

KalmanNet 线性模型测试

1 数学模型

在本次实验中，所选取的模型为线性常加速度模型，状态定义为 $[p, v, a]$ 或 $[p, v]$ ，最终跟踪 $[p]$ 。

$$\text{状态方程: } [p, v, a] = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0.5 * \Delta t^2 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ v \\ a \end{bmatrix} + Q$$

$$\text{观测方程: } [p] = [1, 0, 0] \begin{bmatrix} p \\ v \\ a \end{bmatrix} + R$$

$$\text{其中: } Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} \Delta t^5 & \frac{1}{8} \Delta t^4 & \frac{1}{6} \Delta t^3 \\ \frac{1}{8} \Delta t^4 & \frac{1}{3} \Delta t^3 & \frac{1}{2} \Delta t^2 \\ \frac{1}{6} \Delta t^3 & \frac{1}{2} \Delta t^2 & \Delta t \end{bmatrix} \quad R = 1$$

2 算法流程

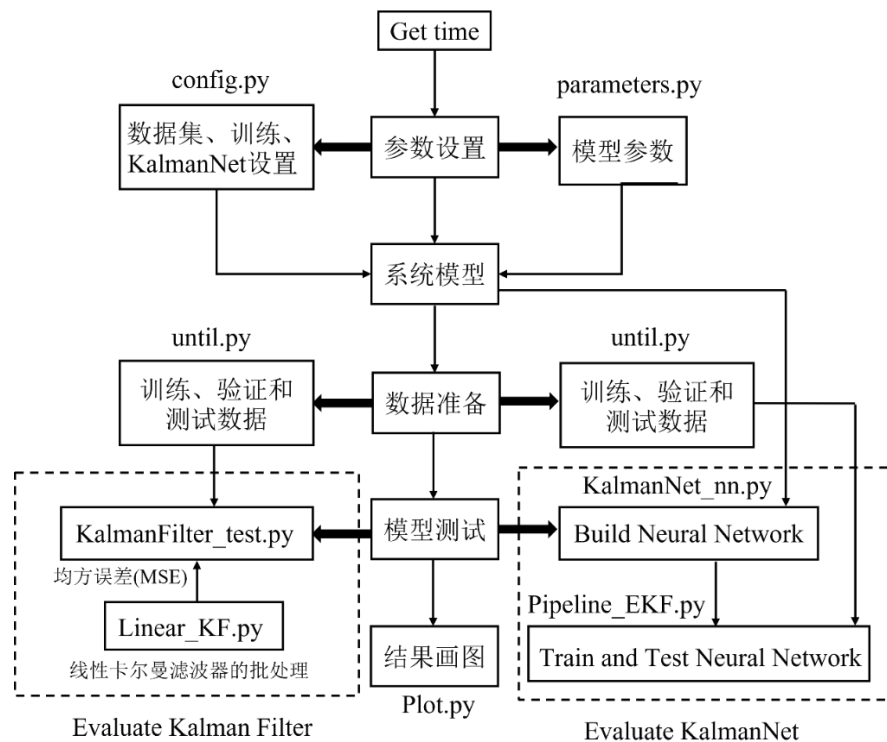


图 1、算法流程

3 实验结果

3.1 参数设置

本次实验相关参数如下：

```
1. args.N_E = 1000    # 训练集大小
2. args.N_CV = 200    # 验证集大小
3. args.N_T = 200     # 测试集大小
4. offset = 0 ### Init condition of dataset
5. args.randomInit_train = True
6. args.randomInit_cv = True
7. args.randomInit_test = True
8. args.T = 20        # 训练集序列长度
9. args.T_test = 100  # 测试集序列长度
10. ### training parameters
11. KnownRandInit_train = True # if true: use known random init for training, else: model is agnostic to random init
12. KnownRandInit_cv = True
```

```

13. KnownRandInit_test = True
14. args.use_cuda = True # use GPU or not
15. args.n_steps = 2000
16. args.n_batch = 100
17. args.lr = 1e-4
18. args.wd = 1e-4

```

3.2 状态为 p, v, a

3.2.1 预处理 $\text{delt}_t=0.01$

选择训练集中 10 个序列进行可视化如图 2，图 2 指出当 $R=1$ 时，状态的频繁估计导致测量值(input value)失真过大，导致 KalmanNet 通过训练集进行训练时网络难以收敛。

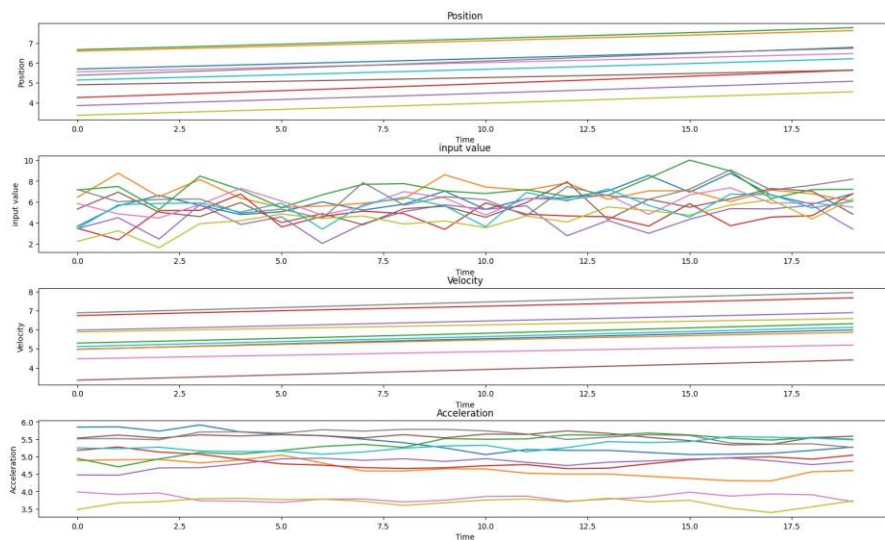


图 2、 $\text{delt}_t=0.01$

可以通过增大 delt_t 以减小状态估计频率或者减小 R 解决 KalmanNet 难以收敛的问题。

3.2.2 修改参数 delt_t 、 $R=1$

分别将 delt_t 增大为 0.05、0.1 进行 KalmanNet 网络训练，并与 Kalman filter 进行对比测试。

实验一： $\text{delt}_t=0.05$ 。选择训练集中 10 个序列进行可视化如图 3。

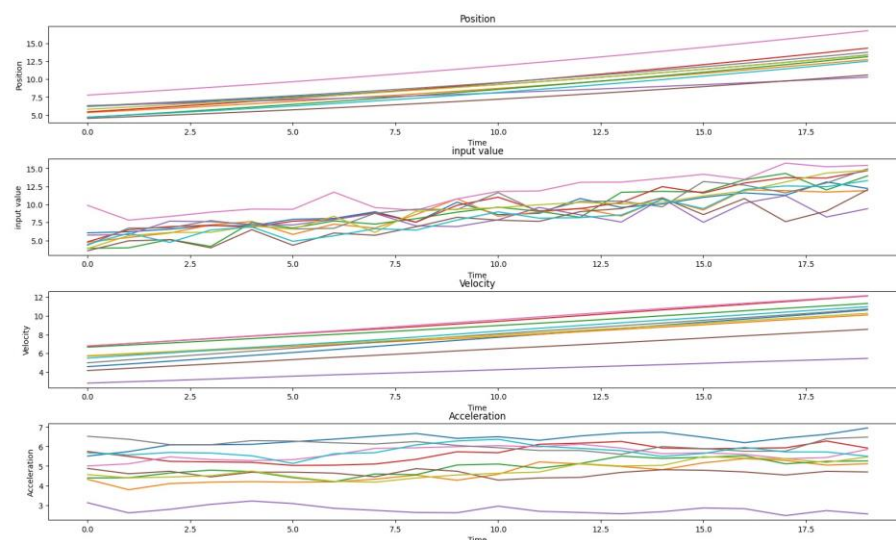


图 3、 $\text{del}t_t=0.05$

对 Kalman Filter 和 KalmanNet 的滤波性能进行评估。**训练集**：序列长度 $T=20$ 初始状态 $[2,2,2]$ 。**测试集**：序列长度 $T=50$ 、100、200 初始状态 $[1,1,1]$ 、 $[2,2,2]$ 、 $[3,3,3]$ 。随机抽取一个测试序列进行可视化追踪效果。

序列长度对滤波效果的影响：测试集选择初始状态 $[2,2,2]$ ， $T=50$ ，100，200，对 p 的追踪效果如下：

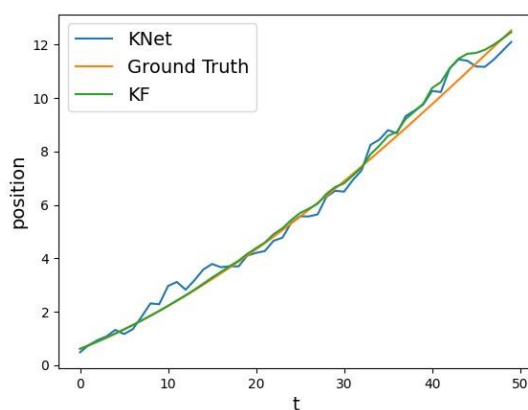


图 4、 $T=50$

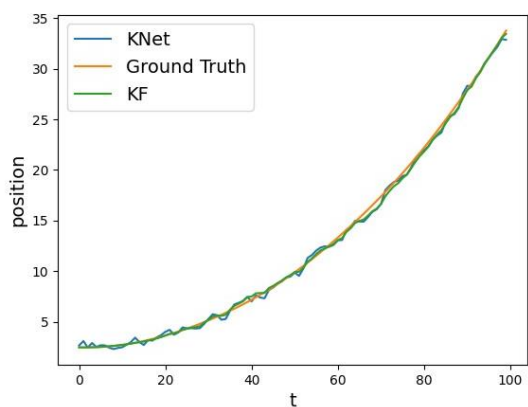


图 5、 $T=100$

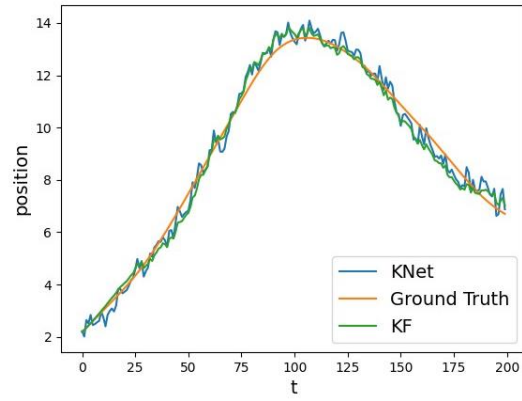


图 6、T=200

Kalman Filter 和 KalmanNet 的 MSE LOSS、STD、Inference Time 如下表：

表一、T=50

	MSE LOSS	STD	Inference Time
Kalman Filter	-11.1741	2.5266	1.6388
KalmanNet	-6.6984	1.3349	0.1437

表二、T=100

	MSE LOSS	STD	Inference Time
Kalman Filter	-9.5538	1.8257	1.4305
KalmanNet	-6.4214	1.0450	0.2828

表三、T=200

	MSE LOSS	STD	Inference Time
Kalman Filter	-8.8721	1.3162	1.4786
KalmanNet	-6.0422	0.7502	0.4372

初始状态对滤波效果的影响：测试集选择初始状态为[1,1,1]、[2,2,2]、[3,3,3]，T=100，对 p 的追踪效果如下：

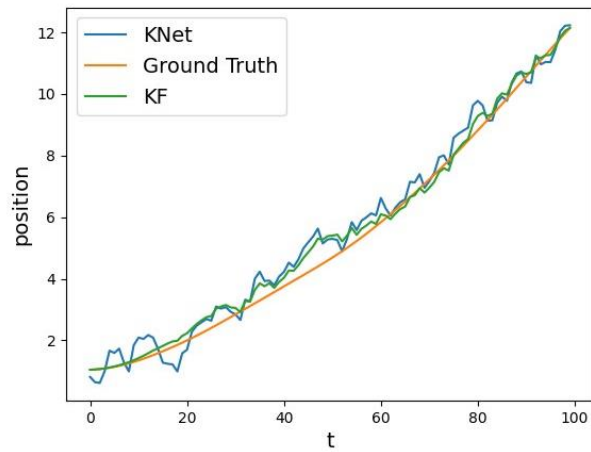


图 7、初始状态为[1, 1, 1]

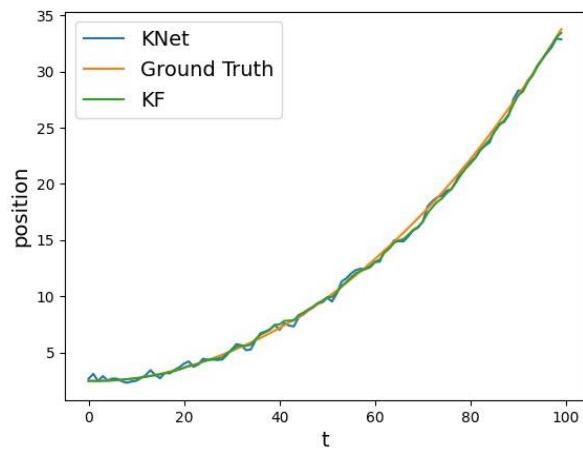


图 8、初始状态为[2, 2, 2]

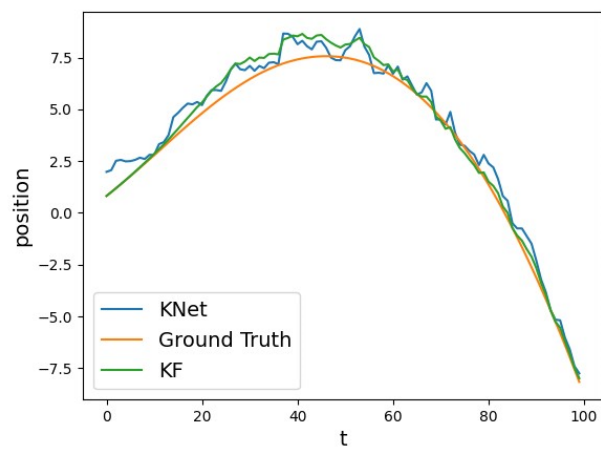


图 9、初始状态为[3, 3, 3]

Kalman Filter 和 KalmanNet 的 MSE LOSS、STD、Inference Time 如下表:

表四、初始状态为[1, 1, 1]

	MSE LOSS	STD	Inference Time
Kalman Filter	-9.7368	1.5969	1.4624
KalmanNet	-6.5767	0.9962	0.2440

表五、初始状态为[2, 2, 2]

	MSE LOSS	STD	Inference Time
Kalman Filter	-9.5538	1.8257	1.4305
KalmanNet	-6.4214	1.0450	0.2828

表六、初始状态为[3, 3, 3]

	MSE LOSS	STD	Inference Time
Kalman Filter	-9.4060	1.7784	1.4462
KalmanNet	-6.1314	0.9845	0.3890

当 $\text{delt_t}=0.05$ $R=1$ 时，通过对上述图表分析可以得到以下结论：

结论 1： Kalman Filter 的滤波效果较 KalmanNet 更好（3dB），但是 KalmanNet 稳定性强于 Kalman Filter。

结论 2： 当测试序列长度发生改变时，KalmanNet 的适应性强于 Kalman Filter。

结论 3： 初始状态发生改变基本不影响 KalmanNet 和 Kalman Filter 的滤波性能。

结论 4： KalmanNet 时间消耗明显少于 Kalman Filter。

实验二： $\text{delt_t}=0.1$ 。选择训练集中 10 个序列进行可视化如图 10。

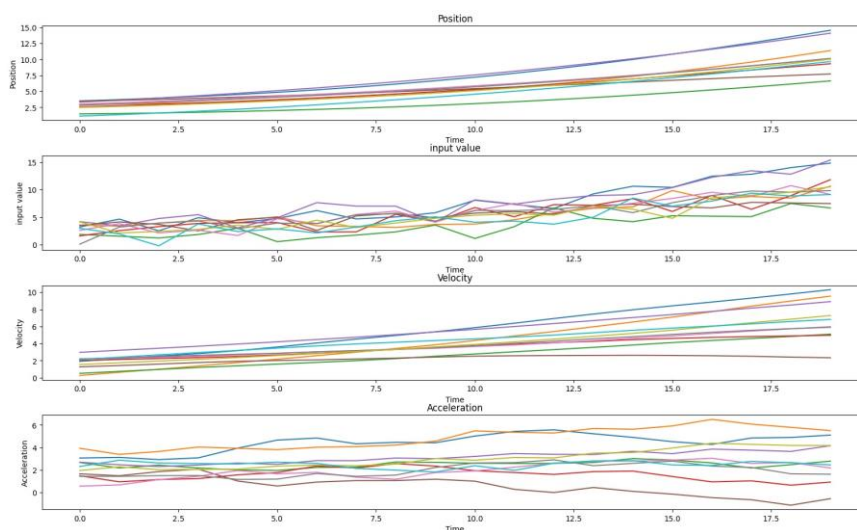


图 10、 $\text{delt_t}=0.1$

对 Kalman Filter 和 KalmanNet 的滤波性能进行评估。**训练集**：序列长度 $T=20$ 初始状态 $[2,2,2]$ 。**测试集**：序列长度 $T=50$ 、 100 、 200 初始状态 $[1,1,1]$ 、 $[2,2,2]$ 、 $[3,3,3]$ 。

序列长度对滤波效果的影响：测试集选择初始状态 $[2,2,2]$ ， $T=50$ ， 100 ， 200 ，对 p 的追踪效果如下：

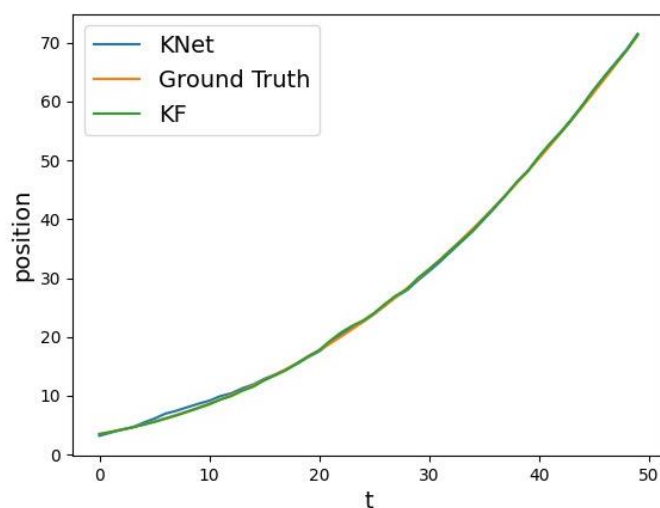


图 11、 $T=50$

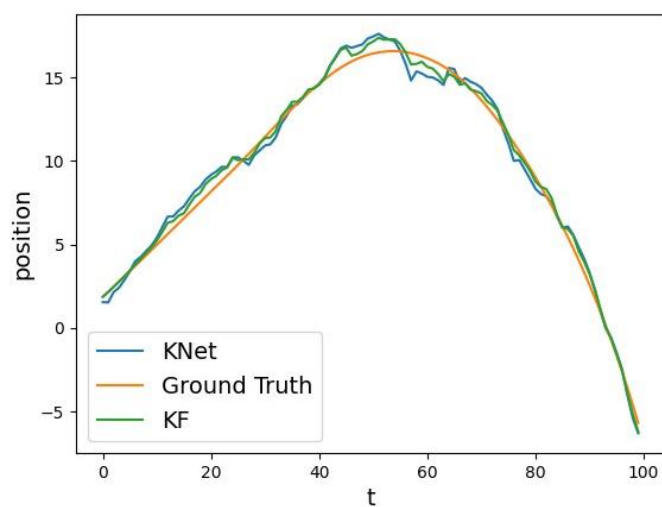


图 12、 $T=100$

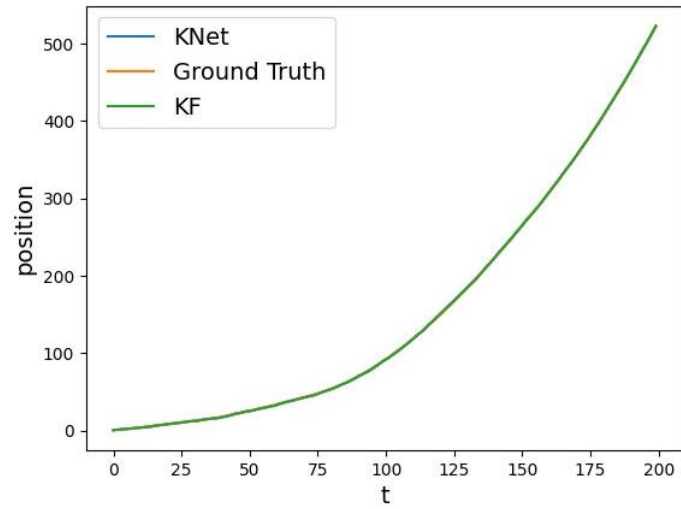


图 13、T=200

Kalman Filter 和 KalmanNet 的 MSE LOSS、STD、Inference Time 如下表：

表七、T=50

	MSE LOSS	STD	Inference Time
Kalman Filter	-7.2849	1.8994	1.4022
KalmanNet	-5.9059	2.2661	0.1748

表八、T=100

	MSE LOSS	STD	Inference Time
Kalman Filter	-6.7115	1.3303	1.4271
KalmanNet	-5.5873	1.6630	0.2849

表九、T=200

	MSE LOSS	STD	Inference Time
Kalman Filter	-6.3705	0.9068	1.5352
KalmanNet	-5.3945	1.1261	0.3118

初始状态对滤波效果的影响：测试集选择初始状态为[1,1,1]、[2,2,2]、[3,3,3]，T=100，对 p 的追踪效果如下：

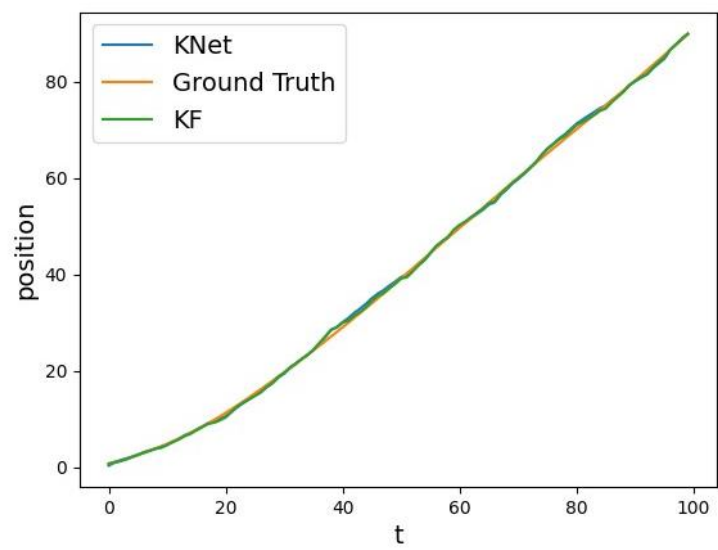


图 14、初始状态为 $[1, 1, 1]$

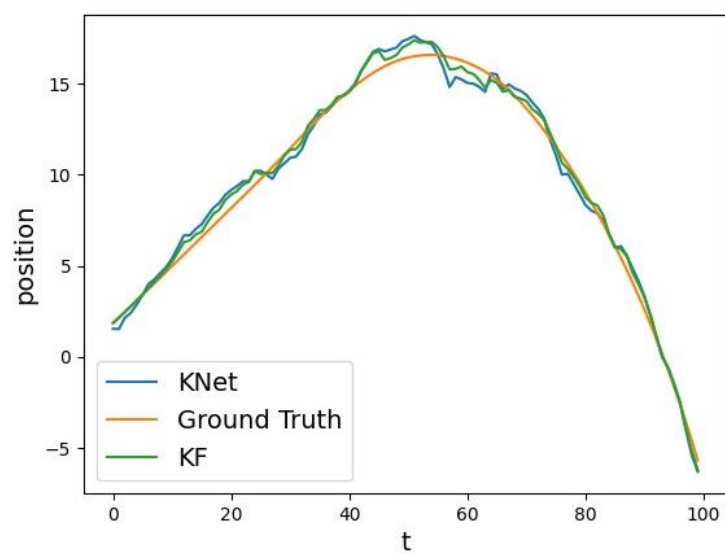


图 15、初始状态为 $[2, 2, 2]$

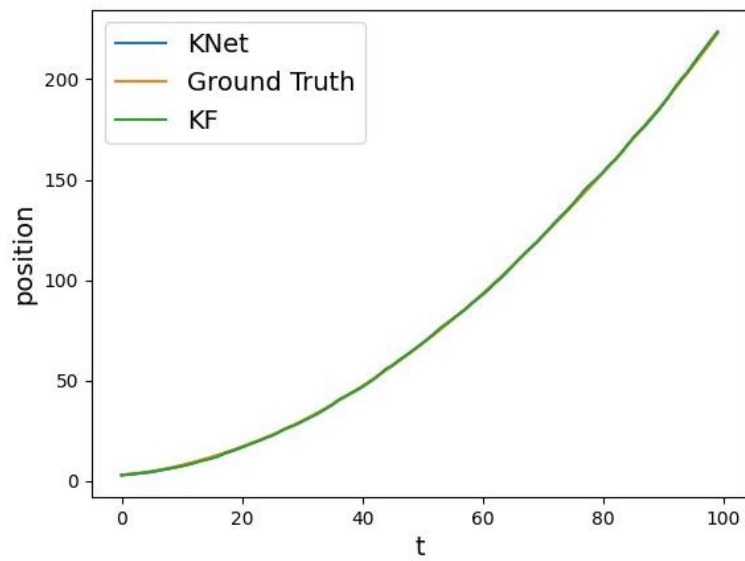


图 16、初始状态为[3, 3, 3]

Kalman Filter 和 KalmanNet 的 MSE LOSS、STD、Inference Time 如下表：

表十、初始状态为[1, 1, 1]

	MSE LOSS	STD	Inference Time
Kalman Filter	-6.5611	1.3601	1.4742
KalmanNet	-5.3068	1.6357	0.3171

表十一、初始状态为[2, 2, 2]

	MSE LOSS	STD	Inference Time
Kalman Filter	-6.7115	1.3303	1.4271
KalmanNet	-5.5873	1.6630	0.2849

表十二、初始状态为[3, 3, 3]

	MSE LOSS	STD	Inference Time
Kalman Filter	-6.4303	1.2772	1.5914
KalmanNet	-5.6039	1.5281	0.3415

当 $\text{delt_t}=0.1$ 、 $R=1$ 时，通过对上述图表分析可以得到以下结论：

结论 1： KalmanNet 基本达到了 Kalman Filter 的滤波效果，但是 Kalman Filter 稳定性更强。

结论 2： 当测试序列长度发生改变时，KalmanNet 的适应性强于 Kalman Filter。

结论 3： 初始状态发生改变基本不影响 KalmanNet 和 Kalman Filter 的滤波

性能。

结论 4: KalmanNet 时间消耗明显少于 Kalman Filter。

3.2.3 修改参数 R、delt_t=0.01

实验三: R=0.1。选择训练集中 10 个序列进行可视化如图。

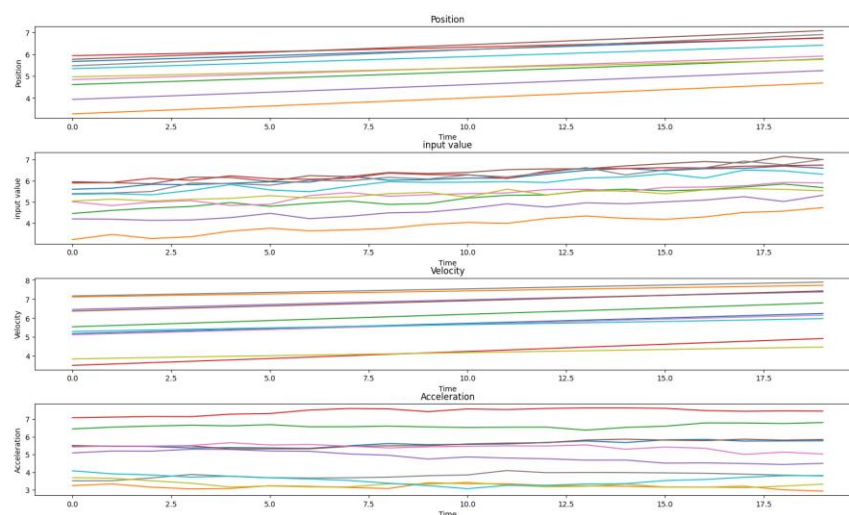


图 17、R=0.1

对 Kalman Filter 和 KalmanNet 的滤波性能进行评估。**训练集**: 序列长度 $T=20$ 初始状态 $[2,2,2]$ 。**测试集**: 序列长度 $T=50$ 、100、200 初始状态 $[1,1,1]$ 、 $[2,2,2]$ 、 $[3,3,3]$ 。

序列长度对滤波效果的影响: 测试集选择初始状态 $[2,2,2]$, $T=50$, 100, 200, 对 p 的追踪效果如下:

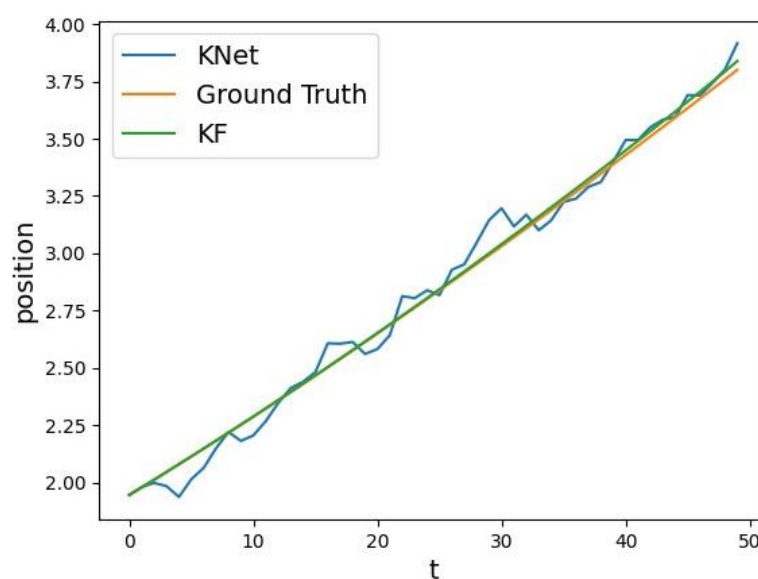


图 18、T=50

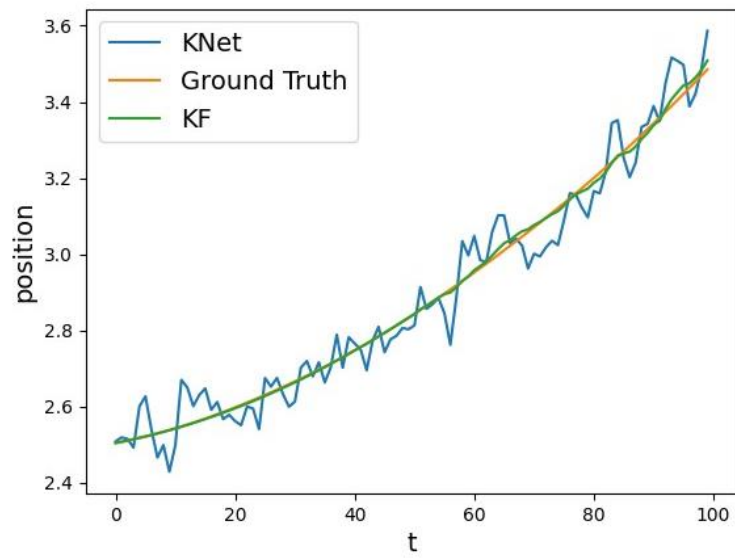


图 19、T=100

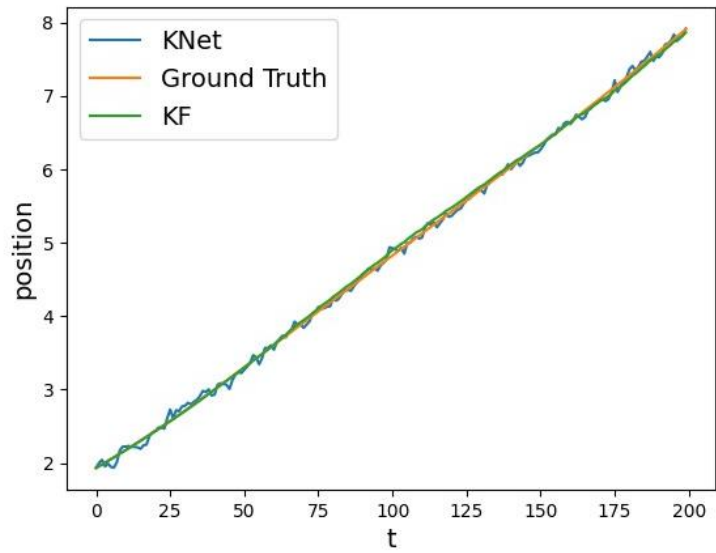


图 20、T=200

Kalman Filter 和 KalmanNet 的 MSE LOSS、STD、Inference Time 如下表：

表十三、T=50

	MSE LOSS	STD	Inference Time
Kalman Filter	-28.8141	3.4638	1.6682
KalmanNet	-24.8414	1.0006	0.1950

表十四、T=100

	MSE LOSS	STD	Inference Time
Kalman Filter	-29.7786	3.5944	2.3148
KalmanNet	-24.7258	0.7435	0.1561

表十五、T=200

	MSE LOSS	STD	Inference Time
Kalman Filter	-28.8751	2.3894	1.5914
KalmanNet	-24.6268	0.5741	0.4084

初始状态对滤波效果的影响：测试集选择初始状态为[1,1,1]、[2,2,2]、[3,3,3]，T=100，对 p 的追踪效果如下：

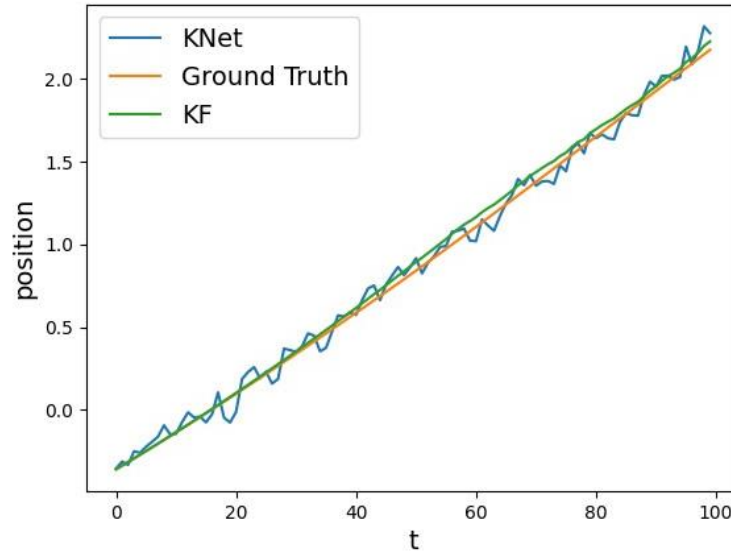


图 21、初始状态为[1, 1, 1]

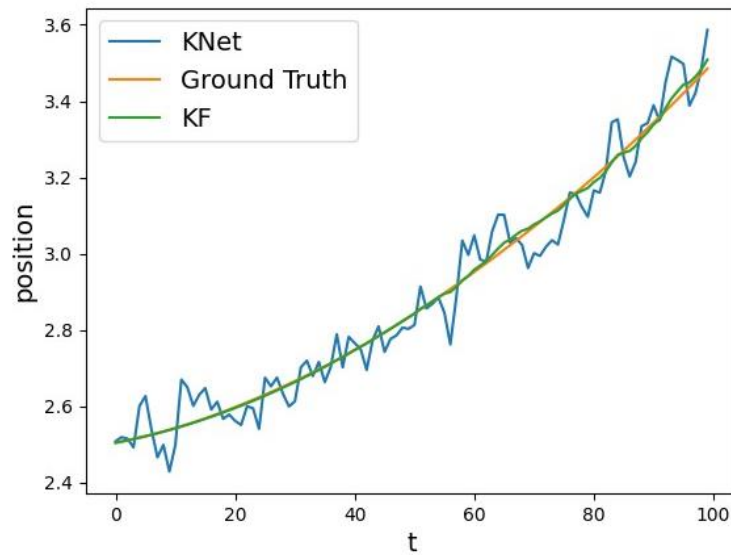


图 22、初始状态为[2, 2, 2]

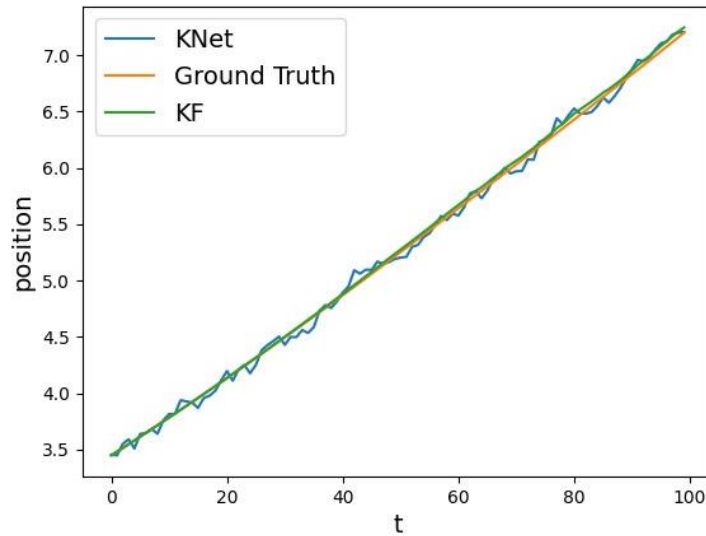


图 23、初始状态为[3, 3, 3]

Kalman Filter 和 KalmanNet 的 MSE LOSS、STD、Inference Time 如下表：

表十六、初始状态为[1, 1, 1]

	MSE LOSS	STD	Inference Time
Kalman Filter	-28.9468	3.5461	1.3933
KalmanNet	-24.5646	0.8109	0.2497

表十七、初始状态为[2, 2, 2]

	MSE LOSS	STD	Inference Time
Kalman Filter	-29.7786	3.5944	2.3148
KalmanNet	-24.7258	0.7435	0.1561

表十八、初始状态为[3, 3, 3]

	MSE LOSS	STD	Inference Time
Kalman Filter	-29.5617	3.7315	1.5130
KalmanNet	-24.8484	0.8871	0.2496

当 $\text{delt}_t=0.01$ 、 $R=0.1$ 时，通过对上述图表分析可以得到以下结论：

结论 1： Kalman Filter 的滤波效果较 KalmanNet 更好 (5dB)，但是 KalmanNet 稳定性更强。

结论 2： 当测试序列长度发生改变时，KalmanNet 的适应性强于 Kalman Filter。

结论 3： 初始状态发生改变基本不影响 KalmanNet 和 Kalman Filter 的滤波性能。

结论 4: KalmanNet 时间消耗明显少于 Kalman Filter。

实验四: $R=0.01$ 。选择训练集中 10 个序列进行可视化如图。

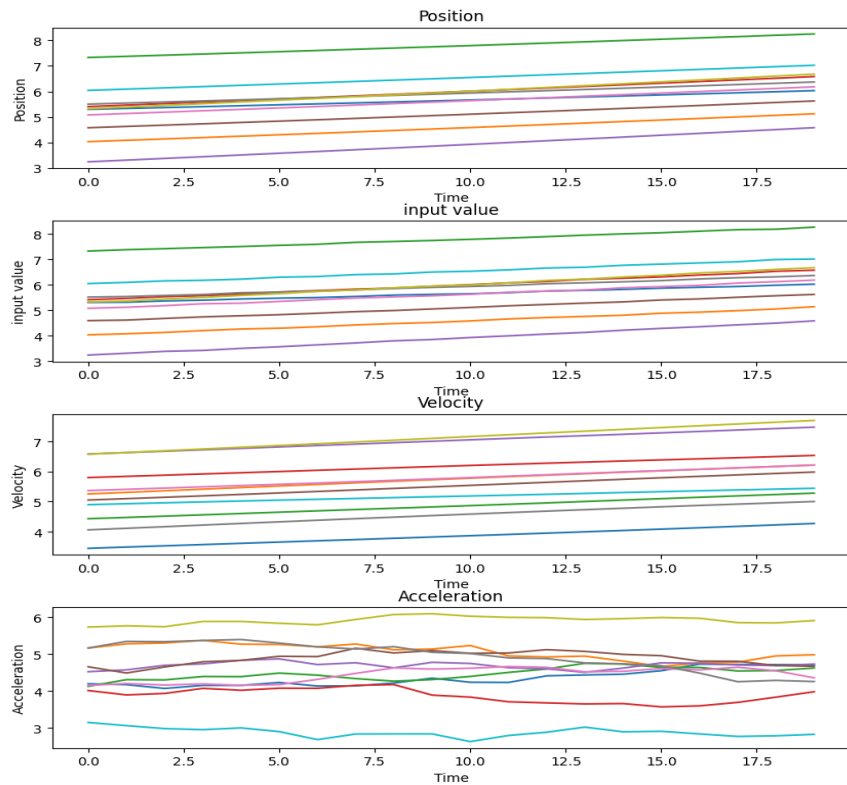


图 24、 $R=0.01$

对 Kalman Filter 和 KalmanNet 的滤波性能进行评估。**训练集**: 序列长度 $T=20$ 初始状态 $[2,2,2]$ 。**测试集**: 序列长度 $T=50$ 、 100 、 200 初始状态 $[1,1,1]$ 、 $[2,2,2]$ 、 $[3,3,3]$ 。

序列长度对滤波效果的影响: 测试集选择初始状态 $[2,2,2]$, $T=50$, 100 , 200 , 对 p 的追踪效果如下:

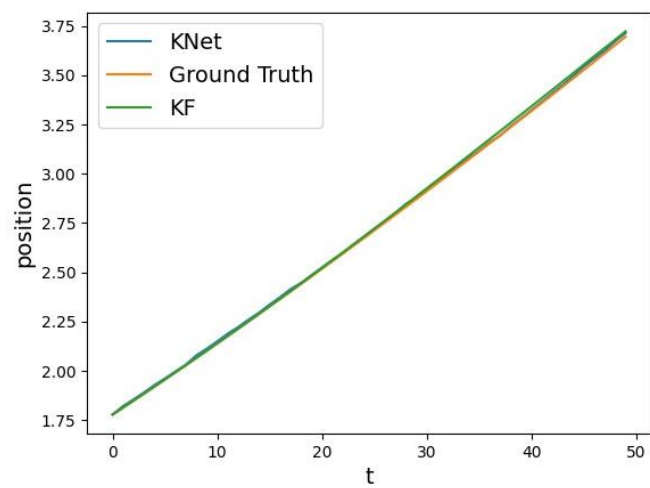


图 25、 $T=50$

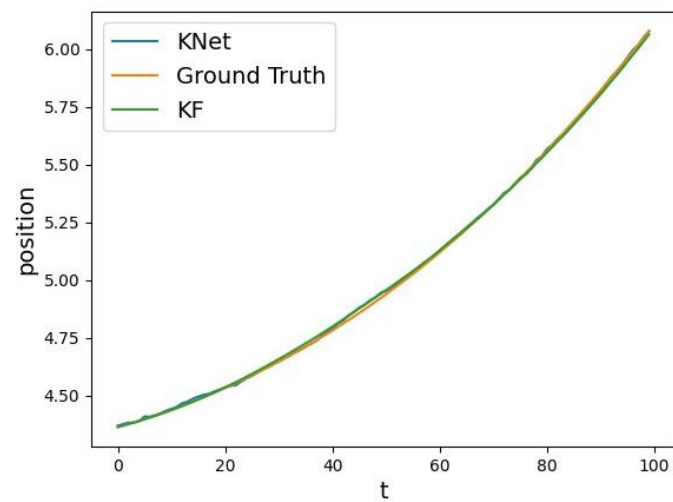


图 26、 $T=100$

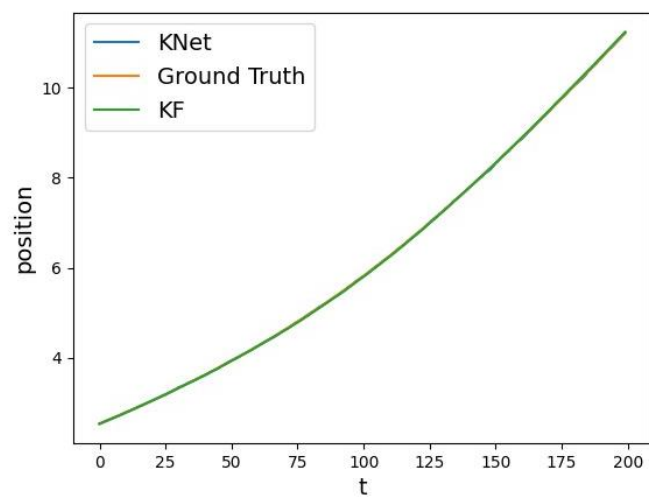


图 27、 $T=200$

Kalman Filter 和 KalmanNet 的 MSE LOSS、STD、Inference Time 如下表：

表十九、T=50

	MSE LOSS	STD	Inference Time
Kalman Filter	-39.8073	3.6535	1.5750
KalmanNet	-43.7011	1.8446	0.1854

表二十、T=100

	MSE LOSS	STD	Inference Time
Kalman Filter	-38.5126	3.1179	1.3995
KalmanNet	-41.9026	2.9248	0.1797

表二十一、T=200

	MSE LOSS	STD	Inference Time
Kalman Filter	-38.2809	2.2873	1.7464
KalmanNet	-37.6411	3.8116	0.4507

初始状态对滤波效果的影响：测试集选择初始状态为[1,1,1]、[2,2,2]、[3,3,3]，T=100，对 p 的追踪效果如下：

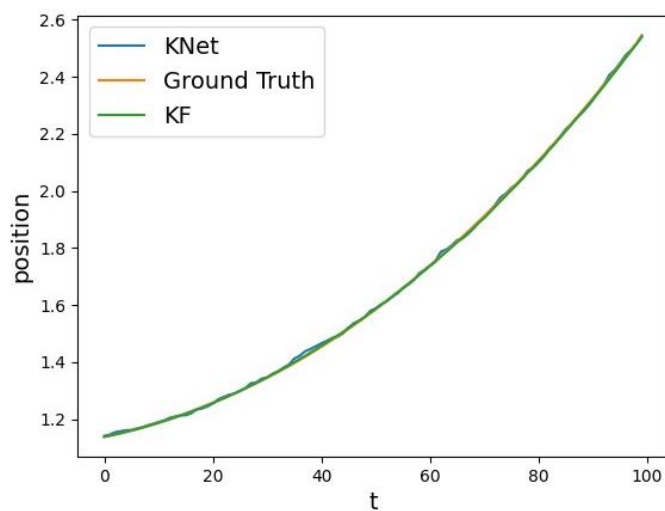


图 28、初始状态为[1, 1, 1]

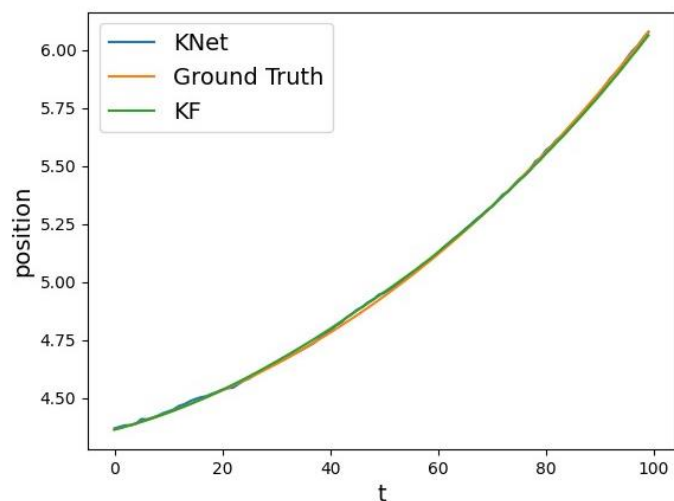


图 29、初始状态为[2, 2, 2]

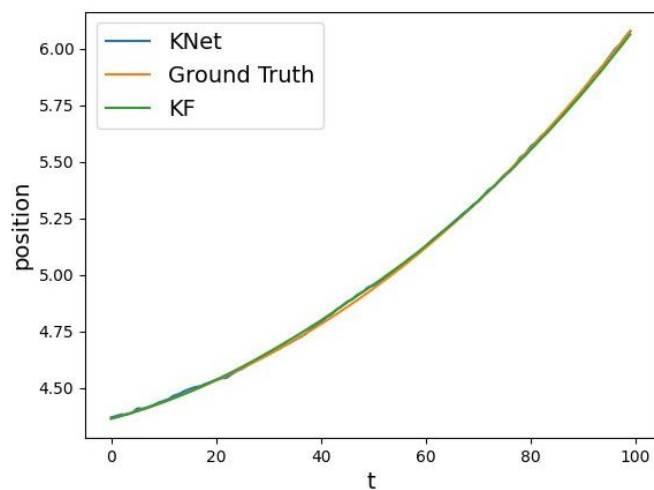


图 30、初始状态为[3, 3, 3]

Kalman Filter 和 KalmanNet 的 MSE LOSS、STD、Inference Time 如下表：

表二十二、初始状态为[1, 1, 1]

	MSE LOSS	STD	Inference Time
Kalman Filter	-38.4828	3.4348	1.5382
KalmanNet	-42.0819	3.0684	0.2510

表二十三、初始状态为[2, 2, 2]

	MSE LOSS	STD	Inference Time
Kalman Filter	-38.5126	3.1179	1.3995
KalmanNet	-41.9026	2.9248	0.1797

表二十四、初始状态为[3, 3, 3]

	MSE LOSS	STD	Inference Time
Kalman Filter	-38.8923	2.9381	1.5371
KalmanNet	-41.6325	2.6088	0.2786

当 $\text{delt_t}=0.01$ 、 $R=0.01$ 时，通过对上述图表分析可以得到以下结论：

结论 1： KalmanNet 达到了 Kalman Filter 的滤波效果甚至更好，但是 KalmanNet 稳定性更强。

结论 2： 当测试序列长度发生改变时，Kalman Filter 的适应性强于 KalmanNet。

结论 3： 初始状态发生改变基本不影响 KalmanNet 和 Kalman Filter 的滤波性能。

结论 4：KalmanNet 时间消耗明显少于 Kalman Filter。

3.3 状态为 p, v

通过对 3.2 中生成的数据集进行切片操作，重复上述实验。（具体实验结果见附件，与 3.2 模型相比，状态为 p, v 时，对 p 的滤波效果更好）。

部分结果如下：

表、 $\text{delt_t}=0.1$ 、 $R=1$ 初始状态[2,2,2] $T=100$

	MSE LOSS	STD	Inference Time
Kalman Filter	-0.6656	2.7135	1.4466
KalmanNet	-2.7112	2.5722	0.1539

表、 $\text{delt_t}=0.01$ 、 $R=0.1$ 初始状态[2,2,2] $T=100$

	MSE LOSS	STD	Inference Time
Kalman Filter	-24.0954	2.7486	1.5553
KalmanNet	-26.0248	1.0515	0.1625

结论： KalmanNet 的滤波效果、稳定性、时间损耗都优于 Kalman Filter。

KalmanNet——Synthetic Non-Linear Model

1 数学模型

1.1 模型一 Non-linear toy problem

$$\begin{aligned}f(x) &= \alpha \sin(\beta x + \phi) + \delta \quad x \in \mathbb{R}^2 \\h(x) &= a(bx + c)^2 \quad y \in \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

1.2 模型二 Lorenz Attractor

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= p(Y - X) \\ \frac{dY}{dt} &= X(r - Z) - Y \\ \frac{dZ}{dt} &= XY - bZ\end{aligned}$$

2 实验结果

本实验主要测试上述两种模型下 KalmanNet 的滤波性能, 并与 EKF、UKF、PF 进行对比。(表格仅列出 KalmanNet-MSE, KalmanNet- STD、 Inference Time 见附件)。本次实验 UKF、PF 结果暂不讨论。

2.1 模型一

实验目标: 对比 KalmanNet 和 EKF、UKF、PF 在该模型下 full information 和 partial information 的滤波性能。(T=T_test=100)

表一: Non-linear toy problem parameters

	α	β	ϕ	δ	a	b	c
Full	0.9	1.1	0.1π	0.01	1	1	0
partial	1	1	0	0	1	1	0

full information:

表二： Synthetic non-linear SS model; full information

$1/r^2[\text{dB}]$	-12.04	-6.02	0	20	40
EKF	-7.2638	-13.2737	-19.1439	-39.1460	-59.1163
UKF	-7.1135	-12.9039	-18.4075	-28.2201	-28.6289
PF	-7.2196	-13.0058	-18.2905	-25.0167	-24.6793
KNet	-7.2282	-13.2250	-19.1927	-39.1458	-59.1325

partial information:

表三： Synthetic non-linear SS model; partial information

$1/r^2[\text{dB}]$	-12.04	-6.02	0	20	40
EKF	-6.1986	-10.7214	-13.3603	-14.8752	-14.8911
UKF	-6.0716	-9.9938	-12.1653	-13.3409	-13.3540
PF	-6.4593	-10.6139	-12.8735	-13.6486	-13.2250
KNet	-6.8544	-12.3536	-17.1553	-35.3858	-51.5622

结论 1: full information 下，KNet 与最优的常见非线性 Kalman Filter 滤波器性能 (EKF)相当，但是在 partial information 下，滤波器所使用的动态演化参数与真实模型略有不同，导致系统性能明显下降，但是 KNet 能够很好克服这种不匹配情况，在 partial information 下的滤波性能与 full information 下差距很小。（实验结果与论文结果基本一致，partial information 下 EKF 结果标红处与论文[-22.67,-36.55]存在差异）

2.2 模型二

实验目标: 该模型在五种情况下(KalmanNet、EKF、UKF、PF)进行了滤波性能的对比测试。

full information: Noisy state observations、noisy non-linear observations.

partial information: State-evolution mismatch|、State-observation rotation mismatch、State-observations sampling mismatch.

2.2.1 Noisy state observations($T=100, T_{\text{test}}=2000, v=-20\text{dB}$)

表四：Lorenz attractor with noisy state observations

$1/r^2[\text{dB}]$	0	10	20	30	40
EKF	-10.3642	-20.4102	-30.3726	-40.2716	-49.9020
UKF					
PF					
KNet	-9.3863	-18.9256	-29.3419	-38.1881	-45.1282

结论 2: Noisy state observations 下, KNet 与 EKF 滤波性能相当。

2.2.2 noisy non-linear observations($T=T_{\text{test}}=20, v=-0\text{dB}$)

表五：Lorenz attractor with non-linear observations

$1/r^2[\text{dB}]$	-10	0	10	20	30
EKF	nan	nan	nan	31.7123	31.5218
UKF	nan	nan	nan	nan	nan
PF	29.4233	27.3157	25.2306	15.1649	3.9805
KNet	13.2830	6.0234	-4.7157	-10.6565	-14.4138

注: KNet 在该条件下是震荡收敛, 且幅度较大, 实验结果略优于论文结果。(main 分支存在单独的代码, 但是生成数据采用的参数有待商榷)

结论 3: noisy non-linear observations 下, KNet 的滤波性能远远优于常见的非线性 Kalman Filter。

2.2.3 State-evolution mismatch($T = 100, T_{\text{test}} = 2000, v=-20\text{dB}$)

表六：Lorenz attractor with state-evolution mismatch $\mathbf{J} = 2$.

$1/r^2[\text{dB}]$	10	20	30	40
EKF	-19.5333	-25.4125	-26.8325	-28.6127
UKF				
PF				
KNet	-19.0504	-26.4003	-34.4143	-41.2624

结论 4: State-evolution mismatch 下, KNet 能够很好的克服这种不匹配, 滤波性能与 full information 下差距很小。EKF 在 $1/r^2$ 为 10-20 时同样具备克服这种不匹配的能力, 但是当 $1/r^2$ 为 30-40 时, 克服不匹配的能力下降严重。(与论文结果存在差异)

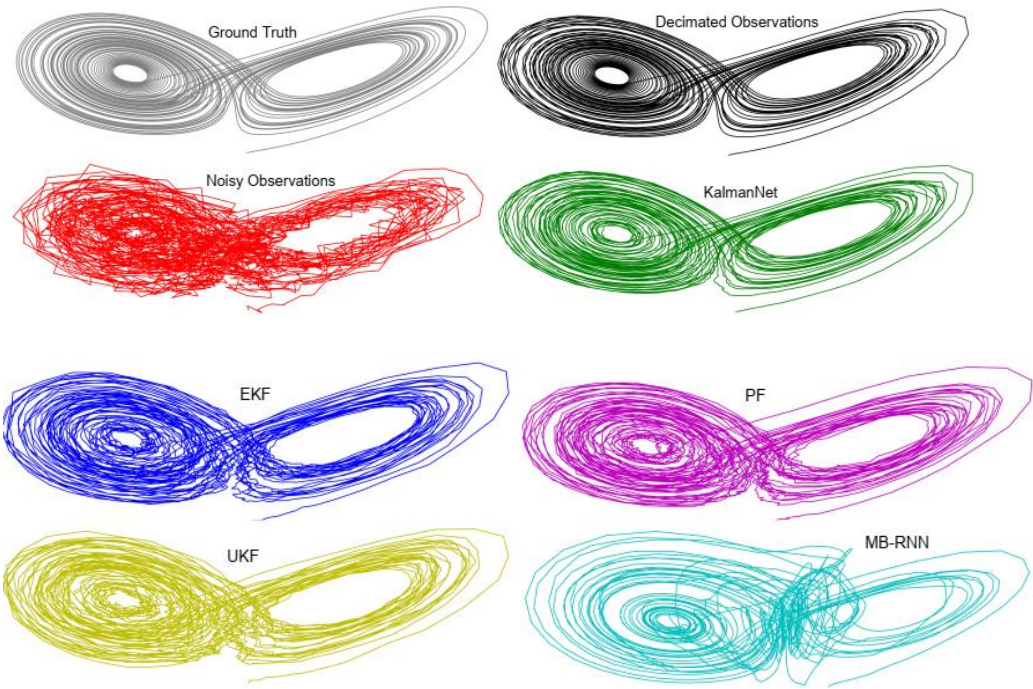
2.2.4 State-observation rotation mismatch($T = 100, T_{\text{test}} = 1000, v = -20\text{dB}$)

表七: Lorenz attractor with observation rotation($\theta = 1^\circ$)

$1/r^2[\text{dB}]$	0	10	20	30
EKF	-9.5291	-15.3676	-16.8803	-16.8965
UKF				
PF				
KNet	-9.5543	-19.2013	-28.1989	-33.2600

结论 5: State-observation rotation mismatch 下, KNet 在 $1/r^2$ 为 0-20 能够很好的克服这种不匹配, 滤波性能与 full information 下差距很小, $1/r^2$ 为 30 时, 克服这种不匹配的能力出现一定程度的下降。EKF 在 $1/r^2$ 为 0-10 时同样具备克服这种不匹配的能力, 但是当 $1/r^2$ 为 20-30 时, 克服不匹配的能力下降严重。(与论文结果存在差异)

2.2.5 State-observations sampling mismatch($T=100, T_{\text{test}}=3000, r=1$)



3 偶然发现

表四: Lorenz attractor with noisy state observations($T_{\text{test}}=100$)

$1/r^2[\text{dB}]$	0	10	20	30	40
--------------------	---	----	----	----	----

EKF	-10.4857	-20.4624	-30.3060	-40.3979	-50.4674
UKF	11.6340	11.7884	11.7654	11.7629	11.7045
PF	-6.2559	1.2743	4.8099	6.4258	7.1391
KNet	-9.3863	-18.9256	-28.8368	-38.1881	-45.1282

表六：Lorenz attractor with state-evolution mismatch $\mathbf{J} = \mathbf{2}$. ($T_{\text{test}}=100$)

$1/r^2[\text{dB}]$	10	20	30	40
EKF	-16.7504	-18.8561	-19.2677	-21.1618
UKF	11.0435	11.0301	10.9115	9.4214
PF	-1.8780	3.7510	5.8433	6.6237
KNet	-19.0504	-26.4003	-34.4143	-41.2624

表七：Lorenz attractor with observation rotation($\theta = 1^\circ$) ($T_{\text{test}}=100$)

$1/r^2[\text{dB}]$	0	10	20	30
EKF	-9.3018	-15.0419	-16.2884	-16.2972
UKF	10.9156	10.9839	10.9847	10.8714
PF	-8.0212	-0.8162	4.4594	6.3673
KNet	-9.5543	-19.2013	-28.1989	-33.2600

$T_{\text{test}}=100$ 时 UKF、PF 的结果是有点灵异。 $T_{\text{test}}=2000$ 时 UKF、PF 运行时间太长，不知道能否得到论文的结果。