的总间隙 d 为：

$$d = d_B - d_A \quad (6-16)$$

如果两个块体接触（此时总间隙为负），则参考点变成接触力的作用点；如果两个块体不接触，则应把参考点移到两个最近角点的中央

$$C_i = [v_i(A_{\max}) + v_i(B_{\min})]/2 \quad (6-17)$$

式中， $v_i(A_{\max})$ 是块体 A 上与 c-p 最近的角位置矢量； $v_i(B_{\min})$ 是块体 B 上与 c-p 最近的角位置矢量。

(4) 公共面的旋转

c-p 的平移可以一次完成，但其旋转需要分几步才能完成，因为 c-p 旋转时块体的最近角可能变化。

现随意选择两个正交的坐标轴，且它们都与 c-p 的法向单位矢量正交。将 c-p 的法向单位矢量沿其中的每一方向进行正负扰动，就会产生 4 个扰动量。如果设 p_i 和 q_i 是

两个正交的法向单位矢量,那么, c-p 的法向单位矢量 n_i 的 4 个摄动量为:

$$\begin{aligned} n_{i1} &:= (n_i + k p_i) / z \\ n_{i2} &:= (n_i - k p_i) / z \\ n_{i3} &:= (n_i + k q_i) / z \\ n_{i4} &:= (n_i - k q_i) / z \end{aligned} \quad (6-18)$$

式中, $z^2 = 1 + k^2$, k 是控制摄动大小的参数。

当某个接触第一次形成时, 参数 k 最初置为 k_{\max} , 该值与 5° 摄动角相对应。寻找最大间隙值 $\max\{d_B - d_A\}$ 的迭代过程如图 6-9 所示。当由最小摄动所算出的间隙都减小时, 上述迭代将停止, 此时的法向单位矢量对应于最大间隙。最小摄动 k_{\min} 的取值与 0.01° 摄动角相对应。为了防止迭代过早地停止在鞍点上, 需要把摄动轴交替旋转 45° 。当间隙在迭代的任一步超过预先给定的限值 CTOL 时, 则迭

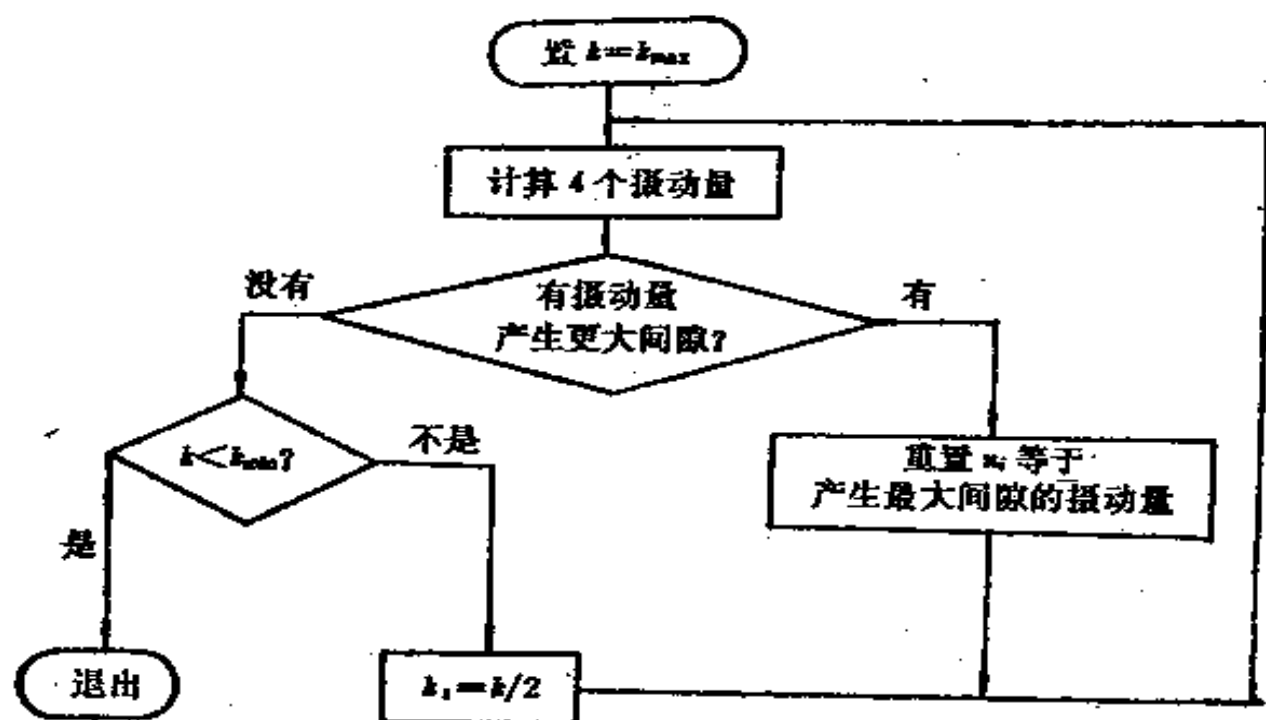


图 6-9 迭代求最大间隙

代过程停止，且取消此接触。

对于一个已经存在的接触，4个摄动量最初用 $k = k_{\min}$ 进行试算。如果最大间隙没有增加，就不用再进行迭代；否则继续进行上述迭代。

(5) 在进行力学计算时的 c-p 平移

当力在接触点已经存在时，c-p 的法向平移仍然可根据式(6-15)计算，只需附加如下两个移动增量。

① 刚体平移。这部分附加平移增量只与两个块体在接触点的平均移动量有关，此时参考点为：

$$C_i := C_i + [du_i(A) + du_i(B)]/2 \quad (6-19)$$

式中， $du_i(A)$ 和 $du_i(B)$ 分别是块体 A 和块体 B 在接触点（或参考点）的位移增量。

但是，如果两个块体在空间以相同的速度运动，则 c-p 的参考点也以相同的速度运动。在这种情况下，式(6-15)不必校正。

注意式(6-19)中的位移增量包括块体的转动影响。

② 相对转动。如前所述，c-p 参考点是合接触力的作用点。当接触平面的上平面相对于下平面旋转时，由于接触面受到不均衡载荷作用，合接触力作用点将移动。图 6-10 可以解释这种效应，参考点移动和接触面旋转之间的关系不仅取决于界面的性质，还取决于当前的法向应力（如果应力与法向刚度有关）。也就是说，参考点的平移与材料的性质有关，不能仅从块体的几何参数导出。因此，在参考点的平移公式中包含了一个材料影响因素，即参数 K_r 。参考点的平移公式为：

$$C_i := C_i + K_r \varepsilon_{ijk} n_j [dT_k(B) - dT_k(A)] \quad (6-20)$$

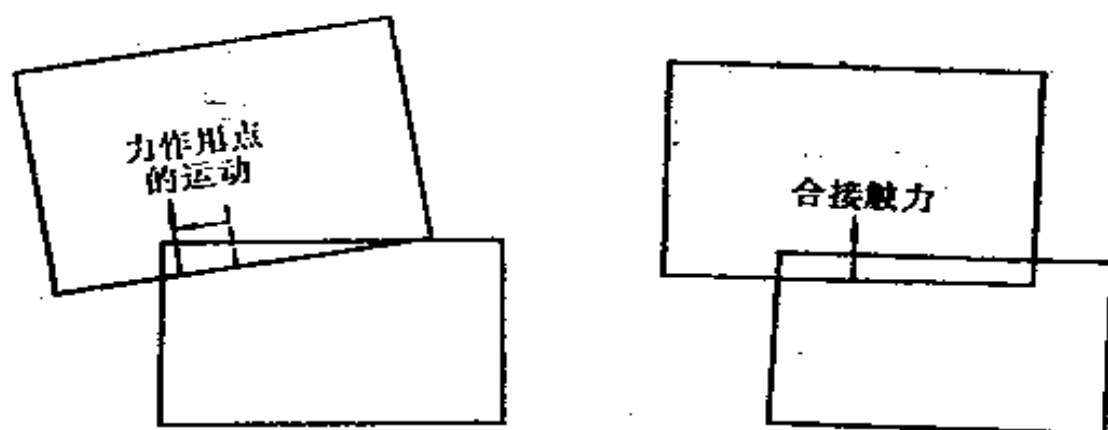


图 6-10 接触面旋转与合力移动 (叠合被夸大)

式中, $dT_k(A)$ 和 $dT_k(B)$ 分别是块体 A 和块体 B 旋转矢量的增量; ε_{ijk} 是置换张量 ($i, j, k = 1, 2, 3$); 常量 K_r 具有长度量纲, 但它应该被接触平面在 C_i 移动方向上的长度正则化。实际上, 选择一个合理的 K_r 并不容易, 它是由很多试验数据得出的。

③ 参考点移动的限制。因为参考点是接触力的作用点, 因此它一定位于两个块体的表面上。在每次用过式(6-19)和(6-20)后, 应该检查 c-p 参考点是否在构成接触的每个面上。如果发现参考点在任一面外, 则采用如下公式将其移向该面:

$$C_i := C_i + [n_i n_i n_i^{(f)} - n_i^{(f)}] d \quad (6-21)$$

式中, $n_i^{(f)}$ 是面的单位外法线矢量; d 是 C_i 与面的垂直距离。

只有当 n_i 与 $n_i^{(f)}$ 正交时, 式(6-21)才能将 C_i 完全移回面上。但是在某些情况下, 重复使用公式(6-21)才能使 C_i 趋向面上 (见图 6-11)。

(6) 公共面的计算时间问题

建立两个块体之间的 c-p 所需要的计算次数与块体的

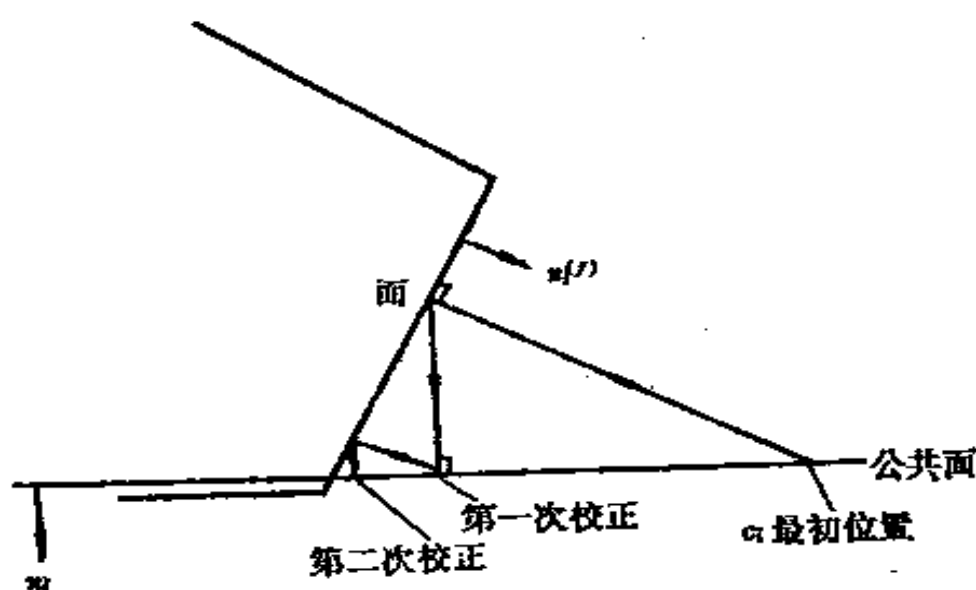


图 6-11 把 C_i 带回块体边界

角数成正比。例如，块体公共面做平移校正时的计算次数为 $(v_A + v_B)$ 。对于旋转迭代，计算次数为 $4N(v_A + v_B)$ ，这里 N 表示迭代次数。因此，总的计算次数为：

$$n = (4N + 1)(v_A + v_B) \quad (6-22)$$

很难把式(6-22)与直接检查法的式(6-10)和(6-11)作比较。对于块体之间早已存在的接触，c-p 算法优于直接检查法，因为前者只需要做旋转迭代就能确定最优 c-p 位置。由试验得知，c-p 算法检查刚形成的接触所需的迭代次数在 9—30 次。虽然对于角数少的块体，c-p 算法比直接检查法要花费更多的计算次数建立接触条件，然而若考虑到上述 c-p 法的 6 个优点，c-p 算法总的来说还是可取的。

(7) 接触类型

接触类型的划分是十分重要的，因为它决定接触的力学行为。例如，面-面接触的力学行为与角-面接触不同。在岩土力学中，面-面接触被称为“节理”，研究节理的力学行为

应力比集中力更为重要。接触类型可以通过每个块体与 c-p 接触的角数来划分。表 6-1 是接触角数与接触类型的对应关系。

对于面-面接触，为了能够应用应力-位移本构关系计算界面的力学行为，必须求出接触面积。由于组成接触的两个面都是凸多边形，因此接触面也是凸多边形，计算它的面积虽然简单，但是费时。

表 6-1 接 触 类 型

与 c-p 接触的角数		接 触 类 型
块 体 A	块 体 B	
0	0	—
1	1	角-角
1	2	角-边
1	>2	角-面
2	1	边-角
2	2	边-边
2	>2	边-面
>2	1	面-角
>2	2	面-边
>2	>2	面-面

6.2.5 变形块体

上面用于刚性块体的算法也适用于变形块体，即接触块体间只有一个公共面，一个数据单元对应一个接触。如果两个接触块体中有一个是变形体，则公共面上会有几个内结点，且每个结点有三个独立的自由度。在这种情况下，每个结点在 c-p 上产生一个“子接触”，“子接触”起着力的传递作用，当满足一定条件时，还能在 c-p 上产生滑移或分离。

总的说来,“子接触”的作用像一个“角-面”法向接触,结点处的界面位移由结点位移减去相对面上对应点的位移。每个“子接触”的结点力可由适当的本构关系确定。

上面仅讨论了界面一侧存在结点的情况。如果两侧的块体都是变形体时,可按下列步骤计算:产生子接触,计算相对位移,最后计算结点力(具体方法见第五章)。例如,当两个变形块体发生面-面接触时,可以把接触想象为在两个块体的接触面上各有一组弹簧与对方平行连接,接触力取这两组弹簧力之和的二分之一,因此,界面的力学特性将由这两组力的平均行为来确定。尽管在算法上把与变形体的接触看成是角-面接触,但是,当每一结点都分配给一定面积时,它们的行为也可以视为面-面接触,此时可以采用应力-位移关系研究其接触特性。每一个结点的“面积”一般情况下取其周围三角形网格面积总和的三分之一,但是当结点靠近另外一个块体的边时,算法需要修正。

前面介绍的 c-p 算法严格地适用于凸块体且表面是平面的接触问题,但是,当块体有大应变时,该算法就不太适用了。实际上,一般节理岩体其位移很大,而应变很小(不大于 1%)时,上述算法仍然适用。

6.3 力和位移的计算

下面只给出刚性块体相互接触时的力和位移的计算公式。如在第二章中所述,刚性块体模型适用于应力水平与完整岩石强度相比不大的情况,此时块体的运动行为主要与岩体的结构特征有关。

对于三维的充分变形块体,同二维一样,块体需要进一

步分成有限差分网格，每个单元是常应变的四面体，材料可以是弹性的，也可以是弹塑性的，采用显式、大应变法求解。

三维离散单元法也是在时间域内采用动态松弛法解块体的运动方程，在每个时步内应用牛顿运动定律和本构方程，求解块体之间的相互作用力。计算循环如图 6-12 所示。

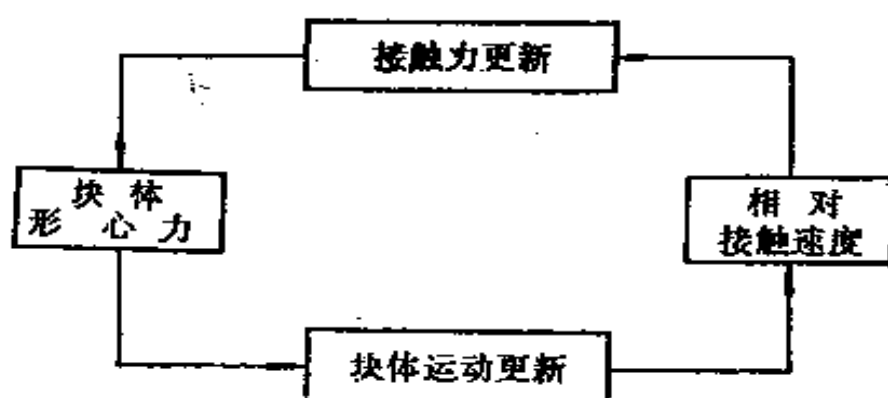


图 6-12 计算循环

6.3.1 力的方程

前节讲了如何更新块体之间的接触点问题，并且指出公共面的单位法向矢量就是接触点的单位法向矢量。设 A 和 B 是两个接触块体， n_i 是接触点的单位法向矢量，且方向由块体 A 指向块体 B。公共面上的参考点 C_i 可以确定法向接触力的作用点，该力的方向为 n_i 。

在接触点，块体 B 相对于块体 A 的运动速度为：

$$v_i = \dot{X}_B + \varepsilon_{ijk} \omega_j^B (C_k - B_k) - \dot{X}_A - \varepsilon_{ijk} \omega_j^A (C_k - A_k) \quad (6-23)$$

式中， A_k ， B_k 是块体 A 和 B 的形心位置矢量； \dot{X}_A ， \dot{X}_B 是块体 A 和 B 形心的平移速度矢量； ω_j^A ， ω_j^B 是块体 A 和 B 的转动速度矢量； ε_{ijk} 是三阶置换张量 ($i, j, k = 1, 2, 3$)。

由上式可得接触点在一个时步 Δt 内的位移增量矢量为:

$$\Delta u_i = v_i \Delta t \quad (6-24)$$

将 Δu_i 沿公共面的法向和切向分解, 可得法向和切向位移增量为:

$$\Delta u^n = \Delta u_i n_i \quad (6-25)$$

$$\Delta u^t = \Delta u_i - \Delta u_i n_i n_i \quad (6-26)$$

在每个计算时步内, 由于公共面的转动, 其单位法向矢量 n_i 也随之转动, 应该调整切向力。考虑上述影响, 在整体坐标系下, 切向力矢量 F_i^t 应写成:

$$F_i^t := F_i^t - \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} F_j^t n'_m n_n \quad (6-27)$$

式中, n'_m 是公共面上一时步的单位法向矢量。

根据力—位移关系, 由式(6-25)和(6-26)可得力增量。法向力矢量增量(取压力为正)为:

$$\Delta F^n = -k_n \Delta u^n A_c \quad (6-28)$$

切向力矢量增量为:

$$\Delta F_i^t = -k_t \Delta u_i^t A_c \quad (6-29)$$

式中, k_n , k_t 是节理刚度(单位是应力/位移); A_c 是接触面积。

接触应力可直接由接触力和接触面积计算。总的法向力矢量 F^n 和切向力矢量 F_i^t 为:

$$F^n := F^n + \Delta F^n \quad (6-30)$$

$$F_i^t := F_i^t + \Delta F_i^t \quad (6-31)$$

法向力矢量和切向力矢量可根据一定的接触本构关系(如允许有一定拉应力的库仑摩擦定律)进行调整。设节理的抗拉强度为 T , 若 $F^n < -TA_c$, 则切向力和法向力同时解除。否则, 最大切向力用下式计算:

$$F_{\max}^* = CA_0 + F^* \tan \varphi \quad (6-32)$$

式中, C , φ 分别是节理的粘聚力 (应力) 和内摩擦角。

若切向力的绝对值, 即

$$F^* = (F_i^* \cdot F_i^*)^{1/2} \quad (6-33)$$

大于 F_{\max}^* , 则切向力减小到极限值:

$$F_i^* := F_i^* [(F_{\max}^*) / F^*] \quad (6-34)$$

然后把上面算出的接触力累加到作用于块体形心的力和力矩上。例如, 块体 B 作用于块体 A 上的接触力矢量为:

$$F_i = F^* \cdot n_i + F_i^* \quad (6-35)$$

从而可得块体 A 上的合作用力和合力矩:

$$F_i^A := F_i^A + F_i \quad (6-36)$$

$$M_i^A := M_i^A + \varepsilon_{ijk} (C_j - A_j) F_k \quad (6-37)$$

同样, 对于块体 B 有:

$$F_i^B := F_i^B - F_i \quad (6-38)$$

$$M_i^B := M_i^B - \varepsilon_{ijk} (C_j - B_j) F_k \quad (6-39)$$

6.3.2 运动方程

一个块体的平移方程为:

$$\ddot{X}_i + \alpha \dot{X}_i = (F_i) / m + g_i \quad (6-40)$$

式中, \dot{X}_i 是块体形心的运动速度; α 是质量比例粘性阻尼系数; F_i 是作用于块体形心上的合力; m 是块体的质量; g_i 是重力加速度。

无阻尼的刚体相对于惯性主轴的转动, 可由欧拉方程表示为:

$$\left. \begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_3 \omega_2 &= M_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 &= M_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 &= M_3 \end{aligned} \right\} \quad (6-41)$$

式中, I_1 , I_2 和 I_3 是块体的主惯性矩; ω_1 , ω_2 和 ω_3 是相对于主轴的角速度; M_1 , M_2 和 M_3 是施加在块体主轴上的 3 个转矩分量。

用刚体模型解准静问题时, 转动方程可以简化。由于速度一般很小, 式(6-41)中的非线性项可以略去, 故式子变成不耦合方程。另一方面, 惯性力比块体上所施加的力小, 不必精确地计算惯性量, 因此可以按式(6-8)近似计算惯性矩 I 。

这样, 在加入粘性阻尼项后, 在整体坐标系下, 方程(6-41)变成:

$$\dot{\omega}_i + \alpha\omega_i = M_i/I \quad (6-42)$$

式中, 速度 ω_i 和总转矩 M_i 都是相对于整体坐标轴计算的。

块体的运动方程可按第二章所用的中心差分法进行迭代求解。例如, $(t + \Delta t/2)$ 时刻的块体平移和转动增量为:

$$\left. \begin{aligned} \Delta X_i &= \dot{X}_i(t + \Delta t/2)\Delta t \\ \Delta \theta &= \omega_i(t + \Delta t/2)\Delta t \end{aligned} \right\} \quad (6-43)$$

$(t + \Delta t)$ 时刻的块体形心位置为:

$$X_i(t + \Delta t) = X_i(t) + \Delta X_i \quad (6-44)$$

以及块体的角位置为:

$$X_i^v(t + \Delta t) = X_i^v(t) + \Delta X_i + e_{ijk}\Delta\theta_j[X_i^v(t) - X_k(t)] \quad (6-45)$$

对于已划分成母块体和子块体的块体, 只需对其母块体进行计算, 此时, 母块体的质量、惯性矩和形心位置等应等价于原来的块体。一旦母块体的位置确定后, 其子块体的形心和角位置可以由类似于(6-45)的式子计算。

6.4 球体模型

同二维圆形颗粒模型一样，三维球单元也是通过分格检索确定它们之间的接触关系，数据结构采用线性链表进行动态存贮。下面简略介绍一下球体模型的计算公式^[70]。

6.4.1 接触判据与相对位移

如图 6-13 所示，对于任意一个球单元 i ，当时间增加一个时步 Δt 后，球体的位移和转动增量分别为 $\Delta u_i, \Delta v_i, \Delta w_i, \Delta \varphi_{xi}, \Delta \varphi_{yi}$ 和 $\Delta \varphi_{zi}$ 。设两个球体 i 和 j 的半径分别

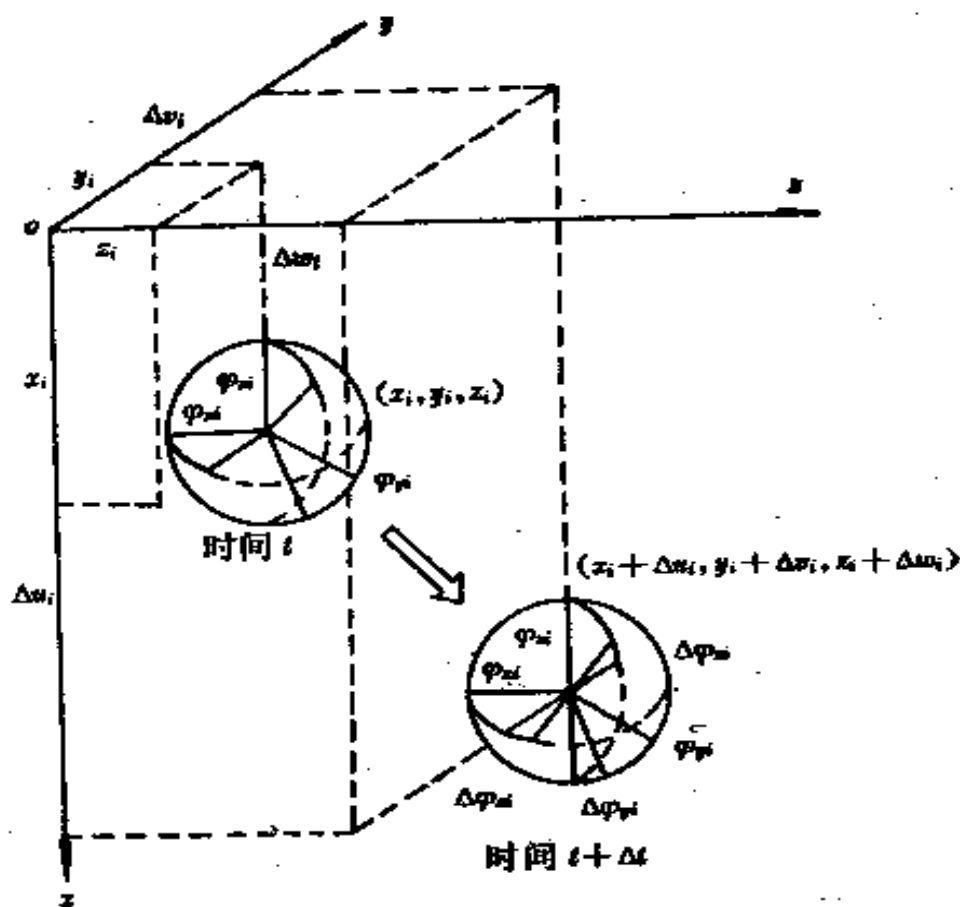


图 6-13 球单元的位移

为 r_i 和 r_j 。当两个球心之间的距离 L_{ij} 满足

$$L_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \leq r_i + r_j \quad (6-46)$$

时, 就认为这两个球体是接触的。

下面建立局部坐标轴 X , Y 和 Z , 在此坐标系下求球体之间的相对位移。取球体 i 的球心作为局部坐标系的原点; 取由点 i 到点 j 的直线为 X 轴; 在与 X 轴垂直的平面内, 过球心 i 取一平行于 $x-y$ 平面的直线为 Y 轴; Z 轴由右手螺旋法则确定(见图 6-14)。则新、旧坐标系之间有如下关系:

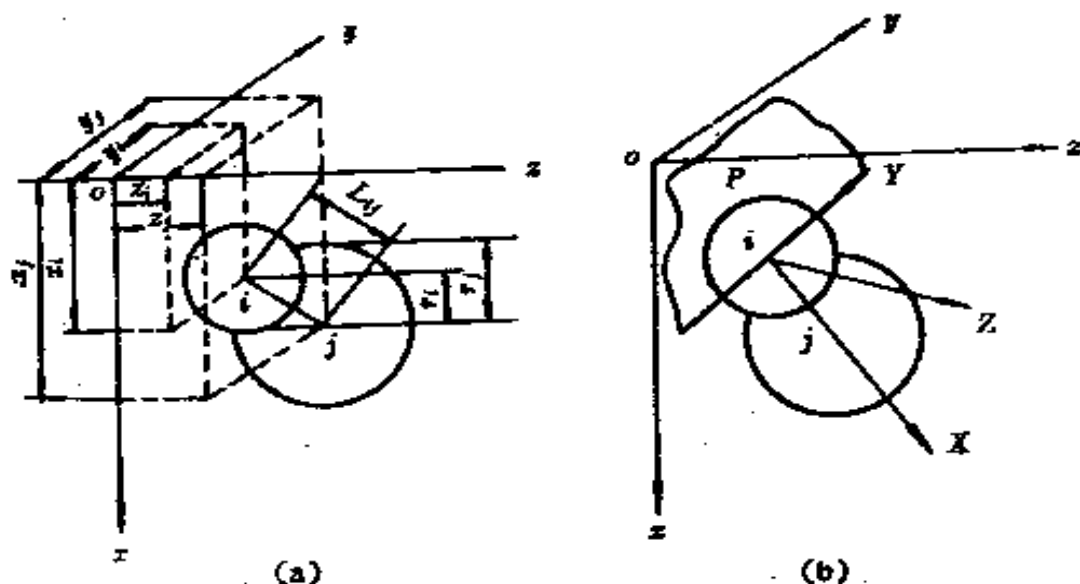


图 6-14 局部坐标系

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = [T_s] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (6-47)$$

且

$$[T_s] = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix} \quad (6-48)$$

式中 $a_{11} = l_x$, $a_{12} = m_x$, $a_{13} = n_x$

$$\begin{aligned}
a_{21} &= -m_x / \sqrt{l_x^2 + m_x^2}, \quad a_{22} = -l_x / \sqrt{l_x^2 + m_x^2}, \\
a_{23} &= 0 \\
a_{31} &= -n_x l_x / \sqrt{l_x^2 + m_x^2}, \quad a_{32} = -m_x n_x / \sqrt{l_x^2 + m_x^2}, \\
a_{33} &= \sqrt{l_x^2 + m_x^2}
\end{aligned}$$

而 l_x , m_x 和 n_x 是 X 轴的方向余弦, 即:

$$\left. \begin{aligned} l_x &= (x_j - x_i) / L_{ij} \\ m_x &= (y_j - y_i) / L_{ij} \\ n_x &= (z_j - z_i) / L_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (6-49)$$

由此可得单元 i 和单元 j 在接触点沿法线 (X 轴) 方向以及切线方向 (Y, Z 轴) 的相对位移增量 Δu_x , Δu_r 和 Δu_z 为:

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_r \\ \Delta u_z \end{Bmatrix} = [T_e] \begin{Bmatrix} \Delta u_i - \Delta u_j \\ \Delta v_i - \Delta v_j \\ \Delta w_i - \Delta w_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \Delta \varphi_{yi} & \Delta \varphi_{yj} \\ \Delta \varphi_{zi} & \Delta \varphi_{zj} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} r_i \\ r_j \end{Bmatrix} \quad (6-50)$$

并且规定: Δu_x 以两单元相向运动为正; 从 Z 轴正方向看, 当单元 i 相对于单元 j 在接触点的相对位移 Δu_r 是顺时针时为正; Δu_z 相对于 Y 轴有类似的定义。

另外, 相对转角的增量 $\Delta \varphi_x$, $\Delta \varphi_r$ 和 $\Delta \varphi_z$ 可用下式表示:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varphi_x \\ \Delta \varphi_r \\ \Delta \varphi_z \end{Bmatrix} = [T_e] \begin{Bmatrix} \Delta \varphi_{xi} - \Delta \varphi_{xj} \\ \Delta \varphi_{ri} - \Delta \varphi_{rj} \\ \Delta \varphi_{zi} - \Delta \varphi_{zj} \end{Bmatrix} \quad (6-51)$$

6.4.2 接触力

如图 6-15 所示, 单元 i, j 在接触点的作用力可分为法向力 F_x (压力为正)、切向力 F_r 和 F_z (对于单元 i ,

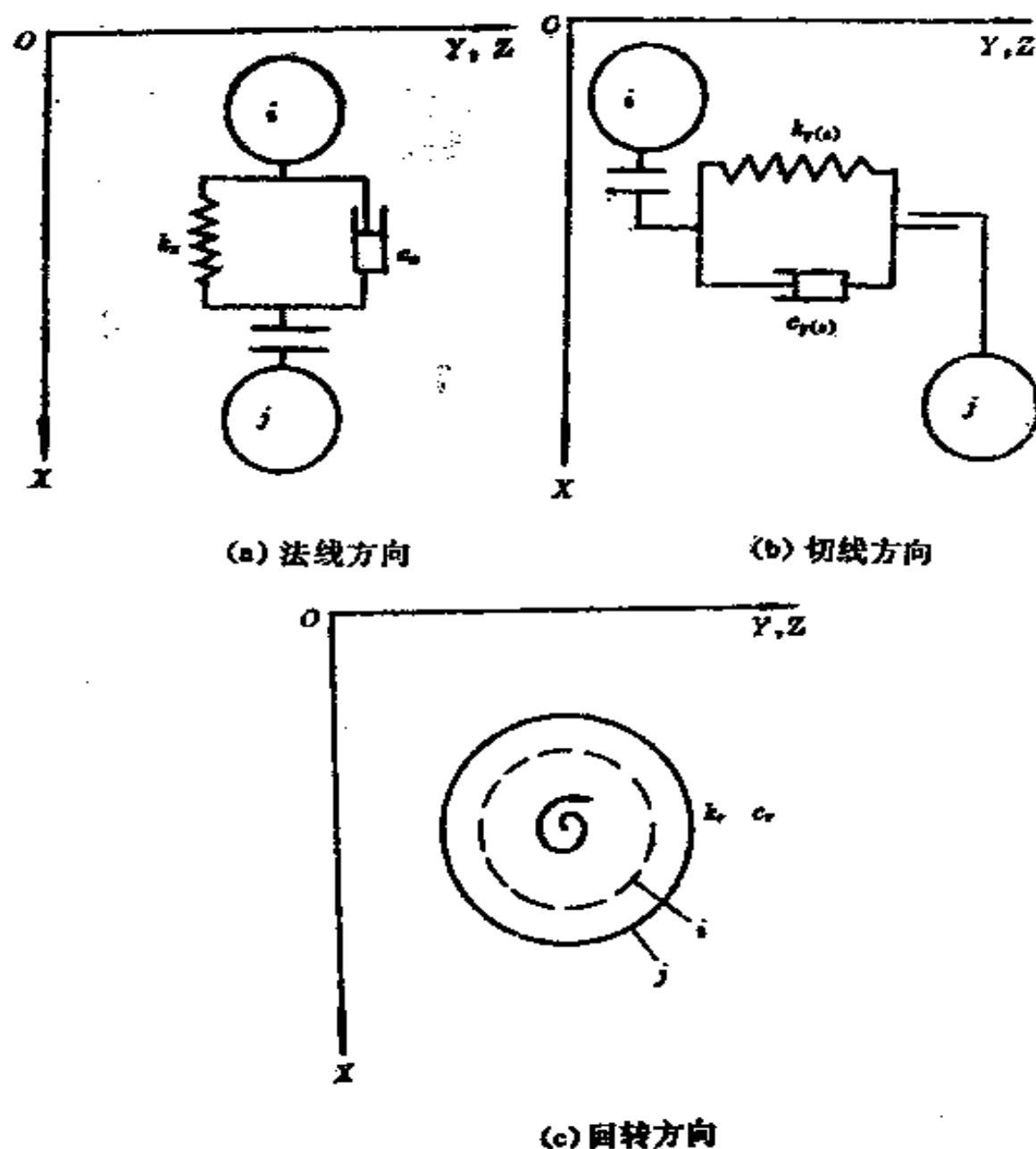


图 6-15 球单元的粘弹性接触模型

在 $Y-X$ 平面和 $X-Z$ 平面看以顺时针为正), 以及转矩 M , (对于单元 i , 在 $Y-Z$ 平面看以顺时针为正)。

1. 法向力

两单元的相互作用可用 Kelvin 模型表示 (见图 6-15 (a))。在时步 Δt 内, 法向的弹性力和粘性阻尼力增量分别为:

$$\Delta e_x = K_x \Delta u_x \quad (6-52)$$

$$\Delta d_x = c_x \Delta u_x / \Delta t \quad (6-53)$$

式中, k_x , c_x 分别是 X 方向的刚度系数和粘性阻尼系数。从而可得 t 时刻的弹性力 $e_x(t)$ 和粘性阻尼力 $d_x(t)$:

$$e_x(t) = e_x(t - \Delta t) + \Delta e_x \quad (6-54)$$

$$d_x(t) = \Delta d_x \quad (6-55)$$

以及总的法向力:

$$F_x(t) = e_x(t) + d_x(t) \quad (6-56)$$

2. 切向力

如图 6-15(b)所示, 切向的弹性力和粘性阻尼力增量分别为:

$$\Delta e_{r(z)} = k_{r(z)} \cdot \Delta u_{r(z)} \quad (6-57)$$

$$\Delta d_{r(z)} = c_{r(z)} \cdot \Delta u_{r(z)} / \Delta t \quad (6-58)$$

式中, $k_{r(z)}$, $c_{r(z)}$ 分别是 $Y(Z)$ 方向的刚度系数和粘性阻尼系数。从而可得 t 时刻的弹性力 $e_{r(z)}(t)$ 和粘性阻尼力 $d_{r(z)}(t)$:

$$e_{r(z)}(t) = e_{r(z)}(t - \Delta t) + \Delta e_{r(z)} \quad (6-59)$$

$$d_{r(z)}(t) = \Delta d_{r(z)} \quad (6-60)$$

以及总的切向力:

$$F_{r(z)}(t) = e_{r(z)}(t) + d_{r(z)}(t) \quad (6-61)$$

3. 回转力矩

如图 6-15(c)所示, 回转力矩增量的弹性和粘性阻尼分量分别为:

$$\Delta e_r = k_r r^2 \Delta \varphi_x \quad (6-62)$$

$$\Delta d_r = c_r r^2 \Delta \dot{\varphi}_x / \Delta t \quad (6-63)$$

式中, k_r , c_r 分别是回转方向刚度系数和粘性阻尼系数。由此可得 t 时刻的弹性转矩 $e_r(t)$ 和粘性阻尼转矩 $d_r(t)$:

$$e_r(t) = e_r(t - \Delta t) + \Delta e_r \quad (6-64)$$

$$d_r(t) = \Delta d_r \quad (6-65)$$

以及总回转力矩:

$$M_r(t) = e_r(t) + d_r(t) \quad (6-66)$$

6.4.3 运动方程

上面已经求出单元 i 和单元 j 在局部坐标系下的作用力, 现将这些力转换到整体坐标系中。设单元 i 在 x , y 和 z 方向所受的作用力分别为 F_{xi} , F_{yi} 和 F_{zi} , 转动力矩 (反时针为正) 分别为 M_{xi} , M_{yi} 和 M_{zi} 。则有:

$$\begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \end{Bmatrix} = -\Sigma [T_e]^{-1} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \quad (6-67)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \end{Bmatrix} = -\Sigma [T_e]^{-1} \begin{Bmatrix} M_r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - r_i \Sigma [T_e]^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \quad (6-68)$$

式中, Σ 表示对所有与 i 单元相接触的单元求和。

这样, 单元 i 在 t 时刻的加速度为:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{u}_i(t) &= F_{xi}(t)/m_i \\ \ddot{v}_i(t) &= F_{yi}(t)/m_i \\ \ddot{w}_i(t) &= F_{zi}(t)/m_i \end{aligned} \right\} \quad (6-69)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi}_{xi}(t) &= M_{xi}(t)/I_i \\ \ddot{\varphi}_{yi}(t) &= M_{yi}(t)/I_i \\ \ddot{\varphi}_{zi}(t) &= M_{zi}(t)/I_i \end{aligned} \right\} \quad (6-70)$$

式中, m_i 和 I_i 分别表示单元 i 的质量和转动惯量, 当密度 ρ 已知时, $I_i = 2r_i^2 m_i = 8\rho\pi r_i^4/15$ 。

对 (6-69) 和 (6-70) 式积分, 可得位移增量 $\Delta u_i(t)$, $\Delta v_i(t)$, $\Delta w_i(t)$, $\Delta \varphi_{xi}(t)$, $\Delta \varphi_{yi}(t)$ 和 $\Delta \varphi_{zi}(t)$ 。

7 离散单元法与其他方法的耦合

7.1 概 述

众所周知，有限单元法和边界单元法适合于解决连续介质问题，而离散单元法适合于解决为弱面所切割的非连续介质问题。因此，如果能将离散单元法与有限单元法和边界单元法等有机地耦合起来，便能充分发挥各自的长处，从而能够极大地扩展在岩土力学研究中使用数值方法的范围。例如，将开挖体附近的破碎岩体划分为离散单元，而将较远处完整程度较好的岩体视为连续体，可以用边界单元法或有限单元法等来模拟，以考虑远场应力的影响。

下面分别介绍离散单元法与有限单元法、边界单元法的耦合原理及其计算公式。

7.2 离散单元法与有限单元法的耦合

离散单元法与有限单元法的耦合计算比较容易。只要使交界面上的有限单元结点与离散单元的角度点或其他点重合，并保证它们的位移和力连续，就可以通过结点力和位移的相互传递作用将离散单元与有限单元耦合起来。

7.2.1 杆单元和梁单元

岩土力学中的许多构件（如衬砌和锚杆等）都可以用杆

单元或梁单元来近似模拟。解杆（梁）系结构的常用方法是位移法（或直接刚度法）和力法（或柔度法），其理论在一般的结构力学书中都有详细的阐述。由于位移法的计算过程易于统一化和标准化，便于编制计算机程序，因此这里采用位移法。

位移法是以位移为基本未知量，在预先满足变形协调的条件下，通过平衡方程求出位移。其具体解法是：将结构离散为一系列的杆（梁）单元，每个单元都是线弹性体，可以应用迭加原理，先建立单元的刚度矩阵，然后再建立结构的总刚度矩阵，最后采用高斯消去法解线性方程组求出位移和力等未知量。

每个单元的刚度方程一般形式为：

$$\{X\} = [K]\{u\} \quad (7-1)$$

式中， $\{X\}$ 是作用在杆或梁端的广义力矢量（力或力矩）列阵； $[K]$ 是刚度矩阵； $\{u\}$ 是杆或梁端的广义位移矢量（平移或转动）列阵。其中， $[K]$ 的每一个元素的物理意义是当其所在列对应的杆（梁）端位移分量等于1（其余杆或梁端位移分量均为零）时，所引起的其所在行对应的杆（梁）端力分量的数值。

现考虑一个无重量的杆单元（见图 7-1），其长度为 L ，轴向刚度为 EA 且沿长度均匀分布。在只有轴向力的条件下，该杆单元在局部坐标系（ \bar{x} ， \bar{y} ）下的刚度方程为：

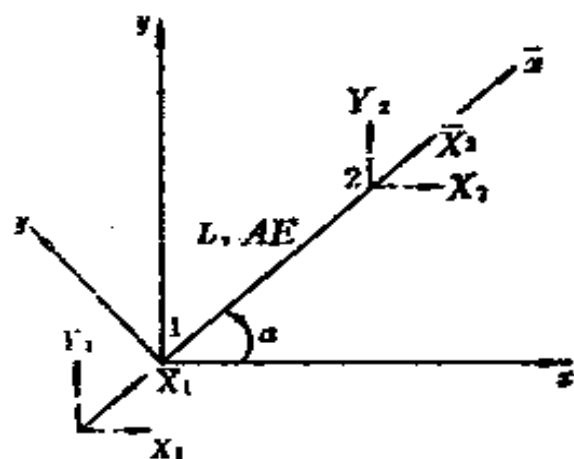


图 7-1 受有轴向力的杆单元

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{Y}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{Y}_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{Bmatrix} \quad (7-2)$$

或写成: $\{\bar{\mathbf{X}}\} = [\mathbf{K}] \{\bar{\mathbf{u}}\} \quad (7-3)$

如果设 $\lambda = \cos \alpha$, $\mu = \sin \alpha$, 结点力在两个坐标系下有如下关系:

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= X\lambda + Y\mu \\ \bar{Y} &= -X\mu + Y\lambda \end{aligned} \right\} \quad (7-4)$$

根据式(7-4), 图 7-1 所示的结点力可以写成:

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{Y}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{Y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} \quad (7-5)$$

或写成:

$$\{\bar{\mathbf{X}}\} = [\mathbf{T}]\{\mathbf{X}\} \quad (7-6)$$

式中, $[\mathbf{T}]$ 是变换矩阵。

同理, 对于位移有:

$$\{\bar{\mathbf{u}}\} = [\mathbf{T}]\{\mathbf{u}\} \quad (7-7)$$

这样, 将式(7-6)和(7-7)代入式 (7-3), 可得整体坐标系 (x, y) 下的刚度方程:

$$[\mathbf{T}]\{\mathbf{X}\} = [\bar{\mathbf{K}}][\mathbf{T}]\{\mathbf{u}\} \quad (7-8)$$

从而可得:

$$\{X\} = [T]^{-1}[\bar{K}][T]\{u\} = [K]\{u\} \quad (7-9)$$

式中, $\{X\} = [X_1 \ Y_1 \ X_2 \ Y_2]^T$; $\{u\} = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2]^T$; $[K]$ 是整体坐标系下的刚度矩阵, 且

$$[K] = [T]^{-1}[\bar{K}][T] = \begin{pmatrix} \lambda^2 & & & \\ \lambda\mu & \mu^2 & & \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 & \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & \lambda\mu & \mu^2 \end{pmatrix} \quad (7-10)$$

接下来考虑如图 7-2 所示的一个典型单元。在其两端结

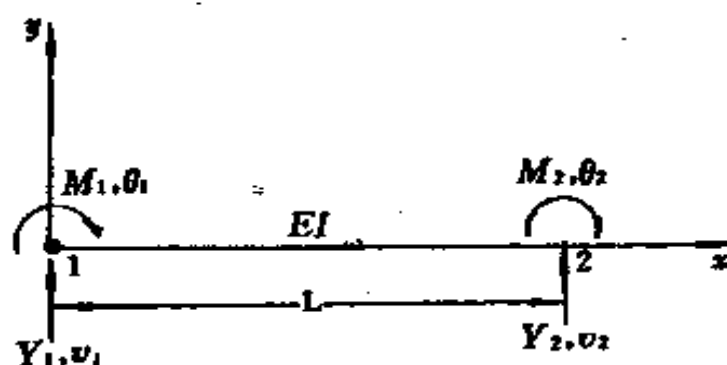


图 7-2 受有横向和弯曲荷载的梁单元

点上受有横向和弯曲荷载 Y , M , 并有相应位移 v , θ (图中各量都为正方向)。假定该单元的弯曲刚度 EI 沿其长度 L 均匀分布。在不计梁单元本身重量的条件下, 其刚度矩阵为:

$$[K] = EI \begin{pmatrix} 12/L^3 & & & \\ -6/L^3 & 4/L & & \\ -12/L^3 & 6/L^2 & 12/L^3 & \\ -6/L^2 & 2/L & 6/L^2 & 4/L \end{pmatrix} \quad \text{对称} \quad (7-11)$$

这里, 力矢量 $\{X\}^T = \{Y_1 \ M_1 \ Y_2 \ M_2\}$, 位移矢量 $\{u\}^T =$

$\{v_1, \theta_1, v_2, \theta_2\}$ 。

如果图 7-2 中的梁单元与水平方向有一夹角 α ，则在整体坐标系下，其刚度矩阵为：

$$[K] = EI \times$$

$$\begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} \mu^2 & -\frac{12}{L^3} \lambda \mu & \frac{6}{L^2} \mu & -\frac{12}{L^3} \mu^2 & \frac{12}{L^3} \lambda \mu & \frac{6}{L^2} \mu \\ -\frac{12}{L^3} \lambda \mu & \frac{12}{L^3} \lambda^2 & -\frac{6}{L^2} \lambda & \frac{12}{L^3} \lambda \mu & -\frac{12}{L^3} \lambda^2 & -\frac{6}{L^2} \lambda \\ \frac{6}{L^2} \mu & -\frac{6}{L^2} \lambda & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} \mu & \frac{6}{L^2} \lambda & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} \mu^2 & \frac{12}{L^3} \lambda \mu & -\frac{6}{L^2} \mu & \frac{12}{L^3} \mu^2 & -\frac{12}{L^3} \lambda \mu & \frac{6}{L^2} \mu \\ \frac{12}{L^3} \lambda \mu & -\frac{12}{L^3} \lambda^2 & \frac{6}{L^2} \lambda & -\frac{12}{L^3} \lambda \mu & \frac{12}{L^3} \lambda^2 & -\frac{6}{L^2} \lambda \\ \frac{6}{L^2} \mu & -\frac{6}{L^2} \lambda & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} \mu & \frac{6}{L^2} \lambda & \frac{4}{L} \end{bmatrix}$$

(7-12)

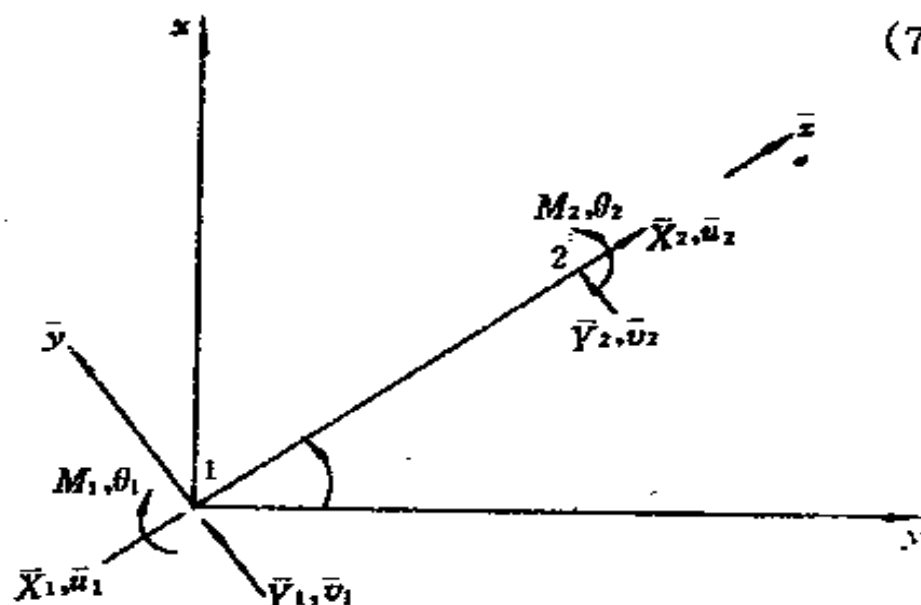


图 7-3 受有轴向、横向和弯曲力的任意梁单元

这里，力矢量 $\{X\} = [X_1 \ Y_1 \ M_1 \ X_2 \ Y_2 \ M_2]^T$ ，位移矢量 $\{u\} = [u_1 \ v_1 \ \theta_1 \ u_2 \ v_2 \ \theta_2]^T$ 。

最后，对于既有轴向力又有横向力和弯曲力矩的任意方向梁单元（见图 7-3），其刚度矩阵可由式（7-10）和式（7-12）迭加获得：

$$[K] = \frac{E}{L} \times \begin{pmatrix} A^2 + \frac{12I}{L^3} \mu^2 & & & & & \\ \left(A - \frac{12I}{L^3}\right) \lambda \mu & A\mu^2 + \frac{12I}{L^3} \lambda^2 & & & & \text{对 称} \\ \frac{6I}{L} \mu & -\frac{6I}{L} \lambda & 4I & & & \\ -\left(A\lambda^2 + \frac{12I}{L^3} \mu^2\right) & -\left(A - \frac{12I}{L^3}\right) \lambda \mu & -\frac{6I}{L} \mu & A\lambda^2 + \frac{12I}{L^3} \mu^2 & & \\ -\left(A - \frac{12I}{L^3}\right) \lambda \mu & -\left(A\mu^2 + \frac{12I}{L^3} \lambda^2\right) & \frac{6I}{L} \lambda & \left(A - \frac{12I}{L^3}\right) \mu \lambda & A\mu^2 + \frac{12I}{L^3} \lambda^2 & \\ \frac{6I}{L} \mu & -\frac{6I}{L} \lambda & 2I & -\frac{6I}{L} \mu & \frac{6I}{L} \lambda & 4I \end{pmatrix} \quad (7-13)$$

由单元刚度矩阵式（7-13），根据任一结点的力平衡条件（内力的总和必须等于外荷载的总和）以及变形连续条件，可以组合成结构的总刚度矩阵。然后根据外荷载和位移的边界支承条件，删去总刚度矩阵中与已知为零的结点位移对应的行和列，最后通过高斯消去法解结构的刚度方程，求出所有结点位移。再由每个单元的刚度方程和已知结点位移计算出杆（梁）内力，从而通过杆（梁）截面的几何尺寸确定其内应力。

上面所述的是解决一般结构问题所应遵循的步骤，但是对于近场岩体与其支护系统的相互作用问题，情况就不同

了。因为岩体与支护结构作用时，其外荷载或位移边界条件事先无从知道，所以只能根据支护结构与其周围岩体的作用条件求解。一般情况下，支护结构可用杆单元或梁单元来模拟，而近场岩体结构则用离散单元来模拟。将这两种单元耦合在一起的主要步骤是：

(1) 保证离散单元和结构单元在交界面上的力和位移连续；

(2) 计算支护结构的刚度矩阵，以确定支护系统的力和位移。

由于支护结构的有些单元结点是自由的，这些结点既不与岩石直接接触，也不受外荷载作用，因此可以消去它们，以减小刚度矩阵的阶数。具体可用分解矩阵法减小矩阵的阶数。设注有下标 B 的项表示自由结点项，则有：

$$\begin{pmatrix} k_{AA} & \vdots & k_{AB} \\ \dots\dots\dots & & \\ k_{BA} & \vdots & k_{BB} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ \vdots \\ u_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_A \\ \vdots \\ X_B \end{Bmatrix} \quad (7-14)$$

经分解后得：

$$\{X_A\} = [K_{AA}]\{u_A\} + [K_{AB}]\{u_B\} \quad (7-15)$$

$$\{X_B\} = [K_{BA}]\{u_A\} + [K_{BB}]\{u_B\} \quad (7-16)$$

由式(7-16)可得 $\{u_B\}$ 为：

$$\{u_B\} = [K_{BB}]^{-1}(\{X_B\} - [K_{BA}]\{u_A\}) \quad (7-17)$$

因为内力为零，所以上式中 $\{X_B\}$ 可以消去，即

$$\{u_B\} = -[K_{BB}]^{-1}[K_{BA}]\{u_A\} \quad (7-18)$$

再将式(7-18)代入式(7-15)，可得：

$$\{X_A\} = ([K_{AA}] - [K_{AB}][K_{BB}]^{-1}[K_{BA}])\{u_A\} \quad (7-19)$$

$$\text{或} \quad \{X_A\} = [K_R]\{u_A\} \quad (7-20)$$

式中, $[K_R]$ 是整理后的刚度矩阵, 其阶数显然取决于位于岩石与结构作用界面上的结点数。

在进行离散单元与结构单元耦合计算时, 首先进行离散单元计算, 以得到交界面上各接触点的位移, 然后根据位移连续条件把这些结点位移代入式(7-20), 计算支护结构的结点力, 最后将这些结点力反过来施加到离散单元上, 进行下一轮迭代, 如此往复。

这里需要指出的是, 结构单元的结点可以与离散单元的点重合, 也可与离散单元上的其他点耦合, 这些点实际上并不是它们之间的真正接触点, 仅表示计算点而已。另外, 内部支护单元只能传递压力, 当离散单元和结构单元之间存在拉力时, 接触力必须置零, 且此时的结点位移不能用于下一轮计算, 其解决的办法是降低这些点的界面接触刚度。

7.2.2 平面单元

前面介绍的一维单元适合于模拟开挖体周边的支护结构, 如衬砌等。但对于开挖体以外的连续体, 则需要用平面单元来模拟。

若有限单元法采用矩形单元 (见图 7-4), 则单元的结点位移 $\{u\}$ 与结点力 $\{X\}$ 具有如下关系:

$$\{X\} = [K]\{u\} \quad (7-21)$$

式中, 结点力列阵 $\{X\} = [X_i, Y_i, X_j, Y_j, X_m, Y_m, X_p, Y_p]^T$; 结点位移列阵 $\{u\} = [u_i, v_i, u_j, v_j, u_m, v_m, u_p, v_p]^T$; $[K]$ 是单元的刚度矩阵。若设 $[B]$ 是应变矩阵, $[D]$ 是弹性矩阵, S_e 是单元的面积, E 是单元的弹性模量, ν 是单元的泊松比,

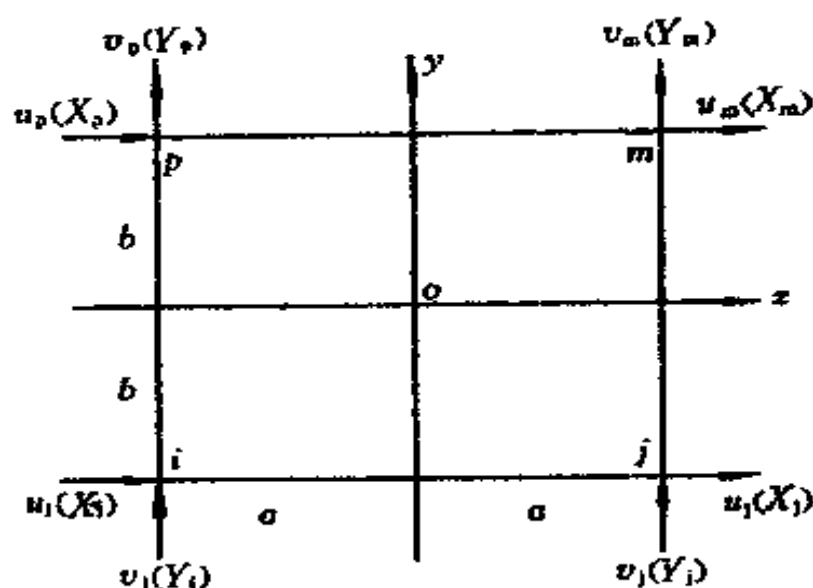


图 7-4 矩形单元

则对于平面应变问题有:

$$[K] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \quad (7-22)$$

且

$$[B] = \frac{1}{4ab} \begin{pmatrix} -(b-y) & 0 & (b-y) & 0 \\ 0 & -(a-x) & 0 & -(a+x) \\ -(a-x) & -(b-y) & -(a+x) & b-y \\ b+y & 0 & -(b+y) & 0 \\ 0 & a+x & 0 & a-x \\ a+x & b+y & a-x & -(b+y) \end{pmatrix}$$

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \text{对称} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{pmatrix}$$

一般情况下, 平面有限单元的结点在界面上应与离散单

元的角点重合。此时，由式(7-21)计算出的有限单元结点力，相对于离散单元来说是外载。在该外载作用下，离散单元产生位移。根据交界面上离散单元与有限单元的位移连续条件，离散单元的位移可以作为已知位移荷载矢量反施给有限单元，如此循环计算下去，直至得到满意的计算结果为止。具体计算步骤如下：

- (1) 当计算循环数 $n=0$ 时，时间 $t=0$ ；
- (2) 计算有限单元区域内连续体在荷载作用下的应力和位移；
- (3) 相对有限单元而言，可以把离散单元区域视为开挖区。离散单元的两个角点对应有限单元的一个结点，由步骤(2)计算出的结点力反向加到与其对应的两个离散单元形心上，各个单元所分配的结点力大小可按边长大小成比例分配；
- (4) 按离散单元计算公式求出交界面上的离散单元角点位移矢量；
- (5) 把离散单元在交界面上的角点位移矢量施加给有限单元作为已知量；
- (6) $n:=n+1$ ，转至步骤(2)继续计算。

7.3 离散单元法与边界单元法的耦合

当所研究的区域很大时，离散单元的数目要相应地增多，计算量也会随之增大。特别是对于无限域问题，离散单元不可能对整个区域都离散，因此，离散单元的应用受到了限制。实测表明，在一般情况下，远离开挖边界一定距离时，岩体可以看成是连续体，完全可以利用边界单元法模拟岩土工程中的无限域或半无限域的影响，以弥补离散单元计

算的不足。下面分别介绍离散单元法与静、动边界单元法的耦合原理。

7.3.1 与静弹性边界单元法的耦合

1. 静弹性边界单元法

静弹性边界单元法是基于线弹性理论中的 Betti 互等定理进行求解。对于同一区域 R ，考虑如下两种边值问题（见图 7-5）；第一种情况是所要求的边界条件，即边界 S 上

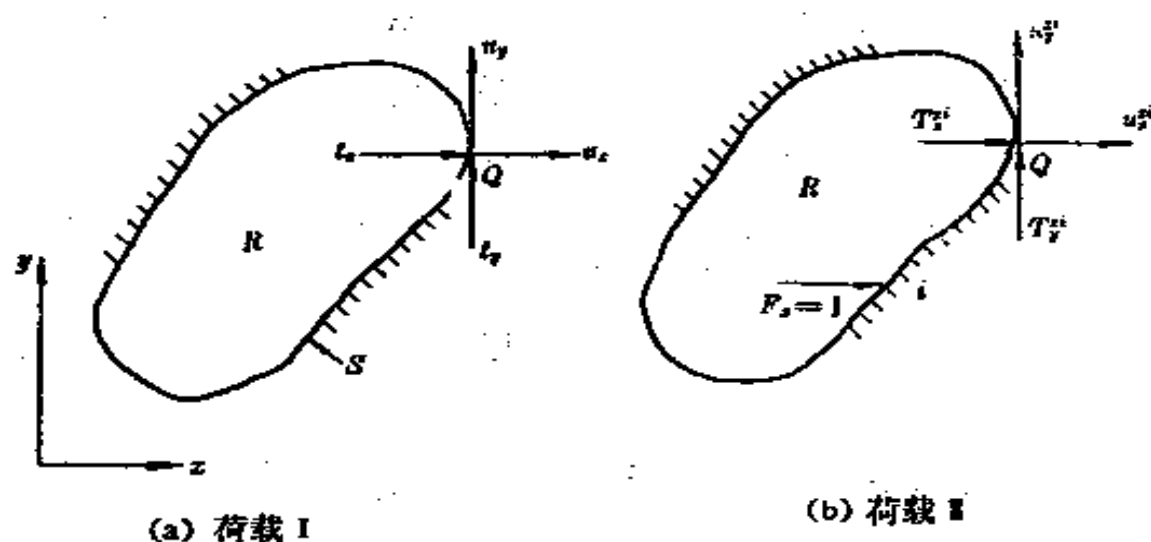


图 7-5 两种边值问题

的任意一点 Q 作用有牵引力 t_x, t_y 和位移 u_x, u_y ；第二种情况是在边界 S 上的 i 点作用有沿 x 方向的单位力，以及该单位力在边界 S 上的 Q 点产生牵引力 T_x^i, T_y^i 和位移 U_x^i, U_y^i 。第二种情况中的 T_x^i, T_y^i 和 U_x^i, U_y^i 是弹性体内作用有集中力时的基本解或称之为核函数，可以根据平面应变问题的 Kelvin 解求得。例如，在全平面内的 i 点 (x_i, y_i) 作用一集中线荷载时，域内任一点 (x_j, y_j) 处的位移为：

(1) 在 x 方向作用单位荷载时,

$$U_{z,j}^x = C_1(C_2 \ln r - x^2/r^2)$$

$$U_{r,j}^x = -C_1 xy/r^2$$

(2) 在 y 方向作用单位荷载时,

$$U_{z,j}^y = -C_1 xy/r^2$$

$$U_{r,j}^y = C_1(C_2 \ln r - y^2/r^2)$$

式中, $x = x_j - x_i$; $y = y_j - y_i$; $r^2 = x^2 + y^2$;

$C_1 = -1/[8\pi G(1-\nu)]$; $C_2 = -1/[4\pi(1-\nu)]$;

G 是剪切模量; ν 是泊松比。

对如图 7-5 所示的两个荷载系统应用 Betti 互等定理,

$$\text{有: } \int (T_{z,j}^x u_x + T_{r,j}^x u_r) ds = \int (t_x U_{z,j}^x + t_r U_{r,j}^x) ds \quad (7-23)$$

再将边界 s 分成 n 个单元, 上式可变成

$$\sum_{j=1}^n \int (T_{z,j}^x u_x + T_{r,j}^x u_r) ds = \sum_{j=1}^n \int (t_x U_{z,j}^x + t_r U_{r,j}^x) ds \quad (7-24)$$

式中, s_e 表示一个单元。

图 7-6 给出了边界 s 上的任意一个单元及其局部坐标系。单元上任意一点的坐标 x , 牵引力 t_x , t_r 和位移 u_x , u_r 都用这些变量的结点插值函数表示, 即

$$\left. \begin{aligned} x(\xi) &= N^1(\xi)x^1 + N^2(\xi)x^2 \\ t_x(\xi) &= N^1(\xi)t_x^1 + N^2(\xi)t_x^2 \\ u_x(\xi) &= N^1(\xi)u_x^1 + N^2(\xi)u_x^2 \end{aligned} \right\} \quad (7-25)$$

式中, $N^1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)$, $N^2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi)$, 而 x^1 , t_x^1

和 u_x^1 等分别表示结点的位置坐标、牵引力和位移。对于

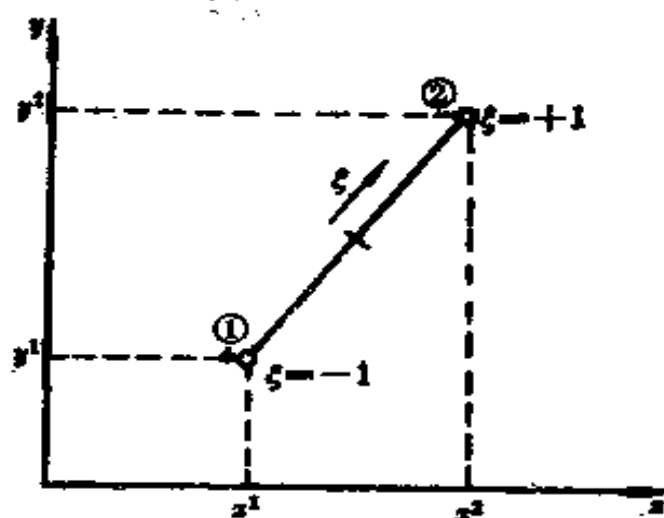


图 7-6 线性等参边界单元

$y(\xi)$, $t_r(\xi)$ 和 $u_r(\xi)$ 也有类似的表达式。

这样, 考虑具有结点 1, 2 的任一边界单元, 在其上进行如下积分:

$$\int_{\Gamma} T_{rs}^{*i} u_s ds = u_1^* \int_{-1}^1 T_{rs}^{*i} N^1(\xi) \frac{ds}{d\xi} d\xi + u_2^* \int_{-1}^1 T_{rs}^{*i} N^2(\xi) \frac{ds}{d\xi} d\xi \quad (7-26)$$

式中, $\frac{ds}{d\xi} = \left[\left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2 \right]^{1/2}$,

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{1}{2}(x^2 - x^1), \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{1}{2}(y^2 - y^1)$$

将式(7-25)等代入式(7-24), 按上式积分后可得:

$$\sum_{j=1}^n (T_{rs}^{*i} u_{sj} + T_{rs}^{*i} u_{sj}) = \sum_{j=1}^n (t_{xj} U_{sj}^{*i} + t_{yj} U_{sj}^{*i}) \quad (7-27)$$

式中, T_{rs}^{*i} , T_{rs}^{*i} 等表示核形函数积的积分结果。

同样，对于 y 方向的单位力也有类似的表达式：

$$\sum_{j=1}^n (T_{xzj}^i u_{xj} + T_{yzj}^i u_{yj}) = \sum_{j=1}^n (t_{xzj} U_{xzj}^i + t_{yzj} U_{yzj}^i) \quad (7-28)$$

把单位力施加于边界 s 上的所有结点 i ，可得 $2n$ 个形如式(7-27)和(7-28)的联立方程，写成矩阵形式为：

$$[T]\{u\} = [U]\{t\} \quad (7-29)$$

根据一定的边界条件，从方程(7-29)可解出边界上未知的牵引力和位移值。然而，对于离散单元和边界单元的耦合问题，边界单元的控制方程必须和离散单元的控制方程相容，即位移和力应连续，所以方程(7-29)中的牵引力 $\{t\}$ 需改成结点力 $\{q\}$ [10]。如图 7-7 所示，牵引力 $t_r(\xi)$ 沿单元线性

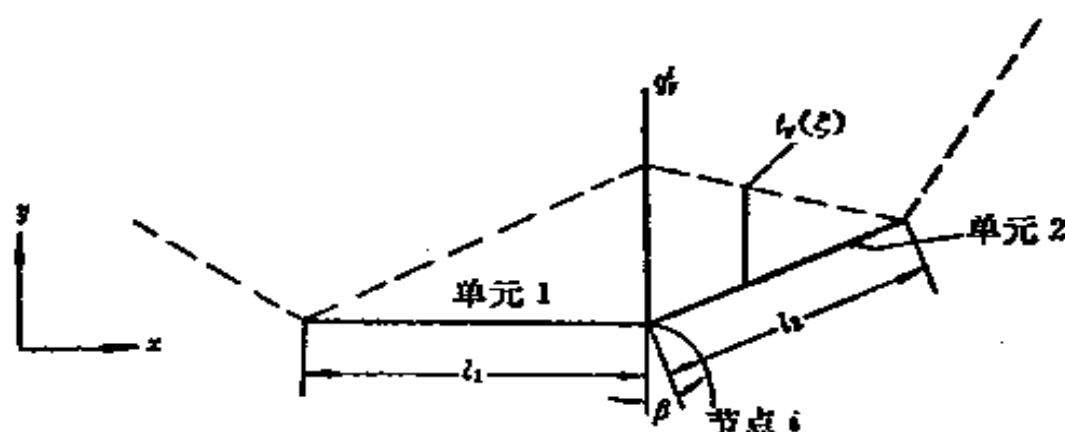


图 7-7 牵引力与结点力的关系

分布，结点 i 对应于两个离散单元的角，将牵引力沿两相邻单元积分，可得作用于结点 i 上的力 q_r^i ：

$$q_r^i = a' t_r^i(\xi) \quad (7-30)$$

式中， a' 是常系数，可直接由相邻单元的几何尺寸积分求出：

$$a' = \int_{-1}^1 (N^2(\xi))_i \left(\frac{ds}{d\xi} \right)_i d\xi +$$

$$+ \int_{-1}^1 (N'(\xi))_z \left(\frac{ds}{d\xi} \right)_z d\xi \quad (7-31)$$

这里, $\frac{ds}{d\xi} = \left[\left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{1}{2}(x^2 - x^1), \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{1}{2}(y^2 - y^1)$$

式中, 1, 2 分别表示单元 1 和单元 2。

同理, 用 t_z^i 可以求出 q_z^i :

$$q_z^i = a^i t_z^i(\xi) \quad (7-32)$$

需要指出的是, 在一般情况下, 用结点力代替牵引力会产生不平衡力矩。该力矩是否忽略取决于力矩的大小。Brady 认为当两个相邻单元的长度比小于 3 时, 对于边界单元的计算来说, 不会产生大的偏差, 可以不予考虑。对于离散单元的耦合计算, Lorig 认为, 当相邻单元长度之比达到 100 时, 解将出现不稳定现象, 边界单元计算公式中的偏差力矩不容忽略。

这样, 方程(7-29)变成:

$$[T]\{u\} = [U']\{q\} \quad (7-33)$$

式中, $[U']$ 是由 $[U]$ 的列除以每一结点 i 的系数 a^i 求得的。

把方程(7-33)整理成如下形式(考虑初始结点力 $\{q^0\}$):

$$\{q^i\} = [U']^{-1}[T]\{u\} + \{q^0\}$$

令 $[K_b] = [U']^{-1}[T]$, 则上式可变成:

$$\{q^i\} = [K_b]\{u\} + \{q^0\} \quad (7-34)$$

式中, $[K_b]$ 是边界单元计算所需要的刚度矩阵。

2. 离散单元与边界单元的耦合过程

如图 7-8 所示, 在无限弹性区域内镶嵌有离散单元。整

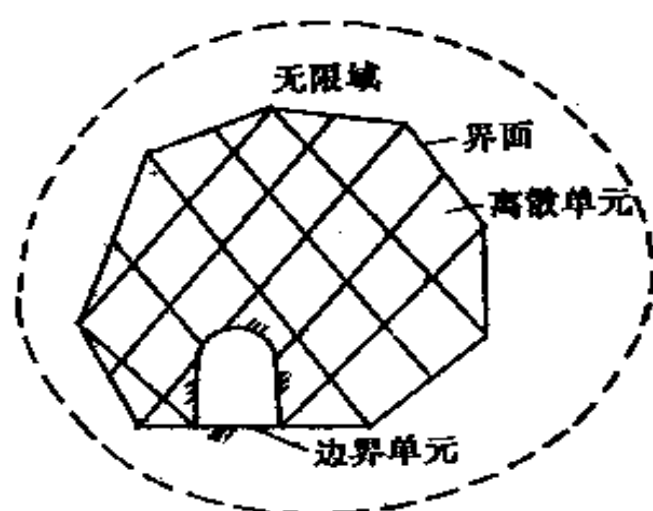


图 7-8 离散单元与边界单元耦合

个结构在开挖之前受到初始地应力作用，开挖使硐室表面的牵引力降为零。交界面的耦合条件为开挖后交界面的牵引力和位移应连续，不允许离散单元在交界面上滑移或分离。具体方法是：首先使边界单元的结点在交界面上与离散单元的角重合，保证几何相容。由于两个块体的角对应于边界单元的一个结点，边界单元的结点位移可以取这两个相邻块体的角位移的平均值，以保证运动相容。将式(7-34)计算出的结点力 $\{q'\}$ 反向施加到与其相连的两个块体上，由于牵引力沿边界单元呈线性分布，因此结点力 $\{q'\}$ 可根据边界单元的长度大小按比例地分配到相应的块体形心上，以保证交界面上力的平衡。

3. 消除刚体位移

在离散单元法与边界单元法耦合运算中，利用离散单元每次迭代所产生的位移计算交界面的边界单元结点力。但是，当在离散单元域内移走块体（模拟开挖）时，由于重力等因素的作用，在交界面上将产生不平衡力，该不平衡力会引起块体作刚体运动。因此，为了使迭代过程收敛，需要在

边界单元区域内有一相对固定点P，以消除离散单元区域的刚体位移。具体实施办法如下。

设位移矩阵 $\{u\}$ 中只有第 i 元素有单位位移，其他元素的位移为零。由式(7-34)可得相应边界单元的结点力矢量 $\{F^i\}$ ，它对应于刚度矩阵 $[K_b]$ 的第 i 列。这时，在P点所产生的位移沿 x 和 y 方向分别为 u_P^{xi} 和 v_P^{yi} 。然后，对每个结点沿 x 方向都给定一个单位位移，在P点求得相应位移 u_P^{xz} 和 u_P^{zy} 。此时，交界面上的力 $\{F^{xz}\}$ 可由刚度矩阵中每行奇数列的元素之和求得。类似地，对 y 方向也可得交界面力 $\{F^{yz}\}$ ，以及P点的位移 u_P^{yz} 和 v_P^{xz} 。

为了消除位移 u_P^{xi} 和 v_P^{yi} ，所有边界结点必须给定相同的位移 a_z^i 和 a_y^i 。根据上述条件，利用迭加原理可得P点位移为：

$$\left. \begin{aligned} u_P^i &= u_P^{xi} + a_z^i u_P^{xz} + a_y^i u_P^{zy} \\ v_P^i &= v_P^{yi} + a_z^i v_P^{yz} + a_y^i v_P^{xz} \end{aligned} \right\} \quad (7-35)$$

边界结点的总位移除 i 项需加单位位移外，有：

$$\left. \begin{aligned} u_b^i &= a_z^i \\ v_b^i &= a_y^i \end{aligned} \right\} \quad (7-36)$$

因此，固定点P相对于边界结点不动应满足如下条件：

$$\left. \begin{aligned} u_P^i - u_b^i &= 0 \\ v_P^i - v_b^i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-37)$$

将式(7-35)和(7-36)代入式(7-37)中可得：

$$\left. \begin{aligned} u_P^{xi} + a_z^i (u_P^{xz} - 1) + a_y^i u_P^{zy} &= 0 \\ v_P^{yi} + a_z^i v_P^{yz} + a_y^i (v_P^{xz} - 1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-38)$$

由上式可得 a_z^i 和 a_y^i 。从而可得交界面上的结点力：

$$\{F''\} = \{F'\} + a_z^i \{F''^z\} + a_r^i \{F''^r\} \quad (7-39)$$

式中, $\{F''\}$ 实际上是修改后的刚度矩阵的第 i 列。当 i 由 1 到 $2n$ 重复上述计算过程, 可得一个新的刚度矩阵 $\{K'_i\}$ 。由交界面位移和 P 点固定假设, 利用刚度矩阵 $\{K'_i\}$ 可得相应结点力。

对于一定的结点力 $\{q\}$, 分别利用 $\{K'_i\}$ 和 $\{K_s\}$ 计算结点位移, 两个位移之差就表示问题域的刚体位移。并且有:

$$\left. \begin{aligned} a_z &= \sum_{i=1}^{2n} a_z^i d_i \\ a_r &= \sum_{i=1}^{2n} a_r^i d_i \end{aligned} \right\} \quad (7-40)$$

式中, d_i 表示所产生的结点位移。

求边界单元域内的最终位移, 必须考虑式(7-40)所计算出的位移量, 但内部应力可不必修正。

一般来说, 固定点到交界面中心距离是交界面直径的 5—6 倍时, 计算结果的收敛性较好。

7.3.2 与动弹性边界单元法的耦合

解决准静问题, 可以用前面所讲的静弹性边界单元法。如果解动力问题, 则应该用动弹性边界单元法。动弹性边界单元和离散单元的耦合方法与静弹性情况相同, 下面只给出了动弹性边界单元法的基本方程^[70]。

1. 控制方程

一个均质弹性无限域 Ω 内的动力平衡方程为:

$$\sigma_{ij,j} + b_i - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad (7-41)$$

式中, σ_{ij} 是应力张量; b_i 是体力矢量; ρ 是密度; \ddot{u}_i 是加

速度矢量。

区域 Ω 的边界为 Γ ，并存在下列条件：

$$\mathbf{u}_i = \bar{\mathbf{u}}_i(t) \quad \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上} \quad (7-42)$$

$$\mathbf{P}_i = \bar{\mathbf{P}}_i(t) \quad \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上。} \quad (7-43)$$

式中， \mathbf{u}_i 是位移矢量； $\bar{\mathbf{u}}_i(t)$ 是外部施加的位移； \mathbf{P}_i 是牵引力矢量； $\bar{\mathbf{P}}_i(t)$ 是外部施加的牵引力； t 是时间； $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ 。

如果用 \mathbf{n}_j 表示边界的单位外法向矢量，则应力和牵引力之间存在如下关系：

$$\mathbf{P}_i = \sigma_{ij} \mathbf{n}_j \quad (7-44)$$

假定体积力 \mathbf{b}_i 不随时间而变化。由于问题是线性的，体积力可以加到动力项中。于是，式(7-41)变成：

$$\sigma_{ij,j} - \rho \ddot{\mathbf{u}}_i = 0 \quad (7-45)$$

式中的应力和位移都有动力效应。由 $\bar{\mathbf{u}}_i(t)$ 和 $\bar{\mathbf{P}}_i(t)$ 所施加的外部动荷载只限于边界上。

2. 积分公式

解动弹性问题，积分方程可以用 Betti-Rayleigh 动力互等定理建立，也可以用加权余量法建立。这里采用后一种方法。

用 U_{ki} 作权函数，式(7-45)的等价弱积分方程为：

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} - \rho \ddot{\mathbf{u}}_i) U_{ki} d\Omega = 0 \quad (7-46)$$

权函数 U_{ki} 取在无限域内作用一单位集中力时的奇异解，即 Kelvin 基本解。该静力问题可表示成：

$$\sigma_{kij,j}^* + \Delta_k(\Lambda) = 0 \quad (7-47)$$

式中，矢量 $\Delta_k(\Lambda)$ 的值除 A 点外皆为零，但在整个 Ω 区域

上的积分为 1。

由方程(7-46)可得:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} U_{ki} d\Omega - \rho \int_{\Omega} \ddot{u}_i U_{ki} d\Omega = 0 \quad (7-48)$$

利用 Somigliana 互等定理, 上式中的第一项可变成等价边界积分:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} U_{ki} d\Omega = & -C_{ki} u_i(A) - \int_{\Gamma} P_{ki} u_i d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma} U_{ki} P_i d\Gamma \end{aligned} \quad (7-49)$$

式中, C_{ki} 可根据点 A 到边界的位置唯一确定; P_{ki} 是对应于位移场 U_{ki} 的边界牵引力。

方程(7-48)的第二项积分中含有代表惯性力的未知加速度 \ddot{u}_i , 它可由位移求出。在区域 Ω 中的位移可由坐标函数 $f^j(x)$ 近似表示:

$$u_i(x, t) = \alpha_i^j(t) f^j(x) \quad (7-50)$$

式中, $\alpha_i^j(t)$ 是一组与时间有关的未知量, $j=1, 2, \dots, m$, m 是坐标函数的总个数。由此式可得加速度:

$$\ddot{u}_i(x, t) = \ddot{\alpha}_i^j(t) f^j(x) \quad (7-51)$$

将它代入式(7-48)中, 对惯性项积分有:

$$\int_{\Omega} \ddot{u}_i U_{ki} d\Omega = \ddot{\alpha}_i^j \int_{\Omega} f^j U_{ki} d\Omega \quad (7-52)$$

上式积分后为:

$$\ddot{\alpha}_i^j \int_{\Omega} f^j U_{ki} d\Omega = \ddot{\alpha}_i^j \left\{ -C_{ki} \phi_i^j - \int_{\Gamma} P_{ki} \phi_i^j d\Gamma + \right.$$

$$+ \int_{\Gamma} U_{ki} \eta_{li} d\Gamma \} \quad (7-53)$$

式中, ψ_{li}^j 是体积力 $\delta_{li} f^j$ (δ_{li} 是 Kronecker delta 记号) 所产生的位移场, 而 η_{li}^j 是边界上相应的牵引力。将式(7-49)和(7-53)代入式(7-48), 有:

$$\begin{aligned} C_{kij} u_i + \int_{\Gamma} P_{ki} u_i d\Gamma - \int_{\Gamma} U_{ki} P_i d\Gamma + \rho \left\{ C_{kij} \psi_{li}^j + \right. \\ \left. + \int_{\Gamma} P_{ki} \psi_{li}^j d\Gamma - \int_{\Gamma} U_{ki} \eta_{li}^j d\Gamma \right\} \ddot{\alpha}_i^j = 0 \end{aligned} \quad (7-54)$$

有了边界积分方程, 就可对它进行数值求解。

3. 边界的离散化

同静力边界单元法一样, 为了解方程(7-54), 必须先对边界进行离散化, 即将边界分成一定数量的单元(单元个数为 E_n), 求每个单元在结点上的未知量。

如果把基本解 U_{ki} 轮流加在每个结点上, 则由式(7-54)可得:

$$\begin{aligned} C_{kij}(A_n) u_i(A_n) - \int_{\Gamma} U_{ki}(A_n) P_i d\Gamma + \int_{\Gamma} P_{ki}(A_n) u_i d\Gamma \\ + \rho \left\{ C_{kij}(A_n) \psi_{li}^j(A_n) + \int_{\Gamma} P_{ki}(A_n) \psi_{li}^j d\Gamma - \right. \\ \left. - \int_{\Gamma} U_{ki}(A_n) \eta_{li}^j d\Gamma \right\} \ddot{\alpha}_i^j = 0 \end{aligned} \quad (7-55)$$

式中, A_n 表示第 n 个结点。

利用矩阵概念, 方程(7-55)可改写成更为紧凑的形式:

$$\begin{aligned}
& [C]_n \{u\}_n + \int_{\Gamma} [P]_n \{u\} d\Gamma - \int_{\Gamma} [U]_n \{P\} d\Gamma \\
& + \rho ([C]_n [\psi]_n^j + \int_{\Gamma} [P]_n [\psi]' d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} [U]_n [\eta]' d\Gamma) \{\ddot{\alpha}\}' = 0 \quad (7-56)
\end{aligned}$$

式中, $j = 1, 2, \dots, m$ 要遍历求和, 而 $n = 1, 2, \dots, m$ 不遍历求和。

用 $\{u\}_e$ 和 $\{P\}_e$ 分别表示第 e 个边界单元的位移矢量和牵引力矢量, 则边界的位移和牵引力可用插值函数 $[\phi]$ 来近似表示:

$$\{u\} = [\phi] \{u\}_e \quad (7-57)$$

$$\{P\} = [\phi] \{P\}_e \quad (7-58)$$

在式(7-56)中, 两个积分项中含有 ψ 和 η 函数, 它们都是在边界上定义的, 可以不用插值函数近似。但在后面将会看到, 如果也把它们像 u 和 P 那样表示, 将会极大地方便计算。即

$$[\psi]' = [\phi] [\psi]_e' \quad (7-59)$$

$$[\eta]' = [\phi] [\eta]_e' \quad (7-60)$$

将式(7-57)至(7-60)代入式(7-56), 可得到如下方程:

$$\begin{aligned}
& [C]_n \{u\}_n + [h]_{ne} \{u\}_e - [g]_{ne} + \\
& + \rho ([C]_n [\psi]_n^j + [h]_{ne} [\psi]_e^j - [g]_{ne} [\eta]_e^j) \{\ddot{\alpha}\}' = 0 \quad (7-61)
\end{aligned}$$

式中, $e = 1, 2, \dots, E_n$ 和 $j = 1, 2, \dots, m$ 要遍历求和, 但 $n = 1, 2, \dots, m$ 不遍历求和, 且

$$[g]_{ne} = \int_{\Gamma_e} [U]_n [\phi] d\Gamma \quad (7-62)$$

$$[h]_{ee} = \int_{\Gamma_e} [P]_e [\phi] d\Gamma \quad (7-63)$$

这里, Γ_e 表示属于单元 e 的那部分边界。

把式(7-61)组合成一个矩阵, 有如下形式:

$$[H]\{u\} - [G]\{P\} + \rho([H][\psi] - [G][\eta])\{\ddot{\alpha}\} = 0 \quad (7-64)$$

式中, 矩阵 $[H]$ 包含有 $[C]_e$ 对角矩阵。

上式中有 u 和 α 两个基本量, 可把 $\ddot{\alpha}$ 用 u 来表示。对于任一结点 A_n , 由式(7-51)可得:

$$\ddot{u}_i(A_n, t) = f^j(A_n) \ddot{\alpha}_j^i(t) \quad (7-65)$$

$$\text{或} \quad \ddot{u}_{in}(t) = f^j(A_n) \ddot{\alpha}_j^i(t) \quad (7-66)$$

式中, \ddot{u}_{in} 是结点 n 在 i 方向上的加速度。对每个边界结点都应用式(7-66), 可得 \ddot{u} 和 $\ddot{\alpha}$ 之间的变换矩阵方程为:

$$\{\ddot{u}\} = [F] \{\ddot{\alpha}\} \quad (7-67)$$

现选择一组线性独立的坐标函数 $f^j(x)$, 其个数等于结点数。在假定矩阵 $[F]$ 是正交的并有逆矩阵 $[E] = [F]^{-1}$ 的条件下, 有:

$$\{\ddot{\alpha}\} = [E] \{\ddot{u}\} \quad (7-68)$$

利用式(7-68), 质量矩阵可表示为:

$$[M] = \rho([H][\psi] - [G][\eta])[E] \quad (7-69)$$

将其代入式(7-64), 有:

$$[H]\{u\} + [M]\{\ddot{u}\} = [G]\{P\} \quad (7-70)$$

上式给出的是一组常微分方程, 已有很多求解方法。

8 前处理器与后处理器

8.1 概 述

数值计算程序是否完善的一个重要标志就是它是否具有前处理器与后处理器。所谓前处理器，是指用来准备、检查和修改输入数据的程序，可以使用户缩短解题时间。所谓后处理器，是指用来分析和显示计算结果的程序，能够使用户一目了然地知道结果是否合理。相对于计算求解部分而言，前后处理器虽然是服务性质的，但它们的重要性是不言而喻的。对于离散单元法来说，前后处理器显得尤为重要，这也正是离散单元法程序的显著特色之一。

本章共分3节。8.2节主要论述前处理器中的单元生成问题，而将其图形部分归入第二节。8.3节着重介绍目前比较常用的几种计算机图形软件，并给出了它们在离散单元法前后处理器中应用的几个程序。

8.2 离散单元法的单元生成

在一定条件下，离散单元可按照一定的规律随机产生。例如，用离散单元法模拟因开采所引起的层状岩体的移动问题时，虽然主节理的方向是一定的，但其长度和次节理的方向、长度等是随机变量。再如，用离散单元法研究散体介质的力学特性时，颗粒的分布也可以看成是随机的。由于随机

变量大多是用随机数表示的，因此在给出单元的生成公式前，首先介绍下随机数的生成方法。

8.2.1 随机数的生成和检验

1. 随机数的生成方法及计算程序

如上所述，离散单元法计算中很多变量都是随机的，这就要求运用一定的方法产生源于 $u(0,1)$ 均匀分布的随机数。

随机数的研究经历了漫长的发展历程，已经有很多种获得随机数的方法。现列举如下：

(1) 手工方法。如掷骰子、旋转赌轮和抽签等等。该方法的效率很低。

(2) 随机数表。如美国 Rand 公司 1955 年制作的百万随机数表。这种方法需要占有大量内存和消耗大量输入时间。

(3) 电子随机数预报器 (ERNIE)。英国总邮局曾应用 ERNIE 去确定储蓄彩券的中彩者。这种方法的缺点是不能重复获得随机数序列。

(4) 数字电子计算机法。随着现代科学技术的发展，尤其是电子计算机的出现，上述方法逐渐被淘汰，而让位于数字电子计算机法。这种方法是采用一定的随机数生成函数，应用电子计算机生成符号规定要求的 $u(0,1)$ 均匀分布随机数。

一般说来，产生随机数的数学方法（生成函数）应满足如下要求。首先，它所产生的随机数序列应均匀分布在 $[0,1]$ 区间；其次，序列之间应无相关性。此外，还要求其序列重复周期足够长，在计算机上产生的速度快，占用的内存空间少，具有完全可重复性等。显然，用数学方法在计算机上以

完全确定的规律产生的随机数并不是真正的随机数。但是，只要这种随机数序列能通过一定数量的检验，就可以认为它们是随机的。为了与真正的随机数相区别，常将这种用数学方法产生的随机数称为伪随机数，简称随机数。

常用的生成随机数的电子计算机法有：

(1) 中间平方法。这种方法首先假设随机数序列的种子值，求此种子值的平方，然后取此平方值中间部分为第二个随机数，再求第二个随机数的平方，取此平方值的中间部分为第三个随机数。照此办法重复下去，即可获得随机数序列。

用这种方法所产生的随机数统计性不好，具有很强的退化趋势。一旦初值选取不当，随机数就变为零值，从而使以后的随机数也为零值。此外，该方法的计算速度很慢。

(2) 中间乘积法。这种方法类似于中间平方法，但其后随机数乘以某一个常数，然后再取中间部分而得到。这种方法比中间平方法的周期长，均匀性好，但仍具有退化趋势。

(3) 线性同余法 (LCG)。线性同余法是 Lehmer 于 1949 年提出的。由于它的算法简单，易懂，容易实现，并且所产生的均匀随机数统计性能好，因此，线性同余法是目前应用最广泛的产生均匀随机数的数学方法。它包括乘同余法和混合同余法两种。乘同余法的迭代公式为：

$$x_i = (ax_{i-1}) \pmod{m} \quad (8-1)$$

1961 年，Greenberger 将它推广为：

$$x_i = (ax_{i-1} + c) \pmod{m} \quad (8-2)$$

称之为混合同余法。在式(8-1)和式(8-2)中， a 为非负的乘子； c 为非负的增量； m 为模； \pmod{m} 表示除以 m 后取其余数，并称之为按模 m 的同余式。

若给定初值 x_0 ，按照式(8-1)和式(8-2)，可迭代算出均匀随机数 x_1, x_2, \dots, x_n ，再将它们除以 m 进行正规化，即可得到 $[0, 1]$ 区间上均匀分布的随机数 r_i ：

$$r_i = x_i / m \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8-3)$$

用线性同余法产生的随机整数是模 m 的余数，因此它小于 m ，即有

$$0 \leq x_i < m \quad (8-4)$$

显然， x_i 取值范围为 $0 \sim m-1$ ，而且最多只能有 m 个不同的取值。亦即 x_i 有周期性，其重复周期(T)为：

$$T \leq m \quad (8-5)$$

如果 $T = m$ ，则说 LCG 具有完全周期。因此，为了保证得到足够多的不重复随机数，就应将 m 选取得尽可能大，同时也应合理地选取参数 a ， c 和 x_0 ，使一个周期内尽可能有 m 个随机数产生。由于计算机采用二进制数运算，所以，当模 $m = 2^k$ (k 为计算机整数尾部字长) 时，在计算机上实现乘同余法最为简便。可以证明，这时若取 x_0 为奇素数，乘子 a 取 $8l+3$ 或 $8l+5$ (l 为正整数)，则模为 2^k 的乘同余法产生的均匀随机数的最大周期为 2^{k-2} 。

x_i 与 x_{i+1} 的相关系数 ρ 为：

$$\rho = \frac{1}{a} \pm \frac{a}{m} \quad (8-6)$$

一般取 $m \approx 2^{30}$ ， $a = 5^{11}$ ，可得 $\rho = 0.0455$ ，从统计上说 x_i 和 x_{i+1} 是独立的。对此问题在后面还将介绍。

下面是离散单元法中用线性同余法产生随机数的两个实用程序，供大家参考。这里所讲的随机数都在 $[0, 1]$ 区间上。

```

      FUNCTION RANDU(SEED)
C
C .....0.0<SEED<1.0.....
C
      LOGICAL IFLAG
      INTEGER*4 ISEED,IOLD,IMOD,IVAL
      DATA IFLAG,IMOD/,FALSE.,524288/
C
      IF(IFLAG) GOTO 10
      ISEED=IFIX(SEED*65536)
      IOLD=ISEED*2+557
      IFLAG=.TRUE.
10  IVAL=3125*IOLD
      IOLD=MOD(IVAL,IMOD)
      RANDU=FLOAT(IOLD)/FLOAT(IMOD)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE RANDU(IX,IY,YFL)
C
C .....IX=2379.....
C
      IY=IX*65539
      IF(IY) 5,6,6
5   IY=IY+2147483647+1
6   YFL=IY
      YFL=YFL*0.4656612873E-9
      IX=IY
      RETURN
      END

```

2. 随机数的检验

在运用前述方法获得一定的随机数序列之后,有必要检验它的统计特性——独立性和均匀性。

(1) 独立性检验。设给定一个容量为 N 的均匀随机数样本: r_1, r_2, \dots, r_N , 其样本自相关函数为:

$$\begin{aligned}\rho_\tau &= \frac{1}{S^2(N-\tau)} \sum_{i=1}^{N-\tau} (r_i - \bar{r})(r_{i+\tau} - \bar{r}) \\ &= \frac{1}{S^2(N-\tau)} \sum_{i=1}^{N-\tau} r_i r_{i+\tau} - (\bar{r})^2\end{aligned}\quad (8-7)$$

式中, \bar{r} 和 S^2 分别为样本均值和样本方差, τ 为时滞。当 N 足够大, 且 $N - \tau > 50$ 时, 则统计量

$$u_\tau = \sqrt{N - \tau} \rho_\tau \approx \rho_\tau / \sqrt{N} \quad (8-8)$$

渐近服从标准正态分布。若取显著水平 $\alpha = 0.05$, 则当 $|u_\tau| < 1.96$ 时, 可以认为相关函数 ρ_τ 与零无显著差别, 即随机数 r_i 与 $r_{i+\tau}$ 之间不相关。

在实际检验工作中, 通常取前 20 个相关函数 ($\tau = 1, 2, \dots, 20$), 若它们当中至多只有一个相关函数与零有显著差别, 则可在显著水平为 0.05 下接受随机数不相关的假设。

(2) 均匀性检验。设在一次计算机运算中, 获得 n 个 u (0,1) 均匀分布的随机数 u_1, u_2, \dots, u_n , 并且将 (0,1) 单位区间划分为 k 个长度相等的子区间。一般说来, k 应不小于 100, n/k 应不小于 5。在均匀性假设条件下, 某个随机数 u_l ($1 \leq l \leq n$) 属于某个特定子区间的概率为 $1/k$, 并且各子区间包含的随机数个数的期望值为 n/k 。

令 M_i ($i = 1, 2, \dots, k$) 为第 i 个子区间的经验随机数频数, 即随机数 u_l 的数目, 则对于独立的均匀分布随机变量

序列 $\{u_i\}$ ，下述统计量

$$\chi^2 = \frac{k}{n} \sum_{i=1}^k \left(M_i - \frac{n}{k} \right)^2 \quad (8-9)$$

在 n 足够大时，将渐近服从 $\chi^2(k-1)$ 分布。

在独立性和均匀性的假设下，期望式子

$$\text{Prob}[\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha, k-1}] = 1 - \alpha \quad (8-10)$$

式中， α 为选择的临界值（可取 $\alpha = 0.05$ ）； $\chi^2_{1-\alpha, k-1}$ 为自由度等于 $(k-1)$ 、具有 $(1-\alpha)$ 概率的 χ^2 分布的上界点。

在样本数足够大时， χ^2 分布的均值为 $k-1$ ，方差为 $2(k-1)$ 。当 k 足够大时， $[\chi^2 - (k-1)]/\sqrt{2(k-1)}$ 具有均值为零，方差为 1 的标准正态分布 $N(0, 1)$ ，亦即

$$\text{Prob}\left[\left|\frac{\chi^2 - (k-1)}{\sqrt{2(k-1)}}\right| < Z_{1-\alpha/2}\right] \approx 1 - \alpha \quad (8-11)$$

式中， $Z_{1-\alpha/2}$ 为标准正态分布的 $1-\alpha/2$ 概率点数值，在既定 α 值的情况下，可由查表确定。

当 $(k-1) \leq 100$ 时， $\chi^2_{1-\alpha, k-1}$ 之值可由查表获得。当 k 值相当大时，可由下式求得 $\chi^2_{1-\alpha, k-1}$ 的近似值：

$$\chi^2_{1-\alpha, k-1} \approx (k-1) \left\{ 1 - \frac{2}{9(k-1)} + Z_{1-\alpha} \left[\frac{2}{9(k-1)} \right]^{1/2} \right\}^3 \quad (8-12)$$

根据实际计算所得的随机数序列，计算其 χ^2 数值，将它与 $\chi^2_{1-\alpha, k-1}$ 比较，若

$$\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha, k-1} \quad (8-13)$$

则接受随机数序列 U_i 为 $U(0,1)$ 均匀分布的假设；否则，拒绝这个假设。

通过检验可以知道，上面介绍的两个随机数生成程序均

满足独立性和均匀性要求。

8.2.2 多边形单元的生成

首先给定离散单元的生成区域，并假定各个单元形状都是四边形。设水平方向为 X 方向，其最大尺寸为 X_{max} ；垂直方向为 Y 方向，其最大尺寸为 Y_{max} ；单元 i 的形心坐标为 (CX_i, CY_i) 。显然有

$$\begin{aligned} 0.0 &\leq CX_i \leq X_{max} \\ 0.0 &\leq CY_i \leq Y_{max} \end{aligned} \quad (8-14)$$

又设，主节理的平均倾角为 α ，间距为 $2A$ ；次节理的平均倾角为 β ，间距为 $2B$ （见图8-1）。从图中不难看出，单元 i 与单元 $(i-1)$ 的形心坐标有如下关系：

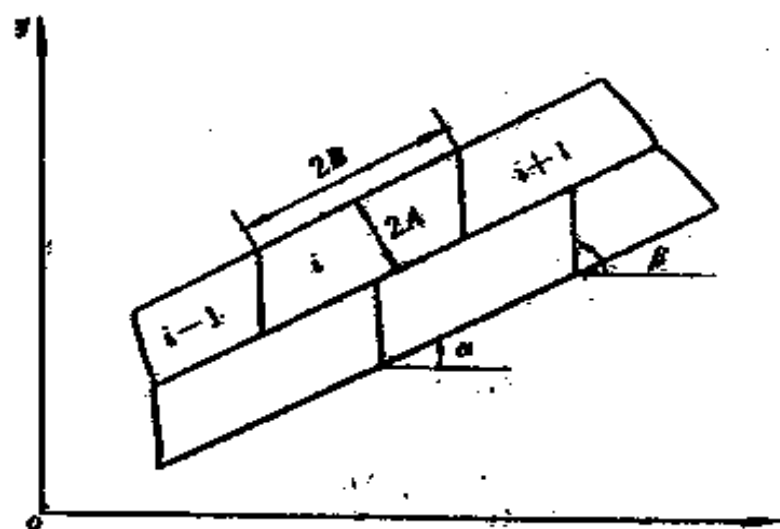


图 8-1 节理生成示意

$$\begin{aligned} CX_i &= CX_{i-1} + 2B \cos \alpha \\ CY_i &= CY_{i-1} + 2B \sin \alpha \end{aligned} \quad (8-15)$$

参照图 8-2，设 $BC = B \cos \alpha$ ， $BS = B \sin \alpha$ ， $AC = A \cos \alpha$ ， $AS = A \sin \alpha$ ，能够求出四边形各角点的坐标为：

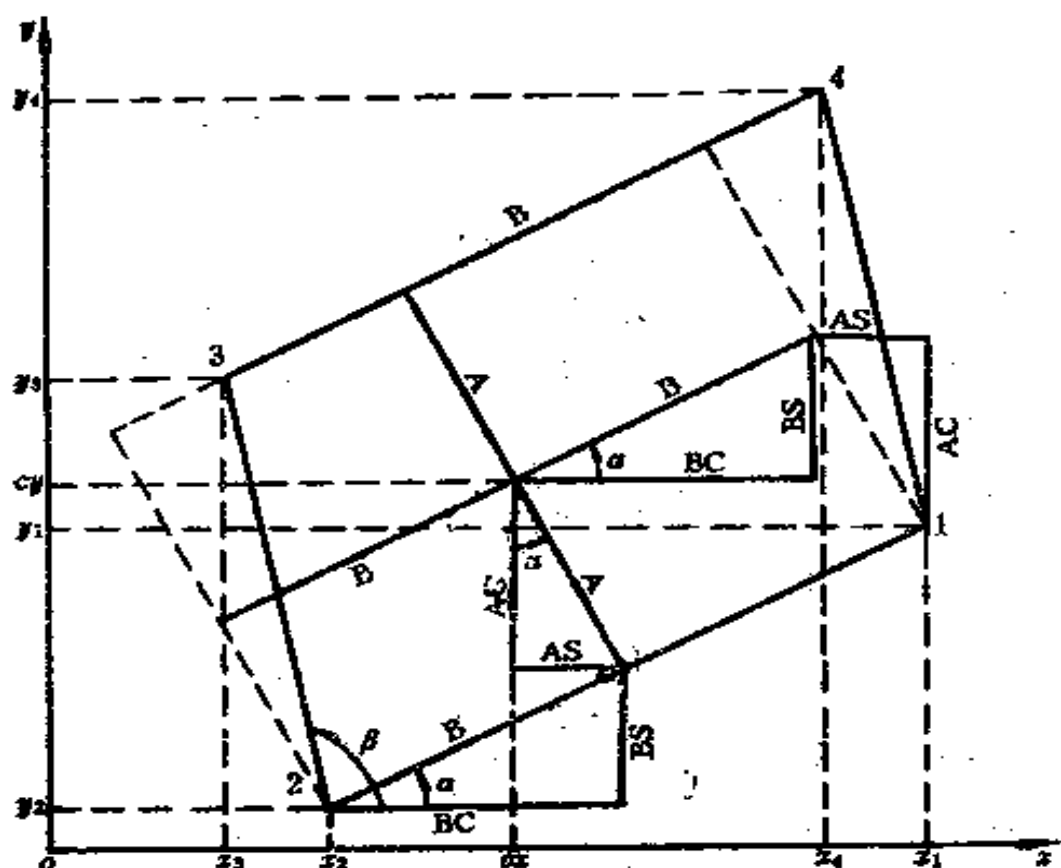


图 8-2 角点与形心的几何关系

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= CX + BC + AS \\ Y_1 &= CY + BS - AC \end{aligned} \right\} \quad (8-16)$$

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= CX + AS - BC \\ Y_2 &= CY - AC - BS \end{aligned} \right\} \quad (8-17)$$

$$\left. \begin{aligned} X_3 &= X_2 + 2A \cos \beta / \sin(\beta - \alpha) \\ Y_3 &= Y_2 + 2A \sin \beta / \sin(\beta - \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (8-18)$$

$$\left. \begin{aligned} X_4 &= X_1 + 2A \cos \beta / \sin(\beta - \alpha) \\ Y_4 &= Y_1 + 2A \sin \beta / \sin(\beta - \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (8-19)$$

为了能够反映次节理方向的随机性，可以在角 β 上加减一个很小的随机角 $\Delta\beta$ ：

$$\Delta\beta = (0.5 - \text{Rand})\theta \quad (8-20)$$

式中, Rand 是随机数; θ 是一个很小的角限 (可取 5°)。

8.2.3 圆形单元的随机生成

首先给出所研究问题的边界范围和各种尺寸单元的比例级配。不同大小的单元可以有不同的物理力学性质, 如摩擦系数、密度和刚度系数等。单元的生成顺序是由大到小排列。单元的位置由两个随机数定义:

$$\begin{cases} x = X_{\min} + (X_{\max} - X_{\min}) \text{Rand} \\ y = Y_{\min} + (Y_{\max} - Y_{\min}) \text{Rand} \end{cases} \quad (8-21)$$

式中, (x, y) 是单元形心坐标; X_{\min} , X_{\max} 分别是边界在 x 方向的最小和最大值; Y_{\min} , Y_{\max} 分别是边界在 y 方向的最小和最大值; Rand 是随机数。

当生成的单元没有跟其他单元或边界重合甚至超出边界时, 该单元的所有指针和链表随即产生。当单元与其他单元或边界重合时, 应移位, 最多可移动 6 次, 每次移动量等于重合量, 移动方向与重合方向相反。如果移动 6 次后仍然与其他单元或边界重合, 就应放弃这个位置, 再重新产生两个随机数来确定这个单元位置。

按照这个思想, 也可以随机地产生任意多边形单元。具体方法是:

(1) 根据任意多边形单元的最大几何尺寸级配, 随机地产生相同数量的圆形单元。

(2) 作圆的内接多边形。如图 8-3 所示, 多边形的随机性可由各边

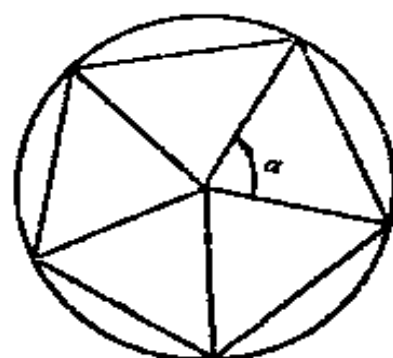


图 8-3 圆的内接多边形

所对应的圆心角的随机性来反映。如设圆心角的平均值为 α ，其随机偏角可由式(8-20)计算。

8.3 离散单元法的计算机图形处理

用离散单元法进行计算时，输入数据及其检查，以及对计算结果的整理和分析等是一项非常繁杂的工作，但计算机图形学为解决此问题开辟了一条有效的途径。

离散单元法的计算机图形处理系统如图 8-4 所示。下面介绍几种绘图软件及其编程方法。

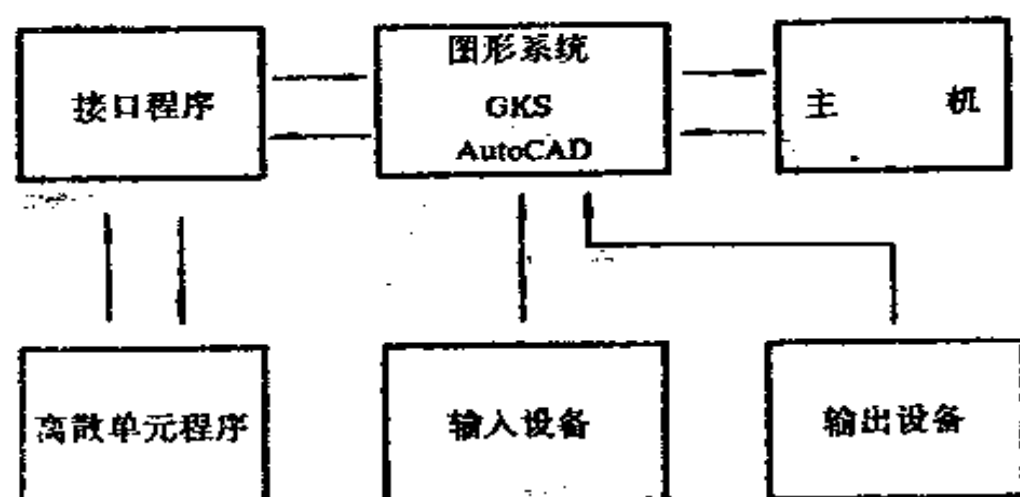


图 8-4 离散单元法的计算机图形处理系统

8.3.1 利用 AutoCAD 进行图形处理

1. AutoCAD 的基本功能

AutoCAD 是美国 Autodesk 公司推出的用于微机上的计算机辅助绘图与设计软件包，现已在艺术绘画、数学、建筑和机械零件制图等方面得到了广泛的应用，从而减轻了繁重的人工劳动，提高了经济效益。现将 AutoCAD

的主要功能介绍如下。

AutoCAD 的最基本功能是在 CRT 屏幕上画出或删除字符和图形。这种在屏幕上画出图形、写出字符、且可按照操作者指令来改变其内容的数据处理方式，称为图形处理。

一个图形无论怎样复杂，都是由点、线或字符等组成的。这些构成图形的基本单位称为图形元。最基本的图形元分为以下 4 种：

(1) 点(POINT)。给定点的坐标 (x, y) ，即可在屏幕上画出此点，并用符号“+”表示。

(2) 直线段(LINE)。给出线段两端点的坐标 $P_0(x_0, y_0)$ ， $P_1(x_1, y_1)$ 即可画出此线。由于在实用中有实线、虚线及点划线等，故应由相应的代码来区别。

(3) 圆(CIRCLE)。可由输入圆心坐标 (x, y) 和半径 r 等多种方式画出。

(4) 字符(TEXT)。应输入文字的起点位置坐标 (x, y) 、高度 H 和倾角 θ 等。

以上各括号中的字符就是绘图的输入命令。例如，打入 CIRCLE 后，AutoCAD 就执行 CIRCLE 画圆程序，这时在屏幕上出现一些提示，用户给出圆心坐标和半径，即可在屏幕上画出一个圆。

2. AutoCAD 与高级语言的联接

AutoCAD 本身只是功能很强的图形编辑程序，其计算功能是较弱的，但它能为用户提供几种数据格式，以便高级语言能够处理。

AutoCAD 与高级语言联接时可以采用图形交换文件(.DXF)和命令文件(.SCR)两种形式，通过打入 DXFO-

UT 命令可以将 AutoCAD 的内部图形数据库转换为图形交换文件 (.DXF)，然后由高级语言来读取它。经高级语言处理后可以形成新的图形交换文件 (.DXF)，若想送回 AutoCAD 中生成新图形，需发出 DXFIN 命令把它转换为内部图形数据文件 (.DWG)。

图形交换文件(.DXF)包括 5 个组成部分：①标题段；②表段；③块段；④实体段；⑤文件结束标志。其中，实体段是主要部分，其他部分是次要的，除结束标志外，它们可有可无，可以根据需要对它们进行取舍。

下面是一个画四边形的图形交换文件，离散单元法中的四边形单元就是用它画出的。为了节省篇幅，这里仅给出了实体段和文件结束标志。

0	0
SECTION	LINE
2	8
ENTITIES	0
0	10
LINE	1.5
8	11
0	3.0
10	20
1.1	3.5
11	21
1.0	3.0
20	0
1.5	LINE
21	8
3.0	0

10	20
1.5	3.5
11	21
3.0	1.0
20	0
3.5	ENDSEC
21	0
3.0	EOF
0	10
LINE	3.5
8	11
0	3.0

由此图形交换文件画出的图形，是角点坐标分别为 (1.1, 1.0), (1.5, 3.0), (3.5, 3.0), (3.5, 1.0) 的四边形。

上述图形用命令文件编写会更为紧凑，计算速度也会更快。该四边形的命令文件可以写成如下形式：

```
PLINE
1.1, 1.0 1.5, 3.0 3.5, 3.0 3.5, 1.0 1.1, 1.0
END
```

反过来，任何一个图形通过 SCRIPT 命令，都能够写成命令文件(.SCR)。

从以上介绍中不难看出，交换文件(.DXF)结构复杂，若用户想通过编写交换文件来绘制比较复杂的图形，则是非常困难的。因此，接口程序最好采用命令文件(.SCR)的格式编写，以节省外存。当然，还可以用块 (BLOCK) 和形 (SHAPE) 命令的方法建立图形库来绘图。

3. 用 AutoCAD 处理离散单元法的图形

由于 AutoCAD 为高级语言 (如 FORTRAN,

BASIC 和C语言等)提供了接口(图形交换文件和命令文件等),因此,为由 FORTRAN 语言编写的离散单元法程序利用它创造了有利条件。

对于不太复杂的多边形单元,可以采用前述的算法自动生成,但还不能找出统一的计算公式生成不规则单元。解决的途径一是完全用手工由键盘输入数据文件,这是通常所用的方法;二是根据计算者的要求,可以在屏幕上用光笔或键盘划分单元,然后形成内部图形数据文件(.DWG),再通过 DXFOUT 命令或 SCRIPT 命令把它转换成图形交换文件(.DXF)或命令文件(.SCR),以供离散单元法程序读取。以图形的形式产生单元,能够使人一目了然地看出输入数据是否合理。

Auto CAD 除了用于生成单元外,还可以用于数据处理的结果的处理方面,而且后者显得尤为重要。因为离散单元法的每个单元都有很多数据,若结果都以数据的形式进行整理和分析,则是一项十分繁重的工作。然而,借助于 AutoCAD 将结果(如运动形态、力场和速度场等)以图的形式给出,则容易分析,也容易使人接受。例如,作力场图,只需发 SCRIPT 命令,然后给出已生成的命令文件名 FORCE.SCR,即可在屏幕上画出力场分布图。

4. Auto CAD 的优缺点

Auto CAD 具有如下优点:

(1) 使用灵活、方便。用户可以根据要求随意地调整绘图比例,而不需重新运行原程序。对图形的文字说明,可以在编写程序时写入,也可以直接在屏幕上写。字型 and 线型可任意定义。

(2) 设备接口多。可以对图形进行打印,也可以由绘图

仪画出。

(3) 窗口功能强。AutoCAD 根据用户的指令, 可以对图形的任何部分进行放大或打印机打印等。

(4) 具有动态功能。AutoCAD 为用户提供了幻灯功能 (SLIDE)。例如, 把放矿过程按时间顺序做成幻灯片, 可以连续动态地模拟整个放矿过程中岩石的几何形态变化、力场变化和速度场变化等, 使人有身临其境之感。

AutoCAD 的主要缺点是其图形交换文件所需的外存大, 且编写程序较繁等。

8.3.2 利用 GKS 进行图形处理

GKS 于 1982 年被国际标准化组织 ISO 定为国际标准后, 我国很多单位采用 GKS 标准来研制图形软件。下面介绍一下 GKS 在离散单元法图形处理中用到的主要功能, 并给出相应的程序。

GKS 的主要特点是它能在大多数的程序语言、操作系统和图形设备的支持下实现 GKS 的功能。在 GKS 中, 图形也是由一些基本图形元构成的。离散单元法图形处理中所用的主要图形元是多段线, 它通过调用下列函数实现:

`GKS$POLYLINE (N, XPTS, YPTS)`

其中, N 表示多段线由 N 个点连接而成; XPTS, YPTS 表示由 N 个点组成的数组, 即从 (XPTS(1), YPTS(1)) 到 (XPTS(N), YPTS(N))。

在使用 GKS 前, 必须对 GKS 进行初始化, 以使 GKS 的函数能被调用。其一般调用格式为:

`GKS$OPEN GKS (EF)`

其中参数 EF 指定一个文件名, 用来存放错误信息。

使用 GKS 时，程序必须指出它所要用的工作站、工作站的类型以及如何与计算机连接等。其调用函数为：

GKS\$OPEN__WS (WS, CONNECTID, WSTYP)

其中，WS 是工作站标识；CONNECTID 是操作系统和工作站通讯所用的通道；WSTYP 定义工作站的类型。

为了使工作站活动，能够接受输出，需要调用下列函数：

GKS\$ACTIVATE__WS (WS)

在用完此工作站后，可使之不活动，需要调用函数：

GKS\$DEACTIVATE__WS (WS)

在用完 GKS 后，需关闭 GKS，其调用格式为：

GKS\$CLOSE__GKS ()

下面是在 Vax3100 工作站上实现的离散单元法 GKS 绘图程序。

```
PROGRAM DRAW
C
C      IMPLICIT NONE
      INCLUDE 'SYS$LIBRARY:GKSDEFS.FOR
      INTEGER NUM,WS__ID,WS__PRINTER,'
      •      NUN
      REAL PX(100),PY(100),X,Y,FACT,XP,YF
      CHARACTER*7 FILE2
      DATA WS__ID/1/,WS__PRINTER/2/
C
      CALL GKS$OPEN__GKS('SYS$ERROR:')
      CALL GKS$OPEN__WS(WS__PRINTER,
      •      'DRAW.LIS',GKS$K__LA75)
```

```

CALL GKS$ACTIVATE_WS(WS_
• PRINTER)
CALL GKS$OPEN_WS(WS_ID,'TT:',
• GKS$K_VT240)
CALL GKS$ACTIVATE_WS(WS_ID)

```

C

```

WRITE(6,*)' ***** PLEASE INPUT FILE
• NAME *****'
READ(5,200) FILE2
200 FORMAT(A7)
WRITE(6,*) '***** PLEASE INPUT
• SCALE *****'
READ(5,*) FACT
OPEN(10,FILE=FILE2, STATUS=
• 'UNKNOWN')
NUN=1
XP=-1111.1111
YP=-2222.2222

```

C

```

10 READ(10,*) X, Y
IF(X.EQ.YP.AND.NUN.GT.1) CALL
• GKS$POLYLINE (NUN,PX,PY)
IF(X.EQ.YP) GOTO 20
IF(X.EQ.XP) THEN
NUM=1
IF(NUN.GT.1) CALL GKS$POLYLINE
• (NUN,PX,PY)
READ(10,*) X,Y
PX(NUM)=X/FACT+0.15

```

```

        PY(NUM)=Y/FACT+0.15
        GOTO 15
    ENDIF
    NUM=NUM+1
    PX(NUM)=X/FACT+0.15
    PY(NUM)=Y/FACT+0.15
    NUN=NUM
15    CONTINUE
    GOTO 10
20    CONTINUE
C
    CALL GKS$DEACTIVATE__WS(WS__
•    PRINTER)
    CALL GKS$CLOSE__WS(WS__PRINTER)
    CALL GKS$DEACTIVATE__WS
•    (WS__ID)
    CALL GKS$CLOSE__WS(WS__ID)
    CALL GKS$CLOSE__GKS()
    END

```

8.3.3 利用 CALCOMP 绘图仪进行图形处理

本节结合东北工学院计算中心的西门子计算机，介绍一下离散单元法在该机上的图形处理程序。

西门子图形工作站的绘图设备之一 CALCOMP 绘图仪是美国 CALCOMP 公司推出的产品。它是通过远程通讯与西门子 BS2000 系统相联的。CALCOMP 绘图仪是智能型的绘图仪，它能为用户提供许多用于绘图的子程序，用户可使用 FORTRAN 语言调用这些子程序进行编程绘

图。

CALOMP 绘图仪的工作方式为卷纸方式和切纸方式。绘图的范围可从 A0 到 A5 号图纸。当工作在卷纸方式时，绘图的长度只受纸长的限制。绘图仪带有 8 只不同颜色的笔，每次只安装 4 只笔。

CALCOMP 绘图仪提供的主要绘图子程序有：

AXIS, CIRCLE, DASHS, LINE, NEWPEN, NUMBER, PLOT, PLOTS, SCALE, SETCHR, SYMBOL。

下面分别介绍各子程序的功能和使用方法。

1. PLOTS 子程序

PLOTS 对程序中用到的变量进行初始化，并通过操作系统打开一个文件，以把绘图信息存入该文件中。这个子程序只能且必须被调用一次，而且须放在其他绘图子程序之前。其调用格式为：

CALL PLOTS (ISF, INDEX, LDEV)

其中，ISF 设为 0；INDEX 设为 0；LDEV 是逻辑输出设备号，用户应选 40。

2. PLOT 子程序

PLOT 子程序用于建立绘图仪的原点，并且控制笔的状态（抬起或落下），使笔在两点之间作直线移动。其调用格式为：

CALL PLOT (XPAGE, YPAGE, \pm IPEN)

其中，XPAGE 为 X 坐标（英寸）；YPAGE 为 Y 坐标（英寸）；IPEN 用于控制笔的状态（抬起或落下），当 IPEN = ± 2 时，笔落下移动到 (XPAGE, YPAGE) 点，当 IPEN = ± 3 时，笔抬起移动到 (XPAGE, YPA-

GE) 点。

注意：当 IPEN 为负值时，笔移动结束后的位置作为下一次移动的原点，并且以后的移动都以此为原点。

3. SCALE 子程序

SCALE 用于检查数组中的数据，并根据数据的大小确定作图的比例系数。SCALE 子程序计算和存储 AXIS 子程序所确定的比例刻度，并保证由 LINE 子程序所画的点在确定的作图范围内。其调用格式为：

CALL SCALE (ARRAY, AXLEN, NPTS,
±INC)

其中，ARRAY 为被检查数组的第一个元素；AXLEN 为用于标度数据轴线的长度，单位为英寸，且 AXLEN 必须大于 1.0 英寸；NPTS 为在数组中将被检查的元素个数，在使用 FORTRAN 语言对数组定义维数时，至少要比 NPTS 多两个位置，用于 SCALE 存贮、计算开始值和比例系数，这两个数放在数组 ARRAY 的最后两个单元里；INC 为增量值，它的大小反映了 SCALE 检查数组中元素的频度。一般当 INC=1 时，表示对数组中的元素逐个检查；当 INC=2 时，表示对数组中的元素每两个检查一次，且当 INC 为正值时，检查的顺序是从大到小，比例系数为正；当 INC 为负值时，检查的顺序是从小到大，比例系数为负。

4. AXIS 子程序

AXIS 子程序能够画出不同方向的坐标轴线，并把轴线按英寸分成若干段且标有刻度。对于 X-Y 坐标系，需绘出两个坐标轴线。其调用格式为：

CALL AXIS (XPAGE, YPAGE, IBCD,

\pm NCHAR, AXLEN, ANGLE, FIRSTV, DELTAV)
其中, XPAGE, YPAGE 为轴线开始点的 X, Y 坐标, 一般情况下, X, Y 都设在绘图原点; IBCD 为放在轴线中间并平行于轴线的字符串; NCHAR 为字符串的个数, Y 轴取正值, X 轴取负值; AXLEN 为轴线的长度 (英寸); ANGLE 为轴线与水平线的夹角, 0° 用于 X 轴, 90° 用于 Y 轴。FIRSTV 为标在轴线上的第一个刻度值, 这个值可以通过 SCALE 子程序计算得到, 可以存在 SCALE 子程序所需要的数组 ARRAY 的最后两个单元里。

5. NUMBER 子程序

NUMBER 子程序能够把浮点数转换成相应的十进制数, 并输出到绘图仪上。其调用格式为:

CALL NUMBER (XPAGE, YPAGE,
HEIGHT, FPN, ANGLE \pm NDEC)

其中, XPAGE 和 YPAGE 为输出数字的相对原点; HEIGHT 为输出数字的高度 (英寸); FPN 为将被转换的浮点数; ANGLE 为输出数字相对 X 轴的旋转角度; NDEC 为浮点数转换的控制精度, 一般选为 -1。

6. SYMBOL 子程序

SYMBOL 是把指定的符号按任意不同的角度输出到绘图仪上。其调用格式为:

CALL SYMBOL(XPAGE, YPAGE, HEIGHT,
IBCD, ANGLE, NCHAR)

其中, (XPAGE, YPAGE) 为所定义符号 (字符串) 的相对原点, 一般情况下在符号的左下角; HEIGHT 为字符的高度 (英寸); ANGLE 为输出字符串与 X 轴的夹角; NCHAR 为字符个数, 当 NCHAR > 0 时, 字符串的左下

角为原点, 当 $NCHAR=0$ 时, 字符串的右下角为原点。

7. NEWPEN 子程序

NEWPEN 允许用户在程序中选择不同的笔。其调用格式为:

CALL NEWPEN(INP)

其中, INP 为所选择的笔号(1—4)。

8. LINE子程序

LINE 把坐标数组中所定义的点连成线或记上标记。其调用格式为:

CALL LINE (XARRAY, YARRAY, NPTS,
INC, \pm LINTYP, INTEQ)

其中, XARRAY 和 YARRAY 分别为装有点坐标 X 和 Y 分量的数组; NPTS 为点的个数; INC 为增量值, 当 $INC=1$ 时, 逐个从 XARRAY 和 YARRAY 数组中提取元素, 当 $INC=2$ 时, 每隔 2 个提取 1 个元素, 以此类推; \pm LINTYP 为决定绘制线或标志的频率, 当 LINTYP = 1 时, 逐点画线或标记, 当 LINTYP = 2 时, 每隔 2 个点连线或画标记; INTEQ 为特征标记所对应的一个整数值, 范围是从 0 到 15。

9. CIRCLE 子程序

CIRCLE 是画圆子程序。其调用格式为:

CALL CIRCLE ($P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, IMODE$)

其中, P_1 至 P_5 是浮点数, 它们的意义取决于 IMODE 的值。 P_1 是 X 坐标, 且当 $IMODE = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ 和 5 时, P_1 皆表示起始点的 X 坐标; 当 $IMODE = \pm 6$ 时, P_1 为圆心点的 X 坐标; 当 $IMODE = \pm 7$ 时, P_1 为圆心点的 X 坐标。 P_2 表示 Y 坐标, 其点是与 P_1 相对应的。 P_3 表示

X坐标, 且当 $IMODE = \pm 1$ 时, P_2 为圆心点的 X 坐标; 当 $IMODE = \pm 2, \pm 3$ 时, P_2 为终止点的 X 坐标; 当 $IMODE = \pm 4, 5, \pm 6$ 和 7 时, P_2 为起始点的 X 坐标。 P_4 表示 Y 坐标或终点止角, 且当 $IMODE = \pm 1, \pm 2$ 和 ± 3 时, P_4 是与 P_2 相对应点的 Y 坐标; 当 $IMODE = 5$ 或 7 时, P_4 为终止角。 P_5 表示半径。

$IMODE$ 的正负号反映了画圆或弧的方向。当它为正时, 是按逆时针方向画圆或弧; 当它为负时, 是按顺时针方向画圆或弧。当 $IMODE = \pm 1$ 时, 用起始点和圆心画一个完整的圆; 当 $IMODE = \pm 2$ 时, 用起始点、终点和半径画小弧; 当 $IMODE = \pm 3$ 时, 用起始点、终点和半径画大弧; 当 $IMODE = \pm 4, 5$ 时, 用起始点、起始角、终止角以及半径画完整的圆; 当 $IMODE = \pm 6$ 时, 用中心点、起始角和半径画一完整的圆; 当 $IMODE = \pm 7$ 时, 用中心点、起始角、终止角以及半径画一个弧。

10. DASHS 子程序

DASHS 允许用户设置点划线的状态(ON/OFF)。当它设置为 ON 时, 使用 PLOT, CIRCLE 等绘图程序所画的线都是点划线, 并可改变点划线中的实线和虚线的长度。其调用格式为:

CALL DASHS (ARRAY, ICNT)

其中, ARRAY 为装有浮点数的数组, 其元素表示点划线中实线和虚线的长度, 正值表示点划线中的虚线部分(抬笔), 负值表示点划线中的实线部分(落笔)。当 ICNT 为 0 时, 设置点划线的状态为 OFF; 当 ICNT 从 +2 到 +16 时, 设置点划线的状态为 ON, 使用省缺的点划线; 当 ICNT 从 -2 到 -6 时, 点划线中虚线和实线的长度按数

组 ARRAY 中的内容设定。

11. FACTOR 子程序

FACTOR- 允许用户放大或缩小绘图尺寸。其调用格式为:

CALL FACTOR (FACT)

其中, FACT 为放大或缩小绘图尺寸的比例系数。调用该子程序后, 以后所画的图都将按 FACT 系数放大或缩小。

12. SETCHR 子程序

SETCHR 允许用户在程序中改变符号子程序中字符串的特征, 如字符高度、纵横比、字符的倾斜度。其调用格式为:

CALL SETCHR (\pm CHRHGT, ASRRTO,
SLANG, CHRANG, SETMODE)

其中, 当 CHRHGT 为正时, 表示字符的高度 (英寸); 当 CHRHGT 为负时, 表示相对于前一个字符高度的比例系数。ASRRTO 为字符的纵横比, 当 ASRRTO = 1.0 时, 表示正常情况; 当 ASRRTO > 1.0 时, 表示字符是扁的; 当 ASRRTO < 1.0 时, 表示字符是细的; 当 ASRRTO < 0.0 时, 表示字符的镜像; 当 ASRRTO = 999.0 时, 表示不改变纵横比。SLANG 为每个字符的倾斜角度, 初始时, SLANG = 0, 没有倾斜; 当 SLANG > 0 时, 向右倾斜; 当 SLANG < 0 时, 向左倾斜; 当 SLANG = 999.0 时, 不改变当前的倾斜度。CHRANG 为每个字符的旋转角 (相对 X 轴的角度), 初始时, CHRANG = 0, 不旋转; 当 CHRANG > 0.0 时, 逆时针旋转; 当 CHRANG = 999.0 时, 不改变当前的旋转角。

下面是离散单元法用 CALCOMP 绘图仪画图的程序。

PROGRAM PLOT

C

```
DIMENSION IND(100)
CHARACTER*1 FIRST,WORD(3)
CHARACTER*7 FILE1
DATA WORD/'L','C','Y'/
```

C

```
CALL PLOTS(0,0,40)
CALL PLOT(0.0,0.0,3)
WRITE(2,*)'..... PLEASE INPUT THE
•      DATA FILE NAME .....'
READ(1,11) FILE1
11  FORMAT(A7)
OPEN(20, FILE=FILE1,STATUS='UNKN-
•      OWN')
WRITE(2,91)
91  FORMAT(1X,'..... PLEASE INPUT THE
•      PLOTTER SCALE .....')
READ(1,*) FAC
CALL FACTOR(FAC)
10  READ(20,1) FIRST
1   FORMAT(A1)
DO 30 JUMP=1,3
IF(FIRST.EQ.WORD(JUMP)) GOTO 2
30  CONTINUE
GOTO 10
2   GOTO(40,50,140) JUMP
40  READ(20,*) X1,Y1
READ(20,*) X2,Y2
```

```

IND(JUMP)=1
CALL PLOT(X1,Y1,3)
CALL PLOT(X2,Y2,2)
GOTO 10
50  READ(20,*) X,Y,R
    P1=X+R
    P2=Y
    P3=X
    P4=Y
    P5=R
    CALL CIRCLE(P1,P2,P3,P4,P5,1)
    IND(JUMP)=1
    GOTO 10
140  CONTINUE
C
    CALL PLOT(20.,0.0,999)
    CLOSE(20)
    STOP
    END

```

9 应用篇

9.1 概 述

任何一种数值方法其价值都可以从两方面来体现，一个是理论意义，一个是实际意义，且后者更为重要。由于离散单元法是为研究边坡的稳定问题而提出来的，因此它与实际应用关系更为密切。另一方面，岩体非连续性的普遍存在也为离散单元法的应用开辟了广阔的天地。

目前，离散单元法作为一种公认的数值方法，几乎已经渗透到了岩土工程的所有领域。下面几节就离散单元法在以下几个方面的应用作一介绍：① 巷道支护；② 边坡工程；③ 地下开采；④ 动载问题；⑤ 冰雪力学；⑥ 核废料的处理；⑦ 散体介质问题；⑧ 断裂力学；⑨ 渗流问题；⑩ 节理-岩桥问题。

在讲应用之前，先给出几个有理论解的算例，以检验方法的可靠性。当然，方法的正确性也可以在后面的应用中得到证实。

9.2 离散单元法可靠性的理论验证

9.2.1 波的透射、反射和吸收

设有两个均质、各向同性的弹性半平面，中间被一个不连续面分开。当一个正弦剪切波从一个半平面入射到另一个

半平面时，将引起界面滑移并产生反射波和透射波。

上面所提的问题可用两个已离散成差分网格的充分变形块体来模拟(见图 9-1)。界面 EF 是一个具有高刚度的节理，边界条件是上边 GH、下边 CD 以及两个侧边 GC 和 DH，都是不反射粘性边界，且不允许有竖向运动。加载条件是将剪应力施加在 CD 边，产生入射波。材料的物理力学性质是：块体的密度 $\rho = 2.65 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，体积模量 $K = 16\,667 \text{ MPa}$ ，剪切模量 $G = 10\,000 \text{ MPa}$ ；节理的刚度 $k_s = k_n = 10\,000 \text{ MPa/m}$ ，无摩擦力。

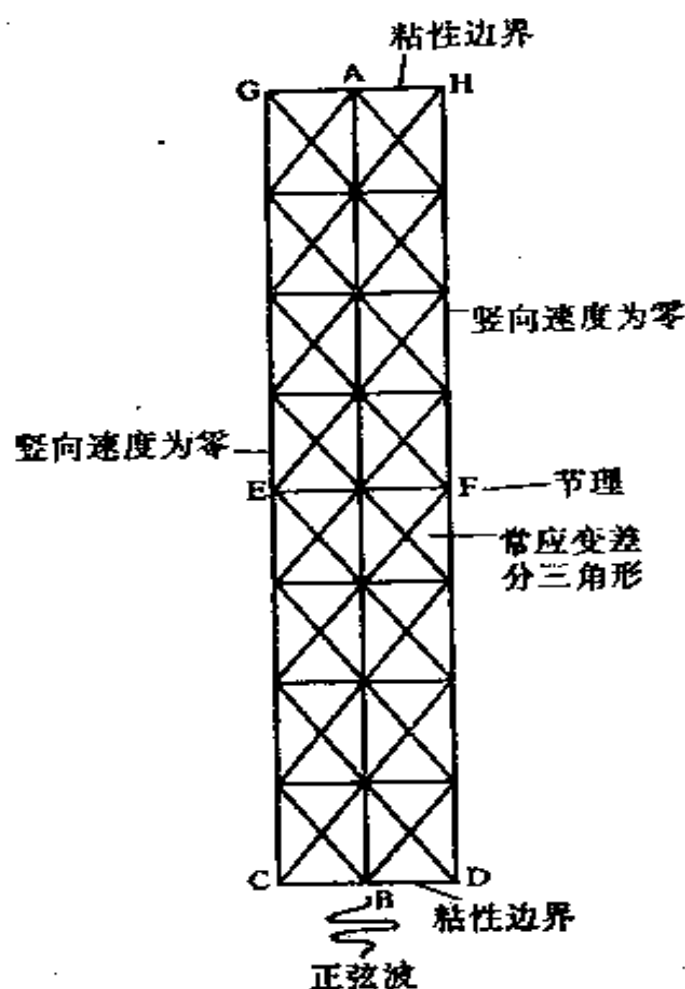


图 9-1 问题的几何形状和边界条件

若设 E_I 、 E_T 和 E_R 分别是与入射波、透射波和反射波

对应的一次振动循环单位面积的能通量，则用系数

$$A_c = (1 - R_c^2 - T_c^2)^{1/2} \quad (9-1)$$

来测定界面能量吸收的大小，并称之为吸收系数。式中， R_c 是反射系数， T_c 是透射系数，且有：

$$R_c = [E_R/E_I]^{1/2} \quad (9-2)$$

$$T_c = [E_T/E_I]^{1/2} \quad (9-3)$$

上面两式中的能通量 E_I 可由下式确定：

$$E_I = \int_{t_1}^{t_1+T} \sigma_s v_s dt \quad (9-4)$$

式中， T 是波的变化周期； σ_s 是剪应力； v_s 是剪切波速。

由于块体是弹性的，因此

$$\sigma_s = \rho c v_s \quad (9-5)$$

从而可得：

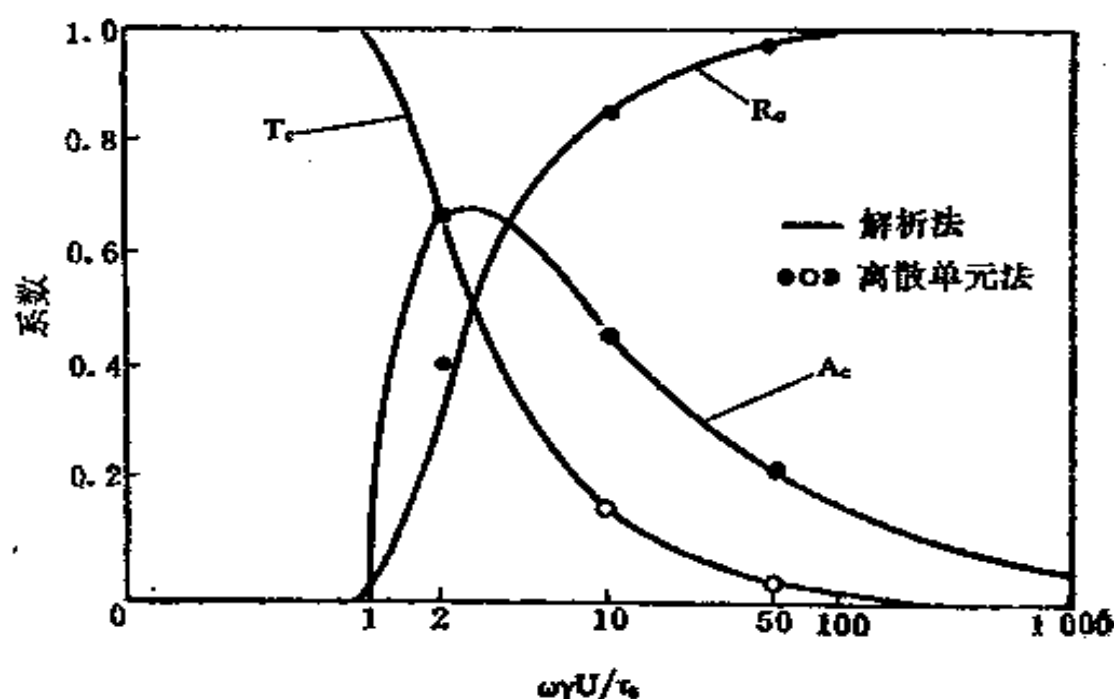


图 9-2 透射、反射以及吸收系数的比较

$$E_I = \rho c \int_{t_1}^{t_1 + T} v_x^2 dt \quad (9-6)$$

式中, v_x 取在无滑动情况下 B 点的水平方向速度, 且每 25 次循环采一次样; 积分项的周期是由第 999 循环到 1379 循环。

E_r 也有类似的计算公式, 只是 v_x 取有滑动情况下 A 点的水平方向波速 (在粘结力等于 0.5 MPa 时)。 E_r 的反射波速 v_x 取在有、无滑动两种情况下 B 点的水平方向波速差。

图 9-2 是透射系数 T_e , 反射系数 R_e 和吸收系数 A_e 随参数 $\omega \gamma \cdot U / \tau_e$ 的变化情况。其中 $\gamma = (\rho G)^{\frac{1}{2}}$, τ_e 是节理的粘结力, U 是入射波的位移幅值, ω 是入射波的频率。

从图 9-2 中可以看出, 理论解与数值解^[73]十分接近。

9.2.2 节理岩体的应力和应变

图 9-3 是 Cundall 等用充分变形离散单元法分析玄武岩加载特性时所用的交错节理模型。节理的平均间距为 20 cm。节理的性质为: 竖向节理的法向和切向刚度分别为 395.9 GPa/m 和 438.8 GPa/m, 水平节理的法向和切向刚度分别为 531.9 GPa/m 和 438.9 GPa/m。完整岩石的弹性模量为 89 GPa, 泊松比为 0.26。在 s 方向荷载保持不变的条件下, 该模型在 n 方向进行循环加载, 即 s 方向荷载固定在 5 MPa, 而 n 方向从 2 MPa 增至 10 MPa, 然后再降至 2 MPa。

Singh 把节理岩体视为横观各向同性连续介质, 并给出了相应的理论解^[74]。横观各向同性材料的力学性质由节

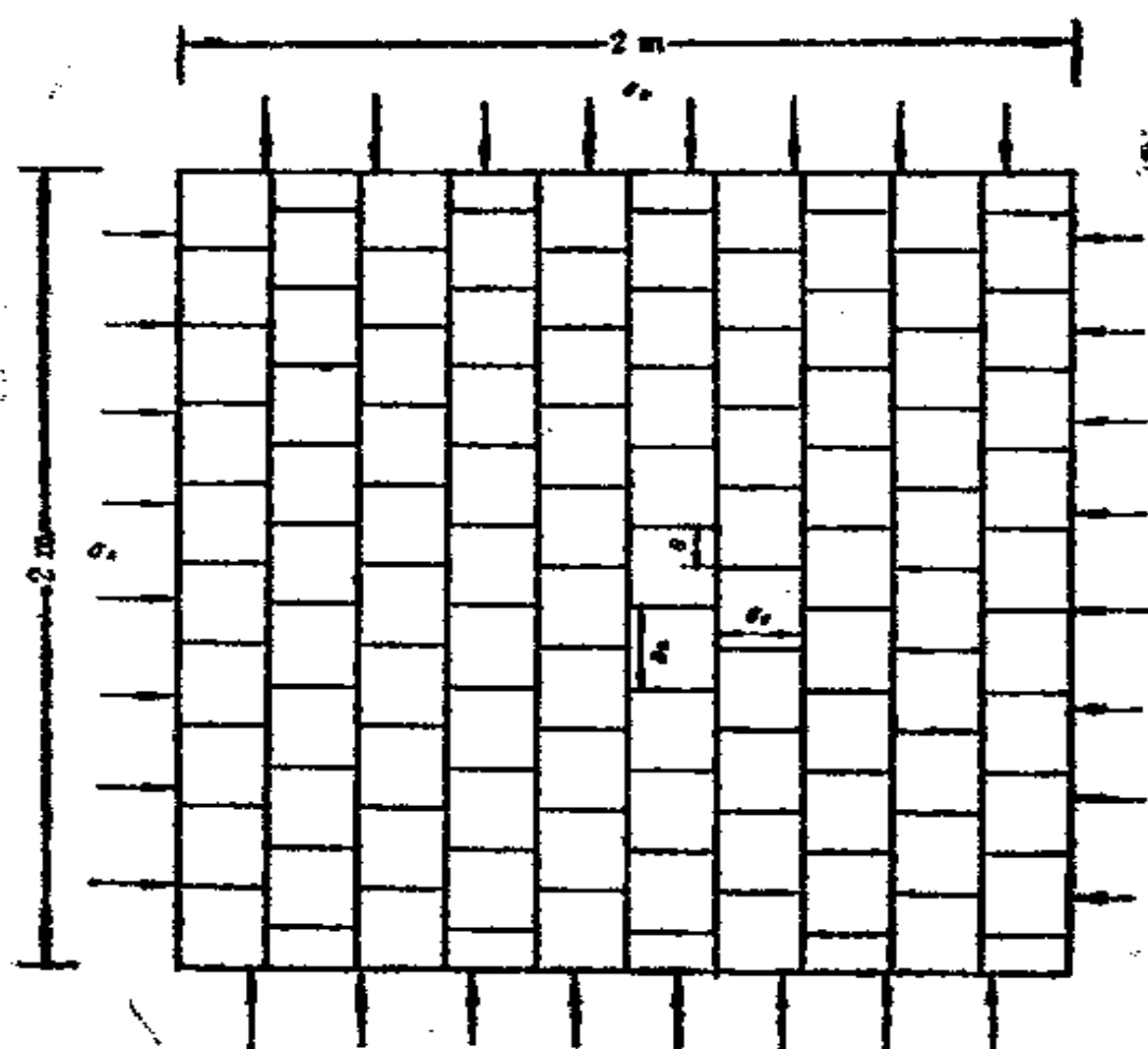


图 9-3 交错节理岩体

理的刚度和完整岩石的性质所确定。对于如图 9-3 所示的情况，有：

$$E_n = \frac{E_i}{1 + b_{nn}E_i/(k_{nn}s_n)} \quad (9-7)$$

$$E_s = \frac{E_i}{1 + E_i/(k_{sv}s_s)} \quad (9-8)$$

$$G_{ns} = \frac{G_i s_s s_n k_{sh} k_{sv}}{s_s s_n k_{sh} k_{sv} + G_i b_{nn} s_s k_{sv} + G_i s_n k_{sh}} \quad (9-9)$$

$$v_{ns} = v_i \frac{k_{ns} s_n}{k_{ns} s_n + b_{ns} E_i} \quad (9-10)$$

式中, E_n 是 n 方向的弹性模量; E_s 是 s 方向的弹性模量; G_{ns} 是剪切模量; v_{ns} 是在 n 方向加载时 s 方向的应变与 n 方向应变之比; E_i 是完整岩石的弹性模量; v_i 是完整岩石的泊松比; G_i 是完整岩石的剪切模量; k_{nv} , k_{sv} 是竖向节理的法向和切向刚度系数; k_{nh} , k_{sh} 是水平节理的法向和切向刚度系数; s_s 是 s 方向的竖向节理平均间距; s_n 是 n 方向的水平节理平均间距; s 是水平节理的错距; b_{nn} , b_{sn} 是应力集中系数, 且

$$b_{nn} = \left[1 + \frac{k_{nv} s}{k_{nh} s_n} \left(1 - \frac{s}{s_n} \right) \right]^{-1} \quad (9-11)$$

$$b_{sn} = \left[1 + \frac{k_{sv} s}{k_{sh} s_s} \left(1 - \frac{s}{s_n} \right) \right]^{-1} \quad (9-12)$$

用玄武岩及其节理的性质和间距, 由式(9-7)至(9-12)可以得到对应的横观各向同性体的力学参数为:

$$E_n = 53.3 \text{ GPa}, E_s = 44.0 \text{ GPa}, G_{ns} = 21.0 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.16, v = 0.26$$

根据横观各向同性体平面应变问题的应力和应变关系^[10], 可以算出与离散单元模型相同加载条件下的应力—应变曲线(见图 9-4)。

从图 9-4 中可见, 解析解与离散单元的计算结果吻合得很好, 应力—应变斜率相差不到 4%。

9.2.3 低摩擦力情况下的裂缝剪切

如图 9-5 所示的一条裂缝, 其总剪切位移的精确解可由

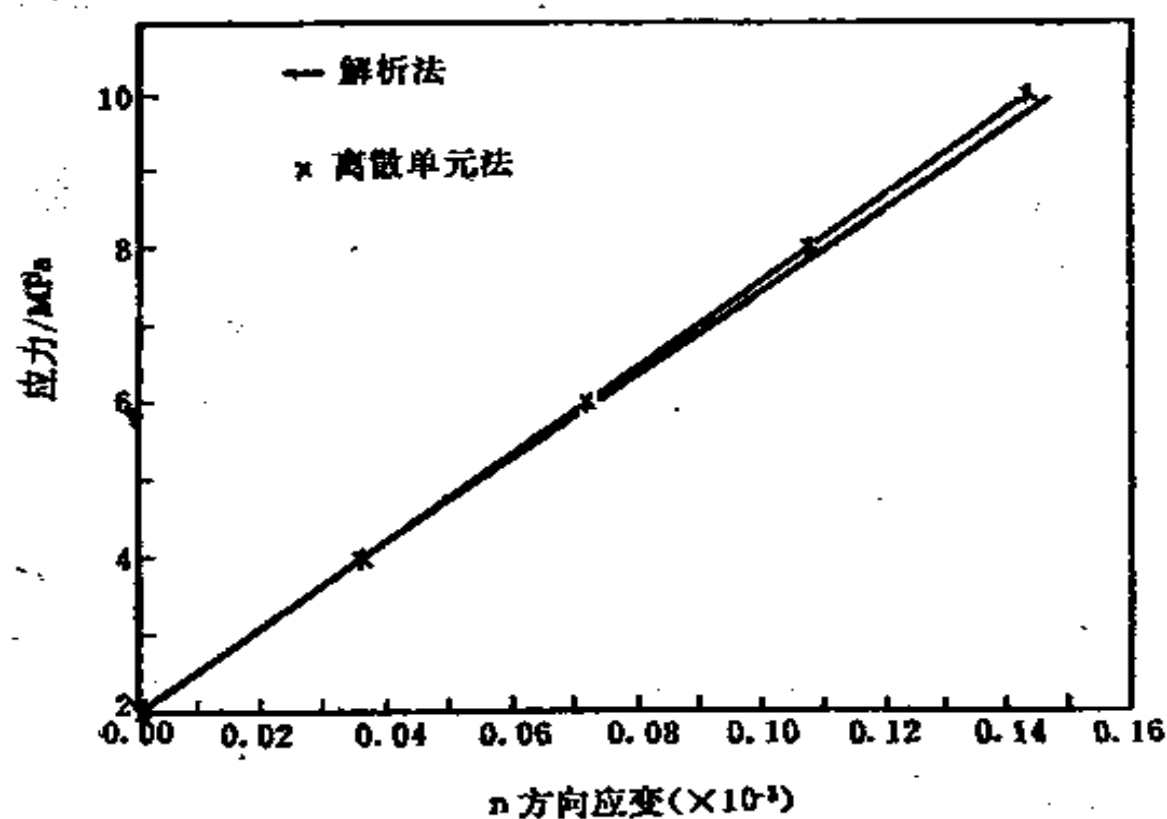
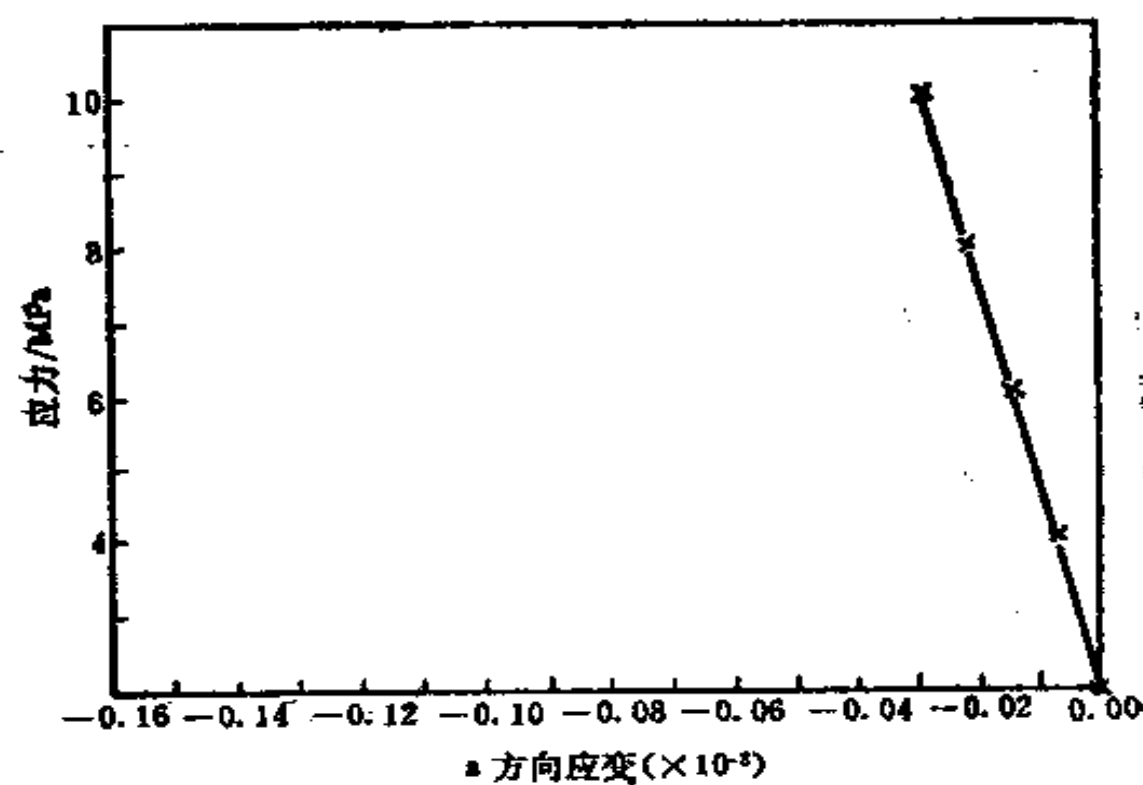


图 9-4 在 n 方向循环加载时的应力-应变关系

下式确定：

$$u_z^i = -\frac{2(1-\nu)}{G} \tau \sqrt{a^2 - x^2} \quad (9-13)$$

式中， G 是剪切模量； ν 是泊松比； τ 是作用于裂缝面上的剪应力； a 是裂缝长度的一半； x 是裂缝面上距中心点的距离。

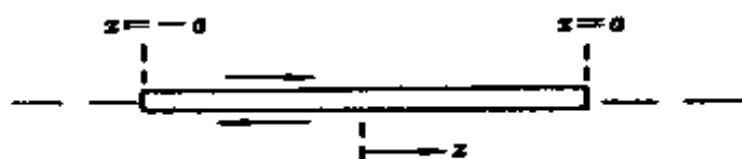


图 9-5 一条裂缝

在离散单元法中，剪应力 τ 是滑移所产生的应力降：

$$\tau = \mu \sigma_n - \tau^i \quad (9-14)$$

式中， μ 是摩擦系数； σ_n 是作用于裂缝面上的正应力； τ^i 是

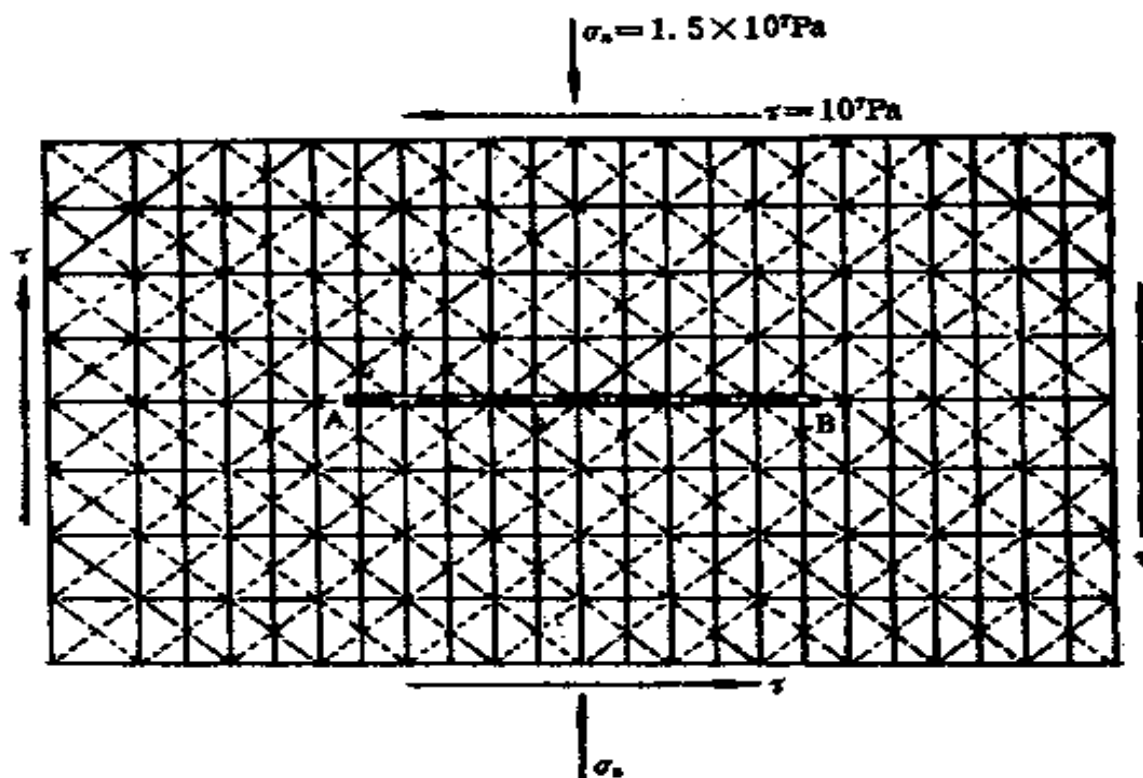


图 9-6 模拟裂缝的离散单元模型

初始剪应力。

离散单元法的计算模型如图 9-6 所示。图中 AB 表示裂缝,其长度为 10 m,由 11 个单元组成。模型是由两个充分变形块体(768 个三角形差分网格)构成,并在其周围耦合边界单元。计算参数为: $G = 10^9 \text{ Pa}$, $\nu = 0.25$, $\mu = 0.167$, $\tau^i = 10^7 \text{ Pa}$, $\sigma_s = 1.5 \times 10^7 \text{ Pa}$, $\tau = -7.5 \times 10^6 \text{ Pa}$ 。

在上述条件下计算裂缝的剪切位移,离散单元的计算结果与精确解相对误差平均为 6% (见图 9-7)。

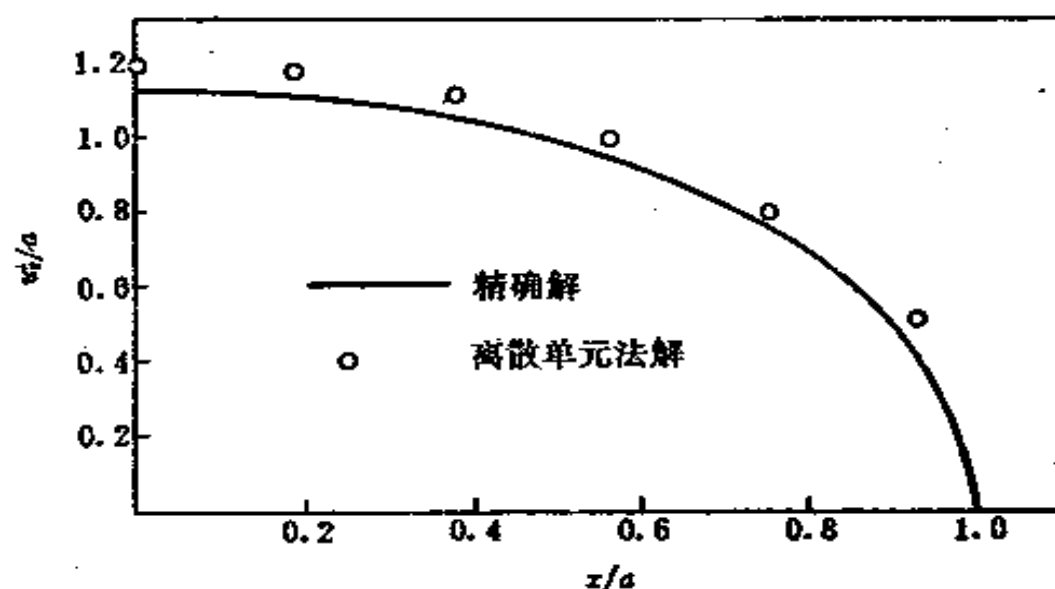


图 9-7 理论解与数值解的比较

9.2.4 地基承载力

离散单元法的塑性模型可由“Prandtl 楔”问题验证。Prandtl 证明基础承载力的精确解为:

$$q = (2 + \pi)C \quad (9-15)$$

式中, q 是承载力; C 是材料的粘结力。该问题之所以称为 Prandtl 楔问题, 是因为破坏区按图 9-8 所示的形式发展。

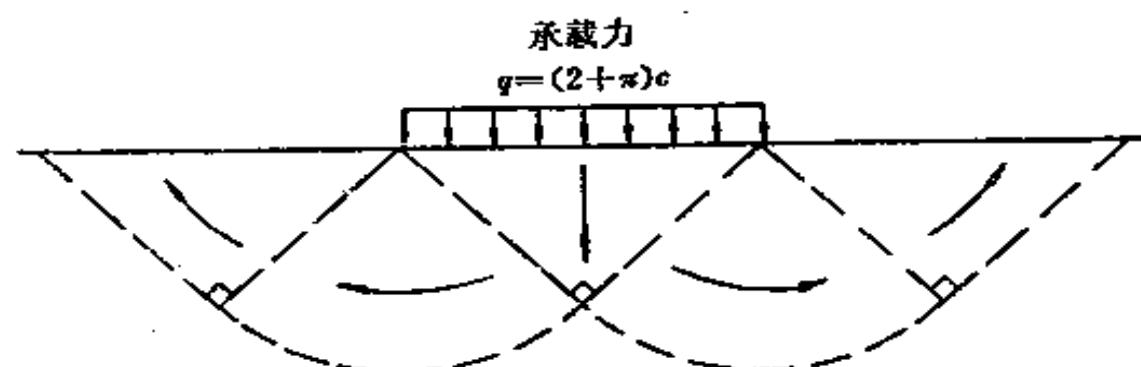


图 9-8 Prandtl 楔问题

离散单元法用于上述问题的模型如图 9-9 所示。该模型是由 8 条正交的节理组成，节理将所研究区域划分成 25 个块体。根据对称性，模型的左右边界和底边的约束条件如图

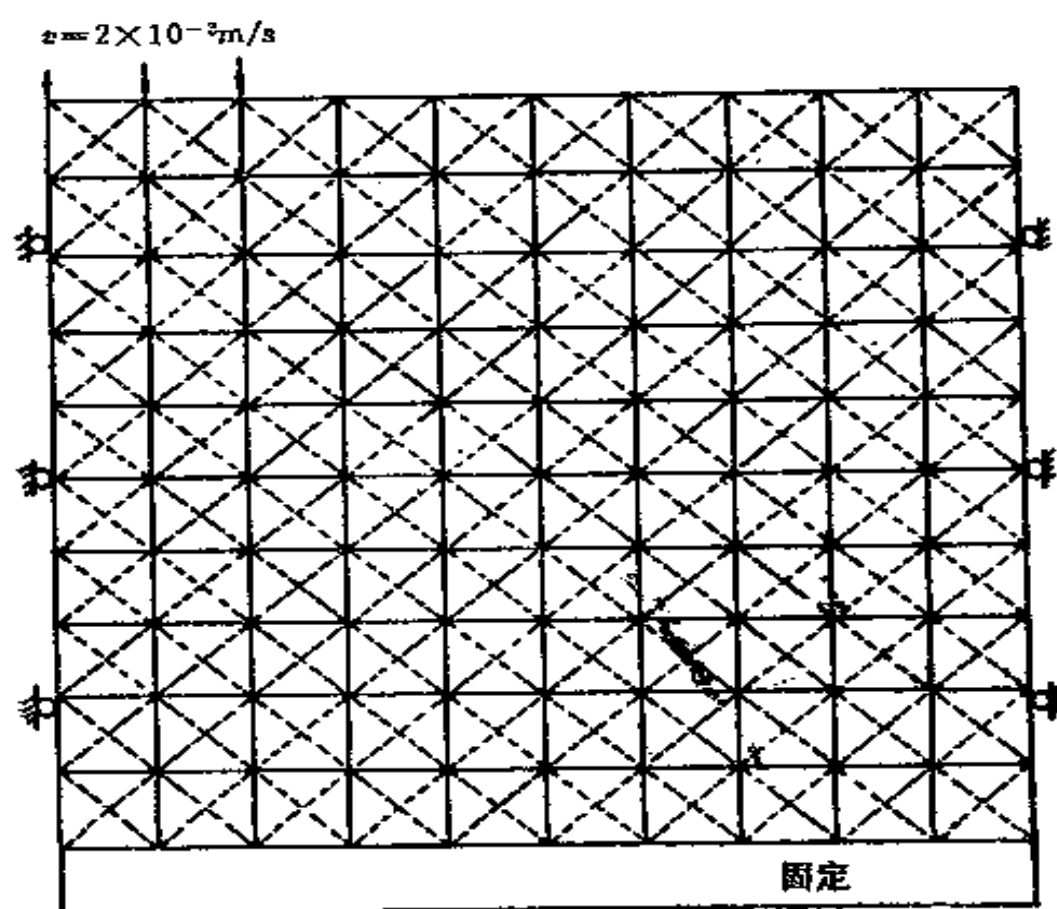


图 9-9 离散单元法模型

所示。将一个 $2.0 \times 10^{-3} \text{ m/s}$ 的恒定速度施加于模型的左上角，用以模拟地基所受的荷载。由这个速度边界，通过观测内部的压力变化可以算出地基破坏时的极限荷载——承载力。

在上述模型中，完整岩石的力学性质为： $K = 10^8 \text{ Pa}$ ， $G = 10^8 \text{ Pa}$ ， $C = 10^4 \text{ Pa}$ ， $\mu = 0.0$ ，其材料特性符合摩尔—库仑准则。节理只允许有弹性变形，其法向刚度和切向刚度均为 10^8 Pa/m 。

地基破坏时的主应力和位移如图 9-10 所示。此时， $\sigma_{\max} = 5.023 \times 10^4 \text{ Pa}$ ， $u_{\max} = 1.117 \times 10^{-2} \text{ m}$ 。按式(9-15)计算的承载力精确解 $q = 5.14 \times 10^4 \text{ Pa}$ ，与 σ_{\max} 相对误差

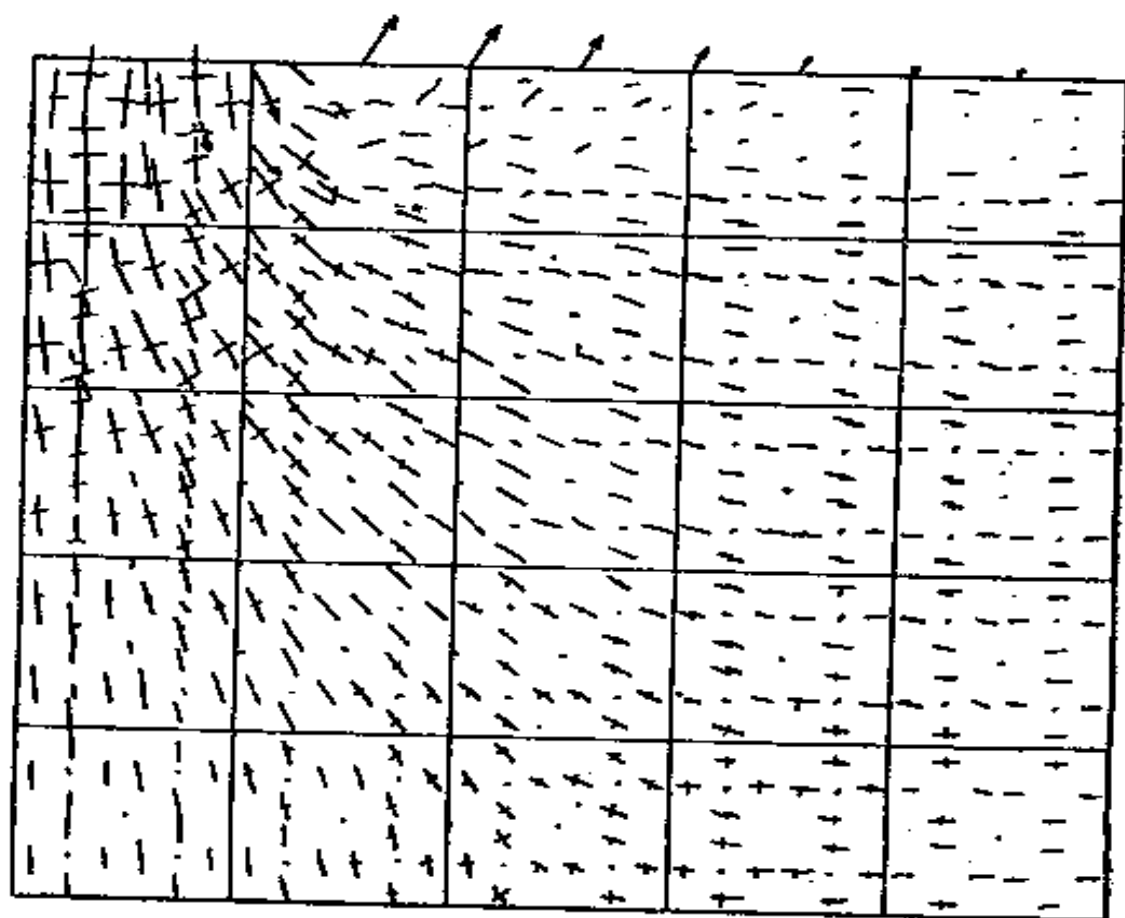


图 9-10 在极限荷载时的主应力场和位移场

不到 3%。

9.3 巷道支护问题

9.3.1 钢枕支护

如图 9-11 所示的一个钢枕支护圆形巷道，其周围受到静水压力($p_{xx} = p_{yy}$)的作用。现用离散单元法研究其围岩与支护特性曲线。

一般情况下，支护问题的荷载可分成两部分来研究：一个是支护荷载的上升部分，一个是地层应力的下降部分。而地层应力的下降部分又可分为弹性和非弹性两部分。巷道开挖可由开挖边界的静水压力卸载来模拟。在压力卸载过程中，巷道周围岩体在应力未达到弹性极限前是按弹性规律变化的，进一步卸载后，开挖体周边会产生塑性破坏。如果不考虑重力，上述问题可视为各向同性、均质和与时间无关的轴对称弹性问题。此时，围岩特性曲线的下降部分可由解析解求出。

现假设岩体有足够的强度，仅考虑地层应力和位移的弹性变化规律。对于一个弹性介质中的圆形巷道，其周边上任意一点的径向位移为：

$$u_r = \frac{r_i}{2G}(p_0 - p_i) \quad (9-16)$$

式中， r_i ， u_r 是巷道的半径和径向位移； p_0 是原岩应力； G 是剪切模量； p_i 是内压力（支护反力）。

对于轴对称问题的钢枕支护结构刚度，Daemen 给出如下计算公式^[70]：

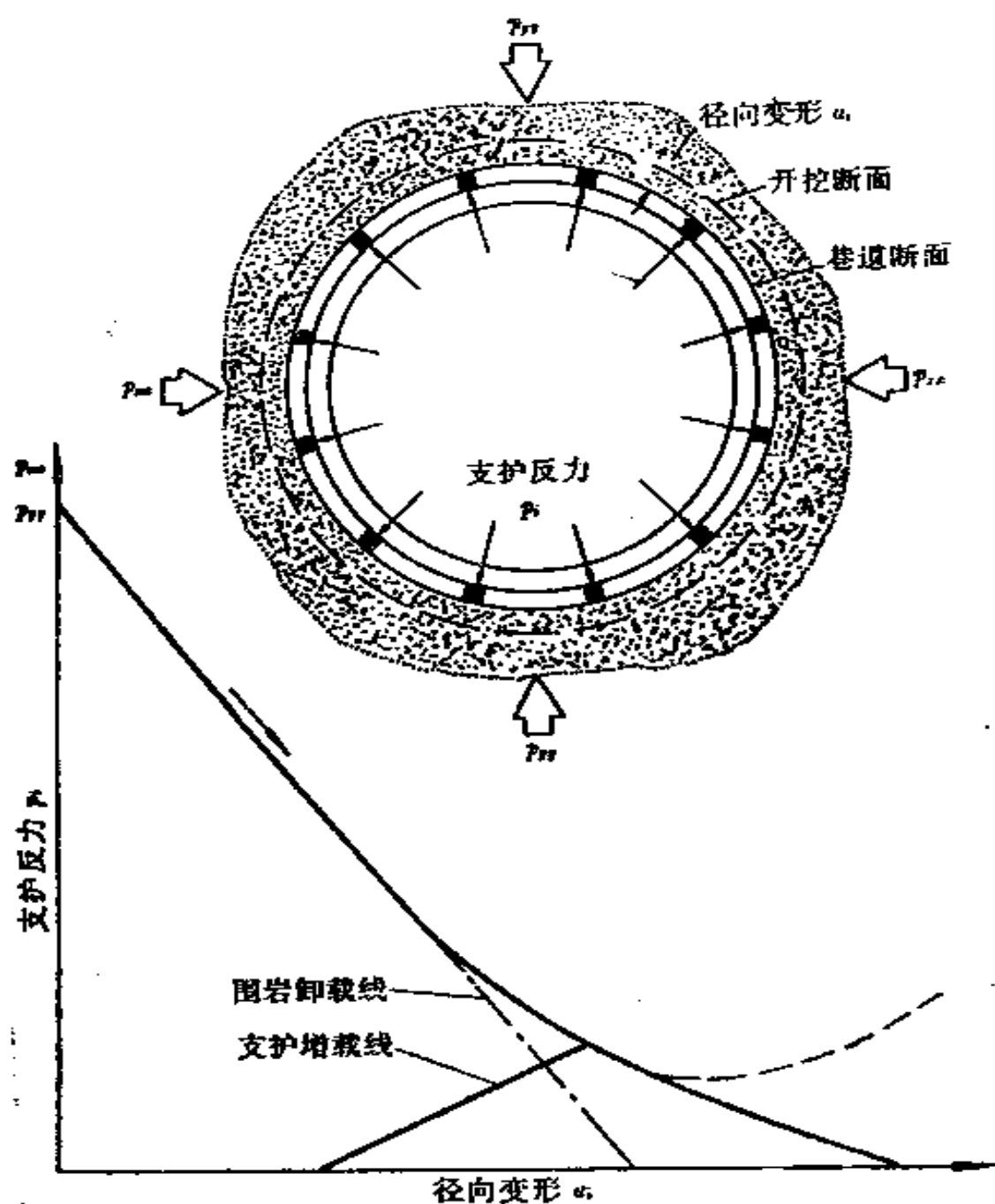


图 9-11 围岩及其支护特性曲线

$$\frac{1}{k_{ss}} = \frac{u_i}{p_i} = \frac{s r_i^2}{E A} + \frac{s r_i^4}{E I} \left[\frac{\theta(\theta + s_1 c_1)}{2 s_1^2} - 1 \right] + \frac{2 s r_i \theta l_B}{A_B E_B} \quad (9-17)$$

式中, k_s 是钢枕的刚度; s 是钢枕间的间距; 2θ 是钢枕之间的夹角(弧度); $n = \pi/\theta$ 是钢枕的个数; $s_1 = \sin \theta$; $c_1 = \cos \theta$; E_B , t_B 是钢枕的弹性模量和厚度; A_B 是钢枕的截面积。

用离散单元法分别对如下几种情况进行计算:

- (1) 在远场应力不变的条件下, 无支护开挖巷道;
- (2) 在远场应力不变的条件下, 有支护开挖巷道;
- (3) 在远场边界固定的条件下, 无支护开挖巷道;
- (4) 在远场边界固定的条件下, 有支护开挖巷道。

所研究问题的已知参数为: $r_i = 1 \text{ m}$, $G = 1 \text{ MPa}$, $P_0 = 10 \text{ MPa}$ 。用于确定支护刚度的参数为: $A = 0.1 \text{ m}^2$, $E = 2.57 \text{ GPa}$, $I = 8.33 \times 10^{-5} \text{ m}^4$, $s = 1 \text{ m}$, $n = 24$ 。

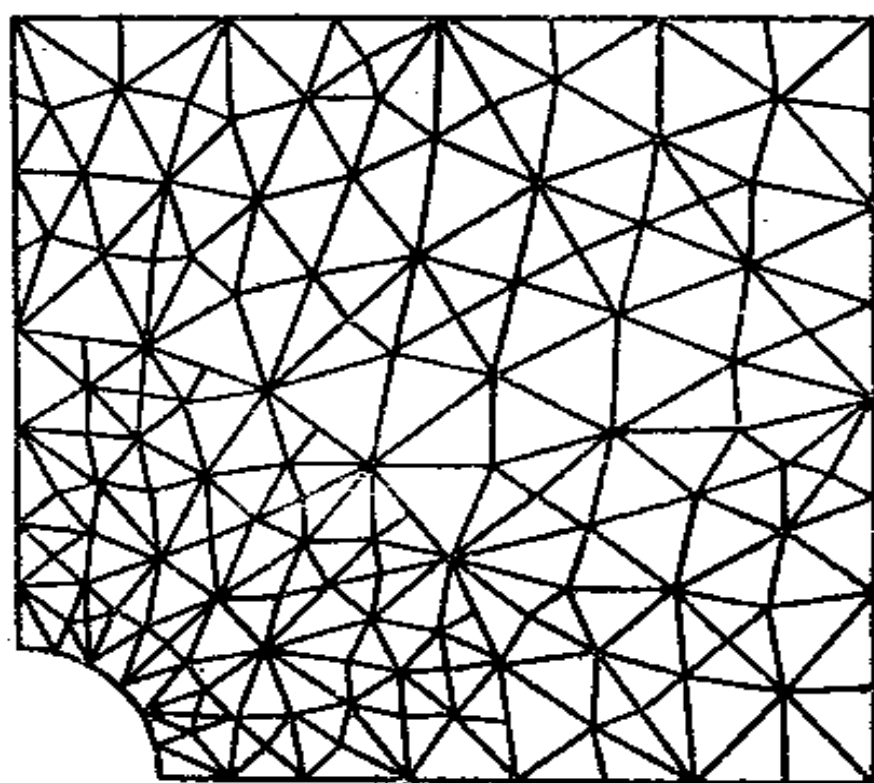


图 9-12 开挖巷道及其单元划分

由于钢枕与岩石之间通过界面法向刚度相互作用而不考虑剪切力, 所以式(9-17)中的最后一项应用 $(2s\tau_i)/k_n$ 来代替, 这里 $k_n = (A_s E_s / t_s) = 1\,000\text{MN/m}$ 。

与上述条件相对应的离散单元法计算模型如图 9-12 所示(取四分之一)。不连续面被赋以高刚度和高强度以确保岩体的弹性特性。这样节理就变得“透明”了, 但不影响最后计算结果。

离散元法的计算结果与解析结果的对照如表 9-1 和图 9-13 所示。如所预料的, 数值解在不同的条件下在解析解上下移位。支护反力 p_i 可由两个途径确定: 一个是结构单元中的轴向力除以支护的外半径(即 1 m); 一个是钢枕的径向力除以所属的面积 $(= 2\pi r_i s/n)$ 。这两种方法对同一支护应该得到相同的支护反力。

表 9-1 解析解与数值解的比较

名 称	解 析 解	数 值 解	
		固定边界	常应力边界
无支护时的径向位移/mm	5	4.7	5.2
支护刚度/(MPa/m)	241	243	243
有支护时的径向位移/mm	4.46	4.2	4.6
支护反力/MPa	1.075	1.021	1.117

9.3.2 衬砌支护

如图 9-14 所示, 大约在海下 110m 处有两个相距 12m 的圆形隧道, 它们的中心连线距海床 70 m。其中小隧道直径为 5.24 m, 用 3.7cm 厚的混凝土做衬砌; 主隧道的直径

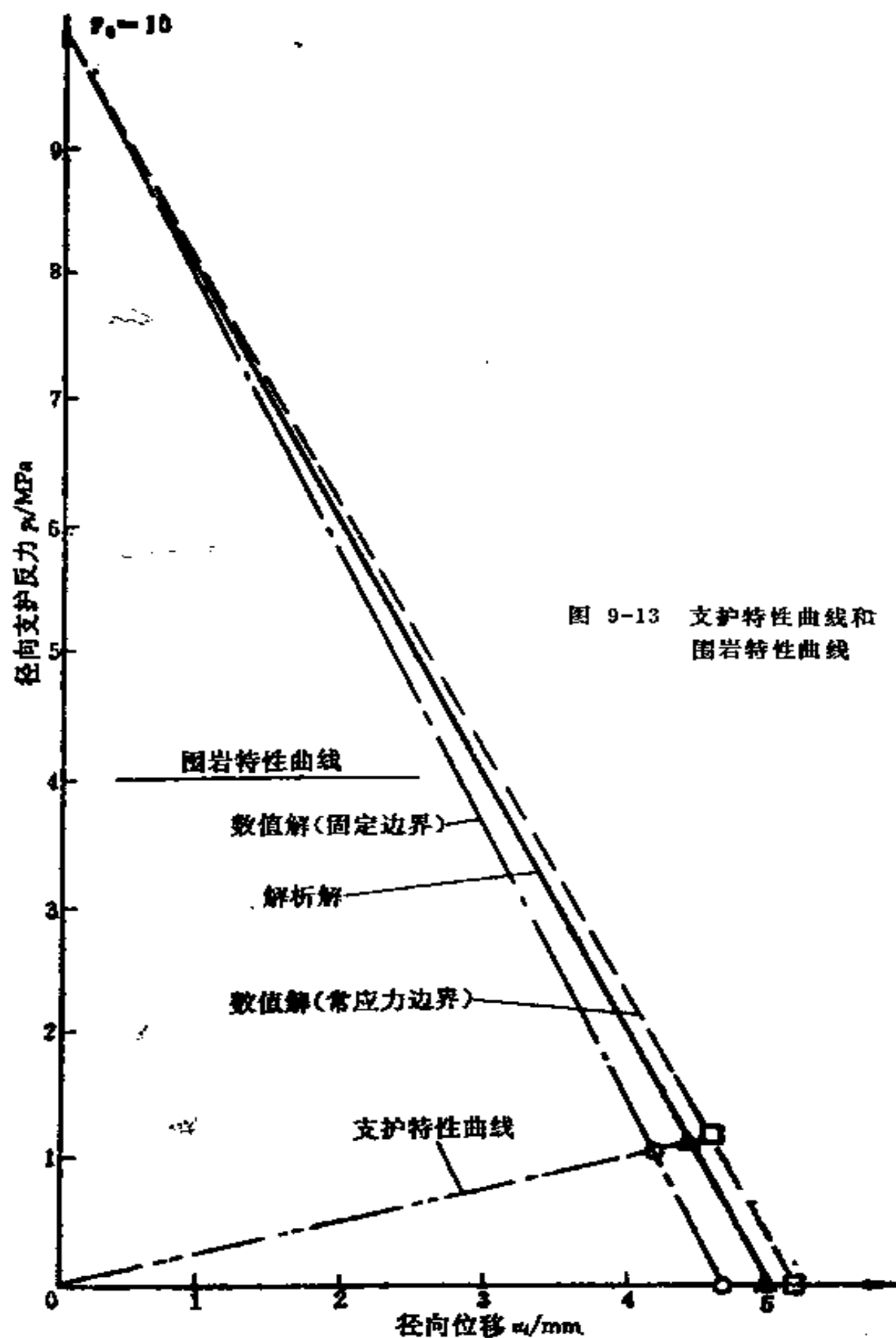


图 9-13 支护特性曲线和围岩特性曲线

为 8.22 m, 用 46cm 厚的混凝土做衬砌。小隧道超前主隧道开挖和支护。其中, 岩石的力学性质为: $E = 133 \text{ MPa}$, $\nu = 0.35$, $\sigma_c = 8 \text{ MPa}$, $C = 1 \text{ MPa}$, $\rho = 2600 \text{ kg/m}^3$ 。衬砌的弹性模量为 24 GPa。

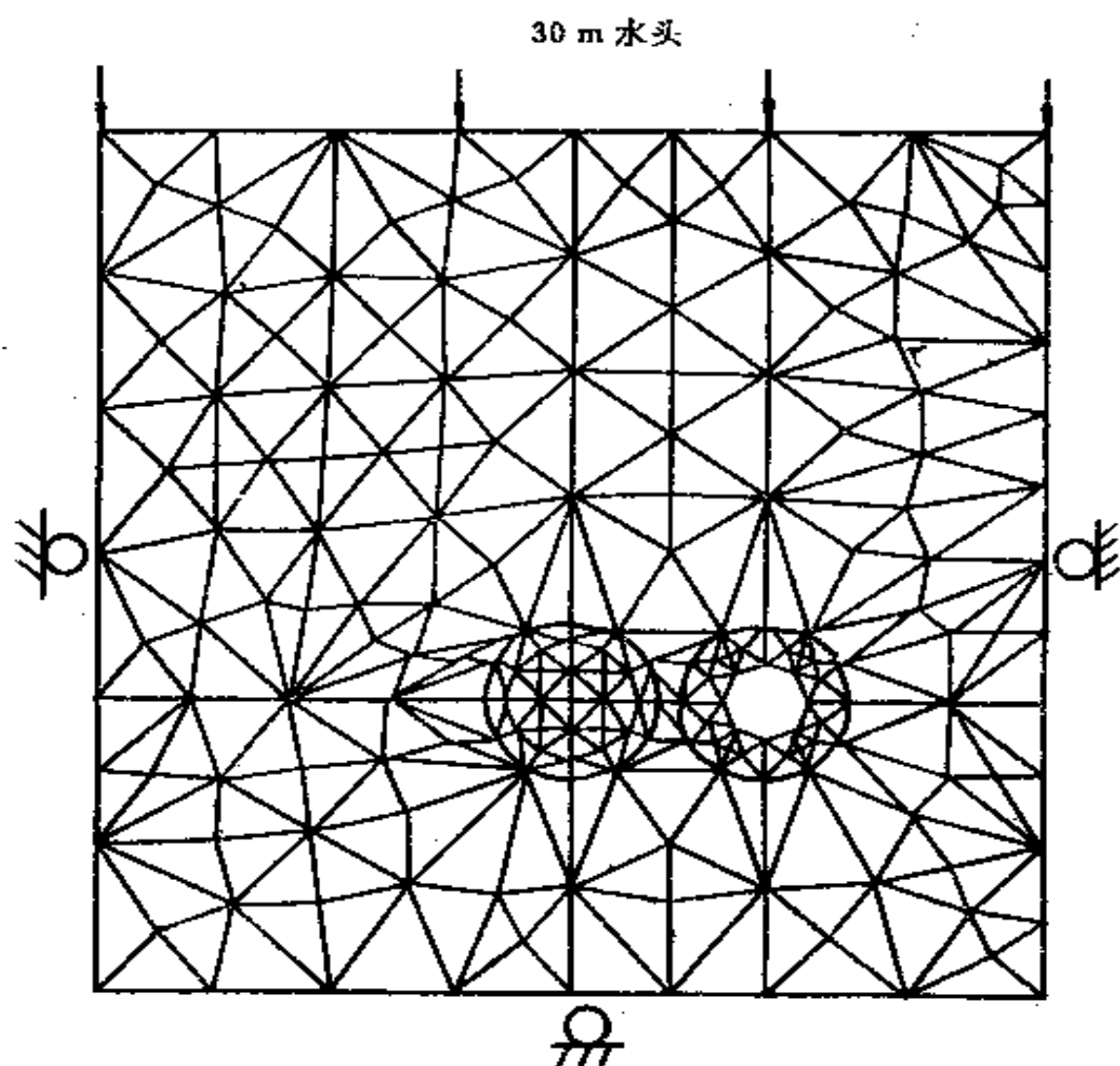


图 9-14 小隧道开挖后的单元划分

隧道的施工顺序为: ① 先挖小隧道; ② 支护小隧道; ③ 开挖主隧道; ④ 支护主隧道。

离散单元法的计算模型如图 9-14 所示, 底部和两侧受滚动支撑, 上部作用有与 30m 海水重量等价的应力。假定

模型所受压力是静水压力。在用离散单元法模拟开挖小隧道时，先加重力，然后开挖，直到系统平衡时才停止迭代计算。此时隧道的弹性位移场如图 9-15 所示。接下来模拟衬砌支护，衬砌支护可以用 16 个梁单元来模拟(见图 9-16)。最后开挖主隧道，系统平衡后的位移和主应力分布如图 9-17 和图 9-18 所示。注意小隧道向主隧道方向运动。

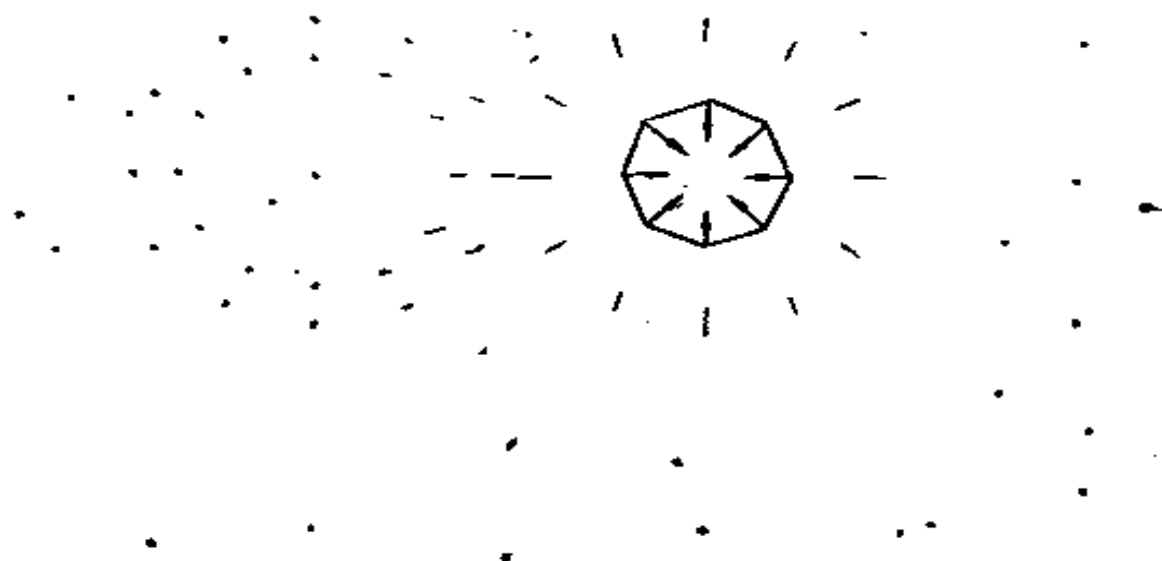


图 9-15 小隧道开挖后的位移场

图 9-19 是由围岩移动所引起的衬砌中最终轴向力的极线圈。从图中可以看出，最大轴向力在各隧道中都位于水平中平面上。在这些位置上，小隧道的轴向力为 $2.1 \times 10^5 \text{N}$ ，也就是轴向应力为 0.57 MPa ，而主隧道的最大轴向力为 $1.5 \times 10^5 \text{N}$ ，或轴向应力为 0.32 MPa 。

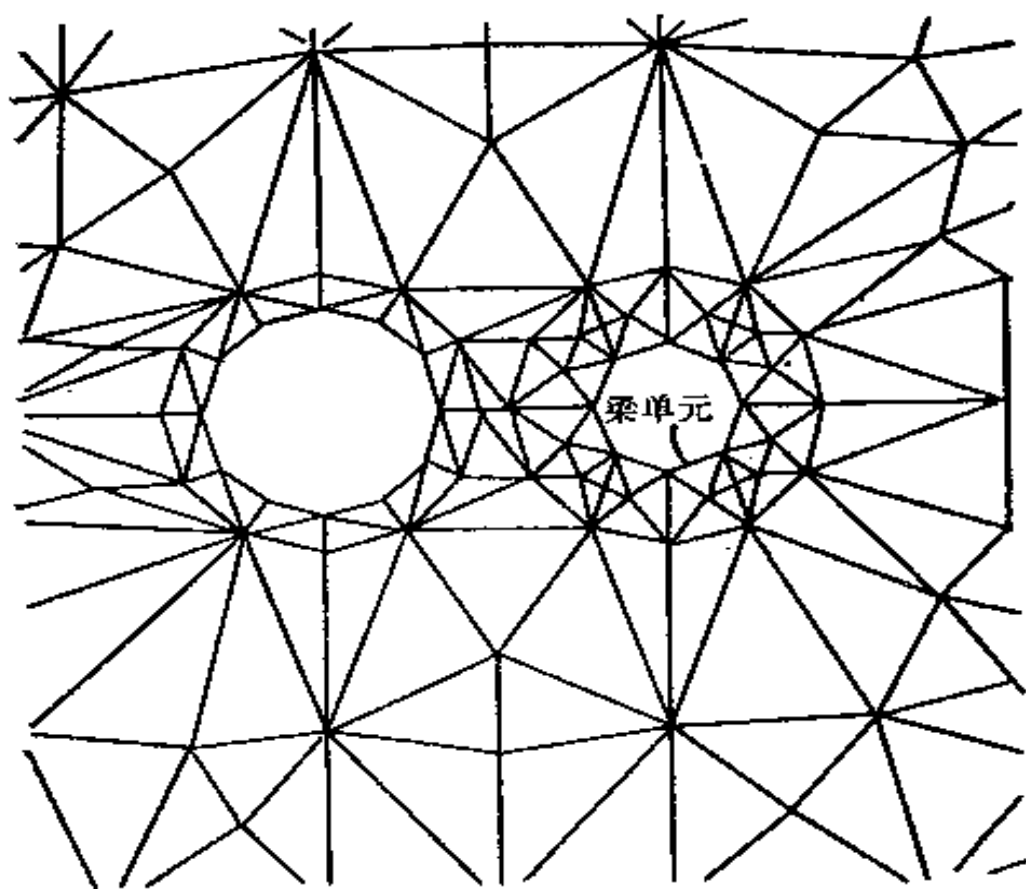


图 9-16 小隧道的支护和主隧道的开挖 (放大比例)

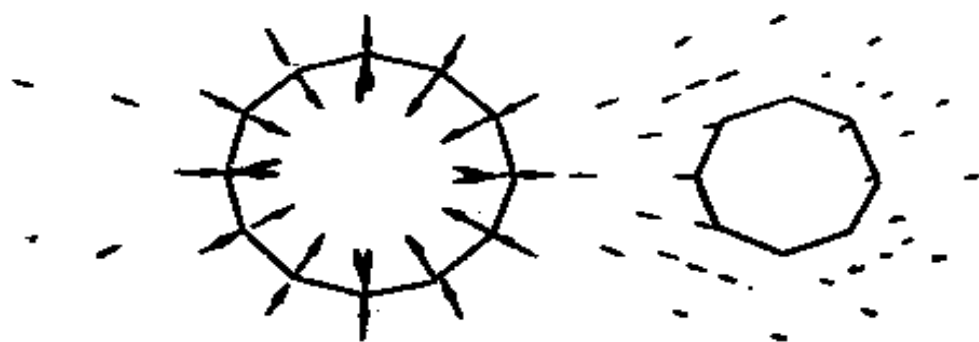


图 9-17 主隧道开挖后的位移

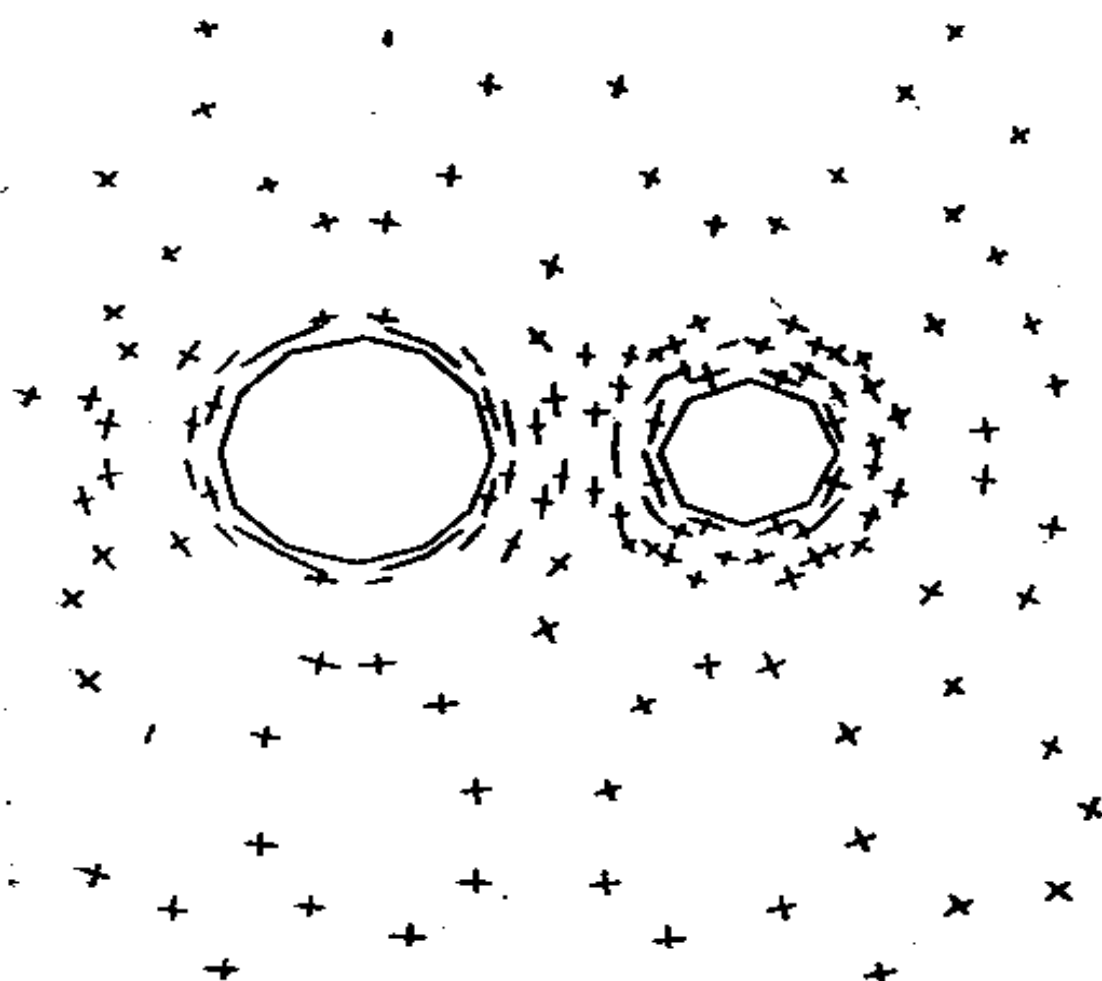


图 9-18 主隧道开挖后的主应力

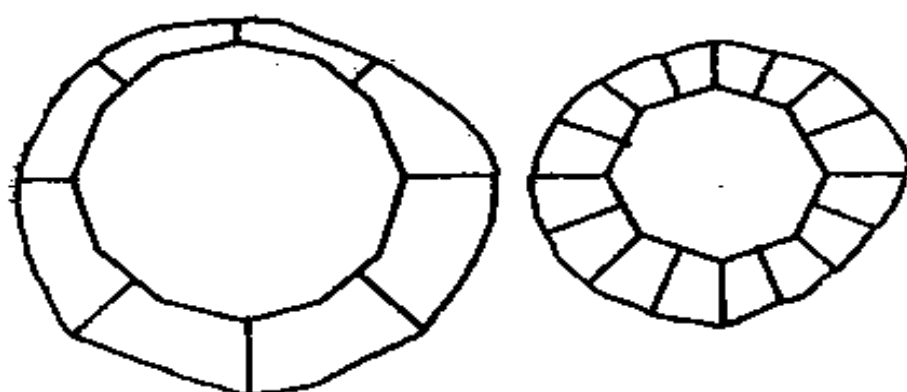


图 9-19 衬砌中的轴向力分布

衬砌中的总应力是 σ_r 地层应力 σ_r 与静水应力 σ_w 之和。地层应力可由衬砌的轴向应力和弯曲应力算出：

$$\sigma_s = \frac{T}{A} + \frac{MC}{I} \quad (9-18)$$

式中, T 是轴向力; A 是横截面积; M 是弯矩; C 是外层到中性轴的距离; I 是惯性距, 等于 $\frac{1}{12}bt^3$, b 取 1, t 是混凝土的厚度。

(1) 对于小隧道, $T = 2.1 \times 10^5 \text{ N}$, $A = 0.37 \text{ m}^2$, $M = 9.15 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}$, $C = 0.185 \text{ m}$, $I = 4.22 \times 10^{-3} \text{ m}^4$, 则地层应力为:

$$\sigma_s = \frac{2.1 \times 10^5}{0.37} + \frac{9.15 \times 10^4 \times 0.185}{4.22 \times 10^{-3}} = 4.6 \text{ (MPa)}$$

静水应力为:

$$\sigma_w = p_h \cdot r / t \quad (9-19)$$

式中, p_h 是静水压力; r 是半径; t 是衬砌厚度。将已知数据代入上式, 可得:

$$\sigma_w = 9.8 \times 110 \times 2.62 / 0.37 = 7.6 \text{ (MPa)}$$

因此, 总应力 $\sigma_t = \sigma_s + \sigma_w = 12.2 \text{ (MPa)}$

(2) 对于主隧道, $T = 1.5 \times 10^5 \text{ N}$, $A = 0.46 \text{ m}^2$, $M = 4.5 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}$, $C = 0.23 \text{ m}$, $I = 0.008 \text{ m}^4$, 则:

$$\sigma_s = \frac{1.5 \times 10^5}{0.46} + \frac{4.5 \times 10^4 \times 0.23}{8 \times 10^{-3}} = 1.6 \text{ (MPa)}$$

$$\sigma_w = 1.078 \times 4.11 / 0.46 = 9.6 \text{ (MPa)}$$

从而可得:

$$\sigma_t = 1.6 + 9.6 = 11.2 \text{ (MPa)}$$

9.3.3 锚杆支护

1. 端部锚固式锚杆

试验和理论研究都证实, 端部锚固式锚杆主要靠其轴向

张力来锚固岩体，而锚杆的弯曲变形可以不予考虑。因此，可以把锚杆看成一维杆单元，其力—位移关系已在第七章中讲述过，这里就不再赘述了。

当锚杆所锚固的块体发生平移和转动时，可由式(7-9)计算锚杆两端所产生的力，然后再将该力加到块体形心上进行离散单元迭代计算。

锚杆的锚固能力可按式计算：

$$F \leq \frac{\pi d^2}{4} \sigma_s \quad (9-20)$$

式中， F 是锚杆所受的轴向拉力； d 是锚杆的直径； σ_s 是锚杆的屈服极限强度。

应该指出，上述模型忽略了当不连续面发生剪切滑移时锚杆的阻止作用。在不连续面有非常大的剪切位移时，此因素应予考虑。

2. 全长锚固式锚杆

全长锚固式锚杆的作用机理较端部锚固式复杂，可以利用有效长度的概念^[10]进行分析：假定锚杆的应变都集中在通过不连续面的有效长度（锚杆直径的 2—4 倍）内，如图 9-20 所示。

全长锚固式锚杆对其所锚固块体的锚固作用，可用两个弹簧元件来模拟（见图 9-21），其中一个弹簧平行于有效长度段以提供轴向力，另一个垂直于原锚杆方向以提供剪切力。锚杆轴向力和剪切力的大小可由有效长度端点处的位移增量求出：

$$\left. \begin{aligned} F_a &= k_a \Delta u_a \\ F_s &= k_s \Delta u_s \end{aligned} \right\} \quad (9-21)$$

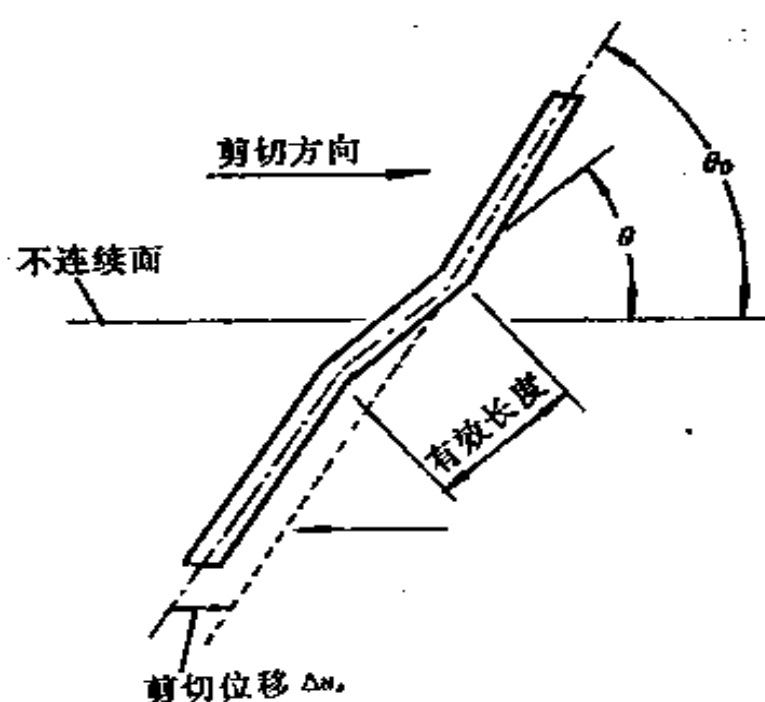


图 9-20 发生剪切变形后的锚杆

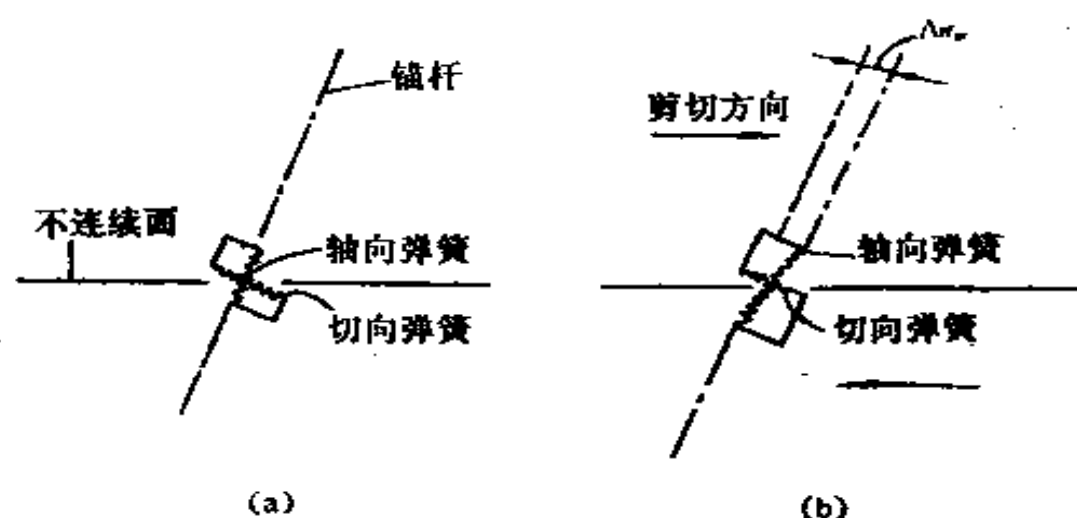


图 9-21 全长锚杆变形前(a)和变形后(b)

式中， F_a ， F_s 分别为锚杆所受的轴向力和剪切力（见图 9-22）； k_a ， k_s 分别为锚杆的轴向刚度和剪切刚度； Δu_a ， Δu_s 分别为锚杆有效长度两端点的相对轴向位移和剪切位移。

式(9-21)中的轴向刚度 k_a 可由下式求出：

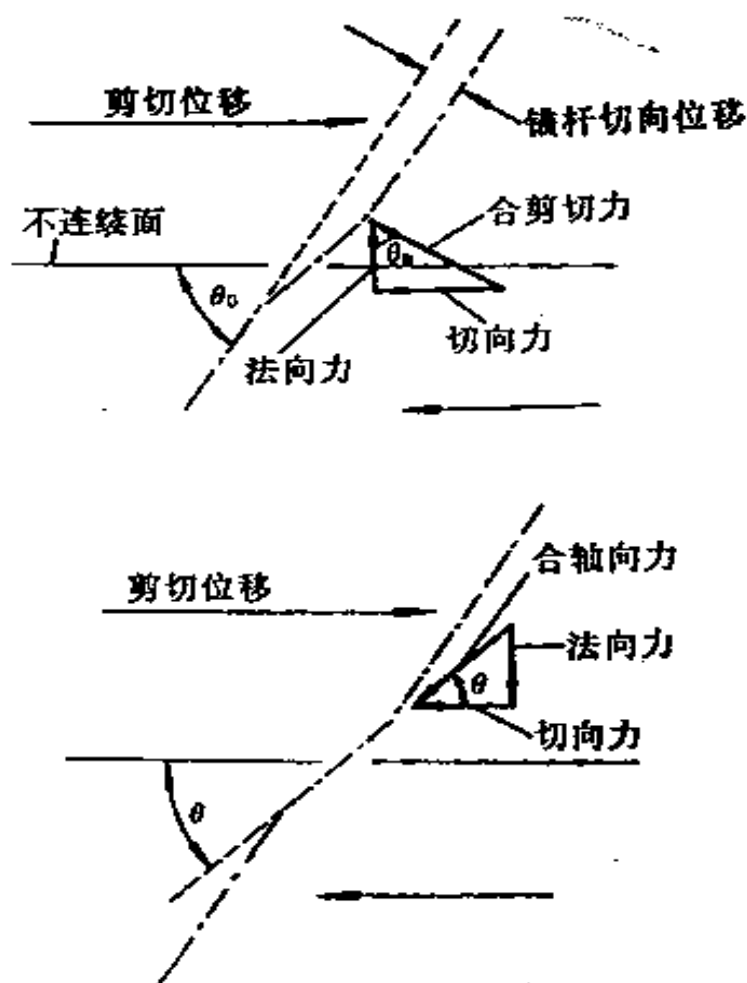


图 9-22 锚杆所受的力

$$k_a = \pi k d_1 \quad (9-22)$$

式中, d_1 为锚杆直径; $k = \left[\frac{1}{2} G_s E_s / (d_2/d_1 - 1) \right]^{\frac{1}{2}}$; G_s 为锚杆固结材料的剪切模量; E_s 为锚杆的弹性模量; d_2 为钻孔直径。式(9-21)中的剪切刚度 k_s 可由下式求出:

$$k_s = E_s I \beta^3 \quad (9-23)$$

式中, I 为锚杆横截面的惯性矩; E_s 为锚杆固结材料的弹性模量; 参数 β 可由下式确定:

$$\beta = [k / (4 E_s I)]^{\frac{1}{2}}$$

式中, $k = 2E_g/(d_2/d_1 - 1)$ 。

锚杆的最终轴向承载能力可由岩石的抗压强度及锚杆本身的屈服极限强度来确定, 即取下列两式中力值较小的一个:

$$P'_{ult} = 0.1\sigma_c\pi d_2 l \quad (9-24)$$

$$P^*_{ult} = \frac{\pi d_1^2}{4} \sigma_b \quad (9-25)$$

式中, σ_c 为岩石的单轴抗压强度; l 为锚杆固结长度; σ_b 为锚杆的屈服极限强度; 其他符号同前。

锚杆的切向抗剪能力可由下式计算:

$$F_s^{max} = \frac{\pi d_1^2}{4} \sigma_b$$

式中符号意义同前。

锚杆对节理峰值剪切强度 τ_{ult} 的影响为:

$$\tau_{ult} = [F_a \sin \theta \tan(\varphi + i) + F_a \cos \theta + F_s \sin \theta - F_s \cos \theta \tan(\varphi + i)]/A \quad (9-26)$$

式中, φ 是岩体节理的内摩擦角; i 是粗糙角; θ 是锚杆有效长度与节理面的交角; A 是节理的面积。一般来说, θ 值在 $35^\circ - 55^\circ$ 时锚杆的加固效果比较好。

9.4 边坡工程

某一露天矿七采区经受多次地质构造运动, 岩体结构十分复杂。岩石的物理力学参数如表 9-2 所示。

现取边坡的一个断面, 用离散单元法研究它的稳定性。所计算的断面按反倾断层、裂隙面等划分成 47 个块体单元(见

表 9-2 岩石的物理力学性质

项 目 岩石种类	弹性模量 /MPa	泊松比	岩体容重 /(t/m ³)	粘结力 /MPa	内摩擦角
黑云母片麻岩	3.48×10^4	0.362	2.6	0.829	33°
厚 断 层 泥	40—50	0.40	2.4	0.082	24°
薄 断 层 泥	30—40	0.42	2.35	0.007	18°
片麻岩结构面	—	—	—	0.284	26°

图 9-23(a))，其中 46 号和 47 号块体固定。当移去这两个块体时，用以模拟开挖过程，即移掉 47 号块体表示开挖 250m 水平以上的矿体，移掉 46 号块体表示开挖 250 m 水平以下的矿体。

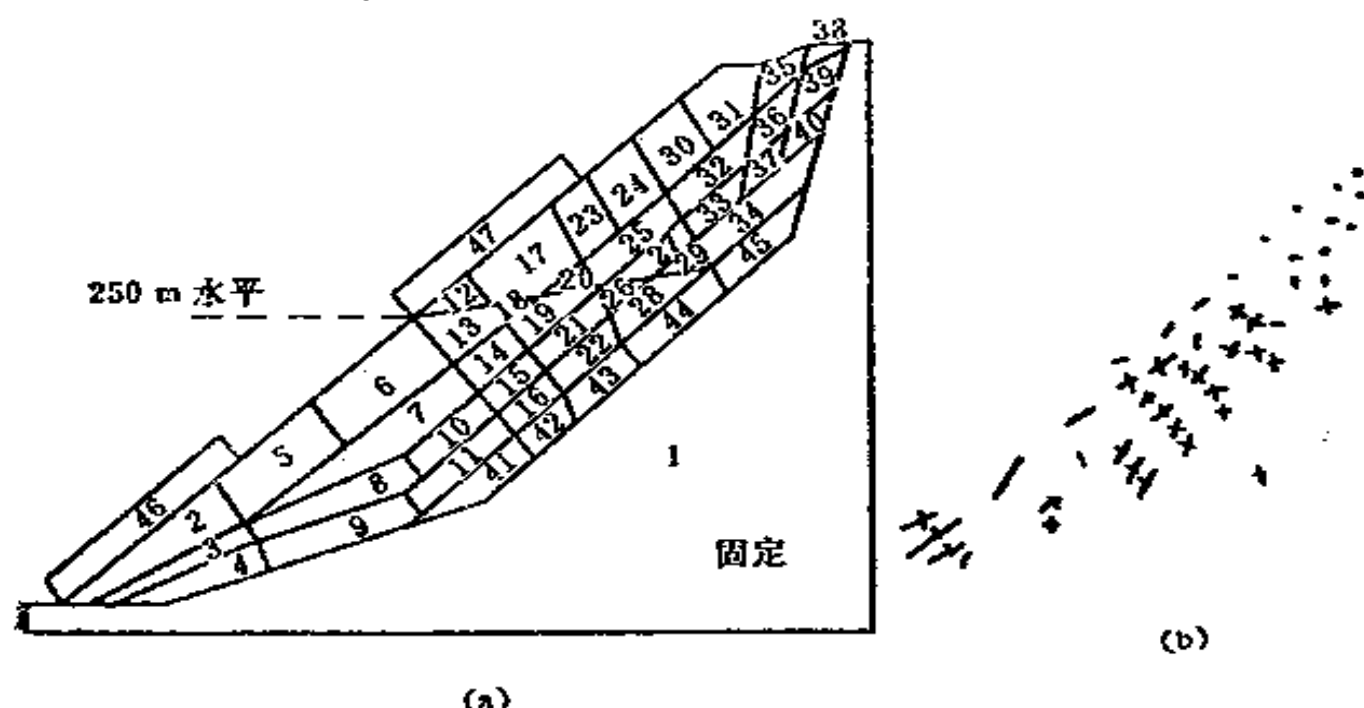


图 9-23 边坡初始状态(a)及其应力(b)

未开挖前，即虚拟时间 $t = 0.0000$ 时，边坡内的初始应力场如图 9-23(b) 所示。最大主应力的最大值 $S_{max} = 55.3$ MPa，其方向与水平轴的夹角为 36.2° ，是 2 号块体中的

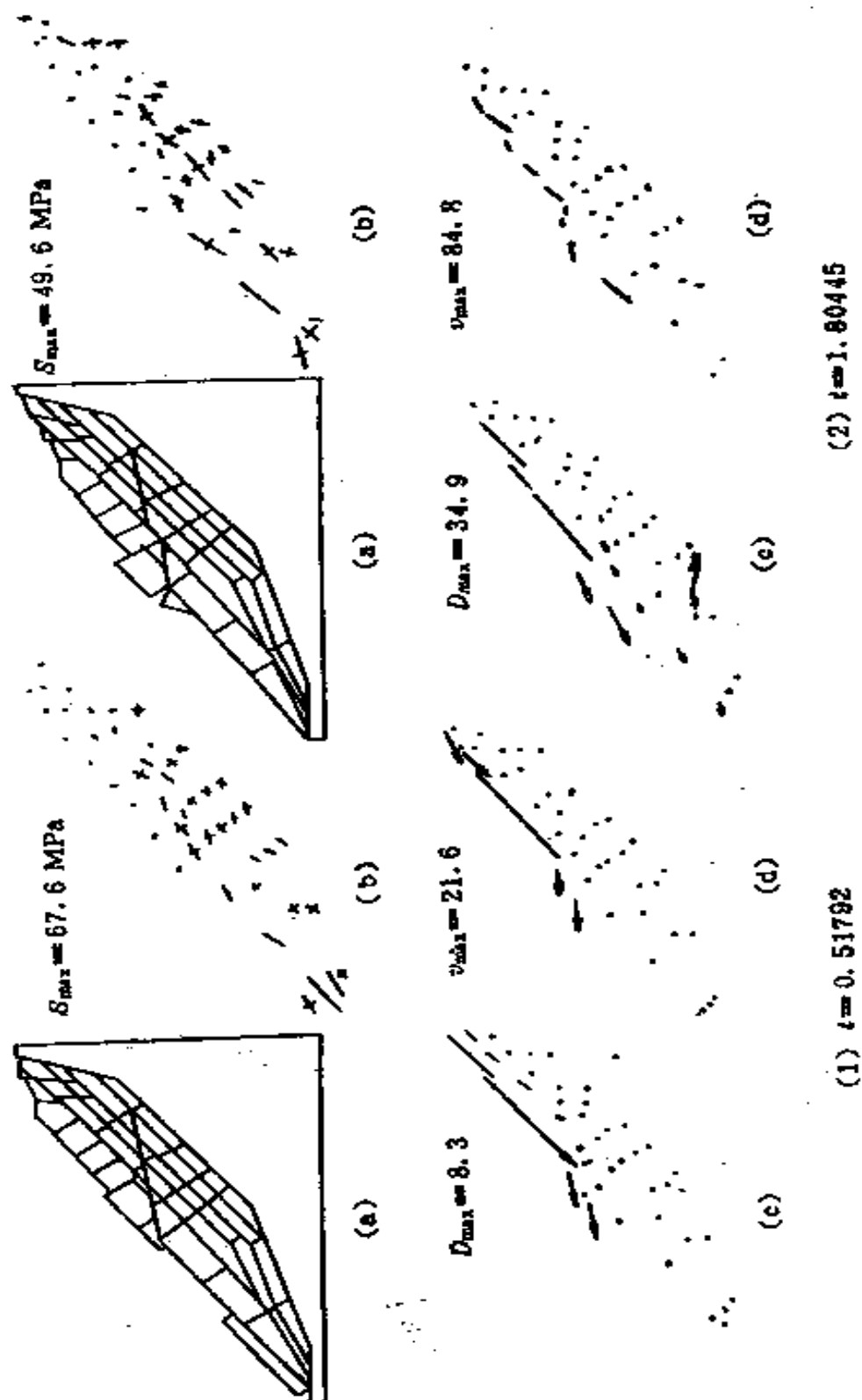


图 9-24 边坡开挖后的破坏过程

最大主应力值,说明边坡处于稳定平衡状态时,坡脚处应力值最大。另外还能看出,边坡内的应力值一般是随深度增加而增加的,如5号块体内的最大主应力值为36.4 MPa,而6号块体内为25.4MPa等。

边坡体开挖过程中,边坡的几何形态及其应力、位移和速度的演变过程分别如图9-24中的(a)、(b)、(c)和(d)所示。由图9-24可见(虚拟时间 $t=1.08445$),12,17号块体已被其上方块体挤出,产生了凸起现象;而边坡顶部的35,38号块体等,由于其下沉量不同,故在下滑过程中形成了一定的阶步。这些同现场观察到的结果基本一致。

9.5 地下开采问题

9.5.1 矿柱的稳定性问题

如图9-25所示,研究急倾斜矿体(平均倾角 80°)在990 m水平至1190 m水平开采时的房柱稳定性问题。已知一组近似水平的节理,其平均倾角为 10° ,平均间距为30m,矿体的平均厚度为14m。先开采1090m水平以上的矿房,然后开采其下水平的矿房,最后留下一个10 m长的冠形矿柱。

本模型由4种岩石组成:顶板石英岩、底板石英岩、带状矿体和片状矿体。实验测得这些岩石的物理力学性质如表9-3所示。节理的力学性质为:法向刚度和切向刚度皆为500 MPa/m,内摩擦角为 27° ,粘结力为0.0。在开采前,1190m水平岩体所受的静水压力为33 MPa。

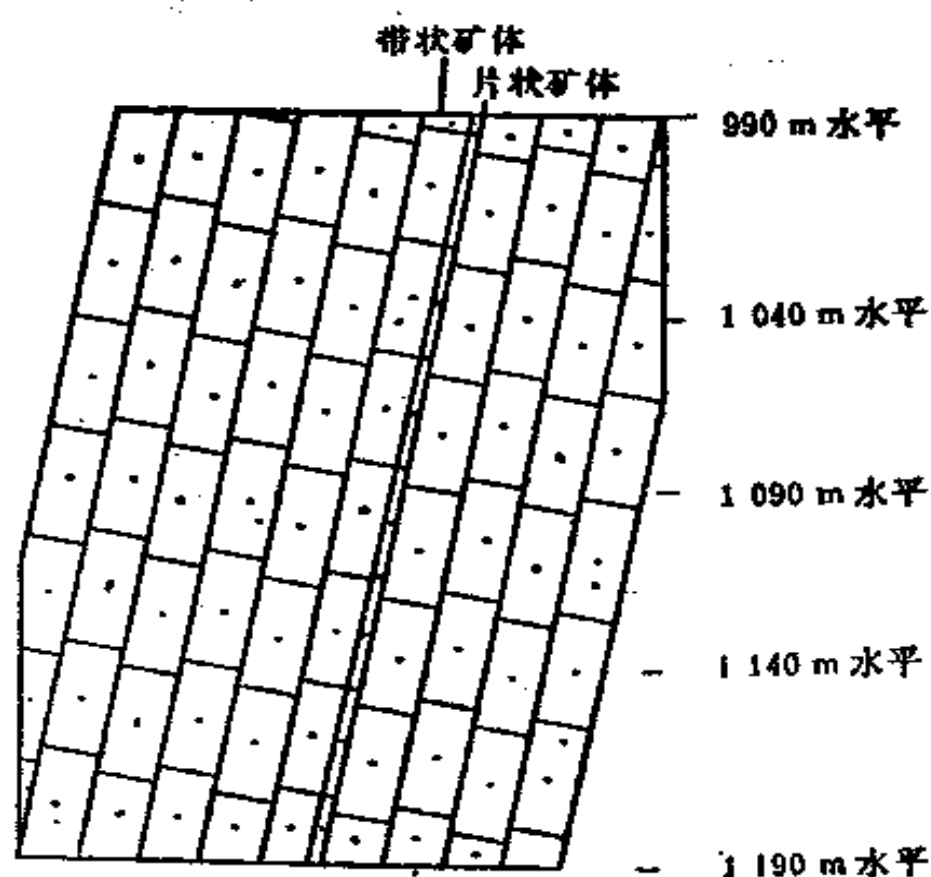


图 9-25 矿床开采前的状态

表 9-3

岩石的物理力学性质

名 称	顶板石英岩	底板石英岩	带状矿体	片状矿体
弹性模量/MPa	62	56	40	67
泊 松 比	0.29	0.28	0.33	0.28
单轴抗压强度/MPa	186	168	96	198

当模型所受的重力和边界应力达到实际水平时，矿体按 5 个步骤连续开采。第一步，先移去上水平块体，形成 45 m 高的矿房；然后分 4 步连续开采下水平矿房，进尺分别为 17 m, 15 m, 15 m 和 18 m，最后留下 10 m 作冠形矿柱，此时的应力分布如图 9-26 所示。在最后阶段，应力大都转移

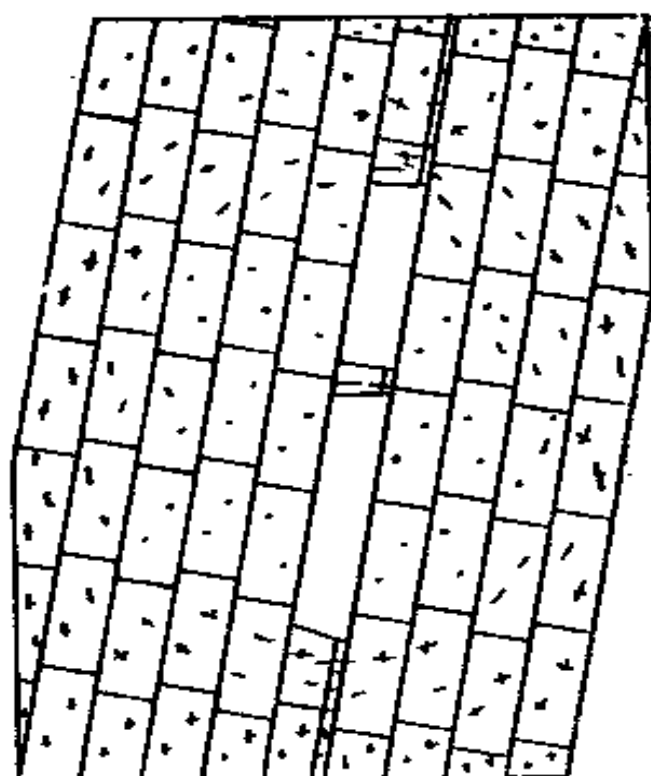


图 9-26 开采后的主应力分布

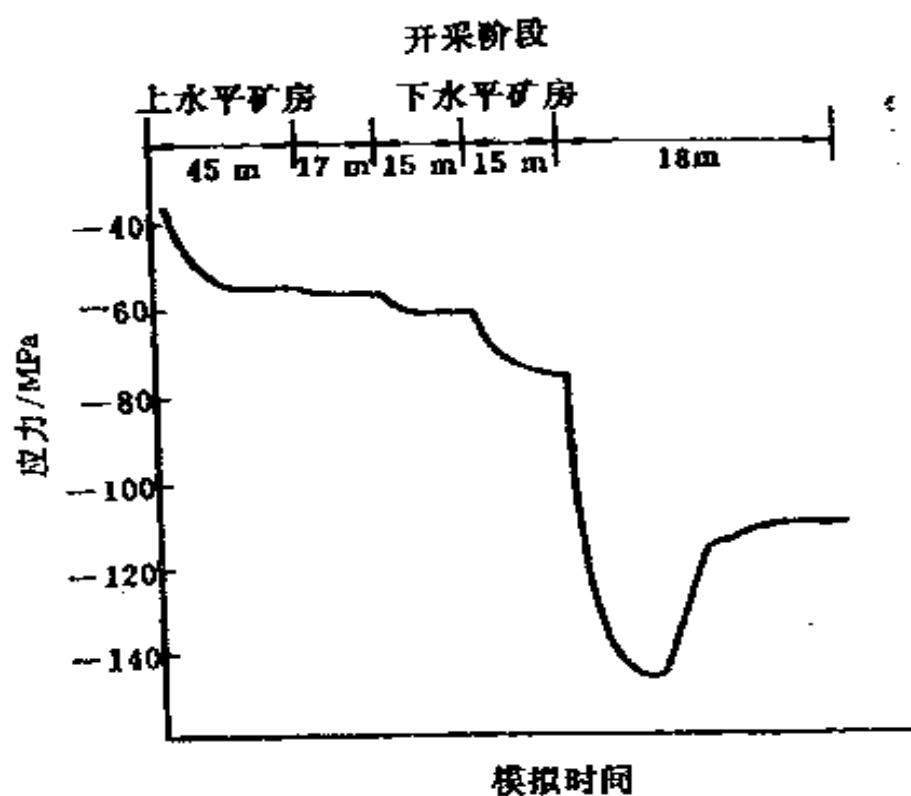


图 9-27 开采过程中矿柱的水平应力变化 (压应力为负)

到了上下支撑壁上。各开采阶段矿柱内的应力变化如图 9-27 所示,从图中可见,在最后开采工序时,应力降到了残余应力。

9.5.2 岩层移动

某煤矿的一个综采放顶煤工作面采深为 140 m,煤层厚度为 13 m,上覆泥质页岩厚度为 110 m,表土及流砂层厚 30 m。煤岩的物理力学性质如表 9-4 所示。

表 9-4 煤岩物理力学性质

名 称	弹性模量 /MPa	容 重 /(N/cm ³)	粘 结 力 /MPa	内摩擦系数
煤	0.05	14.2	1.3	0.25
泥质页岩	0.015	23.6	1.0	0.25

下面用离散单元法研究其裂隙带高度,以确保安全生产。用离散单元法模拟岩层移动,关键在于确定块体的尺寸,通常采用如下两种计算方法:

1. 曲率半径法

设块体的长、宽分别为 L 和 h , 则有:

$$L \cdot h = \delta \cdot R \quad (9-27)$$

式中, δ 是块体之间的容许变形值,可取 0.01—0.1 个单位长度; R 是岩层下沉弯曲线的最小曲率半径。

2. 来压步距法

这种方法可以根据实测确定块体尺寸,也可以按下式计算:

$$L/h = \alpha \sqrt{R_T / (3q)} \quad (9-28)$$

式中, R_T 是岩层的抗拉强度; q 是作用于岩层上的均布力;

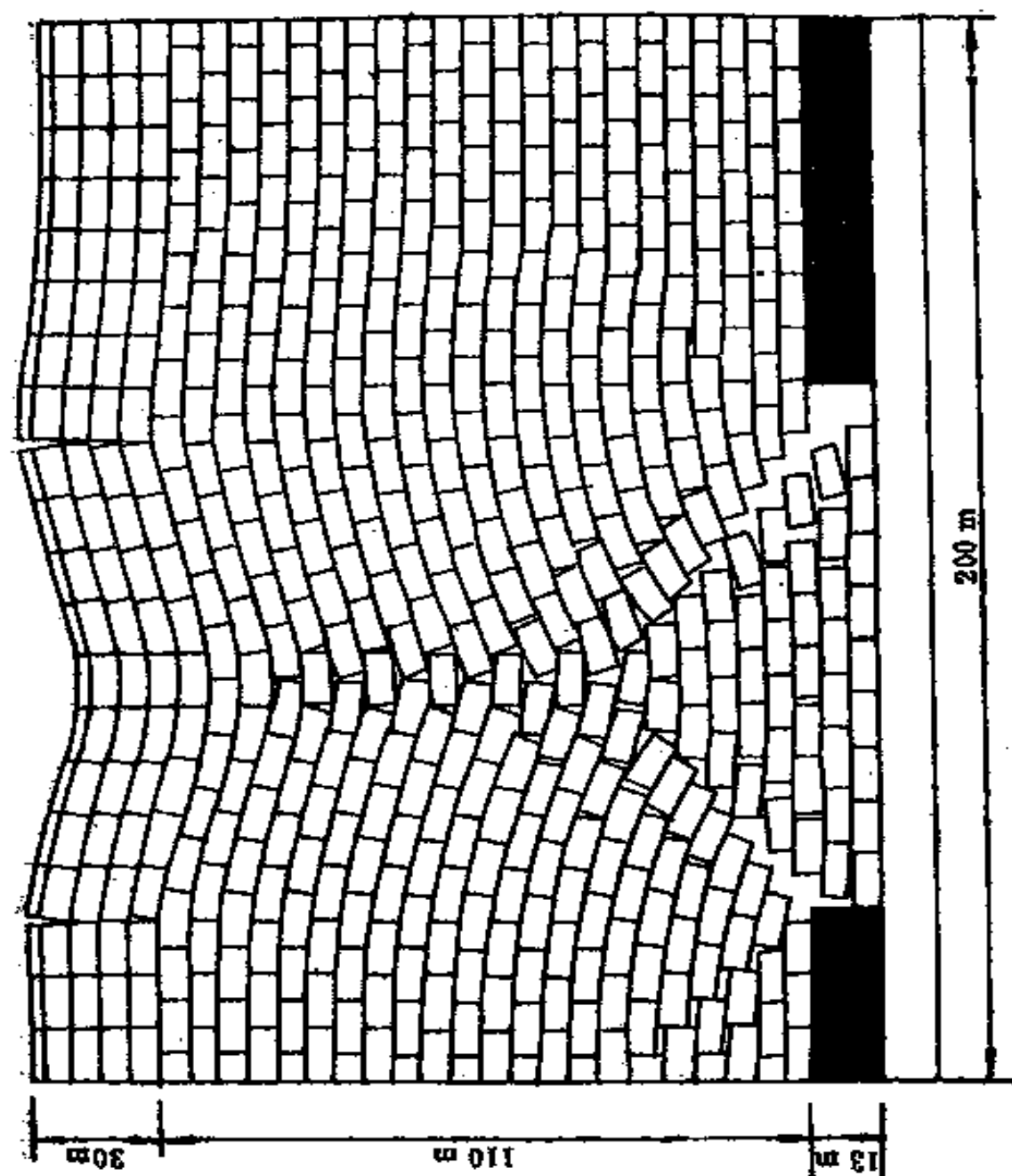


图 9-28 岩层移动和冒落形态

α 是折减系数, 可取 0.5—1.0。

本计算根据实测的周期来压步距确定块体尺寸为 $10\text{ m} \times 5\text{ m}$ 。

按上述条件, 当工作面推进位置距开切眼 90 m 时, 岩层移动情况如图 9-28 所示。从图中可见, 冒落带高度大致为 60 m , 而裂隙带的发展高度大约在 100 m 处, 为煤采出厚度的 7.7 倍, 已接近流砂层。同时, 还观察到地表产生了两条裂缝。地表的移动曲线如图 9-29 所示, 其中地表最大下沉值为 10 m , 最大水平移动值为 3.1 m 。

以上计算结果与实测结果基本相符。

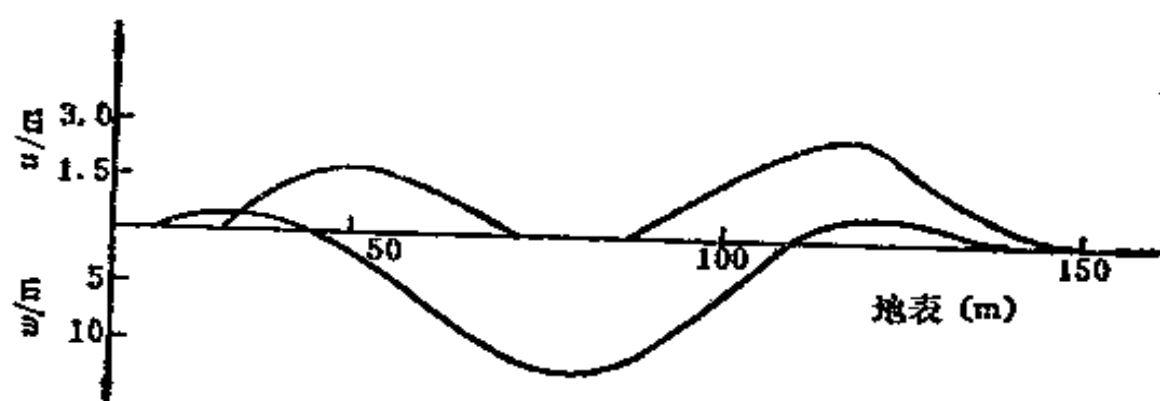


图 9-29 地表下沉(w)及水平移动(u)曲线

9.5.3 综采放顶煤的矿山压力问题

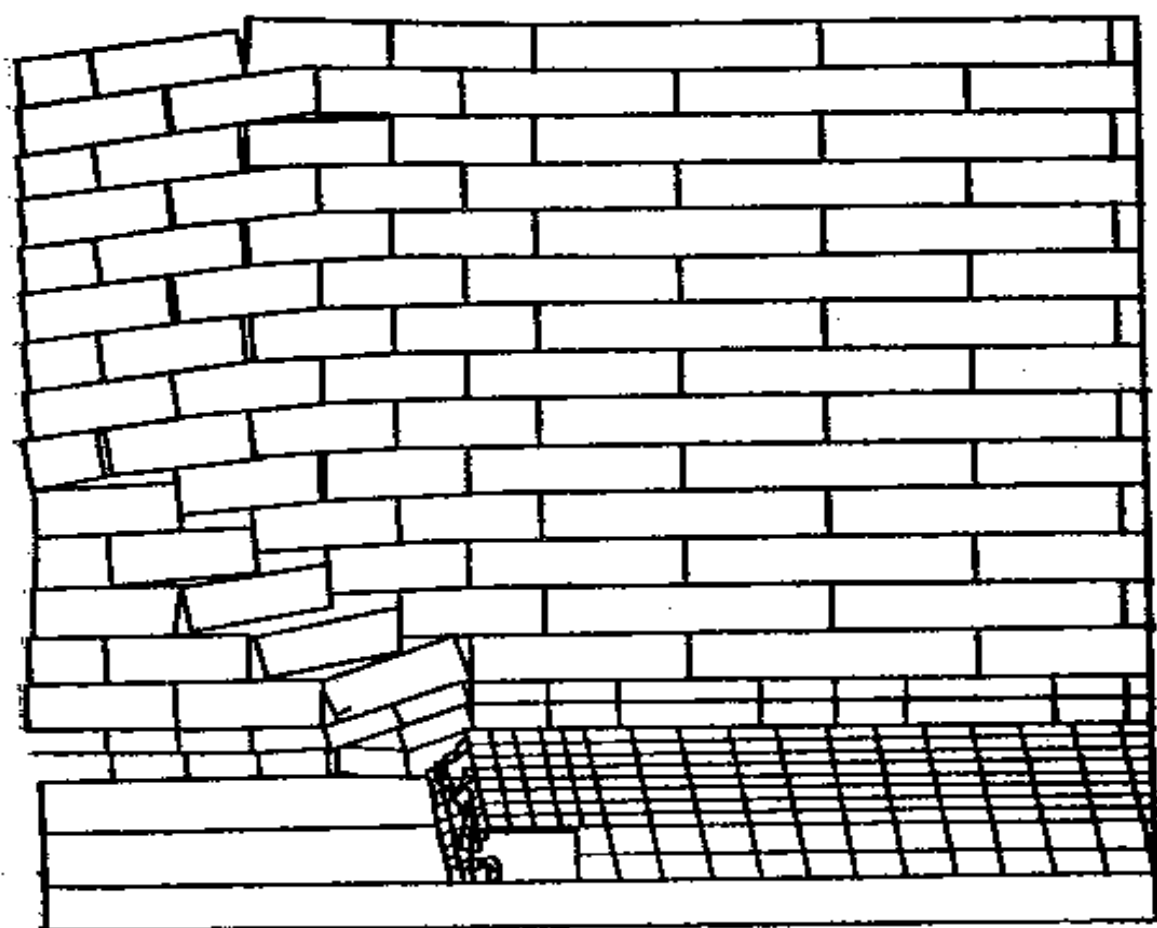
下文所要计算的采场开采深度为 150 m , 煤层厚度 6.5 m , 煤层顶板为 30 m 厚的粗砂岩, 赋存状态稳定, 不随顶煤的冒落而立即冒落。采用倾斜长壁放顶煤法开采, 其中割煤高度为 2.4 m , 放煤高度为 4.1 m 。煤层节理发育, 倾向节理的倾角平均为 76° 。煤岩的物理力学性质见表 9-5。

表 9-5

煤岩物理力学性质

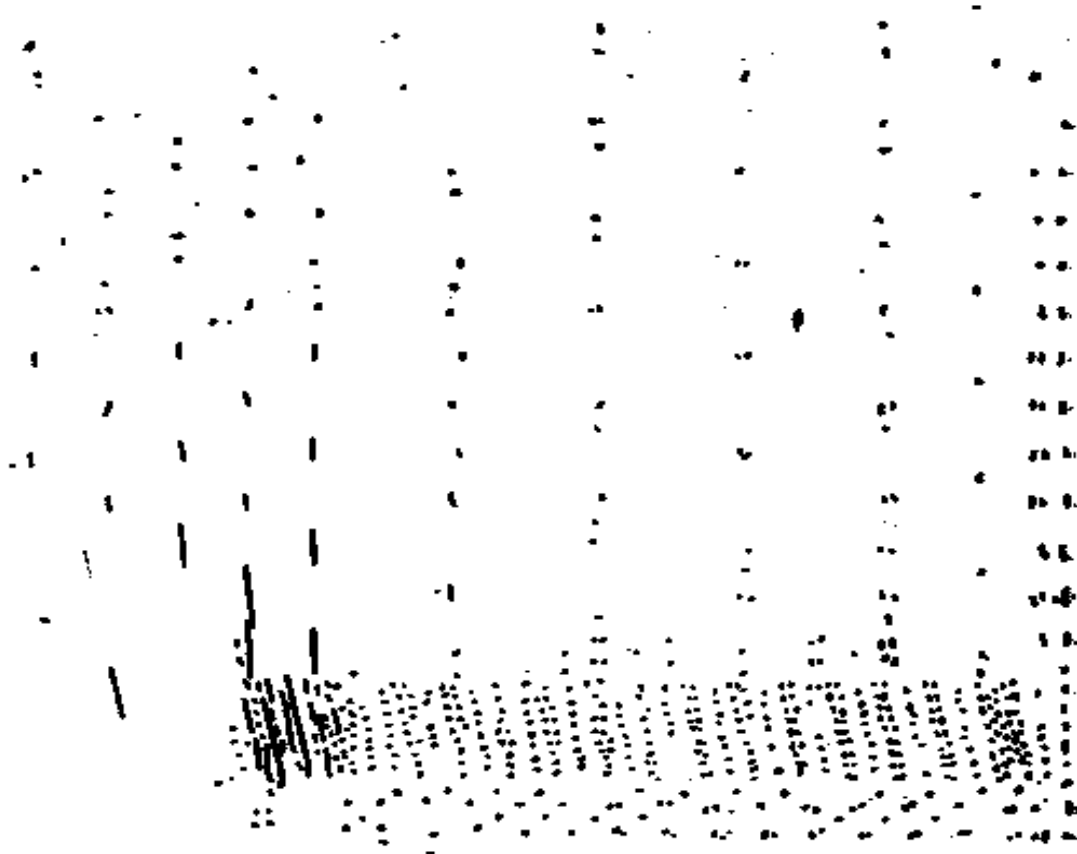
名 称	容 重 (g/cm^3)	粘 结 力/ MPa	内 摩 擦 系 数	抗 压 强 度 / MPa
岩 石	2.65	1.80	0.53	4.50
煤	1.41	2.50	0.42	12.2

根据上述条件所得到的离散单元法计算结果如图 9-30 所示。从图 9-30(a) 中可见, 顶煤沿节理面滑落, 冒落角大约为 76° 。另外, 由于受水平方向挤压作用, 破碎煤块在下滑过程中容易成拱, 造成上下位煤层的离层, 产生了放煤不



(a) 形态

图 9-30 岩层移动形态(a)和力场(b)



(b) 力场

图 9-30 岩层移动形态(a)和力场(b)

均衡现象。

虚拟时间 $t = 15.8423$ ，支架所受压力沿顶梁分布如图 9-31 所示。图中原点设在顶梁与掩护梁的交接处。从图中不难发现，顶梁压力的分布有一定规律性，压力随着远离煤壁而增加。这与实测所得到的支架后柱支撑

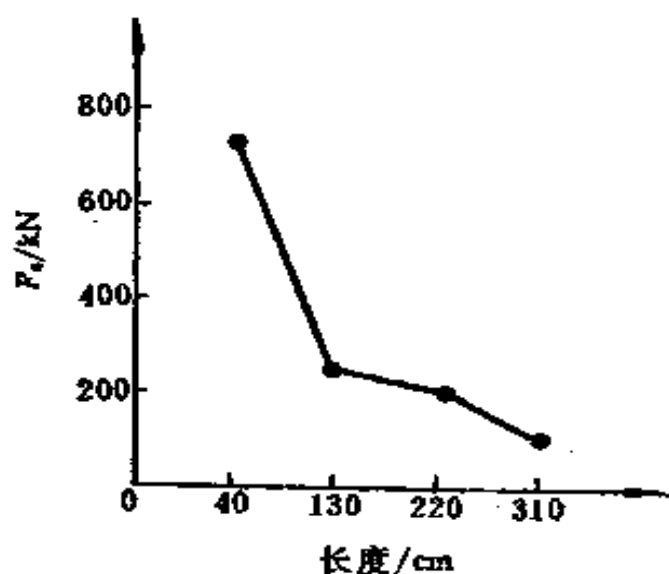


图 9-31 顶梁压力分布

力大于前柱支撑力的结果是一致的。

另外，从图 9-30 (b) 中可以发现，顶梁上的支撑压力较大，对顶煤破碎有利，因此也就有利于下一轮放煤。

9.6 动载问题

Stephansson 和沈宝堂用离散单元法研究了核废料贮存巷道在受到地震时的稳定性问题^[20]。计算模型有两个（见图 9-32）：其一是简单结构模型 A，即大约在 100 m 深的位置仅有两条水平节理；其二是复杂结构模型 B，即在 500 m 深处存在节理网。s-波施加在模型边界的底边，并且假定所有边界都是不反射边界。岩石和节理的力学性质见表 9-6。

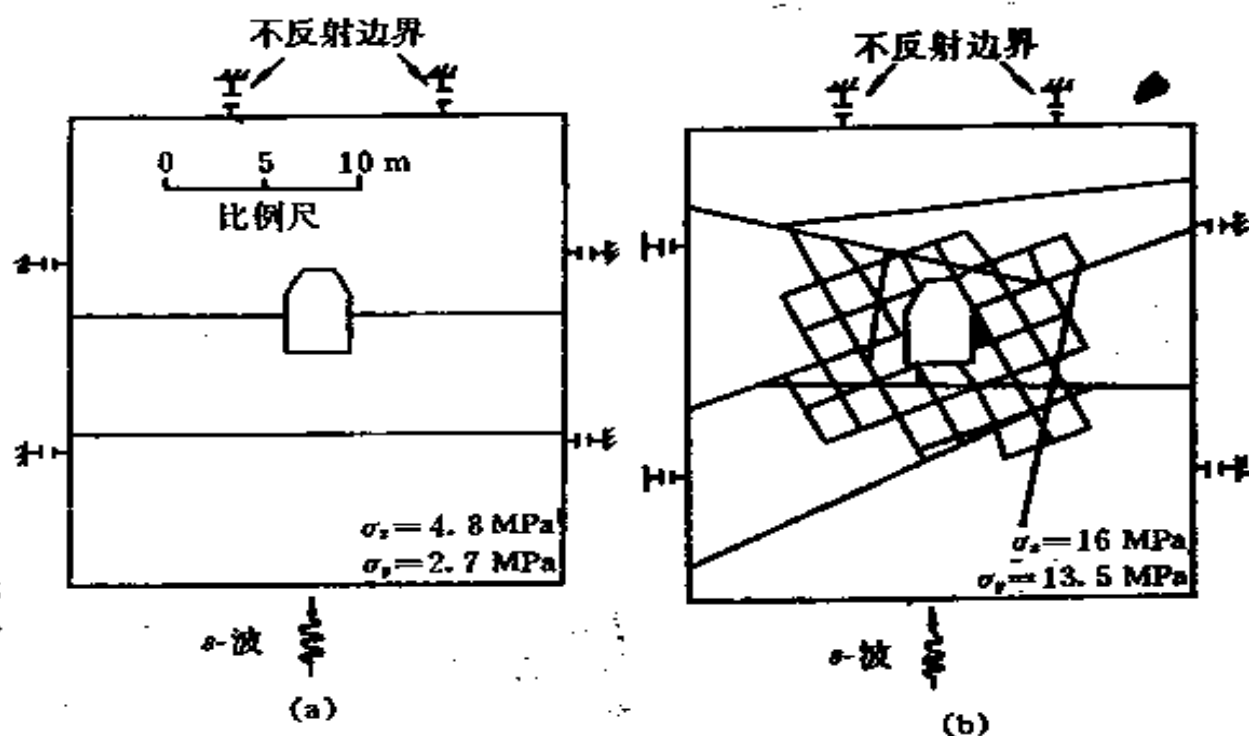


图 9-32 受动载作用的核废料巷道模型

表 9-6

岩体的物理力学性质

名 称	弹性模量 /GPa	泊松比	法向刚度 /(GPa/ m)	切向刚度 /(GPa/ m)	摩擦角 (°)	粘结力 /MPa
完整岩石	40	0.2	—	—	—	—
主节理区	—	—	1.0	0.33	20	0
中等节理区	—	—	10.0	3.3	25	0
次节理区	—	—	100	33.3	30	0

模型A的模拟结果是,当波速出现两个峰值时,100 m深处的节理产生了滑移,此滑移将引起高频率的二次波。如图 9-33(b)所示是在巷道底边界所记录下来的 y 方向的二次波。由于节理的滑移,入射波在通过节理时其波峰被消平(见图 9-33(a)),图中虚线是入射波速,实线是在巷道顶部所记录下来的波速。此外,在地震过程中,岩体中的剪应

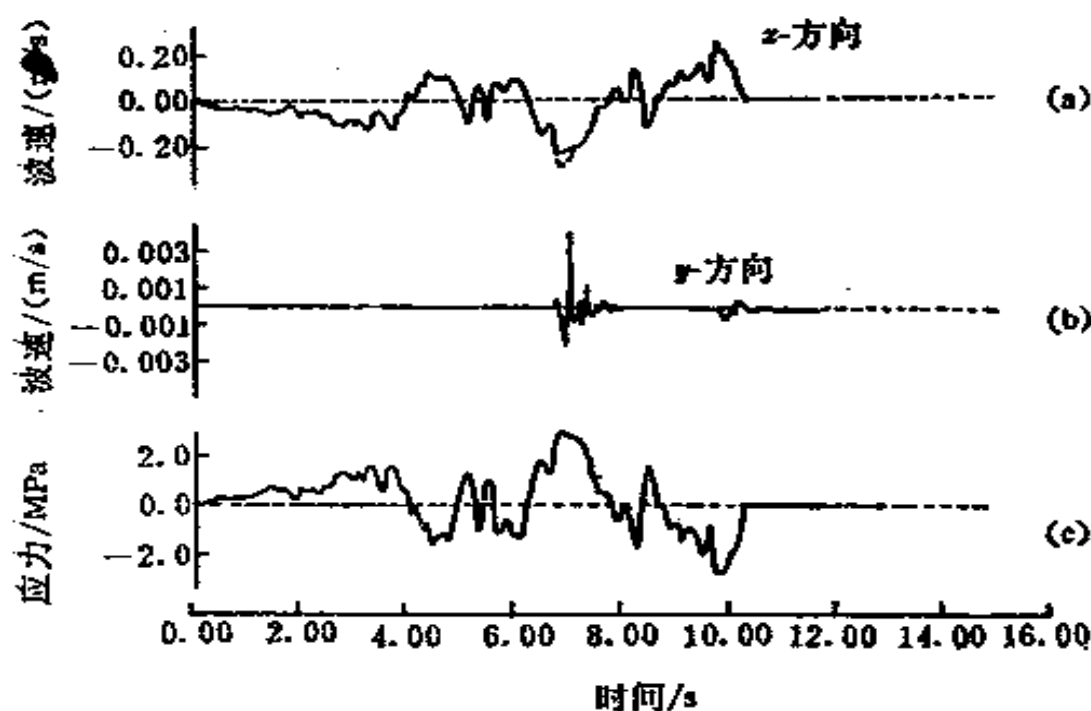


图 9-33 地震波速及其所产生的应力(模型A)

力和正应力时刻在变化,但应力幅值不大于 3 MPa,如图 9-33(c)所示是巷道顶部剪应力随时间的变化情况。

由模型 B 的模拟结果可以发现,在 500 m 深处的巷道壁有岩块松动现象(见图 9-32(b)中涂黑的块体),但其他节理没有产生滑移现象,入射波与记录到的波几乎一样(见图 9-34(a))。在地震过程中,巷道附近的应力幅值小于 2.0 MPa(见图 9-34(b))。

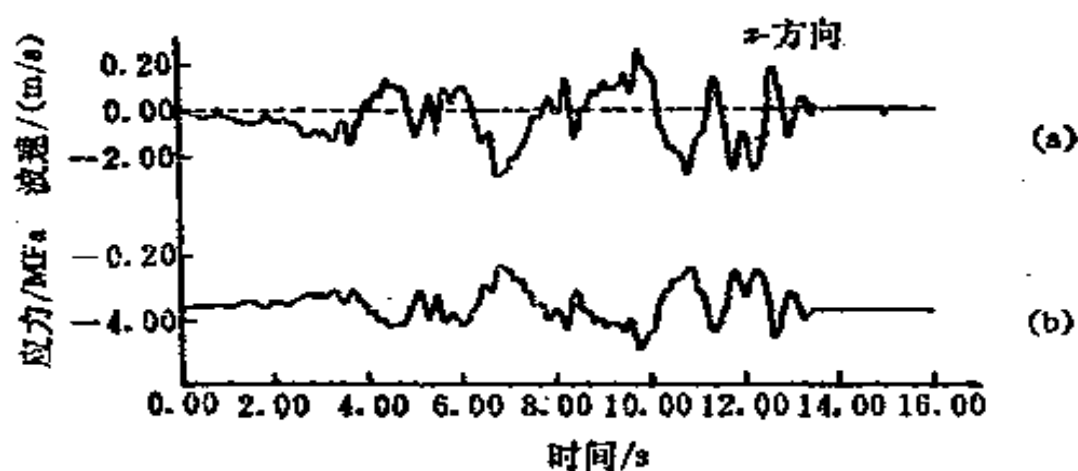


图 9-34 地震波速及其所产生的应力(模型 B)

9.7 冰雪力学问题

9.7.1 冰川对岩体稳定性的影响

冰川对核废料周围岩体稳定性的影响是至关重要的。沈宝堂等对此问题用三维离散单元进行了研究。下面介绍他们的研究成果。

岩体模型如图 9-35 所示。模型中的节理分 3 个区域:主节理区、中等节理区和次节理区。完整岩石和节理区的性质同表 9-6。冰川对岩体的加卸载循环分 5 步进行(见图

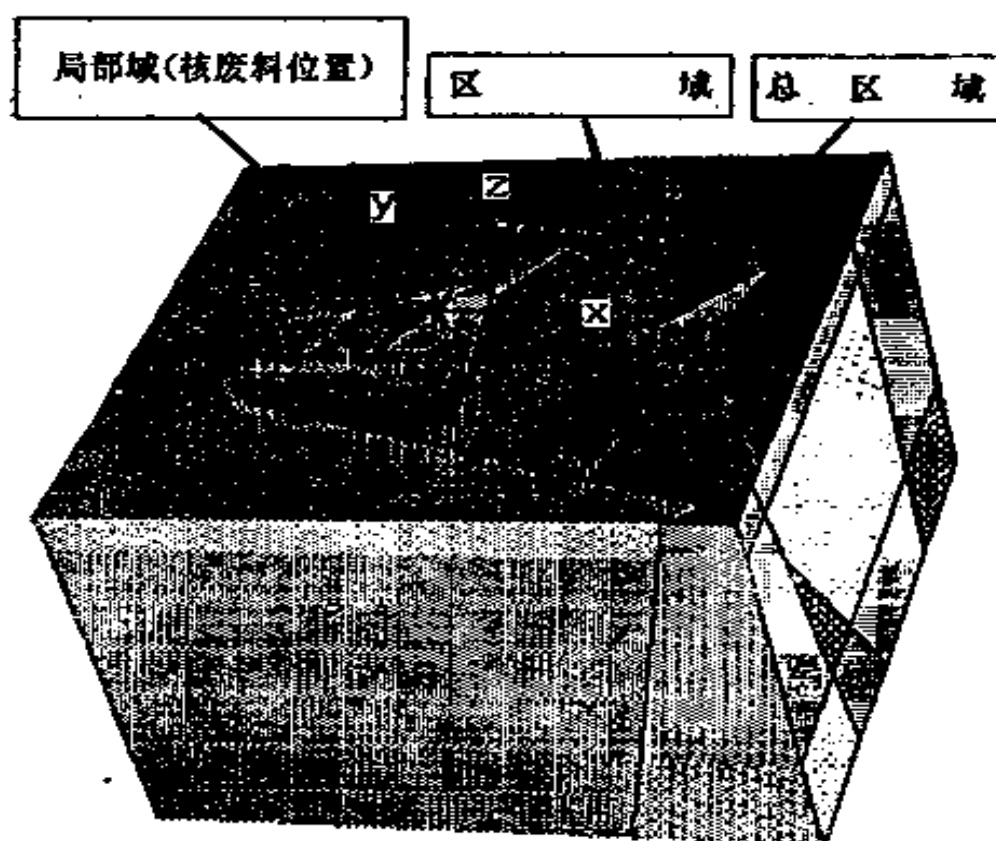


图 9-35 岩体的三维模型

9-36)。

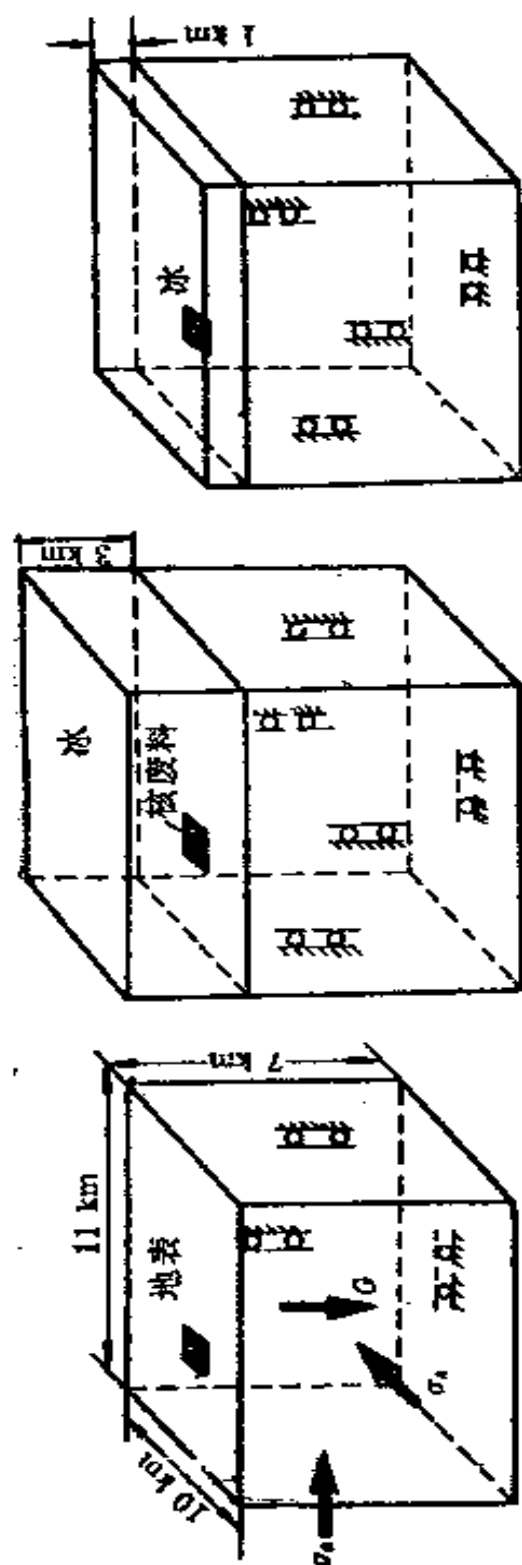
Stephansson 等给出了瑞典原岩应力 (单位: MPa) 分布公式:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2 + 28|y| \\ \sigma_z &= 4 + 32|y| \\ \sigma_y &= 27|y| \end{aligned} \right\} \quad (9-29)$$

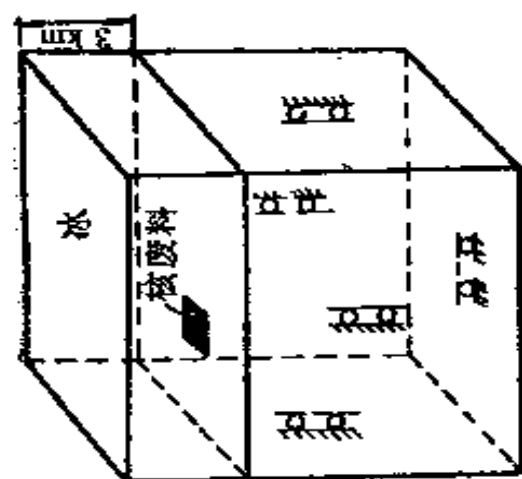
式中, $|y|$ 是深度 (km)。冰在加卸载时的边界条件如图 9-36 所示。核废料在岩体中的贮存深度分 500m, 1000m 和 1500m, 共 3 种情况。

1. 岩体中的应力分布

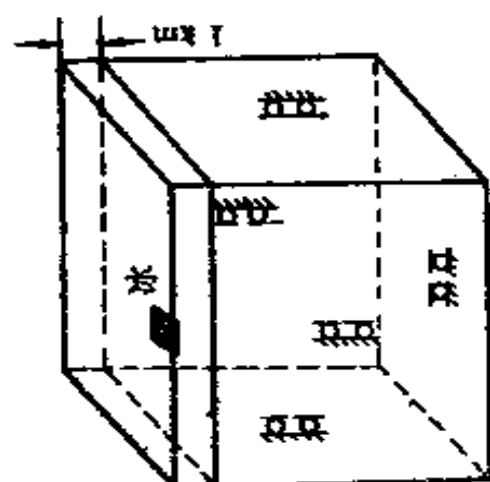
岩体结构越复杂, 其内部应力分布也越复杂。一般情况下, 裂隙区块体角与角作用处有应力集中现象。岩体在压实



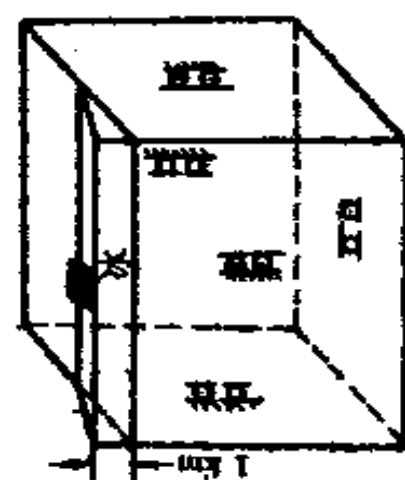
(a)



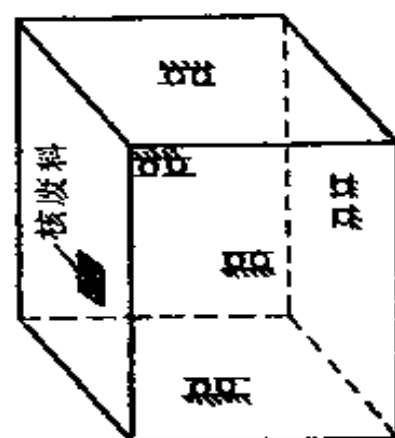
(b)



(c)



(d)



(e)

图 9-36 冰川的加卸载循环

过程中就已有应力集中现象（特别是在单元划分密集的地方），而在地表加上厚 3 km 的冰层后，应力更加集中（见图 9-37）。

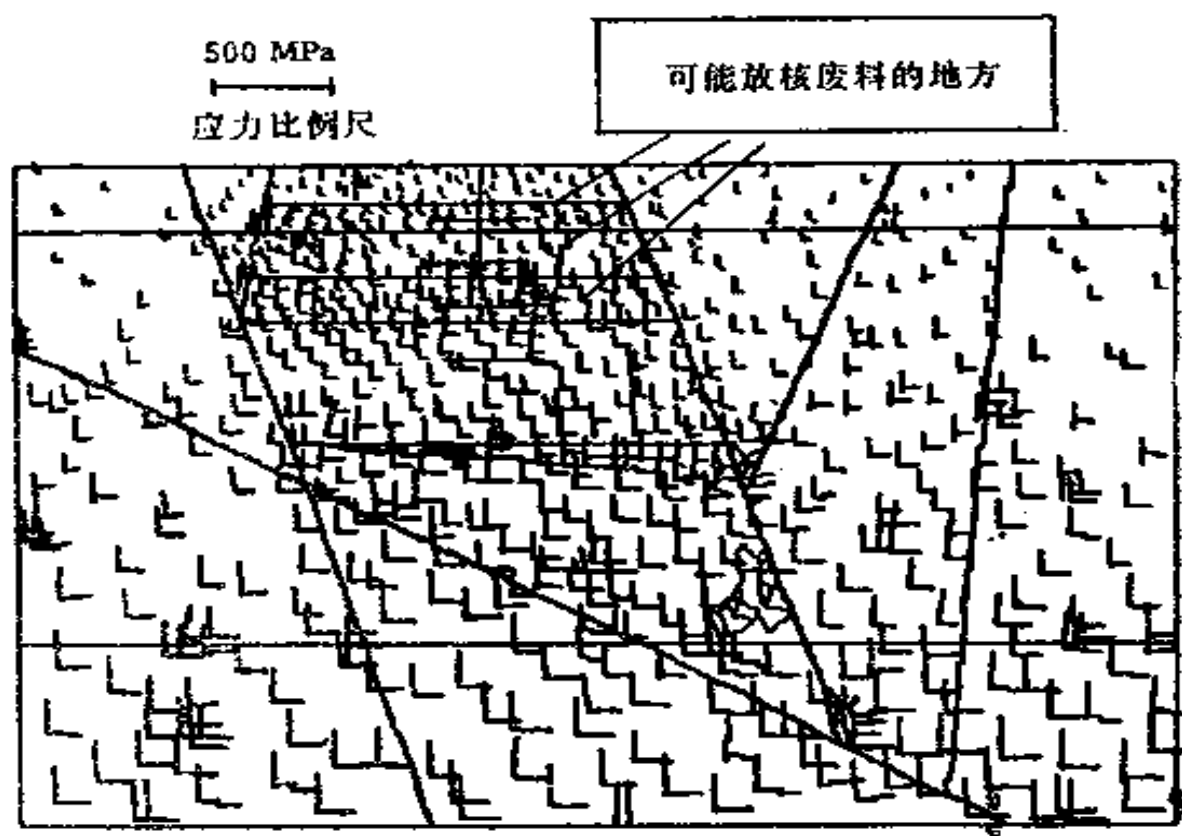


图 9-37 $z=0$ 平面内的主应力分布

由于用来存放核废料的岩体其节理是垂直和水平方向分布的，故其应力分布比较均匀。以上 3 个核废料贮存点在冰川期和冰消期的垂直应力分布如图 9-38 所示。

2. 地表移动

3 km 厚的冰载可以引起 5 m 的地表下沉。一个冰楔荷载将引起地表沿竖向的不均匀变形。如图 9-39 所示是地表位移沿冰楔的变化情况。从图中可以看出，有无冰楔的地方其位移之差大约是 1.2 m。节理裂隙降低了岩体的刚度，使地表产生了更大的位移（见图 9-39）。图 9-39 中曲线光

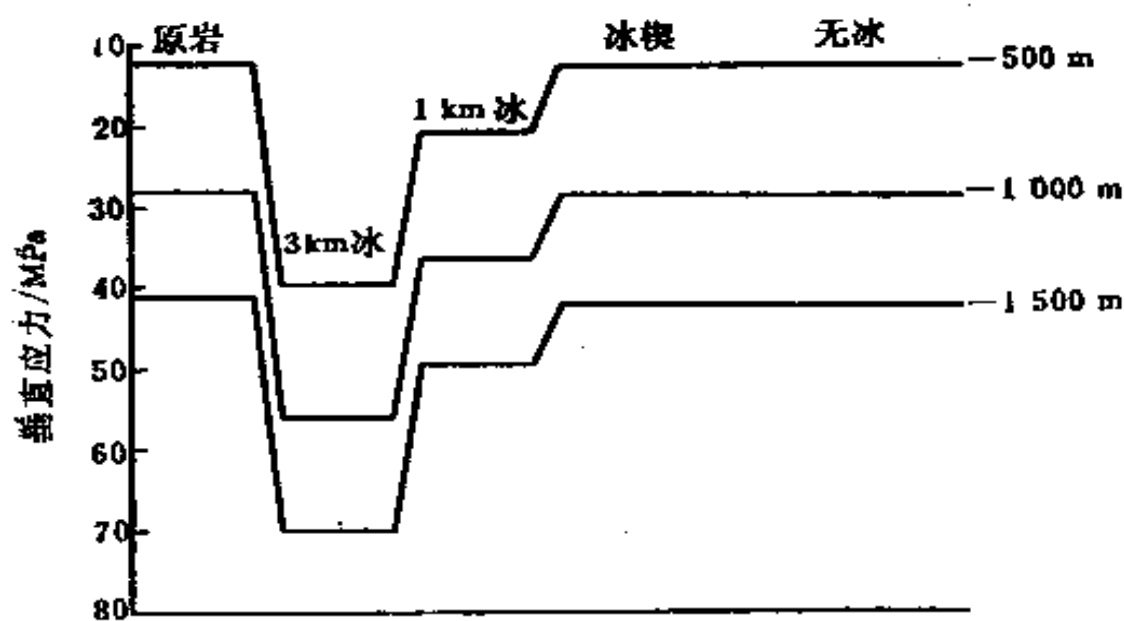


图 9-38 三个核废料贮存点的垂直应力分布

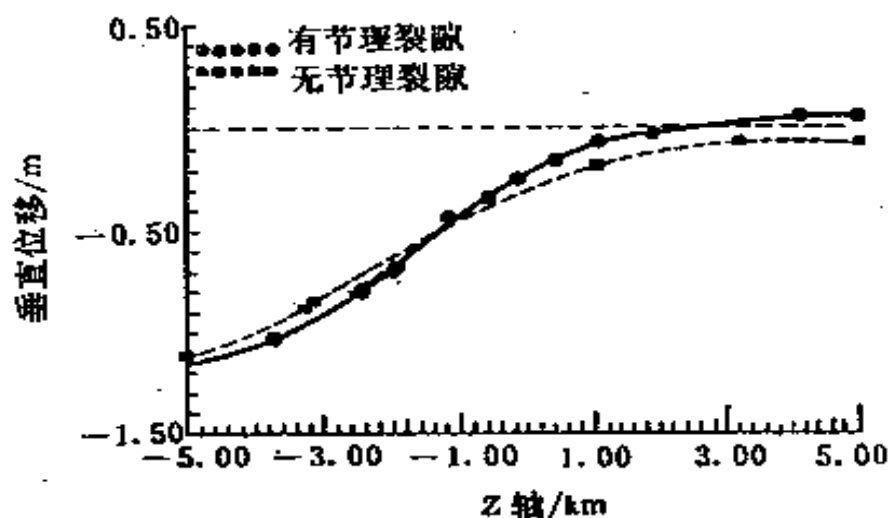


图 9-39 有冰楔时的地表位移

滑，说明地表没有产生裂隙滑移现象。

9.7.2 近海平台与海冰的作用

Hocking 等研究了锥形钻井平台与海冰的作用问题^[77]。如图 9-40 所示，冰层中最初没有缺陷，由于外界

自然力的作用将冰层推向平台，并在冰层内产生径向裂隙，随后裂隙随机发展。破裂的冰块最后绕着平台扩散。从图 9-40 中还可以看到许多破碎冰块的骑越和下沉现象。

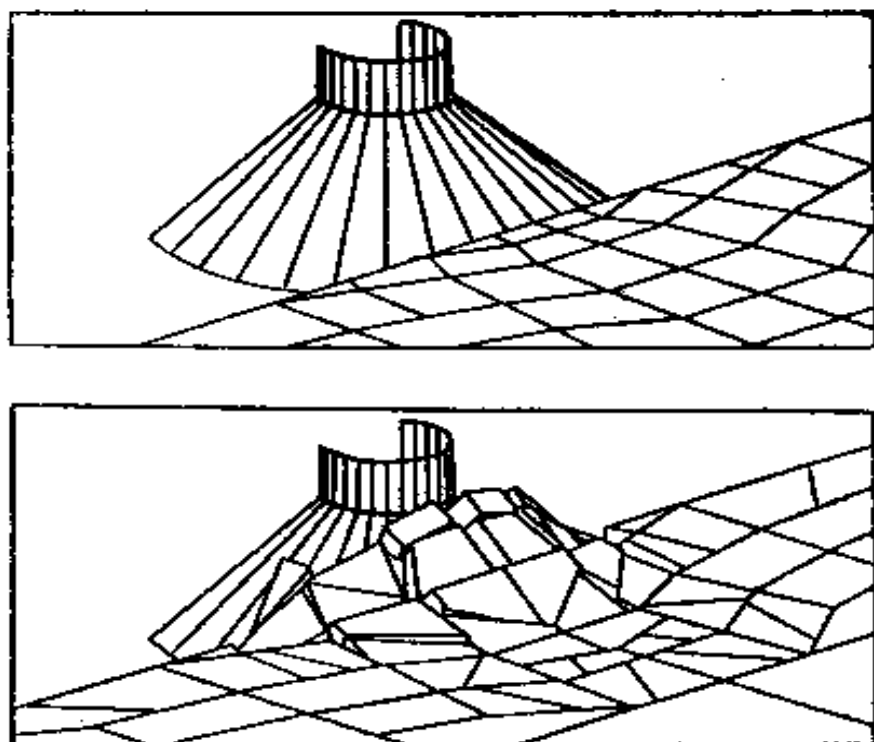


图 9-40 流冰与锥形钻井平台的作用

9.8 核废料的热载问题

Mack 和 Hart 将热应力问题加入三维离散单元中，使离散单元法能够模拟核废料所产生的热荷载问题。现以文献 [20] 为例，介绍一下离散单元法在这方面的应用。

如图 9-41 所示，假设巷道和核废料孔的防护材料与其周围岩体有相同的热力学特性（见表 9-7），则热源可以看成是埋在各向热同性无限介质中的点热源。介质中任意一点由点热源所产生的温度增量为：

$$T = \frac{Q}{8(\pi k_{at})^{3/2} \rho c r} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{4k_{at}}\right) \quad (9-30)$$

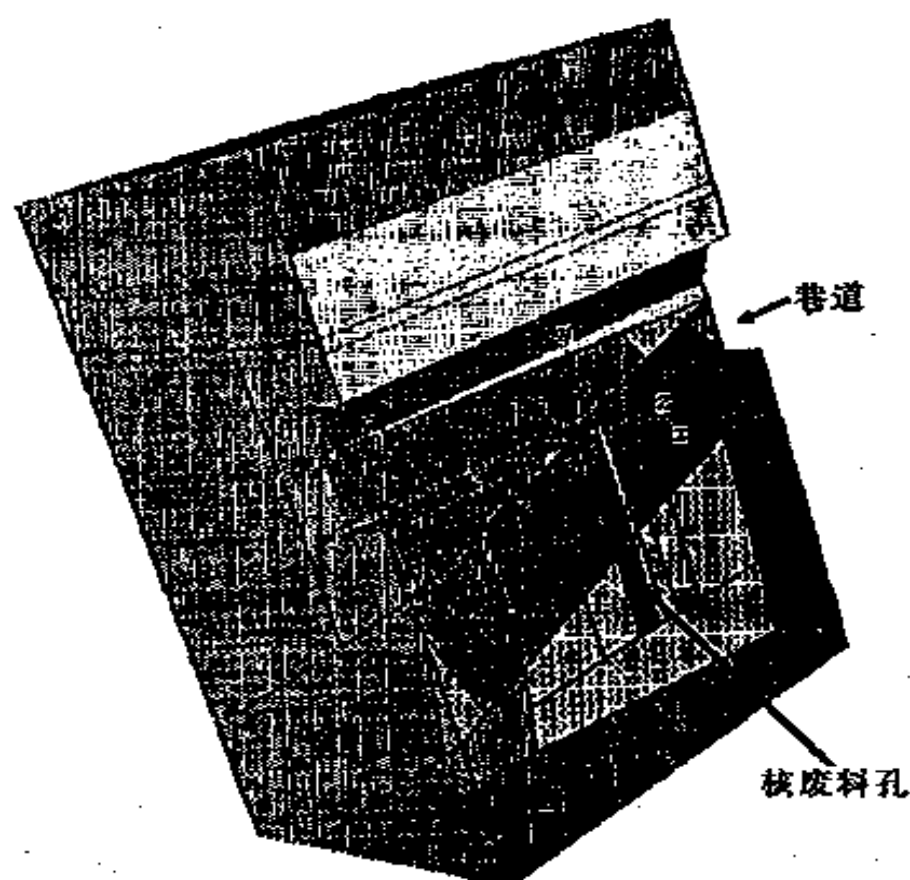


图 9-41 巷道与核废料孔

表 9-7

岩石和节理的物理力学性质

性 质	岩 石	节 理
弹性模量/GPa	4.0	—
泊 松 比	0.2	—
密 度/(kg/m ³)	2 700	—
法向刚度/(GPa/m)	—	1 620
切向刚度/(GPa/m)	—	33.0
摩 擦 角(°)	—	30
粘 结 力/(MPa)	—	0
热传导系数/[W/(m·°C)]	3.0	—
比 热/[MJ/(m ³ ·°C)]	2.0	—
线胀系数/(1/°C)	8.5 × 10 ⁻⁶	—

式中, Q 是点源的热量; ρ 是密度; c_p 是比定压热容; k_a 是热扩散率 ($k_a = k / \rho c_p$), k 是导热系数; t 是热量释放时间; r 是从热源到观测点的距离。

在岩体中所产生的应力是温度增量的函数, 可由下式计算:

$$\Delta \sigma_{ij} = -3\delta_{ij} K_v \alpha_i \Delta T \quad (9-31)$$

式中, K_v 是体积模量; δ_{ij} 是 Kronecker delta 函数; α_i 是线胀系数。

9.8.1 温度变化

离散单元法对贮存时间为 1, 10, 20, 60, 200, 10^3 , 10^4 和 10^5 年的核废料问题进行了模拟。结果表明, 巷道和核废料孔的温度增量在 200 年后将达到最大值, 岩体中的温度增量为 43°C (见图 9-42), 但在 10^5 年后温度不再增加。在初期, 由于核废料贮存孔附近岩体的温度梯度很大, 故大约在 10^3 年后因放射性的衰减, 整个贮存区的温度将保持常量。

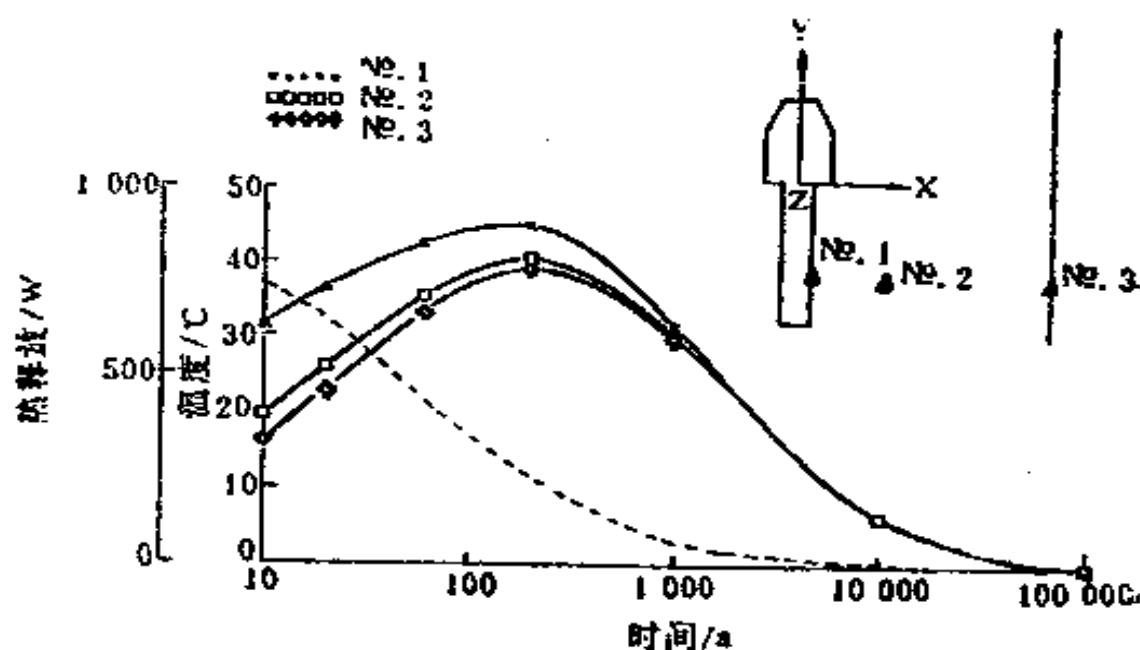


图 9-42 温度与时间的关系 (虚线表示热衰减线)

9.8.2 应力变化

巷道和贮存孔附近的应力随着温度的增加，大约在 200

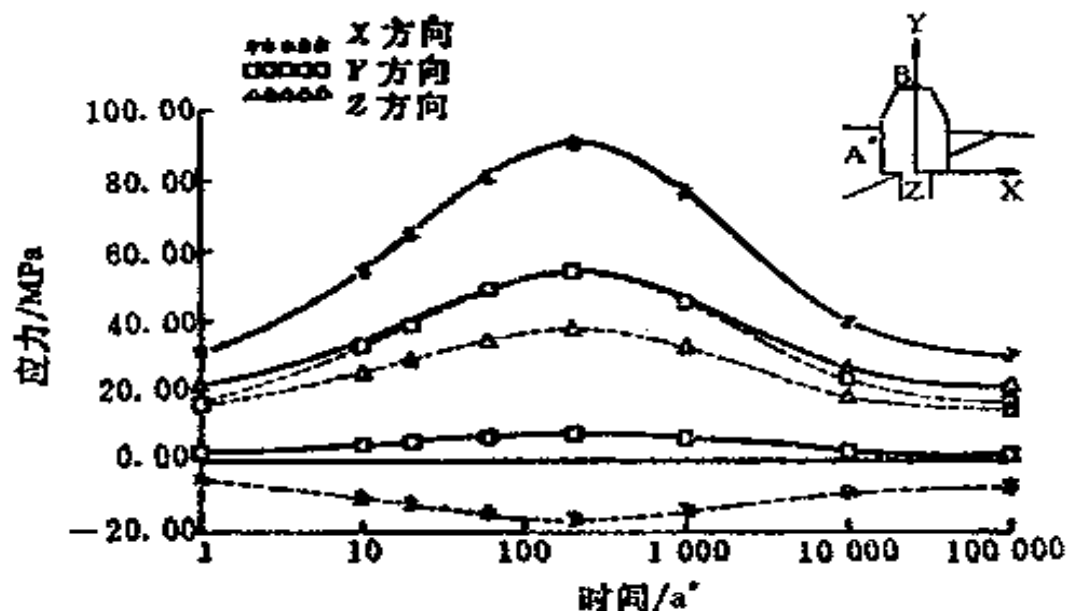


图 9-43 顶板应力（实线）和左壁应力（虚线）随时间的变化

应力比例尺
0 6E+08

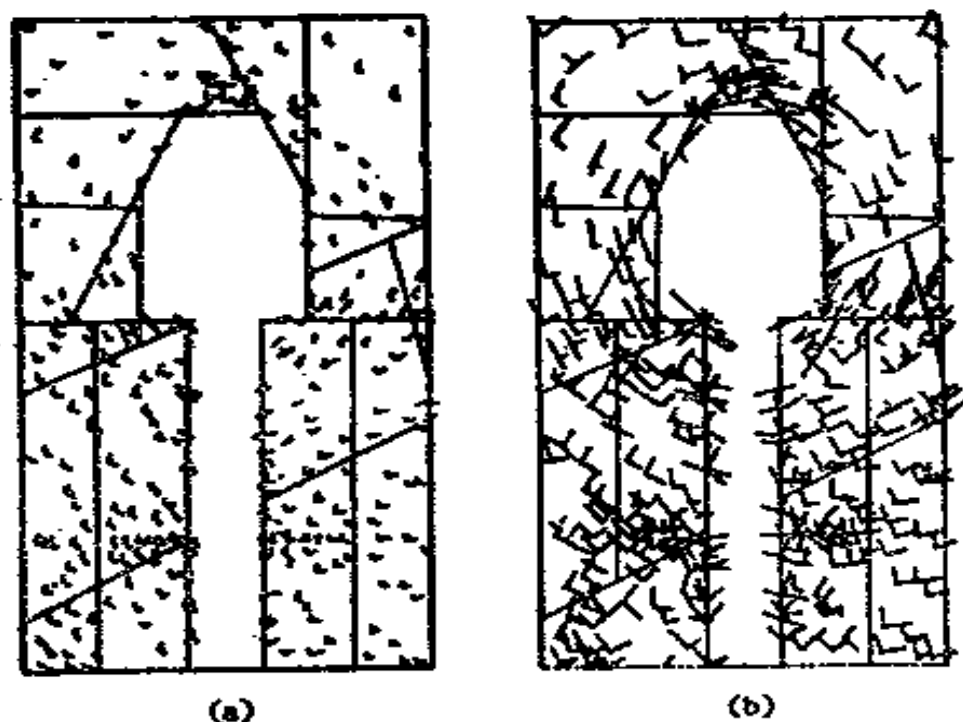


图 9-44 巷道和贮存孔附近的主应力分布 ($z=0$ 截面)
(a) 加热应力前; (b) 热应力加了 200 年后

年后达到最大值。巷道顶板的竖向应力(σ_z)高达 90 MPa, 而且在巷道的左壁 ($z=0$ 的截面) 上出现 16 MPa 的拉应力 (σ_r) (见图 9-43)。巷道和贮存孔附近的应力在热应力施加前和施加 200 年后有明显的变化 (见图 9-44)。

9.8.3 岩体变形

岩体中的热应力导致开挖体附近岩石的位移 (见图 9-45)。模拟结果表明, $z=0$ 截面的巷道周边在加热 200 年后最大位移为 4.2 mm, 大约是开挖所产生位移的 2 倍。 10^5 年后核热已释放完毕, 此时只观察到巷道右壁有一楔形体在运动。实际上, 该块体在加热载之前就已运动, 在热应

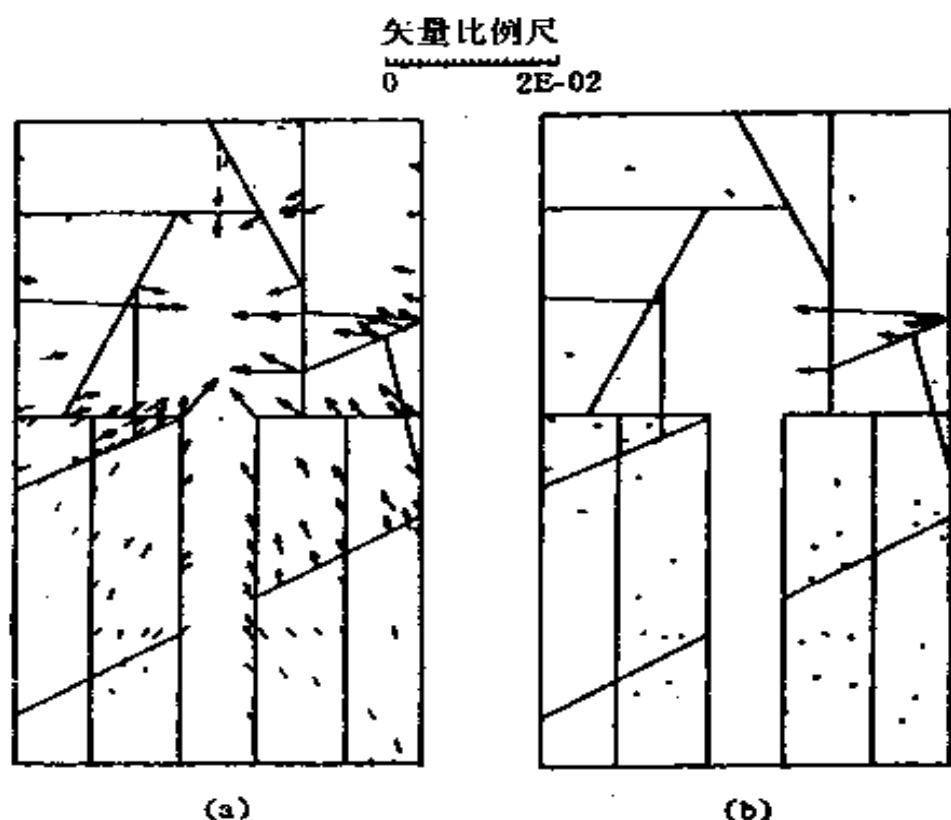


图 9-45 巷道和贮存孔附近岩石的位移 ($z=0$ 截面)

(a) 200 年后 (最大位移为 4.2 mm) ;

(b) 10^5 年后 (最大位移为 3.0 mm)

力的加卸载过程中，岩体内的节理会产生滑移。例如，穿过核废料贮存孔的节理，受热应力作用后在 10^2 年到 10^4 年间发生了滑移（见图 9-46），最大滑移量为 0.45 mm，这个数值与前 200 年的弹性剪切位移相比是很可观的。

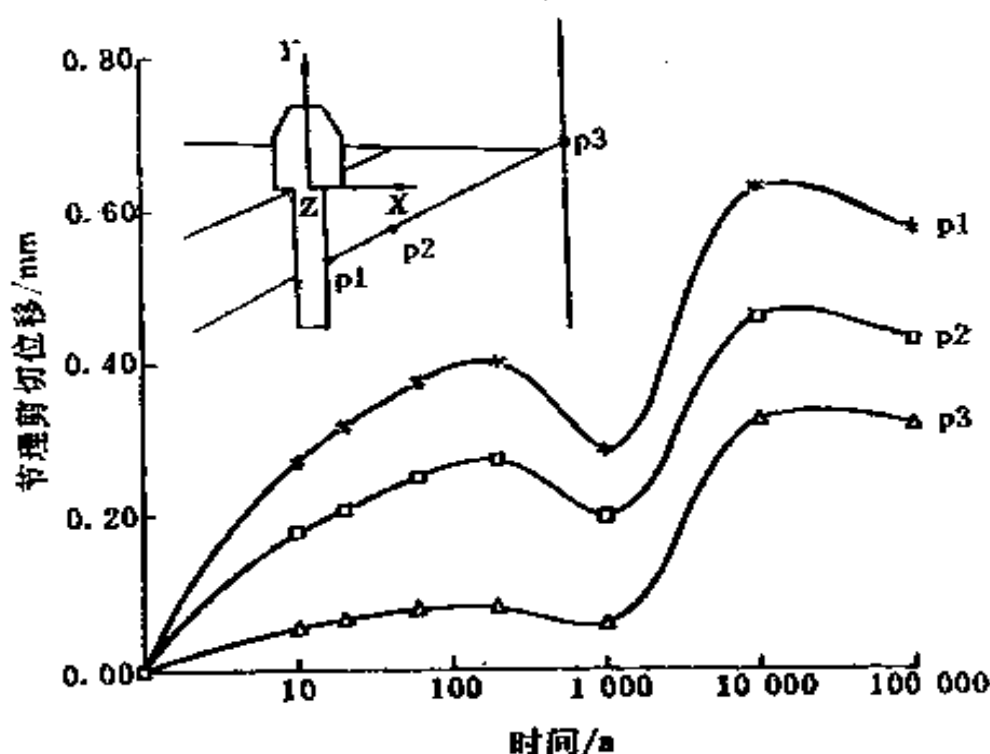


图 9-46 受热应力后的节理剪切位移

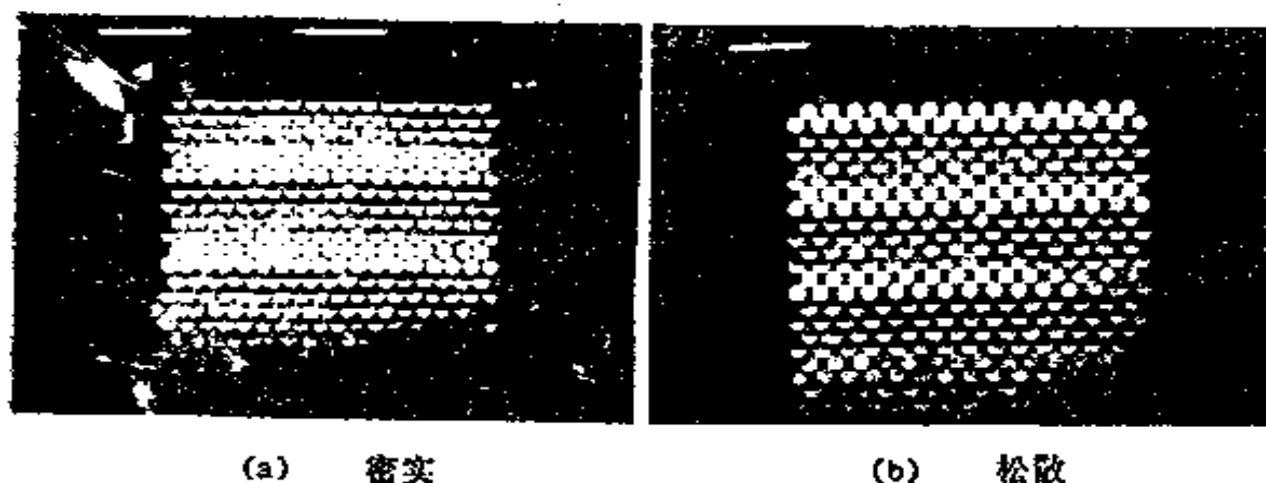
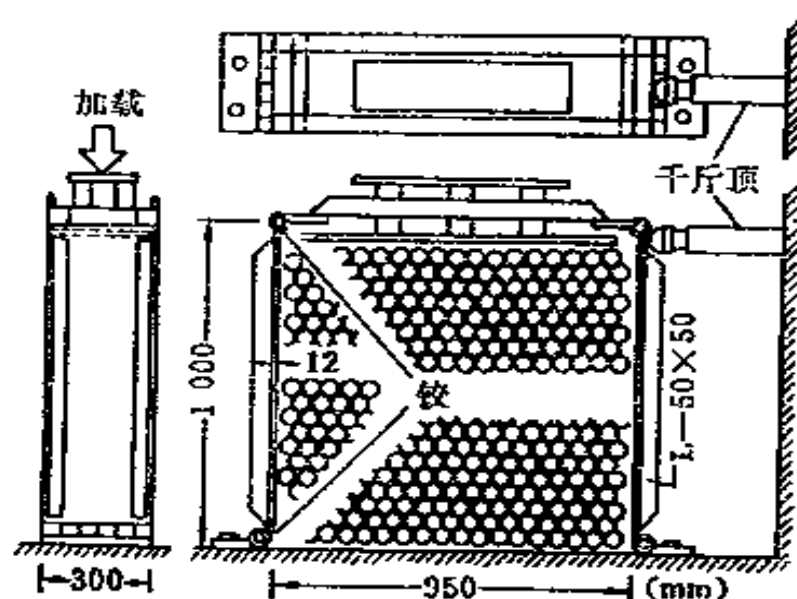
9.9 散体介质问题

9.9.1 填充料的抗剪切试验

Katsuki 对填充料的抗剪特性分别做了室内物理试验和离散单元法模拟，为填充料用于防洪构造物的建筑提供了可靠的设计依据^[76]。

室内试验的填充料用混凝土圆棒代替，其直径为 5 cm，摩擦系数为 0.561，法向刚度系数为 $1.136 \times 10^9 \text{ N/cm}$ ，切

向刚度系数为 $2.840 \times 10^2 \text{ N/cm}$ 。图 9-47 是抗剪试验装置。所做的抗剪试验分两种情况进行：一种是充填料密实排列（见图 9-48(a)），另一种是充填料松散排列（见图 9-48(b)）。与物理试验相对应的离散单元模型如图 9-49 所示。



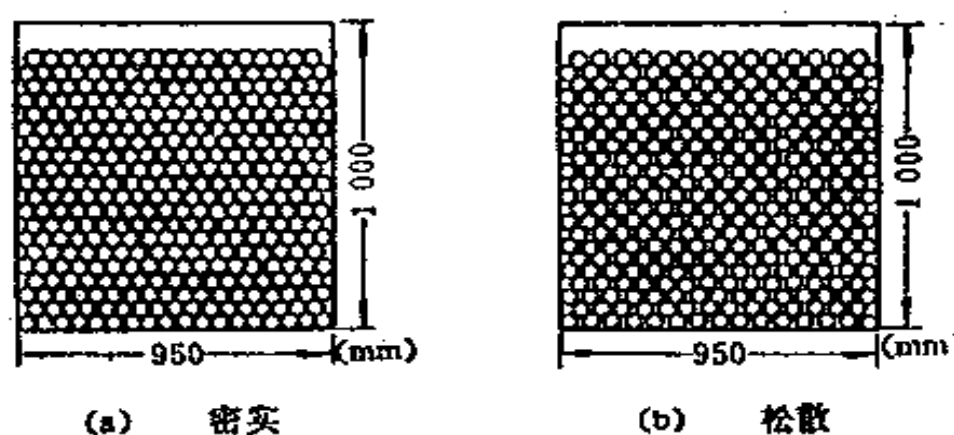


图 9-49 离散单元法模型

图 9-50 是用上述两种方法所得到的充填料的抗剪切力和位移关系曲线。从图中可以看出，对于密实情况（见图 9-50(a)），在剪切位移不大时，物理试验结果大于数值计算结果，但是后期（上端位移为 2—4cm 时）材料表现出了塑性硬化特性，并且这两个结果趋于一致。对于松散情况，两种方法所得的结果基本一致（见图 9-50(b)），此时抗剪切力-位移关系曲线表现出了塑性软化特性。

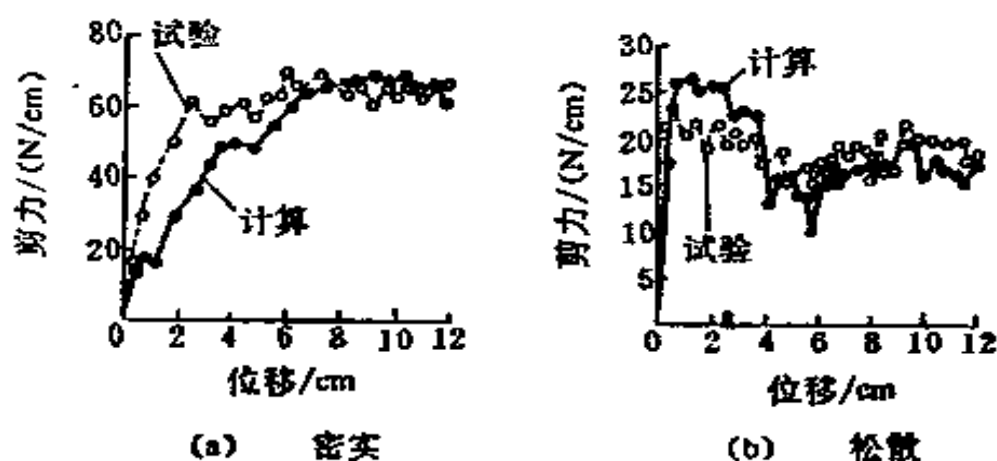


图 9-50 抗剪切力与位移关系

由此可见，离散单元法的计算结果与物理试验结果基本一致。因此，可以把离散单元法作为研究松散介质力学特性

的一个有利工具。

9.9.2 放顶煤放出规律的模拟

如图 9-51 所示是煤层在底分层回采后的自由冒落和放出情况。放煤窗口设在液压支架的掩护梁上,放煤口长 100 cm,煤矸块体直径为 20 cm。为了简便起见,煤块和矸石的物理力学参数取值相同,如表 9-8 所示。下面探讨顶煤在

表 9-8 煤 矸 物 理 力 学 性 质

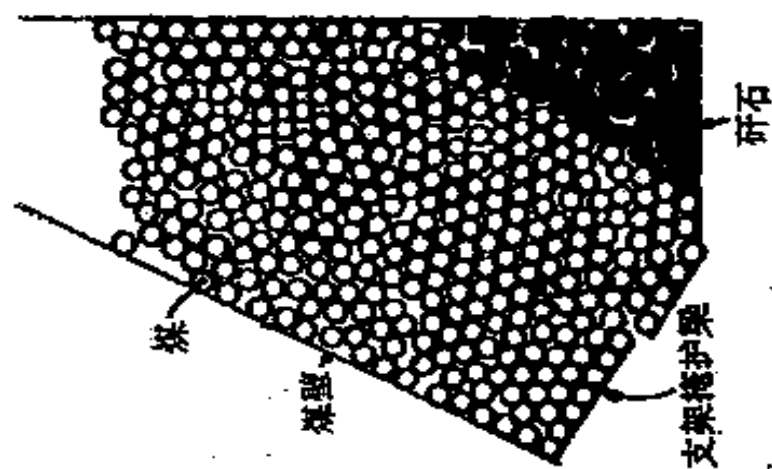
密 度 /(kg/cm ³)	弹性模量 /MPa	泊 松 比	摩擦系数	粘 结 力 /MPa
1.6×10^{-3}	5.723×10^3	0.339	0.600	0.0

放出过程中的几个问题。

1. 力 场

如图 9-51 (c) 所示,放煤口打开虚拟时间 $t=0.1516$ 后,从所对应的煤矸内力分布图可以看出,放煤口上方有免压拱形成。此时压力向放煤口两侧转移,形成了放煤口上方的降压区和两侧的增压区。内力的最大值较放煤前小,由 6824 kN 降到 6668 kN。免压拱是暂时的,随着时间的推移,免压拱要不断地崩解和产生,同时伴随着内力的释放和增大现象。

煤矸对支架长掩护梁放煤口以上部分的静、动正压力及摩擦力分别如图 9-52 和 9-53 所示。从图中可以看出,煤矸对支架长掩护梁的正压力和摩擦力的静、动值是不同的。静正压力(虚拟时间 $t=0.00$ 时)要比动正压力(虚拟时间



(a) $P=9.26\%$



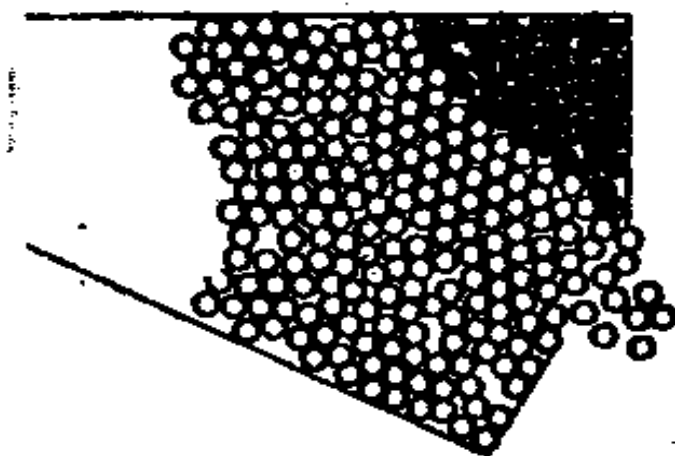
(b) $v_{max}=138.6 \text{ cm/s}$

(1) $t=0.1516$

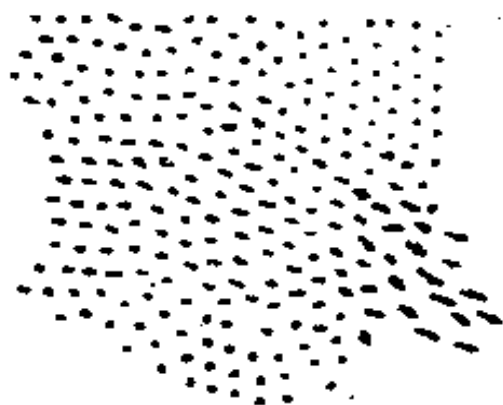


(c) $F_{max}=6668 \text{ N}$

图 9-51(a) 煤研的状态

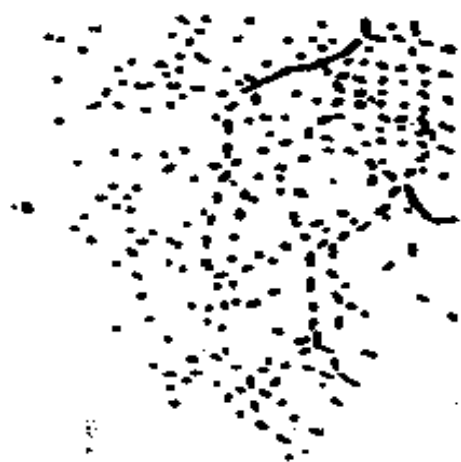


(a) $P=14.48\%$



(b) $v_{max}=567.8 \text{ cm/s}$

(2) $t=2.5769$



(c) $P_{max}=2313 \text{ N}$

图 9-51(b) 煤研的状态

$t = 0.1516$ 时) 小, 而静摩擦力要比动摩擦力大。在放煤过程中, 正压力和摩擦力的分布都是不断变化的, 因此, 煤矸对支架的总作用力也是不断变化的。一般情况下, 动力大于静力, 最大作用力发生在放煤后不久, 且放煤口附近的力值

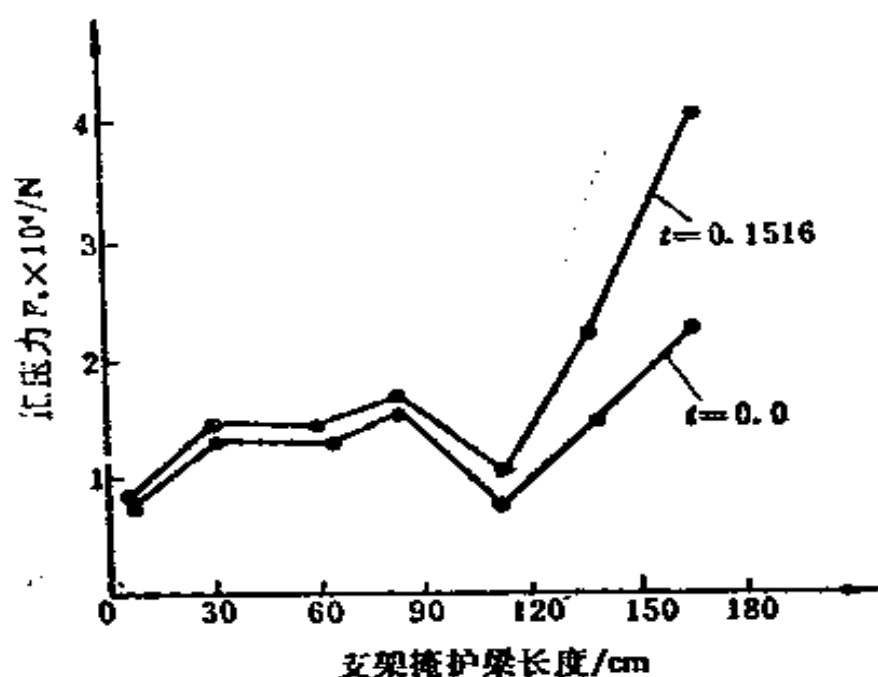


图 9-52 煤矸对支架掩护梁的静动正压力分布

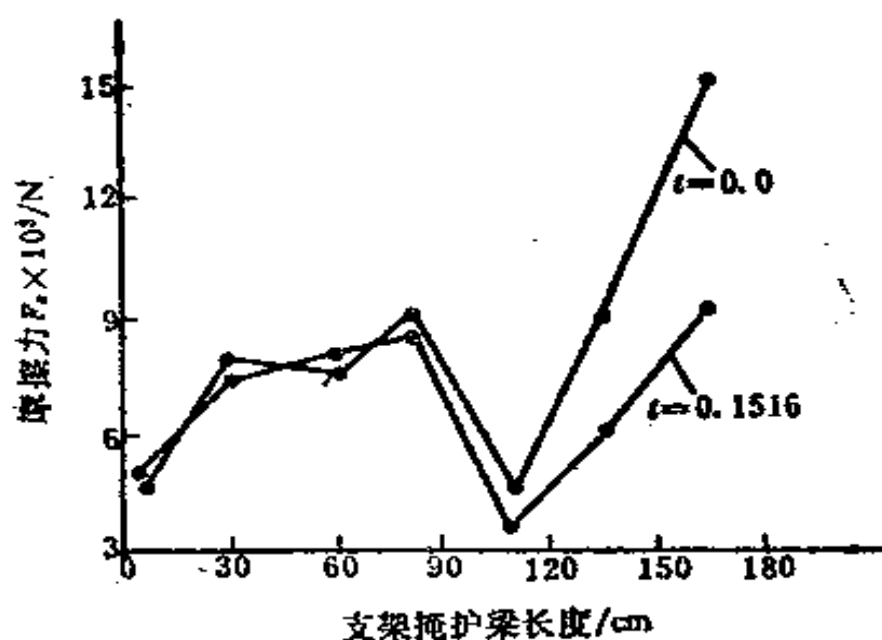


图 9-53 煤矸对支架掩护梁的静动摩擦力分布

较大。

2. 速度场和松散性

从图 9-51 中的速度场图可以看出，靠近煤壁和底部的煤矸块体其运动速度较其他地方的小得多，说明此部位的煤矸由于受边壁及底部的摩擦等约束力作用，其移动量很小，而位于放煤口中心线附近的煤矸移动量较大。

在放煤初期，煤矸的孔隙率 P （见图 9-51）是逐渐增大的，但达到一定值后（大约在 22%）则保持基本不变，此时煤矸的流动性最好。

3. 煤矸接触面

假定图 9-54 中被涂黑的那些块体所织成的面是煤矸接触面（被涂黑的块体属于矸石），则从中可以看出煤矸接触面的变化以及矸石的混入情况。当虚拟时间 $t = 5.0021$ 时，从放煤口放出的基本是矸石，有一部分残留煤没有放出。实际上，为了减小贫化率，在此以前放煤口就已关闭。

4. 煤的损失和移动迹线

从前述仿真结果（见图 9-54(c)）可知，在支架掩护梁的上部以及放煤口的下部有一定量的煤不能放出，这些煤属于损失掉的煤。

从煤体中任选 3 个块体，观察它们在放出过程中的移动情况（见图 9-55）。从图中看出，颗粒体在远离放出口时做近似直线运动，只是在移动到放出口附近

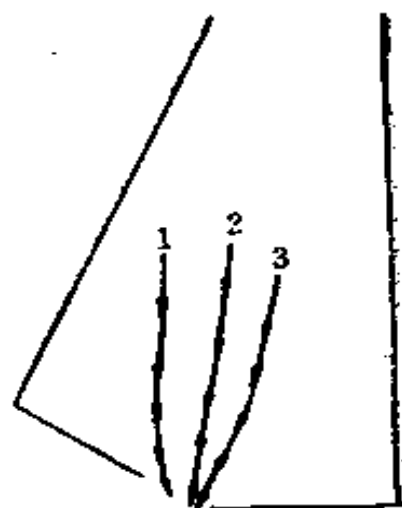
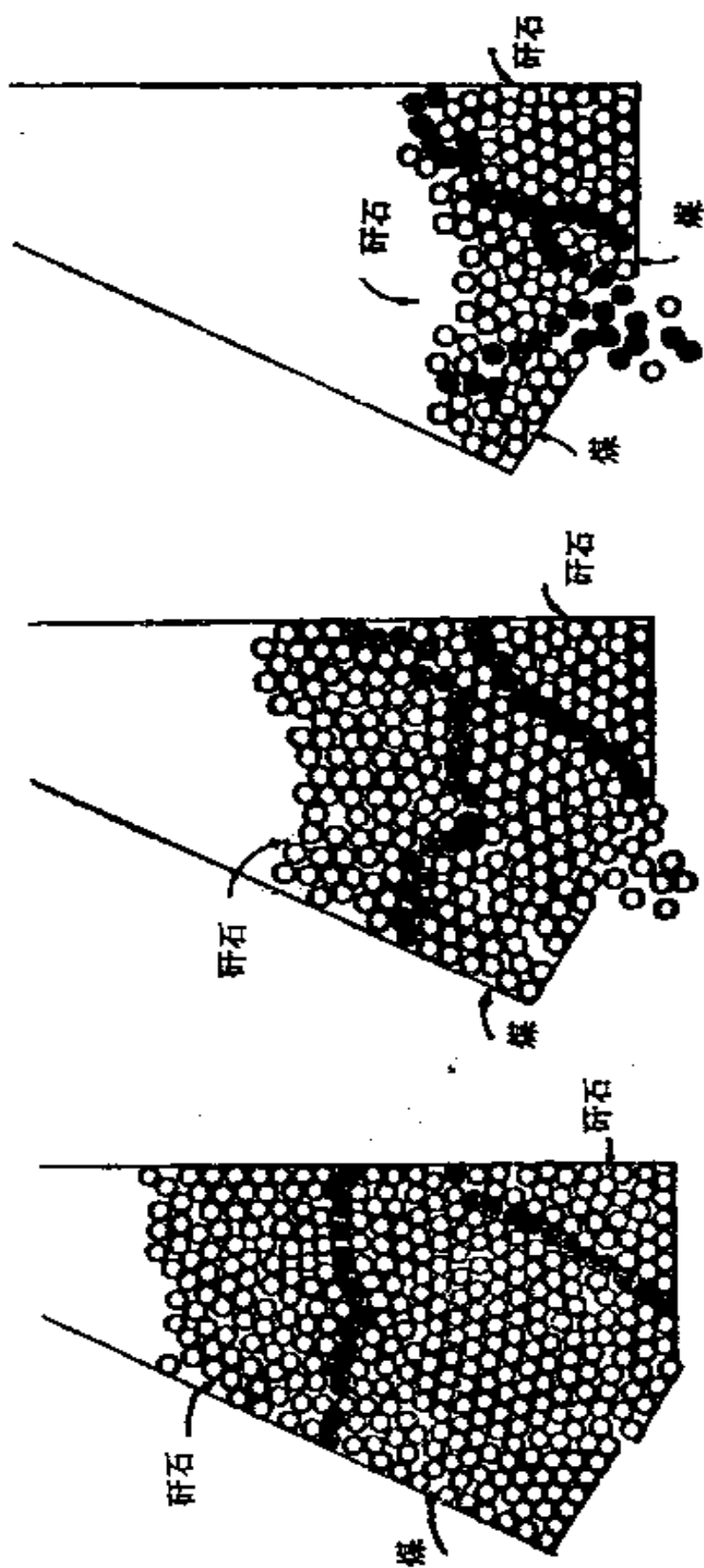


图 9-55 移动迹线



(1) $t=0.1516$

(2) $t=2.5769$

(3) $t=5.0021$

图 9-54 煤研接触面

时，其轨迹才发生偏转。

9.10 断裂问题

断裂可分为岩体的断裂和岩块的断裂。例如，在采矿过程中，矿体靠自重由岩体破碎成岩块，而岩块与岩块在运动过程中发生碰撞，又产生二次断裂等。下面分别叙述之。

9.10.1 岩体的断裂破坏

以往岩体结构的断裂分析，大都采用适用于分析连续介质问题的有限单元法或边界单元法，这些方法一般只能解决到岩体即将断裂的程度，不能用于分析其断裂后的性态，而后者对于岩石力学工程来说，有时更为重要。为此，下面提出一种改进的离散单元法，以解决此问题。

Cundall 的离散单元法假定单元之间是非连续的，单元之间不能有拉应力。而岩体的断裂破坏在很多情况下是由拉应力产生的。针对此问题，将有限单元法中的杆单元与 Cundall 的离散单元耦合起来，用于分析介质由连续到破坏的全过程。这样，岩体的断裂破坏就转变为离散单元之间的杆断裂。它可以是拉断的，也可以是剪断的，断裂后的离散单元就是普通的 Cundall 单元，从而解决了介质由连续到破坏和运动的全过程。

因此，可以把所研究的介质假想为由一些颗粒和固结它们的包裹体所组成，前者就是 Cundall 单元，后者我们把它简化为杆单元，它可以是线性的，也可以是非线性的。

如图 9-56 所示, 假定两个相邻颗粒在未发生相对位移前, 是由杆单元将它们连接在一起的, 杆单元的端点处于圆心处。当它们之间发生相对位移时, 杆单元的变形集中在图中 AB 部分, 杆单元对两个颗粒的作用力也在 A, B 点上, 可由第七章中的公式计算。下面给出两个算例。

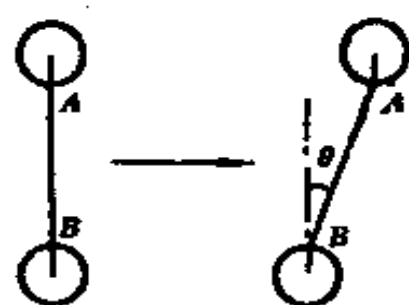


图 9-56 改进的颗粒单元模型

1. 三个单元的稳定性计算

如图 9-57 (a) 所示的 3 个单元, 每个单元的半径为 0.1 m , 体密度为 $2.0 \times 10^4\text{ N/m}^3$, 单元之间的摩擦系数为 0.01 , 无粘结力。在无杆单元的情况下, 它们是不稳定的 (见图 9-57(b)), 但当接触单元之间耦合以刚度为 $1.5 \times 10^7\text{ N/m}$ 的杆单元之后, 各单元就能处于稳定平衡状态 (见图 9-57(c))。这表明, 所用的杆单元模型是有效的。

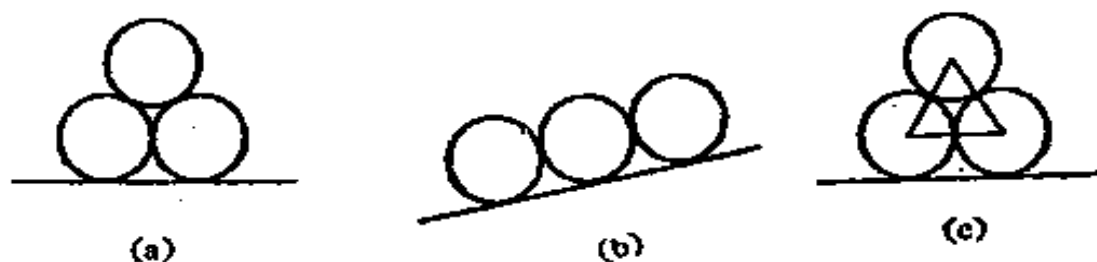


图 9-57 三个单元的稳定性计算

2. 单轴抗压计算

如图 9-58 所示是一个由杆单元连接而成的柱体试件, 其高宽比约为 1.5 。观察它在不同加载条件下的破坏情况。

下面所做的两个试验，其加载条件的相同点是在试件的顶部受有相同的均布力，不同点是试验 1 的试件周围不受约束，单元可以自由位移；而试验 2 的试件周围有约束，限制了单元水平自由移动，这相当于试件受有一定的侧向力。

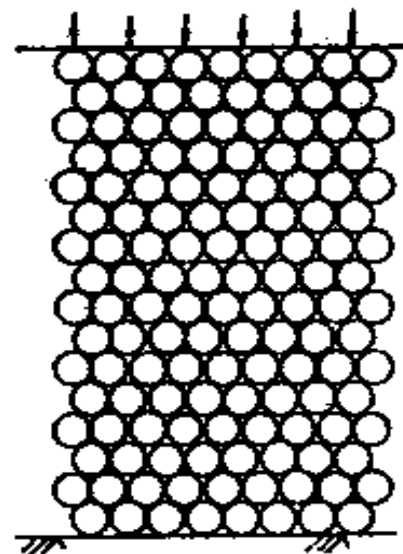


图 9-58 单轴抗压试件

试验 1 和试验 2 的试件破坏情况及其内部作用力分别如图 9-59 和 9-60 所示。从图中不难看出，试验 1 的试件上部出现了明显的剪断面，即发生了剪切破坏。实际上，这两个试验的破裂面都是由拉伸产生的。

9.10.2 块体的断裂破坏

1. 基本假设

- (1) 块体裂隙的形成是瞬间完成的。
- (2) 块体断裂与否，取决于作用在块体上的已知力。
- (3) 块体断裂过程中不考虑能量损失。

2. 块体的断裂准则

由于离散单元法的本构关系比较简单，故几乎所有的断裂准则都可以加到离散单元模型中。其中，最简单的是基于点荷载试验的最大拉力判断准则。Franklin 根据对不同形状的块体做点荷载试验得出：块体的强度对于同一种材料可以认为是不变的，它与两个点荷载之间的距离成反比。这样，块体的断裂准则为：

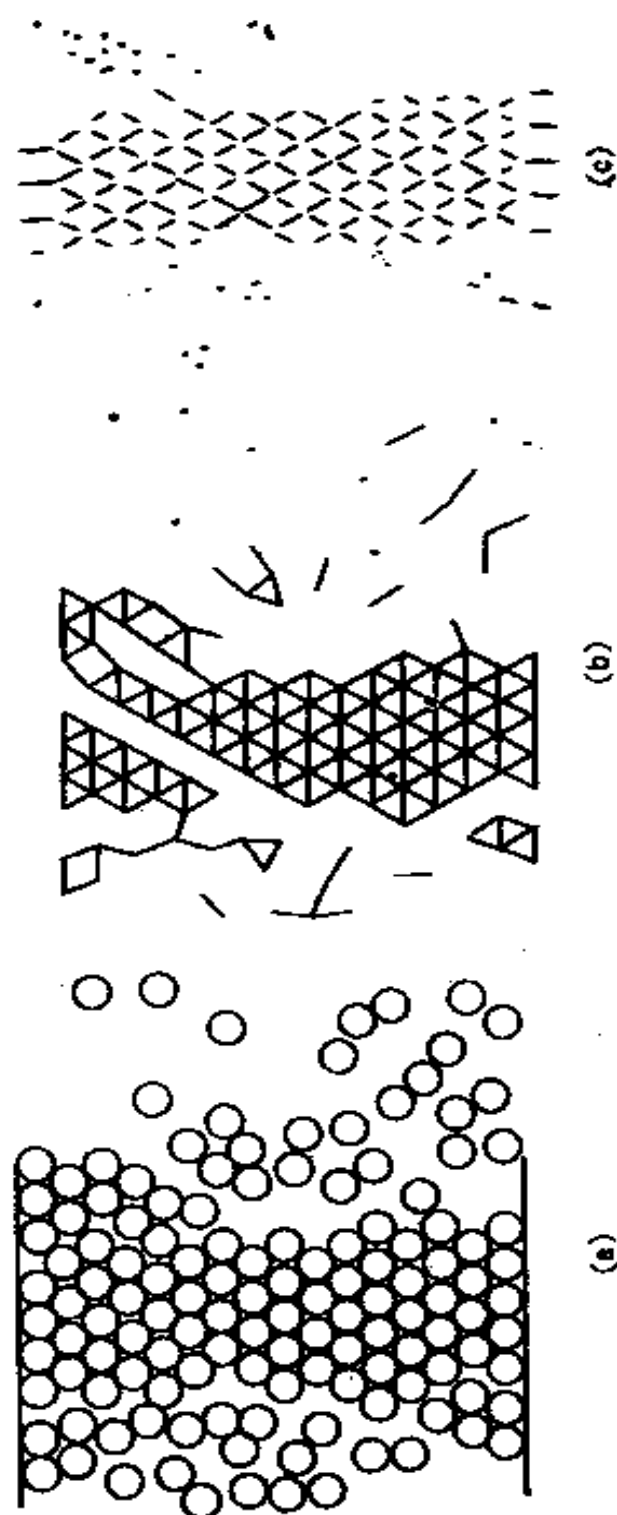


图 9-59 试件在无侧向约束情况下的状态

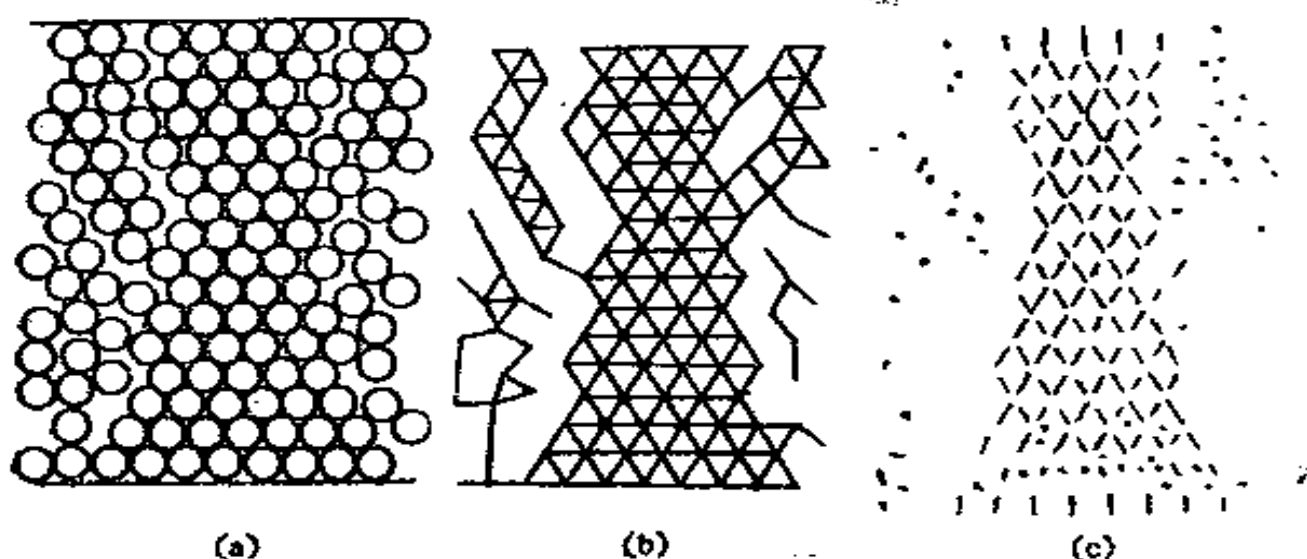


图 9-60 试件在有侧向约束情况下的状态

$$S = \frac{KP}{D^2} \quad (9-32)$$

式中， D 是两点荷载 P 之间的距离； K 是块体形状影响系数，例如对于矩形块体 $K=0.8$ ； S 是岩石抗拉强度。

在离散单元法计算中，一个块体可能受到来自多个块体的角作用，这时先要找出它们中间最大的两个力 P_1 和 P_2 ，然后按下式判别块体是否断裂：

$$\frac{\frac{1}{2}(P_1 + P_2)}{D^2} > S' \quad (9-33)$$

式中， S' 是块体的强度。若上式得到满足，则块体沿两个作用点的连线断裂。但是，当 D 太小（1个单位）或者力与角的距离太近（小于2个单位）时，不能应用上述准则。

另外，格里菲思强度理论也可作为块体断裂准则。该准则主要根据块体内部平均应力判断块体是否断裂（拉应力为正）。块体断裂准则为：

$$\left. \begin{aligned} S_t &= \sigma_1, & \text{若 } 3\sigma_1 + \sigma_3 > 0 \\ S_t &= -\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)^2}{8(\sigma_1 + \sigma_3)}, & \text{若 } 3\sigma_1 + \sigma_3 < 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-34)$$

式中, σ_1 是块体的最大平均主应力; σ_3 是块体中的最小平均主应力; S_t 是块体的单轴抗拉强度。当应力超过块体的单轴抗拉强度时, 块体将沿 σ_3 方向通过形心发生断裂, 同时块体应力降为零。

3. 算 例

如图 9-61(a) 所示的 4 个块体, 其密度为 2000 kg/m^3 , 法向刚度和切向刚度皆为 100 MPa/m , 摩擦系数为 2.0, 抗拉强度为 25 MPa 。在上述条件下, 由于块体之间的挤压作用, 2 号块体发生了断裂, 尔后, 新生成的 5 号块体 (见图 9-61(b)) 在自重作用下发生旋转运动。

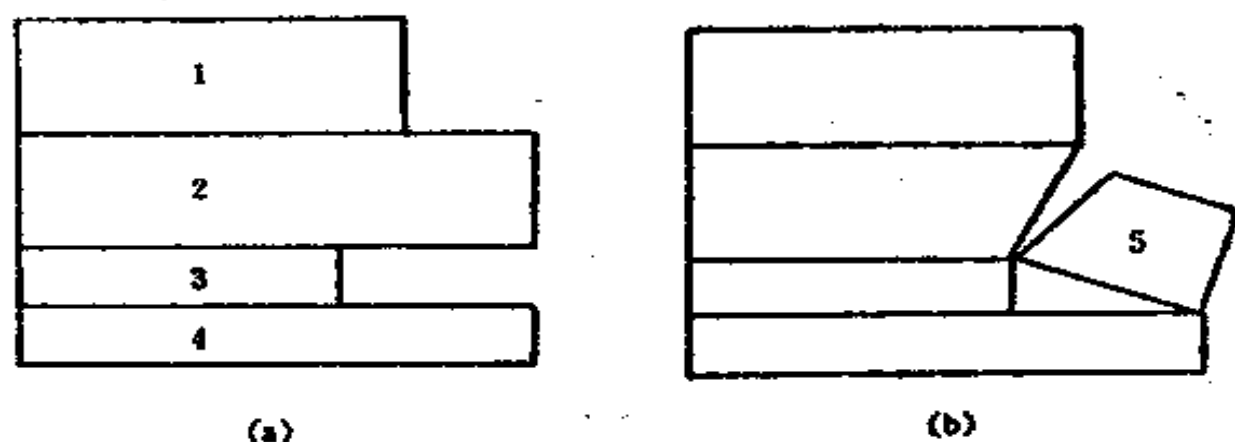


图 9-61 块体的断裂

9.11 渗流问题

9.11.1 渗流模型

块体之间的边-边接触相当于“管道”, 当这“管道”的

两个“结点”（即块体的角）有压力差时，流体将在其内流动。假定在初始状态下，所研究区域内各点的压力相等，则当节理的张开度因块体之间相互作用而发生变化时，将会引起各结点处的压力变化。

又假定当块体相互作用时，除了节理之间张开度可以发生变化外，其他与流动规律有关的“管道”几何尺寸不变。这相当于流体在一个横截面可变，但长度和空间位置不变的“管道”内流动。因此，流体流动通道的几何尺寸取决于块体最初的相对位置，而流体对块体的作用只是改变块体间的张开度大小。这样简化的根据是，流动参数（如水头、压力等）对张开度的变化较为敏感，而对结点位置的变化不太敏感。

设流体是层流。当节理中没有充填物时，流动法则遵守达西定律，即单位宽度的流率

$$q = pdk_0 \quad (9-35)$$

式中， pd 是结点压力差； k_0 是介质的渗透系数。对于张开的节理，流动法则为：

$$q = \frac{a^3 g}{12\nu} i \quad (9-36)$$

式中， a 是张开度； q 是单位宽度的流率； g 是重力加速度； ν 是运动粘度； i 是单位长度的水头损失。

离散单元之间允许叠合，但这不适合于研究流体流动问题。因此，张开度 a 需要重新定义。如图 9-82 所示，块体之间的张开度可以为正，也可以为负。设图中 d_1 为负， d_2 为正，并定义：

$$d = \frac{1}{2}(d_1 + d_2) \quad (9-38)$$

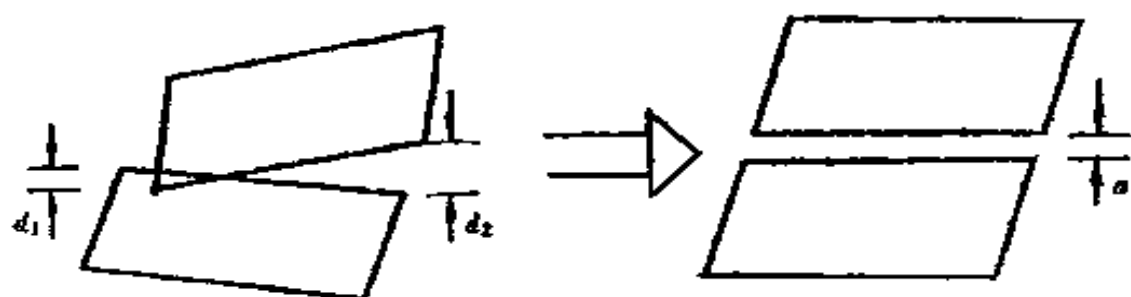


图 9-62 符号规定

通过如下关系，可以将 d 转换成裂隙视张开度 a （见图 9-63）：

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 + d && \text{当 } d \geq 0 \text{ 时} \\ a &= a_0 \exp(-|d|/a_0) && \text{当 } d < 0 \text{ 时} \end{aligned} \right\} \quad (9-39)$$

式中， a_0 是由实验确定的常数。

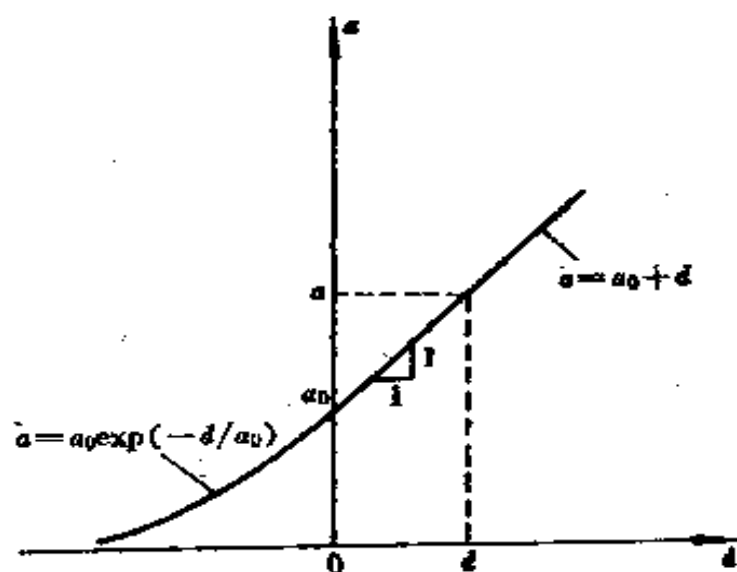


图 9-63 裂隙张开度

由式(9-36)和式(9-39)，可以很容易地得出在一个时步内从高压区流入低压区的流体量 ΔQ ，再按下式计算流体压力变化：

$$\Delta p = \Delta Q K_v \Delta t / A \quad (9-40)$$

式中, K_v 是流体的体积模量; Δt 是计算时步; A 是面积, 对于节理, $A = aL_j$, L_j 是节理的长度。

9.11.2 重力坝的渗流

一个高 100m 的混凝土重力坝建在节理岩石上。节理的间距为 50m, 节理倾角为 20° 和 -70° 。现研究水在节理中的流动问题。用离散单元法按下列程序进行计算。

1. 加重力 σ_v

假定岩体中的水平原岩应力为 $\sigma_H = 0.5\sigma_v$, 则此时坝的位移是由自重引起的。坝中没有蓄水, 水位为 $y = 0$ (即坝基水平)。基础中的应力是有效应力。

2. 将坝中蓄满水

在此阶段, 水位在坝顶, 水对坝上游和岩石基础有静水压力作用。坝基底部不许有 Y 方向垂直位移, 左右两边不允许有 X 方向水平位移。对于水流有如下假设:

- (1) 模型的底边和两个侧边没有渗透性;
- (2) 坝上游水头为 100m (0.95 MPa), 下游为 0m;
- (3) 坝体与岩基之间有低渗透系数。

根据上述假设, 所得到的坝体和岩基的主应力、位移和节理剪切位移如图 9-64 所示。其中, 最大主应力为 3.958 MPa, 最大位移为 3.203 cm, 最大剪切位移为 0.283 9 cm。坝基中水的最大渗透流率为 0.071 8 cm/s (见图 9-65)。从图中可以看出, 几乎所有的渗流都发生在两条节理内。在蓄水过程中, 坝肩的水平 and 垂直位移如图 9-66 所示。从图中可见, 坝肩是逐渐达到平衡状态的。

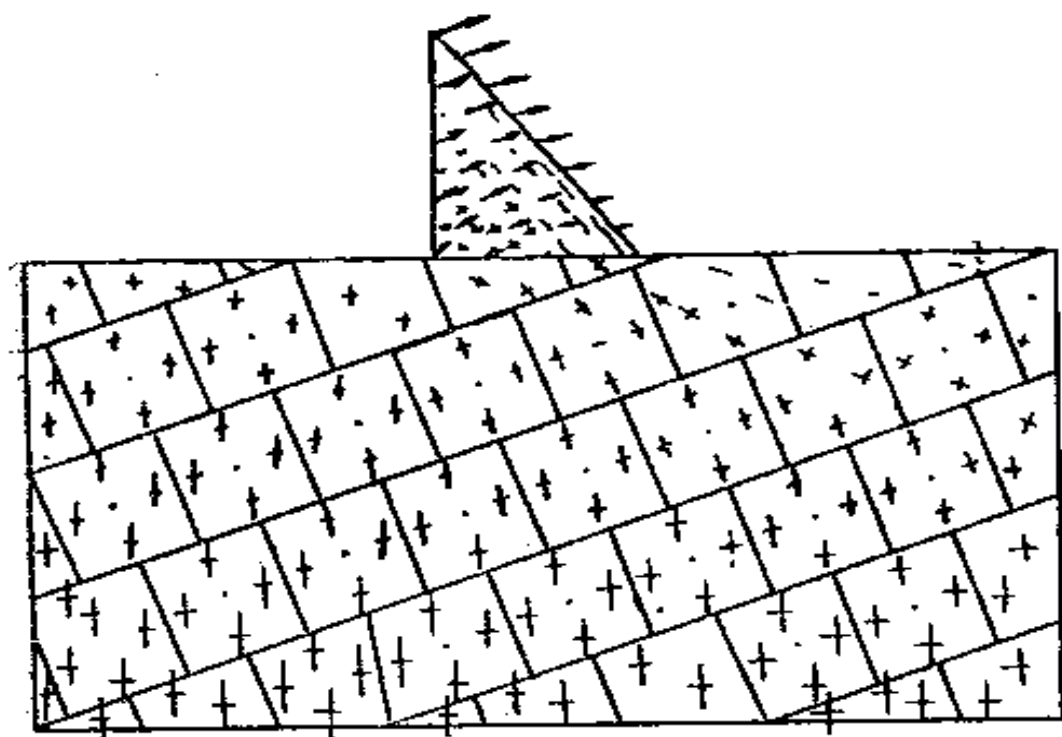


图 9-64 主应力、位移和节理的剪切位移

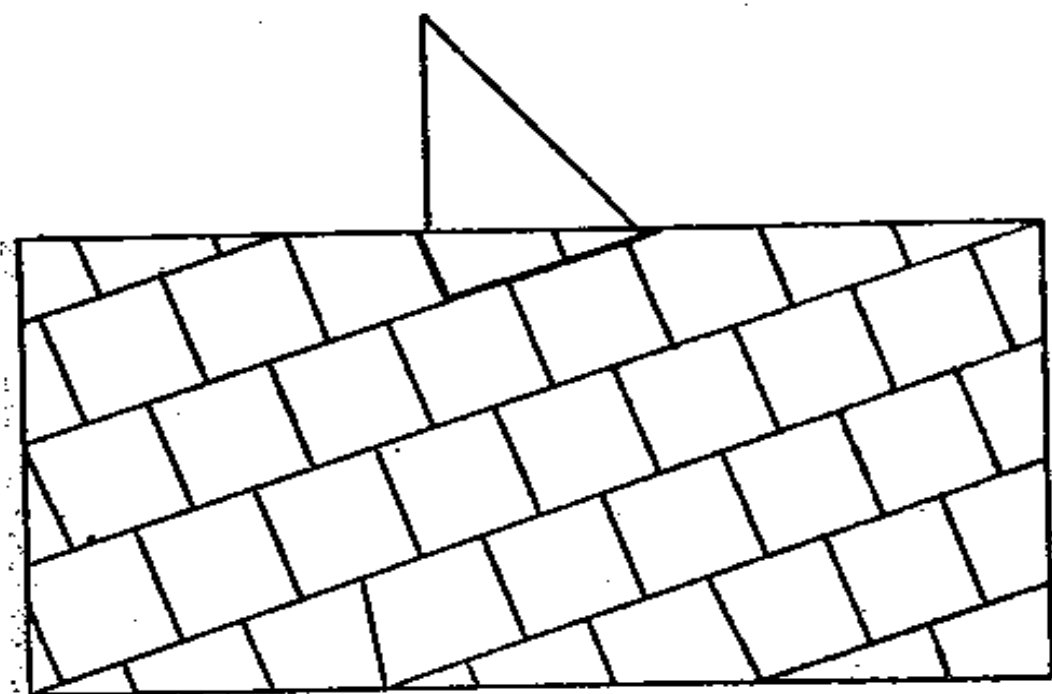


图 9-65 坝基中的水的渗透流率分布

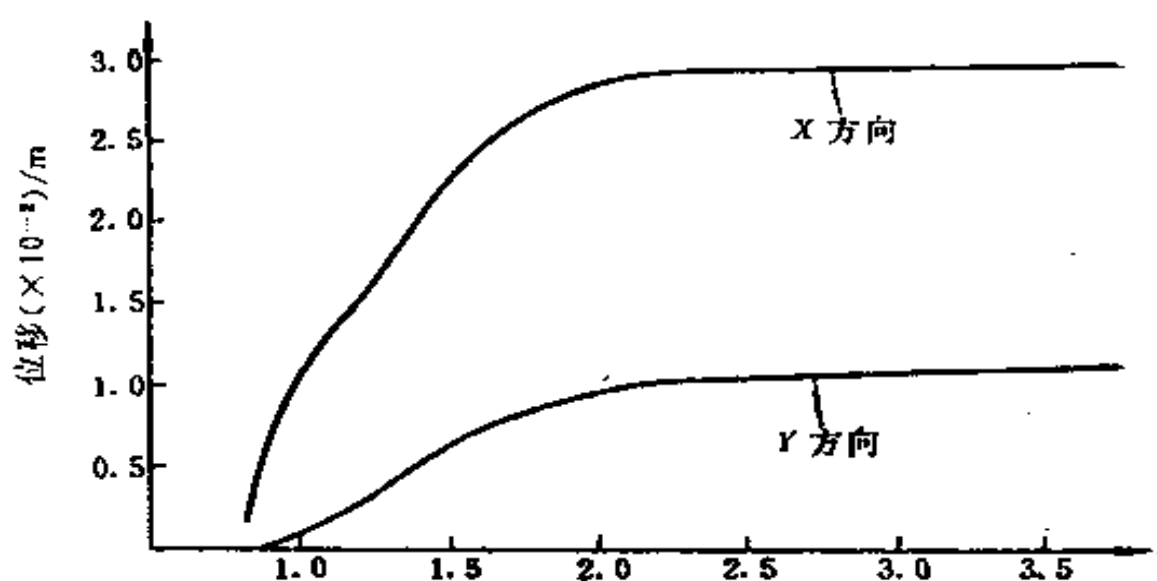


图 9-66 坝扇在蓄水过程中的位移

9.12 节理-岩桥系统的加卸载特性

关于节理-岩桥的加卸载特性，已有许多人对此进行过研究^[78]。下面介绍沈宝堂等人所做的工作^[18]。

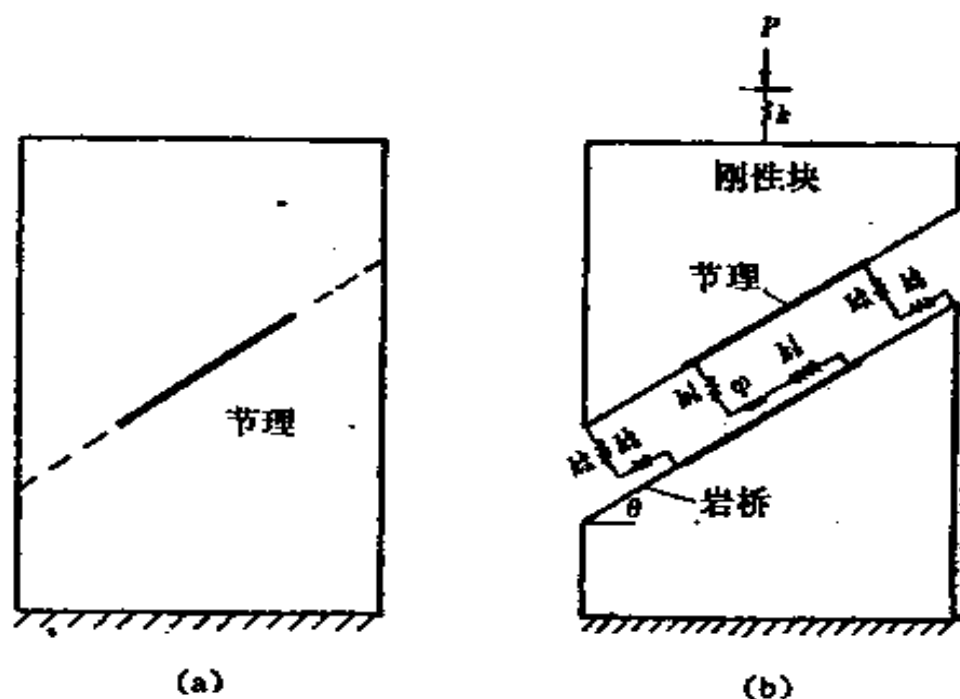


图 9-67 节理-岩桥系统(a)及其力学模型(b)

对于如图 9-67(a) 所示的节理-岩桥系统, 可以用如图 9-67(b) 所示的力学模型代替。在力学模型中, 岩桥的变形特性由等价的法向和切向刚度 (k_n^b 和 k_s^b) 所控制; 节理则由其真实刚度 (k_n^j 和 k_s^j) 以及内摩擦角 φ 来控制; 完整岩石的变形特性可用等价刚度 k 来表示。节理在加卸载过程中所表现出的特性, 可分成 3 个阶段来研究: 加载阶段、初期卸载阶段和最终卸载阶段。

9.12.1 加载阶段

当节理的倾角 θ 满足:

$$\theta > \arctan \left[\frac{k_n^j + 2k_s^b}{k_n^j + 2k_s^b} \cdot \frac{k_s^j}{k_n^j} \tan \varphi \right] \quad (9-41)$$

时, 节理将产生滑移。在此阶段, 节理-岩桥系统所表现出的变形特性是非弹性的。平均应力和应变关系可表示为:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = L \cdot & \left[\frac{L}{E'} + \frac{\cos^2 \theta}{k_n^j + 2k_s^b} + \right. \\ & \left. + \frac{\sin \theta}{2k_s^b} \left(\sin \theta - \frac{k_s^j}{k_n^j + 2k_s^b} \tan \varphi \cos \theta \right) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (9-42)$$

式中, L 是含单节理岩样的高宽比 (H/W); $E' = K/H$, 是完整岩石在平面应力情况下的弹性模量。

9.12.2 初期卸载阶段

当加载应力达到某一极限值 σ_m 后, 加载应力将下降, 此时节理-岩桥系统进入初期卸载阶段。在此阶段, 节理经历了反向剪切位移并被暂时锁紧, 应力-应变关系是弹性的,

且

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = L \cdot \left[\frac{L}{E'} + \frac{\cos^2 \theta}{k_s^j + 2k_s^b} + \frac{\sin^2 \theta}{k_s^j + 2k_s^b} \right]^{-1} \quad (9-43)$$

9.12.3 最终卸载阶段

当加载应力降到某一临界值 (σ_c) 时, 节理中的剪应力将再次引起节理滑移。因此, 在最后卸载阶段, 节理-岩桥系统也不是弹性的。临界应力 σ_c 为:

$$\sigma_c = \frac{\alpha_1 \sin \theta - \alpha_2 \cos \theta \tan \varphi}{\alpha_1 \sin \theta + \alpha_2 \cos \theta \tan \varphi} \quad (9-44)$$

式中, $\alpha_1 = k_s^j / (k_s^j + 2k_s^b)$, $\alpha_2 = k_s^j / (k_s^j + 2k_s^b)$ 。

在最后卸载阶段, 当施加应力小于临界值 σ_c 时, 应力-应变关系如下:

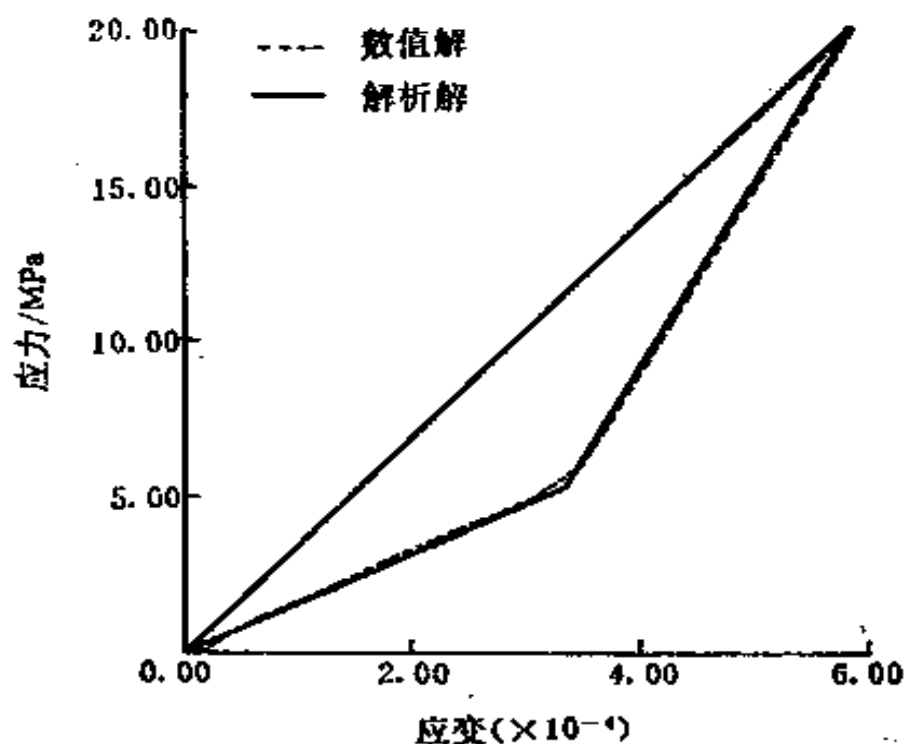


图 9-68 解析解与数值解的比较

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = L \left[-\frac{L}{E'} + \frac{\cos^2 \theta}{k_s^f + 2k_s^b} + \frac{\sin \theta}{2k_s^b} \left(\sin \theta + \frac{k_s^f}{2k_s^b + k_s^f} \tan \varphi \cos \theta \right) \right]^{-1} \quad (9-45)$$

从以上介绍中可见，只有初期卸载阶段是弹性的，在整个加载过程中有塑性滞环现象出现。

图 9-68 是文献[18]中的算例，从图中可见，解析解与离散单元数值解之间有很好的 consistency。

参 考 文 献

- 〔1〕 Cundall P A. A Computer Model for Simulating Progressive Large Scale Movements in Blocky Systems. Proceedings of the Symposium of the International Society of Rock Mechanics, Nancy, France, 1971, Vol. 1, Paper No. II-8.
- 〔2〕 Cundall P A. The Measurement and Analysis of Acceleration in Rock Slopes. Ph.D. Dissertation, University of London, Imperial College of Science and Technology, 1971.
- 〔3〕 Cundall P A. Rational Design of Tunnel Supports: A Computer Model for Rock Mass Behavior Using Interactive Graphics for the Input and Output of Geometrical Data. Tech. Report MRD-2-74, Missouri River Division, U.S. Army Corps of Engineers, 1974, NTIS Report No. AD/A-001 602, 1974.
- 〔4〕 Cundall P A, Marti J, Beresford P J, Last N C, Assgian M I. Computer Modelling of Jointed Rock Masses. Tech. Report N-78-4 U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station, Vicksburg, Mississippi, August 1978.
- 〔5〕 Cundall P A. BALL—A Program to Model granular Media Using the Distinct Element Method. Dames & Moore Advanced Technology Group, London, April 20, 1978.
- 〔6〕 Strack O D L, Cundall P A. The Distinct Element Method as a Tool for Research in

Granular Media, Part I. Department of Civil and Mineral Engineering, University of Minnesota, National Science Foundation, November 1978.

- (7) Drescher A, De Josse de Jong. Photoelastic Verification of a Mechanical Model for the Flow of a Granular Material. *J. Mech. Physics Solids*, Vol.20, 337—351, 1972.
- (8) Lemos J V. A Hybrid Distinct Element Computational Model for the Half-Plane. M. S. Thesis, University of Minnesota, 1983.
- (9) Lemos J V, Brady B H G. Stress Distribution in a Jointed and Fractured Medium. *Rock Mechanics—Theory—Experiment—Practice*, New York, pp.53—59, 1983.
- (10) Lorig L J. A Hybrid Computational Model for Excavation and Support Design in Jointed Media. Ph.D. Thesis, University of Minnesota, 1984.
- (11) Cundall P A. UDEC—A Generalized Distinct Element Program for Modelling Jointed Rock. Report PCAR-1-80, Peter Cundall Associates, European Research Office, U. S. Army, March 1980.
- (12) Cundall P A, Hart. R D. Development of Generalized 2-D and 3-D Distinct Element Programs for Modeling Jointed Rock. ITA-SCA Consulting Group, Misc. Paper SL-85-1, U.S. Army Corps of Engineers, 1985.

- [13] UDEC News and World Report, Official Publication of the UDEC Users Group, ITASCA Consulting Group, Inc., 1985.
- [14] 3DEC—3-D Distinct Element Code, ITASCA Consulting Group, 1987.
- [15] Cundall P A, Strack O D L. The Distinct Element Method as a Tool for Research in Granular Media, Part II. Department of Civil and Mineral Engineering, University of Minnesota, National Science Foundation, October 1979.
- [16] Cundall P A. Formulation of a Three-dimensional Distinct Element Model—Part I. A Scheme to Detect and Represent Contacts in a System Composed of Many Polyhedral Blocks. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. Vol. 25, No. 3, pp. 107—116, 1988.
- [17] Hart R, Cundall P A, Lemos J. Formulation of a Threedimensional Distinct Element Model—Part II. Mechanical Calculations for Motion and Interaction of a System Composed of Many Polyhedral Blocks. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., Vol. 25, No. 3, pp. 117—125, 1988.
- [18] Shen B, Stephansson O. Cyclic Loading Characteristics of Joints and Rock Bridges in a Jointed Rock Specimen. Proc. of Int. Conference on Rock Joints, pp. 725—729, Leon, Norway, 1990.

- (19) Stephansson O, Shen B, Lemos J. Modelling of Excavation, Thermal loading and Bentonite Swelling Pressure for a Waste Repository. Int. High-level Radioactive Waste Management Conference, Las Vegas, Nevada, U.S.A. 1991.
- (20) Stephansson O, Shen B. Modelling of Rock Masses for Site Location of a Nuclear Waste Repository. 7th Int. Congress of Int. Society for Rock Mechanics, Aachen, Germany, 1991.
- (21) Voegele M D. An Interactive Graphics Based Analysis of the Support Requirements of Excavations in Jointed Rock Masses. Ph.D. Thesis, University of Minnesota, 1978.
- (22) Cundall P A, Strack O D L. A Discrete Numerical Model for Granular Assemblies. Geotechnique, Vol. 25, 1979.
- (23) Cundall P A, Marti J. Some New Developments in Discrete Numerical Methods for Dynamic Modelling of Jointed Rock Masses. Proceedings of the Rapid Excavation and Tunelling Conference, 1979.
- (24) Lorig L J, Brady B H G. A Hybrid Discrete Element-Boundary Element Method of Stress Analysis. Proc. 23th Symp. on Rock Mechanics, Berkeley, pp. 628—635, 1982.
- (25) Lorig L J, Brady B H G. An Improved Procedure for Excavation Design in Stratified Rock. Proc. 24th U.S. Rock Mechanics Symp.,

Texas A & M University, pp. 577—586, 1983.

- [26] Lorig L J, Brady B H G. A Hybrid Computational Scheme for Excavation Support Design in Jointed Rock Media. Isrm Symp., Cambridge, pp. 105—112, 1984.
- [27] Jean-Pierre Bardet, Scott R F. Seismic Stability of Fractured Rock Masses with the Distinct Element Method. 26th U.S. Symposium on Rock Mechanics, pp. 139-149, Rapid City, 1985.
- [28] Coulthard M A, Dutton A J. Numerical Modelling of Subsidence Induced by Underground Coal Mining. Key Questions in Rock Mechanics, Balkema, pp. 529—536, 1988.
- [29] Canizal J, Sagaseta C. Numerical Analysis of Discontinuous Block Systems. Numerical Methods in Geomechanics, Innsbruck, pp. 895—900, 1988.
- [30] Tatsuo Omachi, Yasuhiro Arai. Dynamic Failure of Rockfill Models Simulated by the Distinct Element Method. Numerical Methods in Geomechanics, Innsbruck, pp. 1855-1860, 1988.
- [31] Williams J W. Discrete Element Analysis of Granular Material under Dynamic loading. Numerical Methods in Geomechanics, Innsbruck, Balkema, pp. 1799—1803, 1988.
- [32] 王泳嘉. 离散单元法——一种适用于节理岩石力学分析的数值方法. 第一届全国岩石力学数值计算及模型试验讨论会论文集, 1986. 32—37.

- 〔33〕 刘万禧. 离散单元法的基本原理及其在岩体工程中的应用. 第一届全国岩石力学数值计算及模型试验讨论会论文集, 1986, 43-46.
- 〔34〕 张 清. 岩石力学基础. 北京: 中国铁道出版社, 1986.
- 〔35〕 王泳嘉, 邢纪波. 放矿研究的一种新方法——离散单元法. 第二次全国采矿学术会议论文集(金属分册), 1986, 88—94.
- 〔36〕 王泳嘉, 刘兴国, 邢纪波. 离散元法在崩落法放矿中应用的研究. 有色金属, 1987, 39(2), 20—26.
- 〔37〕 戴 庆. 自然崩落法电耙底部结构稳定性研究. [博士学位论文]. 北京: 北京科技大学, 1987.
- 〔38〕 邢纪波, 王泳嘉. 崩落采矿法放矿的离散元仿真. 东北工学院学报, 1988(2), 148—153.
- 〔39〕 赖森华. 有底部结构崩落采矿法放矿动力学问题的研究. [博士学位论文]. 北京: 北京科技大学, 1988.
- 〔40〕 郑永学, 王泳嘉, 姚赞勋. 自然崩落法崩落机制的研究. 有色金属(矿山部分), 1989(2).
- 〔41〕 王泳嘉, 邢纪波. 崩落采矿法放矿的计算机仿真. 全国非金属矿学术会议论文集(二), 1988, 22—26.
- 〔42〕 Wang Yongjia, Xing Jibo. Computerized Simulation of Ore Drawing for Caving System. Proc. 2nd World Congress on Non-Metallic Minerals, International Academic Publishers, 1989.
- 〔43〕 陈荣华. 自然崩落法底部结构稳定性研究. [硕士学位论文]. 沈阳: 东北工学院, 1989.
- 〔44〕 沈宝堂. 边坡稳定的离散元分析. [硕士学位论文]. 沈阳: 东北工学院, 1987.
- 〔45〕 王泳嘉, 沈宝堂. 边坡稳定的离散元法分析. 结构模型破坏试验研讨会论文集, 南京: 河海大学, 1988.

- 〔46〕 沈宝堂, 王泳嘉. 边坡破坏机制的离散元法研究. 东北工学院学报, 1989(4), 349—354.
- 〔47〕 常来山. 广东云浮硫铁矿边坡破坏机理的离散元法分析: [硕士学位论文]. 马鞍山: 冶金工业部马鞍山矿山研究院, 1988.
- 〔48〕 王泳嘉, 邢纪波. 离散元法及其在边坡稳定分析中的应用. 岩石力学, 1987(17).
- 〔49〕 姚建国. 开采影响下岩层移动变形的块体单元数值模拟. 第一届全国计算岩土力学研讨会论文集(一), 峨眉: 西南交通大学出版社, 1987, 232—237.
- 〔50〕 王泳嘉, 邢纪波. 离散元法及其在矿山压力研究中的应用. 阜新矿业学院学报, 1986, 5(4), 1—12.
- 〔51〕 Wang Yongjia and Xing Jibo. Applications of the Discrete Element Method to Research of Strata Control and Ground Movement. Proc. International Symp. on Modern Mining Technology, pp., 333—338, 1988.
- 〔52〕 邢纪波, 王泳嘉. 岩层移动的块体模型计算机仿真. 河北煤炭, 1988(4).
- 〔53〕 何唐镛, 郝跃天. 岩体开挖问题的离散元-有限元法分析. 第三届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会论文集, 1988, 356—357.
- 〔54〕 王泳嘉, 邢纪波. 离散元法及其与边界元法的耦合. 边界元法在岩石力学和工程中应用学术会议文集, 1987.
- 〔55〕 刘建武. 静力松弛离散单元法及其在岩体工程稳定分析中的应用: [硕士学位论文]. 武汉: 中国科学院岩土力学研究所, 1988.
- 〔56〕 Stewart I J, Brown E T. A Static Relaxation Method for the Analysis of Excavation in Di-

scontinuous Rock. Design and Performance of Underground Excavations, Cambridge, pp. 149—155, 1984.

- 〔57〕 王泳嘉. 离散元法及其在岩石力学中的应用. 金属矿山, 1986, 13—17.
- 〔58〕 王泳嘉. 离散元法的进展及其在岩土工程中的应用. 见: 岩土力学数值方法的工程应用. 上海: 同济大学出版社, 1990. 35—45.
- 〔59〕 王泳嘉, 邢纪波. 离散单元法的改进和应用. 见: 岩土力学数值方法的工程应用. 上海: 同济大学出版社, 1990. 245—250.
- 〔60〕 王泳嘉, 邢纪波. 离散元法的基本原理及其应用. 见: 第一届全国计算岩土力学研讨会论文集(一). 峨眉: 西南交通大学出版社, 1987. 124—129.
- 〔61〕 邢纪波, 王泳嘉. 离散单元法的改进及其在颗粒介质研究中的应用. 岩土工程学报, 1990, 12(5): 51—57.
- 〔62〕 王泳嘉, 邢纪波. 数值方法的新进展及其工程应用. 见: 中国岩石力学与工程学会编. 岩石力学新进展. 沈阳: 东北工学院出版社, 1989. 161—185.
- 〔63〕 宣 盍, 邢纪波. 盘石镍矿边坡稳定的离散单元法分析. 岩石力学与工程学报, 1987, 4(4).
- 〔64〕 Otter J R H, Cassell A C, Hobbs R E. Dynamic Relaxation. Proc. Int. Civ. Engrs, Vol. 35, pp. 633—665, 1966.
- 〔65〕 《数学手册》编写组. 数学手册. 北京: 高等教育出版社, 1979.
- 〔66〕 钱伟长, 叶开沅. 弹性力学. 北京: 科学出版社, 1980.
- 〔67〕 《力学词典》编辑部. 力学词典. 北京: 中国大百科全书出版社, 1990.

- [68] 谷口修. 振動工程大全. 北京: 机械工业出版社, 1973.
- [69] Bathe K J, Wilson E L. Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, 1976.
- [70] Nardini D, Brebbia C A. A New Approach to Free Vibration Analysis Using Boundary Elements. Boundary Element Methods in Engineering, Ed. C.A. Brebbia, Springer Verlag, Berlin, 1972.
- [71] Wilkins M L. Calculation of Elastic-plastic Flow. Lawrence Radiation Laboratory, Univ. of California, Research Report, UCRL-7322, Rev. I, 1963.
- [72] Mindlin R D, Deresiewicz H. Elastic Sphere in Contact under Varying Oblique Forces. J. Appl. Mech., 20, 327—344, 1953.
- [73] Miller R K. The Effects of Boundary Friction on the Propagation of Elastic Waves. Bull. Seismic. Assoc. America, 68, pp. 987—998, 1978.
- [74] Singh B. Continuum Characterization of Jointed Rock Masses. Part I—The Constitutive Equations. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abst., 10, pp. 337—345, 1973.
- [75] Daemen J J K. Tunnel Support Loading Caused by Rock Failure. Ph.D. Thesis, University of Minnesota, 1975.
- [76] Katsuki S, Ishikawa N, Ohira Y, Suzuki H. 円筒要素モデルを用いた中詰め材のせん断抵抗力に関する基

礎的研究. 土木学会论文集, 第 410 号/I-12, 1989.

- [77] Hocking G, Mustoe G G W, Williams J R. Dynamic Analysis for Three Dimensional Contact and Fracturing of Multiple Bodies. NUMETA'87, 2nd Int. Conf. on Advances in Numerical Methods in Engineering: Theory & Applications, Swansea, U.K., 1978.
- [78] Brady B H G, Gramer M L, Hart R D. Preliminary Analysis of a Loading Test on a Large Basalt Block. (Tech. Note), Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abst, 22, pp.345—348, 1985.
- [79] 吉田 博. 个别要素法による敷砂上への落石の冲击特性に関する解析. 土木学会论文集, 第 392 号/I-9, 1988.