第4章 马尔可夫过程

Markov 1906

X_n — 系统第n次的状态

§4.1 马尔可夫链

$$X_T = \{X_n, n = 0,1,2,\ldots\}$$

状态空间 $S = \{1,2,3,\ldots\}$

一 定义与例

定义 如果随机过程 $\{X_n;\ n = 0,1,2,\ldots\}$ 对任意 $i_0, i_1, \ldots, i_n, i_{n+1} \in S$

满足 $P(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) > 0$，都有

$$P\left\{X_{n+1} = i_{n+1} \middle| X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n\right\} = P\{X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n\}$$

则称其为马尔可夫链。

无后效性　马氏性

如果 $\{X_n\}$ 为马氏链，则称

$$p_{ij}(n)=\mathrm{P}\left(X(n+1)=j \mid X(n)=i\right)$$ ——n时刻的一步转移概率

- 若 $p_{ij}(n)=p_{ij},\ \forall i,j$，则称 $\{X_n\}$ 为（时齐的马氏链）

- 矩阵 $\mathbb{P}=(p_{ij})$ —— 一步转移概率矩阵

案例 设某网上商店的销售业绩为一个时齐马氏链，近2年的数据如下

0 0 1 2 1 1 2 1 2 1 0 1 1 2 1 1 0 2 1 2 0 1 2 1

试写出其转移概率矩阵。

0 —— 不好

1 —— 一般

2 —— 好

$$P = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 1 & 2/11 & 3/11 & 6/11 \\ 2 & & & \end{array}$$

股票

$P = (\quad)$

2 —— 大涨

1 —— 小涨

0 —— 不动

-1 —— 小跌

-2 —— 大.

例 设 $\{\xi_n\}$ 为i.i.d.的随机变量序列，且 ξ_n 的分布列为

ξ_n	0	1	2	$\cdots$
P	p_0	p_1	p_2	$\cdots$

令 $X_0 = 0, X_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$

则 $\{X_n\}$ 为马氏链，并求其一步转移概率矩阵

$X_{n+1} = X_n + \xi_{n+1}$

证明：$P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = 0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n)$

$= P(i_n + \xi_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = 0, \cdots, X_n = i_n)$

$X_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$

$= P(\xi_{n+1} = i_{n+1} - i_n)$ 与 $i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}$ 无关

$\therefore \{X_n\}$ 为马氏链

2) $$P = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & \cdots \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array} & \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

由此你可以得出什么结论?

结论：设过程 $\{X_n\}$ 满足：

（1） $X_n = f(X_{n-1}, \xi_n),\ n = 1,2,\ldots$

（2）设 $\{\xi_n\}$ 为i.i.d.的随机变量，且 X_0与$\{\xi_n\}$ 相互独立

则 $\{X_n\}$为齐次Markov链，且

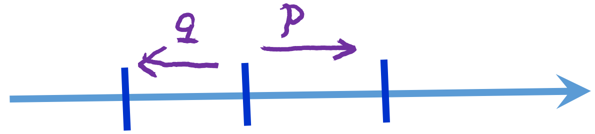
$$p_{ij} = \mathrm{P}\big(f(i,\xi_1) = j\big)$$

证明：作业

例 直线上的随机游动

X_n = “n时刻质点的位置”

则 $\{X_n\}$ 为马氏链，并求其转移概率矩阵



赌博模型

X_n — n次一共赢的钱数

$X_0 = 0$

$$\xi_n = \begin{cases} 1 & \text{往右一格} \\ -1 & \text{往左一格} \end{cases}$$

$$X_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$$

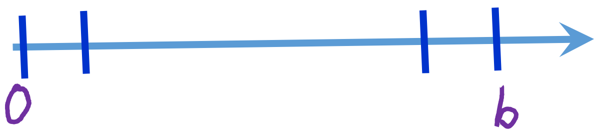
$\Rightarrow \{X_n\}$ 为马氏链

$$P = \begin{array}{c} \\ \vdots \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \cdots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & \ddots & p & & 0 & \\ & & q & 0 & p & & \\ & & & q & 0 & p & \\ & 0 & & & q & \ddots & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

例（续）带吸收壁的随机游动

$$p_{00} = 1$$

$$p_{bb} = 1$$



$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ b \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ q & 0 & p & & & 0 \\ 0 & q & 0 & p & & 0 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

案例 Google搜索引擎的Page算法（Larry Page and Sergey Brin,1998）

设互联网中的总网页数为N，有一些固定的连接（链接），记为G_{ij}：如果网页i与j之间存在固定连接，则$G_{ij}=1$；否则，$G_{ij}=0$. 两个网页之间也可以是随机连接。假设两个网页之间以概率 ρ使用 固定链接，以概率$1-\rho$使用随机连接。则网页i到网页j的转移概率为：

$$p_{ij}=\rho\frac{G_{ij}}{\sum_k G_{ik}}+(1-\rho)\frac{1}{N}$$

我们关心的问题是“网络正常平稳运转时，网页i的‘占位概率’是多少？”我们可以根据“占位概率”的大小对网页的重要性进行排序

二 转移概率矩阵

X_n ——第 n 天的 (某股票的状态)

设 $\{X_n\}$ 为马氏链 $\mathbb{P}=(p_{ij})$ $p_{ij}=\mathrm{P}\left(X_{n+1}=j \mid X_n=i\right)$

易知 (1) p_{ij} $\underline{\geq}$ 0

(2) $\sum\limits_{j\in S} p_{ij}=\underline{1}$

时刻n的分布

记 $\pi_i(n)=\mathrm{P}\left(X_n=i\right)$, $\pi(n)=\left(\pi_0(n),\pi_1(n),\ldots\right)$

$\pi(0)$ —— 初始分布

❑ 由初始分布$\pi(0)$与$\mathbb{P}$，求$(X_0, X_1, \ldots, X_n)$的联合分布

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n)$$

$$= P(X_0 = i_0) P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) P(X_2 = i_2 | X_0 = i_0, X_1 = i_1) \times \cdots$$

$$\pi_{i_0}(0) \times P_{i_0 i_1} \times$$

$$= P(X_2 = i_2 | X_1 = i_1) \times P_{i_2 i_3} \times \cdots$$

$$= P_{i_1 i_2}$$

❑ 由初始分布$\pi(0)$与$\mathbb{P}$，求 X_n 的分布 $\pi(n)=\left(\pi_0(n),\pi_1(n),\ldots\right)$

$$\pi_j(n) = P(X_n = j)$$

$$= \sum_i P(X_{n-1} = i)\,P(X_n = j \mid X_{n-1} = i)$$

$$= \sum_i \pi_i(n-1) \times P_{ij}$$

$$\pi(n) = \pi(n-1)\,\mathbb{P}$$

$$= \pi(n-2)$$

- m步转移概率矩阵 $\mathbb{P}^{(m)} = \left(p_{ij}^{(m)}\right)$

$$p_{ij}^{(m)} = \mathbf{P}\left(X_{n+m}=j \mid X_n = i\right)$$

问题：$\mathbb{P}^{(m)}$ 与 $\mathbb{P}^m$ 的关系？

$$\mathbb{P}^{(m)} \stackrel{?}{=} \mathbb{P}^m$$

C-K方程 Chapman-Kolmogorov

$\forall\, m,n$

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_k p_{ik}^{(m)}\, p_{kj}^{(n)}$$

用矩阵的语言：$\mathbb{P}^{(m+n)} = \mathbb{P}^{(m)}\mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^{(n)}\mathbb{P}^{(m)}$

由此可得到什么结论？

$$\mathbb{P}^{(m)} = \left(p_{ij}^{(m)}\right) = \mathbb{P}\,\mathbb{P}^{(m-1)} = \mathbb{P}^2\,\mathbb{P}^{(m-2)} = \cdots = \mathbb{P}^m$$

例 设马氏链$\{X_n\}$， $S=\{1,2,3\}$，一步转移概率矩阵 $X_0=3$

$$\mathbb{P}=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

1) 求X_2的分布；

2) 求$E\left(X_3 \mid X_2\right)$的分布

$E(X_3 \mid X_2)$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}$
P	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$

解: 1) $X_2 = 1,2,3$

$$P(X_2=1) = \underbrace{P(X_1=1)}_{\frac{2}{3}}\underbrace{P(X_2=1 \mid X_1=1)}_{\times\frac{1}{3}} + \underbrace{P(X_1=2)}_{\frac{1}{3}}\underbrace{P(X_2=1 \mid X_1=2)}_{\times 0} = \frac{2}{9}$$

$$P(X_2=2) = \underbrace{P(X_1=1)}_{\frac{2}{3}}\underbrace{P(X_2=2 \mid X_1=1)}_{0} + \underbrace{P(X_1=2)}_{\frac{1}{3}}\underbrace{P(X_2=2 \mid X_2=2)}_{\frac{2}{3}} = \frac{2}{9}$$

$$P(X_2=3) = \frac{5}{9}$$

2) $E(X_3 \mid X_2=1) = \frac{1}{3}+3\times\frac{2}{3} = \frac{7}{3}$

$E(X_3 \mid X_2=2) = 2\times\frac{2}{3}+3\times\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

$E(X_3 \mid X_2=3) = \frac{4}{3}$

作业

4.3，4.5，4.7(1)(2)

补充题 设$\{\xi_n: n=0,1,2\ldots\}$独立同分布，$\xi_n \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

$S_0=0$, $S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$， $n\geq 1$, $M_n=\max_{k=0,\ldots,n}S_k$.

证明$\{M_n-S_n\colon\ n=0,1,2,\ldots\}$为马氏链。

提示：将$M_{n+1}-S_{n+1}$表示成M_n-S_n与ξ_{n+1}的函数，需要分情况讨论

三　状态的分类

X_n——第n天股价的状态

$i \to j$

（一）首达时与首达概率

$i \to j$ (i 可达 j)　if　$\exists n,\ p_{ij}^{(n)} > 0$

$i \leftrightarrow j$ (i 与 j 互通)　if　$i \to j,\ j \to i$

易知　$i \to j, j \to k$，则 $i \to k$ （传递性）

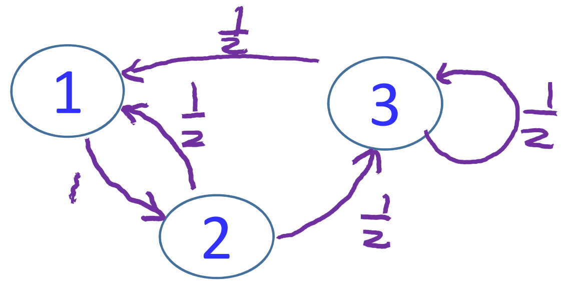
$i \leftrightarrow j, j \leftrightarrow k$，则 $i \leftrightarrow k$ 。（传递性）

❑ 首达时——　$T_{ij} = \inf\{n : n \geq 1, X_0 = i, X_n = j\}$

T_{ii}　从 i 出发首次进入到 j 的时间

例5

$$\mathbb{P}=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{2} & \mathbf{0} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \mathbf{0} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{array}$$



我们考查 T_{13}

$$\mathbf{1\rightarrow 2\rightarrow 3} \qquad T_{13} = \underline{2}$$

$$\mathbf{1\rightarrow 2\rightarrow 1\rightarrow 2\rightarrow 3} \qquad T_{13} = \underline{4}$$

$\cdots \qquad \cdots$

说明 T_{ij} 是一个随机变量

怎么求 T_{ij} 的分布呢?

□ 首达概率—— $f_{ij}^{(n)} = \mathrm{P}\{T_{ij} = n \mid X_0 = i\}$

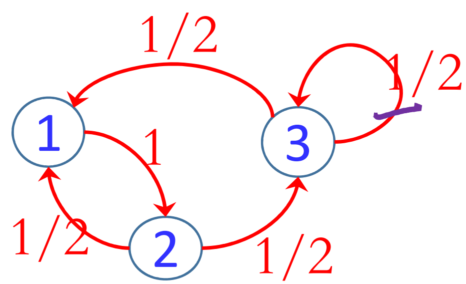
$$= \mathrm{P}\{X_n = j,\ X_k \neq j,\ k=1,2,\cdots,n-1 \mid X_0 = i\}$$

$$f_{ij} := \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = \mathrm{P}(T_{ij} < +\infty \mid X_0 = i)$$ —— 从i出发有限步进入到j的概率

$$1 - f_{ij} = \mathrm{P}(T_{ij} = +\infty \mid X_0 = i)$$

例5（续）求 f_{13}

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



$f_{13}^{(1)} = 0$, $f_{13}^{(2)} = \frac{1}{2}$, $f_{13}^{(2n+1)} = 0$, $f_{13}^{(2n)} = \frac{1}{2^n}$

$$f_{13} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 1$$

（二）状态的分类

$f_{ij} \leftarrow$

$f_{ii} \leftarrow$ 从i出发有限步回到i

$f_{ii} = 1$ ——（常返）

$f_{ii} < 1$ ——（非常返）

❑ 若 $f_{ii} = 1$，则 T_{ii} 的分布列为

T_{ii}	1	2	$\cdots$	n	$\cdots$
P	$f_{ii}^{(1)}$	$f_{ii}^{(2)}$	$\cdots$	$f_{ii}^{(n)}$	$\cdots$

$\underbrace{f_{ii}^{(1)} + f_{ii}^{(2)} + \cdots + f_{ii}^{(n)} + \cdots}_{f_{ii}=1}$

$$\mu_i := ET_{ii} = \sum_{n=1}^{+\infty} n f_{ii}^{(n)} \leftarrow \text{平均返回时间}$$

$\mu_i < \infty$ —— 正常返；

$\mu_i = \infty$ —— 零常返。

- 状态i的周期 $=\{n \geq 0;\ p_{ii}^{(n)} > 0\}$ 的最大公约数

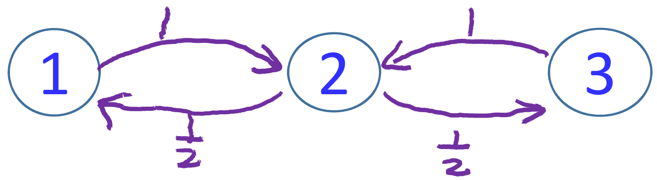
$d(i)$

$$
\begin{cases}
d(i)=1 & \text{—— 非周期} \\
d(i)>1 & \text{—— 周期}
\end{cases}
$$

遍历态 —— 非周期的正常返态

例6

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



试判断状态“1”的属性

$$f_{11}^{(1)} = 0, \quad f_{11}^{(2)} = \frac{1}{2}, \quad f_{11}^{(3)} = 0, \quad \cdots$$

$$f_{11}^{(2n+1)} = 0, \quad f_{11}^{(2n)} = \frac{1}{2^n}$$

$$f_{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 1 \Rightarrow 1\text{为常返态}$$

$$\mu_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n \times \frac{1}{2^n} = 4 < +\infty$$

1为正常返态 $\quad d(1) = 2$

作业

设一个齐次马氏链的转移概率矩阵为

$$\mathbb{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

哪些状态为常返态？哪些状态为非常返态？哪些为正常返态？

四 正常返、零常返和非常返的判别

（一）考查 $p_{ij}^{(n)}$ 与 $f_{ij}^{(n)}$ 的关系

$P_{ij}^{(n)}$ —— 从i出发n步进入到j的概率

$f_{ij}^{(n)}$ —— ……首次……

$P_{ij}^{(n)} \geq f_{ij}^{(n)}$

定理 $\forall i, j \in S, n \geq 1$，有

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} P_{jj}^{(n-l)}$$

$$f_{ij}^{(n)} = P_{ij} I_{n=1} + \sum_{k \neq j} P_{ik} f_{kj}^{(n-1)} I_{n>1}$$

$i \to j \Leftrightarrow f_{ij} > 0$

$\exists n, P_{ij}^{(n)} > 0 \Leftrightarrow \exists l_0, f_{ij}^{(l_0)} > 0$

$\Leftrightarrow f_{ij} > 0$

$i \leftrightarrow j \Leftrightarrow f_{ij} > 0$

$f_{ji} > 0$

（二）常返、非常返的判断

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)},\ n = 1,2,\dots$$

定理4.2.18　1）i为常返 $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} P_{ii}^{(n)} = +\infty$

2）i为非常返 $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} P_{ii}^{(n)} < +\infty$

$P_{ii}^{(n)}$　$\mathbb{P}^n$

解释： i为常返$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$

$$p_{ii}^{(n)} = \mathrm{P}(X_n = i \mid X_0 = i) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} =$$

i为常返$\Leftrightarrow$

i为非常返$\Leftrightarrow$

推论1 若j为非常返，则 $\forall i$ $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$ ______

$p_{ij}^{(n)}$ ______

推论2 若j为常返，

若 $i \to j$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$ __________

若 $i \not\to j$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} =$ ____

（三） 零常返与正常返的判别

定理 （弱遍历定理）若 j 为常返态，则对$\forall i \in S$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} p_{ij}^{(k)} = \frac{f_{ij}}{\mu_j}$$

定理 设 $\boldsymbol{i}$为常返态，周期$\boldsymbol{d(i)=d}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} p_{ij}^{(k)} = \frac{f_{ij}}{\mu_j}$$

证明：

定理4.2.19 设 i 为常返态，则

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i}$$

1） i 为零常返 $\Leftrightarrow$

2） i 为周期为d的正常返 $\Leftrightarrow$

i 为遍历 $\Leftrightarrow$

- ❑ i 为非常返态 $\Leftrightarrow$ （ ）
- ❑ i 为零常返态 $\Leftrightarrow$ （ ）
- ❑ i 为正常返态 $\Leftrightarrow$ （ ）

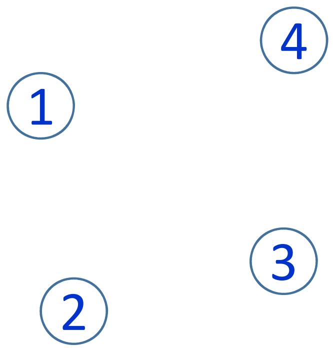
（四）“$\leftrightarrow$”与状态的属性

❑ $\leftrightarrow$的性质 $\begin{cases} i \leftrightarrow i \\ i \leftrightarrow j \Rightarrow \\ i \leftrightarrow j, j \leftrightarrow i \Rightarrow \end{cases}$

- 可利用“$\leftrightarrow$”将状态空间分类
- 不可约链——

例 $S = \{1,2,3,4\}$

试将状态空间分解。$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



定理 若$i \leftrightarrow j$，则

1. i与j同为________或者同为________；若同为常返态，则它们同为或者同为______________；

2. i与j具有相同的________（或者同为_________的）

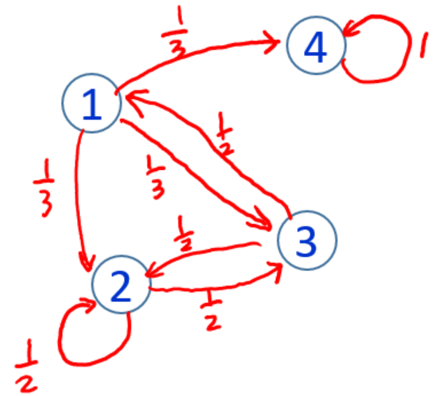
定理 若$i \leftrightarrow j$，则

1. i与j同为常返态或者同为非常返态；若同为常返态，则它们同为正常返或者同为零常返；
2. i与j具有相同的周期（或者同为非周期的）

例 设一个马氏链的转移概率矩阵为

$$\mathbb{P}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

试将判断各状态的属性。



例 设马氏链的状态空间 $S=\{1,2,3,\ldots\}$

试判断各状态的属性

$$p_{11}=q,\ p_{i,i+1}=p,$$

$$p_{i,1}=q$$

$$p+q=1$$

1 2 3

作业：4.8，4.11

补充题 设一个马氏链的转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

哪些状态为非常返态？哪些状态为正常返态？并求出正常返态的周期与平均返回时间。

（五）状态空间的分解

- 闭集 $\boldsymbol{C}$ $(\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{S})$: $\forall \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{C}$, $\forall \boldsymbol{j} \notin \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{p_{ij}} =($　　　　$)$

问题：一步出不去，两步能出去吗?

你能得到什么结论?

引理 设i为常返态，若$i \to j$，则j必为常返态。

由此可以得到什么结论?

定理 所有常返态构成闭集，记为$\boldsymbol{C}$

$\boldsymbol{T}$——所有非常返态组成的集合

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{T} \cup \boldsymbol{C}$$

推论 不可约马氏链，____________________，________________________。

定理 若$C \neq \emptyset$，则 C又可以分解为若干个互不相交的闭集

$$C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots$$

1）C_h 中的任意两个状态 ________;

2） $C_h \cap C_l =$ ___， $h \neq l$

$C_1, C_2, \ldots$ 被称为__________.

例 设一个马氏链的转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

如何分解?

结论

- ❑ 有限齐次马氏链，不管系统从什么状态出发，迟早要进入某个________中；

思考：有限齐次马氏链有没有零常返?

- ❑ 有限齐次马氏链_____ 零常返态。

证明：

为了计算方便，常把状态重新排列

$$S = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup T$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} & \cdots & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \cdots & \underline{\quad} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \cdots & \underline{\quad} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \left(\begin{array}{cc|ccc|c} \underline{\quad} & \underline{\quad} & & & & \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & & & & \\ \hline & & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \\ & & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \\ & & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \\ \hline \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{array}\right)$$

五 极限分布与平稳分布

（一）$\mathbf{P}^n$ 的极限性质

i为非常返态或零常返态，则 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} =$ _____

i为遍历态，则 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} =$ _____

i为周期d的正常返态，则 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} =$ _____

考查 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} =$ ____

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \_\_\_\_$$

- j为非常返态或零常返态，则 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} =$ _____

问题：若j为周期d的正常返态，则 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} =$ ____

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \_\_\_\_\_\_$$

定理 若j为周期d的正常返态，则 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)} =$ ______

- 若j为遍历态，则$\forall i \in S, \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} =($ ________ $)$

- 对于不可约遍历链，则$\forall i \in S, \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} =($ ________ $)$

问题：如何求$\mu_j =??$

定理 若马氏链是不可约的遍历链，则$\left\{\pi_j = \frac{1}{\mu_j}\right\}$是方程组

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}$$

满足$\pi_j \geq 0, \ \sum_{j \in S} \pi_j = 1$ 的唯一解。

证明 $\quad p_{ij}^{(n)} =$

（二）平稳分布

☆平稳分布———

$$\pi = \pi\mathbb{P} = (\quad)\mathbb{P} = \ldots = \underline{\qquad}$$

- ❑ 以平稳分布为初始分布，则$\{X_n\}$为（严）平稳过程

定理 若马氏链是不可约的遍历链，则$\left\{\pi_j = \frac{1}{\mu_j}\right\}$是方程组

$$\pi_j = \sum_{i\in S} \pi_i p_{ij}$$

满足 $\pi_j = \sum_{i\in S} \pi_i p_{ij}$ 的唯一解。

- ❑ 不可约遍历链有唯一的平稳分布，且平稳分布和极限分布相同。

定理 若$\{X_n\}$为马氏链，$S = C_1^+ \cup C_2^+ \cup \ldots \cup C_h^+ \cup T$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbb{P}_h & \\ \mathbb{R}_1 & \cdots & \mathbb{R}_h & \mathbb{Q}_T \end{pmatrix}$$

则$\{X_n\}$的平稳分布为

$$\pi = \lambda_1 \pi^{(1)} + \cdots + \lambda_h \pi^{(h)}$$

$$(\lambda_i \geq 0,\ \sum_i \lambda_i = 1)$$

其中$\pi^{(i)}$为集中在C_i^+上的唯一的平稳过程。

例1 $S=\{1,2,3,4,5\}=\{1,2\}\cup\{3,4\}\cup\{5\}$

求平稳分布。

$$\mathbb{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

（三）极限分布

问题：若初始分布为任意分布 $\pi(0)$ ，问 $\lim\limits_{n\to\infty}\pi(n)$ 是否存在?

极限分布—— $\pi^* = \lim\limits_{n\to\infty}\pi(n)$

对于有限齐次马氏链， $\pi(n) = \pi(0)\mathbb{P}^n$

$$=$$

结论： 有限齐次马氏链，若从某个初始分布出发的极限分布存在，则__________________________________。

例1（续） $S=\{1,2,3,4,5\}=\{1,2\}\cup\{3,4\}\cup\{5\}$

$$\mathbb{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}^n$。

思考 $S=\{1,2,3,4,5\}=\{1,2\}\cup\{3,4\}\cup\{5\}$

$$\mathbb{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$\pi(0)=(0,0.4,0.1,0.3,0.2)$

如何求相应的极限分布呢?

作业：

1）设一马氏链的转移概率矩阵为

$$\mathbb{P}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

求从状态“4”出发的极限分布： $\lim\limits_{n\to\infty} p_{4j}^{(n)}$

2）设一个马氏链的转移概率矩阵为

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

对给定的初始分布 $\pi(0) = (0, 0.5, 0.1, 0.2, 0.2)$，求其极限分布。