Министерство образования и науки Российской Федерации федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет «Программной инженерии и компьютерной техники.»

Дополнительные главы математического анализа

ИДЗ №2

Выполнил
Григорьев Давид Владимирович
Группа: P3215
Проверил
Попов Арсений Михайлович

Санкт-Петербург 2024

Содержание

1 Задание 1.

Записать как двойной интеграл, сделать рисунок области и поменять порядок интегрирования.

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f\,dx$$

Чтобы записать как двойной интеграл, нужно определить область, по которой происходит интегрирование. Можно заметить, что по оси Y, два интеграла не пересекаются, значит, по свойству аддитивности, их можно будет объединить в один двойной интеграл по объединённой области.

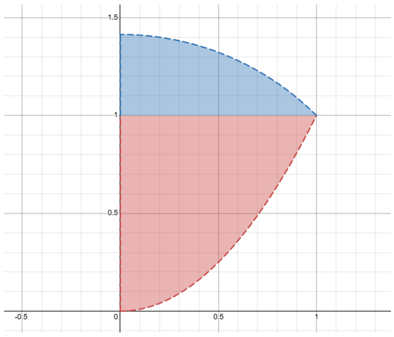

Рис. 1: Задание 1. Область интегрирования.

Красным отмечена область левого интеграла, а синим - правого. Тогда можно записать двойной интеграл как

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f\,dx = \iint\limits_D f\,dx\,dy$$

Где $D = \left\{0 < x < \sqrt{y}\ \{0 < y < 1\}\right\} \cup \left\{0 < x < \sqrt{2-y^2}\left\{1 < y < \sqrt{2}\right\}\right\}$

Теперь попробуем поменять порядок интегрирования. Для этого нужно выразить x через y и наоборот.

Сначала выразим красную область. x тут меняется внутри $(0, 1)$, а y найдем из неравенства.

$$0 < x < \sqrt{y} \Rightarrow x^2 < y$$

И так как x изначально был в $(0, 1)$, то и y будет идти до 1. Тогда красная зона выражается так.

$$x^2 < y < 1\,\{0 < x < 1\} \tag{1}$$

Для синей области x так же меняется внутри $(0, 1)$. Этот y тоже ограничен 1, но уже снизу.

$$x < \sqrt{2-y^2} \Rightarrow x^2 < 2 - y^2 \Rightarrow x^2 - 2 < -y^2 \Rightarrow y^2 < 2 - x^2 \Rightarrow y < \sqrt{2-x^2}$$

$$1 < y < \sqrt{2-x^2}\,\{0 < x < 1\} \tag{2}$$

Теперь можно записывать это в виде интегралов, используя (1) и (2).

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f\,dx = \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 f\,dy + \int_0^1 dx \int_1^{\sqrt{2-x^2}} f\,dy$$

Посмотреть задание в Desmos

2 Задание 2.

Область в $\mathbb{R}^2$ ограничена данными кривыми. Найти площадь с помощью двойного интеграла, выполнить рисунок.

$$y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}, x = 0$$

Преобразуем данные равенства, чтобы было легче изобразить.

$$\left(y^2 - 2y + 1\right) - 1 + x^2 = 0, \left(y^2 - 2 \cdot 3 \cdot y + 3^2\right) - 3^2 + x^2 = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}, x = 0$$

$$(y-1)^2 + x^2 = 1^2, \left(y^2 - 3\right)^2 + x^2 = 3^2, y = \frac{x}{\sqrt{3}}, x = 0$$

Итого мы имеем два круга, один с радиусом 1 и центром в $(0, 1)$, и второй с радиусом 3 и центром в $(0, 3)$ и прямую с наклоном $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

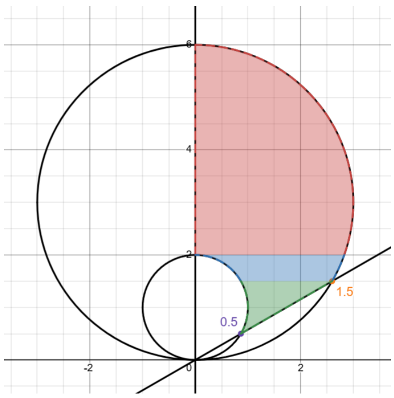

Рис. 2: Задание 2. Области интегрирования (Desmos).

Нужный нам интеграл можно записать в следующем виде.

$$\iint\limits_{\text{Фигура}} 1\,dx\,dy = \iint\limits_{\text{Красная}} 1\,dx\,dy + \iint\limits_{\text{Синяя}} 1\,dx\,dy + \iint\limits_{\text{Зеленая}} 1\,dx\,dy =$$

$$= \int_2^6 dy \int_0^{\sqrt{9-(y-3)^2}} dx + \int_{1.5}^2 dy \int_{\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{9-(y-3)^2}} dx + \int_{0.5}^{1.5} \int_{\sqrt{1-(y-1)^2}}^{y\sqrt{3}} dx =$$

$$= \int_2^6 \sqrt{9-(y-3)^2}\,dy + \int_{1.5}^2 \sqrt{9-(y-3)^2} - \sqrt{1-(y-1)^2}\,dy + \int_{0.5}^{1.5} y\sqrt{3} - \sqrt{1-(y-1)^2}\,dy =$$

$$= \int_2^6 \sqrt{9-(y-3)^2}\,dy + \int_{1.5}^2 \sqrt{9-(y-3)^2}\,dy - \int_{1.5}^2 \sqrt{1-(y-1)^2}\,dy + \int_{0.5}^{1.5} y\sqrt{3}\,dy - \int_{0.5}^{1.5} \sqrt{1-(y-1)^2}\,dy$$

$$= \int_{1.5}^6 \sqrt{9-(y-3)^2}\,dy - \int_{0.5}^2 \sqrt{1-(y-1)^2}\,dy - \int_{0.5}^{1.5} y\sqrt{3}\,dy =$$

$$= \int_{-1.5}^3 \sqrt{9-t^2}\,dt - \int_{-0.5}^1 \sqrt{1-t^2}\,dt - \sqrt{3}\int_{0.5}^{1.5} y\,dy$$

Воспользуемся тем фактом, что знаем, как выглядит первообразная для одной из функций.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

Тогда, возвращаясь к нашему интегралу

$$= \left[\frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{t}{3}\right) + \frac{1}{2}t\sqrt{9-t^2}\right]_{-1.5}^{3} - \left[\frac{1}{2}\arcsin(t) + \frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2}\right]^{1-0.5} + \sqrt{3}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{0.5}^{1.5} =$$

$$= \frac{9\pi}{4} - \left(-\frac{3\pi}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{8}\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)\right) + \sqrt{3} =$$

$$3 = \pi + \frac{9\sqrt{3}}{8} - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) - \sqrt{3} = \boxed{\frac{8\pi}{3}}$$

3 Задание 3.

Найти объем тела, ограниченного данными поверхностями, с помощью тройного интеграла.

$$x = 2y^2 + 3, x = 5, z = 1 + \sqrt{9x^2 + 4y^2}, z = 4 + \sqrt{9x^2 + 4y^2}$$

Попробуем найти границы интегрирования. Чтобы x был ограничен, нужно, чтобы уравнение $x = 5$ было его верхней границей. Тогда нижней границей станет $2y^2 + 3$. Отсюда можно найти, как меняется y.

$$2y^2 + 3 < 5 \Rightarrow 2y^2 < 2 \Rightarrow y^2 < 1 \Rightarrow y \in (-1, 1)$$

Для z просто возьмем уравнения из условия, так как x и y уже найдены. Теперь можно записать интеграл объема.

$$V = \int_{-1}^{1} dy. \int_{2y^2+3}^{5} dx \int_{1+\sqrt{9x^2+4y^2}}^{4+\sqrt{9x^2+4y^2}} dz$$

Интегрируем по z.

$$\int_{1+\sqrt{9x^2+4y^2}}^{4+\sqrt{9x^2+4y^2}} dz = [z]_{1+\sqrt{9x^2+4y^2}}^{4+\sqrt{9x^2+4y^2}} = (4 + \sqrt{9x^2 + 4y^2}) - (1 + \sqrt{9x^2 + 4y^2}) = 3.$$

Тогда интеграл объема можно упростить.

$$V = \int_{-1}^{1} dy. \int_{2y^2+3}^{5} dx \int_{1+\sqrt{9x^2+4y^2}}^{4+\sqrt{9x^2+4y^2}} dz = \int_{-1}^{1} dy. \int_{2y^2+3}^{5} 3\,dx$$

Интегрируем по x.

$$\int_{2y^2+3}^{5} 3\,dx = 3\,[x]_{2y^2+3}^{5} = 3\left(5 - (2y^2 + 3)\right) = 3(2 - 2y^2) = 6(1 - y^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \int_{-1}^{1} dy. \int_{2y^2+3}^{5} 3\,dx = \int_{-1}^{1} 6(1 - y^2)\,dy.$$

Интегрируем по y.

$$V = \int_{-1}^{1} 6(1-y^2)\,dy = 6\int_{-1}^{1} (1-y^2)\,dy = 6\left[y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 6\left(\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right) = 6\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) = \boxed{8}$$

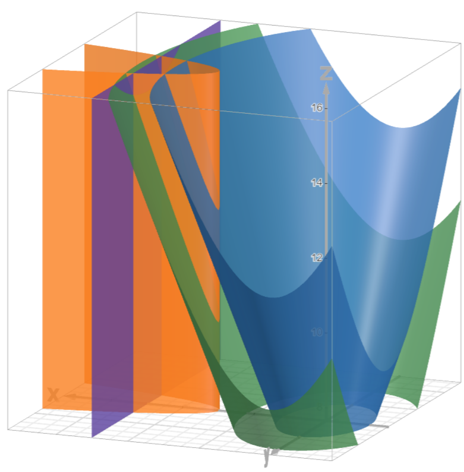

Рис. 3: Задание 3. Ограничивающие поверхности (Desmos).

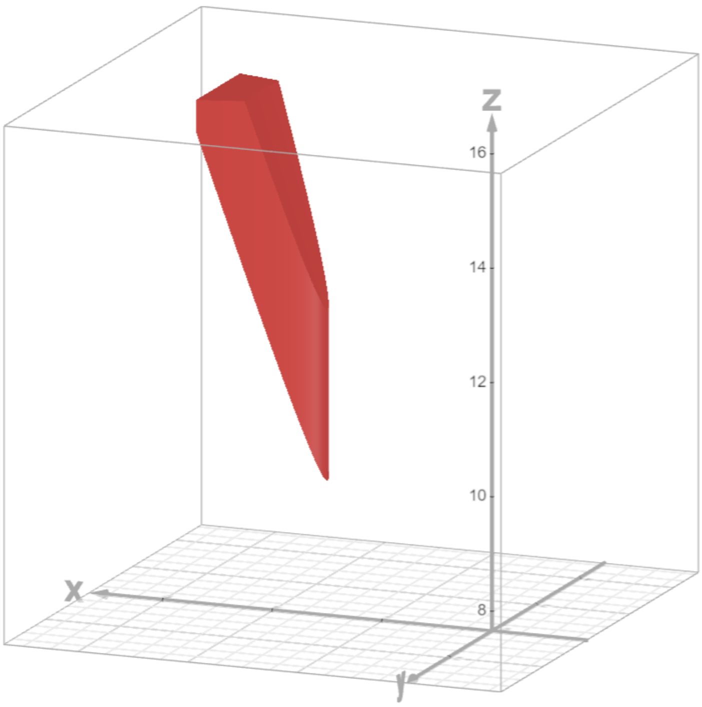

Рис. 4: Задание 3. Тело, которое задано поверхностями (Desmos).

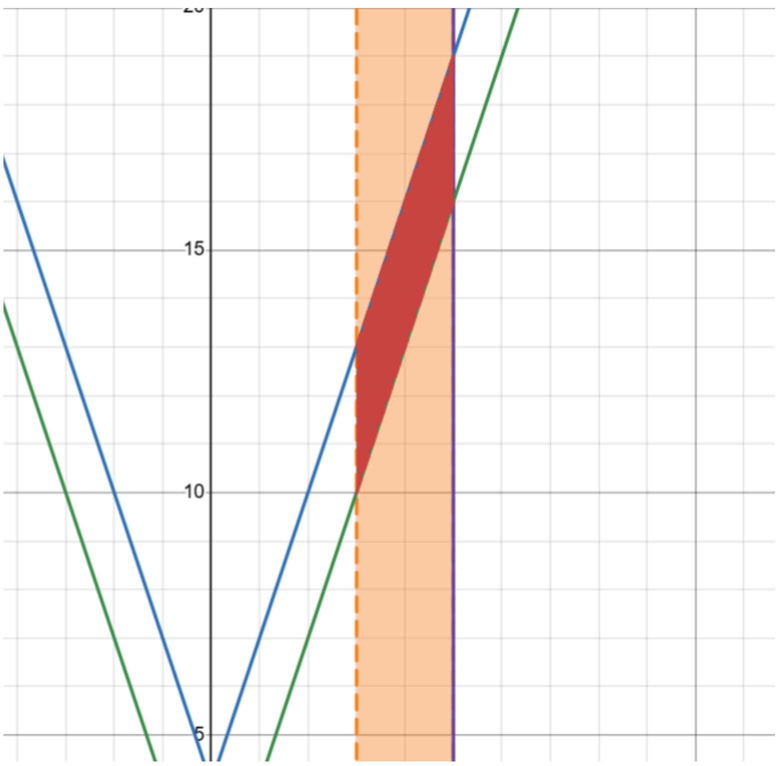

Рис. 5: Задание 3. Сечение по плоскости XZ при $y = 0$ (Desmos).

4 Задание 4.

Сделать удобную замену переменных и найти площадь фигуры, выполнить рисунок области.

$$y = \frac{x^3}{a^2}, \quad y = \frac{x^3}{b^2}, \quad y = \frac{x^2}{c}, \quad y = \frac{x^2}{d}, \quad 0 < a < b, \quad 0 < c < d.$$

В идеале, нам нужно свести эту фигуру к прямоугольнику. Попробуем оставить параметры на одной части, переменные в другой.

$$a^2 = \frac{x^3}{y}, \quad b^2 = \frac{x^3}{y}, \quad c = \frac{x^2}{y}, \quad d = \frac{x^2}{y}$$

Заметим, что для a^2 и b^2 уравнение повторяется, как и для c и d.

$$u = \frac{x^3}{y} \qquad v = \frac{x^2}{y}$$

Тогда эта область превращается в прямоугольник в uv - плоскости, стороны которого ограничиваются сторонами $u = a^2$, $u = b^2$ и $v = c$ и $v = d$.

Можно посчитать площадь через следующий интеграл.

$$S = \int_{a^2}^{b^2} \int_{c}^{d} 1 \cdot |\det J| \, dv \, du$$

Где $|J|$ - это якобиан. Чтобы найти его, нужно выразить x и y через новые переменные. Сначала x.

$$\begin{cases} u = \dfrac{x^3}{y} \\ v = \dfrac{x^2}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^3}{u} \\ y = \dfrac{x^2}{v} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^3}{u} = \frac{x^2}{v} \Rightarrow \frac{x^3}{x^2} = \frac{u}{v} \Rightarrow \quad x = \frac{u}{v}$$

Теперь y.

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^3}{u} \\ x = \dfrac{u}{v} \end{cases} \Rightarrow \quad y = \frac{u^3}{v^3} \cdot \frac{1}{u} = \frac{u^2}{v^3}$$

Теперь посчитаем определитель якобиана.

$$\det J = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v} \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u}{v}\right) = -\frac{u}{v^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u^2}{v^3}\right) = \frac{2u}{v^3} \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u^2}{v^3}\right) = -\frac{3u^2}{v^4}$$

Теперь подставим полученные значения в якобиан.

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \dfrac{1}{v} & -\dfrac{u}{v^2} \\ \dfrac{2u}{v^3} & -\dfrac{3u^2}{v^4} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{v}\right)\left(-\frac{3u^2}{v^4}\right) - \left(-\frac{u}{v^2}\right)\left(\frac{2u}{v^3}\right) = \frac{u^2}{v^5}$$

Теперь вернемся к интегралу.

$$S = \int_{a^2}^{b^2} \int_{c}^{d} 1 \cdot |\det J| \; dv\, du = \int_{a^2}^{b^2} \int_{c}^{d} 1 \cdot \left| -\frac{u^2}{v^5} \right| dv\, du = \int_{a^2}^{b^2} \int_{c}^{d} \frac{u^2}{v^5}\, dv\, du =$$

$$\int_{a^2}^{b^2} u^2\, du \int_{c}^{d} \frac{1}{v^5}\, dv = \int_{a^2}^{b^2} u^2 \cdot \frac{1}{4v^4}\Big|_{c}^{d} du = \int_{a^2}^{b^2} u^2 \frac{d^4 - c^4}{4c^4 d^4}\, du =$$

$$= \frac{d^4 - c^4}{4c^4 d^4} \int_{a^2}^{b^2} u^2\, du = \frac{d^4 - c^4}{4c^4 d^4} \cdot \frac{u^3}{3}\Big|_{a^2}^{b^2} = \frac{d^4 - c^4}{4c^4 d^4} \cdot \frac{b^6 - a^6}{3a^6 b^6} = \boxed{\frac{(d^4 - c^4)(b^6 - a^6)}{12 c^4 d^4 a^6 b^6}}$$

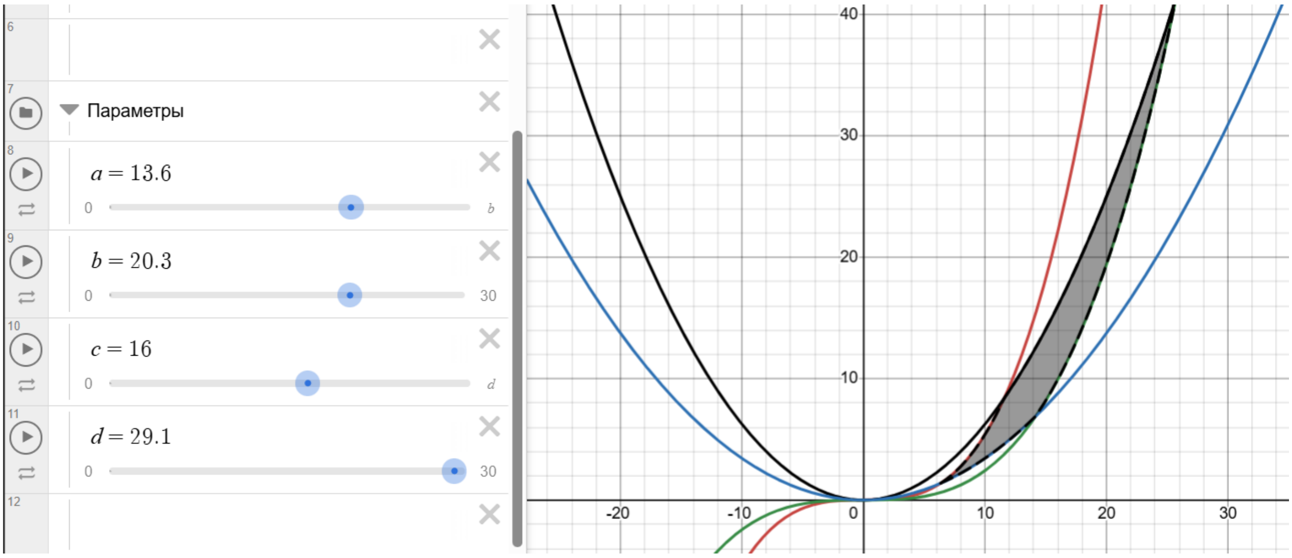

Рис. 6: Задание 4. Изображение фигуры. (Desmos).

5 Задание 5.

Найти объем тела, ограниченного поверхностями. Рисунок желателен. Па- раметры считать положительными.

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^3 = a^6 \sin^2\left(\frac{\pi z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

Тут напрашиваются сферические координаты. Сделаем переход.

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \quad \left(r^2\right)^3 = a^6\sin^2\left(\frac{\pi r\cos\theta}{\sqrt{r^2}}\right) \Rightarrow \quad r^6 = a^6\sin^2\left(\pi\cos\theta\right) \quad /\sqrt[6]{}$$

$$r = a\sqrt[3]{\sin\left(\pi\cos\theta\right)}$$

Теперь мы знаем, что $r \in \left(0, a\sqrt[3]{\sin\left(\pi\cos\theta\right)}\right)$. Значит, мы можем записать интеграл.

$$\int_0^{2pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a\sqrt[3]{\sin(\pi\cos\theta)}} dV = \int_0^{2pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a\sqrt[3]{\sin(\pi\cos\theta)}} r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi =$$

$$= \int_0^{2pi} d\phi \int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta \int_0^{a\sqrt[3]{\sin(\pi\cos\theta)}} r^2\, dr = \int_0^{2pi} d\phi \int_0^{\pi}\frac{a^3}{3}\sin\theta\sin\left(\pi\cos\theta\right)\, d\theta =$$

Сделаем замену переменной, пусть $u = \pi\cos\theta$, тогда $du = -\pi\sin\theta\, d\theta \Rightarrow -\frac{1}{\pi}\, du = \sin\theta\, d\theta$
Насчет границ интегрирования: $\pi\cos 0 = \pi, \pi\cos\pi = -\pi$

$$\int_0^{2pi} d\phi \int_{\pi}^{-\pi} -\frac{a^3}{3\pi}\sin u, du = \int_0^{2pi} d\phi \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a^3}{3\pi}\sin u, du \Rightarrow$$

Синус нечетная функция, поэтому мы получим ноль. Но объем фигуры не может быть нулем, она просто симметрична относительно плоскости XY. Тогда поменяем границы интегрирования и удвоим интеграл.

$$\Rightarrow \int_0^{2pi} d\phi \int_0^{\pi}\frac{2a^3}{3\pi}\sin u\, du = \frac{2a^3}{3\pi}\int_0^{2pi}\left[-\cos u\right]_0^{\pi}\, d\phi = \frac{2a^3}{3\pi}\int_0^{2pi} 2\, d\phi = \frac{2a^3}{3\pi}\cdot 4\pi = \boxed{\frac{8a^3}{3}}$$

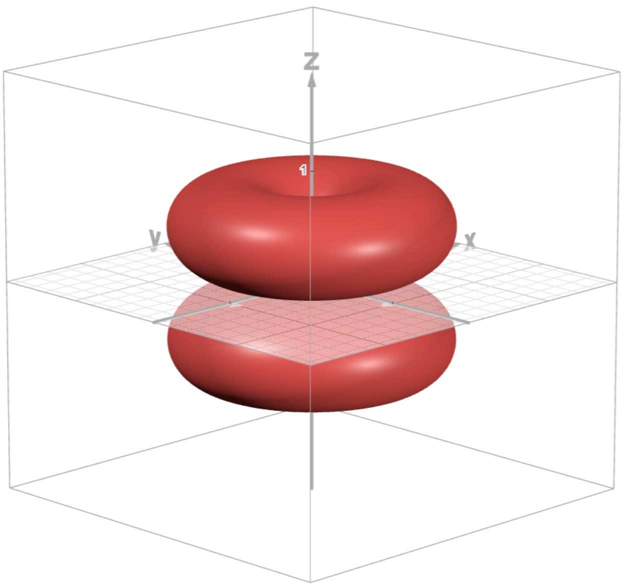

Рис. 7: Задание 5. Изображение фигуры. (Desmos).

6 Задание 6.

Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(x, y, z)$ вдоль замкнутого контура Γ (ориентацию контура выбрать самостоятельно). Вычислить двумя способами: с помощью криволинейного и поверхностного интегралов.

$$\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z^2\vec{k} \quad \Gamma : z = 3\left(x^2 + y^2\right) + 1, z = 4$$

Заметим, что контур Γ можно упростить.

$$3\left(x^2 + y^2\right) + 1 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1^2$$

6.1 Решение с помощью криволинейного интеграла.

Циркуляцию векторного поля $\vec{a}$ вдоль Γ найдем по определению, как криволинейный интеграл второго рода.

$$C(\vec{a}) = \oint\limits_{\Gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

Параметризуем наше уравнение.

Путь, по которому мы проходим, назовем его $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ параметризуем переменной t, $t \in (0, 2\pi)$.

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 4)$$

Касательная к этому пути будет $\gamma'(t)$.

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

Теперь, с помощью теоремы о вычислении КИ-2.

$$C(\vec{a}) = \oint\limits_{\Gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{a}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

Посчитаем подынтегральную функцию.

$$\vec{a}(\gamma(t)) = \sin t \cdot \vec{i} - \cos t \cdot \vec{j} + 4^2$$

$$\vec{a}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (\sin t, -\cos t, 16) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) = -\sin^2 t - \cos^2 t + 16 \cdot 0 = -1$$

Тогда вернёмся к интегралу.

$$C(\vec{a}) = \int_0^{2\pi} \vec{a}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} -1\, dt = \boxed{-2\pi}$$

6.2 Решение с помощью поверхностного интеграла.

Тут нам поможет т. Стокса, которая связывает циркуляцию с поверхностным интегралом (потоком). Пусть $\Gamma = \partial\Sigma$

$$C_{\partial\Sigma}(\vec{a}) = \Pi_{\Sigma}(\vec{a}) \Rightarrow \oint\limits_{\partial\Sigma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint\limits_{\Sigma} \operatorname{rot}\vec{a} \cdot \vec{N_0} d\vec{S}$$

Найдем ротор $\vec{a}$. По определению $\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla \times \vec{a}$

$$\nabla\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & z^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(z^2\right) - \frac{\partial}{\partial z}(-x)\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(z^2\right) - \frac{\partial}{\partial z}(y)\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(-x) - \frac{\partial}{\partial y}(y)\right)\vec{k} =$$

$$= 0\vec{i} - 0\vec{j} - 2\vec{k}$$

Так как поверхность Σ является просто диском, параллельным плоскости XY, то её вектор нормали в любой точке будет $N_0 = (0, 0, 1)$ Осталось вспомнить, что $d\vec{S} = (dy\,dz, dx\,dz, dx\,dy)$ Теперь посчитаем интеграл.

$$\iint\limits_{\Sigma} \operatorname{rot}\vec{a} \cdot \overrightarrow{N_0} d\vec{S} = \iint\limits_{\Sigma} ((0, 0, -2) \cdot (0, 0, 1)) \cdot (dy\,dz, dx\,dz, dx\,dy) = \iint\limits_{\Sigma} -2dx\,dy = -2 \iint\limits_{\Sigma} dx\,dy$$

Причем этот двойной интеграл - это площадь круга с радиусом 1, и он равен π.

$$C_{\partial\Sigma}(\vec{a}) = -2 \iint\limits_{\Sigma} dx\,dy = \boxed{-2\pi}$$

Ответы сошлись, значит всё правильно :)

7 Задание 7.

Найти поток векторного поля $\vec{a}(x, y, z)$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя). Вычислить двумя способами: с помощью поверхностного и тройного интеграла.

$$\vec{a} = y\vec{i} + 5y\vec{j} + z\vec{k}, \quad S : x^2 + y^2 = 1, \quad z = x, \quad z = 0, \quad z \geq 0$$

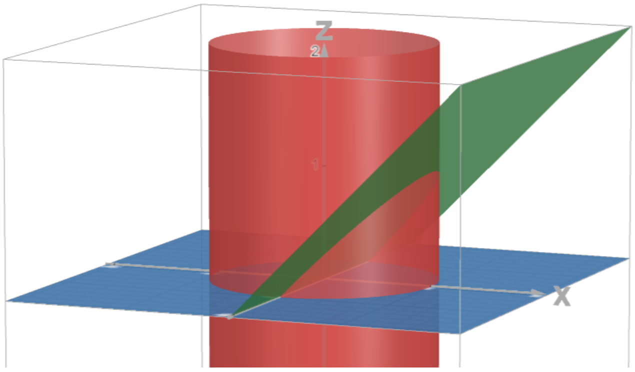

Рис. 8: Задание 7. Поверхности, задающие фигуру.(Desmos).

7.1 Решение с помощью тройного интеграла.

Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса.

$$\Pi_S(\vec{a}) = \iint\limits_S \vec{a} \cdot \vec{N_0}\, dS = \iiint\limits_V (\operatorname{div} \vec{a})\, dV$$

Посчитаем дивергенцию векторного поля $\vec{a}$.

$$\operatorname{div} \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}(y) + \frac{\partial}{\partial y}(5y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 0 + 5 + 1 = 6$$

Теперь подставим.

$$\iiint\limits_V (\operatorname{div} \vec{a})\, dV = 6 \iiint\limits_V dV$$

Перейдем в цилиндрические координаты. Причем, для нашей фигуры нужно ограничить переменные следующим образом.

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases}; \quad \begin{cases} z \geq 0 \\ z = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z \geq 0 \\ z = r\cos\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\phi \geq 0 \\ \phi \in [-\pi/2, \pi/2] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r \in [0, 1] \\ \phi \in [-\pi/2, \pi/2] \\ z \in [0, r\cos\phi] \end{cases}$$

Теперь мы можем сделать замену, учитывая $|J| = r$

$$6 \iiint\limits_V dV = 6 \int_0^1 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \int_0^{r\cos\phi} r\, dz = 6 \int_0^1 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos\phi\, d\phi = 6 \int_0^1 r^2 \left[-\sin\phi\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} dr =$$

$$= 6 \int_0^1 r^2 \cdot 2\, dr = 12 \cdot \frac{1}{3} = \boxed{4}.$$

7.2 Решение с помощью поверхностного интеграла.

$$\Pi_S(\vec{a}) = \iint\limits_S \vec{a} \cdot \vec{N_0} d\vec{S}$$

По свойству аддитивности интеграла, разобьем его на три: нижняя крышка, кусок цилиндра и верхняя крышка.

$$\iint\limits_S = \iint\limits_{\text{нижняя крышка}} + \iint\limits_{\text{верхняя крышка}} + \iint\limits_{\text{кусок цилиндра}}$$

Теперь найдем векторы нормали для каждого интеграла.

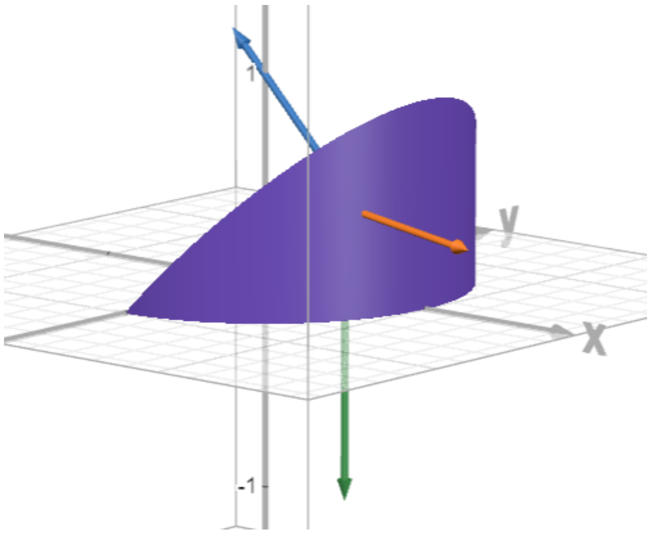

Рис. 9: Задание 7. Векторы нормали фигуры. (Desmos).

Для нижней крышки (зеленая стрелка) $\vec{N_0} = (0, 0, -1)$
Для верхней крышки (синяя стрелка) $\vec{N_0} = (-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$
Для куска цилиндра (оранжевая стрелка) $\vec{N_0}(\phi) = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$
Теперь можно рассмотреть каждый интеграл по отдельности.

$$\iint\limits_{\text{нижняя крышка}} \vec{a} \cdot \vec{N_0} d\vec{S} = \iint\limits_{\text{нижняя крышка}} (y, 5y, z) \cdot (0, 0, -1) d\vec{S} = \iint\limits_{\text{нижняя крышка}} -z\, d\vec{S} = 0$$

Так как нижняя крышка задается уравнением $z = 0$, то этот интеграл будет равен нулю.

$$\iint\limits_{\text{верхняя крышка}} \vec{a} \cdot \vec{N_0} d\vec{S} = \iint\limits_{\text{верхняя крышка}} (y, 5y, z) \cdot (-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2) d\vec{S} = \frac{\sqrt{2}}{2} \iint\limits_{\text{верхняя крышка}} (-y + z) d\vec{S}$$

Мы можем выразить z через x, т.к. эта поверхность задается уравнением $z = x$. Теперь $z(x, y) = x$.

$$d\vec{S} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy = \sqrt{2}\, dx\, dy$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \iint\limits_{\text{верхняя крышка}} (-y + z) d\vec{S} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \iint\limits_{x^2+y^2 \le 1 \{x \ge 0\}} (-y + x)\, dx\, dy$$

Перейдем в полярные координаты.

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1\{x\ge 0\}} (-y+x)\,dx\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \int_0^1 (-r\sin\phi + r\cos\phi)\cdot r\,dr = \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\phi - \sin\phi\,d\phi =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sin\phi + \cos\phi\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{3}\left[1+0-(-1+0)\right] = \frac{2}{3}$$

Теперь последний интеграл. Сразу перейдем в цилиндрические координаты, чтобы можно было пользоваться вектором нормали. Тут $r = const = 1$, тогда $|J| = 1$.

$$\begin{cases} x = \cos\phi \\ y = \sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

Так как эта поверхность ограничена сверху плоскостью $z = x$, можно выразить z через x.

$$\begin{cases} x = \cos\phi \\ z = x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z \in [0, \cos\phi]$$

$$\iint\limits_{\text{кусок цилиндра}} \vec{a}\cdot\overrightarrow{N_0}d\vec{S} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \int_0^{\cos\phi} \left((\sin\phi, 5\sin\phi, z)\cdot(\cos\phi, \sin\phi, 0)\right)\,dz =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\sin\phi\cos\phi + 5\sin^2\phi\right)\cos\phi\,d\phi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\phi\cos^2\phi + 5\sin^2\phi\cos\phi\,d\phi =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\phi\cos^2\phi\,d\phi + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 5\sin^2\phi\cos\phi\,d\phi$$

Рассмотрим левый интеграл и сразу сделаем замену переменной пусть $u = \cos\phi$, $du = -\sin\phi\,d\phi$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\phi\cos^2\phi\,d\phi = -\int_0^0 u^2\,du = 0$$

Рассмотрим правый интеграл и сразу сделаем замену переменной пусть $u = \sin\phi$, $du = \cos\phi\,d\phi$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 5\sin^2\phi\cos\phi\,d\phi = \int_{-1}^{1} 5u^2\,du = 5\cdot\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 5\cdot\left[\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{10}{3}$$

Теперь сложим полученные значения трех интегралов.

$$0 + \frac{2}{3} + \frac{10}{3} = \frac{12}{3} = \boxed{4}$$

Ответы сошлись, значит всё правильно :)

8 Задание 8.

Найти поток векторного поля $\vec{a}(x, y, z)$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя). Вычислить двумя способами: с помощью поверхностного и тройного интеграла.

$$\vec{a} = 3xz\,\vec{i} - 2x\,\vec{j} + y\,\vec{k}, \quad S : x + y + z = 2, x = 1, x = 0, y = 0, z = 0$$

8.1 Решение с помощью тройного интеграла.

Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса.

$$\Pi_S(\vec{a}) = \iint\limits_S \vec{a} \cdot \vec{N_0}\, dS = \iiint\limits_V (\operatorname{div}\vec{a})\, dV$$

Посчитаем дивергенцию векторного поля $\vec{a}$.

$$\operatorname{div}\vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}(3xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-2x) + \frac{\partial}{\partial z}(y) = 3z + 0 + 0 = 3z$$

Теперь подставим.

$$\iiint\limits_V (\operatorname{div}\vec{a})\, dV = \iiint\limits_V 3z\, dV$$

Теперь определимся с границами интегрирования. $x \in [0, 1]$, $y \in [0, \leq 2 - x]$, $z \in [0, 2 - x - y]$

$$\iiint\limits_V 3z\, dV = \int_0^1 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{2-x-y} 3z\, dz$$

Интегрируем по z.

$$\int_0^{2-x-y} 3z\, dz = 3\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{2-x-y} = \frac{3(2 - x - y)^2}{2}$$

Интегрируем по y.

$$\int_0^{2-x} \frac{3(2 - x - y)^2}{2}\, dy = \frac{3}{2}\int_0^{2-x} (4-4x-4y+x^2+2xy+y^2)\, dy = \frac{3}{2}\left[4y - 4xy - 2y^2 + x^2y + xy^2 + \frac{y^3}{3}\right]_0^{2-x} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[12y - 12xy - 6y^2 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\right]_0^{2-x} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[12(2 - x) - 12x(2 - x) - 6(2 - x)^2 + 3x^2(2 - x) + 3x(2 - x)^2 + (2 - x)^3\right] = ... =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-x^3 + 6x^2 - 12x + 8\right]$$

Интегрируем по x.

$$\frac{1}{2}\int_0^1 -x^3 + 6x^2 - 12x + 8\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 6x^2 + 8x\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1^4}{4} + 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4} + 2 - 6 + 8\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1 + 8 - 24 + 32}{4} = \boxed{\frac{15}{8}}$$

8.2 Решение с помощью поверхностного интеграла.

$$\Pi_S(\vec{a}) = \iint\limits_S \vec{a} \cdot \vec{N_0} d\vec{S}$$

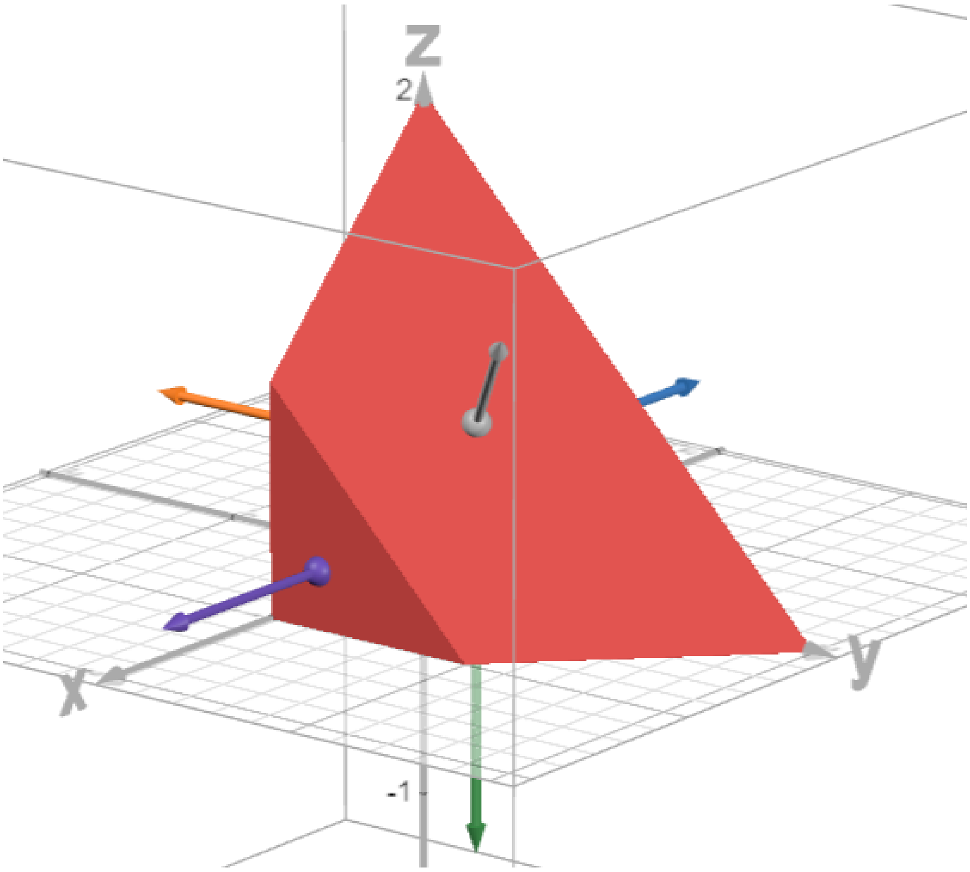

Рис. 10: Задание 8. Форма фигуры, с её векторами нормали.(Desmos).

Разделим интеграл на 5 поверхностей.

$$\iint\limits_S = \iint\limits_{\text{верхняя}} + \iint\limits_{\text{передняя}} + \iint\limits_{\text{левая}} + \iint\limits_{\text{задняя}} + \iint\limits_{\text{нижняя}}$$

Теперь перейдем к самой увлекательной части.

$$\iint\limits_{\text{верхняя}} \vec{a} \cdot \vec{N_0} d\vec{S} = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint\limits_{\text{верхняя}} (3xz, -2x, +y) \cdot (1,1,1))\, d\vec{S} = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint\limits_{\text{верхняя}} 3xz - 2x + y\, d\vec{S}$$

$$\begin{cases} z(x,y) = 2 - x - y \\ d\vec{S} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy \end{cases} \Rightarrow \quad d\vec{S} = \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2}\, dx\, dy = \sqrt{3}\, dx\, dy$$

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^1 dx \int_0^{2-x} 3x(2-x-y) - 2x + y\, dy = \int_0^1 dx \int_0^{2-x} (4x - 3x^2 - 3xy + y)\, dy =$$

$$= \int_0^1 \left[(4x - 3x^2)y - \frac{3xy^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right]_0^{2-x} dx = \int_0^1 (4x - 3x^2)(2-x) - \frac{3x(2-x)^2}{2} + \frac{(2-x)^2}{2}\, dx =$$

$$\int_0^1 \left(2 + \frac{3x^3}{2} - \frac{7x^2}{2}\right) dx = \left[2x + \frac{3x^4}{8} - \frac{7x^3}{6}\right]_0^1 = \left(2 + \frac{3}{8} - \frac{7}{6}\right) = \left(2 + \frac{9}{24} - \frac{28}{24}\right) =$$

$$= \left(2 - \frac{19}{24}\right) = \left(\frac{48}{24} - \frac{19}{24}\right) = \frac{29}{24}$$

$$\iint\limits_{\text{передняя}} \vec{a} \cdot \overrightarrow{N_0}\, d\vec{S} = \iint\limits_{\text{передняя}} (3xz, -2x, +y) \cdot (1, 0, 0))\, d\vec{S} = \iint\limits_{\text{передняя}} 3xz\, d\vec{S} = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} 3xz\, dz =$$

$$= \{\text{тут } x = const = 1\} = 3\int_0^1 dy \int_0^{1-y} z\, dz = \frac{3}{2}\int_0^1 (1-y)^2\, dy = \frac{3}{2}\left[y - y^2 + \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\left[1 - 1 + \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{2}$$

$$\iint\limits_{\text{левая}} \vec{a} \cdot \overrightarrow{N_0}\, d\vec{S} = \iint\limits_{\text{левая}} (3xz, -2x, +y) \cdot (0, -1, 0))\, d\vec{S} = \iint\limits_{\text{левая}} 2x\, d\vec{S} = \int_0^1 dx \int_0^{2-x} 2x\, dz =$$

$$= \int_0^1 2x(2-x)\, dx = 2\int_0^1 2x - x^2\, dx = 2\left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left[1 - \frac{1}{3}\right] = \frac{4}{3}$$

$$\iint\limits_{\text{задняя}} \vec{a} \cdot \overrightarrow{N_0}\, d\vec{S} = \iint\limits_{\text{задняя}} (3xz, -2x, +y) \cdot (-1, 0, 0))\, d\vec{S} = \iint\limits_{\text{задняя}} -3xz\, d\vec{S} =$$

$$= \{\text{тут } x = 0 \text{ на всей поверхности}\} = 0$$

$$\iint\limits_{\text{нижняя}} \vec{a} \cdot \overrightarrow{N_0}\, d\vec{S} = \iint\limits_{\text{нижняя}} (3xz, -2x, +y) \cdot (0, 0, -1))\, d\vec{S} = \iint\limits_{\text{нижняя}} -y\, d\vec{S} = -\int_0^1 dx \int_0^{2-x} y\, dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 (2-x)^2\, dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 4 - 4x + x^2\, dx = -\frac{1}{2}\left[4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\left[4 - 2 + \frac{1}{3}\right] = -\frac{7}{6}$$

$$\iint\limits_{S} \vec{a} \cdot \overrightarrow{N_0} d\vec{S} = \frac{29}{24} + \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + 0 - \frac{7}{6} = \boxed{\frac{15}{8}}$$

Ответы сошлись, мы победили :)

9 Задание 9.

Проверить, является ли данное поле потенциальным и соленоидальным. Для потенциального поля найти его потенциал с помощью криволинейного интеграла. Провести проверку потенциала.

$$\vec{a} = (2x\sin y - 2)\vec{i} + (x^2\cos y - z^2)\vec{j} - 2yz\vec{k}.$$

Воспользуемся критерием потенциальности поля и проверим, что его ротор равен нулю.

$$\nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x\sin y - 2 & x^2\cos y - z^2 & -2yz \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(-2yz) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2\cos y - z^2)\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(-2yz) - \frac{\partial}{\partial z}(2x\sin y - 2)\right)\vec{j} +$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2\cos y - z^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2x\sin y - 2)\right)\vec{k} = (-2z-(-2z))\vec{i} - (0-0)\vec{j} + (2x\cos y - 2x\cos y)\vec{k} =$$

$$= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = 0 \Rightarrow \text{Поле потенциально.}$$

Воспользуемся критерием соленоидальности поля и проверим, что его дивергенция равна нулю.

$$\nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}(2x\sin y - 2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2\cos y - z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(-2yz) =$$

$$= 2\sin y + (-x^2\sin y) + (-2y) = 2\sin y - x^2\sin y - 2y \neq\Rightarrow \text{Поле } \textbf{не} \text{ солеидально.}0$$

Теперь найден потенциал поля. Для этого нужно найти интеграл по этому полю от (x_0, y_0, z_0) до (x, y, z). Так как поле потенциально, криволинейный интеграл не зависит от пути, поэтому возьмем точку $(0, 0, 0)$. Пусть ϕ - потенциал поля, т.е. $\vec{a} = \operatorname{grad}\phi$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2x\sin y - 2, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2\cos y - z^2, \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = -2yz$$

Будем действовать по чуть-чуть, по одной переменной. Так как нам нужно воспользоваться криволинейным интегралом, то запишем одну идею.

$$\phi(x, y, z) = \int 2x\sin y - 2\,dx = 2x^2\sin y - 2x + f(y, z)$$

Тут f - это какая-то функция двух переменных y и z (чтобы $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$). Потом мы придумаем $g(z)$, чтобы $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$. Чтобы сделать это в виде криволинейного интеграла, запишем так.

$$\phi(x, y, z) = \int_\gamma, \text{ где } \gamma \text{ - путь от } (0, 0, 0) \text{ до } (x, y, z)$$

$$\int_\gamma = \int_0^x \vec{a_x}(t, 0, 0)\,dt + \int_0^y \vec{a_x}(x, t, 0)\,dt + \int_0^z \vec{a_x}(x, y, t)\,dt$$

$$\int_0^x \vec{a_x}(t, 0, 0)\,dt = \int_0^x 2t\sin 0 - 2\,dt = \int_0^x (-2)\,dt = -2x$$

$$\int_0^y \vec{a_y}(x, t, 0)\,dt = \int_0^y x^2\cos t - 0^2\,dt = x^2\sin y$$

$$\int_0^z \vec{a_z}(x, y, t)\,dt = \int_0^z -2yt\,dt = -yz^2$$

Тогда $\phi(x, y, z) = -2x + x^2\sin y - yz^2$

Сделаем проверку $\vec{a} = \mathrm{grad}\phi$.

$$\mathrm{grad}\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2x + x^2\sin y - yz^2\right) = -2 + 2x\sin y$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-2x + x^2\sin y - yz^2\right) = x^2\cos y - z^2$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-2x + x^2\sin y - yz^2\right) = -2yz$$

Действительно, $\mathrm{grad}\phi = \vec{a}$, значит у нас еще одна победа.

10 Задание 10.

Вычислить данный криволинейный интеграл аналитически двумя способами, а также численно двумя способами.

$$\oint_L xy^2\,dx - x^2y\,dy, \quad L \text{ - граница полукруга } D : x^2+y^2 \le 16, x+y \le 0$$

10.1 Аналитический способ.

10.1.1 С помощью формулы Грина.

Теорема грина гласит, что для функций $P, Q \in C^1(\mathrm{cl}D)$.

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dx\,dy$$

В нашем случае, $P = xy^2, Q = -x^2y. \quad P, Q \in C^1(\mathbb{R})$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-x^2y\right) = -2xy \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy^2\right) = 2xy$$

Теперь нужно поменять знак двойного интеграла, потому что мы идем в отрицательном направлении.

$$\oint_L xy^2\,dx - x^2y\,dy = -\iint_D (-2xy - 2xy)\,dx\,dy = \iint_D 4xy\,dx\,dy = 4\iint_D xy\,dx\,dy$$

Перейдем в полярные координаты.

$$\begin{cases} x^2+y^2 \le 16 = 4^2 \\ x+y \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ r \in [0,4] \\ r\cos\phi + r\sin\phi \le 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \cos\phi + \sin\phi \le 0 \Rightarrow \quad \phi \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$$

$$4\iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^4 dr \int_{3\pi/4}^{7\pi/4} r^2\cos\phi\sin\phi\,d\phi = \frac{1}{2}\int_0^4 r^2\,dr \int_{3\pi/4}^{7\pi/4} \sin 2\phi\,d\phi =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^4 r^2\,dr \int_{3\pi/4}^{7\pi/4} \sin 2\phi\,d2\phi = \frac{1}{4}\int_0^4 r^2\left[\cos 2\phi\right]_{3\pi/4}^{7\pi/4}\,dr = \frac{1}{4}\int_0^4 r^2\left[0-0\right]\,dr = \boxed{0}$$

10.1.2 С помощью т. О вычислении КИ-2.

$$\oint_L xy^2\,dx - x^2y\,dy$$

Пусть $\vec{F} = (F_1, F_2) = (xy^2, -x^2y), \quad d\vec{r} = (dx, dy), \quad \gamma(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ - путь по L.

$$\oint_L xy^2\,dx - x^2y\,dy = \oint_L \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \left(F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\right)dt$$

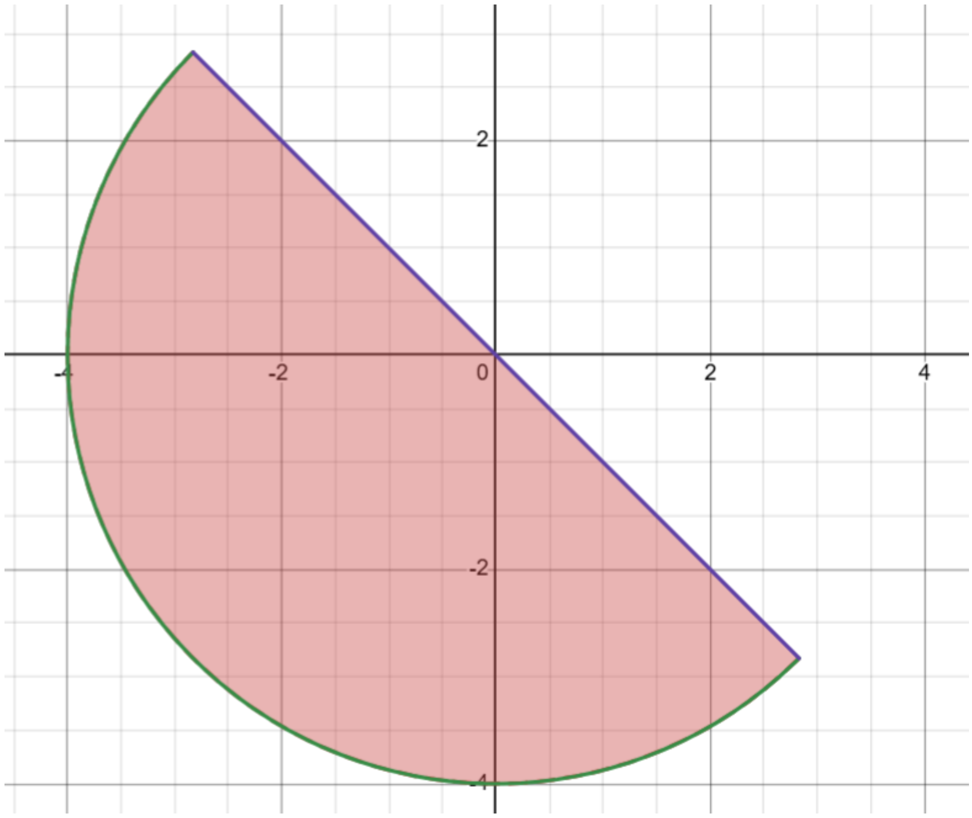

Рис. 11: Задание 10. Область D.

Разобьем кривую L на две: L_1 и L_2 и присвоим им соответствующие пути $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$. Пусть γ_1 проходит по прямой $y=-x$, на рисунке 11 он показан фиолетовым. Тогда γ_2 проходит по зеленой полуокружности, по часовой стрелке.

$$\gamma_1(t) = (t, -t), \quad t \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$$

$$\gamma_2(t) = (4\sin t, 4\cos t), \quad t \in [3\pi/4, 7\pi/4]$$

$$\gamma_1'(t) = (1, -1), \quad \gamma_2'(t) = (4\cos t, -4\sin t)$$

В γ_2 мы поменяли синус и косинус местами, чтобы он шел в правильном направлении, по часовой стрелке.

$$\oint_L \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_{L_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \oint_{L_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \big(F(\gamma_1(t))\cdot\gamma_1'(t)\big)\,dt + \int_{3\pi/4}^{7\pi/4} \big(F(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t)\big)\,dt =$$

$$= \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \big((t(-t)^2, -t^2(-t))\cdot(1,-1)\big)\ dt +$$

$$+ \int_{3\pi/4}^{7\pi/4} \big((4\sin t)(4\cos t)^2, -(4\sin t)^2(4\cos t))\cdot(4\cos t, -4\sin t)\big)\ dt =$$

$$= \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} t^3 - t^3\,dt + \int_{3\pi/4}^{7\pi/4} 256\sin t\cos^3 t + 256\sin^3 t\cos t\,dt =$$

$$= \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} 0\,dt + 256\int_{3\pi/4}^{7\pi/4} \sin t\cos t(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = 256\int_{3\pi/4}^{7\pi/4} \sin t\cos t\,dt =$$

$$= 128\int_{3\pi/4}^{7\pi/4} \sin 2t\,dt = 64\int_{3\pi/4}^{7\pi/4} \sin 2t\,d2t = 64\,[\cos 2\phi]_{3\pi/4}^{7\pi/4} = 64[0-0] = \boxed{0}$$

10.2 Численный метод.

10.2.1 Результаты вычислений:

δ	интегральная сумма	отклонение	время выполнения (с)
0.1	-0.035333	-0.035333	0.000272
0.01	-0.00037	-0.00037	0.002479
0.001	-4e-06	-4e-06	0.02521

Таблица 1: Криволинейный интеграл.

δ	интегральная сумма	отклонение	время выполнения (с)
0.1	-2.6299	-2.6299	0.010953
0.01	-0.295948	-0.295948	1.194271
0.001	-0.030126	-0.030126	139.606398

Таблица 2: Двойного интеграл (минимальная сумма).

δ	интегральная сумма	отклонение	время выполнения (с)
0.1	3.5532	3.5532	0.030598
0.01	0.304213	0.304213	1.960662
0.001	0.030197	0.030197	195.901473

Таблица 3: Двойного интеграл (максимальная сумма).

Как мы видим, двойной интеграл очень долго считать для малых значений δ. Возможно, потому что асимптотическая сложность $O((1/\delta)^2) \sim O(n^2)$, в отличие от криволинейного, со сложностью $O(1/\delta) \sim O(n)$

> Не так я всё это представлял, когда мы начинали. Мне грезились деньги, машины, женщины, уважение, свобода. Я всё это даже получил, более или менее, но вместе с тем пришли тюрьма, постоянный страх и кровь моих товарищей. Я держался на плаву сколько мог, но шансов становилось всё меньше.

10.3 Программный код.

Посмотреть исходный код на Github

10.3.1 main.py

```
import time

from double_integral_sum import (
    get_double_integral_sum,
    get_tagged_partition_from_square,
)
from integral_config import (
    f_1,
    f_2,
    greens_theorem_function,
    is_inside_the_shape,
    natural_parametrization_path,
)
from vector_line_integral_sum import (
    calculate_vector_line_integral_sum,
    get_polyline_points,
    get_tags_polyline,
)
from latex import get_latex_table


def get_results_vector_line(delta: float) -> dict[str, float]:
    start_time = time.time()  # Start timing
    polyline = get_polyline_points(delta, natural_parametrization_path)
    tagged_partion = get_tags_polyline(polyline)
    true_value = 0  # got by analytical method
    integral_value = calculate_vector_line_integral_sum(
        polyline, tagged_partion, f_1, f_2
    )
    results = {
        "\\delta": delta,
        "интегральная сумма": integral_value,
        "отклонение": integral_value - true_value,
    }
    end_time = time.time()  # End timing

    execution_time = end_time - start_time

    results["время выполнения"] = execution_time
    return results


def get_results_double_integral(delta: float, include_boarders) -> dict[str, float]:
    start_time = time.time()  # Start timing
    tags = get_tagged_partition_from_square(
        delta, include_boarders, is_inside_the_shape, -5, 5, -5, 5
    )
    integral_value = get_double_integral_sum(delta, greens_theorem_function, tags)
    true_value = 0  # got by analytical method
```

```
    results = {
        "\\delta": delta,
        "интегральная сумма": integral_value,
        "отклонение": integral_value - true_value,
    }
    end_time = time.time()  # End timing

    execution_time = end_time - start_time

    results["время выполнения"] = execution_time
    return results


def test(delta_list: list[float], func, file_path):
    results = list[dict[str, float]]()

    for delta in delta_list:
        results.append(func(delta))

    with open(file_path, "w") as file:
        file.write(get_latex_table(results))


if __name__ == "__main__":

    default_delta_list = [0.1, 0.01, 0.001]

    test(
        default_delta_list,
        get_results_vector_line,
        "output/table_vector_line_integral.tex",
    )
    test(
        default_delta_list,
        lambda delta: get_results_double_integral(delta, False),
        "output/table_double_integral_without_boarders.tex",
    )
    test(
        default_delta_list,
        lambda delta: get_results_double_integral(delta, True),
        "output/table_double_integral_with_boarders.tex",
    )
```

10.3.2 intergral_configuration.py

```
import math

# https://www.desmos.com/Calculator/3yyizfiinx
# кривая L задается как x^2+y^2=16, x+y<0;
def natural_parametrization_path(t: float) -> tuple[float, float]:
    if t < 0 or t > 4 * math.pi + 8:
        return (float("nan"), float("nan"))
    if t >= 0 and t < 4 * math.pi:
        return (
            4 * math.cos((3 / 4) * math.pi + t / 4),
            4 * math.sin((3 / 4) * math.pi + t / 4),
```

```
        )
    else:
        return (
            2 * math.sqrt(2) - (math.sqrt(2) / 2) * (t - 4 * math.pi),
            -2 * math.sqrt(2) + (math.sqrt(2) / 2) * (t - 4 * math.pi),
        )


def f_1(xy: tuple[float, float]):
    x, y = xy
    return x * (y**2)


def f_2(xy: tuple[float, float]):
    x, y = xy
    return -(x**2) * y

def is_inside_the_shape(xy: tuple[float, float]) -> bool:
    x,y = xy
    return x**2 + y**2 <= 16 and x+y<=0

def greens_theorem_function(xy: tuple[float, float]) -> float:
    x,y = xy
    #dQ/dx - dP/dy
    # -2xy - 2xy = -4xy
    return -4 * x * y
```

10.3.3 double_integral_sum.py

```
import math
from sys import stderr


def get_tagged_partition_from_square(
    delta: float,
    include_boarders: bool,
    is_inside_func,
    x_left: float,
    x_right,
    y_bottom: float,
    y_upper: float,
) -> list[tuple[float, float]]:
    if x_right < x_left or y_bottom > y_upper:
        print("wrong square boarder parameters.", file=stderr)

    horizontal_points_count: int = math.floor((x_right - x_left) / delta)
    vertical_points_count: int = math.floor((y_upper - y_bottom) / delta)
    tags = list[tuple[float, float]]()  # оснащение

    for i in range(vertical_points_count - 1):
        for j in range(horizontal_points_count - 1):
            left_upper_point = (x_left + j * delta, y_upper - i * delta)
            right_upper_point = (x_left + (j + 1) * delta, y_upper - i * delta)
            left_bottom_point = (x_left + j * delta, y_upper - (i + 1) * delta)
            right_bottom_point = (x_left + (j + 1) * delta, y_upper - (i + 1) * delta)
```

```
            points_inside: list[bool] = map(
                is_inside_func,
                [
                    left_upper_point,
                    right_upper_point,
                    left_bottom_point,
                    right_bottom_point,
                ],
            )
            if not all(points_inside) and not (include_boarders and any(points_inside)):
                # square is outside of the shape or on a boarder when boarders not allow
                continue

            # at the center of a square
            x1, y1 = left_upper_point
            x2, y2 = right_bottom_point
            tag = (
                (x1 + x2) / 2,
                (y1 + y2) / 2,
            )
            tags.append(tag)

    return tags


def get_double_integral_sum(
    delta: float, func, tags: list[tuple[float, float]]
) -> float:
    measure = delta * delta  # square with the sides of delta

    return sum([func(xy) * measure for xy in tags])
```

10.3.4 vector_line_integral_sum.py

```
import math

from plot import plot_tagged_partition

def get_polyline_points(
    delta: float, natural_parametrization_path
) -> list[tuple[float, float]]:
    # в идеале нас нужна натуральная параметризация
    result = []

    t = 0
    x, y = natural_parametrization_path(t)
    while not math.isnan(x) or not math.isnan(y):
        result.append((x, y))
        t += delta
        x, y = natural_parametrization_path(t)

    return result


def get_tags_polyline(
    polyline_points: list[tuple[float, float]]
```

```
) -> list[tuple[float, float]]:

    integration_points = list[tuple[float, float]]()

    for i in range(len(polyline_points) - 1):
        x_curr, y_curr = polyline_points[i]
        x_next, y_next = polyline_points[i + 1]

        integration_points.append(((x_curr + x_next) / 2, (y_curr + y_next) / 2))

    return integration_points


def calculate_vector_line_integral_sum(
    polyline_points: list[tuple[float, float]],
    tagging_points: list[tuple[float, float]],
    x_func,
    y_func,
) -> float:
    integral_sum = 0

    for i in range(len(tagging_points)):
        # for x, and then for y
        x_curr, y_curr = polyline_points[i]
        x_next, y_next = polyline_points[i + 1]
        delta_x = x_next - x_curr
        delta_y = y_next - y_curr

        integral_sum += x_func(tagging_points[i]) * delta_x
        integral_sum += y_func(tagging_points[i]) * delta_y

    return integral_sum
```

10.3.5 latex.py

```
def get_latex_table(results: list[dict[str, float]]) -> str:
    if len(results) == 0:
        return

    width = len(results[0].keys())
    output = "\\begin{tabular}{|" + "|".join(["c"] * width) + "|}\n"

    # header for the table
    output += f"    {' & '.join(results[0].keys())}\\\\\n"
    output += f"    \\hline\n"

    for data in results:
        output += f"    {' & '.join( [str(round(x,6)) for x in data.values()] )}\\\\\n"
        output += f"    \\hline\n"

    output += "\\end{tabular}"
    return output
```

10.3.6 plot.py

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```python
def construct_polyline(points):
    x_coords, y_coords = zip(*points)

    plt.plot(x_coords, y_coords, marker="o")

    plt.title("Polyline from List of Points")
    plt.xlabel("X-axis")
    plt.ylabel("Y-axis")

    plt.axhline(
        0, color="black", linewidth=0.5, label="OX (X-axis)"
    )  # Horizontal line (OY)
    plt.axvline(
        0, color="black", linewidth=0.5, label="OY (Y-axis)"
    )  # Vertical line (OX)

    plt.grid(True)
    plt.show()


def plot_tagged_partition(
    polyline_points: list[tuple[float, float]],
    tagging_points: list[tuple[float, float]],
    path: str,
):
    x_coords, y_coords = zip(*polyline_points)

    plt.plot(
        x_coords, y_coords, marker="o", linestyle="-", color="blue", label="Polyline"
    )

    if tagging_points:
        tag_x, tag_y = zip(*tagging_points)
        plt.scatter(
            tag_x, tag_y, marker="x", color="red", s=100, label="Tagging Points"
        )

    plt.axhline(0, color="black", linewidth=0.5)  # Horizontal line (OY)
    plt.axvline(0, color="black", linewidth=0.5)  # Vertical line (OX)

    plt.title("Polyline with Tagging Points for Partition")
    plt.xlabel("X-axis")
    plt.ylabel("Y-axis")

    plt.legend()

    plt.grid(True)
    plt.savefig(path)

def plot_points(points: list[tuple[float, float]]):
    tag_x, tag_y = zip(*points)
    plt.scatter(
        tag_x, tag_y, marker="x", color="red", s=100, label="Tagging Points"
```

```
)
plt.xlabel("X-axis")
plt.ylabel("Y-axis")

plt.legend()

plt.grid(True)
plt.show()
```