§3.5　自回归滑动平均模型的拟合

设时间序列$\{x_t\}$满足$ARMA(p,q)$模型：

$$x_t=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i x_{t-i}+\varepsilon_t-\sum_{j=1}^{q}\beta_j\varepsilon_{t-j}\ ,\ \ t=p+1,\ p+2,\ \cdots,\ n$$

其中$\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_p)'$，　$\beta=(\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_q)'$为模型参数，满足前述及平稳性及可逆性等条件，而 $\{\varepsilon_t\}$为独立序列，且

$$E\varepsilon_t=0\ ,E\varepsilon_t^2=\sigma^2\ ,E\varepsilon_t^4<+\infty\text{。}$$

已知样本值$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$，求与之适应的$ARMA(p,q)$模型的方法与前述方法类似。即首先求假设$ARMA(p,q)$的参数的估计，再确定模型的阶数，最后作模型拟合假设检验，以确定最终模型。

一、$ARMA(p,q)$模型的阶数p与q的估计

如果时间序列$\{x_t\}$为$ARMA(p,q)$模型，其中自回归阶数p与滑动平均阶数q均未知，则利用样本值首先对其进行估计，常用的估计方法有自相关函数与偏相关函数分析法，AIC 准则方法或 BIC 准则方法等。

1.　自相关函数与偏相关函数分析法

因为一个平稳可逆序列为$ARMA(p,q)$模型的特征是，其偏相关函数α_{kk}与自相关函数ρ_k均为拖尾的，即若偏相关函数α_{kk}在p以后截尾，则应拟和$AR(p)$模型；若其自相关函数ρ_k在q以后截尾，则应拟合$MA(q)$模型；所以当偏相关函数α_{kk}与自相关函数ρ_k均是拖尾时，应当考虑可以拟和$ARMA(p,q)$模型。但是这一方法只能说明是否可以拟和$ARMA(p,q)$模

型，不能说明具体的阶数 p 和 q 当取何值。因此具体确定阶数 p 和 q 的估计还需借助别的方法。此分析法的步骤为：

（1）首先将原数据零均值化：即由样本值 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$，计算均值

$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，再令 $y_t=x_t-\bar{x},\ \ t=1,2,\cdots,n$，则 $\{y_t\}$ 为零均值序列

（2）计算样本自协方差函数

$$\hat{\gamma}_k=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-k}(x_j-\bar{x})(x_{k+j}-\bar{x})=\frac{1}{n}\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n-k}}\mathrm{y_j y_{k+j}}\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

（3）计算样本自相关函数：即

$$\hat{\rho}_k=\frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0}$$

（4）再用迭代法计算样本偏相关函数 α_{kk}：

$$\hat{\alpha}_{1,\ 1}=\hat{\rho}_1$$

$$\hat{\alpha}_{k+1,\ k+1}=(\hat{\rho}_{k+1}-\sum_{j=1}^{k}\hat{\rho}_{k+1-j}\hat{\alpha}_{jk})(1-\sum_{j=1}^{k}\hat{\rho}_j\hat{\alpha}_{jk})^{-1}$$

其中 $\hat{\alpha}_{j,\ k+1}=\hat{\alpha}_{jk}-\hat{\alpha}_{k+1,\ k+1}\hat{\alpha}_{k-j+1,\ k}$，$\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ k$

（5）将 $(k,\ \hat{\rho}_k)$ 与 $(k,\ \hat{\alpha}_{kk})$ 分别描在笛卡尔坐标图上，观察，若从某个 k 以后，$\hat{\rho}_k$ 明显接近于零，则该 k 即为所求阶数 q 的估计 $\hat{q}$，此时模型为 $MA(q)$；若 $\hat{\alpha}_{kk}$ 从某个 k 以后明显接近于零，则该 k 即为所求阶数 p 的估计 $\hat{p}$，此时模型为 $AR(p)$。若 $\hat{\rho}_k$ 与 $\hat{\alpha}_{kk}$ 都没有明显的接近于零的趋势，则此时模型应为 $ARMA(p,q)$。

2. AIC 准则方法与 BIC 准则方法

可以将求 $AR(p)$ 模型阶数 p 的 AIC 准则方法与 BIC 准则方法加以推广，即得求 $ARMA(p,q)$ 模型阶数 p 与 q 的 AIC 准则方法与 BIC 准则方法：

首先确定实数 P 为真阶数 p 与 q 的公共上界，再引入了以下所谓的 AIC 准则函数：

$$\mathrm{AIC}(k,j)=\ln\hat{\sigma}^2(k,j)+\frac{2(k+j)}{n}，\quad k,j=0,\ 1,\ \cdots,\ P$$

其中 $\hat{\sigma}^2(k,j)$ 为取阶数 $p=k$，$q=j$（0≤ k, j ≤P）时 σ^2 的估计 ,而 $p=0$ 时, $\hat{\sigma}^2=\hat{\gamma}_0$,一般 P 的取值视实际情况由经验而定。再取 $(\hat{p},\hat{q})$,使其满足下式：

$$\mathrm{AIC}(\hat{p},\hat{q})=\min_{0\le k,j\le P}\mathrm{AIC}(k,j)$$

则此 $\hat{p}$ 与 $\hat{q}$ 即为所求 p 与 q 的 AIC 准则估计。

也可采用 AIC 准则修改形式，即 BIC 准则函数

$$\mathrm{BIC}(k)=\ln\hat{\sigma}^2(k,j)+\frac{(k+j)\ln n}{n}\quad，\quad k,j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ P$$

确定 $\hat{p}$，使其满足下式：

$$\mathrm{BIC}(\hat{p},\hat{q})=\min_{1\le k,j\le P}\mathrm{BIC}(k,j)$$

由此得到的 $\hat{p}$ 与 $\hat{q}$ 为所求 p 与 q 的 BIC 准则估计。

因此利用 AIC 准则判断步骤是：

（1）首先凭经验选定阶数 p 与 q 的公共上界 P 值，则 $0\le p,q\le P$；

（2）再由样本值 $x_t,\cdots,x_n$ 迭代求出 σ^2 的最小二乘估计或尤尔—沃克估计

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2(k,j)&=\hat{\gamma}_0-\hat{\alpha}'(k,j)\hat{b}_k\\&=\hat{\gamma}_0-b_k'\Gamma^{-1}(k,j)b_k\qquad k,j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ P\\&k=0,\ \ \hat{\sigma}^2=\hat{\gamma}_0\end{aligned}$$

（3）将 $\hat{\sigma}^2(k,j)$ 代入 $A(k,j)=\mathrm{AIC}(k,j)=\ln\hat{\sigma}^2(k,j)+\dfrac{2(k+j)}{n}$ 得 $A(0,0),\ A(0,1),\ \mathrm{A}(1,1),\cdots,\ A(P,P)$，若有 $A(\hat{p},\hat{q})=\min\limits_{0\le k,j\le P}A(k,j)$ ，则 $\hat{p}$ 与 $\hat{q}$ 为所求的 AIC 准则估计。

二、$ARMA(p,q)$ 模型的参数估计

若时间序列 $\{x_t\}$ 为 $ARMA(p,q)$，则模型参数包括 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_p$，$\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_q$ 及 σ^2 等 $p+q+1$ 个未知参数，也用矩估计法，极大似然估计法与自回归逼近方法进行估计。

1. 矩估计法

利用样本矩代替总体矩的方法，求未知参数的方法称为矩估计法。其作法步骤为：

（1）首先由 $x_1,\cdots,x_n$ 计算自协方差函数 $\hat{\gamma}_k$；

（2）由数字矩阵等式 $\hat{\Gamma}_{pq}\hat{\alpha}=\hat{b}$

求得自回归系数 $\alpha=(\hat{\alpha}_1\cdots\hat{\alpha}_p)'$ 的矩估计： $\hat{\alpha}=\hat{\Gamma}_{pq}^{-1}\hat{b}$

其中 $\hat{\Gamma}_{pq}=\begin{pmatrix}\hat{\gamma}_q & \hat{\gamma}_{q-1} & \cdots & \hat{\gamma}_{q-p+1}\\ \hat{\gamma}_{q+1} & \hat{\gamma}_q & \cdots & \hat{\gamma}_{q-p+2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \hat{\gamma}_{q+p-1} & \hat{\gamma}_{p+q-2} & \cdots & \hat{\gamma}_q\end{pmatrix}$, $\hat{b}=\begin{pmatrix}\hat{\gamma}_{q+1}\\ \hat{\gamma}_{q+2}\\ \vdots\\ \hat{\gamma}_{q+p}\end{pmatrix}$

求出 $\hat{\alpha}$ 的估计。

（3）再将上述自回归系数 $\alpha=(\hat{\alpha}_1\cdots\hat{\alpha}_p)'$ 的矩估计代回模型中，即得：

$$y_t\ \hat{=}\ x_t-\sum_{i=1}^{p}\hat{\alpha}_i x_{t-i}=\varepsilon_t-\sum_{j=1}^{q}\beta_j\varepsilon_{t-j}\qquad t=p+1,\ p+2,\ \cdots,\ n$$

再求得模型 $\{y_t\}$ 的自相关函数的估计 $\hat{\gamma}_k(y)$， $k=1,2,\cdots,q$

$$\hat{\gamma}_k(y)=\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{p}\hat{\alpha}_i\hat{\alpha}_j\gamma_{i-j+k}=\begin{cases}\hat{\sigma}^2(1+\sum^{q}\beta_j^2) & k=0\\ \sigma^2(-\hat{\beta}_k+\sum_{j=1}^{q-k}p_j\beta_{j+k}) & k=1,\ 2,\ \cdots,\ q\end{cases}$$

从中即可求出 $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}^2$ 的估计。

2. 极大似然估计法

若对模型再附加条件 ε_t 服从正态分布 $N(0,\ \sigma^2)$，则可采用近似极大似然估计法估计模型参数。

为方便近似计算，再设初值 $x_0=x_{-1}=\cdots=x_{-q-p}=0$，

$\varepsilon_0=\varepsilon_{-1}=\cdots=\varepsilon_{-q-p}=0$，则极大似然估计法作法步骤为：

（1）首先通过初值与已知样本值迭代算出残差：

$$\varepsilon_k=\beta_1\varepsilon_{k-1}+\beta_2\varepsilon_{k-2}+\cdots+\beta_q\varepsilon_{k-q}+x_k-$$

$$\alpha_1x_{k-1}+\alpha_2x_{k-2}+\cdots+\alpha_px_{k-p}$$

即 $$\varepsilon_t=\sum_{i=1}^{q}\beta_i\varepsilon_{t-i}+x_t-\sum_{j=1}^{p}\alpha_jx_{t-j}\qquad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

（2）建立似然函数

因为 $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ 的分量相互独立，且近似服从正态分布 $N(0,\ \sigma^2I)$，故其近似概率密度，即似然函数为

$$L(\alpha,\beta,\sigma^2)=f(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n;\alpha,\beta,\sigma^2)=(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}})^n\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k^2\}$$

对上式取对数，即得

$$\ln L(\beta,\sigma^2)\approx-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k^2 \qquad (4.5)$$

其中 ε_k 由假定及(4.4)式迭代而得，即 $\varepsilon_t=\sum_{i=1}^{q}\beta_i\varepsilon_{t-i}+x_t-\sum_{j=1}^{p}\alpha_jx_{t-j}$ ，

易见，它们不仅与$x_1,\cdots,x_n$有关，亦与参数α，β有关。

（3）确定α, β的极大似然估计

为确定参数α，β与σ^2的极大似然估计，记$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$的平方和为构造残差平方和

$$S(\alpha,\ \beta)=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k^2$$

由似然函数知，求出$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, 使满足 $L(\hat{\alpha},\ \hat{\beta})=\max L(\alpha,\ \beta)$，即使

$$S(\hat{\alpha},\ \hat{\beta})=\min S(\alpha,\ \beta)$$

由此求出的$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$为α，β的极大似然估计，亦即关于 S 的最小平方和估计（近似），于是$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}S(\hat{\alpha},\hat{\beta})$即为$\sigma^2$的极大似然估计。

注意：此法在实际中一般为数值解法。

3. 自回归逼近方法

$ARMA(p,q)$模型参数的自回归逼近方法与$MA(q)$模型的自回归逼近方法类似，也是利用线性回归的思想，来作出$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_p\ \beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_q$及$\sigma^2$等$p+q+1$个未知模型参数估计，这种估计虽然避免了求解非线性问题，但其估计只能是近似的。利用自回归逼近方法求模型参数估计的步骤为

第一步：首先利用原始数据$x_1,\cdots,x_n$作高阶自回归滑动模型AR（p)的拟合，即：

（1） 用 AIC 准则确定阶数P值，或直接取较大的P值。一般地，由于原时间序列为$ARMA(p,q)$时，只有用较高阶的AR（P)模型，取$P>>p,q$，才能较好的拟合原始数据序列；

(2) 在确定阶数P后，再利用尤尔—沃克方法估计AR（p)中参数

$\hat{\alpha}_1$， $\hat{\alpha}_2,\cdots$， $\hat{\alpha}_n$，使其满足：

$$x_t = \hat{\alpha}_1 x_{t-1} + \hat{\alpha}_2 x_{t-2} + \cdots + \hat{\alpha}_p x_{t-p} + \hat{\varepsilon}_t$$

第二步： 由上述估计的 AR（p) 模型递推计算残差列$\{\hat{\varepsilon}_t\}$，即：

$$\hat{\varepsilon}_t = x_t - \hat{\alpha}_1 x_{t-1} - \hat{\alpha}_2 x_{t-2} - \cdots - \hat{\alpha}_p x_{t-p} \quad , \quad t = P+1, P+2, \cdots, n$$

第三步： 再视残差列$\{\hat{\varepsilon}_t\}$为独立序列，利用线性回归模型：

$$x_t = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_{t-i} + \hat{\varepsilon}_t - \sum_{j=1}^{q} \beta_j \hat{\varepsilon}_{t-j} \qquad t = P+1, P+2, \cdots, n$$

此为自回归与回归的混合模型，其矩阵形式为：

$$x = (X\hat{E})\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \hat{\varepsilon} \qquad \hat{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 I)$$

其中 $X = \begin{bmatrix} x_{P+q} & x_{P+q-1} \cdots x_{P+q-p+1} \\ x_{P+q+1} & x_{P+q} \cdots x_{P+q-p+2} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-2} \cdots x_{n-p} \end{bmatrix}$， $\hat{E} = \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{p+q} & \hat{\varepsilon}_{p+q-1} & \cdots & \hat{\varepsilon}_{p+1} \\ \hat{\varepsilon}_{p+q+1} & \hat{\varepsilon}_{p+q} & \cdots & \hat{\varepsilon}_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hat{\varepsilon}_{n-1} & \hat{\varepsilon}_{n-2} & \cdots & \hat{\varepsilon}_{n-q} \end{bmatrix}$，

$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{p+q+1} & \varepsilon_{p+q+2} & \cdots & \varepsilon_n \end{pmatrix}'$ $\qquad \alpha = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_p)'$ ，

$\beta = (\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_q)'$，于是可得$\alpha$与$\beta$的最小二乘估计为

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} X' \\ \hat{E}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & \hat{E} \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} X' \\ \hat{E}' \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} X'X & X'\hat{E} \\ \hat{E}'X & \hat{E}'\hat{E} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X'x \\ \hat{E}'x \end{pmatrix}$$

上述方法所得的 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_p$ $\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_q$ 的估计即为 $ARMA(p,q)$的自回归逼近拟合估计。

三、 $ARMA(p,q)$模型的拟合检验

检验 $ARMA(p,q)$ 模型与检验 $AR(p)$ 模型 $MA(q)$ 模型的方法基本相

同，都是检验其拟合残差序列是否为独立序列，不同的是，各自获得拟合残差序列序列时使用各自不同的拟合模型而已。即实际上，检验$\{x_t\}$是否为$ARMA(p,q)$时，只需检验残差列$\{\varepsilon_t\}$是否独立序列即可，而残差列的估计值$\{\hat{\varepsilon}_t\}$可由样本值$x_1,\cdots,x_n$计算得出，最后再利用判别独立序列的方法，判断$\{\hat{\varepsilon}_t\}$是否独立序列，若是，则认为$\{x_t\}$为$ARMA(p,q)$序列，否则认为$\{x_t\}$不是$ARMA(p,q)$序列。

因此检验$ARMA(p,q)$模型的具体步骤为：

i) 提出假设 H_0： $x_t = \sum_{i=1}^{p}\alpha_i x_{t-i} + \varepsilon_t - \sum_{k=1}^{q}\beta_k \varepsilon_{t-k}$， $t = p+1, \cdots, n$

ii) 将参数的估计值$\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \cdots, \hat{\alpha}_p, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \cdots, \hat{\beta}_q$,与阶数的估计$\hat{p}$与$\hat{q}$代替$H_0$中的$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q, \sigma^2$，$p$与$q$，故实际检验

$$H_0:\quad x_t = \sum_{i=1}^{\hat{p}}\hat{\alpha}_i x_{t-i} + \varepsilon_t - \sum_{k=1}^{\hat{q}}\hat{\beta}_k \varepsilon_{t-k}, \quad t = p+1, \cdots, n$$

iii) 由上式计算残差：

$$\varepsilon_t = \sum_{i=1}^{\hat{q}}\hat{\beta}_i \varepsilon_{t-i} + x_t - \sum_{k=1}^{\hat{p}}\hat{\alpha}_k x_{t-k}, \qquad t = \hat{p}+1, \hat{p}+2, \cdots\cdots$$

iv) 由$\{\hat{\varepsilon}_t\}$求自协方差函数

$$\hat{\gamma}_k(\varepsilon) = \frac{1}{n-p}\sum_{t=1}^{n-p-k}\varepsilon_{t+p}\varepsilon_{t+p+k} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\hat{\rho}_k(\varepsilon) = \hat{\gamma}_k / \hat{\gamma}_0(\varepsilon)$$

v) 若$\{\hat{\rho}_k(\varepsilon),\ k = 0, 1, 2, \cdots, n\}$中约有 68.3%的点落在纵坐标

$\hat{\rho}=\pm 1/n$ 内，约有 95.4%的点落在纵坐标 $\hat{\rho}=\pm 2/n$ 内，则 $(\varepsilon_{p+1},\varepsilon_{p+2},\cdots,\varepsilon_{n})$ 为独立序列样本值，此时接受 H_0，否则拒绝 H_0。