§3.3 泊松过程的推广

一 非时齐的泊松过程

$N(t)$——某超市 $[0,t]$ 的顾客数

定义 计数过程 $N_T=\{N(t);\ t\geq 0\}$ 称为强度为 $\{\lambda(t)>0, t\geq 0\}$ 的**非时齐泊松过程**，if

P1) $N(0)=0$

P2) 独立增量过程

P3) 对充分小的 $h>0$，有

$$P(N(t+h)-N(t)=1)=\underline{\lambda(t)h}+o(h)$$

$$P(N(t+h)-N(t)\geq 2)=o(h)$$

$$\boldsymbol{m(t)=\int_0^t \lambda(s)ds}$$

累积强度

定理1 若N是强度为$\{\lambda(t), t\geq 0\}$的非时齐泊松过程，则

$$P\left(N(t)-N(s)=k\right)=\frac{\left(\int_s^t \lambda(u)du\right)^k}{k!}e^{-\int_s^t \lambda(u)du}, \quad k=0,1,2,\cdots$$

$$\Rightarrow N(t)-N(s)\sim Poi\left(\int_s^t \lambda(u)du\right)$$

$$P(N(t)-N(s)=k)=\frac{(\lambda(t-s))^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)}$$

$$\Rightarrow N(t)-N(s)\sim Poi\left(m(t)-m(s)\right)$$

时间变换

定理2 （1）若$N=\{N(t);t\geq 0\}$是强度为$\{\lambda(t),t\geq 0\}$的非时齐泊松过程，$m^{-1}(u)$为$m(t)$的反函数

$m(t)=\int_0^t \lambda(u)du$

$$m^{-1}(u)=\inf\{t:\ t>0, m(t)\geq u\},\ \forall u\geq 0$$

令 $M(u):=N(m^{-1}(u))$，则$\{M(u);\ u\geq 0\}$为具有强度1的时齐泊松过程

（2）若$N=\{N(t);t\geq 0\}$是强度为1的时齐泊松过程，任意给定非负可积函数$\lambda(s)$，令 $m(t):=\int_0^t \lambda(s)ds$

令 $M(u):=N(m(u))$，则$\{M(u);\ u\geq 0\}$为具有强度$\{\lambda(u),u\geq 0\}$的非时齐泊松过程

二 复合泊松过程

保险精算

$N(t)$—— $[0,t]$中的理赔次数

Y_i —— 第i次理赔的赔付金额

X_t—— $[0,t]$上的总赔付额

$$X_t = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

i.i.d.

定义 设 $\{Y_i, i=1,2,\ldots\}$ 是独立同分布的随机变量序列，且与 Y 同分布，$N=\{N(t);\ t\ge 0\}$ 为泊松过程，且 $\{Y_i, i=1,2,\ldots\}$ 与 $N=\{N(t);\ t\ge 0\}$ 相互独立，记

$$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \longleftarrow [0,t] \text{ 的累计赔付额}$$

称 $\{X(t);\ t\ge 0\}$ 为复合泊松过程。

例 设$N(t)$为保险公司某产品的理赔次数过程，Y_i为第i次理赔的赔付额，$X(t)$为$[0,t]$的累积赔付额，

$$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$$

求（1）$E[X(t)]$;

解：$E(X(t)) = E\left(E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \,\middle|\, N(t)\right)\right) = E(N(t)EY) = \lambda t\, EY$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \,\middle|\, N(t)=n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} EY_i$$

$$= nEY$$

例 设$N(t)$为保险公司某产品的理赔次数过程，Y_i为第i次理赔的赔付额，$X(t)$为$[0,t]$的累积赔付额，

求(2) $\mathbf{Cov}\,(X(s), X(t))$.

$\lambda s EY$ $\lambda t EY$ $E(X(t)) = \lambda t EY$

解：$\mathrm{Cov}(X(s), X(t)) = E(X(s)X(t)) - EX(s)\,E(X(t))$

$$E(X(s)X(t)) = E\left(E\left(\sum_{i=1}^{N(s)} Y_i \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \,\middle|\, N(s)\right)\right) = \cdots\cdots \qquad s<t$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \sum_{i=1}^{n+N(t)-N(s)} Y_i \,\middle|\, N(s)=n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j + \sum_{j=n+1}^{n+N(t)-N(s)} Y_j\right)\right)$$

$$= E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2\right) + E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) E\left(\underbrace{\sum_{j=1}^{N(t-s)} Y_j}_{\lambda(t-s)EY}\right)$$

$= \quad \quad +$

作业 3.19 $P(\tau \le s \mid N(t) = 1)$

补充题1

（1） 请给出“强度函数为 $\lambda(t)$ $(t \geq 0)$ 的非时齐复合Poisson过程”的定义；

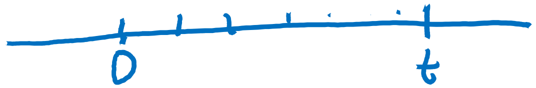
（2） 设$\{X_t\}$是强度函数为$\lambda(t)$ $(t \geq 0)$的非时齐复合Poisson过程，求$E(X_t)$，$\mathrm{Cov}(X_s, X_t)$.

补充题2 设$\{N_t\}$是强度函数为$\lambda(t)$ $(t \geq 0)$的非时齐Poisson过程，以及$[0,t]$的划分：

$$0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} = t, \max_j\left(t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}\right) \to 0,\ (n \to \infty)$$

（1） 求$\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} N_{t_k^{(n)}}\left(N_{t_k^{(n)}} - N_{t_{k-1}^{(n)}}\right)$；

（2） 求$\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} N_{t_{k-1}^{(n)}}\left(N_{t_k^{(n)}} - N_{t_{k-1}^{(n)}}\right)$



$\int_0^t N_u \, dN_u$

提示：设$\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n < t$，将$\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} N_{t_k^{(n)}}\left(N_{t_k^{(n)}} - N_{t_{k-1}^{(n)}}\right)$用$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$表示，再化简、变形，得到的结果与$N_t^2$、$N_t$有关