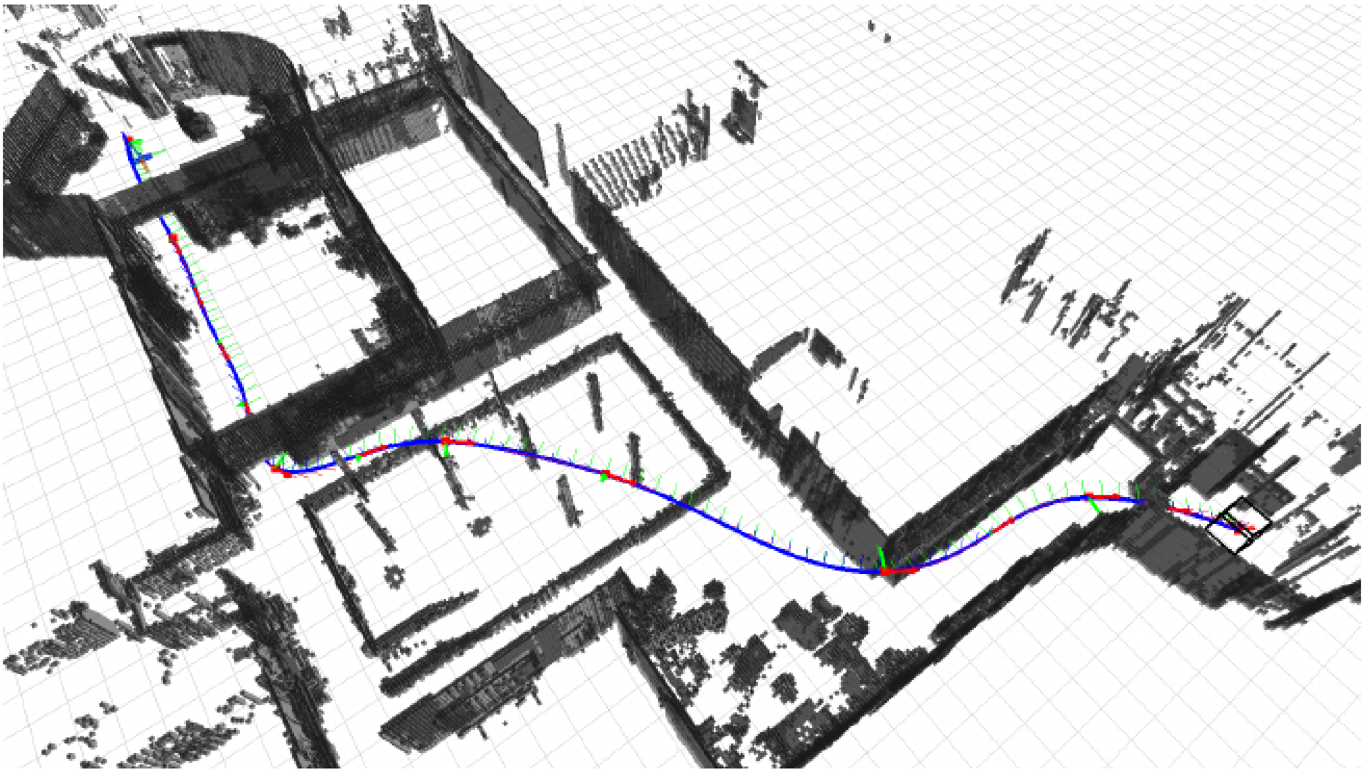
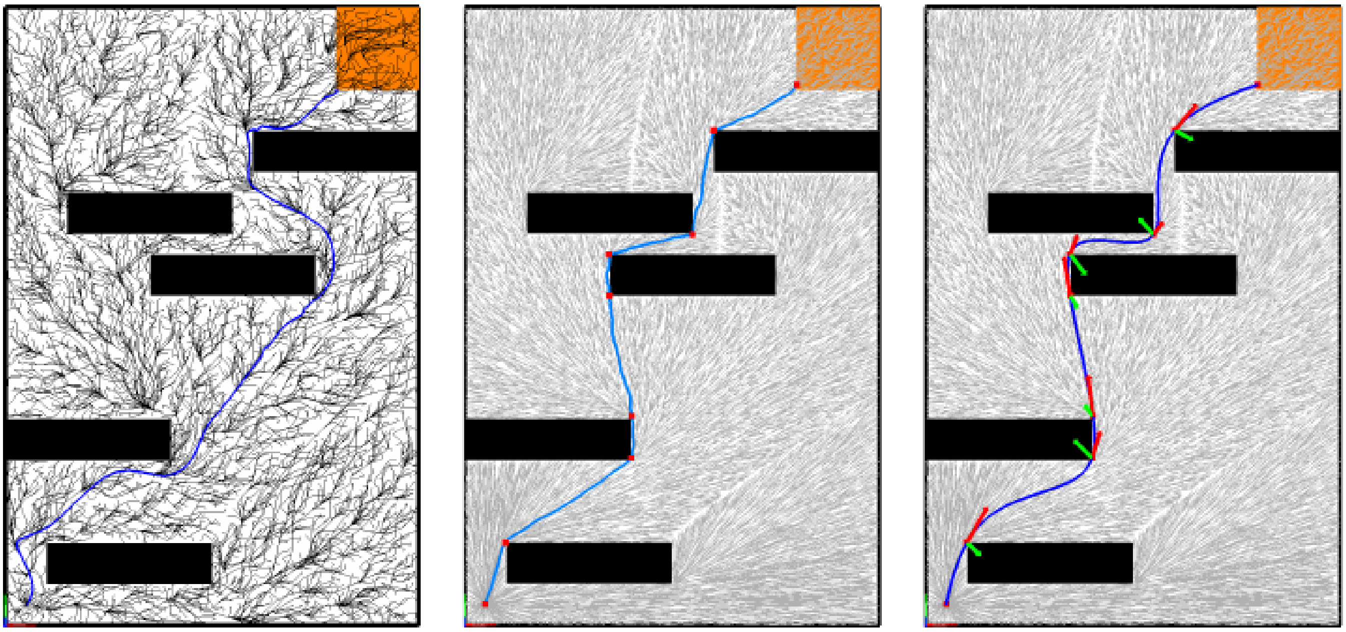
1.背景

轨迹优化中生成满足动力学约束的参数化路径





比如通过前段的A*得到了一系列waypoints，现在要得到一条满足机器人约束的可执行的轨迹。

2.原理

2.1多项式表达

$$p(t)=\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{c};\boldsymbol{t}=\begin{bmatrix}1 & t & t^2\ldots t^{N-1}\end{bmatrix};\boldsymbol{c}=[c_0\ldots c_{N-1}]$$

对于多段高维的多项式曲线，平滑约束可以表示为

$$J_{\text{polynomials}}=\sum_{i=1}^{M}\sum_{d=1}^{D}\int_{0}^{T_{a,i}}\sum_{j=0}^{N-1}\left\|\frac{d^j p_{i,d}(t)}{dt^j}\right\|\cdot w_j$$

比如对于minimum snap问题，目标函数可以为表示为：

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}&=\min\int_{0}^{\mathrm{T}}\left(\mathrm{p}^{(4)}(\mathrm{t})\right)^2\mathrm{dt}\\
&=\min\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}}\int_{\mathrm{t_{i-1}}}^{\mathrm{t_i}}\left(\mathrm{p}^{(4)}(\mathrm{t})\right)^2\mathrm{dt}\\
&=\min\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}}\mathrm{p_i^T}\mathrm{Q_i}\mathrm{p_i}\\
&=\min\mathrm{p^T}\mathrm{Q}\mathrm{p}
\end{aligned}$$

计算Q过程如下：

$$\mathrm{v(t) = p'(t) = \sum_{i\geqslant 1}^{n=7} i \cdot p_i i^{i-1}}$$

$$\mathrm{a(t) = p''(t) = \sum_{i\geqslant 2}^{n=7} \frac{i!}{(i-2)!} \cdot p_i t^{i-2}}$$

$$\mathrm{jerk(t) = p^{(3)}(t) = \sum_{i\geqslant 3}^{n=7} \frac{i!}{(i-3)!} \cdot p_i t^{i-3}}$$

$$\mathrm{snap}(t) = p^{(4)}(t) = \sum_{i\geqslant 4}^{n=7} \frac{i!}{(i-4)!} \cdot p_i t^{i-4}$$

把4阶导数带入到积分表达式计算，并整理出系数向量p后，会发现Qi的表达式如下

$$Q_i = \begin{bmatrix} \mathrm{0_{4\times 4}} & \mathrm{04 \times (n-3)} \\ \mathrm{0_{(n-3)\times 4}} & \mathrm{\frac{r!}{(r-4)!} \frac{c!}{(c-4)!} \frac{1}{(r-4)+(c-4)+1} \left(t_i^{(r+c-7)} - t_{i-1}^{(r+c-7)}\right)} \end{bmatrix}_{\mathrm{(n+1)\times(n+1)}}$$

因为有多段多项式，把所有段的cost加起来写成矩阵形式有

$$J = \min \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_1 & & & \\ & Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix}$$

这是个QP问题。

2.2 约束

约束主要包含

- 始末点的p，v,a约束

$$\mathrm{p_1(0) = \sum_{i=0}^{n=7} p_{1,i} * 0^i}$$

$$\mathrm{v_1(0) = p_1'(0) = \sum_{i\geqslant 1}^{n=7} i \cdot p_{1,i} * 0^{i-1}}$$

$$\mathrm{a_1(0) = p_1''(0) = \sum_{i\geqslant 2}^{n=7} \frac{i!}{(i-2)!} \cdot p_{1,i} * 0^{i-2}}$$

$$\mathrm{jerk_1(0) = p_1^{(3)}(0) = \sum_{i\geqslant 3}^{n=7} \frac{i!}{(i-3)!} \cdot p_{1,i} * 0^{i-3}}$$

$$
\mathrm{p_k(T)=\sum_{i=0}^{n=7} p_{k,i}T^i}
$$

$$
\mathrm{v_k(T)=p_k'(T)=\sum_{i\geqslant 1}^{n=7} i\cdot p_{k,i}T^{i-1}}
$$

$$
\mathrm{a_k(T)=p_k''(T)=\sum_{i\geqslant 2}^{n=7} \frac{i!}{(i-2)!}\cdot p_{k,i}T^{i-2}}
$$

$$
\mathrm{jerk_k(T)=p_k^{(3)}(T)=\sum_{i\geqslant 3}^{n=7} \frac{i!}{(i-3)!}\cdot p_{k,i}T^{i-3}}
$$

- 中间位置约束

$$
\mathrm{p_j^{(m)}(T_j)-p_{j+1}^{(m)}(0)=0}
$$

- 中间点速度、加速度、加加速度连续性约束

把所有约束写在一起有

$$
\underbrace{A_{\text{total}}}_{k(n+1)\times 6k}\begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_k \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} p_1(t_0) \\ v_1(t_0) \\ a_1(t_0) \\ p_1(t_1) \\ v_1(t_1) \\ a_1(t_1) \\ \vdots \\ p_k(t_{k-1}) \\ v_k(t_{k-1}) \\ a_k(t_{k-1}) \\ p_k(t_k) \\ v_k(t_k) \\ a_k(t_k) \end{bmatrix}}_{6k\times 1}
$$

去重

会发现向量d含有很多重复的元素，为了获得紧凑的表示，可以构造映射M，

$$
\underbrace{A_{\text{total}}}_{k(n+1)\times 6k}\left[\begin{array}{c} p_1 \\ \vdots \\ p_k \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} d_1 \\ \vdots \\ d_k \end{array}\right]=\underbrace{\left[\begin{array}{c} p_1\left(t_0\right) \\ v_1\left(t_0\right) \\ a_1\left(t_0\right) \\ p_1\left(t_1\right) \\ v_1\left(t_1\right) \\ a_1\left(t_1\right) \\ \vdots \\ p_k\left(t_{k-1}\right) \\ v_k\left(t_{k-1}\right) \\ a_k\left(t_{k-1}\right) \\ p_k\left(t_k\right) \\ v_k\left(t_k\right) \\ a_k\left(t_k\right) \end{array}\right]}_{6k\times 1}
$$

变换位置

把确定值的约束和浮动约束分开，

$$
d'=C\left[\begin{array}{c} d_F \\ d_P \end{array}\right]
$$

举例：

$$
\left[\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array}\right]=\underbrace{\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]}_{C}\left[\begin{array}{c} a \\ c \\ d \\ b \end{array}\right]
$$

2.3优化求解

优化问题回顾，

$$
J=\min\left[\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{array}\right]^T\left[\begin{array}{cccc} Q_1 & & & \\ & Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_k \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{array}\right]
$$

s.t.

$$
\underbrace{A_{\text{total}}}_{k(n+1)\times 6k}\left[\begin{array}{c} p_1 \\ \vdots \\ p_k \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} d_1 \\ \vdots \\ d_k \end{array}\right]=MC\left[\begin{array}{c} d_F \\ d_P \end{array}\right]
$$

带约束的QP问题。

解析求解

带入优化函数

$$
\begin{aligned}
\min J &= p^T Q p \\
J &= \begin{bmatrix} d_F \\ d_P \end{bmatrix}^T \underbrace{K^T Q K}_{R} \begin{bmatrix} d_F \\ d_P \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} d_F \\ d_P \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_{FF} & R_{FP} \\ R_{PF} & R_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_F \\ d_P \end{bmatrix} \\
&= d_F^T R_{FF} d_F + d_F^T R_{FP} d_P + d_P^T R_{PF} d_F + d_P^T R_{PP} d_P \\
Q \text{ 对称 } \Rightarrow R \text{ 对称 } \Rightarrow &= d_F^T R_{FF} d_F + 2 d_F^T R_{FP} d_P + d_P^T R_{PP} d_P
\end{aligned}
$$

令J对dp求导，得

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow 2 d_F^T R_{FP} + 2 d_P^T R_{PP} d_P = 0 \left((\text{注意 } R_{PP}^T = R_{PP} \right) \\
&\Rightarrow d_p = -R_{PP}^{-1} R_{FP}^T d_F
\end{aligned}
$$

2.4 总结

1. 先确定轨迹阶数（比如 5 阶），再确定 d 向量中的约束量（pva），进而根据各段的时间分配求得 A_{total}。
2. 根据连续性约束构造映射矩阵 M，并确定 dd 向量中哪些量是 Fix(比如起点终点 pva，中间点的 p 等)，哪些量是 Free，进而构造置换矩阵 C，并求得 $K = A^{-1}MC$。
3. 计算 QP 目标函数中的 Q（minJerk/SnapminJerk/Snap）并计算 $R = K^T Q K$，根据 fix 变量的长度将 R 拆分成 $R_{FF}, R_{FP}, R_{PF}, R_{PF}$ 四块。填入已知变量得到 dFdF，并根据 $d_P = -R_{PP}^{-1} R_{FP}^T d_F$ 计算得到 d_P。
4. 根据公式15计算得到轨迹参数 p。

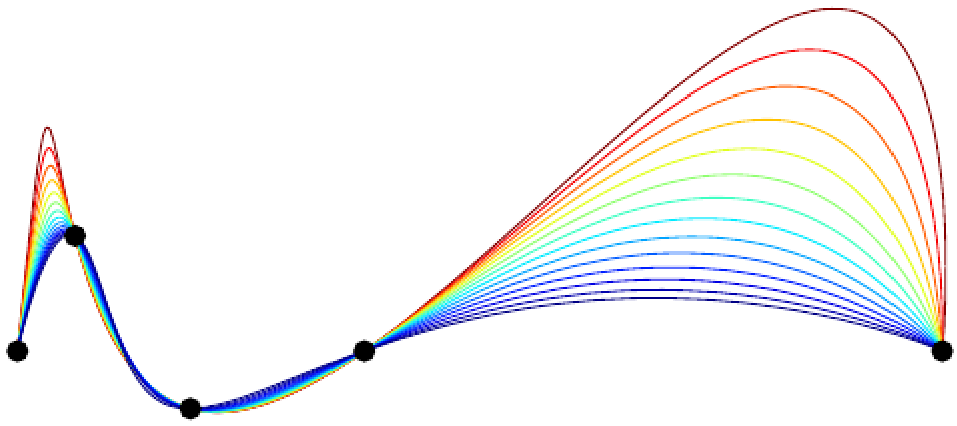
3.非线性优化

前面假设每段多项式时间是给定的，实际中不太容易给定。因此一种做法是直接放在目标函数里面优化，即

$$
J_T = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_M \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_1(T_1) & & \\ & \ddots & \\ & & Q_M(T_M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_M \end{bmatrix}^T + k_T \sum_{i=1}^{M} T_i
$$

这是一个非线性优化问题，可以用nlopt求解

优化结果举例



4.安全性