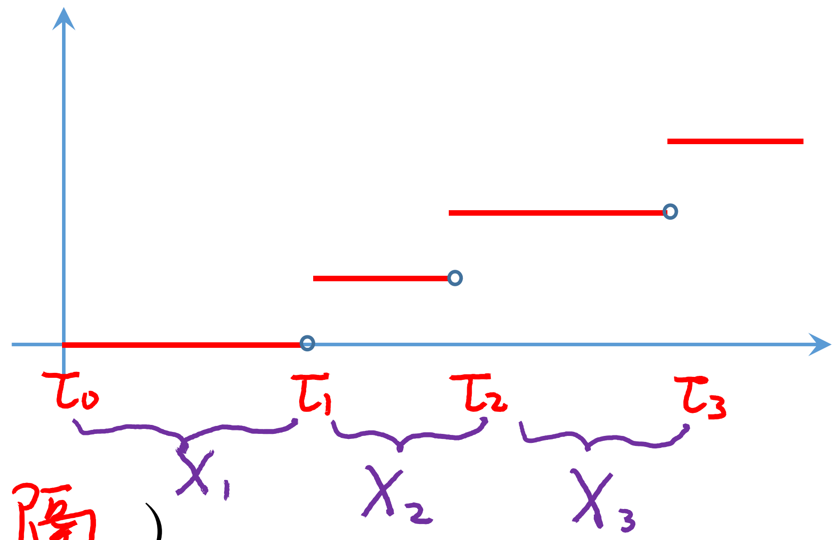
§3.2 到达时间的分布

设 $N_T=\{N(t);\ t\geq 0\}$ 为强度为λ 的泊松过程,

$N(t)$ —— $[0,t]$ 上的订单数

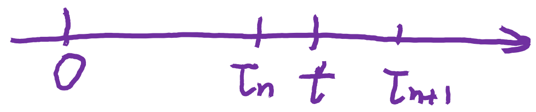


记 $\tau_0=0$

τ_i = "第i个顾客到达时间"

$X_i=\tau_i-\tau_{i-1}$ —— (时间间隔)

$\{\tau_n\leq t\}=\{\ N(t)\geq n\ \}$



$\{\tau_n\leq t<\tau_{n+1}\}=\{\ N(t)=n\ \}$

一 求 τ_n 的分布

$$F_{\tau_n}(t) = P(\tau_n \le t) = P(N(t) \ge n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

$$f_{\tau_n}(t) = F_{\tau_n}(t)' = \lambda \sum_{k=n}^{+\infty} \cancel{k} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} - \lambda \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

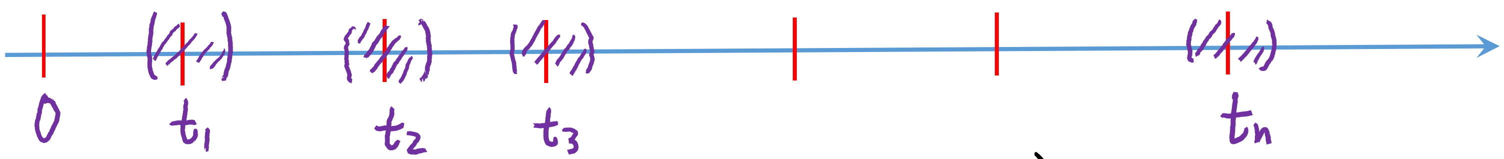
$$= \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, \quad t > 0$$

$$\sim \Gamma(n, \lambda)$$

二 求 $(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)$ 的联合分布 —— 微元法 微元法

取 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ 　　　　取充分小的 $h>0$ 使得

$$t_1-\tfrac{h}{2}<t_1<t_1+\tfrac{h}{2}<\cdots<t_n-\tfrac{h}{2}<t_n<t_n+\tfrac{h}{2}$$



$$P\left(t_1-\tfrac{h}{2}<\tau_1<t_1+\tfrac{h}{2},\ \cdots,t_n-\tfrac{h}{2}<\tau_n<t_n+\tfrac{h}{2}\right)$$

$$=P\left(N(t_1-\tfrac{h}{2})=\underline{0},N(t_1+\tfrac{h}{2})-N(t_1-\tfrac{h}{2})=\underline{1},\ \cdots,N(t_n+\tfrac{h}{2})-N(t_n-\tfrac{h}{2})=\underline{1}\right)$$

$$=\left(\frac{(\lambda h)^1}{1!}e^{\cancel{-\lambda h}}\right)^n e^{-\lambda(t_n+\frac{h}{2}\cancel{-nh})}$$

$$=\lambda^n h^n e^{-\lambda(t_n+\frac{h}{2})}$$

$$\frac{1}{h^n}P\left(t_1-\frac{h}{2}<\tau_1<t_1+\frac{h}{2},\ \cdots,t_n-\frac{h}{2}<\tau_n<t_n+\frac{h}{2}\right)=(\lambda \cancel{h})^n e^{-\lambda(t_n+\frac{h}{2})}$$

怎么求$(\tau_1,\dots,\tau_n)$的联合密度函数呢?

令 $h\to 0$，则

$$f_{(\tau_1,\dots,\tau_n)}(t_1,t_2,\dots,t_n)=\lambda^n e^{-\lambda t_n}\qquad 0<t_1<t_2<\cdots<t_n$$

三 求时间间隔 $(X_1,\dots,X_n)$ 的联合分布

$$f(t_1,t_2,\dots,t_n)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda t_n} & 0<t_1<\dots<t_n,\\ 0 & o.w.\end{cases}$$

$$\begin{cases}X_1=\tau_1\\ X_2=\tau_2-\tau_1\\ \vdots\\ X_n=\tau_n-\tau_{n-1}\end{cases}\qquad \begin{cases}\tau_1=\underline{X_1}\\ \tau_2=\underline{X_1+X_2}\\ \vdots\\ \tau_n=\underline{X_1+X_2}+\dots+X_n\end{cases}$$

$(\tau_1,\cdots,\tau_n)$

$t_1=x_1$

$t_2=x_1+x_2$

$\cdots\cdots$

$t_n=x_1+\cdots+x_n$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots\\ 1 & 1 & 0 & \cdots\\ \cdots & & & \cdots\end{vmatrix}$$

$(X_1,\dots,X_n)$ 的密度函数为

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{cases}\underline{\lambda^n e^{-\lambda(x_1+\cdots+x_n)}} & x_1>0,x_2>0,\dots,x_n>0\\ 0 & o.w.\end{cases}$$

由此可以得到什么结论?

1°: $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布

2°: $X_i\sim Exp(\lambda)$

定理3.3.2 设 $N=\{N(t);\ t\geq 0\}$ 是计数过程，则

N 是泊松过程 $\Longleftrightarrow$ 时间间隔$\{X_n\}$独立同分布，同服从 参数为λ的指数分布 。

四 已知“$N(t)=n$”的条件下，求$(\tau_1,\ldots,\tau_n)$的联合密度函数

$n=1$

- $N(t)=1$ 的情形

$$P(\tau_1 \le s \mid N(t)=1)=\frac{P(\tau_1 \le s, N(t)=1)}{P(N(t)=1)}$$

$$=\frac{P(N(s)=1,\ N(t)-N(s)=0)}{P(N(t)=1)}$$

$$=\frac{\frac{\lambda s}{1!}\cancel{e^{-\lambda s}}\ \cancel{e^{-\lambda(t-s)}}}{\frac{\cancel{\lambda} t)^1}{1!}\cancel{e^{-\lambda t}}}$$

$$=\frac{s}{t},\qquad s\le t$$

说明了什么？

$(\tau_1 \mid N(t)=1) \sim U([0,t])$

❑ $N(t)=n$的情形

复习：若$Y_1,\dots,Y_n$ 为i.i.d.的非负随机变量，密度函数为$f(y)$，则$(Y_{(1)},\dots,Y_{(n)})$的联合密度函数为

$$f(y_1,\dots,y_n)=\begin{cases} n!\,f(y_1)\cdots f(y_n), & 0<y_1<\dots<y_n;\\ 0, & o.w.\end{cases}$$

特别地，当Y_i在$[0,t]$上服从均匀分布时，

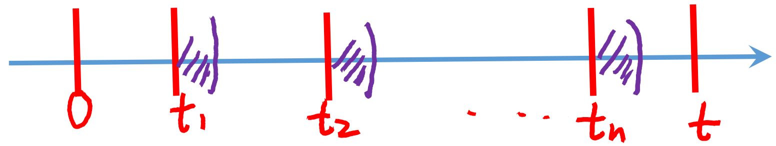
$$\cancel{f(y)}$$

$$f(y_1,\dots,y_n)=\begin{cases} \frac{n!}{t^n} & 0<y_1<\dots<y_n<t\\ 0 & o.w.\end{cases}$$

微元法

已知 $N(t)=n$ 的条件下，求 $\tau_1,\ldots,\tau_n$ 的条件密度函数

$$0<t_1<\cdots<t_n<t \qquad h>0$$



$$P(t_i<\tau_i\le t_i+h,\ i=1,2,\ldots,n \mid N(t)=n)$$

$$=\frac{P\left(N(t_i+h)-N(t_i)=\underline{\ 1\ },i=1,\ldots,n,N(t_{j+1}-h)-N(t_j)=\underline{\ 0\ },j=0,\ldots,n\right)}{P\left(N(t)=n\right)}$$

$$=\frac{(\cancel{\lambda} h\, e^{\cancel{-\lambda h}})^n\, \cancel{e}^{-\lambda(t-\cancel{nh})}}{\frac{(\cancel{\lambda} t)^n}{n!}\,\cancel{e}^{-\lambda t}}=\frac{n!}{t^n}h^n$$

$$P(t_i < \tau_i \le t_i + h,\ i = 1,2,\ldots,n \mid N(t) = n) = \frac{n!}{t^n} h^n,\quad 0 < t_1 < \ldots < t_n < t$$

已知$N(t) = n$的条件下， $\tau_1,\ldots,\tau_n$ 的条件密度函数为

$$f_{(\tau_1,\cdots,\tau_n)}(t_1,\cdots,t_n \mid N(t)=n) = \begin{cases} \dfrac{n!}{t^n} & 0<t_1<\cdots<t_n<t \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

说明了什么？

$(\tau_1,\cdots,\tau_n \mid \underline{N(t)=n})$ 分布与 [0,t] 上的均匀分布

n个独立

的顺序统计量 同分布

案例 考察某公交车站候车，乘客到达流为强度为λ的泊松过程(单位：分钟)，公交车每10分钟将候车的乘客全部送走，求乘客的平均（总）候车时间。

解： $X(10)$——“乘客等候的总时间”

$N(10)$——“10分钟到达车站的乘客数”

解：$N(t)$ —— $[0,t]$到达的乘客数

τ_i —— 第i个乘客到达时间

$0 \quad \tau_1 \quad \tau_2 \quad \cdots \quad 10$

X —— 总候车时间

$$X = \sum_{i=1}^{N(10)} (10-\tau_i)$$

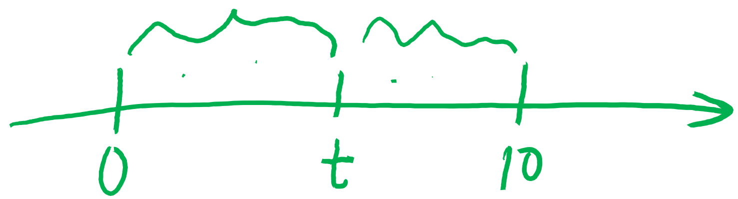
$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{N(10)} (10-\tau_i)\right) = 10\,E(\overset{10\lambda}{N(10)}) - E\left(E\left(\sum_{i=1}^{N(10)} \tau_i \,\Big|\, N(10)\right)\right)$$

$$10\times 10\lambda - 5E(N(10)) = 50\lambda$$

$$\|$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} \tau_i \,\Big|\, N(10)=n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_{(i)}\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = 5n$$

思考 考察某公交车站高峰期的候车情况，高峰期乘客到达流为强度为2λ的泊松过程(单位：分钟)，考虑在10分钟之间加开一班车。为使乘客的平均（总）候车时间最短，怎么安排加开的这一班车?



作业

3.3，3.4，3.15，3.17

补充题：某设备由A、B两个部分构成，可能发生3类故障，对任意$\boldsymbol{t}$，$[\mathbf{0},\boldsymbol{t}]$发生第$\boldsymbol{i}$类故障（$\boldsymbol{i}=\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}$）的次数流是强度为$\boldsymbol{\lambda_i}$的泊松过程，且相互独立。在第1类故障时，A不正常；在第2类故障时，B不正常；在第3类故障时，A、B都不正常。设A、B的寿命分别为$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$. 证明：

$$\boldsymbol{P(\xi>t,\eta>s)=\exp(-\lambda_1 t-\lambda_2 s-\lambda_3\, t\vee s)}.$$

探究题

设某公交站有A、B、C三路公交车，到达强度分别为$\boldsymbol{\lambda_A}, \boldsymbol{\lambda_B}, \boldsymbol{\lambda_C}$, 设“在$\boldsymbol{t_0}$时刻A路车到站”，探究“下一辆是B路车”的概率：

（1）对任意$\varepsilon > 0$, 求“A路车在$[t_0, t_0 + \varepsilon]$到达，B、C不在这个时间段到达”的概率；

（2）在“A路车在$[t_0, t_0 + \varepsilon]$到达，B、C不在这个时间段到达”的条件下，求“该站的下一辆公交车在$t_0 + s$之后到达，且是B路车”的条件概率（$s \geq 0$）；

（3）在（2）中令$\varepsilon \to 0$, 取$s = 0$，会得到什么结论?