LEKCIJA NR. 6.

DIFERENCĒŠANA II

Diferenciālis un aproksimācija
Robeža $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t}$
Funkciju kompozīcijas atvasināšana
Augstāku kārtu atvasinājumi
6.mājas darbs
1.kontroldarba parauga variants

Diferenciālis un aproksimācija

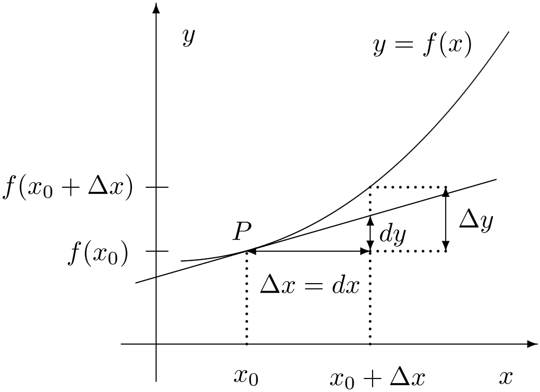
Pieņemsim, ka $P(x_0, y_0)$ ir funkcijas $y = f(x)$ grafika fiksēts punkts. Izveidosim jaunu koordinātu asu sistēmu šādi: P ir sākumpunkts, ass dx ir paralēla x asij un ass dy ir paralēla y asij. Pieskarei punktā P ir vienādojums $dy = k\,dx = f'(x_0)\,dx$.

6.1. DEFINĪCIJA. Pieņemsim, ka $\mathfrak{U}(x_0, \delta_0) \subseteq Dom(f)$. Funkciju $y = f(x)$ sauc par **diferencējamu punktā** x_0, ja kādā punkta x_0 apkārtnē funkcijas pieaugums Δy izsakāms kā summa

$$\Delta y = a\,\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x,$$

kur $a \in \mathbb{R}$ un $\varepsilon(0) = 0 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x)$.

Reizinājumu $a\,\Delta x$ sauc par **funkcijas** $f(x)$ **diferenciāli punktā** x_0 un apzīmē ar dy. Simetrisku (drīzāk gan estētisku) apsvērumu dēļ Δx apzīmē ar dx, tāpēc $dy = a\,dx$.



6.1. zīm.

Var pierādīt, ka vienargumenta funkcijām diferencējamība un atvasinājuma eksistence ir ekvivalenti jēdzieni un tāpēc $a = f'(x)$. Vēlāk parādīsim, ka vairākargumentu funkcijām līdzīga ekvivalence neizpildās.

Tātad $dy = f'(x_0)\,dx$ un tāpēc $f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$. Tādējādi atvasinājums $f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$ interpretējams kā divu diferenciāļu dalījums.

Šajos apzīmējumos dx sauc par **neatkarīgā mainīgā diferenciāli**, bet $dy = f'(x)dx$ sauc par **mainīgā y diferenciāli** jeb par **funkcijas $f(x)$ diferenciāli**.

6.2. Piemērs. Jāatrod dy, ja $y = 2x^3 + \ln x$. Tad

$$dy = d(2x^3 + \ln x) = (2x^3 + \ln x)'dx = (6x^2 + \frac{1}{x})dx. \blacksquare$$

Pieņemsim, ka dota funkcija $y = f(x)$. Ja x pieaug par Δx, tad y atbilstoši par Δy, kas mazām izmaiņām ir aptuveni vienāds ar dy [sk. 6.1. zīm.]. Tā kā $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx dy = f'(x_0)dx$, tad

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx.$$

6.3. Piemērs. Jāatrod $\sqrt{16,8}$ tuvinātā vērtība. Šajā gadījumā $x_0 = 16$, $\Delta x = 0,8$, $f(x) = \sqrt{x}$ un $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Tāpēc

$$\sqrt{16,8} \approx \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}} \cdot 0,8 = 4 + \frac{1}{8} \cdot 0,8 = 4 + 0,1 = 4,1. \blacksquare$$

Robeža $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$

Augstāk minētā robeža ir viena no ievērojamākajām robežām matemātiskās analīzes kursā. Tās atrašana balstās uz ģeometriskiem apsvērumiem un pieņēmuma, ka protam atrast trijstūru un sektoru laukumus.

6.4. TEORĒMA. $\lim\limits_{\mathbf{t}\to \mathbf{0}}\frac{\sin \mathbf{t}}{\mathbf{t}} = \mathbf{1}$

Šo robežu izmanto daudzu nenoteiktību $\frac{0}{0}$ novēršanai. Iepriekšējā lekcijā šo robežu izmantojām, lai parādītu, ka $(\sin x)' = \cos x$.

6.5. Piemēri.

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 9x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 9x\cdot 9}{9x}=9.$

2. $\lim\limits_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t}=\lim\limits_{t\to0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t}=$

$$=\lim_{\substack{t\,\to\,0\\(\frac{t}{2}\,\to\,0)}}\frac{\sin\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}=\lim_{\substack{t\,\to\,0\\(\frac{t}{2}\,\to\,0)}}\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\lim_{t\to0}\sin\frac{t}{2}=\sin 0=0.$$

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{2x\sin x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}\cdot 3}{2x\sin x\cdot 1}=$

$$=3\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}\cdot x}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot\sin x}=\frac{3}{4}.\ \blacksquare$$

VINGRINĀJUMS.

Atrast robežas 1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x}{\sin 16x}$ un 2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{3x+4}-2}{\sin 2x}$.

Funkciju kompozīcijas atvasināšana

Kā rīkoties, lai atrastu, piemēram, funkcijas $y = (3x^2 - 8x + 1)^{100}$ atvasinājumu? Vai patiešām nepieciešams kāpināt 100 pakāpē?

6.6. TEORĒMA. Ja funkcija g ir diferencējama punktā a un f ir diferencējama punktā $g(a)$, tad funkciju kompozīcija $f \circ g$ ir diferencējama punktā a un

$$(f \circ g)'(a) = f'(b) \cdot g'(a),$$

kur $b = g(a)$.

Konkrētajā piemērā $f(b) = b^{100}$ un $b = g(x) = 3x^2 - 8x + 1$,

tāpēc $((3x^2 - 8x + 1)^{100})' = 100(3x^2 - 8x + 1)^{99} \cdot (3x^2 - 8x + 1)' =$

$= 100(6x - 8)(3x^2 - 8x + 1)^{99}$.

Atvasināšanas formulas gadījumā, ja arguments ir mainīgā x funkcija (salikta funkcija):

$$((u(x))^n)' = n(u(x))^{n-1} \cdot u'(x),\ n \in \mathbb{R},$$

$$(\sin u(x))' = \cos u(x) \cdot u'(x),$$

$$(\cos u(x))' = -\sin u(x) \cdot u'(x),$$

$$(\operatorname{tg} u(x))' = \frac{1}{\cos^2 u(x)} \cdot u'(x),$$

$$(\operatorname{ctg} u(x))' = -\frac{1}{\sin^2 u(x)} \cdot u'(x),$$

$$(a^{u(x)})' = a^{u(x)} \ln a \cdot u'(x),\ a > 0,$$

$$(e^{u(x)})' = e^{u(x)} \cdot u'(x),$$

$$(\log_a u(x))' = \frac{1}{u(x)\ln a} \cdot u'(x),\ a > 0,\ a \neq 1,$$

$$(\ln u(x))' = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x),$$

$$(\arcsin u(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2(x)}} \cdot u'(x),$$

$$(\arccos u(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2(x)}} \cdot u'(x),$$

$$(\operatorname{arctg} u(x))' = \frac{1}{1+u^2(x)} \cdot u'(x),$$

$$(\operatorname{arcctg} u(x))' = -\frac{1}{1+u^2(x)} \cdot u'(x).$$

6.7. Piemēri.

1. $\left(\cos\frac{x^2+5}{x+1}\right)' = -\sin\frac{x^2+5}{x+1}\cdot\left(\frac{x^2+5}{x+1}\right)' = -\sin\frac{x^2+5}{x+1}\,\frac{2x(x+1)-(x^2+5)}{(x+1)^2} =$
$= -\frac{x^2+2x-5}{(x+1)^2}\sin\frac{x^2+5}{x+1}.$

2. Kompozīciju var veidot arī trīs un vairāk funkcijas, tad jārīkojas līdzīgi kā iepriekš.

$$\left(\ln\sin^3(4x-7)\right)' = \frac{1}{\sin^3(4x-7)}\left(\sin^3(4x-7)\right)' =$$
$$= \frac{1}{\sin^3(4x-7)}3\sin^2(4x-7)\,(\sin(4x-7))' =$$
$$= \frac{3}{\sin(4x-7)}\cos(4x-7)\,(4x-7)' = \frac{12\cos(4x-7)}{\sin(4x-7)} = 12\mathrm{ctg}(4x-7). \blacksquare$$

VINGRINĀJUMS. Atrast atvasinājumus funkcijām

1) $y=\sin\frac{x^2}{x^3+5}$, 2) $y=\mathrm{tg}^5(12x^2-5)$ un 3) $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$.

Augstāku kārtu atvasinājumi

Diferencējot funkciju f, rezultātā mēs iegūstam funkciju f'. Ja mēs atkal diferencējam funkciju f', iegūsim citu funkciju, kuru apzīmē ar f'' un sauc par funkcijas f **otro atvasinājumu**. Turpinot diferencēšanas darbību, varam iegūt f **trešās kārtas atvasinājumu** utt. Tātad $n+1$**-ās kārtas atvasinājums** ir $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$, $n = 1, 2, \ldots$.

Pirmā atvasinājuma atrašanai izmantojām apzīmējumus

$$f'(x) = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{df(x)}}{\mathrm{dx}} = D_x y = D_x f(x).$$

Līdzīgus apzīmējumus lieto arī augstāku kārtu atvasinājumu apzīmēšanai

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dx}^2} = \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{f(x)}}{\mathrm{dx}^2} = D_x^2 y = D_x^2 f(x),$$

$$f'''(x) = \frac{\mathrm{d}^3\mathrm{y}}{\mathrm{dx}^3} = \frac{\mathrm{d}^3\mathrm{f(x)}}{\mathrm{dx}^3} = D_x^3 y = D_x^3 f(x), \quad \text{utt.}$$

6.8. Piemērs. Ja $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 9$, tad
$f'(x) = 12x^2 - 12x$,
$f''(x) = 24x - 12$,
$f'''(x) = 24$,
$f^{\mathrm{IV}}(x) = 0$.
Tā kā $0' = 0$, tad visi pārējie augstāku kārtu atvasinājumi ir 0. ■

VINGRINĀJUMS.

1. Atrast funkcijas $\sin 2x$ trešās kārtas atvasinājumu punktā 0.
2. Atrast funkcijas $\frac{1}{x}$ n-tās kārtas atvasinājumu.

6.MĀJAS DARBS

11. Izmantojot $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, atrast robežas:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin 6x - \sin 7x}$

Atbilde: -1

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 4x}$

Atbilde: $\frac{1}{32}$

12. Atvasināt un vienkāršot:

a) $y = \ln(x^2 + \sqrt{x^4+1})$

Atbilde: $\frac{2x}{\sqrt{x^4+1}}$

b) $y = \frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{ctg} x} + \frac{\cos^2 x}{1+\mathrm{tg} x}$

Atbilde: $-\cos 2x$ (vai $\sin^2 x - \cos^2 x$)

1. KONTROLDARBA parauga variants

1.uzdevums. Aprēķināt robežas!

a) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x^2-2x-8}{2x^2+3x-2}$,

b) $\lim\limits_{x\to1} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{3x-2}}$,

c) $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{\lfloor x\rfloor+1}{\lfloor 5x\rfloor}$,

d) $\lim\limits_{t\to0} \frac{\operatorname{tg} 5t}{\operatorname{tg} 10t}$.

2.uzdevums. Atrast tādu konstanti a, lai funkcija $f(x) = \begin{cases} x^2+5, & x<1 \\ 3x+a, & x\geq 1 \end{cases}$ būtu nepārtraukta visiem $x \in \mathbb{R}$. Pamatot risinājumu! Uzzīmēt funkcijas grafiku ar atrasto konstanti!

Uzzīmēt funkcijas grafiku, ja $a = 0$! Kāds un kāda veida pārtraukuma punkts ir šajā gadījumā?

3.uzdevums. Atvasināt dotās funkcijas!

a) $y = (4x^2 + \frac{1}{x^2})\ln x$, b) $y = \frac{5x^2-\sin x}{\cos x+2x^5}$,

c) $y = (\sin^3 2x + 4\cos 2x)^{10}$.