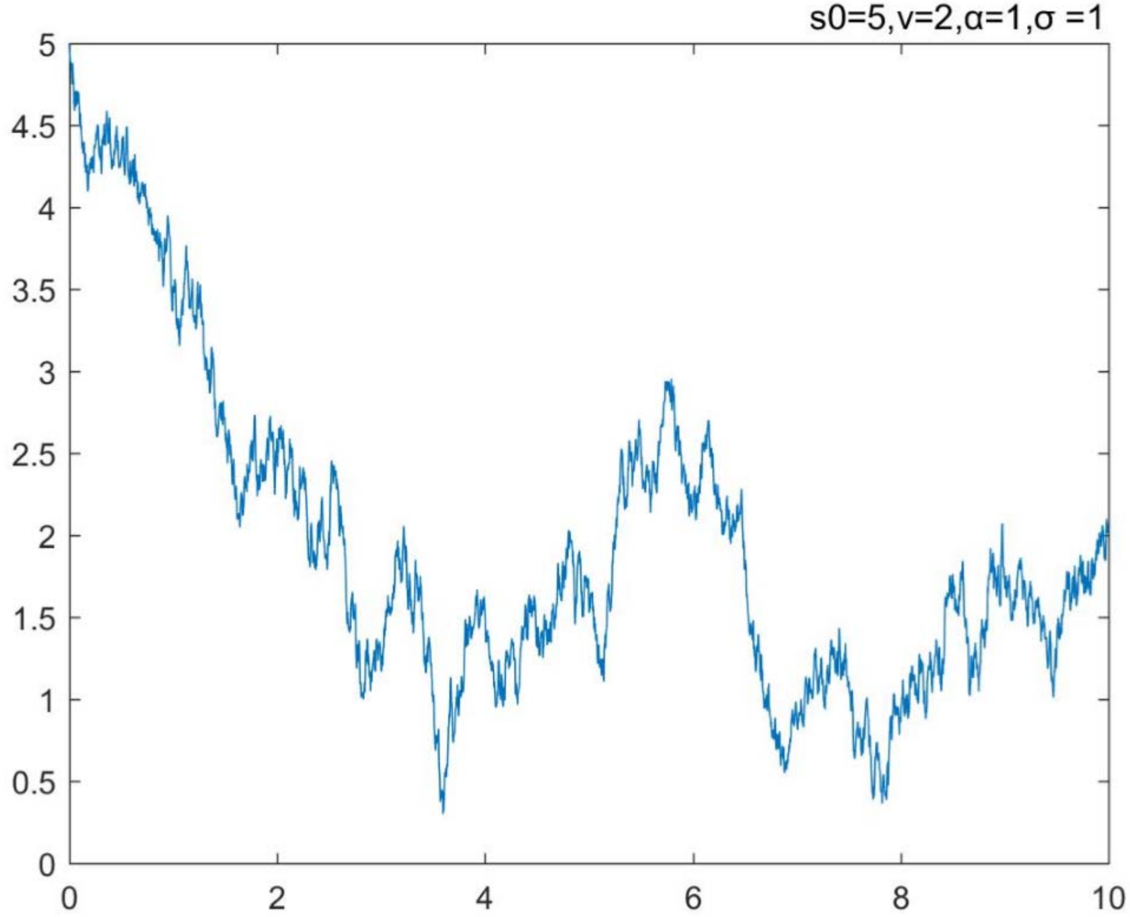
随机过程

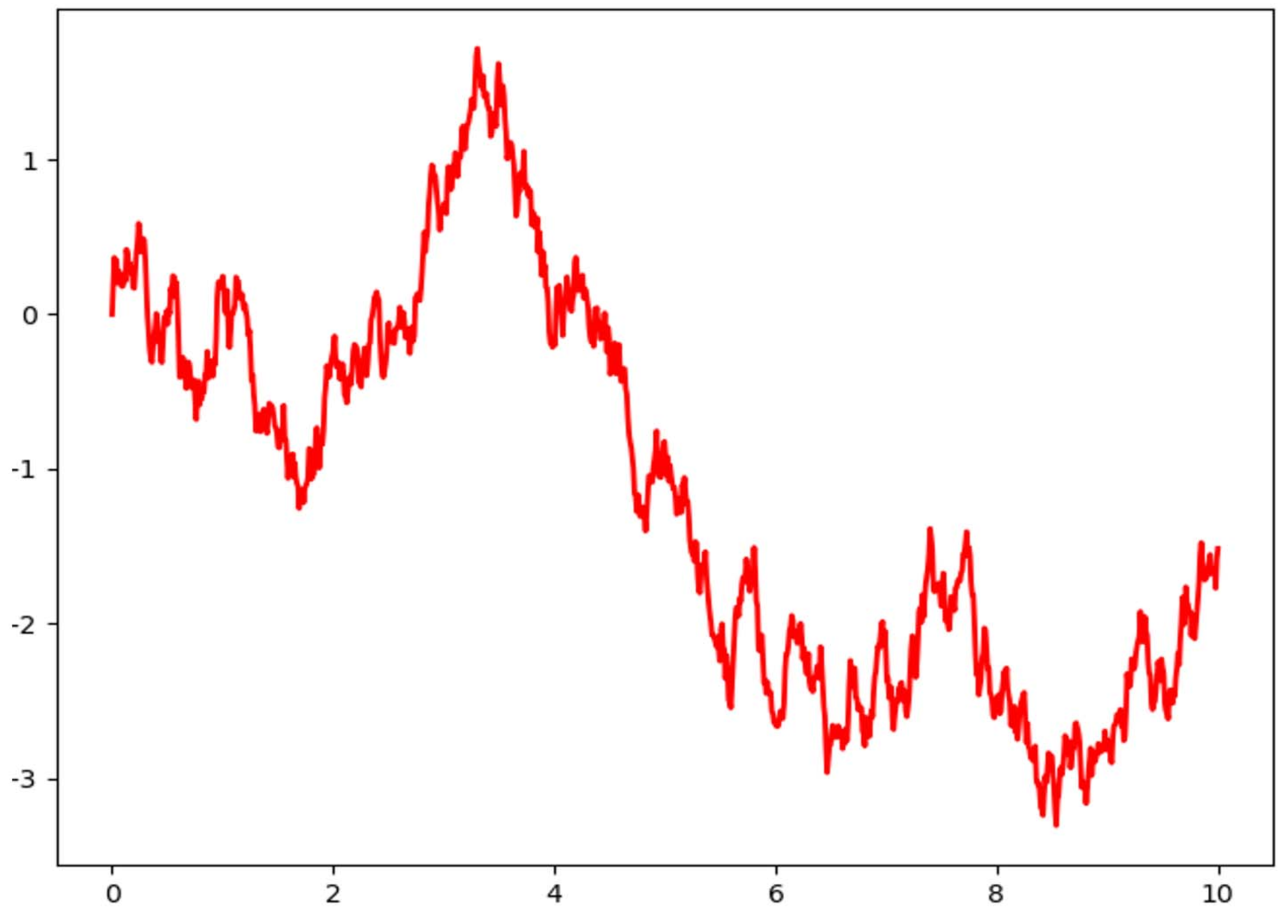
主讲： 熊德文 副教授

上海交通大学数学学院

xiongdewen@sjtu.edu.cn

- 成绩
  - 平时成绩
    - 作业 20%
    - 大作业（1次） 20%
  - 期末考试 60%


s0=5,v=2,α=1,σ =1
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
2
4
6
8
10



1
0
-1
-2
-3
0
2
4
6
8
10

程博元 517030910234

在这次大作业中，通过利用Python编程绘制不同的轨道，一方面加强了我对python中numpy、matplotlib库的理解，另一方面也加深了对随机微分方程理论的理解。在解决随机微分方程时，一方面要考虑趋势项，即确定性函数对应的部分，这个部分呈现了轨道的总体性质；另一方面，也要考虑随机项（波动项），这个部分反映了轨道的随机性。同时，在不同的情况下，也需要分析两个部分的主次关系。随机项参数较大时，趋势项往往没有明显的体现；随机项和趋势项参数相当时，两者都会对最终轨道有一定作用；而趋势项参数较大时，轨道呈现的是确定性的行为叠加小范围的波动。实际问题中，根据合适的情形判断当前随机微分方程所处的“状态”（即趋势明显或波动明显，对应股市中的牛熊市和震荡盘整）是极为重要的。

最后，感谢熊德文老师和助教乔磊的无私奉献和帮助，让我这个只学过概率统计的社科学院同学能够对随机过程理论有所理解。未来我也会继续深入钻研相关的理论和方法。再次表示衷心的感谢。

学习方法

- 上课认真听讲 （跟着老师的节奏、思路）
- 课后及时复习
- 作业认真完成

参考书

- 教材：韩东、王桂兰、熊德文《应用随机过程》
- Ross：Stochastic Processes（有中译本）
- 林元烈，《应用随机过程》

第一章 预备知识

复习概率论

一 概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$

$\mathscr{F}$ 事件域（σ域） $\mathcal{F}$

由Ω中的某些事件所组成的集合

(1) $\Omega \in \mathscr{F}$

(2) $\forall A \in \mathscr{F} \Rightarrow$ $\bar{A} \in \mathcal{F}$

(3) $\forall A_k \in \mathscr{F} \Rightarrow$ $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{F}$

- 对可列次交、并、差、补运算封闭

$\mathscr{B}$ —— Borel σ域 所有开集生成的σ域

✪ 子σ域——— $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ ，$\mathscr{G}$ 构成 σ-域

解释 $\mathscr{F}$ ——— 全部信息

$\mathscr{G}$ ——— 目前知道的信息

❑ $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的概率： $\boldsymbol{P}:(\Omega,\mathscr{F})\mapsto(\mathbb{R},\mathscr{B})$

$\boldsymbol{A}\in\mathscr{F}\rightarrow\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$ —— 集函数

- 非负性： $\forall A\in\mathscr{F}$, $P(A)\geq 0$
- 规范性： $P(\Omega)=1$
- 可列可加性： 设 $A_1, A_2, \cdots$ 为一列互不相容的事件，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

$(\Omega,\mathscr{F},P)$ ——— 概率空间

二 随机变量、分布函数及数字特征　　设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间　　可测函数

❑ 随机变量（r.v.）：　$X:(\Omega,\mathscr{F})\longrightarrow(\mathbb{R},\mathscr{B})$

$$\omega\longrightarrow X(\omega)$$

$\forall x\in\mathbb{R}$

$\{\omega: X(\omega)\leqslant x\}\in\mathscr{F}$

$\sigma(X)=\sigma(\mathscr{A}),\quad \mathscr{A}=\left\{\{\omega: X(\omega)\leqslant x\},\ \forall x\right\}$

分布函数　$F(x)=P(X\leqslant x)$

右连续，单增，$F(+\infty)=1$

$F(-\infty)=0$

- 分布函数的性质——
- 离散型随机变量的常见分布——
  - 二项分布　0-1分布
  - 泊松分布　超几何分布
  - 几何分布
- 连续型随机变量的常见分布——
  - 均匀分布　指数分布　Beta分布
  - 正态分布　伽玛分布　χ^2-分布　t-　F-

- ❑ 随机向量（r.v.）： $(X_1, X_2, ..., X_n): (\Omega, \mathscr{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathscr{B} \otimes \cdots \otimes \mathscr{B})$

$$\omega \longrightarrow (X_1(\omega), ..., X_n(\omega))$$

- 联合分布函数： $F(x_1, \cdots, x_n) = P(X_1 \le x_1, \cdots, X_n \le x_n)$
- 边缘分布函数： $F_{X_i}(x_i) = P(X_i \le x_i)$

$$= F(+\infty, \cdots, +\infty, x_i, +\infty, \cdots, +\infty)$$

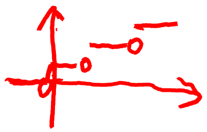
$X_1, \dots, X_n$相互独立$\Leftrightarrow$ $F(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$

$\sigma(X_1, ..., X_n) = \sigma(\mathscr{A})$, $\mathscr{A} =$ $\{\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}, \forall x_1, \cdots, x_n\}$

i.i.d.

若随机变量$X_1, X_2, ..., X_n$相互独立同分布于密度函数$f(x)$，则顺序统计量$(X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)})$ 的联合密度函数$f(y_1, y_2, ..., y_n)$为

$$f(y_1, ..., y_n) = \begin{cases} n!\, f(y_1)\cdots f(y_n), & y_1 < ... < y_n, \\ 0, & o.w. \end{cases}$$



数字特征

- 数学期望 $EX=\int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i & \text{离散型}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx & \text{连续型}\end{cases}$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} c_i EX_i$$

$$E\left(g(X)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dF(x)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{+\infty} g(x_i)\,p_i\\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx\end{cases}$$

$$Eg(X_1,\dots,X_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1,\dots,x_n)\,F(dx_1,\dots,dx_n)$$

- 方差 $DX=E\left((X-EX)^2\right)$ 协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E\left((X-EX)(Y-EY)\right)=E(XY)-EXEY$

$$\rho_{X,Y}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

❑ k阶矩 $E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \, dF(x)$

Schwarz不等式 $|E(XY)| \le \underbrace{\sqrt{E(X^2)}}_{\|X\|_2} \ \underbrace{\sqrt{E(Y^2)}}_{\|Y\|_2}$

$$|\mathrm{Cov}(X,Y)| \le \sqrt{DX}\ \sqrt{DY}$$

三 矩母函数与特征函数

❑ 矩母函数 $\psi(t) := E(e^{tX})$

$E(X^k) = \underline{\psi^{(k)}(0)}$

$\psi^{(k)}(t) = E(e^{tX} X^k)$

令 $t=0$

矩母函数的缺点?

有可能不存在

❑ 特征函数 $\phi(t) = E(e^{itX})$

$= E(\cos X) + iE(\sin X)$

$i = \sqrt{-1}$

性质： 1) $\phi(0) = \underline{1}$, $|\phi(t)| \le \underline{1}$, $\phi(-t) = \underline{\overline{\phi(t)}}$,

$\phi(-t) = E(e^{-itX})$

$\phi(t) = E(e^{itX})$

$\phi(t)$在（$-\infty, \infty$）一致连续

2) $\phi(t)$具有非负定性， i.e., $\sum_i \sum_j \lambda_i \phi(t_i - t_j)\bar{\lambda}_j \ge 0$

$\| E(|\sum \lambda_i e^{it_iX}|^2)$

$\phi(t) = E(e^{itX})$

3）若X、Y相互独立，则$\phi_{X+Y}(t) =$（ $\phi_X(t)\,\phi_Y(t)$ ）

$\phi(t) = E(e^{itX})$

$\phi^{(k)}(t) = E((iX)^k e^{itX})$

4) 若 $E(X^k)$存在，则 $E(X^k) =$（ $\dfrac{\phi^{(k)}(0)}{(i)^k}$ ）

5) $F(x) \xrightarrow{\text{Fourier 变换}} \phi(t)$

$F(x) \xleftarrow[\text{Fourier逆变换}]{} \phi(t)$

作业：1.2，1.5，1.6，1.11

补充题：设f_1, f_2, g_1, g_2为密度函数，数学期望分别为$\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$.
设随机变量(X, Y)的联合密度函数为

$$\lambda f_1(x) g_1(y) + (1-\lambda) f_2(x) g_2(y), \qquad (0 < \lambda < 1).$$

1）求$\mathrm{Cov}(X, Y)$；X, Y何时不相关?

2）问X, Y何时相互独立?