LEKCIJA NR. 3

ROBEŽAS II

Robežas unitāte

3.1. TEORĒMA (robežas unitātes teorēma). **Ja funkcijai $f(x)$ punktā x_0 eksistē robeža, tad tā ir viena vienīga.**

□ Pieņemsim pretējo, proti, ka

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \neq B = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Pieņemsim, ka $|A-B| = 2\varepsilon > 0$.

No $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ eksistences seko, ka

$$\varepsilon > 0\ \exists\delta_1 > 0\ \forall x \in Dom(f)\ [0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon].$$

No $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = B$ eksistences seko, ka

$$\varepsilon > 0\ \exists\delta_2 > 0\ \forall x \in Dom(f)\ [0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow\ |f(x) - B| < \varepsilon].$$

Izvēlamies $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$.

Tad $\forall x \in Dom(f)\ [0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow$
$2\varepsilon = |A - B| = |(A - f(x)) + (f(x) - B)| \leq$
$\leq |f(x) - A| + |f(x) - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon]$.

Iegūtā pretruna $2\varepsilon < 2\varepsilon$ parāda, ka pieņēmums $A \neq B$ ir bijis aplams.■

Robežas unitātes teorēmas lietojums parasti saistās ar iespējām atsevišķos gadījumos pierādīt, ka funkcijai $f(x)$ robeža $x \to x_0$ nemaz neeksistē. Ievērojiet, ja divas reizes, rēķinot funkcijas $f(x)$ robežu punktā x_0, iegūti divi atšķirīgi rezultāti, tad vismaz vienreiz izdarīta kļūda.

3.2. TEORĒMA. Ja $X \subseteq Y$ un $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in Y}} f(x) = A$, tad $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = A$.

□ Brīvi izvēlēsimies $\varepsilon > 0$, tad saskaņā ar doto atrodams tāds $\delta > 0$, ka $\forall x \in Y \cap Dom(f)$ izpildās nosacījums:

$$|\, x - x_0 \,| < \delta \Rightarrow |\, f(x) - A \,| < \varepsilon \,.$$

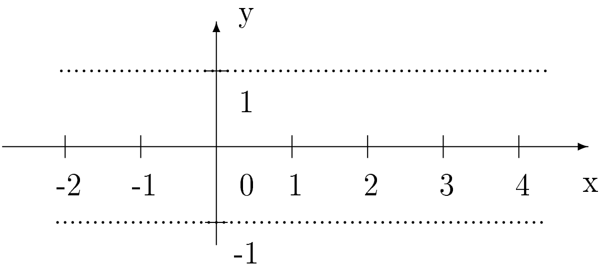
Ja reiz tā, tad arī $\forall x \in X \cap Dom(f)$ izpildās nosacījums:

$$|\, x - x_0 \,| < \delta \Rightarrow |\, f(x) - A \,| < \varepsilon \,,$$

kas arī nozīmē, ka $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = a$. ■

3.3. Piemērs. Apskatīsim Dirihlē funkciju :

$$D(x) = \begin{cases} -1 & , \text{ ja } \; x \in \mathbb{Q}\,; \\ \;\;1 & , \text{ ja } \; x \notin \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$



3.1. zīm. Dirihlē funkcija.

Tā kā robeža no konstantas funkcijas ir konstante, tad

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{Q}}} D(x) = -1\,, \qquad \text{bet} \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\notin\mathbb{Q}}} D(x) = 1\,.$$

Balstoties uz 3.2. teorēmu, varam apgalvot: ja vispār eksistē $\lim\limits_{x\to 0} D(x)$, tad

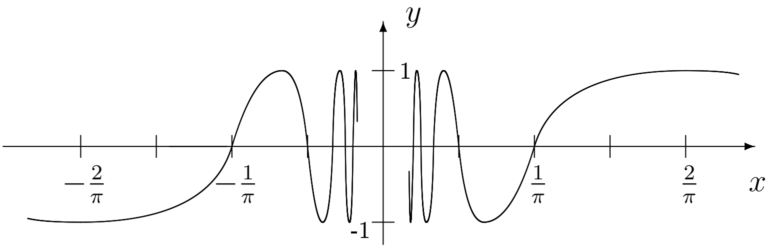
$$\lim_{x\to 0} D(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{Q}}} D(x) = -1\,.$$

Tāpat šī teorēma dod iespēju apgalvot:

$$\lim_{x\to 0} D(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\notin\mathbb{Q}}} D(x) = 1\,.$$

Savukārt robežas unitātes teorēma spiež mums secināt, ka robeža $\lim\limits_{x\to 0} D(x)$ vispār neeksistē. ■

3.4. Piemērs. Pierādīsim, ka $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neeksistē.



3.2. zīm. $y = \sin\frac{1}{x}$.

Ņemsim vērā iepriekšējā piemērā gūto pieredzi. Izvēlēsimies kopas

$$X_1 = \left\{ \frac{2}{\pi + 4\pi k} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}_+ \right\} \text{ un } X_2 = \left\{ \frac{2}{-\pi + 4\pi k} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

Funkcija $\quad \sin\frac{1}{x}|X_1 = 1\,, \quad$ tāpēc $\quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in X_1}} \sin\frac{1}{x} = 1\,.$

Funkcija $\quad \sin\frac{1}{x}|X_2 = -1\,, \quad$ tāpēc $\quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in X_2}} \sin\frac{1}{x} = -1\,.$

Līdz ar to $x \to 0$ funkcijai $\sin\frac{1}{x}$ robeža neeksistē. ■

Aritmētiskās darbības ar robežām

3.5. TEORĒMA.

Ja $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ **un** $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$**,** $k \in \mathbf{R}$ **- konstante, tad**

1) $\lim\limits_{x\to x_0} kf(x) = k \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = kA$ **,**

2) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A + B$ **,**

3) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A - B$ **,**

4) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = AB$ **,**

5) ja $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \neq 0$ **, tad** $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{A}{B}$ **.**

3.6. Piemērs.

1. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2+7x-1}{\sqrt{6x+4}} = \frac{3\cdot 2^2+7\cdot 2-1}{\sqrt{6\cdot 2+4}} = \frac{25}{4}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{5x^2+2x-7}{x^3-1} = \frac{0}{0}$ — situācijas, kurās veidojas šādi dalījumi, sauc par **robežu nenoteiktībām** $\frac{0}{0}$. Izmantojot algebriskus pārveidojumus un aritmētiskās darbības ar robežām, robežu nenoteiktību $\frac{0}{0}$ var novērst, t.i., var atrast daļas robežu. Saīsināšanu drīkst izdarīt, jo pēc robežas definīcijas daļas vērtība netiek apskatīta punktā $x_0 = 1$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{5x^2+2x-7}{x^3-1} = \lim_{x\to 1} \frac{5(x-1)(x+\frac{7}{5})}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{5x+7}{x^2+x+1} = \frac{12}{3} = 4.$$

3. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{2-\sqrt{6+x}}{3-\sqrt{7-x}}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{(2-\sqrt{6+x})(2+\sqrt{6+x})(3+\sqrt{7-x})}{(3-\sqrt{7-x})(3+\sqrt{7-x})(2+\sqrt{6+x})}=$

$=\lim\limits_{x\to-2}\frac{(4-(6+x))(3+\sqrt{7-x})}{(9-(7-x))(2+\sqrt{6+x})}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{(-2-x)(3+\sqrt{7-x})}{(2+x)(2+\sqrt{6+x})}=$

$=-\frac{3+3}{2+2}=-\frac{3}{2}.$

Šīs pēdējās robežas atrašanā izmantojām reizināšanu ar saistītajām izteiksmēm. ■

VINGRINĀJUMS. Atrast robežu $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{\sqrt{13-x}-\sqrt{4x-2}}$.

Jāatzīmē, ka teorēmas par aritmētiskām darbībām ar robežām ir spēkā arī vienpusējo robežu gadījumā.

3.7. Piemērs.

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{(x^2+1)\lfloor x\rfloor}{(3x-1)^2} = \frac{5\cdot 2}{25} = \frac{2}{5} \text{ un } \lim_{x\to 2^-} \frac{(x^2+1)\lfloor x\rfloor}{(3x-1)^2} = \frac{5\cdot 1}{25} = \frac{1}{5}.$$

Kopumā tas nozīmē, ka $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x^2+1)\lfloor x\rfloor}{(3x-1)^2}$ neeksistē, jo vienpusējās robežas ir atšķirīgas. ■

VINGRINĀJUMS.

1. Atrast $\lim\limits_{x\to -3^-} 2^{\lfloor 2x\rfloor}$ un $\lim\limits_{x\to -3^+} 2^{\lfloor 2x\rfloor}$.

2. Pierādīt, ka robeža $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{|x-1|}$ neeksistē!

Robežpāreja nevienādībās

3.8. TEORĒMA. Ja kādā punkta x_0 apkārtnē

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad \textbf{un} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = A = \lim_{x \to x_0} h(x)\,,$$

tad $\lim_{x \to x_0} g(x) = A$**.**

3.9. Piemērs. Atradīsim $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$!

Atsevišķi ņemot robeža no pirmā reizinātāja ir 0, bet no otrā neeksistē. Taču tā spriest nedrīkst — atsevišķās robežas var neeksistēt, bet reizinājuma robeža var eksistēt. Tā tas ir arī šajā gadījumā. Ievērosim, ka

$$0 \le \left| x\sin\frac{1}{x} \right| \le |x| \cdot 1 = |x|.$$

Tā kā $\lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$ un $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$, tad pēc robežpārejas nevienādībās

$$\lim_{x\to 0} \left| x\sin\frac{1}{x} \right| = 0.$$

Viegli pierādīt, ka

$$(\lim_{x\to c} f(x) = 0) \;\Leftrightarrow\; (\lim_{x\to c} |f(x)| = 0).$$

Tādējādi $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$. ■

3.MĀJAS DARBS

5. Atrast robežas:

a) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{3x^2+3x}{2x^2-3x-5}$ Atbilde: $\frac{3}{7}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{11-x}}$ Atbilde: $\frac{4}{3}$

6. Atrast vienpusējās robežas:

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{5x-|x|}{2x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{5x-|x|}{2x}$,

c) $\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{1}{x-\lfloor x\rfloor}$, d) $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{1}{x-\lfloor x\rfloor}$.

Atbilde: a) 3, b) 2, c) 1, d) neeksistē