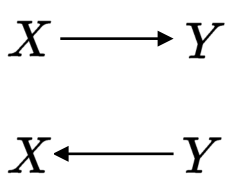
基本概念-术语

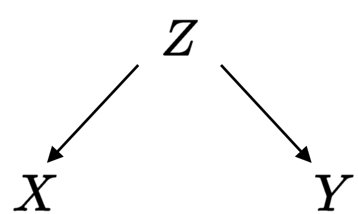
- **因果关系定义（RCM和SCM框架下）：** **改变**一变量会引起另一变量的**变化（可能不被观测，但改变概率分布）**，除上述因果关系定义外，其他对因果的理解通常都不被视为真正的因果。
  - **因果性判断：** 需**改变**目标变量的产生机制
  - **相关性判断：** 不需改变系统，判断 $P(X \mid Y) = P(X)$是否成立
  - **格兰杰因果：** 刻画引入一个变量是否对另一变量的**预测有促进作用**

- **因果推断定义：** 求解一对或多对变量**是否存在因果关系**以及**因果效应强度**的任务，包括因果发现和因果效应估计。
- **伪相关性：** 具备统计意义上**相关性**，却不符合客观**因果规律**的情况。

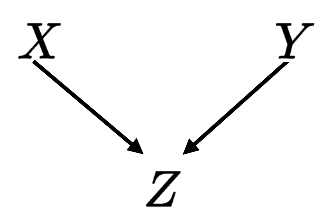
- ***X*与*Y*具备相关性的三种情况：**



直接因果关系



*X*与*Y*相关



*Z*给定时，*X*与*Y*相关

[李家宁,熊睿彬,兰艳艳等.因果机器学习的前沿进展综述[J].计算机研究与发展,2023,60(01):59-84.]
[王东明,陈都鑫.因果推断：起源和发展[J].控制工程,2022,29(03):464-473.DOI:10.14107/j.cnki.kzgc.20210524]

基本概念-术语

东南大學 SOUTHEAST UNIVERSITY

- **单元（Unit）：** 干预效果研究中的**最小研究对象**。潜在结果框架下，不同时间点的单元不同，数据集中的一个单元是整个随机变量对应的样本，术语“样本”和“单元”可互换使用。
- **变量（Variables）：** 一般指**干预前变量**（pre-treatment variables），其指不受干预影响的变量，如性别，年龄；**干预后变量**（post-treatment variables）指受干预影响的变量。
- **干预（Intervention）：** 也叫**介入**，干预变量 $Z=1$的单元为**处理组**，$Z=0$ 的单元为**对照组**。
- **混杂因素（Confounders）：** 对1对变量同时产生影响的因素。
- **潜在结果（Potential outcome）：** 包含**观测结果**和**反事实结果**。
- **倾向得分（Propensity score）：** $e(X_i)=P(Z_i=1\mid X_i)$，反映样本 X_i选择treatment的概率。

[李家宁,熊睿彬,兰艳艳等.因果机器学习的前沿进展综述[J].计算机研究与发展,2023,60(01):59-84.]
[王东明,陈都鑫.因果推断：起源和发展[J].控制工程,2022,29(03):464-473.DOI:10.14107/j.cnki.kzgc.20210524]

Why causality

□ 模型分类角度：**因果模型**在所有模型中的地位

模型分类表

Model	Predict in i.i.d. setting	Predict under distr. shift/intervention	Answer counter-factual questions	Obtain physical insight	Learn from data
Mechanistic/physical	yes	yes	yes	yes	?
Structural causal	yes	yes	yes	?	?
Causal graphical	yes	yes	no	?	?
Statistical	yes	no	no	no	yes

统计模型 →	因果模型 →	微分方程模型
低级	回答干预，反事实	高级
数据驱动	数据驱动，弱假设	专家经验

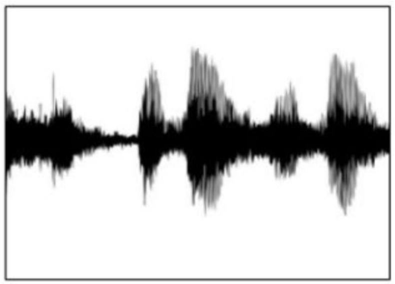
因果模型结合了统计和微分方程模型各自优势

[Bernhard et al. Towards Causal Representation Learning. Proceedings of the IEEE, 2021]

Why causality

□ 所用数据角度：2种分类

➢ **非结构化数据：** 更难让计算机理解，不直接体现因果信息



Audio

Image

Four scores and seven years ago…

Text

➢ **结构化数据：** 存储在数据库中，由二维表结构表达，可能部分对应于因果图中变量

User Age	Ad Id	…	Click
41	93242		1
80	93287		0
18	87312		1
⋮	⋮		⋮
27	71244		1

统计模型： 基于结构和非结构化数据，i.i.d.

因果模型： 基于结构化数据

因果表征学习

(Andrew Ng. Deep learning)

Why causality

☐ 若干悖论：Simpson悖论、替代指标悖论、新生儿体重悖论

➢ **Simpson悖论：总体统计结果**与每一个**子部分统计结果**相反　**Sure-thing Principle**

记录是否服药的700例患者痊愈率

患者	服药时治愈率		未服药时治愈率	
男性患者	93%	(81/87)	87%	(234/270)
女性患者	73%	(192/263)	69%	(55/80)
合计	78%	(273/350)	83%	(289/350)
因果	83.20%		78.18%	

$P(Y|X,Z=0)$

$P(Y|X,Z=1)$

$$P(Y|X)=\sum_z P[Y\mid X,z]\underline{P(z|X)}$$

$$P[Y\mid \mathrm{do}(X)]=\sum_z P[Y\mid X,z]\underline{P(z)}$$

- **统计框架下的计算：**

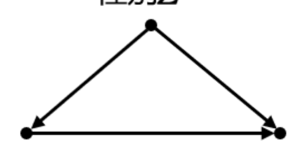
$$\left.\begin{aligned}\frac{87}{350}(0.93)+\frac{263}{350}(0.73)&=\boxed{0.78}\\ \frac{270}{350}(0.87)+\frac{80}{350}(0.69)&=\boxed{0.83}\end{aligned}\right\}$$

实验组和对照组权重不同

- **因果框架下的计算：**

$$\left.\begin{aligned}\frac{357}{700}(0.93)+\frac{343}{700}(0.73)&=\boxed{0.832}\\ \frac{357}{700}(0.87)+\frac{343}{700}(0.69)&=\boxed{0.7818}\end{aligned}\right\}$$

实验组和对照组权重一致



因果框架下，实验组和对照组可比

(Geng Zhi. Talk on causal learning and decision making, 2022)

潜在结果模型-鲁宾

模型背景： 现实很多统计问题，由于成本、风险和伦理问题，数据不能来自RCT，需要从观察性研究中**估计因果效应**（因果推断领域重点问题）。

模型描述： X_i：个体 i 是否吸烟；Y_i：个体 i 是否得肺癌；Z_i：混杂因素。

- 当满足**条件可忽略性，ACE可识别**：

$$\begin{aligned} ACE &= E(Y(1)) - E(Y(0)) \\ &= E[E(Y(1) \mid Z)] - E[E(Y(0) \mid Z)] \\ &= E[E(Y(1) \mid Z, X=1)] - E[E(Y(0) \mid Z, X=0)] \\ &= E[E(Y \mid Z, X=1)] - E[E(Y \mid Z, X=0)] \end{aligned}$$

全期望公式

条件可忽略性 $X \perp \{Y(1), Y(0)\} \mid Z$

一致性原则：
若$X = x, Y = y$,则$Y_x = y$

- **内曼潜在结果模型**中ACE：

$$\begin{aligned} ACE &= E(Y(1)) - E(Y(0)) \\ &= E(Y(1) \mid X=1) - E(Y(0) \mid X=0) \\ &= E(Y \mid X=1) - E(Y \mid X=0) \end{aligned}$$

RCT中可忽略性成立 $X \perp \{Y(1), Y(0)\}$

一致性原则

可忽略性下，通过观测数据，估计ACE

结构因果模型

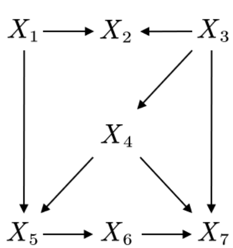
□ POM优缺点：

- 优：对先验知识要求低，**应用广泛。**
- 缺：可忽略性无法被观测数据验证，**数学结果无保证；混杂因素需可观测。**

□ SCM包括：**因果图，结构化方程，干预和反事实**

- **因果图：**使用有向非循环图（DAG）描述变量之间关系，若节点间存在连边，则父节点是**因**，子节点是**果**。只有**箭头一致**的边才产生因果效应。
- **因子分解定理：**对于 $X=(X_1,\cdots,X_p)$ 构成的DAG，pa_j 为 X_j 的父节点，联合分布可分解成：

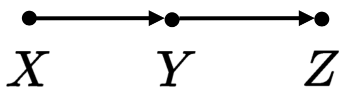
$$P(X)=\prod_{j=1}^{p}P(X_j\mid \mathrm{pa}_j)$$



$$\begin{aligned}P(X)=&P(X_1)\cdot P(X_2\mid X_1,X_3)\cdot P(X_3)\\&\cdot P(X_4\mid X_3)\cdot P(X_5\mid X_1,X_4)\cdot\\&\cdot P(X_6\mid X_5)\cdot P(X_7\mid X_3,X_4,X_6)\end{aligned}$$

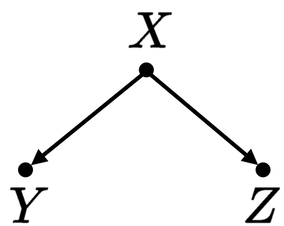
结构因果模型-因果图

- **三种条件独立性：**



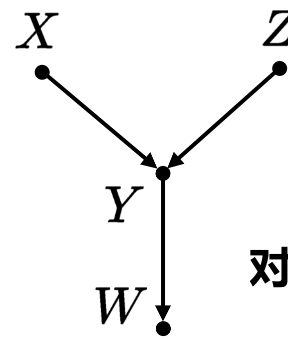
链结构

$X \perp Z \mid Y$



分叉结构

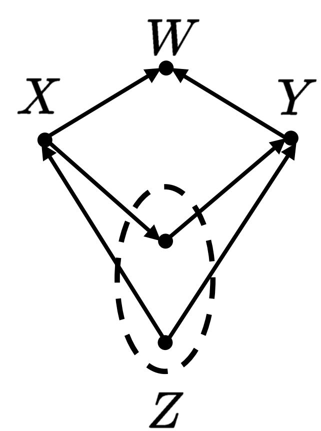
$Y \perp Z \mid X$



对撞结构
- $X \perp Z$
- 当对撞节点或其后代被观测，X与Z相关

- **d分离：** 若 Z 阻断 X 到 Y 间的所有路径（不管方向），则称 Z d分离 X和Y，记为 $(X \perp Y \mid Z)_G$。

$$\left\{\begin{array}{l} X \perp Y \mid Z \\ \\ X \perp Y \end{array}\right. \Longrightarrow (X \perp Y \mid Z)_G$$



结构因果模型-结构方程模型

- **SEM**
  - 外生变量集U
    - 无法观测
    - 一般情况下，外生变量**相互独立**
    - 描述所有随机因素，**概率分布确定**
  - 内生变量集V
    - 每个内生变量至少是一个外生变量后代
  - 结构化方程F
    - $X = f_X(\mathbf{PA}_X, U_X)$
    - 表示变量**生成机制**，只能由等式右边向左赋值

$$V = \{X, Y, Z\}, U = \{U_X, U_Y, U_Z\}, F = \{f_X, f_Y, f_Z\}$$

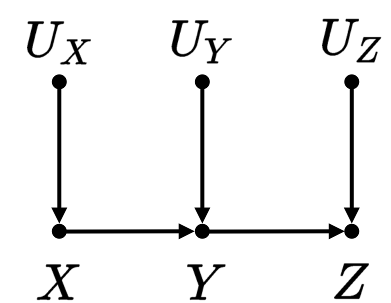
$$f_X : X = U_X$$

$$f_Y : Y = \frac{x}{4} + U_Y$$

$$f_Z : Z = \frac{y}{12} + U_Z$$

SEM定量

⟺



因果图定性

[Pearl J. Causality: models, reasoning, and inference. Cambridge University Press, 2000]

结构因果模型-干预

□ 干预： 改变目标变量产生机制，维持其余机制不变的操作。

➢ 干预前后联合分布间关系：

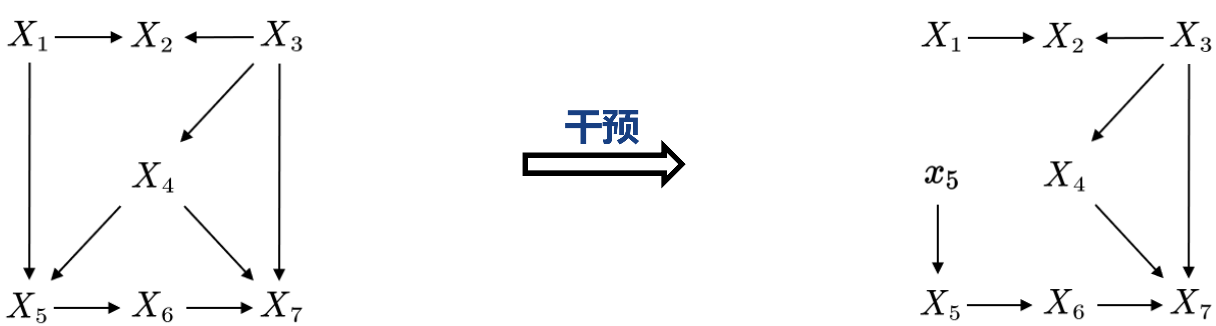
$$P(X_1 = x_1, \cdots, X_p = x_p \mid \mathrm{do}(X_j = x_j')) = \frac{P(X_1 = x_1, \cdots, X_p = x_p)}{P(X_j = x_j \mid \mathrm{pa}_j)} I(x_j = x_j')$$

⇓ 对应 ⇓ 对应

新DAG：删除**原DAG**指向 X_j 的边，强制 $X_j = x_j'$

原DAG

➢ SCM中由*do*算子定义ACE： 研究 X_5 对 X_7 的因果作用



$$ACE = E(X_7 \mid \mathrm{do}(X_5 = 1)) - E(X_7 \mid \mathrm{do}(X_5 = 0))$$

由联合分布求积分得边缘分布，估计ACE

结构因果模型-干预

- **后门准则：** 在DAG中，X和Y是不相交节点子集，X_i和X_j分别是X和Y中任意节点，若变量集Z对任何变量有序对(X_i, X_j)满足如下条件：

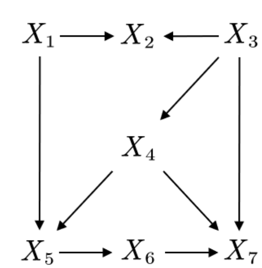
（1）Z中没有X_i的后代节点。

（2）Z阻断X_i和X_j之间指向X_i的路径**（后门路径）**。

则称Z满足(X, Y)的后门准则，此时X对Y的因果作用**可识别**：

$$
\begin{aligned}
P(Y=y \mid do(X=x)) &= P_m(Y=y \mid X=x) && \textbf{干预定义} \\
&= \sum_z P_m(Y=y \mid X=x, Z=z) P_m(Z=z \mid X=x) && \textbf{全概率、条件概率} \\
&= \sum_z P_m(Y=y \mid X=x, Z=z) P_m(Z=z) && \textbf{干预后，}\boldsymbol{X \perp Z} \\
&= \sum_z P(Y=y \mid X=x, Z=z) P(Z=z) && \textbf{两个不变性方程}
\end{aligned}
$$

$\Downarrow$ **X_4满足(X_5, X_7)的后门准则**



$$
\begin{aligned}
ACE &= E(X_7 \mid \mathrm{do}(X_5=1)) - E(X_7 \mid \mathrm{do}(X_5=0)) \\
&= \sum_{x_4} \{E(X_7 \mid X_4=x_4, X_5=1) - E(X_7 \mid X_4=x_4, X_5=0)\} P(X_4=x_4)
\end{aligned}
$$

观测部分变量（X_4, X_5, X_7），估计ACE

结构因果模型-干预

- **SCM和POM等价性：**

do算子所得结果为“**潜在结果**”： $P\{Y \mid do(X)=x\} \;=\; P\{Y(x)\}$

结果一致

SCM:
$$ACE = E(Y \mid do(X=1)) - E(Y \mid do(X=0))$$
$$= E[E(Y \mid Z, X=1) - E(Y \mid Z, X=0)]$$

POM:
$$ACE = E(Y(1)) - E(Y(0))$$
$$= E[E(Y(1) \mid Z)] - E[E(Y(0) \mid Z)]$$
$$= E[E(Y(1) \mid Z, X=1)] - E[E(Y(0) \mid Z, X=0)]$$
$$= E[E(Y \mid Z, X=1)] - E[E(Y \mid Z, X=0)]$$

SCM后门准则和POM可忽略性下，ACE结果一致

[Pearl J. Causality: models, reasoning, and inference. Cambridge University Press, 2000]

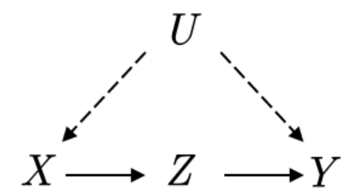
结构因果模型-干预

➢ **前门准则：** 在DAG中，若变量集 Z 对 (X,Y) 满足如下条件：

(1) Z 阻断所有从 X 到 Y 的**有向路径。**

(2) 从 X 到 Z 的所有**后门路径**均被阻断。

(3) X 阻断从 Z 到 Y 的**后门路径。**

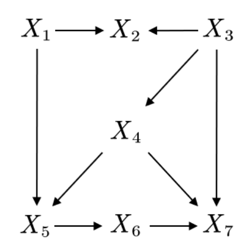


则称 Z 满足 (X,Y) 的前门准则，此时若 $P(x,z)>0$，则 X 对 Y 的因果作用**可识别**：

$$
\begin{aligned}
P(y \mid do(X)=x) &= \sum_u P(y \mid x,u)P(u) && \textbf{U满足(X,Y)后门准则}\\
&= \sum_u \sum_z P(y \mid x,z,u)P(z \mid x,u)P(u) && \textbf{全概率公式}\\
&= \sum_u \sum_z P(y \mid z,u)P(z \mid x)P(u) && \boldsymbol{Z \perp U \mid X}\ \textbf{且}\ \boldsymbol{Y \perp X \mid (Z,U)}\\
&= \sum_z P(z \mid x)P(y \mid do(Z)=z) && \textbf{U满足(Z,Y)后门准则}\\
&= \sum_z P(z \mid x)\sum_{x'} P(y \mid x',z)P(x') && \textbf{X满足(Z,Y)后门准则}
\end{aligned}
$$

$\Downarrow$ **X_6满足(X_5,X_7)的前门准则**

$$
\begin{aligned}
ACE &= E(X_7 \mid do(X_5=1)) - E(X_7 \mid do(X_5=0))\\
&= \sum_{x_6} P(X_6=x_6 \mid X_5=1)\sum_{x_5} P(X_7=x_7 \mid X_5=x_5, X_6=x_6)P(X_5=x_5) - \sum_{x_6} P(X_6=x_6 \mid X_5=0)\sum_{x_5} P(X_7=x_7 \mid X_5=x_5, X_6=x_6)P(X_5=x_5)
\end{aligned}
$$



当混杂变量不可观测，观测（X_5, X_6, X_7），估计ACE

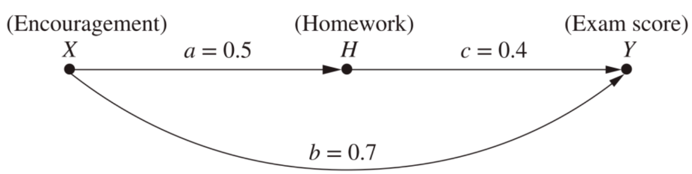
结构因果模型-反事实

东南大学 SOUTHEAST UNIVERSITY

- **反事实：** 假定两次观测只有目标变量不同，其他外生变量取值和作用机制不变，直接反映因果关系。

> **反事实的图形化表示例子：**

A Toy Example



$$X = U_X$$
$$H = a \cdot X + U_H$$
$$Y = b \cdot X + c \cdot H + U_Y$$

Let us consider a student named Joe, for whom we measure X = 0.5, H = 1, and Y = 1.5. Suppose we wish to answer the following query: What would Joe's score have been had he doubled his study time?

$E[Y_{H=2} \mid X=0.5, H=1, Y=1.5]$

$U_X = 0.5,$
$U_H = 1 - 0.5 \cdot 0.5 = 0.75,$ and
$U_Y = 1.5 - 0.7 \cdot 0.5 - 0.4 \cdot 1 = 0.75.$

$Y_{H=2}(U_X = 0.5, U_H = 0.75, U_Y = 0.75)$
$= 0.5 \cdot 0.7 + 2.0 \cdot 0.4 + 0.75$
$= 1.90$

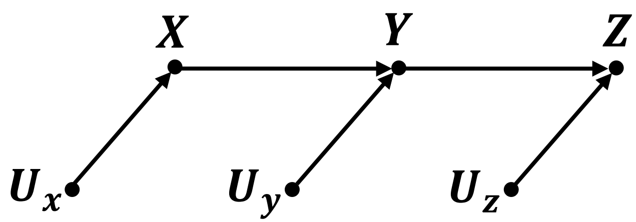
(PRIMER, CH4)

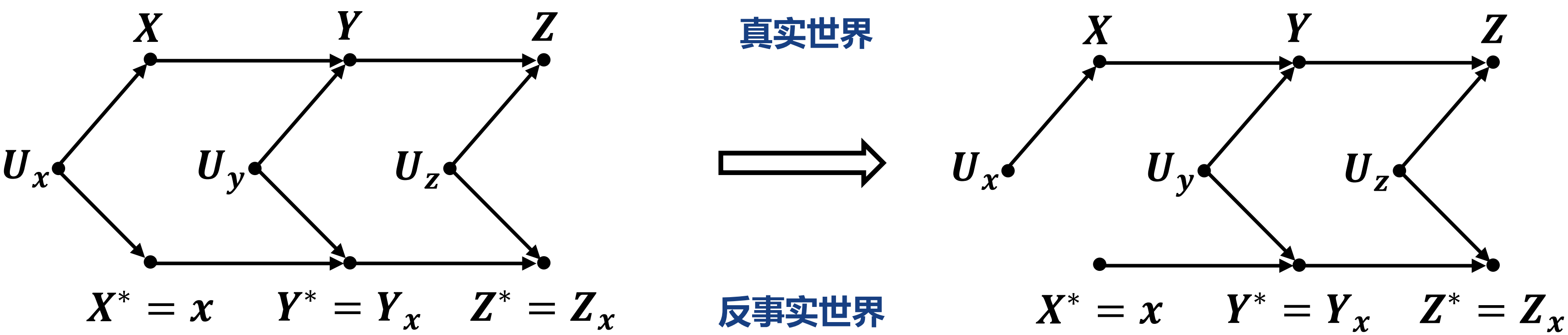
[Pearl J. Causality: models, reasoning, and inference. Cambridge University Press, 2000]

结构因果模型-反事实

➤ **孪生网络：** 验证反事实下的条件独立性

验证： $Z_x \not\perp X \mid Y$





[Pearl J. Causality: models, reasoning, and inference. Cambridge University Press, 2000]

结构因果模型-反事实

东南大学 SOUTHEAST UNIVERSITY

➢ SCM中计算反事实的两套公理系统：

- **第一套公理系统：** 基于**图**，通过***do-Calculus***计算
- **第二套公理系统：** 建立**SCM**与**POM**联系

图信息 $\xrightarrow[\text{条件性约束}]{\text{独立性约束}}$ **反事实**信息 $\xrightarrow[\text{有效性}]{\text{合成性}}$ **观测**信息

Exclusion restrictions: For every variable Y having parents PA_Y and for every set of variables $Z \subset V$ disjoint of PA_Y, we have

$$Y_{pa_Y}(u) = Y_{pa_Y,z}(u).$$

Independence restrictions: If $Z_1, \ldots, Z_k$ is any set of nodes in V not connected to Y via paths containing only U variables, we have

$$Y_{pa_Y} \perp\!\!\!\perp \left\{ Z_{1pa_{Z_1}}, \ldots, Z_{kpa_{Z_k}} \right\}$$

将图中所有条件独立性变为POM中的假设，比孪生网络更简单。

Composition: For any three sets of endogenous variables X, Y, and W in a causal model, we have

$$W_x(u) = w \Longrightarrow Y_{xw}(u) = Y_x(u).$$

Effectiveness: For all sets of variables X and W, we have

$$X_{xw}(u) = x.$$

将关于反事实变量问题转为观测变量问题。

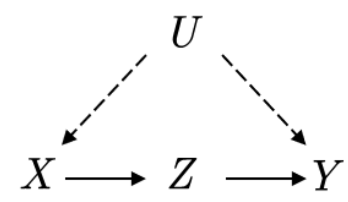
[Pearl J. Causality: models, reasoning, and inference. Cambridge University Press, 2000]

结构因果模型-反事实

第二套公理系统推导前门准则：

Step1：写出所有节点的父节点

$$PA_X = \{\varnothing\}, PA_Z = \{X\}, PA_Y = \{Z\}$$



Step2：根据独立性和条件性约束写出POM中假设

$$Z_x(u) = Z_{yx}(u)$$

$$X_y(u) = X_{zy}(u) = X_z(u) = X(u),$$

$$Y_z(u) = Y_{zx}(u)$$

$$Z_x \perp\!\!\!\perp \{Y_z, X\}$$

Step3：计算 $P(Z_x = z), P(Y_z = y)$

$$P(Z_x = z) = P(Z_x = z \mid x) \quad \text{条件独立性}$$

$$= P(Z = z \mid x) \quad \text{合成性}$$

$$P(Y_z = y) = \sum_x P(Y_z = y \mid x) P(x) \quad \text{全概率}$$

$$= \sum_x P(Y_z = y \mid x, Z_x = z) P(x) \quad \text{条件独立性}$$

$$= \sum_x P(Y_z = y \mid x, z) P(x) \quad \text{合成性}$$

$$= \sum_x P(Y = y \mid x, z) P(x) \quad \text{合成性}$$

Step4：计算$P(Y_x = y)$

$$P(Y_x = y) = \sum_z P(Z_x = z) P(Y_z = y)$$

$$= \sum_z P(z \mid x) \sum_{x'} P(y \mid x', z) P(x')$$

[Pearl J. Causality: models, reasoning, and inference. Cambridge University Press, 2000]

POM与SCM对比

东南大学 SOUTHEAST UNIVERSITY

□ POM：

- 用概率表示因果关系，所有条件独立性只是假设（形而上学），无法验证假设是否成立。
- 所有假设通过概率表示，再通过概率论推理进行因果效应估计。
- 反事实变量Y_x与观测变量X和Y通过一致性原则转换：**若$X = x, Y = y$,则$Y_x = y$**
  缺点：反事实结果无法超出观测结果
- 将$Y|do(x)$视为Y_x，只有反事实概念
- 无法证明完备：POM中对于任意的反事实查询，不知道怎样给出完备的假设，使一定能从观测数据中计算。
- POM和SCM在表达性方面等价，但SCM有图的优势（实用性强：可直接验证条件独立性）

"Logic void of representation is metaphysics."

-Judea Pearl

□ SCM：

- 用因果图表示因果关系，所有条件独立性来自因果图，方便验证假设。