X_n — 系统第n次的状态

第4章 马尔可夫过程

Markov 1906

§4.1 马尔可夫链

$$X_T = \{X_n, n = 0,1,2,\ldots\}$$

状态空间 $S = \{1,2,3,\ldots\}$

一 定义与例

定义 如果随机过程 $\{X_n;\ n = 0,1,2,\ldots\}$ 对任意 $i_0, i_1, \ldots, i_n, i_{n+1} \in S$

满足 $P(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) > 0$，都有

$$P\left\{X_{n+1} = i_{n+1} \middle| X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n\right\} = P\{X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n\}$$

则称其为马尔可夫链。

无后效性　马氏性

如果 $\{X_n\}$ 为马氏链，则称

$$p_{ij}(n)=\mathrm{P}\Big(X(n+1)=j\Big|X(n)=i\Big)$$ ——n时刻的一步转移概率

❑ 若 $p_{ij}(n)=p_{ij},\ \forall i,j$，则称 $\{X_n\}$ 为（时齐的马氏链）

❑ 矩阵 $\mathbb{P}=(p_{ij})$ —— 一步转移概率矩阵

案例 设某网上商店的销售业绩为一个时齐马氏链，近2年的数据如下

0 0 1 2 1 1 2 1 2 1 0 1 1 2 1 1 0 2 1 2 0 1 2 1

试写出其转移概率矩阵。

0 —— 不好

1 —— 一般

2 —— 好

$$
P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 2/11 & 3/11 & 6/11 \\ & & \end{pmatrix}
\end{array}
$$

股票

2 —— 大涨

1 —— 小涨

0 —— 不动

-1 —— 小跌

-2 —— 大

$$P = \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

例 设 $\{\xi_n\}$ 为i.i.d.的随机变量序列，且 ξ_n 的分布列为

ξ_n	0	1	2	$\cdots$
P	p_0	p_1	p_2	$\cdots$

令 $X_0 = 0, X_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$

$X_{n+1} = X_n + \xi_{n+1}$

则 $\{X_n\}$ 为马氏链，并求其一步转移概率矩阵

证明：$P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = 0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n)$

$= P(i_n + \xi_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = 0, \cdots\cdots, \underbrace{X_n = i_n}_{\xi_1 + \cdots + \xi_n})$

$= P(\xi_{n+1} = i_{n+1} - i_n)$ 与 $i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}$ 无关

$\therefore \{X_n\}$ 为马氏链

2) $P = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \cdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 & \cdots \\ 0 & 0 & & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$

由此你可以得出什么结论？

结论：设过程 $\{X_n\}$ 满足：

（1） $X_n = f(X_{n-1}, \xi_n),\ n = 1,2,\ldots$

（2）设 $\{\xi_n\}$ 为i.i.d.的随机变量，且 X_0与$\{\xi_n\}$ 相互独立

则 $\{X_n\}$为齐次Markov链，且

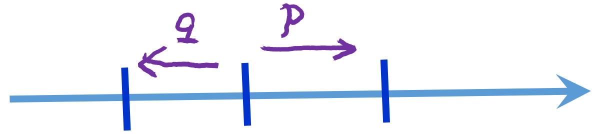
$$p_{ij} = \mathrm{P}\big(f(i, \xi_1) = j\big)$$

证明：作业

例 直线上的随机游动

X_n =“n时刻质点的位置”

则$\{X_n\}$为马氏链，并求其转移概率矩阵



赌博模型

X_n — n次一共赢的钱数

$X_0 = 0$

$$\xi_n = \begin{cases} 1 & \text{往右一格} \\ -1 & \text{往左一格} \end{cases}$$

$X_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$

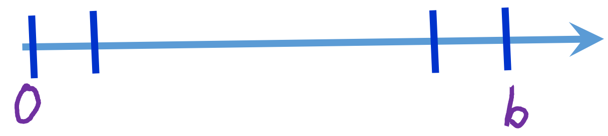
$\Rightarrow \{X_n\}$为马氏链

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ \vdots \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \cdots \; -2 \; -1 \;\; 0 \;\;\; 1 \;\;\; 2 \; \cdots \\ \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & p & 0 \\ & q & 0 & p & \\ 0 & & q & 0 & p \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

例（续）带吸收壁的随机游动

$$p_{00} = 1$$

$$p_{bb} = 1$$



$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ b \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ q & 0 & p & & & 0 \\ 0 & q & 0 & p & & 0 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

案例 Google搜索引擎的Page算法（Larry Page and Sergey Brin,1998）

设互联网中的总网页数为N，有一些固定的连接（链接），记为G_{ij}：如果网页i与j之间存在固定连接，则$G_{ij}=1$；否则，$G_{ij}=0$. 两个网页之间也可以是随机连接。假设两个网页之间以概率 ρ使用 固定链接，以概率$1-\rho$使用随机连接。则网页i到网页j的转移概率为：

$$p_{ij}=\rho\frac{G_{ij}}{\sum_k G_{ik}}+(1-\rho)\frac{1}{N}$$

我们关心的问题是“网络正常平稳运转时，网页i的‘占位概率’是多少？”我们可以根据“占位概率”的大小对网页的重要性进行排序

二 转移概率矩阵

X_n ——第 n 天的（　　　　）

设 $\{X_n\}$ 为马氏链　　$\mathbb{P} = (p_{ij})$　　$p_{ij} = \mathrm{P}\left(X_{n+1} = j \,\middle|\, X_n = i\right)$

易知　（1）p_{ij} ___ 0

（2）$\sum_{j \in S} p_{ij} =$ ___

记　$\pi_i(n) = \mathrm{P}\left(X_n = i\right)$,　　$\pi(n) = \left(\pi_0(n), \pi_1(n), \ldots\right)$

$\pi(0)$ ——

❑ 由初始分布$\boldsymbol{\pi}(0)$与 $\mathbb{P}$，求$(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ 的联合分布

❑ 由初始分布$\boldsymbol{\pi}(0)$与 $\mathbb{P}$，求 $\boldsymbol{X}_n$ 的分布 $\boldsymbol{\pi}(n)=\left(\pi_0(n),\pi_1(n),\ldots\right)$

❑ m步转移概率矩阵 $\mathbb{P}^{(m)} = \left(p_{ij}^{(m)}\right)$

$$p_{ij}^{(m)} = \mathrm{P}\left(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \middle| X_n = i\right)$$

问题：$\mathbb{P}^{(m)}$与$\mathbb{P}^{m}$的关系？

C-K方程 Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}^{(m+n)} =$$

用矩阵的语言：

由此可得到什么结论?

$$\mathbb{P}^{(m)} = \left(p_{ij}^{(m)}\right)$$

例 设马氏链$\{X_n\}$， $S=\{1,2,3\}$，一步转移概率矩阵 $X_0=3$

$$\mathbb{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

1） 求 X_2的分布;

2） 求 $E\left(X_3 \middle| X_2\right)$ 的分布

作业

4.3，4.5，4.7(1)(2)

补充题　设$\{\xi_n: n=0,1,2\ldots\}$独立同分布，$\xi_n \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

$S_0=0,\ S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$，　$n\geq 1$，　$M_n=\max_{k=0,\ldots,n}S_k$.

证明$\{M_n-S_n\text{: } n=0,1,2,\ldots\}$为马氏链。

提示：将$M_{n+1}-S_{n+1}$表示成M_n-S_n与ξ_{n+1}的函数，需要分情况讨论

三　状态的分类

X_n ——第n天股价的状态

（一）首达时与首达概率

$i \to j$ (i 可达 j)　　　if

$i \leftrightarrow j$ (i 与 j 互通)　　　if

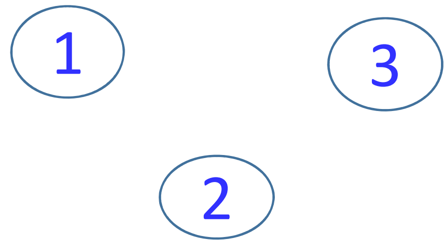
易知　　$i \to j, j \to k$ ，则____________________　（______性）

$i \leftrightarrow j, j \leftrightarrow k$ ，则____________________　。

❑ 首达时——　　$T_{ij} = \inf\{n : n \geq 1, X_0 = i, X_n = j\}$

T_{ii}

例5 $$\mathbb{P}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$



我们考查 T_{13}

$$1\to 2\to 3 \qquad T_{13}=\_\_\_\_$$

$$1\to 2\to 1\to 2\to 3 \qquad T_{13}=\_\_\_\_$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

说明 T_{ij} 是一个随机变量

怎么求 T_{ij} 的分布呢?

- 首达概率——

$$f_{ij}^{(n)} = \mathrm{P}\left\{T_{ij} = n \middle| X_0 = i\right\}$$

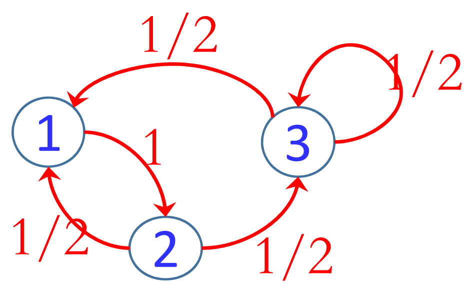
$$= \mathrm{P}\left\{ \qquad\qquad\qquad\qquad \middle| X_0 = i\right\}$$

$$f_{ij} := \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = \mathrm{P}\left(\qquad\qquad \middle| X_0 = i\right)$$

$$1 - f_{ij} = \mathrm{P}\left(\qquad\qquad \middle| X_0 = i\right)$$

例5（续）求 f_{13}

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



（二）状态的分类

$f_{ij} \leftarrow$

$f_{ii} \leftarrow$

$f_{ii} = 1$ ——（ ）

$f_{ii} < 1$ ——（ ）

❑ 若 $f_{ii} = 1$，则 T_{ii} 的分布列为

T_{ii}	1	2	$\cdots$	n	$\cdots$
P					

$$\mu_i := ET_{ii} = \sum_{n=1}^{+\infty} n f_{ii}^{(n)} \leftarrow \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$\mu_i < \infty$ ——________________；

$\mu_i = \infty$ ——________________。

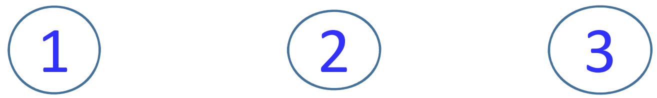
- 状态i的周期 $=\{n \geq 0;\ p_{ii}^{(n)} > 0\}$ 的最大公约数

$d(i)$

$$\begin{cases} d(i) = 1 & \text{——} \\ d(i) > 1 & \text{——} \end{cases}$$

遍历态——

例6 $$\mathbb{P}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{2} & \mathbf{0} & \frac{1}{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$



试判断状态“1”的属性

作业

设一个齐次马氏链的转移概率矩阵为

$$\mathbb{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

哪些状态为常返态？哪些状态为非常返态？哪些为正常返态？

四 正常返、零常返和非常返的判别

（一）考查 $p_{ij}^{(n)}$ 与 $f_{ij}^{(n)}$ 的关系

$p_{ij}^{(n)}$ ___ $f_{ij}^{(n)}$

定理 $\forall i, j \in S, n \geq 1$，有

$$p_{ij}^{(n)} =$$

$$f_{ij}^{(n)} =$$

$i \to j \;\Leftrightarrow$

$i \leftrightarrow j \;\Leftrightarrow$

（二）常返、非常返的判断

$$p_{ij}^{(n)}=\sum_{l=1}^{n}f_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(n-l)},\ n=1,2,\ldots$$

定理4.2.18　1）i为常返$\Leftrightarrow$

2）i为非常返$\Leftrightarrow$

解释： i为常返$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$

$$p_{ii}^{(n)} = \mathrm{P}(X_n = i \mid X_0 = i) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} =$$

i为常返$\Leftrightarrow$

i为非常返$\Leftrightarrow$

推论1 若j为非常返，则 $\forall i$ $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$ ______

$p_{ij}^{(n)}$ ______

推论2 若j为常返，

若 $i \to j$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$ __________

若 $i \not\to j$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} =$ ____

（三）零常返与正常返的判别

定理（弱遍历定理）若 j 为常返态，则对$\forall i\in S$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}p_{ij}^{(k)}=\frac{f_{ij}}{\mu_j}$$

定理 设i为常返态，周期$d(i)=d$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ii}^{(nd)}=\dfrac{d}{\mu_i}$

证明：

定理4.2.19 设 i 为常返态，则 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i}$

1） i 为零常返 $\Leftrightarrow$

2） i 为周期为d的正常返 $\Leftrightarrow$

i 为遍历 $\Leftrightarrow$

- ❑ i 为非常返态$\Leftrightarrow$ （ ）
- ❑ i 为零常返态$\Leftrightarrow$ （ ）
- ❑ i 为正常返态$\Leftrightarrow$ （ ）

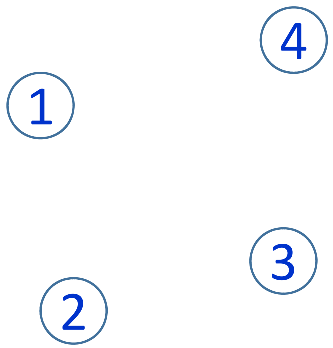
（四）“$\leftrightarrow$”与状态的属性

- $\leftrightarrow$的性质 $\begin{cases} i \leftrightarrow i \\ i \leftrightarrow j \Rightarrow \\ i \leftrightarrow j, j \leftrightarrow i \Rightarrow \end{cases}$

- 可利用“$\leftrightarrow$”将状态空间分类
- 不可约链——

例 $S = \{1,2,3,4\}$

试将状态空间分解。$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



定理 若$i \leftrightarrow j$，则

1. i与j同为________或者同为________；若同为常返态，则它们同为或者同为______________；

2. i与j具有相同的________（或者同为_________的）

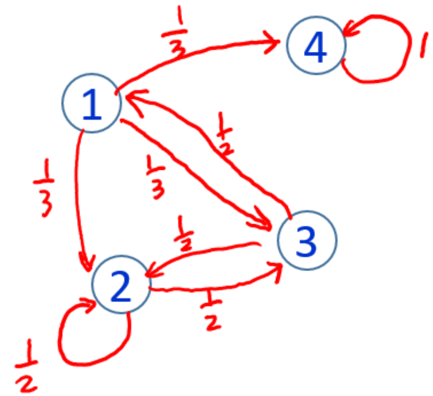
定理 若$i \leftrightarrow j$，则

1. i与j同为常返态或者同为非常返态；若同为常返态，则它们同为正常返或者同为零常返；
2. i与j具有相同的周期（或者同为非周期的）

例 设一个马氏链的转移概率矩阵为

试将判断各状态的属性。

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



例 设马氏链的状态空间 $S=\{1,2,3,\ldots\}$

试判断各状态的属性

$$p_{11}=q,\ p_{i,i+1}=p,$$

$$p_{i,1}=q$$

$$p+q=1$$

1 2 3

作业：4.8，4.11

补充题 设一个马氏链的转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

哪些状态为非常返态？哪些状态为正常返态？并求出正常返态的周期与平均返回时间。

（五）状态空间的分解

- 闭集 $\boldsymbol{C}$ ($\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{S}$): $\forall \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{C}$, $\forall \boldsymbol{j} \notin \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{p_{ij}} =($　　　　$)$

问题：一步出不去，两步能出去吗?

你能得到什么结论?

引理 设i为常返态，若$i \to j$，则j必为常返态。

由此可以得到什么结论?

定理 所有常返态构成闭集，记为$\boldsymbol{C}$

$\boldsymbol{T}$——所有非常返态组成的集合

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{T}\bigcup\boldsymbol{C}$$

推论 不可约马氏链，____________________，________________________。

定理 若$C \neq \emptyset$，则 C又可以分解为若干个互不相交的闭集

$$C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots$$

1）C_h 中的任意两个状态 ________；

2） $C_h \cap C_l =$ ___， $h \neq l$

$C_1, C_2, \ldots$ 被称为__________.

例 设一个马氏链的转移概率矩阵为

如何分解?

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

结论

- ❑ 有限齐次马氏链，不管系统从什么状态出发，迟早要进入某个________中；

思考：有限齐次马氏链有没有零常返?

- ❑ 有限齐次马氏链_____ 零常返态。

证明：

为了计算方便，常把状态重新排列

$$S = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup T$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ & \cdots & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \cdots & \_\_ \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \_\_ & \_\_ & \cdots & \_\_ \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \left(\begin{array}{cc|ccc|c} \_\_ & \_\_ & & & & \\ \_\_ & \_\_ & & & & \\ \hline & & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \\ & & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \\ & & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \\ \hline \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{array}\right)$$

五 极限分布与平稳分布

（一） $\mathbf{P}^n$ 的极限性质

i为非常返态或零常返态，则 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} =$ ______

i为遍历态，则 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} =$ ______

i为周期d的正常返态，则 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} =$ ______

考查 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} =$ ______

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} \times \_\_\_\_$$

$$=$$

❑ j为非常返态或零常返态，则 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} =$ ______

问题: 若 j为周期d的正常返态，则 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} =$ ______

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \_\_\_\_\_\_$$

定理 若j为周期d的正常返态，则 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)} = \_\_\_\_\_$

- 若j为遍历态，则$\forall i \in S, \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} =(______)$

- 对于不可约遍历链，则$\forall i \in S, \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} =(______)$

问题：如何求$\mu_j =??$

定理 若马氏链是不可约的遍历链，则$\left\{\pi_j = \frac{1}{\mu_j}\right\}$是方程组

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}$$

满足 $\pi_j \geq 0$, $\sum_{j \in S} \pi_j = 1$ 的唯一解。

证明 $p_{ij}^{(n)} =$

（二）平稳分布

☆平稳分布——

$$\pi = \pi\mathbb{P} = (\quad)\mathbb{P} = \ldots = \underline{\qquad}$$

- ❑ 以平稳分布为初始分布，则$\{X_n\}$为（严）平稳过程

> **定理** 若马氏链是不可约的遍历链，则$\left\{\pi_j = \frac{1}{\mu_j}\right\}$是方程组
>
> $$\pi_j = \sum_{i\in S} \pi_i p_{ij}$$
>
> 满足 $\pi_j = \sum_{i\in S} \pi_i p_{ij}$ 的唯一解。

- ❑ 不可约遍历链有唯一的平稳分布，且平稳分布和极限分布相同。

定理 若 $\{X_n\}$ 为马氏链，$S = C_1^+ \cup C_2^+ \cup \ldots \cup C_h^+ \cup T$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbb{P}_h & \\ \mathbb{R}_1 & \cdots & \mathbb{R}_h & \mathbb{Q}_T \end{pmatrix}$$

则 $\{X_n\}$ 的平稳分布为

$$\pi = \lambda_1 \pi^{(1)} + \cdots + \lambda_h \pi^{(h)}$$

$$(\lambda_i \geq 0,\ \sum_i \lambda_i = 1)$$

其中 $\pi^{(i)}$ 为集中在 C_i^+ 上的唯一的平稳过程。

例1 $S=\{1,2,3,4,5\}=\{1,2\}\cup\{3,4\}\cup\{5\}$

求平稳分布。

$$\mathbb{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

（三）极限分布

问题：若初始分布为任意分布 $\pi(0)$ ，问 $\lim\limits_{n\to\infty}\pi(n)$ 是否存在?

极限分布——　$\pi^{*}=\lim\limits_{n\to\infty}\pi(n)$

对于有限齐次马氏链，　$$\pi(n)=\pi(0)\mathbb{P}^{n}$$

$$=$$

结论：　有限齐次马氏链，若从某个初始分布出发的极限分布存在，则______________________________。

例1（续） $S=\{1,2,3,4,5\}=\{1,2\}\cup\{3,4\}\cup\{5\}$

$$\mathbb{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}^n$。

思考 $S=\{1,2,3,4,5\}=\{1,2\}\cup\{3,4\}\cup\{5\}$

$$\pi(0)=(0,0.4,0.1,0.3,0.2)$$

$$\mathbb{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

如何求相应的极限分布呢?

作业:

1）设一马氏链的转移概率矩阵为

$$\mathbb{P}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

求从状态“4”出发的极限分布: $\lim\limits_{n\to\infty} p_{4j}^{(n)}$

2）设一个马氏链的转移概率矩阵为

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

对给定的初始分布 $\pi(0) = (0, 0.5, 0.1, 0.2, 0.2)$，求其极限分布。