第2章 随机过程的基本概念

案例1　S_t ——某只股票 t 时刻的价格

$S_T = \{S_t, t \in [a,b]\}$ 为一个随机过程

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ——概率空间

$T = \{t,\ t \in \mathbb{T}\},\ \mathbb{T} = [a,b]$，$\{0,1,2,\cdots\}$，$\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$

X_t —— t 时刻我们关心的量，是 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机变量

$X_T = \{X_t, t \in \overset{\mathbb{T}}{\cancel{[a,b]}}\}$ 为随机过程 实质为一个无穷维的随机变量

案例2 N_t —— $[0,t]$ 内的某公司的顾客数

$N_T=\{N_t,t\geq 0\}$ 为一个随机过程

案例3 N_t —— t时刻某生物种群的个体数

$N_T=\{N_t;\ t\geq 0\}$ 为一个随机过程

案例4 X_n ——某人第n天用手机上“今日头条”的时间

$X_T=\{X_n,n=0,1,2,\ldots\}$ 为一个随机过程

随机过程 $X_T=\{X_t,t\in \mathbb{T}\}$ 实质为一个无穷维的随机变量

二 随机过程的数字特征

设 $X_T = \{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ 为 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机过程

1) 均值函数: $m(t) = E(X_t)$

2) 方差函数: $D(t) = D(X_t)$

3) 协方差函数: $Cov(X_s, X_t) = E[(X_s - m(s))\overline{(X_t - m(t))}]$

相关函数: $R(s,t) = E(X_s \overline{X_t})$

相关系数 $\rho(s,t) = \dfrac{Cov(X_s, X_t)}{\sqrt{D(s)}\sqrt{D(t)}}$

例 设随机变量ξ,η独立同分布，服从参数为λ的指数分布，

$X_t = -t^2 + 2\xi\, t + \eta$,

$$Y_t = \max_{u\in[0,t]} X_u,$$

求过程$\{Y_t; t \geq 0\}$的均值函数。

解

$$Y_t = \begin{cases} -t^2+2\xi t+\eta & t\le \xi \\ \eta+\xi^2 & t>\xi \end{cases}$$

$$= (-t^2+2\xi t+\eta)\, I_{t\le\xi} + (\eta+\xi^2)\, I_{t>\xi}$$

$$EY_t = E\left[(-t^2+2\xi t+\eta)\, I_{t\le\xi}\right] + E\left[(\eta+\xi^2)\, I_{t>\xi}\right]$$

$$= -t^2 E[I_{t\le\xi}] + 2t\, E[\xi I_{\xi\ge t}] + E(\eta) P(\xi\ge t) + E(\eta) P(\xi < t) + E(\xi^2 I_{t>\xi})$$

$$E[I_{t\le\xi}] = P(\xi\ge t) = e^{-\lambda t}$$

$$E[\xi I_{\xi\ge t}] = \int_t^{+\infty} x\, \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$E(\xi^2 I_{t>\xi}) = \int_0^t x^2 \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

三 有限维分布族

X_t —— t时刻的股价

设 $X_T=\{X_t,\ t\in\mathbb{T}\}$ 为随机过程　　$X_T=\{X_t,\ t\in\mathbb{T}\}$ 为无穷维随机变量

$t_1<t_2<\cdots<t_n$　　$(X_{t_1},X_{t_2},\dots,X_{t_n})$ 的联合分布函数

$$F(t_1,\dots,t_n;x_1,\dots,x_n)=P(X_{t_1}\le x_1,\ X_{t_2}\le x_2,\ \dots,\ X_{t_n}\le x_n)$$

有限维分布函数

- 有限维分布族——所有有限维分布的全体

$$\{F(t_1,\dots,t_n;x_1,\dots,x_n);\ \ \forall n,\forall t_1,\dots,t_n\in\mathbb{T}\}$$

任何随机过程都有有限维分布族

什么样的函数族可以作为有限维分布族呢?

有限维分布族的性质

1）对称性：对于（$12 \dots n$）的任意排列（$j_1 j_2 \dots j_n$）都有

$$F(t_1, \dots, t_n; x_1, \dots, x_n) = F(t_{j_1}, \dots, t_{j_n}; x_{j_1}, \dots, x_{j_n})$$

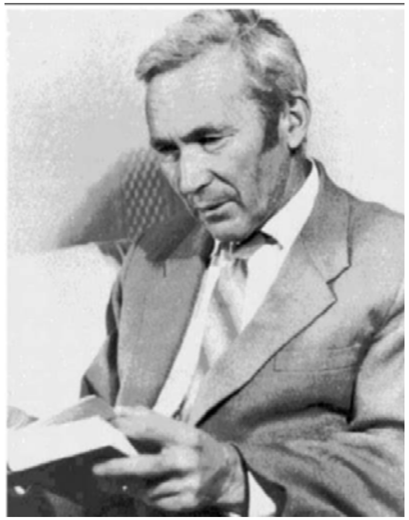
$$= P(X_{t_1} \le x_1, \dots, X_{t_n} \le x_n)$$

2）相容性：对$m < n$，有

$$F(t_1, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n; x_1, \dots, x_m, +\infty, \dots, +\infty) = \underline{F(t_1, \dots, t_m; x_1, \dots, x_m)}$$

什么样的函数族可以作为有限维分布族呢?

定理 （Kolmogorov存在性定理）



给定时间常数集 $\mathbb{T}$，及满足对称性和相容性的有限维分布函数族，则存在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 以及对应在这个空间上的随机过程 $X_T = \{X_t, t \in \mathbb{T}\}$，使得这个过程的有限维分布族就是该给定的有限维分布函数族。

四 随机过程的分类

- 独立增量过程

$\{X_t, t\in T\}$

$\forall\ t_1<t_2\le \underline{t_3<t_4}$

$X_{t_2}-X_{t_1}$ 与 $X_{t_4}-X_{t_3}$ 独立

- 马尔可夫（Markov）过程

- 鞅过程

- 平稳过程

作业

2.2，2.6，2.7