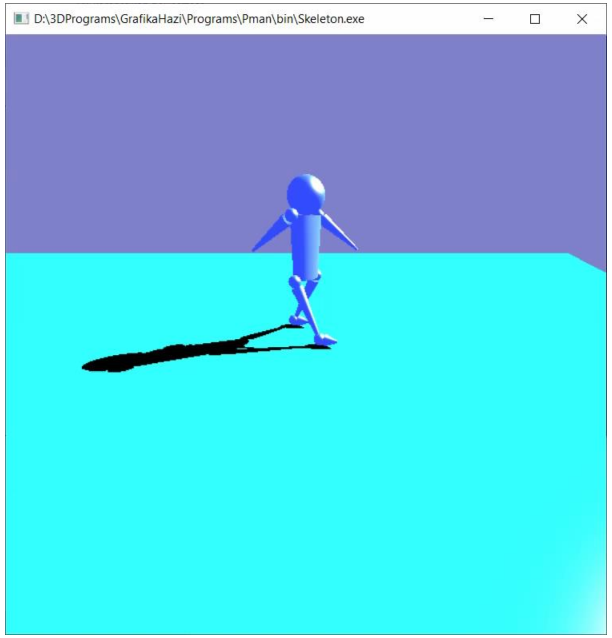
”τὰ πάντα ῥεῖ καὶ οὐδὲν μένει.”
Ἡράκλειτος

Affin transzformációk

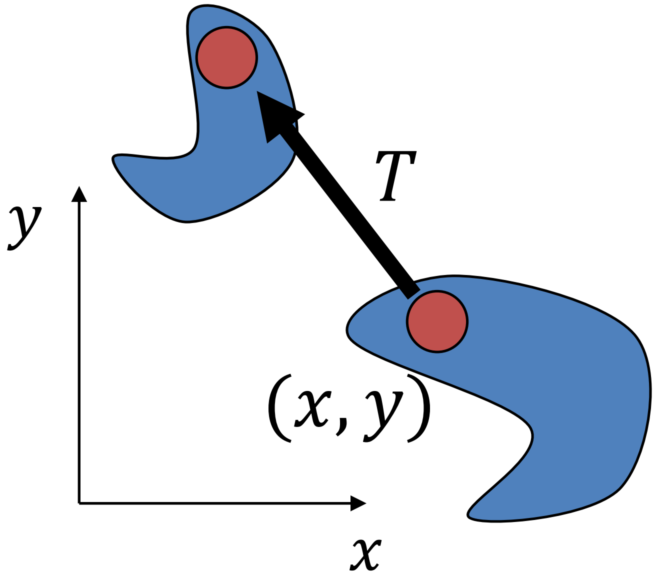
Szirmay-Kalos László



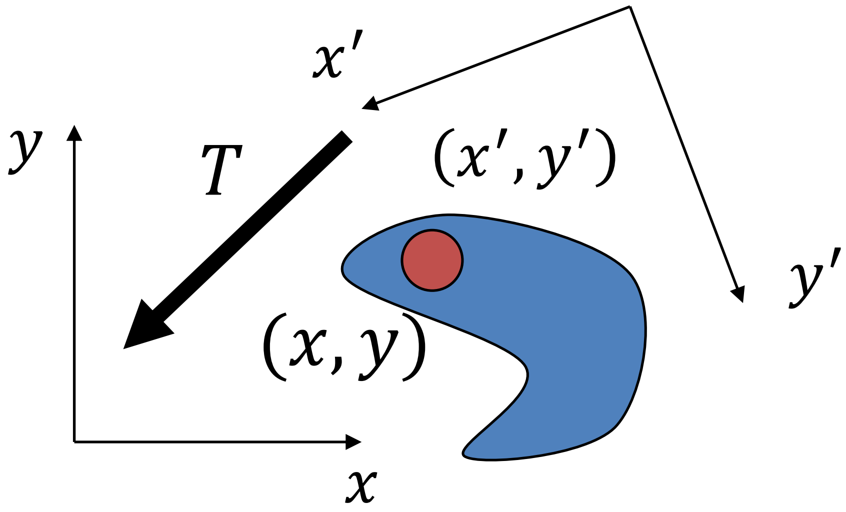
Transzformációk (Euklideszi geometria, Descartes koordináták)

<u>Ponthoz pontot (koordinátákhoz koordinátákat) rendel</u>

$$(x', y') = T(x, y)$$

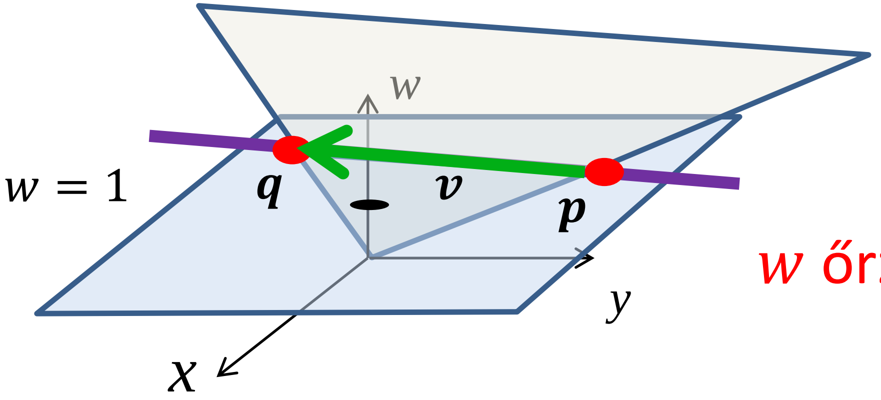


$$(x', y') = T(x, y)$$



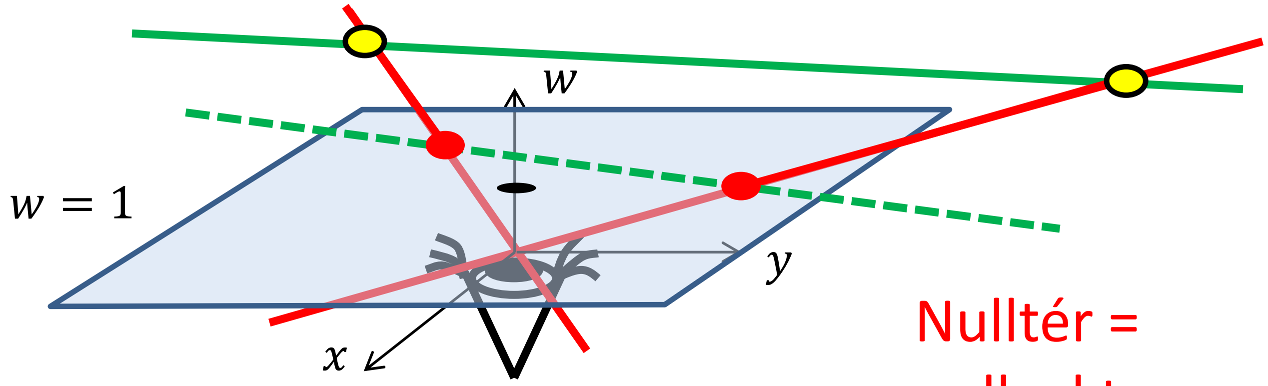
Tönkre tehetik reprezentációt és az egyenletet!
Legalább az egyenes (sík) maradjon meg.

Külső nézet: pontot pontba, egyenest egyenesbe



w őrzés

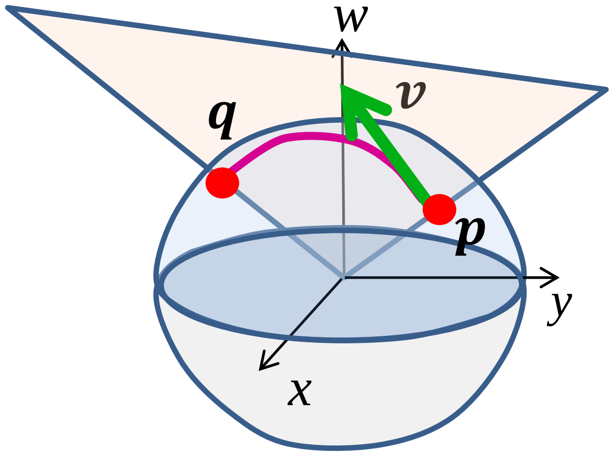
Euklideszi: $w = 1$



Nulltér = nullvektor

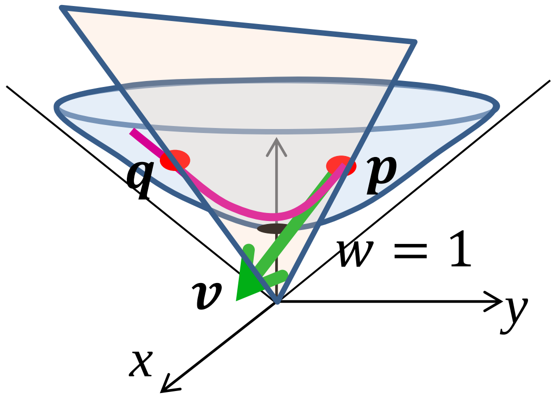
Projektív: origón kívüli

<u>Altér altérbe:</u>
Lineáris transzformáció
Mátrixszorzás



Skaláris szorzat őrzés

Elliptikus: $x^2 + y^2 + w^2 = 1$



Skaláris (Lorentz) szorzat őrzés

Hiperbolikus: $x^2 + y^2 - w^2 = -1$

Szeretjük a mátrixokat, mert szorzásuk asszociatív

- Transzformációk konkatenációja: Asszociatív

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}_n \cdot \cdots \left(\boldsymbol{T}_2 \cdot \left(\boldsymbol{T}_1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \right) \right) = (\boldsymbol{T}_n \cdot \cdots\ \boldsymbol{T}_2 \cdot \boldsymbol{T}_1) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \boldsymbol{T} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

- Invertálható transzformációk <u>csoportot</u> alkotnak

mat4 osztály: GLM

```
struct mat4 { // col-major matrix 4x4
   vec4 cols[4];
   mat4(vec4& it, vec4& jt, vec4& kt, vec4& ot) {
       cols[0] = it; cols[1] = jt; cols[2] = kt; cols[3] = ot;
   }
   vec4& operator[](int i) { return cols[i]; }
};

inline vec4 operator*(mat4& m, vec4& v) {
   return m[0] * v.x + m[1] * v.y + m[2] * v.z + m[3] * v.w;
}

inline mat4 operator*(mat4& ml, mat4& mr) {
   mat4 res;
   for (int i = 0; i < 4; i++) res[i] = ml * mr.cols[i];
   return res;
}

void GPUProgram::setUniform(const mat4& mat, char * name) {
   int location = getLocation(name);
   if (location >= 0) glUniformMatrix4fv(location, 1, GL_FALSE, (float *)mat);
}
```

Affin transzformációk: Euklideszi geometria egyenes (és párhuzamosság) tartó transzformációi

$$\boxed{\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}'_x & \mathbf{j}'_x & \mathbf{o}'_x \\ \mathbf{i}'_y & \mathbf{j}'_y & \mathbf{o}'_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}}$$

w őrzés

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= ax + by + c \\ y' &= dx + ey + f \end{aligned}}$$

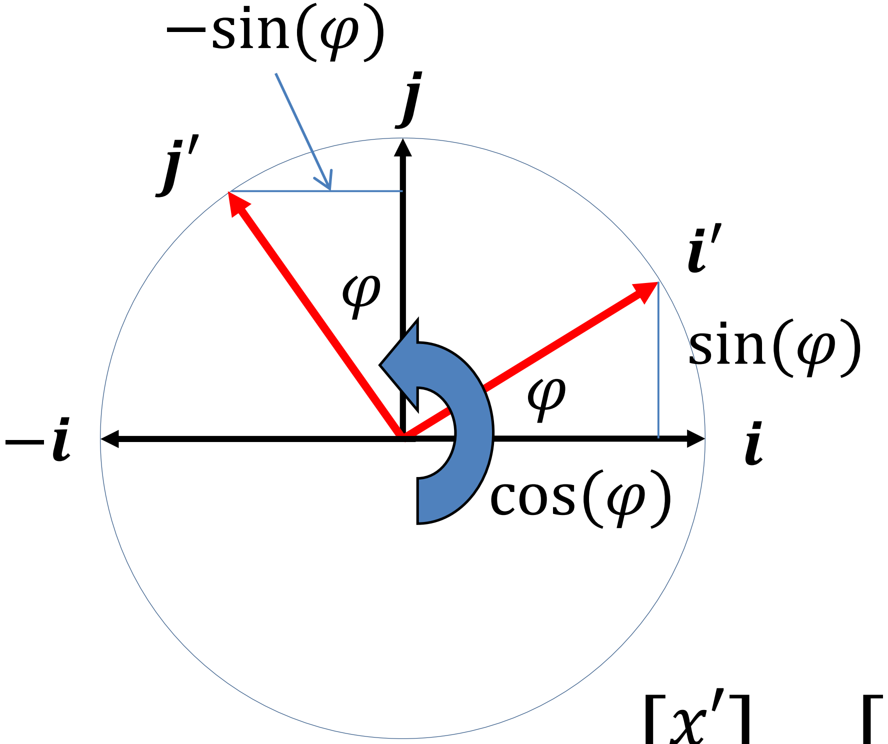
Példák:

- Eltolás, elforgatás, tükrözés = egybevágóság
- Nagyítás/kicsinyítés = hasonlóság (szögtartás)
- Irányfüggő nyújtás , nyírás , …

2D forgatás

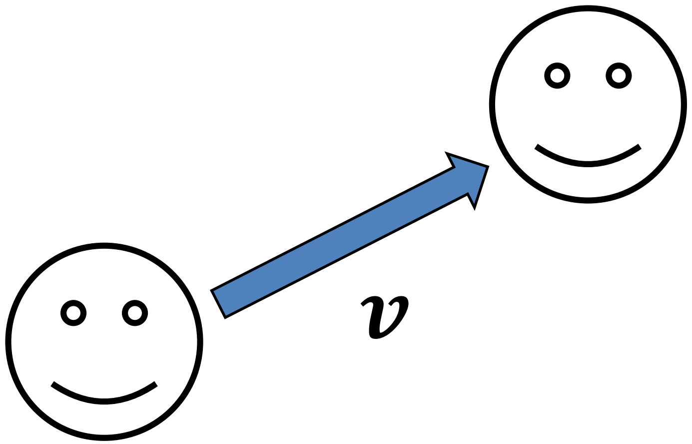
z tengely körüli 3D forgatás

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



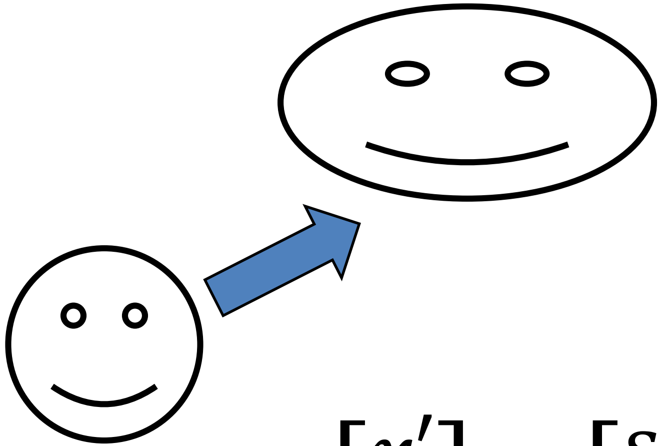
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

3D eltolás



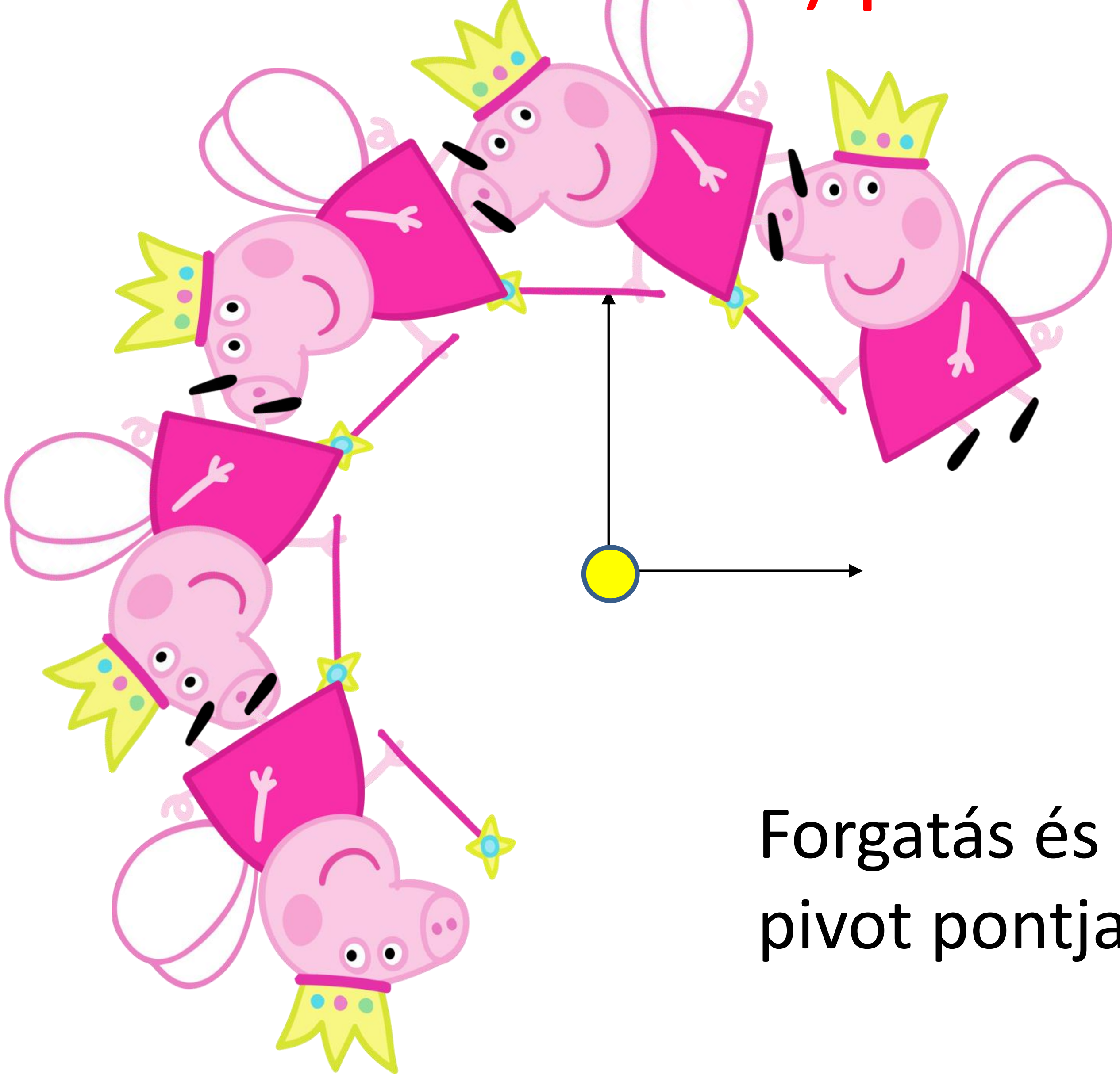
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v_x \\ 0 & 1 & 0 & v_y \\ 0 & 0 & 1 & v_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

3D skálázás



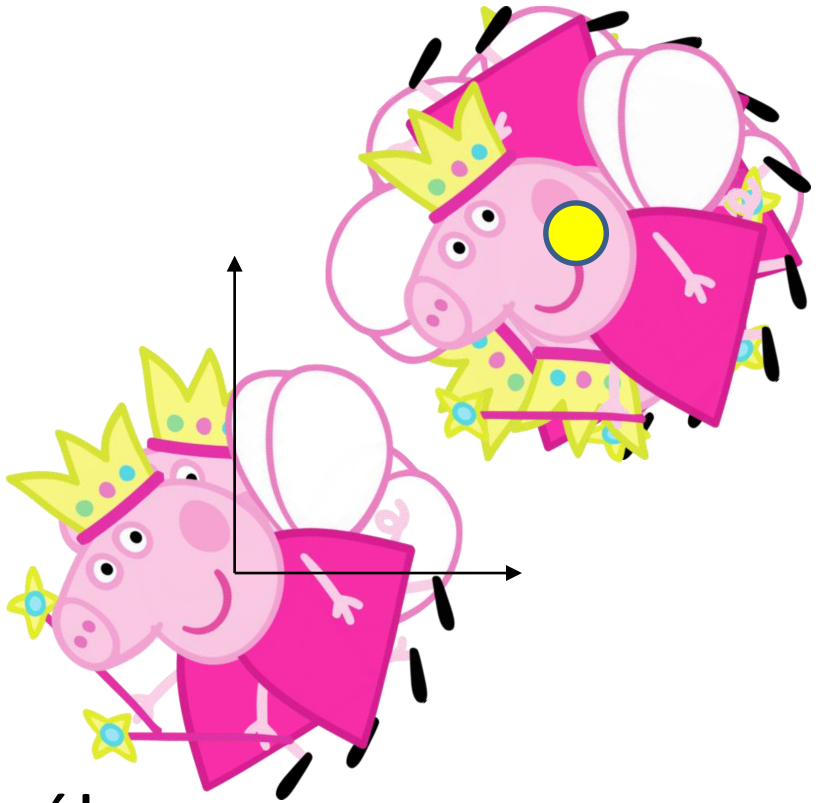
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pivot (fix) pont



Forgatás és skálázás
pivot pontja az origó

Pivot (fix) pont



1. Pivot az origóba
2. Forgatás vagy skálázás az origó körül
3. Origó vissza

mat4 „konstruktorok”

```
inline mat4 translate(vec3 t) {
      return mat4(vec4(1,   0,   0,   0),
                  vec4(0,   1,   0,   0),
                  vec4(0,   0,   1,   0),
                  vec4(t.x, t.y, t.y, 1));
}

inline mat4 scale(vec3 s) {
      return mat4(vec4(s.x, 0,   0,   0),
                  vec4(0,   s.y, 0,   0),
                  vec4(0,   0,   s.z, 0),
                  vec4(0,   0,   0,   1));
}

inline mat4 rotateXY(float fi) {
      return mat4(vec4( cos(fi), sin(fi), 0,  0),
                  vec4(-sin(fi), cos(fi), 0,  0),
                  vec4(0,        0,       1,  0),
                  vec4(0,        0,       0,  1));
}
```

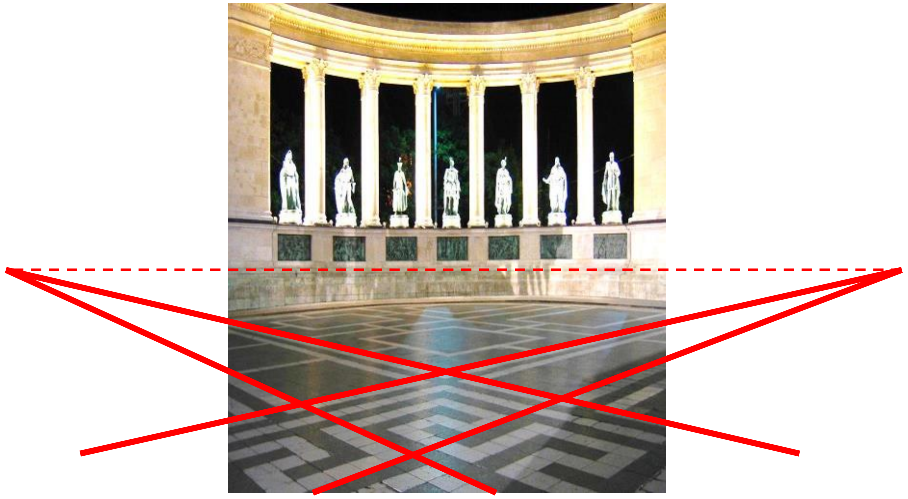
”μὴ εἶναι βασιλικὴν ἀτραπὸν ἐπὶ γεωμετρίαν”

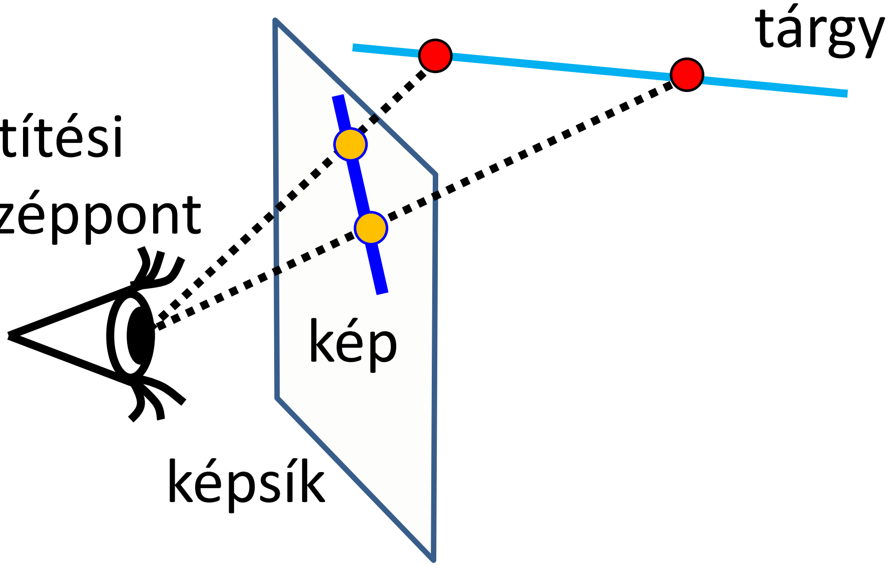
Εὐκλείδης

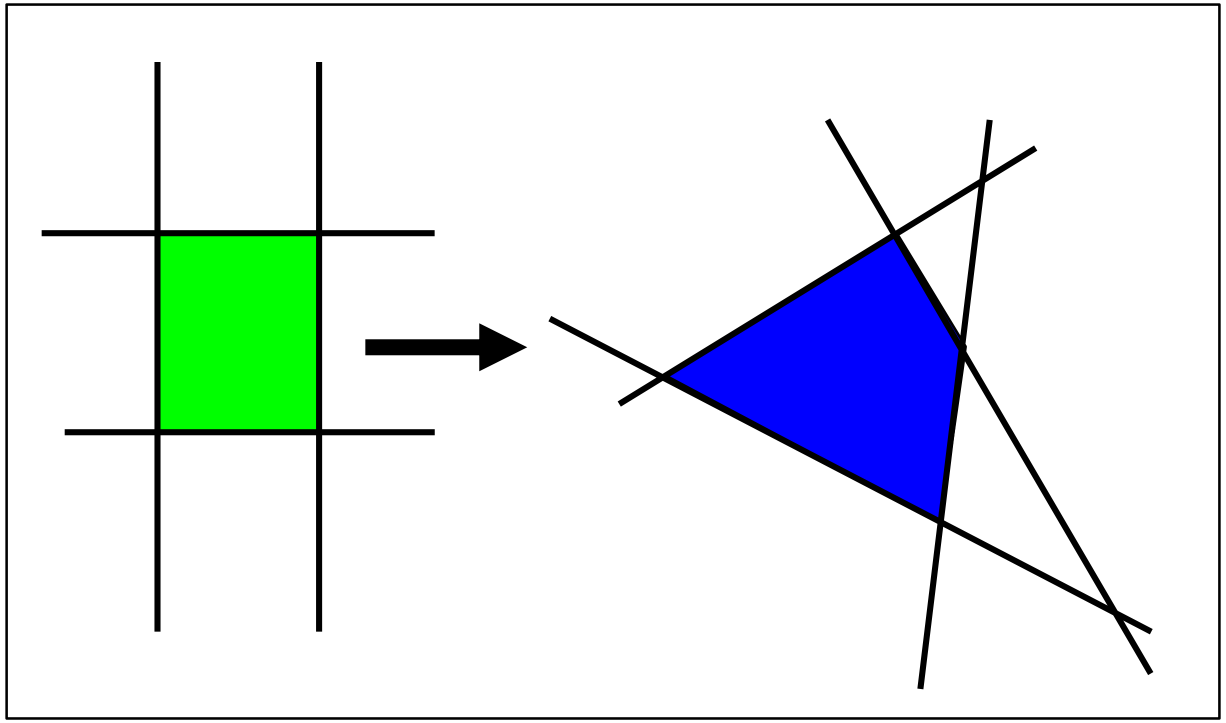
Homogén lineáris transzformációk

Szirmay-Kalos László

Perspektíva







<u>Perspektíva</u>

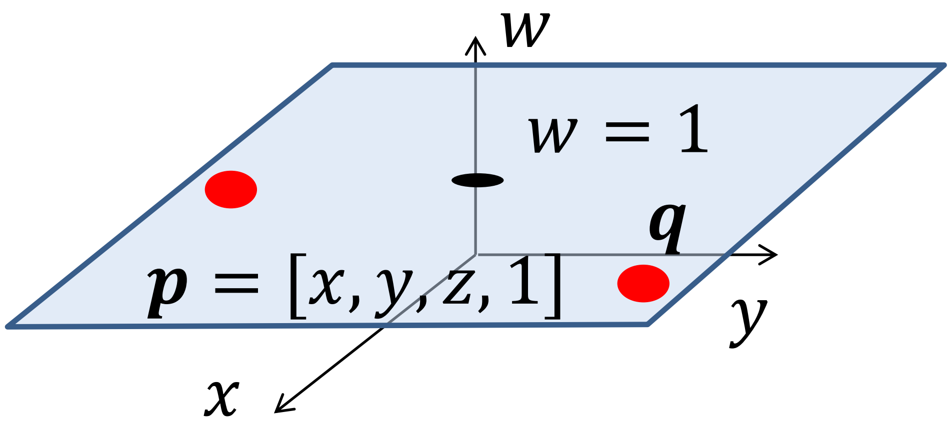
Egyenesből egyenest
Nem párhuzamostartó

<u>Euklideszi geometria lyukas</u>

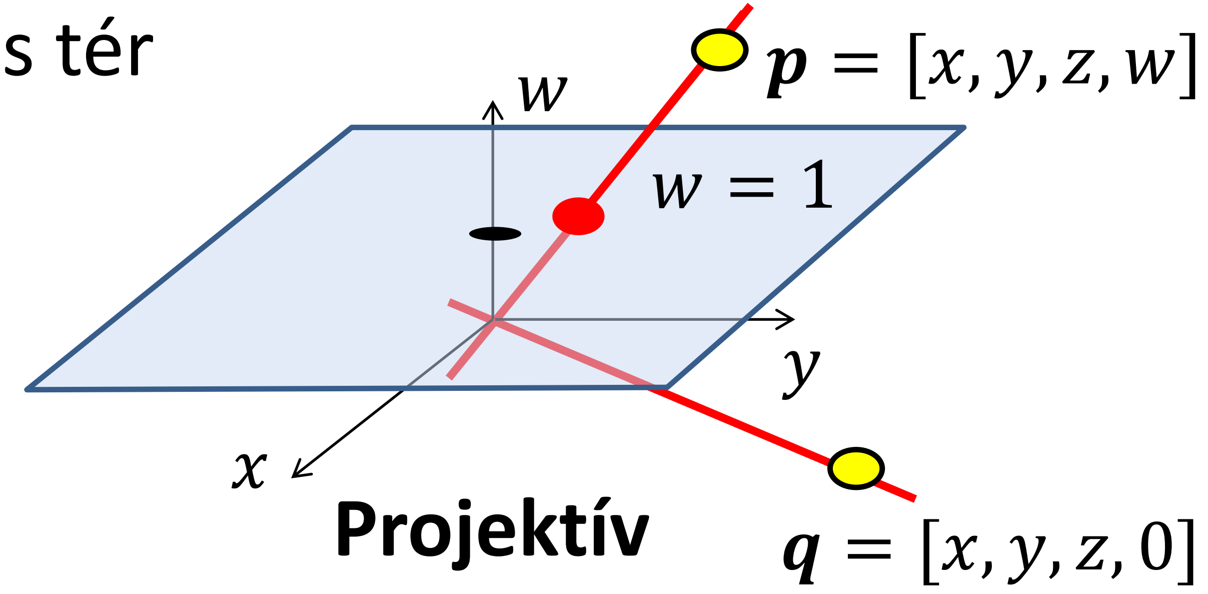
Végtelen távoli pontok is kellenek
Projektív geometria

Analitikus geometriák: külső nézet

Ambiens tér



Euklideszi: $w = 1$



Projektív

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i'}_x & \boldsymbol{j'}_x & \boldsymbol{k'}_x & \boldsymbol{o'}_x \\ \boldsymbol{i'}_y & \boldsymbol{j'}_y & \boldsymbol{k'}_y & \boldsymbol{o'}_y \\ \boldsymbol{i'}_z & \boldsymbol{j'}_z & \boldsymbol{k'}_z & \boldsymbol{o'}_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_1 & \boldsymbol{m}_5 & \boldsymbol{m}_9 & \boldsymbol{m}_{13} \\ \boldsymbol{m}_2 & \boldsymbol{m}_6 & \boldsymbol{m}_{10} & \boldsymbol{m}_{14} \\ \boldsymbol{m}_3 & \boldsymbol{m}_7 & \boldsymbol{m}_{11} & \boldsymbol{m}_{15} \\ \boldsymbol{m}_4 & \boldsymbol{m}_8 & \boldsymbol{m}_{12} & \boldsymbol{m}_{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Affin transzformáció

Homogén lineáris transzformáció

Homogén lineáris transzformációk tulajdonságai

- Egyenest egyenesbe, szakaszt szakaszba, síkot síkba háromszöget háromszögbe, kombinációkat kombinációkba, konvex kombinációkat konvex kombinációkba

Egyenestartó $(t \in (-\infty, +\infty))$; **Szakasztartó** $(t \in [0,1])$

$$[X(t), Y(t), Z(t), w(t)] = [X_1, Y_1, Z_1, w_1]t + [X_2, Y_2, Z_2, w_2](1-t)$$

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}_1 t + \boldsymbol{p}_2 (1-t) \qquad // \ \mathbf{T}\cdot$$

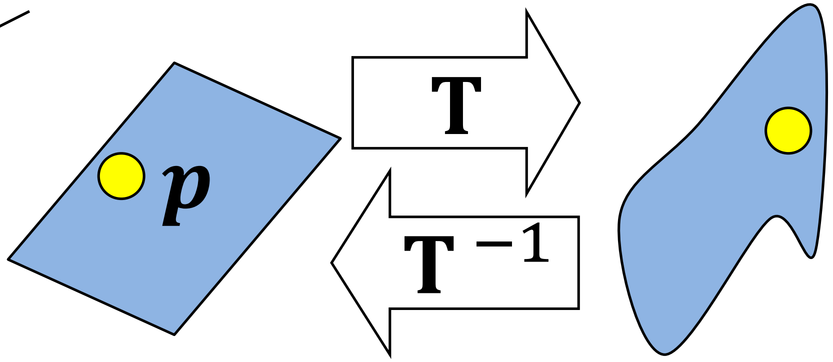
$$\boldsymbol{p}^*(t) = (\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{p}_1)t + (\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{p}_2)(1-t)$$

$$\boldsymbol{p}^*(t) = \boldsymbol{p}_1^* t + \boldsymbol{p}_2^* (1-t)$$

Homogén lineáris transzformációk: síkot síkba

$$[n_x, n_y, n_z, d]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = 0$$

$$\boldsymbol{n}^T \cdot \boldsymbol{p} = 0$$



$$\boldsymbol{p}^* = \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{p}$$

$$\mathbf{T}^{-1} \cdot \boldsymbol{p}^* = \boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{n}^T \cdot (\mathbf{T}^{-1} \cdot \boldsymbol{p}^*) = 0$$

$$(\boldsymbol{n}^T \cdot \mathbf{T}^{-1}) \cdot \boldsymbol{p}^* = 0$$

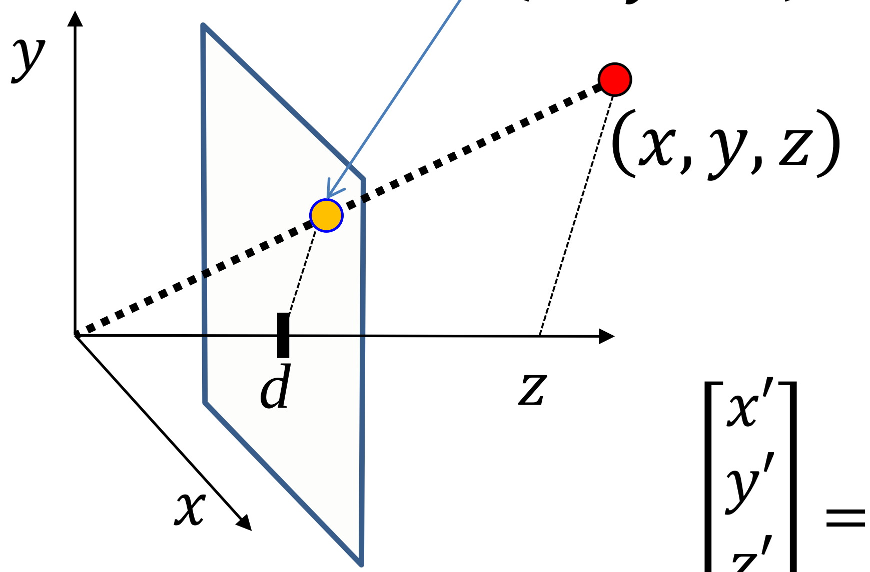
$$\boldsymbol{n}^{*T} \cdot \boldsymbol{p}^* = 0$$

Sík transzformáltja:

$$\boxed{\boldsymbol{n}^{*T} = \boldsymbol{n}^T \cdot \mathbf{T}^{-1}}$$

Középpontos vetítés (projekció)

$$(x', y', z') = \left(x\frac{d}{z}, y\frac{d}{z}, d\right)$$



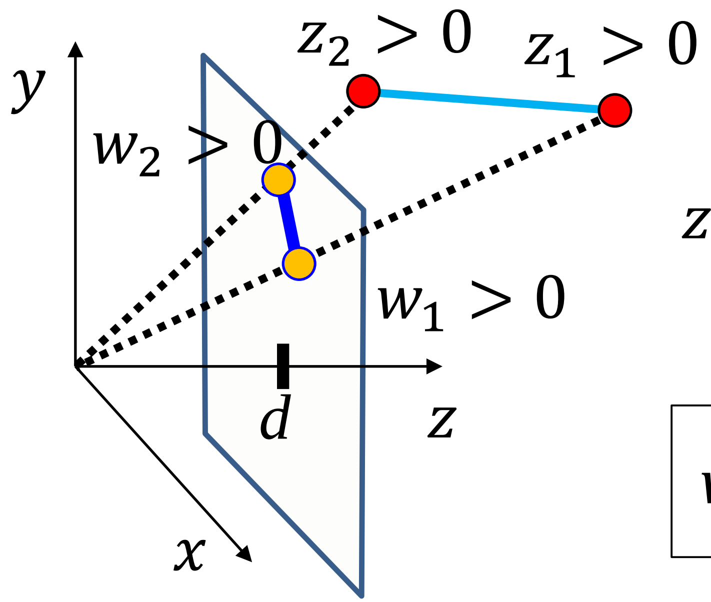
balkezes koord.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xd/z \\ yd/z \\ d \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ z/d \end{bmatrix}$$

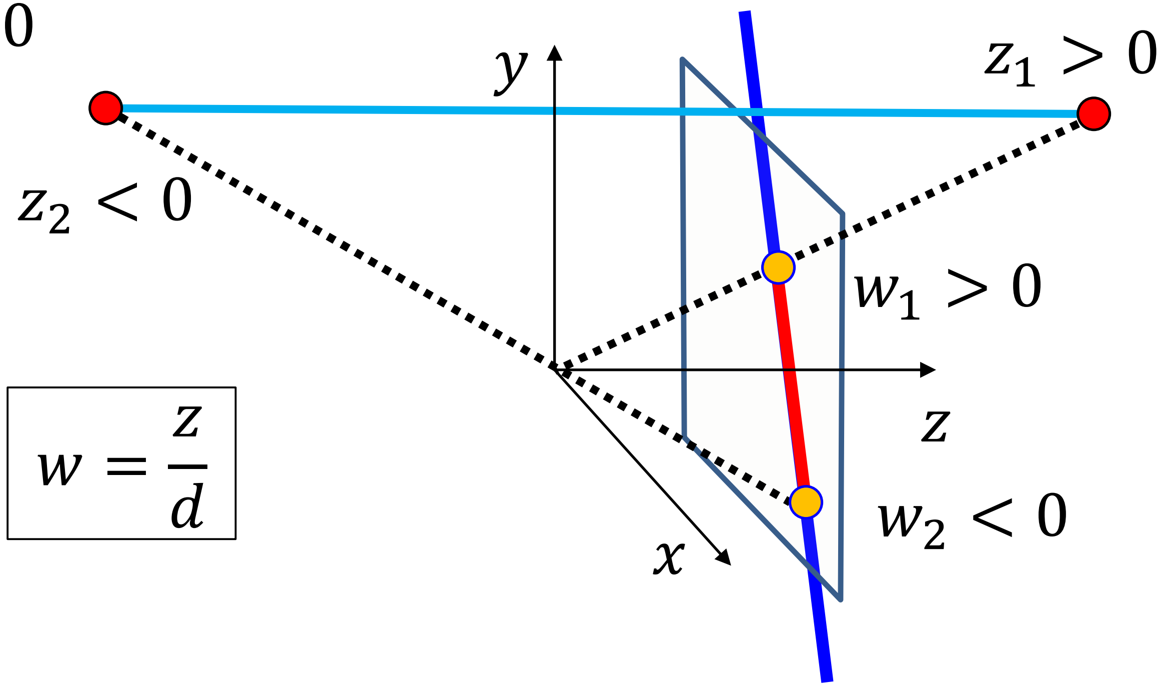
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ z/d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Átfordulási probléma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix}$$



$$w = \frac{z}{d}$$



<u>Projektív egyenes (topológia)</u>

$$[X(t), Y(t), Z(t), w(t)] = [X_1, Y_1, Z_1, w_1]t + [X_2, Y_2, Z_2, w_2](1-t)$$