

LEKCIJA NR. 1.

IEVADS: PAMATAPZĪMĒJUMI UN FUNKCIJAS

Kursa prasības un saturs

Pamatapzīmējumi

Funkcijas jēdziens

Funkciju klases

Funkciju klasifikācija

1.mājas darbs



PRASĪBAS KREDĪTPUNKTU IEGŪŠANAI

1. Semestra laikā noteiktos termiņos jāuzraksta

divi 45 min kontroldarbi,

kuri sastāda 45% no gala atzīmes.

Pēc katra kontroldarba būs viena tā pārrakstīšanas reize. Vēl viena kopīga reize būs semestra beigās — iespēja uzrakstīt vēlreiz vienu no kontroldarbiem. Šajās reizēs kontroldarbu(s) varēs rakstīt tie studenti, kas to iepriekš nebūs darījuši, un tiek atļauts rakstīt arī tiem studentiem, kuriem pirmajā reizē atzīme ir < 5 .

2. Semestra laikā noteiktos termiņos jāuzraksta

četri 5-10 min kontroldarbi,

kuri sastāda 10% no gala atzīmes. Pārrakstīšana nenotiks.

3. Laikā līdz eksāmenam jāatrāda *visu mājas darbu atrisinājumi rokrakstā* (pierakstīt risinājumus numerācijas secībā!). Ja mājas darbi netiek uzrādīti, tad gala atzīme tiek samazināta par 1 balli.

4. *Gala eksāmenā* jānokārto rakstisks tests (jautājumi un uzdevumi par semestrī apgūto), kura vērtējums ir 45% no gala atzīmes.

KURSA APRAKSTS

1. Funkcijas jēdziens. Funkciju klasifikācija.
2. Funkcijas robežas definīcija. Vienpusējās robežas.
3. Teorēmas par robežām. Robežpāreja nevienādībās.
4. Funkciju nepārtrauktība: ekvivalentas definīcijas. Slēgtā intervālā nepārtrauktu funkciju īpašības. Pārtraukuma punkti.
5. Atvasināšanas jēdziens, tā ģeometriskā un fizikālā interpretācija. Atvasināšanas likumi.
6. Diferenciālis. Pirmā ievērojamā robeža. Saliktas funkcijas atvasināšana. Augstāku kārtu atvasinājumi.
7. Funkcijas lielākā un mazākā vērtība. Monotonitāte.
1.kontrol darbs.
8. Izliektas uz augšu un izliektas uz leju funkcijas. Lokālie un globālie ekstrēmi.

9. Robežas, kas saistītas ar bezgalību. Lopitāla kārtula.
10. Funkcijas grafika asimptotas. Funkciju pētīšana, grafiku skices.
11. Nenoteiktais integrālis, tā īpašības, tabula. Lineārā substitūcija.
12. Nenoteiktā integrāļa atrašana ar substitūcijas metodi.
13. Racionālu funkciju integrēšana.
14. Parciālā integrēšanas metode.
- 2.kontroldarbs.
15. Rīmaņa summa un jēdziens par noteikto integrāli.
16. Pārskats par diferenciālrēķiniem un integrālrēķiniem.

LITERATŪRA

Mācību pamatliteratūra:

1. I.Bula, J.Buls Matemātiskā analīze ar ģeometrijas un algebras elementiem. I daļa, Zvaigzne ABC, Rīga, 2003.
2. E.J.Purcell, D.Varberg CALCULUS with Analytic Geometry. Fourth edition, Prentice-Hall, Inc.m Englewood Cliffs, 1984.

Papildliteratūra:

3. I.Volodko, Augstākā matemātika: īss teorijas izklāsts, uzdevumu risinājumu paraugi. I daļa, Apgāds Zvaigzne ABC, 2007.
4. I.Volodko, Augstākā matemātika: īss teorijas izklāsts, uzdevumu risinājumu paraugi. II daļa, Apgāds Zvaigzne ABC, 2009.
5. Z.Nitecki, Calculus Deconstructed: a Second Course in First-Year Calculus. The Mathematical Association of America, 2009. Pieejams LU abonētajā datubāzē EBSCO.
6. D.You, A First Course in Analysis. World Scientific, 2013. Pieejams LU abonētajā datubāzē EBSCO.

E.Kronbergs, P.Rivža, Dz.Bože Augstākā matemātika. I daļa, Rīga, 1988.

K.Šteiners Augstākā matemātika. Zvaigzne ABC, III, IV daļas, 1998, 1999.

L.D.Kudrjavcev Kurs matematiceskogo analiza, Maskava, I daļa, 1988 (krievu val.)

Paul's Online Math Notes, piejams internetā:

<http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcI/CalcI.aspx>

B. S. Thomson, J. B. Bruckner, A. M. Bruckner, Elementary Real Analysis, Prentice Hall, 2001 (2007), pieejams internetā :

<http://www.e-booksdirectory.com/details.php?ebook=4718>

Pamatapzīmējumi

- ★ Jēdzienus, kurus izvēlas bez definīcijas, sauc par **pamatjēdzieniem**.
- ★ Apgalvojumus, kuri tiek akceptēti bez pierādījuma, sauc par **aksiomām**.
- ★ Viens no pamatjēdzieniem ir **kopa**. Parasti kopas apzīmē ar liela-
jiem burtiem, tās elementus ar mazajiem burtiem. Ja A ir kopa un
 a ir tās elements, tad pieraksts $a \in A$ lasāms kā "a pieder kopai A ".
Savukārt, ja b nepieder kopai A , tad to pieraksta šādi: $b \notin A$.
- ★ Otrs svarīgs pamatjēdziens ir **izteikums**. Intuitīvi izsakoties, izteikumi
ir apgalvojumi, kas ir vai nu patiesi vai aplami.
- ★ Izteikuma A **negāciju** pieraksta $\neg A$ un lasa "negācija no A ", "nav
tiesa, ka A " vai arī "ne A ".

- ★ Pierakstu $A \& B$ lasa "A un B" vai arī "A konjunkcija B".
- ★ Pierakstu $A \vee B$ lasa "A vai B" vai arī "A disjunktija B".
- ★ Pierakstu $A \Rightarrow B$ lasa "ja A, tad B", "no A seko B" vai arī "A implicē B".
- ★ Pierakstu $A \Leftrightarrow B$ lasa "A tad un tikai tad, ja B" vai arī "A ekvivalents B".
- ★ Simbolu \exists sauc par **eksistences kvantoru**. Lasa "eksistē". Jāpasvītro, ka eksistences kvantors neapgalvo *tieši* viena objekta eksistenci, bet gan *vismaz* viena objekta eksistenci ar uzrādīto īpašību. Lai izsacītu to, ka eksistē tieši viens objekts, lieto pierakstu $\exists!$.
- ★ Simbolu \forall sauc par **universālkvantoru**. Lasa "visiem" , "katram".
- ★ Pierakstu $B = \{x \mid P(x)\}$ mēs uztversim kā apgalvojumu: kopa B sastāv no visiem tiem un tikai tiem elementiem, kuriem piemīt īpašība P.

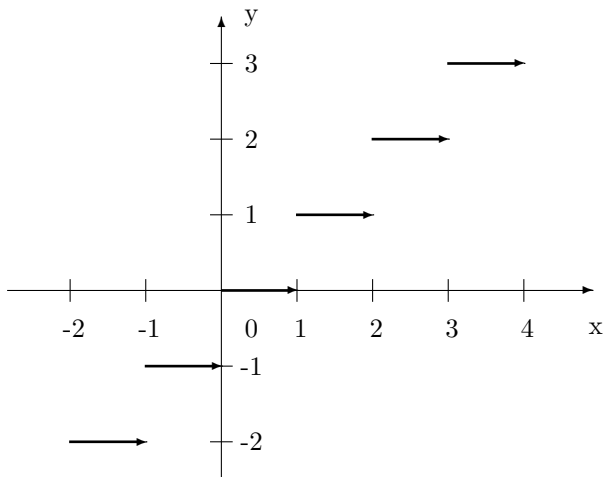
Funkcijas jēdziens

Bieži izmantosim **moduļa funkciju** $y = |x|$, kuru definē šādi:

$$y = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0; \end{cases}$$

VINGRINĀJUMS. Uzzīmēt moduļa funkcijas grafika skici!

Funkcija ir arī $y = \lfloor x \rfloor = \max\{t \mid t \in \mathbb{Z} \text{ \& } t \leq x\}$ — veselā daļa no x , kuras piekārtojuma būtību vieglāk formulēt vārdiski: tā katram reālam skaitlim x piekārtο lielāko veselo skaitli, kas mazāks vai vienāds ar pašu x . Piemēram, $\lfloor 3,1 \rfloor = 3$, bet $\lfloor -3,1 \rfloor = -4$. Šo funkciju sauc par **veselās daļas funkciju**, tās grafiks dots 1.2. zīmējumā.



1.2. zīm. Funkcijas $y = \lfloor x \rfloor$ grafiks.

Kā formāli definēt funkciju?

Šajā nolūkā vispirms noskaidrosim Dekarta reizinājuma jēdzienu. Pieņemsim, ka dotas divas kopas X un Y .

1.2. DEFINĪCIJA. Kopu $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ sauc par elementu $x \in X$, $y \in Y$ **sakārtotu pāri** un apzīmē (x, y) .

1.4. DEFINĪCIJA. Visu sakārtoto pāru (x, y) , $x \in X$, $y \in Y$, kopu sauc par **kopu X un Y Dekarta reizinājumu** un apzīmē $X \times Y$.

Dekarta reizinājumā nav būtiski, vai $X = Y$ vai $X \neq Y$. Tātad

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ \& } y \in Y\}.$$

VINGRINĀJUMS.

$$X = \{\text{suns, kaķis}\}, \quad Y = \{A, B, C\}.$$

Atrast $X \times Y$!

1.6. DEFINĪCIJA. Trijnieku $f = (X, Y, G)$, kur $G \subseteq X \times Y$, sauc par **funkciju** (lieto arī vārdu ”**attēlojums**”), ja visiem kopas G elementiem (x, y) , (x, z) ir spēkā vienādība $y = z$. Kopu X sauc par funkcijas f **starta** (jeb **izejas**) kopu, Y — par f **finiša** (jeb **ieejas**) kopu, bet G — par f **grafiku**.

Ja $(x, y) \in G$, tad lieto pierakstu $f(x) = y$. Vispārīgs pieraksts $f : X \rightarrow Y$ norāda, ka f ir funkcija ar starta kopu X un finiša kopu Y . Parasti šādā pierakstā tiek domāts, ka funkcija ir definēta jebkurā kopas X punktā.

Elementu $x \in X$ sauc par funkcijas f **argumentu** vai **neatkarīgo mainīgo**, bet $y \in Y$ — par **atkarīgo mainīgo**. Šajā situācijā saka arī, ka elementa x **attēls** ir elements y , bet elementa y **pirmtēls** ir elements x .

Ja $X = Y$, tad saka, ka funkcija f *attēlo kopu X sevī*.

Par funkcijas f (ar starta kopu X un finiša kopu Y)

definīcijas apgabalu (angliski "*domain*") sauc kopu

$$Dom(f) = \{ x \in X \mid \exists y \in Y ((x, y) \in G) \},$$

vērtību apgabalu (angliski "*range*") sauc kopu

$$Ran(f) = \{ y \in Y \mid \exists x \in X ((x, y) \in G) \}.$$

Pieraksts $f : X \rightarrow Y$ nozīmē, ka $X = Dom(f)$, bet $Ran(f) \subseteq Y$.

Salikta funkcija

1.8. DEFINĪCIJA. Ja $f : X \rightarrow Y$ un $g : W \rightarrow Z$, tad funkciju $F : X \rightarrow Z$, kas definēta ar nosacījumu:

$$\forall x \in X \quad F(x) = g(f(x)),$$

sauc par funkciju f un g **kompozīciju** (jeb **superpozīciju**, jeb **saliktu** funkciju) un apzīmē $g \circ f$.

1.10. Piemērs. Ja $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 6\sqrt{x}$, $g(x) = \cos^3 x$, tad

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \cos^3(6\sqrt{x}), \text{ bet}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 6\sqrt{\cos^3 x}.$$

Tātad vispārīgā gadījumā $f \circ g \neq g \circ f$. ■

Matemātiskās analīzes kursā mēs vispirms aplūkosim **viena reālā mainīgā** funkcijas, t.i.,

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}, \text{ kur } X \neq \emptyset \text{ un } X \subseteq \mathbb{R},$$

mazliet vēlāk — **daudzargumentu funkcijas**, t.i.,

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}, \text{ kur } X \neq \emptyset \text{ un } X \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Funkciju klasifikācija

Pamatelementārās funkcijas ir:

1. konstantes funkcijas $y = C$, $C \in \mathbb{R}$,
2. pakāpes funkcijas $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
3. eksponentfunkcijas $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$,
speciālgadījumā $y = e^x$, kur $e \approx 2,7$ ir Eilera (iracionāls) skaitlis,
4. logaritmiskās funkcijas $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$,
speciālgadījumā $y = \ln x$ — naturālā logaritma funkcija ($\ln x = \log_e x$),
5. trigonometriskās funkcijas $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$,
6. inversās trigonometriskās funkcijas (ciklometriskās) $y = \arcsin x$,
 $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccot} x$.

1.12. DEFINĪCIJA. Funkcijas, kuras iegūstamas no pamatelementārām funkcijām ar kompozīcijas, saskaitīšanas, atņemšanas, reizināšanas, kā arī dalīšanas palīdzību (darbības izmantojot tikai galīgu skaitu reižu) sauc par **elementārām** funkcijām.

Piemēram, elementāras funkcijas ir

$$y = \log_3(4x + 5), y = \frac{\sin x + 8 \cos x}{3x^2 + 6(x-1) \operatorname{tg} 5x}, y = 128^{(2x - \arcsin x)}, \text{ u.c.}$$

1.14. DEFINĪCIJA. Ja funkcija izveidota, izpildot ar tās argumentu algebriskas darbības (saskaitīšana, atņemšana, reizināšana, dalīšana, kāpināšana racionāla skaitļa pakāpē) galīgā skaitā, tad tādu funkciju sauc par **algebrisku** funkciju. Funkcijas, kas nav algebriskas, sauc par **transcendentām** funkcijām.

Piemēram, visas trigonometriskās un to inversās funkcijas ir transcendentas funkcijas, kā arī logaritmiskās, eksponentfunkcijas un pakāpes funkcijas ar iracionāliem kāpinātājiem.

Algebriskās funkcijas iedala:

- 1) **polinomos** — $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, kur $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,
- 2) **racionālās funkcijās** — divu polinomu dalījums, t.i., $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kur $P(x)$ un $Q(x)$ ir polinomi,
- 3) **iracionālās funkcijās** — nav racionāla funkcija un kura satur galīgā skaitā kompozīcijas no racionālām funkcijām, pakāpes funkcijām ar racionāliem kāpinātājiem un aritmētiskām darbībām.

1.MĀJAS DARBS

1. Dotas funkcijas:

a) $f(x) = 5x^2 + 4x - 9$

b) $z(x) = \lfloor 2x \rfloor$.

Uzzīmēt funkciju grafiku skices (bez funkcijas pētīšanas)!

Pieņemsim, ka abām funkcijām starta kopa un finiša kopa ir \mathbf{R} ,
noteikt:

★ definīcijas apgabalu;

★ vērtību apgabalu.

2. Dota funkcija $p(x) = \sin^4 \sqrt{x^2 + 7}$. Atrast f un g tā, lai $p = f \circ g$! Uzrakstīt 6 dažādus variantus (ieskaitot triviālos)! No kādu funkciju kompozīcijas sastāv dotā funkcija p ? Uzrakstīt gadījumu ar maksimālo skaitu.