LEKCIJA NR. 2.

ROBEŽAS I

Intuitīva robežas izpratne

x	$f(x)$
2,2	13,24
2,1	12,61
2,01	12,0601
2,001	12,006001
2,0001	12,00060001
$\downarrow$	$\downarrow$
2	?
$\uparrow$	$\uparrow$
1,9999	11,99940001
1,999	11,994001
1,99	11,9401
1,9	11,41
1,8	10,84

Apskatīsim funkciju

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}\ .$$

Tā nav definēta punktā 2.

Kā mainīsies funkcijas $f(x)$ vērtības, ja argumenta x vērtības tuvosies punktam 2 ?

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = 12$$

Intuitīva robežas definīcija

Teiksim, ka funkcijas $f(x)$ robeža ir skaitlis A argumentam x tiecoties uz x_0, ja visām mainīgā x vērtībām, kas atrodas tuvu punktam x_0, funkcijas $f(x)$ vērtības ir tuvu punktam A.

Šajā nostādnē parasti prasa, lai $x \neq x_0$. Līdz ar to nav būtiski, vai funkcija $f(x)$ ir definēta vai nav definēta punktā x_0.

Intervāli un apkārtnes

Pieņemsim, ka $a < b$, tad kopas

$$
\begin{aligned}
&]-\infty;\, a\,[= \{\, x \,|\, x \in \mathbb{R} \,\&\, x < a \,\},\\
&]-\infty;\, a\,] \ = \{\, x \,|\, x \in \mathbb{R} \,\&\, x \le a \,\},\\
&]\,a;\, b\,[= \{\, x \,|\, x \in \mathbb{R} \,\&\, a < x < b \,\},\\
&[\,a;\, b\,[= \{\, x \,|\, x \in \mathbb{R} \,\&\, a \le x < b \,\},\\
&]\,a;\, b\,] \ = \{\, x \,|\, x \in \mathbb{R} \,\&\, a < x \le b \,\},\\
&[\,a;\, b\,] \ = \{\, x \,|\, x \in \mathbb{R} \,\&\, a \le x \le b \,\},\\
&[\,b;\, +\infty\,[= \{\, x \,|\, x \in \mathbb{R} \,\&\, b \le x \,\},\\
&]\,b;\, +\infty\,[= \{\, x \,|\, x \in \mathbb{R} \,\&\, b < x \,\}
\end{aligned}
$$

sauc par **intervāliem**, turklāt kopas $]-\infty;\, a[$, $]\,a;\, b[$, $]\,b;\, +\infty[$ sauc par **vaļējiem intervāliem**, bet kopu $[\,a;\, b\,]$ — par **slēgtu intervālu**. Ievērosim, ka šajos apzīmējumos $\mathbb{R} = \,]-\infty;\, +\infty\,[$.

2.1. DEFINĪCIJA. Kopu

$$\mathfrak{U}(x_0, \delta) = \,]\, x_0 - \delta; x_0 + \delta \,[= \{\, x \mid |x - x_0| < \delta \}$$

sauc par **punkta x_0 delta apkārtni**.

Savukārt kopu

$$\overset{\circ}{\mathfrak{U}}(x_0, \delta) = \,]\, x_0 - \delta; x_0 + \delta \,[\setminus \{x_0\} = \mathfrak{U}(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} =$$
$$= \{\, x \mid 0 < |x - x_0| < \delta \}$$

sauc par **punkta x_0 caurdurtu delta apkārtni**.

Precīza robežas definīcija

2.2. DEFINĪCIJA. Skaitli A sauc par **funkcijas $f(x)$ robežu, kad x tiecas uz x_0**, ja katram pozitīvam skaitlim ε eksistē tāds pozitīvs skaitlis δ, ka visiem funkcijas f definīcijas apgabala elementiem x izpildās nosacījums:

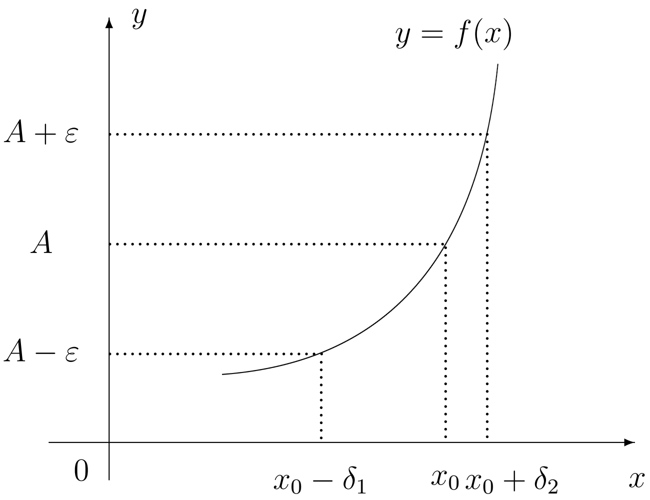
$$\text{ja} \quad x \in \overset{\circ}{\mathfrak{U}}(x_0, \delta), \quad \text{tad} \quad f(x) \in \mathfrak{U}(A, \varepsilon).$$

Simboliskā pierakstā definīcija izskatās šādi:

$$(\lim_{x\to x_0} f(x) = A) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$$
$$(\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in Dom(f)[\,x\in\mathring{\mathfrak{U}}(x_0,\delta)\Rightarrow f(x)\in\mathfrak{U}(A,\varepsilon)\,]).$$

Apkārtņu vietā var lietot arī nevienādības, tad **robežas definīciju** pieraksta šādi:

$$(\lim_{x\to x_0} f(x) = A) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$$
$$(\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in Dom(f)[\,0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon\,]).$$



2.1. zīm. Sec. $\delta \leq \min\{\delta_1; \delta_2\}$.

2.3. Piemērs. Pieņemsim, ka kopā X definēta funkcija $f(x) = c \in \mathbb{R}$, tad $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$.

Pēc definīcijas:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ [\, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon \,].$$

Dotais piemērs ir netipisks, jo pierādījuma gaitā varam neinteresēties par $\varepsilon > 0$:

$$|\, f(x) - c \,| = |\, c - c \,| = 0\,,$$

un tas ir mazāks par jebkuru pozitīvu ε, t.i., $0 < \varepsilon$ izpildās vienmēr. Turklāt šī vienādība ir spēkā neatkarīgi no tā, cik "tālu" x_0 atrodas no $x \in X$, tāpēc δ lomā var ņemt jebkuru pozitīvu skaitli. ■

2.4. Piemērs. Pierādīt, ka $\lim\limits_{x\to 2}(3x+2) = 8\,.$
Ir jāparāda, ka

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ [\,0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |3x+2-8| < \varepsilon\,].$

Vispirms fiksē patvaļīgu $\varepsilon > 0$, uzdevums ir atrast tam atbilstošo δ. Pierādījuma gaitā pēdējo nevienādību aizstāj ar ekvivalentām nevienādībām:

$$|3x+2-8| < \varepsilon\,, \quad |3x-6| < \varepsilon\,,$$
$$3\,|x-2| < \varepsilon\,, \qquad |x-2| < \tfrac{\varepsilon}{3}\,.$$

No šīm savstarpēji ekvivalentajām nevienādībām izriet:

$$\text{ja} \quad 0 < \delta \le \tfrac{\varepsilon}{3}, \quad \text{tad} \quad |3x+2-8| < \varepsilon\,.$$

Tāpēc δ lomā var izraudzīties tieši $\frac{\varepsilon}{3}$ vai mazāku skaitli. Līdz ar to pierādīts, ka jebkuram $\varepsilon > 0$ var izraudzīties $0 < \delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3}$ tā, lai būtu spēkā nosacījums:

$$[\,|x-2| < \delta \Rightarrow |3x+2-8| < \varepsilon\,]. \qquad \blacksquare$$

Ievērosim, ka mūsu piemērā δ lomā varēja izvēlēties arī jebkuru citu pozitīvu skaitli, kas apmierina nevienādības $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Citiem vārdiem sakot robežas definīcijā nav prasības, lai δ būtu viennozīmīgi nosakāms kā ε funkcija.

VINGRINĀJUMS. Pierādīt, ka $\lim\limits_{x \to -2}(3x+2) = -4$.

Visu pierādījumu var sadalīt divās daļās:
1) tā ir analīze, līdz mēs atrodam, kāds δ varētu būt derīgs,
2) pierādījums, kas demonstrē, ka izvēlētais δ atbilst visām robežas definīcijas prasībām.

Parasti jau no analīzes ir skaidra pierādījuma shēma, tāpēc lielākoties aprobežojas ar analīzi.

Lai izvairītos no sarežģītiem algebriskiem novērtējumiem, ir izstrādāta robežteorija, par ko runāsim nākamajā lekcijā.

2.5. DEFINĪCIJA. Skaitli A sauc par **funkcijas** $f(x)$ **labās puses robežu (kreisās puses robežu), kad** x **tiecas uz** x_0, ja katram pozitīvam skaitlim ε eksistē tāds pozitīvs skaitlis δ, ka visiem funkcijas f definīcijas apgabala elementiem x izpildās nosacījums:

$$0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$(0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.)$$

Labās puses robežu un kreisās puses robežu sauc par **vienpusējām robežām**. Pierakstam lieto apzīmējumus:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x), \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

Simboliskā pierakstā, piemēram, gadījums $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ ir šāds:

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
$(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in Dom(f)[\,0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\,])$.

2.6. Piemērs.

$$sgn(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Interesi izraisa punkts $x_0 = 0$, šajā gadījumā

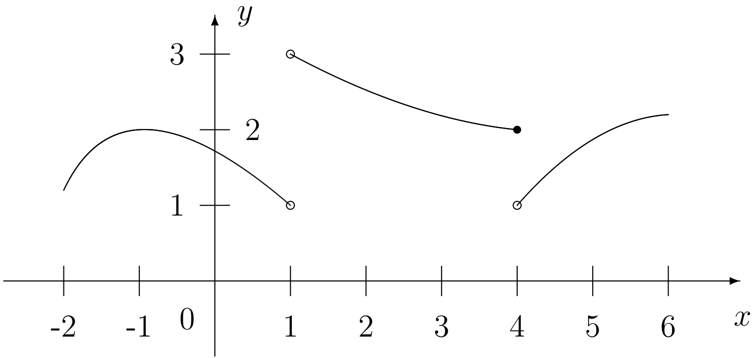
$$\lim_{x \to 0^-} sgn(x) = -1 \quad \text{un} \quad \lim_{x \to 0^+} sgn(x) = 1,$$

kaut pašā punktā 0 funkcijas vērtība ir 0. ■

2.7. TEORĒMA.

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = A\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A = \lim_{x \to x_0^+} f(x)\right)$$

VINGRINĀJUMS. Funkcijas $f(x)$ grafiks dots 2.2. zīm. Tukšais aplītis nozīmē, ka punkts nepieder grafikam, bet pildītais pieder. Atrast $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$.



2.2. zīm.

2.MĀJAS DARBS

3. Pierādīt pēc robežas definīcijas, ka $\lim_{x \to 4} \frac{2x^2-5x-12}{x-4} = 11$.

   Atbilde: $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$

4. Uzzīmēt funkcijas $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x < 1, \\ 1 + x^2, & x \geq 1 \end{cases}$

grafika skici un atrast robežas, ja tās eksistē:

a) $\lim_{x \to 0} f(x)$, b) $\lim_{x \to 1} f(x)$, c) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$, d) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$.