CHƯƠNG 4
TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG LIÊN TỤC TRONG MIỀN TẦN SỐ (p1)

4.1. Phổ của tín hiệu

Ta gọi biến đổi thuận Fourier của tín hiệu x(t) là phổ của nó

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \qquad (4.1)$$

Phổ của tín hiệu trong trường hợp tổng quát là một hàm phức, biến thực được viết dưới dạng:

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\varphi(\omega)} \qquad (4.2)$$

Hay là

$$X(\omega) = \operatorname{Re} X(\omega) + j\operatorname{Im} X(\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \qquad (4.3)$$

Các hàm $|X(\omega)|, \varphi(\omega), P(\omega), Q(\omega)$ là các hàm thực biến ω và có tên gọi tương ứng là phổ biên độ, phổ pha, phổ thực và phổ ảo của tín hiệu x(t). Đó là đại lượng đặc trưng cho cấu trúc tần số của tín hiệu, chúng có quan hệ với nhau qua các biểu thức sau:

$$|X(\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \qquad (4.4)$$

$$\cos\varphi(\omega) = \frac{P(\omega)}{\sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}} \qquad (.4.5)$$

$$\sin\varphi(\omega) = \frac{Q(\omega)}{\sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}} \qquad (4.6)$$

4.2. Các tính chất của phổ (Các tính chất của biến đổi Fourier)

➢ Tính chất 1: Tính chất chẵn lẻ của tín hiệu và phổ

Mỗi tín hiệu x(t) có thể biểu diễn dưới dạng:

$$x(t) = x_{ch}(t) + x_l(t)$$

Hãy tìm phổ Fourier cho tín hiệu này:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_{ch}(t) + x_1(t)]e^{-j\omega t}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_{ch}(t)\cos\omega t dt - j\int_{-\infty}^{\infty} x_{ch}(t)\sin\omega t dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\cos\omega t dt - j\int_{-\infty}^{\infty} x_l(t)\sin\omega t dt$$

Các tích phân thứ hai và thứ ba trong tổng trên bằng không, do đó:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{ch}(t)\cos\omega t dt - j\int_{-\infty}^{\infty} x_l(t)\sin\omega t dt = P(\omega) + jQ(\omega) \qquad (4.7)$$

Từ biểu thức (4.83) có thể thấy các tính chất sau đây của phổ.

➢ Tính chất 2: Nếu x(t) là tín hiệu thực thì phổ là hàm chẵn và phổ ảo là hàm lẻ theo biến ω, tức là:

$$P(\omega) = Q(-\omega) \quad (4.8a)$$

$$Q(\omega) = -Q(-\omega) \quad (4.8b)$$

Phổ phức của tín hiệu thực do đó là hàm Hermit.

Với tín hiệu thực thì phổ biên độ là hàm chẵn và phổ pha là hàm lẻ theo ω, có thể viết:

$$|X(\omega)| = |X(-\omega)| \quad (4.9)$$

$$\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega) \quad (4.10)$$

➢ Tính chất 3: Nếu tín hiệu x(t) có phổ X(ω) tức là:

$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$, thì:

$$x(-t) \leftrightarrow X(-\omega) \quad (4.11)$$

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-\omega) \quad (4.12)$$

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(\omega) \quad (4.13)$$

➢ Tính chất 4: Định lí về tính tuyến tính của phổ:

$$ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(\omega) + bY(\omega) \quad (4.14)$$

➢ Tính chất 5: Tính chất đối xứng:

Nếu $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$

Thì $X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$ (4.15)

➢ Tính chất 6: Định lí về đồng dạng (tỉ lệ)

$$x\left(\frac{t}{a}\right) \leftrightarrow |a| X(a\omega); \qquad a \in R\{-0\} \quad (4.16)$$

Nếu $a > 1$, thang thời gian sẽ "nở" ra, tín hiệu bị căng ra trên thang thời gian. Việc mở rộng thang thời gian sẽ gây ra nên hai tín hiệu ứng trong miền tần số, một là làm co hẹp thang tần số và hai là làm tăng mật độ phổ lên a lần. Các hiệu ứng này về mặt ý nghĩa vật lí có thể được hiểu như sau: việc kéo căng tín hiệu trong miền thời gian làm giảm tốc độ thay đổi của nó, do đó phổ của nó sẽ tập trung ở miền tần số thấp.

Nếu $0 < a < 1$ tín hiệu bị ép lại trong miền thời gian, trong miền tần số sẽ xảy ra điều ngược lại. Với giá trị $a < 0$ định lí cũng được giải thích tương tự.

➢ Tính chất 7: Định lí dịch chuyển trong miền thời gian

$$x(t, t_0) \leftrightarrow X(\omega) e^{-j\omega t_0} \quad (4.17)$$

➢ Tính chất 8: Định lí dịch chuyển trong miền tần số. (Định lí điều chế tín hiệu)

Định lí này là đối ngẫu của định lí dịch chuyển trong miền thời gian. Nếu phổ của tín hiệu dịch chuyển sang phải một khoảng $\omega_0 > 0$, thì tương ứng tín hiệu được nhân thêm với hàm phức $e^{j\omega_0 t}$:

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0) \tag{4.18}$$

Và khi dịch chuyển sang trái với $\omega_0 > 0$,

$$x(t)e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega + \omega_0) \tag{4.19}$$

Cộng trừ hai vế của hai biểu thức trên ta sẽ có:

$$x(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}[X(\omega+\omega_0) + X(\omega+\omega_0)] \tag{4.20}$$

$$x(t)\sin\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2j}[X(\omega+\omega_0) - X(\omega+\omega_0)] \tag{4.21}$$

➢ Tính chất 9: Định lí vi phân trong miền tần số

$$(-j)^n t^n x(t) \leftrightarrow \frac{d^n X(\omega)}{d\omega^n}, \quad n = 1,2,3,... \tag{4.22}$$

➢ Tính chất 10: Định lí vi phân trong miền thời gian

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega), \quad n = 1,2,3,... \tag{4.23}$$

➢ Tính chất 11: Tích phân trong miền thời gian.

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}X(\omega) \tag{4.24}$$

➢ Tính chất 12: Tích chập trong miền thời gian

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(\omega)Y(\omega) \tag{4.25}$$

➢ Tính chất 13: Tích chập trong miền tần số

$$x(t)y(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}[X(\omega) * Y(\omega)] \tag{4.26}$$

➢ Tính chất 14: Định lí về hàm tương quan

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t-\tau) \leftrightarrow X(\omega)\overset{*}{Y}(\omega) \tag{4.27}$$

➢ Tính chất 15: Định lí về hàm tự tương quan

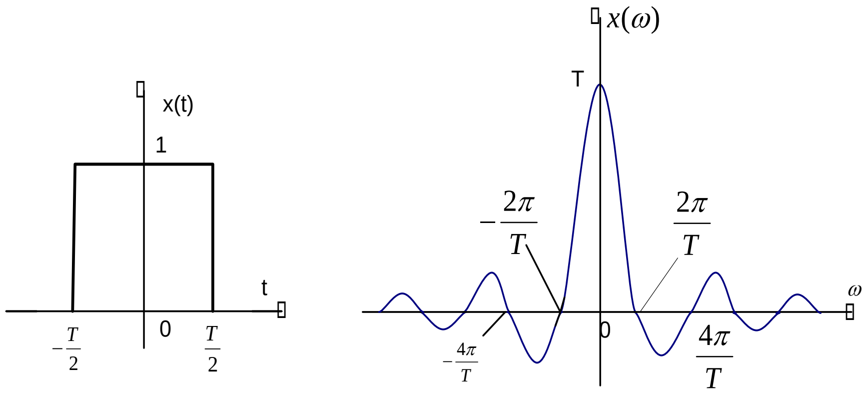
$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau) \leftrightarrow |X(\omega)|^2 \tag{4.28}$$

➢ Tính chất 16: Định lí về tích vô hướng

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \tag{4.29}$$

4.3. Các cặp biến đổi Fourier thông thường

a. $$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow TSa\frac{\omega T}{2}$$



Hình 4.24

Từ định nghĩa:

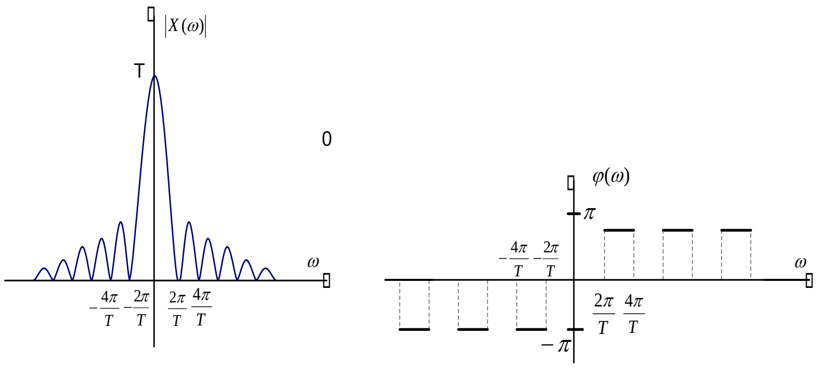
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j\omega t}dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t}dt = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t}\Big|_{-T/2}^{T/2}$$

$$= \frac{1}{j\omega}(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}) = \frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega T}{2} = TSa\frac{\omega T}{2}$$

Tín hiệu xung vuông góc là chẵn nên phổ của nó là hàm thực và chẵn. Phổ biên độ:

$$|X(\omega)| = T\left|Sa\frac{\omega T}{2}\right| \tag{4.30}$$

Phổ pha của nó tương đối phức tạp có giá trị không, π hoặc $-\pi$ tùy trong các khoảng tần số (H.4.25)



Hình 4.25

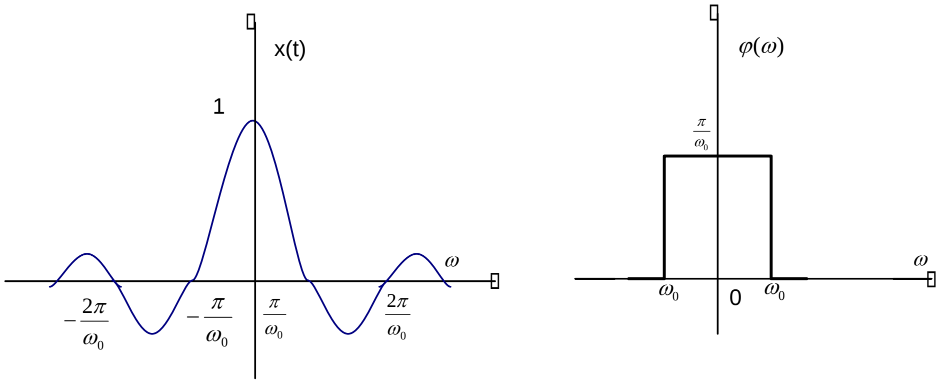
b. $$Sa\,\omega_0 t \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_0}\Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right) \tag{4.31}$$

Việc tính phổ của tín hiệu này trực tiếp từ định nghĩa tương đối khó. Ta hãy áp dụng định lí đối xứng (4.91) để suy ra phổ của hàm $Sa(\omega_0 t)$ khi chú ý đến phổ của xung vuông vừa xét ví dụ 6.3.1. Cần chú ý rằng cần phải thay đối ngẫu $\omega \leftrightarrows t$ và $\omega_0 = \frac{T}{2}$ trong các biểu thức của:

$$\prod\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow TSa\frac{\omega T}{2}$$

$$2\omega_0 Sa\omega_0 t \leftrightarrow 2\pi\prod\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$$

Phổ của tín hiệu hiệu $Sa(\omega_0 t)$ được vẽ trên hình 4.26



Hình 4.26

c. $$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow TSa^2\frac{\omega T}{2} \qquad (4.32)$$

Phổ của xung tam giác ta có thể tính từ định nghĩa. Tuy nhiên cũng có thể tính từ hàm tự tương quan của xung vuông góc. Biết rằng xung vuông góc $\prod\left(\frac{t}{T}\right)$ có hàm tự tương quan:

$$\varphi(\tau) = T\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$$

Mặt khác, từ định lí về hàm tương quan ta có:

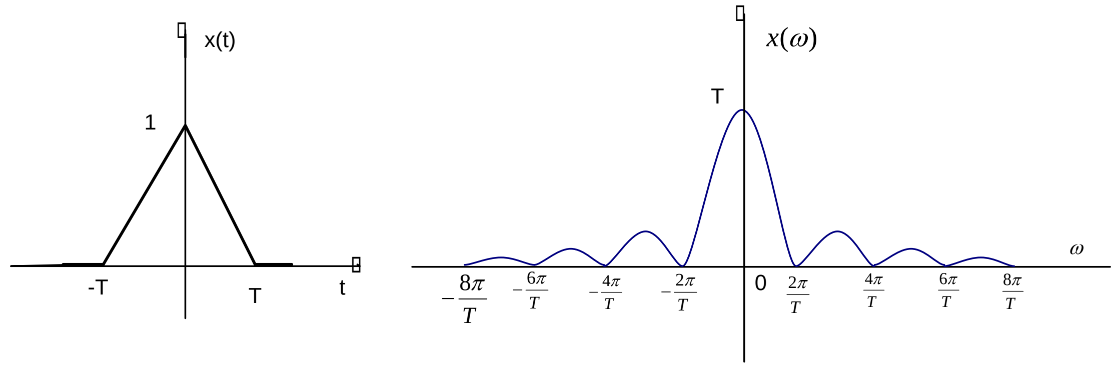
$$\varphi(\tau) \leftrightarrow |X(\omega)|^2 \qquad (4.33)$$

Trong đó phổ của xung vuông góc $X(\omega) = TSa\left(\frac{\omega T}{2}\right)$ nên ta có thể suy ra:

$$T\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow T^2 Sa^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

Hay là: $$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow TSa^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

Phổ của xung tam giác biểu diễn trên hình 4.27



Hình 4.27

d. $$Sa^2(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_0}\Lambda\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right) \tag{4.34}$$

Phổ của tín hiệu này lại được suy từ phổ của xung tam giác khi áp dụng định lí đối xứng. Hoặc cũng có thể suy từ định lí về tính chập trong miền tần số khi viết $Sa^2(\omega_0 t) = Sa(\omega_0 t)Sa(\omega_0 t)$

$$Sa^2(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi}{\omega_0}\prod\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right) * \frac{\pi}{\omega_0}\prod\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)\right] =$$

$$\frac{\pi^2}{2\pi\omega_0} 2\omega_0 \wedge \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right) = \frac{\pi}{\omega_0} \wedge \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$$

4.4. Phổ Fourier giới hạn (Phổ của tín hiệu công suất không tuần hoàn)

Một vài ví dụ:

a. $$\delta(t) \leftrightarrow 1 \tag{4.35}$$

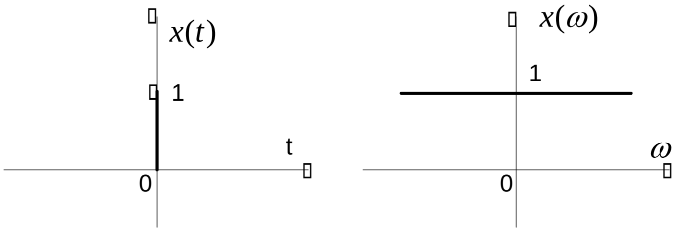
Phân bố Đirăc hay xung Đirăc không có biến đổi Fourier . Bằng cách chọn dãy hàm gần đúng của hàm $\delta(t)$ là:

$$\left\{x_\alpha(t), \alpha \in R^+\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2}} e^{-t^2/2\alpha^2}$$

Các phần tử của dãy có ảnh Fourier là:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2}} e^{-t^2/2\alpha^2} \leftrightarrow e^{-\alpha^2\omega^2/2}$$

Khi $\alpha \to 0$. Dãy bên trái sẽ tiến tới $\delta(t)$, còn dãy bên phải sẽ tiến tới 1 với mọi ω. Do đó $\delta(t) \leftrightarrow 1$ là cặp biến đổi Fourier giới hạn (H.4.28)

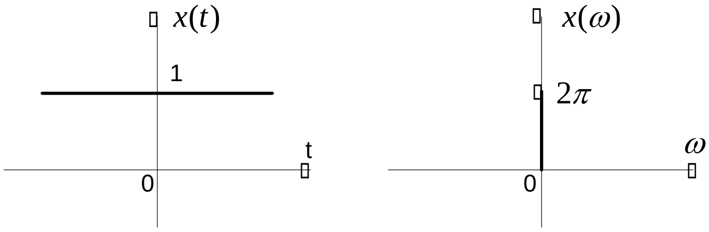


Hình 4.28

Từ hình vẽ có thể nhận thấy rằng: phổ của xung Đirăc không đổi trên trục tần số, điều đó có nghĩa là xung Đirăc có tất cả các tốc độ biến thiên với mật độ như nhau. Phổ như vậy được gọi là phổ "trắng", giống như tên gọi ánh sáng "trắng" bao hàm ý nghĩa trong ánh sáng "trắng" có tất cả các ánh sáng màu.

b. $$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \tag{4.36}$$

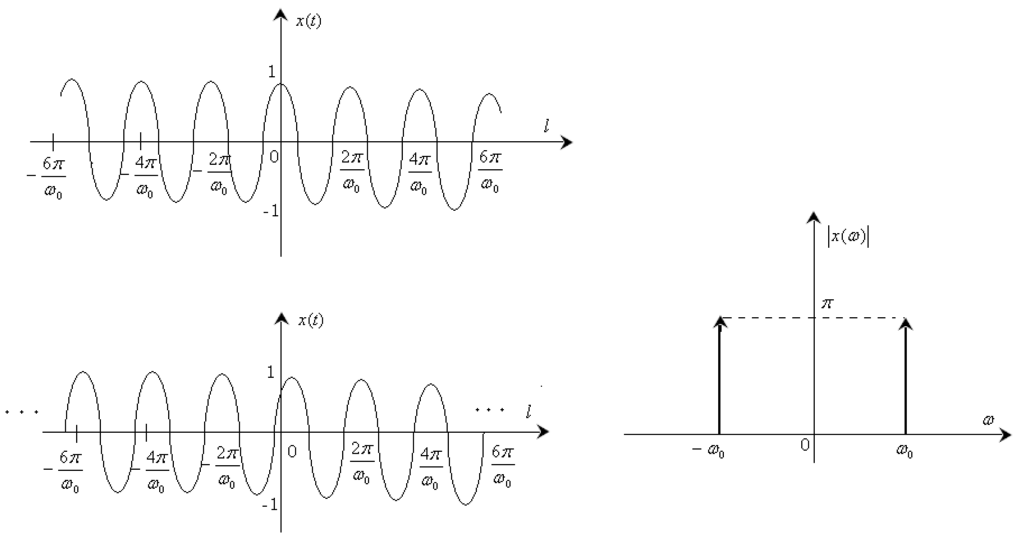
Cặp biến đổi (4.36) là đối ngẫu của cặp (4.35) khi ta áp dụng định lí đối xứng và tính chất chẵn của phân bố Đirăc. Mật độ phổ của tín hiệu một chiều tập trung tại điểm $\omega = 0$ (H.4.29)



Hình 4.29

Điều này chứng tỏ rằng quá trình một chiều chỉ chứa mỗi thành phần có tốc độ biến đổi bằng không.

c. Bằng cách tương tự có thể tìm phổ của $\cos\omega_0 t$ và $\sin\omega_0 t$ là những tín hiệu điều hòa. Ta có thể dễ dàng xác định phổ của các dao động này trên trục tần số, khi ta áp dụng định lí điều chế cho cặp (4.36):



Hình 4.30

d. $$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0) \qquad (4.37)$$

Cặp biến đổi Fourier giới hạn này có được là do áp dụng định lí dịch chuyển trong miền tần số cho cặp (1.113).