基于模拟退火的工作指派问题求解

刘慧鹏 葛常建 付彬 冯博 高尔琪 傅曦雨

# 一、问题重述

n个工作可以由n个工人分别完成。工人i完成工作j的时间为dij 。

如何安排可使总的工作时间达到最小？

试按SA思想设计一个该问题的求解算法，并利用计算机语言实现设计的算法。

设一个0-1矩阵P表示工人完成的工作，若工人i完成第工作j，则Pij=1，在时间矩阵d中，工人i完成工作j的时间为dij。则问题可被表述成：

# 二、算法设计

模拟退火算法（SA）是一种适合解决组合优化问题的启发式算法。其基本思想是把优化问题的求解过程与统计热力学中的热平衡问题进行对比，利用固体物质的退火过程与组合优化问题求解过程的相似性，通过模拟高温退火过程来找到近似最优解。其优点在于简单通用，具有逃离局部最优的陷阱的能力，效率不依赖初始解。缺点在于领域中寻找解是随机的，容易错过好的解。

## 2.1算法准备

### 2.1.1编码方式

采用顺序编码。

### 2.1.2初始解的产生

初始解的产生采样随机的方式，及随机的产生一个1到n的自然数组合，表示工人i完成的是工作j。再将其变换为矩阵P。初始解生成。

### 2.1.3邻域移动方式

邻域移动采用2-OPT方式交换，每次两两交换工人完成的工作。

### 2.1.4参数设定

工人数目越多，为了得到最优解，需要进行搜索的次数需要提高，按照经验，将参数设置为与工人数目n正相关的值。

初始温度:T0=60+10\*n.

终止温度:Tf=60

外循环温度:Tk

降温函数:Tk+1 = Tk – ΔT。ΔT=2;

内循环次数:n(Tk)=3+n;

工作用时:f

最优解:Pbest

## 2.2算法求解

按SA思想，使用随机产生的初始解进入第一次内循环，Tk=T0.

在第一次内循环中，每次解进行2-OPT交换，若产生新解所需时间更短，则无条件转移；否则产生一个0到1之间的随机数ζ，若exp(-Δf/Tk)比ζ大，则有条件转移，否则不转移。当完成内循环次数时，跳出内循环。

温度Tk降低ΔT，进入新的一次内循环。当温度降低为终止温度时，计算结束。

每次转移时都将解与最优解进行比较，记录降温过程中历史最优解，作为问题的解。

# 三、算法实现

本文使用matlab进行算法实现，编写了一个函数CostSA。此函数输入一个工作时间d的矩阵，就会输出最优时间，安排矩阵P，迭代次数。实际运行代码例子如下。

clc,clear;

n=1000;

time=randi(10,n);

tic

[cost\_sa,order,count]=CostSA(time);

toc

其中，n是工人数目，生成一个大小为n\*n的矩阵time，数值为1-10随机。使用函数CostSA，得到计算出来的时间花费，安排，迭代次数。

# 四、算法分析

通过查询资料，匈牙利算法是一种在多项式时间内求解任务分配问题的组合优化算法。本文不在叙述匈牙利算法的解法，直接使用他人写好的matlab函数。分别采用本文编写的模拟退火算法和匈牙利算法计算当工人数n=5,10,100,1000时的结果。除了n=1000的情况，模拟退火重复100次，取其中的最优值和平均值与匈牙利算法比对，如表4.1所示。

表4.1 匈牙利算法和模拟退火计算结果

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 匈牙利算法 | 修改参数后的模拟退火 | | | |
| 最优解 | 最优解 | 最差解 | 平均值 | 时间 |
| n=5 | 11 | 11 | 12 | 11.05 | 0.005 |
| n=10 | 24 | 27 | 44 | 35.24 | 0.004 |
| n=100 | 100 | 428 | 497 | 470.10 | 0.06 |
| n=1000 | 1000 | 5214 | - | - | 160 |

从上表中可以看出，当求解问题规模较小时，模拟退火和匈牙利算法求出的解的差距很小。当求解规模增大时，模拟退火求出的解和最优解差距很大。可以看出模拟退火计算结果随机性强，较难解出最优解。

## 五、算法改进

考虑可能是计算迭代次数过少，这里修改初始参数的设定，使初始温度T0=60+10\*n^2。重新计算得到表4.2。

表4.2 修改初始参数后的计算结果

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 匈牙利算法 | 修改参数后的模拟退火 | | | |
| 最优解 | 最优解 | 最差解 | 平均值 | 时间 |
| n=5 | 11 | 11 | 11 | 11 | 0.23 |
| n=10 | 24 | 24 | 35 | 30.54 | 0.97 |
| n=100 | 100 | 407 | 445 | 429.4 | 640.6 |
| n=1000 | 1000 | 5174 | - | - | - |

可以看出，在更改了初始温度参数后，n比较小时，可以计算出最优解，当n变大时，计算结果比原先结果更好，但是整体计算的时间复杂度大大上升，计算时间极其长。

## 六、总结

针对题目所提出的工作指派问题，本文使用SA算法的思想进行求解，分别求解了当n=5,10,100,1000时候的结果，从结果上可以看出，在n比较小时，本文的算法可以求出较好的结果，当n增大，求解结果和最优解误差加大。之后对初始温度参数进行改进，得到更好的求解结果，但是求解时间大大增加。

附录：

1.代码和实验数据：<https://github.com/huipengly/IOMHomework/tree/master/%E5%B7%A5%E4%BD%9C%E6%8C%87%E6%B4%BE%E9%97%AE%E9%A2%98_%E6%A8%A1%E6%8B%9F%E9%80%80%E7%81%AB>