



中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

KalmanNet: Neural network aided Kalman filtering for partially known dynamics



小组成员



日期: 2023.11.27

目录

CONTENTS

01

状态估计与贝叶斯滤波

02

KalmanNet 背景

03

KalmanNet原理

04

实验设计与应用

05

总结

06

参考文献



中山大學

SUN YAT-SEN UNIVERSITY



状态估计与贝叶斯滤波

1 状态估计与贝叶斯滤波

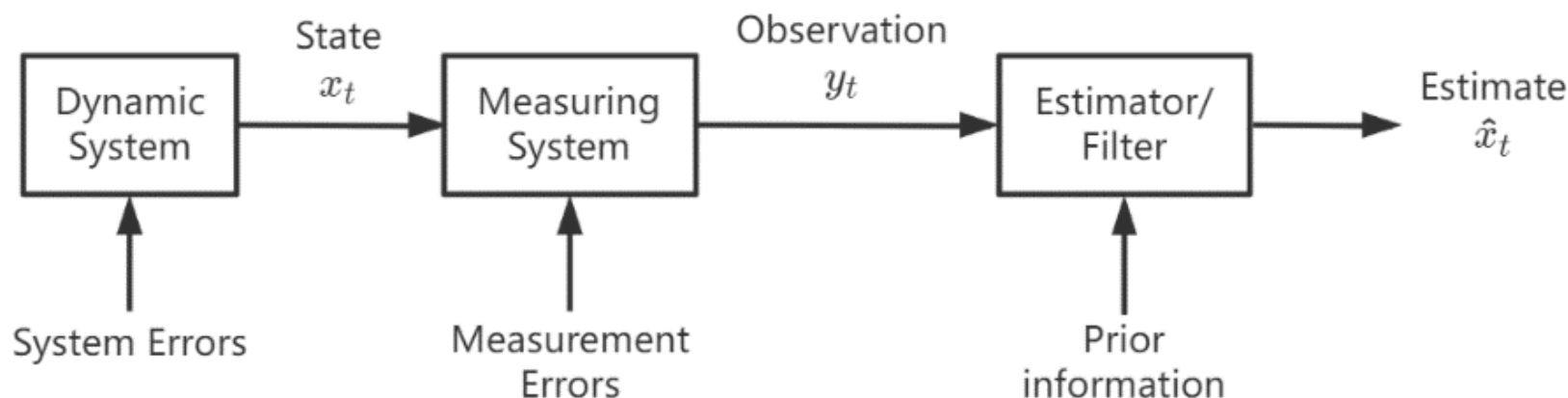
1.1 状态估计问题

状态估计问题：研究如何根据给定的观测数据，推断产生这些数据背后的因素的相关信息的问题

→ 滤波问题：利用历史和当前数据，来估计当前时刻某系统中的状态（速度、位置、加速度等等）

“滤”波：过滤掉不感兴趣的信息，只保留我们想研究的信息，比如当前时刻的系统状态 x_t

三要素：动力学系统、观测系统、估计量 / 滤波



如何描述动力学系统和观测系统？

1.2 随机状态空间模型 (State Space Model)

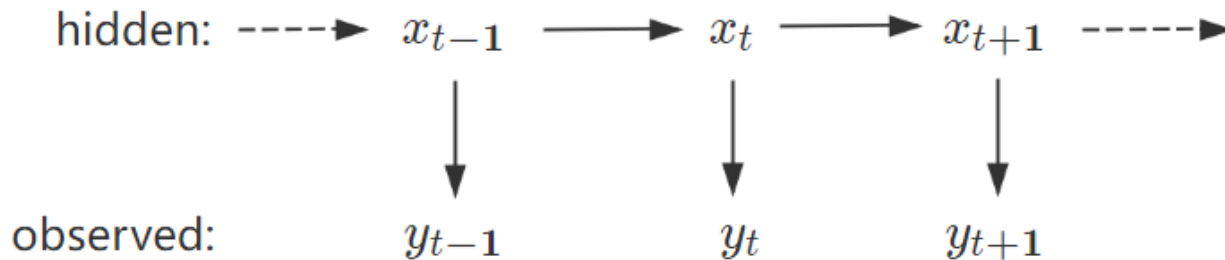
如何描述动力学系统和观测系统？

确定性系统：已知系统初始条件，求解系统的微分方程，就可得到系统在未来各个时刻的准确状态

现实：各种随机扰动和噪声，不可能建立一个完全准确的确定性方程

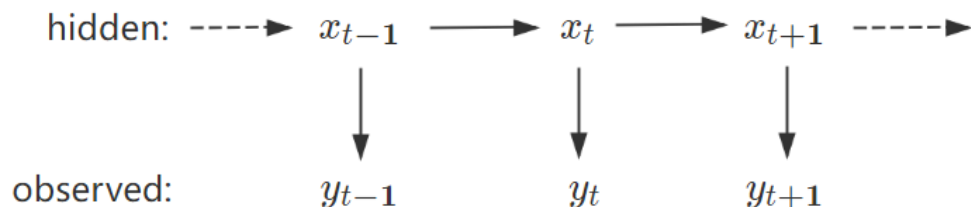
→ 需要额外对其中的不确定性进行建模，因此需要一种用概率论语言描述的随机模型：

State Space Model (SSM)



隐变量 x_t 如何随时间变化？ 隐变量 x_t 如何影响观测变量 y_t ？

1.2 随机状态空间模型 (State Space Model)



随机动力学模型 $\mathbf{x}_t \sim p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})$, $t = 1, 2, \dots$ 系统状态如何随时间变化, 考虑了系统随机扰动

随机观测模型 $\mathbf{y}_t \sim p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t)$, $k = 1, 2, \dots$ 系统状态如何影响观测, 考虑了观测随机扰动



LG-SSM

State-transition / evolution $\mathbf{x}_t = f(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_t, \mathbf{w}_t)$

State-observation / emission $\mathbf{y}_t = h(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \mathbf{v}_t)$

(\rightarrow EKF、UKF、PF、 \dots)



$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{w}_t$, $\mathbf{w}_t \sim N(0, \mathbf{Q})$

$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t$, $\mathbf{v}_t \sim N(0, \mathbf{R})$

(\rightarrow Kalman Filter)

1.3 SSM下的状态估计问题 → 滤波问题（贝叶斯视角）

预测： 计算 $p(\mathbf{x}_{t+h}|\mathbf{y}_{1:t})$, 历史+当前数据 $\mathbf{y}_{1:t}$ → 未来状态 \mathbf{x}_{t+h}

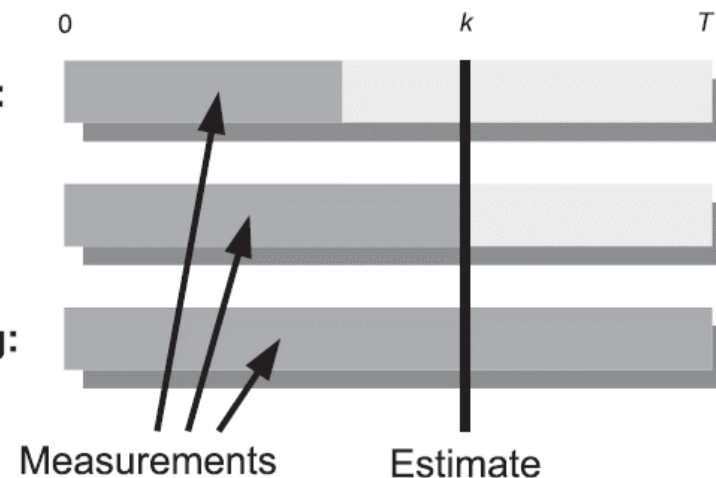
滤波： 实时计算 $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})$, 历史+当前数据 $\mathbf{y}_{1:t}$ → 当前状态 \mathbf{x}_t

平滑： 计算 $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:T})$, 所有数据 $\mathbf{y}_{1:T}$ → 任一历史状态

Prediction:

Filtering:

Smoothing:



贝叶斯视角下，滤波问题最优的解决办法：

$$p(\mathbf{x}_{0:T}|\mathbf{y}_{1:T}) = \frac{p(\mathbf{y}_{1:T}|\mathbf{x}_{0:T})p(\mathbf{x}_{0:T})}{p(\mathbf{y}_{1:T})} \propto p(\mathbf{y}_{1:T}|\mathbf{x}_{0:T})p(\mathbf{x}_{0:T})$$

即求解所有观测变量下所有系统状态的联合后验概率分布 $p(\mathbf{x}_{0:T}|\mathbf{y}_{1:T})$ → 对系统状态完全的概率分布刻画

⇨ 不可行，实时估计中分布的维度会越来越大，通常没有显式解，即便有也很难计算

⇨ **LG-SSM**

1.4 贝叶斯滤波：目标 & 求解

目标：实时地估计当前系统状态，即在每一时刻 t ，计算 $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})$

求解：分三步

1. 预测 / 传播 Prediction / Propagation / Extrapolation

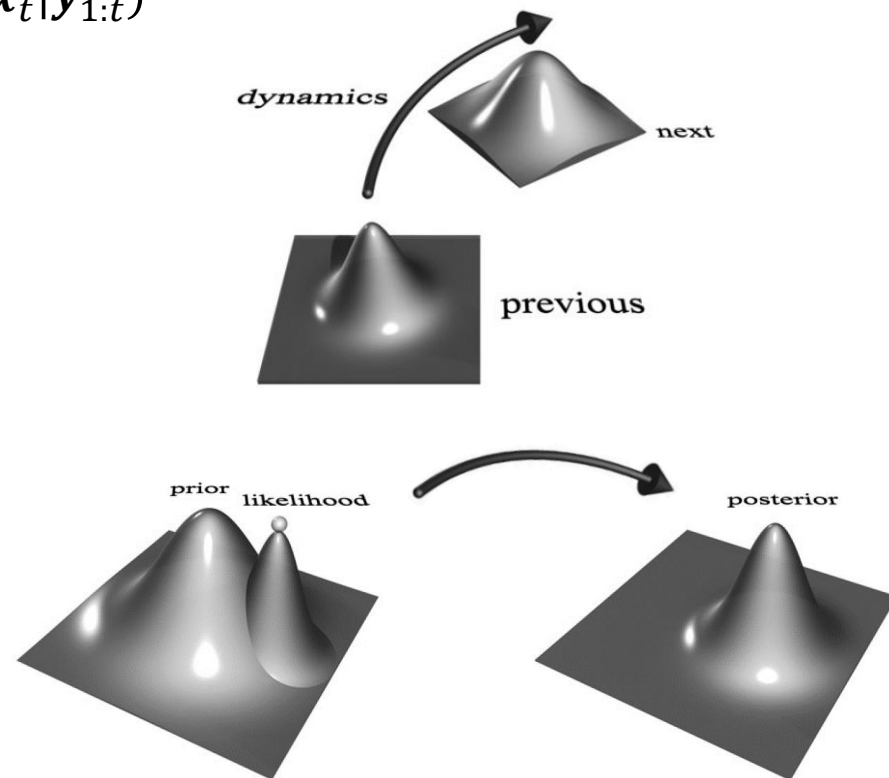
$$p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1}) = \int p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})p(\mathbf{x}_{t-1}|\mathbf{y}_{1:t-1}) d\mathbf{x}_{t-1}$$

2. 更新 / 修正 Update / Correction

$$p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) = \frac{1}{Z_t} p(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})$$

3. 计算当前状态的估计值（可由不同最优准则得出）

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \mathbb{E}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) = \arg \min_d MSE(d(\mathbf{y}_{1:t}))$$





中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

2

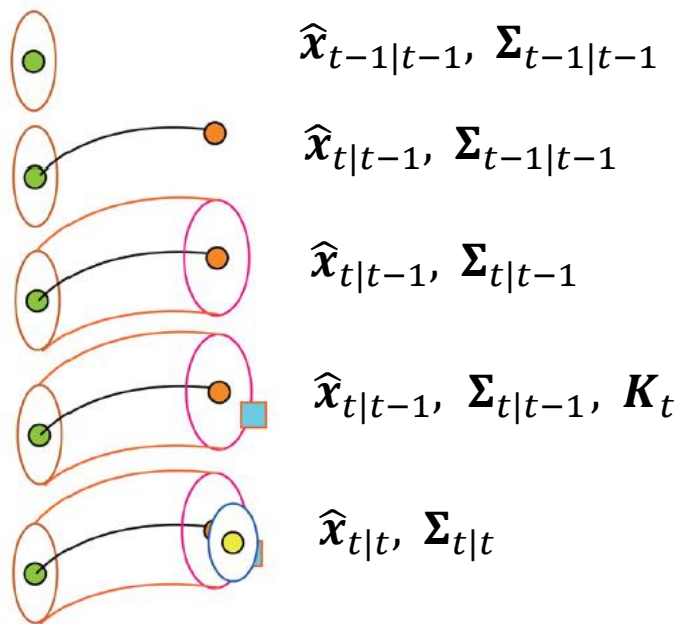
KalmanNet 背景

2.1 基于模型的滤波

线性高斯状态空间模型(LG-SSM)

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{w}_t, \quad \mathbf{w}_t \sim N(0, \mathbf{Q})$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t, \quad \mathbf{v}_t \sim N(0, \mathbf{R})$$



最主要误差：Model Mismatch 模型偏差

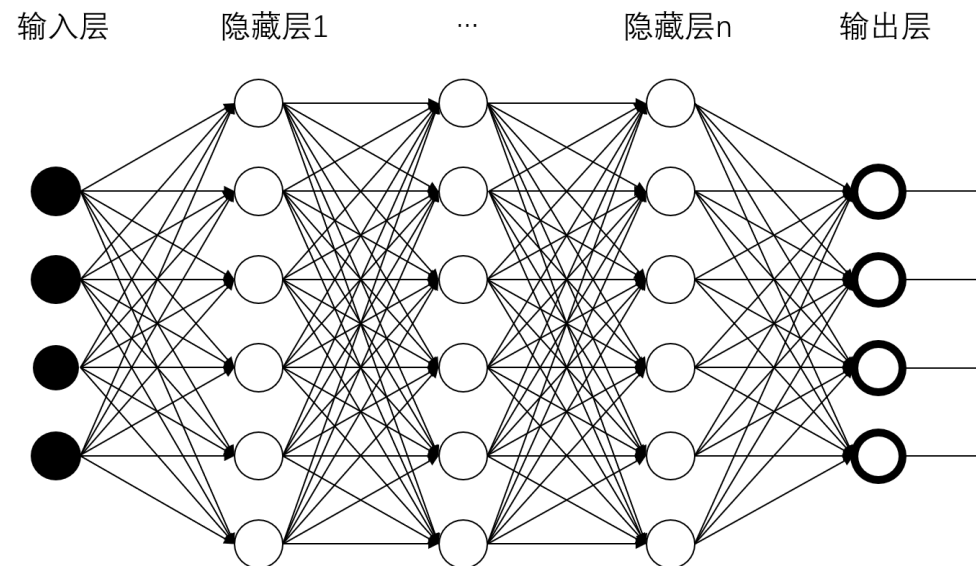
- 都显式地假设了动力学和观测模型，与真实情况有模型偏差 mismatch，复杂系统中性能退化；
- 对噪声同样进行建模。

除Model Mismatch之外的误差

- EKF**: 本质是准线性滤波，具有线性近似的误差，且Jacobian计算量更大；
- UKF、CKF**: 基于数值积分方法，也会带来误差；
- PF**: 渐进最优，计算量较大，不适用于实时性要求很高的应用上。

2.2 数据驱动型滤波

- 使用DNN直接学习逼近后验分布 $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t})$
缺点：通常不能用于实时状态估计，学习过程较复杂，容易受到近似误差的影响。
- SSM中的动力学和观测方程分别用DNN进行建模
缺点：缺少已知模型的引导，需要大量训练数据，不适合部署在算力受限的小型设备上。



2.3 基于模型与数据驱动互补的滤波

- 纯DNN完全替代SSM的方法 --- **fully unknown dynamics**
- **KalmanNet** --- **partially known dynamics**的场景, 属于部分替代SSM的方法:
假设动力学和观测模型, 但不假设噪声分布
设计DNN从真实数据中学习计算KG和潜在噪声, 以及弥补修正假设模型与真实不符的地方

为什么学习Kalman Gain(KG)? $\hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t \Delta \mathbf{y}_t, \quad \mathbf{K}_t = \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1} \mathbf{H}^T \mathbf{S}_{t|t-1}^{-1}$

KG在状态更新修正中起到重要作用

(其实是只能学习KG, 因为动力学和观测都假设了, 没假设噪声, KG无法计算)

KG含义:

修正项的权重, 反映了新息中有多少有助于更新状态的信息

反映了先验知识(系统动力学) $\boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1}$, 和观测数据(传感器置信度)之间的相对强弱



中山大學

SUN YAT-SEN UNIVERSITY

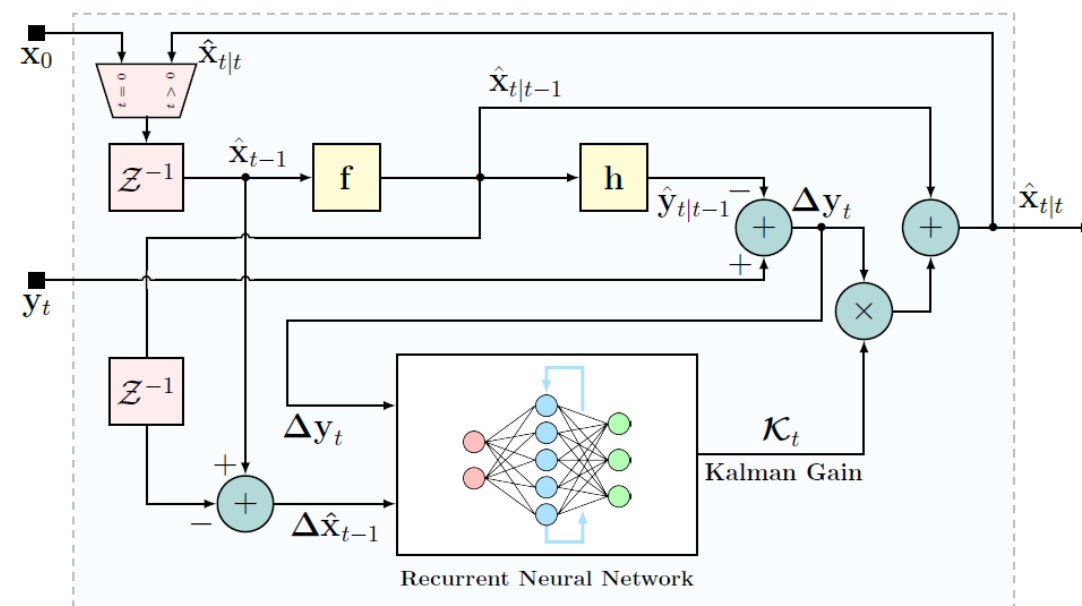
3

KalmanNet原理

3 KalmanNet 原理

3.1 KalmanNet

- 假设非线性SSM中的动力学模型 f 和观测模型 h (由已知的领域知识得到)
- 不假设噪声分布
- 保留EKF的状态估计回路, 用RNN替代KG计算回路
- 监督学习: RNN从真实数据中学习 (相对真值)
- RNN: 采用GRU (门控循环单元), 相比LSTM (长短期记忆) 使用三个门, 其只使用一个门, 从而减少冗余性和参数量



KalmanNet示意图



3.2 KalmanNet ----RNN

为什么选择RNN学习计算KG?

滤波算法通常利用历史信息来预测、修正、估计当前时刻的系统状态

RNN的初衷：让网络有“记忆”功能，从而学习变长序列中的信息，也是通过隐状态来更好地利用历史信息，建立长程依赖关系，因此天然地适配状态估计任务

RNN隐状态更新 $\mathbf{h}_t = f(\mathbf{U}\mathbf{h}_{t-1} + \mathbf{W}_t\mathbf{x}_t + \mathbf{b})$ SSM状态更新 $\mathbf{x}_t = f(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_t, \mathbf{w}_t)$

理论上，可证明RNN能够逼近任一非线性动力系统，而动力系统通常描述为SSM的形式

KalmanNet算法的核心：如何用RNN来更好地学习到KG，可进一步分为三个子问题：

1. RNN的输入特征应该如何设计？
2. RNN的架构如何选择？
3. RNN如何训练？

3.2.1 RNN: 输入特征

输入到RNN的特征，最好是包含了状态变化、观测过程、估计不确定性的全面的统计信息的特征

四种输入特征

- F1 $\Delta \tilde{\mathbf{y}}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{y}_{t-1}$ 当前时刻观测 \mathbf{y}_t 与前一时刻观测 \mathbf{y}_{t-1} 之差
- F2 $\Delta \mathbf{y}_t = \mathbf{y}_t - \hat{\mathbf{y}}_{t|t-1}$ 新息，当前时刻观测 \mathbf{y}_t 与当前回合观测预测之差
- F3 $\Delta \tilde{\mathbf{x}}_t = \hat{\mathbf{x}}_{t|t} - \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}$ 当前回合估计 $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$ 与前一回合估计 $\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}$ 之差
实际训练时需要延迟，因为时刻 t 可用的是 $\Delta \tilde{\mathbf{x}}_{t-1}$
- F4 $\Delta \hat{\mathbf{x}}_t = \hat{\mathbf{x}}_{t|t} - \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}$ 源于状态更新方程 $\hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t \Delta \mathbf{y}_t$
实际训练时需要延迟，时刻 t 可用的是 $\Delta \hat{\mathbf{x}}_{t-1}$

F1、F3：包含状态变化、观测过程的相关信息

F2、F4：包含估计不确定性的相关信息

实验中，较好的组合为 {F1, F2, F4} 以及 {F1, F3, F4}

3.2.2 RNN: 架构1

架构1 单个GRU单元直接学习KG

$$\mathbf{K}_t = \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1} \mathbf{H}^T \mathbf{S}_{t|t-1}^{-1}$$

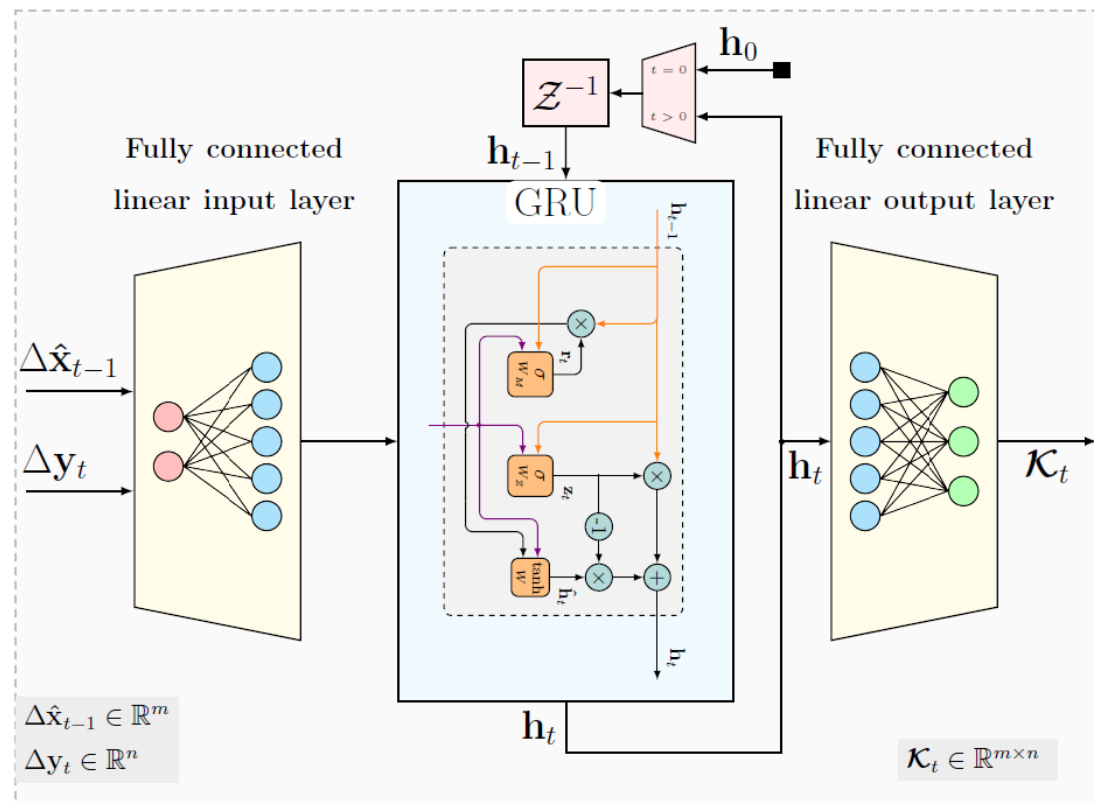
输入F1,F2,F3,F4的特征组合, 输出 \mathbf{K}_t

GRU隐状态 \mathbf{h}_t 的维度设置为 $m^2 + n^2$ 的整数倍

$m^2 + n^2$ 为 $\boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1}$ 和 $\mathbf{S}_{t|t-1}$ 的矩阵维度之和

输出层有 $m \times n$ 个神经元, 对应 \mathbf{K}_t 的维度

缺点: 参数量较多



使用单个GRU的架构

3.2.3 RNN: 架构2

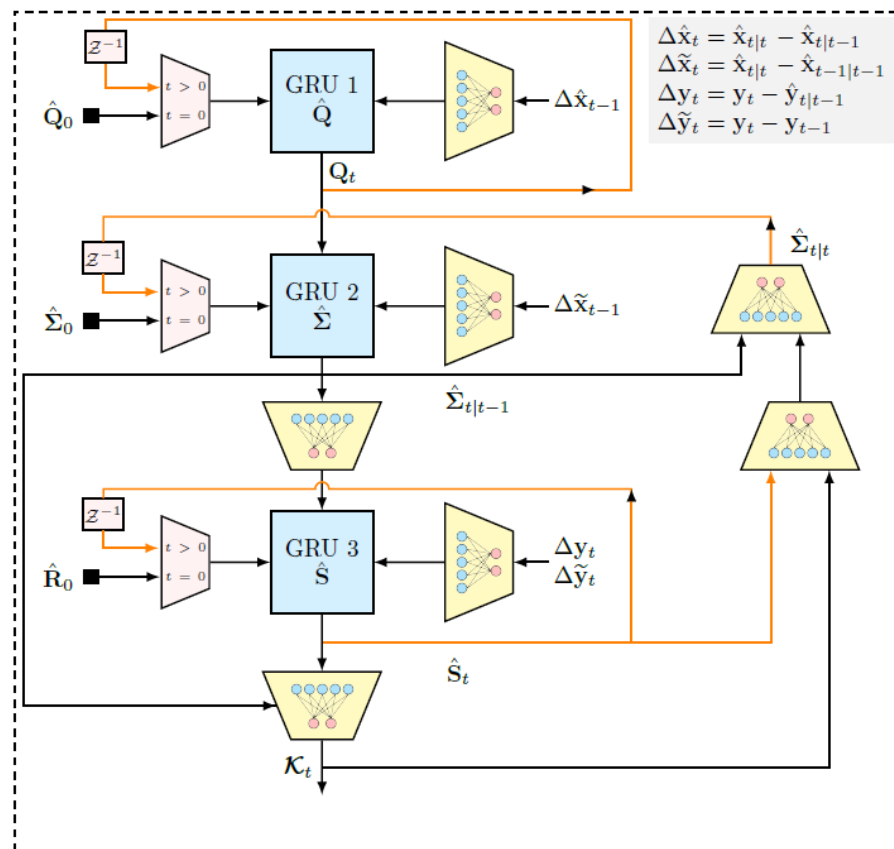
架构2 堆叠式的3个GRU单元 (Stacked GRU)

相比直接学习的架构1, 架构2则是根据计算 K_t 的相关公式, 分别学习其中的重要变量 Q 、 $\Sigma_{t|t-1}$ 、 $S_{t|t-1}$:

$$\begin{aligned} Q_t &= GRU_1(FCN(\Delta x), Q_{t-1}) \\ ① \Sigma_{t|t-1} &= F \Sigma_{t-1|t-1} F^T + Q \\ &\rightarrow \Sigma_{t|t-1} = GRU_2(Q_t, FCN(\Delta x), \Sigma_{t-1|t-1}) \\ ② S_{t|t-1} &= H \Sigma_{t|t-1} H^T + R \\ &\rightarrow S_t = GRU_3(FCN(\Sigma_{t|t-1}), FCN(\Delta y, \Delta y), S_{t-1}) \\ ③ K_t &= \Sigma_{t|t-1} H^T S_{t|t-1}^{-1} \\ &\rightarrow K_t = FCN(S_t, \Sigma_{t|t-1}) \end{aligned}$$

并且, ③和①之间通过协方差更新方程构成一个回路
(图中右边部分)

$$\begin{aligned} \Sigma_{t|t} &= \Sigma_{t|t-1} - K_t S_{t|t-1} K_t^T \\ &\rightarrow \Sigma_{t|t} = FCN(FCN(K_t, S_t), \Sigma_{t|t-1}) \end{aligned}$$



使用堆叠式3个GRU单元的架构

3.2.4 RNN: 训练

KalmanNet整体架构

上半部分：EKF计算流程，中间变量一部分用于计算

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t \Delta \mathbf{y}_t, \quad \text{一部分用作GRU的输入特征}$$

下半部分：GRU从真实数据中学习 \mathbf{K}_t

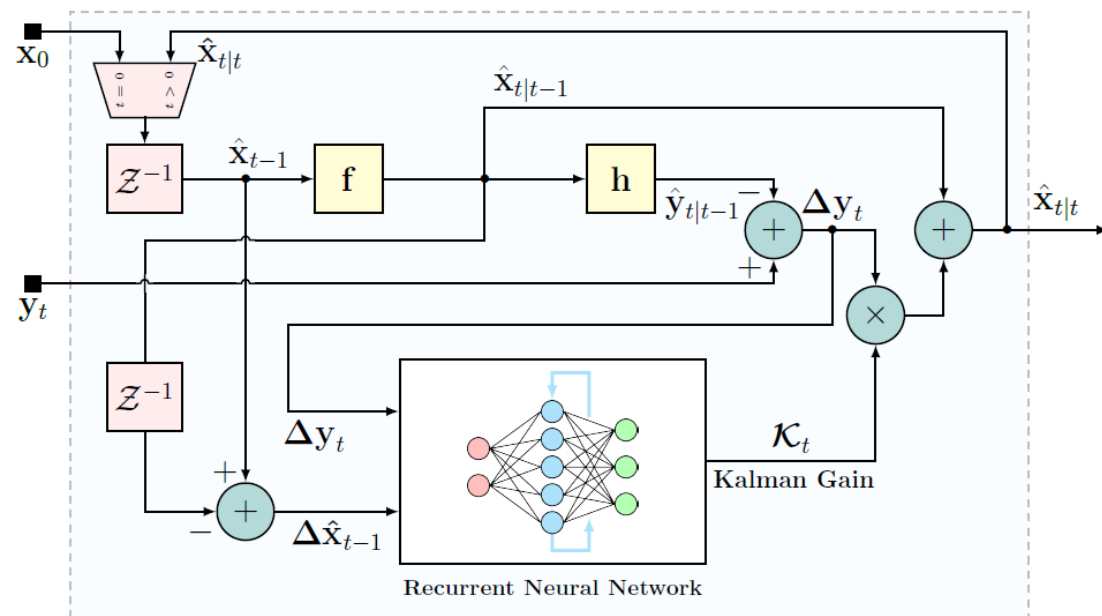
输出：当前时刻状态的估计 $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$

GRU的损失函数

$$\mathcal{L} := \|\mathbf{x}_t^{GT} - \hat{\mathbf{x}}_{t|t}\|_2^2 = \|\mathbf{x}_t^{GT} - (\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t \Delta \mathbf{y}_t)\|_2^2$$

\mathbf{x}_t^{GT} Ground Truth (满足误差精度的相对真值)

该损失函数是关于GRU输出 \mathbf{K}_t 的函数，存在对 \mathbf{K}_t 的偏导数，所以能够用梯度下降 (mini-batch SGD) 来最小化该损失函数，进而用随时间的反向传播算法 (BPTT) 来更新GRU网络参数



KalmanNet整体架构示意图

实时运行中，因为输入的特征在变，输出肯定是在变的，所以能够根据输入变化修正大小，但理论上没有收敛性证明。KF中所有的协方差矩阵和KG都是离线计算的，从一开始假设好形式就都确定了，因此相比KN没有自适应调整的优势



中山大學

SUN YAT-SEN UNIVERSITY

4

实验设计与应用



4.1 KalmanNet 实验设计

训练集：大小不同、数据维度不同 → KalmanNet迁移能力（训练集中的序列长度<测试集、不同初始条件）

场景：合成数据、真实数据集Michigan NCLR（位置数据：激光雷达、轮式里程计、GPS）

模型之间对比：KalmanNet v.s. Vanilla RNN v.s. MB Filters (KF, EKF, UKF, PF)

SSM：Linear SSM、Non-Linear SSM

Full information & Partial information → KalmanNet对model-mismatch的鲁棒性

Full info：给KalmanNet准确的动力学模型（用于合成数据的模型）

Partial info：给KalmanNet有偏差的动力学模型，而MB Filters仍是准确动力学模型

--- 两种mismatch：动力学方程mismatch、观测方程mismatch

--- 进一步细分：离散化、传感器未校准、采样密度

GRU超参数：输入特征 F1~F4 网络架构 #1, #2 训练算法 V1, V2, V3

实时性：计算run-time

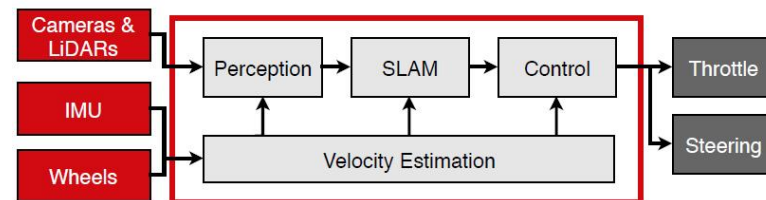
4.2 KalmanNet 应用：无人竞速赛车

Data-driven Kalman-based velocity estimation for autonomous racing

Pilatus driverless

Academic Motorsports Club Zurich (AMZ) --- ETH Zurich

https://www.bilibili.com/video/BV1864y1k73G/?vd_source=21aa5520d9e6e92d7b075810545b91ed



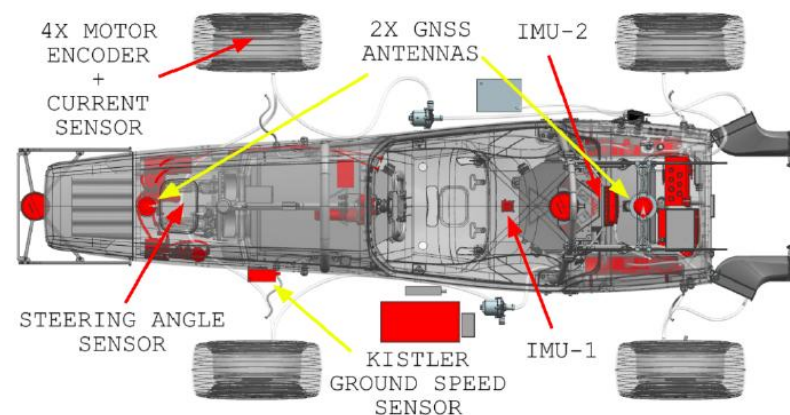
便宜速度传感器

4 轮式里程计 + 1 转角传感器 + 1 扭矩传感器 → 速度

2 IMUs → 横摆角速度、加速度

昂贵速度传感器 (Ground Truth)

Optical flow-based velocity、GNSS velocity → 速度



4.2 KalmanNet 应用 (续)

实验流程

实时估计：无人竞速赛车的速度

1. 先搭载昂贵传感器测数据，作为真值（光流速度计、GNSS速度计）
2. 再搭载便宜传感器进行实时测试

Benchmark

MKF (Mixed Kalman Filter, 融合EKF、UKF、Chi-squared outlier test 的状态估计算法), 是无人竞速赛车中速度估计算法的SOTA

实验结果

KalmanNet+便宜传感器 优于 MKF+便宜传感器
接近 MKF+昂贵传感器

State	MKF		KalmanNet		Obs	
	linear	dB	linear	dB	linear	dB
v_x	0.32	-69.88	0.68	-63.24	0.68	-63.24
v_y	9.26	-40.66	6.10	-44.29	10.93	-39.22
ψ	1.13	-58.96	0.60	-64.38	1.72	-55.28
a_x	2.57	-51.81	2.41	-52.36	4.55	-46.84
a_y	2.04	-53.80	1.67	-55.56	3.62	-48.82

其他应用:

Split-KalmanNet: A Robust Model-Based Deep Learning Approach for SLAM



中山大學

SUN YAT-SEN UNIVERSITY

5

总结



5 总结

优点

1. 相比基于模型的滤波算法，可以通过监督学习，来弥补显式假设的模型与真实情况的偏差
→ 准确性更好，面对model mismatch时也有更好的鲁棒性，缓解了“鲁棒性-精确性”之间的权衡问题
2. 相比用DNN完全替代SSM的滤波算法，吸收了领域知识，可以更好地引导RNN训练，并且增强可解释性
(实验中比纯RNN收敛速度更快，效果更好)
3. 无需求逆矩阵，且RNN可以采用简单架构，实时性更好，方便部署到算力受限的小型设备上
→ 数值稳定性 \uparrow ，能更高效地处理高维信号
4. 实际应用中，可以替代昂贵传感器，节省成本

缺点

1. 监督学习算法，需要获取相对更精确的真值，某些场景下不适用
2. RNN训练需要一定技巧，比如最优化算法的选择、输入特征的选择、架构的选择、参数设置等等



中山大學

SUN YAT-SEN UNIVERSITY

6

参考文献



6 參考文獻

- [1] Revach, G., Shlezinger, N., Ni, X., Escoriza, A.L., Van Sloun, R.J. and Eldar, Y.C., 2022. KalmanNet: Neural network aided Kalman filtering for partially known dynamics. IEEE Transactions on Signal Processing, 70, pp.1532-1547.
- [2] Escoriza, A.L., Revach, G., Shlezinger, N. and Van Sloun, R.J., 2021, August. Data-driven Kalman-based velocity estimation for autonomous racing. In 2021 IEEE International Conference on Autonomous Systems (ICAS) (pp. 1-5). IEEE.
- [3] Särkkä, S., 2013. Bayesian filtering and smoothing (No. 3). Cambridge university press.
- [4] Murphy, K.P., 2012. Machine learning: a probabilistic perspective. MIT press.
- [5] Haykin, S.S., 2002. Adaptive filter theory. Pearson Education India.
- [6] Kay, S.M., 1993. Fundamentals of statistical signal processing: estimation theory. Prentice-Hall, Inc..



中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

敬請各位老師同學批評指正



匯報人：胡蛟城



日期：2023.11.27