LEKCIJA NR. 4.:

NEPĀRTRAUKTAS FUNKCIJAS

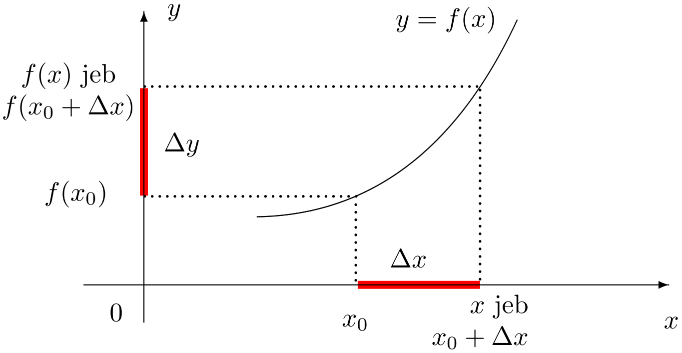
Pamatdefinīcijas

4.1. DEFINĪCIJA. (Nepārtrauktības 1.definīcija)
Funkciju $f(x)$ sauc par **nepārtrauktu punktā** x_0, ja

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

Funkciju $f(x)$ sauc par **nepārtrauktu kopā** X, ja funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta katrā kopas X punktā x_0.

$\Delta x = x - x_0$ — **argumenta** x **pieaugums punktā** x_0,
$\Delta y = f(x) - f(x_0)$ — **funkcijas** $f(x)$ **pieaugums punktā** x_0.
Funkcijas Δy apzīmēšanai mēdz lietot arī pierakstu $\Delta f(x_0)$.



4.1. zīm.

Ievērosim, ka $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, t.i., Δy var uzlūkot arī kā argumenta Δx funkciju.

4.2. DEFINĪCIJA. (Nepārtrauktības 2.definīcija)
Funkciju $f(x)$ sauc par **nepārtrauktu punktā** x_0, ja $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

4.3. DEFINĪCIJA. Funkciju $u(x)$ sauc par **bezgalīgi mazu funkciju** $x-$am tiecoties uz x_0, ja $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0$.

Otrā definīcija parāda, ka Δy (jeb $\Delta f(x_0)$) ir bezgalīgi maza funkcija lielumam $\Delta x \to 0$. Šajā gadījumā mēdz teikt, ka bezgalīgi mazam argumenta pieaugumam Δx punktā x_0 atbilst bezgalīgi mazs funkcijas pieaugums $\Delta f(x_0)$.

4.4. DEFINĪCIJA. Funkciju $f(x)$ sauc par **nepārtrauktu punktā x_0 no kreisās puses**, ja $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$. Funkciju $f(x)$ sauc par **nepārtrauktu punktā x_0 no labās puses**, ja $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Ņemot vērā 4.1.definīciju un 2.7.teorēmu, funkcijas nepārtrauktību punktā varam definēt arī šādi:

4.5. DEFINĪCIJA. (Nepārtrauktības 3.definīcija)
Funkciju $f(x)$ sauc par **nepārtrauktu punktā x_0**, ja tā šajā punktā ir nepārtraukta gan no labās, gan kreisās puses.

4.1., 4.2. un 4.5. definīcijas ir savstarpēji ekvivalentas.

Elementāro funkciju nepārtrauktība

No teorēmām par summas, starpības, reizinājuma un dalījuma robežām iegūstam šādu teorēmu.

4.6. TEORĒMA. Punktā x_0 nepārtrauktu funkciju summa, starpība, reizinājums un dalījums (ja daļas saucējs punktā x_0 nav nulle) ir punktā x_0 nepārtrauktas funkcijas.

4.7. Piemērs. Konstantai funkcijai $f(x) = c$ un jebkuram x_0 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$ (robežteorijā to pierādījām!). Tas nozīmē, ka konstanta funkcija ir nepārtraukta visā reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$. ■

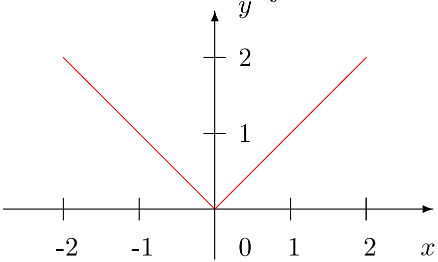
4.8. Piemērs. Funkcijai $g(x) = x$ un jebkuram $x_0 \in \mathbb{R}$ izpildās $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = x_0$, tāpēc funkcija $g(x) = x$ ir nepārtraukta visā reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$. ■

Tā kā jebkuru racionālu funkciju iegūst summējot, reizinot un dalot nepārtrauktas funkcijas $f(x) = c$ un $g(x) = x$, tad racionāla funkcija ir nepārtraukta visos šīs funkcijas definīcijas apgabala punktos.

Var pierādīt, ka $\sin x$, $\cos x$ un 2^x ir nepārtrauktas funkcijas. Vispārīgā gadījumā ir spēkā apjomīgāks rezultāts

4.9. TEORĒMA. Jebkura elementāra funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta savā definīcijas apgabalā $Dom(f)$.

4.10. Piemērs. Funkcija $y = |x|$ ir nepārtraukta visā reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$, kaut arī nav elementāra funkcija.



4.2. zīm. $y = |\,x\,|$.

Tā kā polinomu funkcijas $y = -x$, $x < 0$ un $y = x$, $x > 0$, ir nepārtrauktas funkcijas savos definīciju apgabalos, tad $\lim\limits_{x\to 0^-}(-x) = 0$ un $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$, t.i., $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$, kas nozīmē, ka $y = |x|$ ir nepārtraukta funkcija punktā 0. Kopumā esam ieguvuši, ka moduļa funkcija $y = |x|$ ir nepārtraukta visā reālo skaitļu kopā. ■

4.11. TEORĒMA (Funkciju kompozīcijas robežteorēma). **Ja funkcija $g(y)$ ir nepārtraukta punktā y_0 un $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, tad**

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)).$$

4.12. SEKAS. Ja funkcija $g(y)$ ir nepārtraukta punktā y_0, bet $f(x)$ ir nepārtraukta punktā x_0 un $f(x_0) = y_0$, tad funkciju kompozīcija $(g \circ f)(x)$ ir nepārtraukta punktā x_0.

Tas dod iespēju secināt: ja $g(y)$ ir nepārtraukta visā reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$, bet $f(x)$ ir nepārtraukta kopā X, tad $(g \circ f)(x)$ ir nepārtraukta kopā X.

4.13. Piemērs. $h(x) = |x^2 - 3x + 8|$ ir nepārtraukta funkcija visiem $x \in \mathbb{R}$, jo $f(x) = |x|$ un $g(x) = x^2 - 3x + 8$ ir nepārtrauktas funkcijas, tāpēc nepārtraukta ir to kompozīcija
$h(x) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$. ■

Pārtraukuma punkti

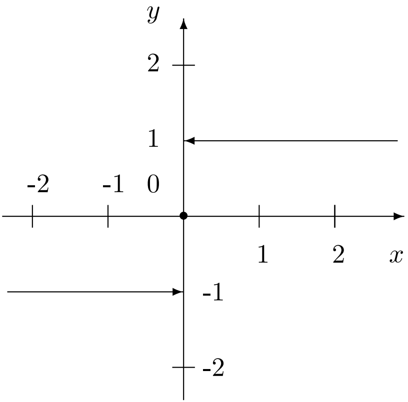
Mēs apskatīsim tikai tādu punktu x_0 klasifikāciju, kuru caurdurtajā apkārtnē $\overset{\circ}{\mathfrak{U}}(x_0, \delta_0)$ atrodas bezgalīgi daudz funkcijas f definīcijas apgabala $Dom(f)$ punkti.

4.14. DEFINĪCIJA. Punktu x_0 sauc par funkcijas $f(x)$ **pārtraukuma punktu**, ja $x_0 \notin Dom(f)$ vai arī šajā punktā funkcija nav nepārtraukta.

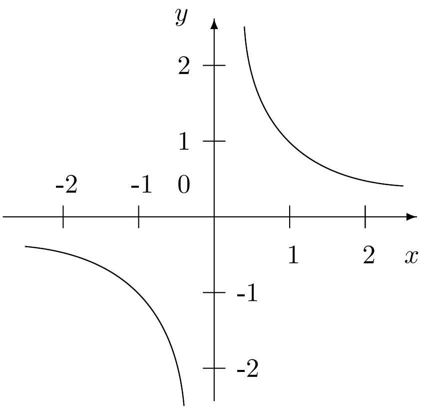
Ja pārtraukuma punktā x_0 eksistē vienpusējās robežas, tad šo pārtraukuma punktu sauc par **pirmā veida** pārtraukuma punktu. Šajā situācijā starpību $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ sauc par funkcijas $f(x)$ **lēcienu** punktā x_0. Ja lēciens vienāds ar 0, tad pārtraukuma punktu x_0 sauc par funkcijas $f(x)$ **novēršamu** pārtraukuma punktu.

Pārtraukuma punktu, kas nav pirmā veida pārtraukuma punkts, sauc par **otrā veida** pārtraukuma punktu.

VINGRINĀJUMS. Noteikt funkciju $y = sgn(x)$ (signum no x) [zīm. 4.3] un $y = \frac{1}{x}$ [zīm. 4.4] pārtraukuma punktus!



Zīm. 4.3. $y = sgn(x)$.



Zīm. 4.4. $y = \frac{1}{x}$.

Veselās daļas funkcija $\lfloor x \rfloor$ [zīm. 1.2] ir nepārtraukta no labās puses visā reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$, kaut arī katrā veselā punktā $x_0 \in \mathbb{Z}$ tai ir pirmā veida pārtraukuma punkti (lēcieni ir 1).

Funkcijai

$$y = \begin{cases} 1 & , \quad \text{ja} \quad x \neq 0; \\ -1 & , \quad \text{ja} \quad x = 0; \end{cases}$$

punkts 0 ir novēršams pārtraukuma punkts, tāpat funkcijai $y = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$ punkts 2 ir novēršams pārtraukuma punkts, kaut arī pati funkcija šai punktā nav definēta.

Savukārt Dirihlē funkcijai visi reālās skaitļu ass $\mathbb{R}$ punkti ir otrā veida pārtraukuma punkti neskatoties uz to, ka tās definīcijas apgabals arī ir $\mathbb{R}$.

Nepārtrauktu funkciju īpašības

4.15. DEFINĪCIJA. Pieņemsim, ka punkts c pieder funkcijas f definīcijas apgabalam $Dom(f)$ un $S \subseteq Dom(f)$.

$f(c)$ sauc par funkcijas f **lielāko (maksimālo) vērtību kopā** S, ja $f(c) \geq f(x)$ visiem x no S.

$f(c)$ sauc par funkcijas f **mazāko (minimālo) vērtību kopā** S, ja $f(c) \leq f(x)$ visiem x no S.

Funkcijas f lielākās un mazākās vērtības kopā S sauc par **ekstremālām vērtībām**.

Bieži vien lielākās un mazākās vērtības eksistence noteiktai funkcijai ir atkarīga no kopas S. Piemēram, funkcijai $f(x) = \frac{1}{x}$ [zīm. 4.4] kopā $S =]0; +\infty[$ nav ekstremālo vērtību. Toties, ja $S = [a; b]$, $a > 0$, tad $f(a)$ ir lielākā vērtība, bet $f(b)$ ir mazākā funkcijas f vērtība. Ja savukārt $S =]a; b[$, tad funkcijai atkal nav ekstremālo vērtību.

Ekstremālo vērtību eksistence ir atkarīga arī no funkcijas veida. Ja aplūkojam pārtrauktu funkciju

$$y = \begin{cases} 2x^2 - 1 & , \quad \text{ja} \quad x \leq 0; \\ \cos x & , \quad \text{ja} \quad x > 0; \end{cases}$$

tad kopā $S = [-\frac{1}{2}; 4]$ tai nav lielākās vērtības, taču ir mazākā vērtība $y(0) = y(\pi) = -1$.

4.16. DEFINĪCIJA. Funkciju $f(x)$ sauc par **ierobežotu** kopā $X \subseteq Dom(f)$, ja $\exists M > 0\, \forall x \in Dom(f)\ |f(x)| < M$.

4.17. TEORĒMA (Veieršrāsa teorēma nepārtrauktām funkcijām). **Slēgtā intervālā $[\,a; b\,]$ nepārtraukta funkcija ir ierobežota. Šai intervālā tā sasniedz gan savu mazāko, gan lielāko vērtību.**

Tuvināti atrodot vienādojumu reālās saknes, atrisinot nevienādības, kā arī daudzos spriedumos un pierādījumos izmanto Koši teorēmas par nepārtrauktām funkcijām.

4.18. TEORĒMA (Koši). **Ja funkcija ir nepārtraukta slēgtā intervālā $[a;b]$, vienā no intervāla galapunktiem tās vērtība ir pozitīva, bet otrā — negatīva, tad vismaz vienā intervāla iekšējā punktā funkcijas vērtība ir nulle.**

Teorēmai ir vienkārša ģeometriska interpretācija: ja nepārtrauktas funkcijas vērtības intervāla $[a;b]$ galos ir skaitļi ar pretējām zīmēm, tad vismaz vienā intervāla iekšējā punktā funkcijas grafiks krusto Ox asi — šai punktā funkcijas vērtība ir nulle. Vispārīgā gadījumā ir spēkā šāds rezultāts:

4.19. TEORĒMA (Koši, starpvērtību teorēma). **Ja funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta slēgtā intervālā $[a;b]$ un intervāla galapunktos funkcijas vērtības nav vienādas, tad šai intervālā funkcija pieņem jebkuru starpvērtību starp funkcijas vērtībām intervāla galapunktos.**

4.MĀJAS DARBS

7. Noteikt doto funkciju pārtraukuma punktus un to veidu. Pamatot! Uzzīmēt abu funkciju grafikus.

a) $y = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x < 0 \\ (x+1)^2, & 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 3, & x > 2 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & x < 0 \\ 5x - x^2, & 0 \leq x \end{cases}$

8. Noteikt, vai funkcija $g(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x-1,5}$ ir nepārtraukta norādītajos intervālos $[a;b]$; ja tā nav, tad noteikt pārtraukuma punktus un to veidu.

a) $[a;b] = [-1;-0,5]$; b) $[a;b] = [1;1,8]$; c) $[a;b] = [2;4]$.