第3章 泊松过程

§3.1 定义

理赔次数

案例 $N(t)$ —— $[0,t]$ 上某随机事件发生的次数

订单数

某酒店的订单数

我们考查过程： $N_T=\{N(t);\ t\ge 0\}$

建模——

$N(t)$ —— $[0,t]$ 上某随机事件发生的次数

P1） N_T是计数过程，$N(0)=0$

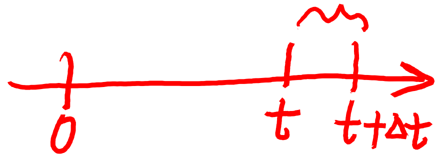
P2） N_T是独立增量过程，即 $t_1 < t_2 \le t_3 < t_4$ $X_{t_2}-X_{t_1}$ 与 $X_{t_4}-X_{t_3}$ 独立

P3） N_T是平稳增量过程，即 $\forall s,t \ge 0,\ n \ge 0$

$$P\left(N(t+s)-N(s)=n\right)=P\left(N(t)-N(0)=n\right)$$

P4） 对任意$t>0$和充分小的$\Delta t>0$，有

$$P\left(N(t+\Delta t)-N(t)=1\right)= \underline{\lambda\Delta t+o(\Delta t)}$$



$$P\left(N(t+\Delta t)-N(t)=0\right)= \underline{1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)}$$

泊松过程

$$P\left(N(t+\Delta t)-N(t)\ge 2\right)= \underline{o(\Delta t)}$$

λ ——强度

定理3.1.1 设 $N_T=\{N(t);\ t\geq 0\}$ 为满足P1)，P2), P3), P4) 的计数过程，则

$$P\{N(t+s)-N(s)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\quad k=0,1,2,\ldots$$

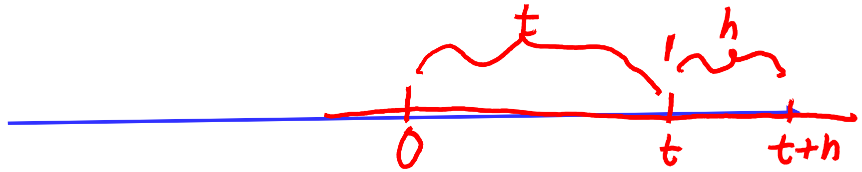
$N(s+t)-N(s)\sim$ Poi (λt)

证明

记 $p_n(t)=P(N(t)=n)=P(N(s+t)-N(s)=n)$

$\stackrel{?}{=}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$

第一步



$$p_0(t+h) = P\left[N(t+h) = \underline{\ 0\ }\right]$$

$$= P\left[N(t) = \underline{\ 0\ }, N(t+h) - N(t) = \underline{\ 0\ }\right]$$

$$= P\left[N(t) = \underline{\ 0\ }\right] P\left[N(t+h) - N(t) = \underline{\ 0\ }\right]$$

$$= P_0(t)\, P_0(h)$$

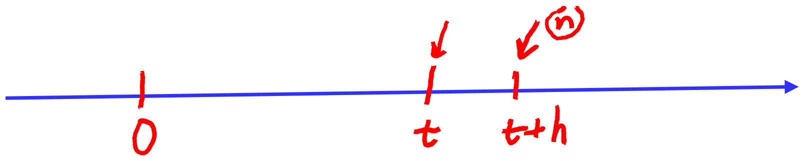
$\forall t, h > 0 \quad \Rightarrow P_0(t) = e^{-ct}$, c

$\Rightarrow c = \lambda$

$\Rightarrow P_0(t) = e^{-\lambda t}$

$P_0(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$

$$P\left(N(t+\Delta t) - N(t) = 0\right) = 1 - \lambda \Delta t$$



第二步

$$p_n(t+h) = P(N(t+h)=n)$$

$$= \underbrace{P(N(t)=n)}_{P_n(t)}\,\underbrace{P(N(t+h)-N(t)=0)}_{(1-\lambda\Delta t)} + \underbrace{P(N(t)=n-1)}_{P_{n-1}(t)}\,\underbrace{P(N(t+h)-N(t)=1)}_{\lambda\Delta t}$$

$$+ P(N(t)=n-2)\,\underbrace{P(N(t+h)-N(t)=2)}_{o(\Delta t)} + \cdots$$

$$= P_n(t)(1-\lambda\Delta t) + P_{n-1}(t)\lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

$$\frac{p_n(t+h)-p_n(t)}{h} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h}$$

令 $h \downarrow 0$

$$p_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

$$P_n(t) = ?$$

$$P\big(N(t+\Delta t)-N(t)=1\big) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

$$P\big(N(t+\Delta t)-N(t)=0\big) = 1-\lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

$$P\big(N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2\big) = o(\Delta t)$$

第三步 引入 $\Phi(t,z)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) z^k$ $\Phi(0,z)=$ 1

$P_0(0)=1$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,z)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k'(t) z^k \qquad = p_0'(t)+\sum_{k=1}^{\infty} p_k'(t) z^k$$

$e^{-\lambda t}$

$$= P_0'(t) + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\lambda P_k(t)+\lambda P_{k-1}(t)\right) z^k$$

$$= -\lambda P_0(t) - \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} P_k(t) z^k + \lambda z \sum_{k=1}^{+\infty} P_{k-1}(t) z^{k-1}$$

$$-\lambda \Phi(t,z) + \lambda z \Phi(t,z)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,z) = -\lambda(1-z)\Phi(t,z)$$

$$p_k'(t)=-\lambda p_k(t)+\lambda p_{k-1}(t), \quad k=1,2,\ldots$$

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,z) = -\lambda(1-z)\Phi(t,z)$$

$$\Phi(t,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \boxed{p_k(t)}\, z^k$$

$$\Phi(t,z) = \overset{1}{\overset{\parallel}{C(z)}}\, e^{-\lambda(1-z)t} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t z}$$

$$= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \right) z^k$$

$$\Rightarrow \quad P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\Rightarrow \quad N(t) \sim Poi(\lambda t)$$

#

定理3.1.1 设 $N_T=\{N(t);\ t\geq 0\}$ 为满足P1)，P2), P3), P4) 的计数过程，则

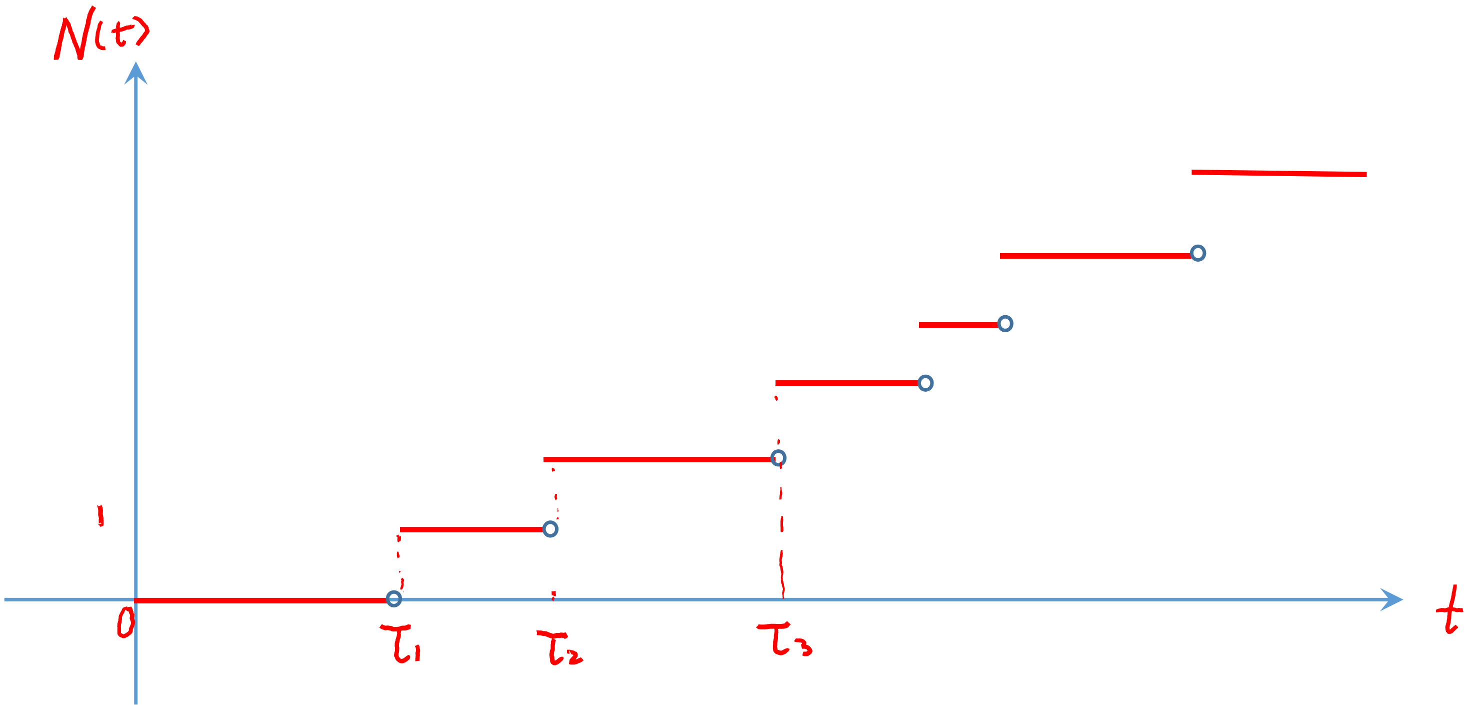
$$P\{N(t+s)-N(s)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\quad k=0,1,2,\ldots$$

定义 过程$N_T=\{N(t);\ t\geq\ 0\}$被称为参数为 λ的时齐的泊松过程，if

1）$N(0)=0$;

2) N_T为独立增量过程;

3) $\forall\, s,t,\ \ N(s+t)-N(s)\sim\ Poi(\lambda\, t)$


N(t)
1
0
τ1
τ2
τ3
t

设 $N_T=\{N(t);\ t\geq 0\}$ 为强度为 λ 的时齐的泊松过程，则

$N(t) \sim Poi(\lambda t)$

$EN(t)=$ λt

$DN(t)=$ λt

$s<t$

$\mathrm{Cov}\big(N(s),N(t)\big)=$ $\mathrm{Cov}(N(s),\ N(t)-N(s)+N(s))$

$=\mathrm{Cov}(N(s),N(s))$

$=D(N(s))=\lambda(s\wedge t)$

$s\vee t$

案例 假设某高校门口的公交车站有A,B,C三路公交车，它们的到达流$\boldsymbol{N_A} = \{\boldsymbol{N_A(t)};\ \boldsymbol{t} \geq \mathbf{0}\}, \boldsymbol{N_B} = \{\boldsymbol{N_B(t)};\ \boldsymbol{t} \geq \mathbf{0}\}, \boldsymbol{N_C} = \{\boldsymbol{N_C(t)};\ \boldsymbol{t} \geq \mathbf{0}\}$分别为$\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C$的泊松过程，且它们之间独立。

- 把三路公交车达到该车站看成一个随机过程$\mathbf{N} = \{\boldsymbol{N(t)}; \boldsymbol{t} \geq \mathbf{0}\}$，问N是什么过程?
- 求$E(\boldsymbol{N_A(t)} | \underbrace{\boldsymbol{N(t)}}_{=n}) = ?$
- 求$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{N_A(t)}, \boldsymbol{N_B(t)} | \boldsymbol{N(t)}) = ?$

解: 1): $N(t) = N_A(t) + N_B(t) + N_C(t)$

① $N(0) = 0$

② $N(t)$ 为独立增量过程

③ $N(t) - N(s) = (N_A(t) - N_A(s)) + (N_B(t) - N_B(s)) + (N_C(t) - N_C(s)) \sim Poi((\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C)(t-s))$

$\Rightarrow N$ 为强度$\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C$的Poisson过程

案例 假设某高校门口的公交车站有A,B,C三路公交车，它们的到达流 $\boldsymbol{N_A=\{N_A(t);\ t\geq\ 0\}}, \boldsymbol{N_B=\{N_B(t);\ t\geq\ 0\}}, \boldsymbol{N_C=\{N_C(t);\ t\geq\ 0\}}$分别为$\lambda_A,\lambda_B,\lambda_C$的泊松过程，且它们之间独立。

- 求$E(\boldsymbol{N_A(t)}|\underline{\boldsymbol{N(t)}})=?$

解：

$$P(N_A(t)=k\mid N(t)=n)=\frac{P(N_A(t)=k,\ N_B(t)+N_C(t)=n-k)}{P(N(t)=n)}$$

$$=\frac{\dfrac{\lambda_A^k \cancel{t^k}}{k!}\cancel{e^{-\lambda_A t}}\ \dfrac{(\lambda_B+\lambda_C)^{n-k}\cancel{t^{n-k}}}{(n-k)!}\cancel{e^{-(\lambda_B+\lambda_C)t}}}{\dfrac{(\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C)^n\cancel{t^n}}{n!}\cancel{e^{-(\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C)t}}}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda_A}{\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C}\right)^k\times\underbrace{\left(\frac{\lambda_B+\lambda_C}{\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C}\right)^{n-k}}$$

$$\sim B\left(\underline{n},\ \underbrace{\frac{\lambda_A}{\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C}}\right)$$

$$\Rightarrow E(N_A(t)\mid\underline{N(t)})=\underline{N(t)}\underbrace{\frac{\lambda_A}{\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C}}$$

作业

3.1，3.2（1）（2）

补充题：假设某商场的顾客到达流$\{N(t);\ t \geq 0\}$为强度为λ的泊松过程，每一个顾客是男性顾客的概率为p，女性顾客的概率为$1-p$，

$N_1(t)=$“$[0,t]$上男性顾客数”，$N_2(t)=$“$[0,t]$上女性顾客数”，

证明：$N_1(t)$与$N_2(t)$相互独立

$$P(N_1(t)=i,\ N_2(t)=j) = P(N_1(t)=i,\ N(t)=i+j)$$

$$= P(N(t)=i+j)\,P(N_1(t)=i \mid N(t)=i+j)$$

$$\stackrel{?}{=} P(N_1(t)=i)\,P(N_2(t)=j)$$

补充题（电梯模型）：考虑一个从地下室出发向上运行的电梯。用N_i表示第i层进电梯的人数，假设$N_0, N_1, \ldots$相互独立，N_i服从均值为λ_i的Poisson分布的随机变量。在第i层进入电梯的每一个人相互独立地以概率p_{ij}从j层走出电梯，$\sum_{j\neq i} p_{ij} = 1$. 令$O_j$表示从j层走出电梯的人数。

（1）计算$E[O_j]$;

（2）O_j服从什么分布?

（3）求(O_j, O_k) $(k \neq j)$的联合分布?

$O_j \sim$