

电磁学部分的笔记

陆逊买火箭*

(适用：普通物理或大学物理难度)

2025.01.15

摘 要

本笔记系个人学习电磁学部分的学习笔记，对标清华大学基础物理 (3) 的难度。主要参考资料为中国科学技术大学的电磁学与电动力学(第二版)(上册)；除此以外还参考了赵凯华的新概念物理教程。我的电磁学部分授课老师是物理系的安宇教授，该笔记同样参考了部分 Prof.An 的课件。除此以外笔者学习时还参考了知乎上某答主的笔记¹。无偿分享、切勿盈利、违者必究！

Abstract

This note serves as a personal study record for the Electromagnetism section, aligned with the difficulty level of the Basic Physics (3) course of Tsinghua. The primary reference material is "Electromagnetism and Electrodynamics" (Version 2)(Volume 1) by Hu Youqiu, Ye Bangjiao, and others; in addition, Mr. Zhao Kaihua's "New Concept Physics Course" has also been referenced. My instructor for the electromagnetism section is Professor An Yu from the Department of Physics, and this notebook also references some of Professor An's course PowerPoint presentations. In addition, I also refer to the notes of a certain respondent on Zhihu. It's free but do not seek profit, or you will be held accountable!

*北京，10003。如有问题或谬误可通过匿名邮箱 <https://qntwx.cn/KH363N> 尝试反馈

¹知乎用户 nrFbKy, https://zhuanlan.zhihu.com/p/228452643showWechatShareTip?utm__=wechat_session&utm_medium=social&cs_r=0

目录

1	第一章：真空中的静电场	6
1.1	电磁学：场量的性质	6
1.2	库仑定律等	6
1.3	电场、电场强度	6
1.4	电偶极子及常用结论	7
1.5	高斯定理	7
1.6	静电场的环路定理	9
1.7	电势稳定性的判定	10
2	第二章：静电场中导体和电介质	10
2.1	静电平衡导体	10
2.2	静电屏蔽	10
2.3	电容、电容器	10
2.4	极化强度矢量	11
2.5	电位移矢量 \vec{D}	11
2.6	介质存在时的库仑定律	11
2.7	介质中的高斯定理	12
2.8	边值关系	12
2.9	电介质极化：各物理量关系	13
2.10	均匀电介质电场求解问题	13
2.11	* 电像法	13
3	第三章：静电能	14
3.1	点电荷体系的静电能	14
3.2	连续分布电荷体系的静电能	14
3.3	平行板电容器静电能	15
3.4	电荷体系在外场的静电能	15
3.5	电能密度	15
3.6	* 虚功原理求静电力	15
4	第四章：稳恒电流	16
4.1	相关概念	16

4.2	电流连续性方程	16
4.3	欧姆定律和焦耳定律的微分形式	16
4.4	电源、电动势	17
4.5	基尔霍夫定律	17
4.5.1	定律内容	17
4.5.2	正负号的法则	17
4.6	稳恒电流与静电场综合求解	18
5	第五章：真空中的静磁场	18
5.1	恒磁场的两种观点	18
5.2	安培力与洛伦兹力	19
5.3	毕奥-萨伐尔定律	19
5.4	静磁场的高斯定理和环路定理	19
5.5	磁矩、磁偶极子	20
5.6	一些常用的二级结论	20
5.7	霍尔效应	21
5.8	磁矩与浸渐不变量	21
5.9	* 磁镜	21
6	第六章：静磁场中的磁介质	22
6.1	磁场对电流的作用	22
6.2	小电流元	22
6.3	磁场对磁矩的作用	22
6.4	磁化强度	23
6.5	磁场强度	23
6.6	磁化电流	23
6.7	磁介质中高斯定理	23
6.8	磁介质中环路定理	24
6.9	边值关系	24
6.10	分区的均匀线性各向同性磁介质中静磁场	24
6.11	磁路法	25
6.12	* 磁像法与磁荷观点的应用	25
6.12.1	磁荷的观点	25

6.12.2	磁像法	26
6.13	各物理量的关系总结	27
6.13.1	磁荷观点	27
6.13.2	分子电流观点	28
7	第七章：电磁感应	28
7.1	法拉第电磁感应定律、楞次定律	28
7.2	动生电动势和感生电动势	29
7.3	电场与磁场的洛伦兹变换	29
7.4	互感、自感	30
7.5	线圈的并联和串联	30
7.6	似稳条件和似稳电路方程	31
7.6.1	似稳条件	31
7.6.2	似稳电路方程	31
8	磁场能量	32
8.1	载留线圈的磁能	32
8.2	磁场能量	32
8.3	电场能量与磁场能量的简单对比	33
8.4	虚功原理求力	33
9	第九章：交流电路	33
9.1	交流电路描述法	33
9.2	交流电路复数解法	34
9.3	交流电路元件复阻抗	34
9.4	基尔霍夫定律	34
9.5	交流电路功率问题	35
9.6	交流电路分析举例	35
9.6.1	RLC 串联谐振	35
9.6.2	并联谐振电路：“C+RL”	36
9.6.3	变压器电路	36
10	第十章：电磁场的基本规律	38
10.1	实验规律的推广	38

10.2	位移电流	39
10.3	麦克斯韦方程组	39
10.4	各向同性介质的电磁性能方程	39
10.5	边值关系	40
10.6	其他形式的麦克斯韦方程组	40
10.7	自由空间的电磁波	40
10.8	电磁波的性质	41
10.9	电磁场的能量、动量、角动量	42
10.10	平面电磁波的能量和动量	42
10.10.1	例：光压	42
11	* 超导体与超导现象	43
11.1	超导体的基本特性	43
11.2	三个临界参量	43
11.3	两类超导体	43
11.4	超导性的唯象理论——二流体模型	43
11.5	伦敦方程	44

1 第一章：真空中的静电场

1.1 电磁学：场量的性质

数学上描述矢量场的方法：

1. 通量 (Flux)= 平均法线分量 \times 面积
2. 环量 (Circulation)= 平均切线分量 \times 环路径

1.2 库仑定律等

- 密里根液滴法首先从实验上证明，微小粒子带电量的变化不连续， $Q=Ne$ ；
- 带电量是相对论不变量；
- 电荷守恒定律；
- 扭秤实验；

真空中两个静止点电荷之间的相互作用力大小：

$$\vec{F}_{01} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_1}{r_{01}^2} \vec{e}_r \quad (1)$$

其中 ϵ_0 是真空介电常数。

- 电力叠加原理（独立作用原理）：

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i \quad \text{即} \quad \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (2)$$

1.3 电场、电场强度

1. 电场：

- 电荷在周围产生电场
- 电荷在电场中受力

2. 电场强度：描述场中各点电场强弱的物理量

$$\text{定义式 } \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{E}(x, y, z, t) \quad (3)$$

其中 \vec{F} 为该点电荷在位矢 \vec{r} 处受的力。

3. 试验电荷：电量和线度皆足够小。

4. 点电荷场强公式（该公式下具有某种球对称性质）：

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \quad (4)$$

5. 场强叠加原理

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \quad \text{即} \quad \vec{E} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{r}_i \quad (5)$$

6. 若带电体为电荷的连续分布，则分别有电荷的体密度 $\rho = \frac{dq}{dV}$ ，面密度 $\sigma = \frac{dq}{dS}$ ，线密度 $\lambda = \frac{dq}{dl}$ 。

1.4 电偶极子及常用结论

电偶极子：两个等量异号点电荷组成的系统。电偶极子的特征用电偶极矩 $\vec{p} = q\vec{l}$ 描述，其中 l 是两点电荷之间的距离， \vec{l} 和 \vec{p} 的方向规定由 $-q$ 指向 $+q$ 。

- 电偶极子在中垂线上垂径为 r 处的电场强度：

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{p}, \text{ 当 } r \gg l \text{ 时满足该泰勒展开近似。其中：} \vec{p} = q\vec{l}, \text{ 方向 } -q \rightarrow +q. \quad (6)$$

- 力矩

在电场中受到的力矩 $\vec{M} = q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$

非均匀外场中 $\vec{F} = \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E})$

- 无穷大带电平板的电场强度 $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

- 均匀带电半球面在球心处的电场 $E = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$

- 均匀带电球内的电场 $E = \rho \frac{\vec{r}}{3\epsilon_0}$

- 电偶极子场的通式 $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [-\vec{p} + 3(\hat{r} \cdot \vec{p})\hat{r}]$

特殊情况：正电荷右侧一点 $\hat{r} \cdot \vec{p} = p, E = \frac{\vec{p}}{2\pi\epsilon_0 r^3}$

1.5 高斯定理

1. 电通量 (electric flux)：通过任意面积元的电通量把曲面分成许多个面积元，每一面元处视为匀强电场， $d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$ ，此时 E 为电通量密度。

- 求和 $= \sum_i \vec{E}_i \cdot d\vec{S}_i = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

2. 通过闭合面的电通量

- 面元方向：闭合面内指向面外，方向为法线方向。
- 通过闭合面 S 的 E 通量 $= \oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS$

3. 静电场的高斯定理：通过任意闭合曲面（高斯面）S 的电通量等于该面内全部电荷代数和除以 ϵ_0

- $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{S_{inner}} q = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho_e(\vec{r}) dV$
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}$

4. 高斯定理的对象是所有被闭合曲面包围在内的电荷。闭合曲面对内部任意一点所张的立体角为 4π ，对外部任意一点所张的立体角为 0。

5. 多个点电荷构成的电场：

- $\oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \oiint_S \sum_i \vec{E}_i \cdot \hat{n} dS = \sum_i \oiint_S \vec{E}_i \cdot \hat{n} dS$
- $\oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{\sum_i q_{i,inner}}{\epsilon_0} \rightarrow \frac{\iiint_V \rho dV}{\epsilon_0}$ (电荷连续分布)

6. 闭合面内、外电荷的贡献：

- 对 \vec{E} 都有贡献
- 对电通量 $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ 的贡献有差别，只有闭合面内的电量对电通量有贡献。

7. 电场线：一族空间曲线用以形象描述场强分布

- 线电荷密度为 η_e 的均匀带电无限长细棒产生的电场 $\vec{E} = \frac{\eta_e}{2\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}$ ，方向为垂径方向。
- 均匀带电球面总电量为 Q，半径为 R，电场强度分布：
$$E = \begin{cases} 0 & \text{if } r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{if } r > R \end{cases}$$

8. 高斯定理的散度表示：

- 散度：局域通量特性

- 梯度算符 $\vec{\nabla} = \vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$
- 散度: $\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$
- 数学上的高斯定理: $\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{E} \cdot dV$
- 无限小极限下严格等式 $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ 。

1.6 静电场的环路定理

a. 静电场力的功、电势能

- 外力克服静电场力做功 $W = - \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l}$
- 电势能的增加 $W(\text{Unit}) = -q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$

b. 静电场的环路定理 (保守场): 静电场的环量 $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ 。

c. 对单个电荷构成的电场, $-\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b})$ 。对多个电荷构成的电场, 运用叠加原理, 结论相同。

d. 电势差 U_{PQ} : 将单位正电荷从点 P 移到点 Q, 电场力做的功。

e. 电势差 U_P : 将单位正电荷从点 P 移到无穷远处, 电场力做的功。积分上限为 ∞ 。

f. 电势 $U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

g. (二级) 电偶极子势 $U \approx \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, 当 $r \gg l$ 。

h. 均匀带电球面 $\vec{E} = \begin{cases} 0 & \text{if } r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{if } r > R \end{cases}$

i. 电势梯度: 电场强度在 l 方向上的分量值等于电势在 l 方向方向导数的负值

$$\vec{E} = -\text{grad} \cdot U \quad (7)$$

1.7 电势稳定性的判定

- 稳定点 $\frac{\partial f}{\partial x}|_P = \frac{\partial f}{\partial y}|_P = 0$ (必要条件)
- 驻点 Hesse 矩阵 $\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix}$ 正定 (充分条件)

2 第二章：静电场中导体和电介质

2.1 静电平衡导体

- 其电荷只在导体表面分布，内部 $\vec{E} = 0$
- 其表面为等势面，外部 \vec{E} 沿法向
- 高斯定理：导体内部无电荷，电荷只分布在导体表面， $\sigma_e = \epsilon_0 \vec{E}$
若在其内部挖一个空腔，放入带电量为 q 的电荷，则其内表面总电荷量无论如何都是 $-q$

2.2 静电屏蔽

- 未接地导体：腔外不影响腔内，但是腔内影响腔外
- 接地导体：腔内外互不影响

2.3 电容、电容器

- 孤立导体的电容 $C = \frac{Q}{U}$, 即孤立导体电量 Q 与其电势 U 的比值
- 对于导体系统，上面的 Q 表示导线连接后两两交换的电荷量， U 表示电势差
- 孤立导体球的电容 $C = 4\pi\epsilon_0 R$, R 为球半径
- 平行板电容器 $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$, S 为极板面积， d 为极板间隔
- 两个平行板构成的电容器，夹角为一个小角 θ ，边缘处距离 d :

$$dC = \frac{\epsilon_0 dS}{x \tan \theta + d} \approx \frac{\epsilon_0 dS}{x \theta + d} \quad (8)$$

$$C = \int dC = \int_0^a \frac{\varepsilon_0 a}{d + x\theta} dx = \frac{\varepsilon_0 a}{\theta} \ln \left(1 + \frac{\theta a}{d}\right) \quad (9)$$

再根据需要取一阶或二阶近似

- 同心球电容器 $C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_A R_B}{R_B - R_A}$, 其中 R_A 、 R_B 分别为内径和外径。
- 同轴柱体 $C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln R_B - \ln R_A}$ 其中 R_A 、 R_B 分别为内径和外径, L 为轴向长度
- 并联和串联
 并联增容 $C = \sum_{i=1}^N C_i$
 串联减容 $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$

2.4 极化强度矢量

- 定义极化强度矢量 $\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}}{\Delta V}$, 即单位体积内分子电偶极矩 \vec{p} 的矢量和。

2.5 电位移矢量 \vec{D}

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (10)$$

- 对于各向同性的介质, 定义有 $\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$, 那么 $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, 其中 $\chi_e = \varepsilon_r - 1$ 为电介质的电极化率。

2.6 介质存在时的库仑定律

- 若两个电荷处于同一种电介质中, 则它们之间的库仑力还是 $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}$, 但是各自受到的力是 $\frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}$
- 若两个电荷处在不同介质中, 则需要考虑介质面上极化电荷分布的影响, 不能直接用 ε_0 替代 ε

2.7 介质中的高斯定理

- $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\oint_S (\vec{D} - \vec{P}) \cdot d\vec{S}}{\varepsilon_0} = \frac{q_0 + q'}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} - \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \frac{\rho_0 + \rho'}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
- 根据这个容易得到 $\rho : \rho_0 : \rho' = 1 : \varepsilon_r : 1 - \varepsilon_r$
- $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{S, inner} q_0$ 不显含极化电荷

2.8 边值关系

任意界面两侧 \vec{E} 切向连续，法向关系：

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (11)$$

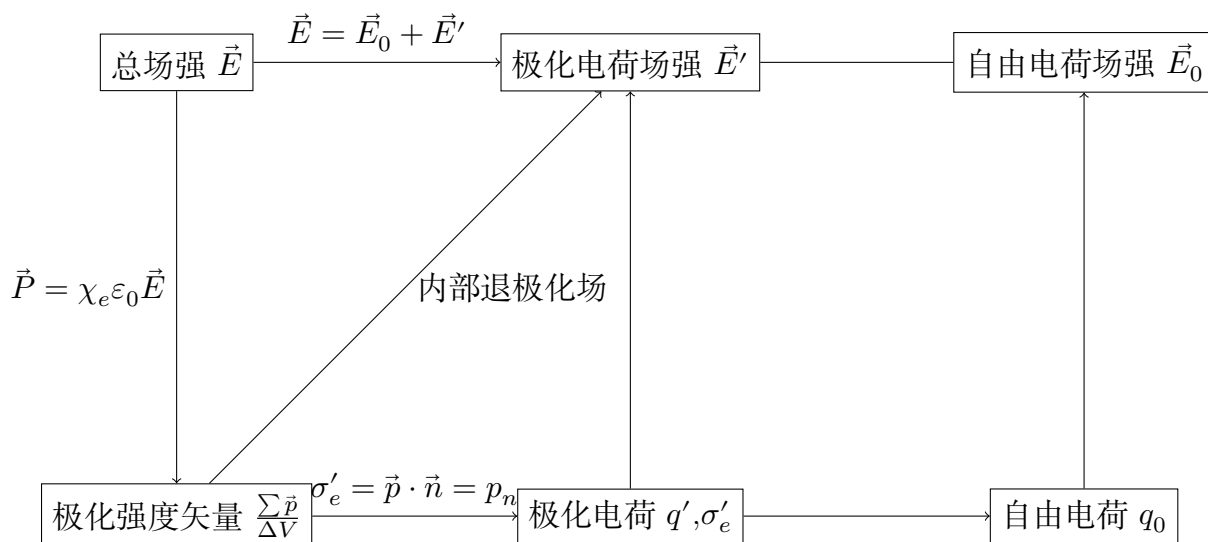
$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \sigma_0 \quad (12)$$

$$(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \vec{n} = -\sigma' \quad (13)$$

文字表述即为：

- 电场 \vec{E} 切向分量连续
- 电位移矢量 \vec{D} 法向分量连续
- 介质界面为等势面

2.9 电介质极化：各物理量关系



- 空间中任一点的电场 $\vec{E} = \text{外场 } \vec{E}_0 + \text{退极化场 } \vec{E}'$
- 在介质存在时，静电场仍是一个无旋场， $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

2.10 均匀电介质电场求解问题

- 介质界面与电场线重合的情况，界面两侧电场强度应该相等，否则违背环路定理；
- 介质界面与等势面重合的情况，由于 $\vec{E}_1, \vec{E}_2 \perp S$ ，故 $\vec{D}_1, \vec{D}_2 \perp S$ 。这是介质界面所以没有自由电荷分布，故必有 $\vec{E}_1 = \vec{E}_2, \vec{D}_1 = \vec{D}_2$ 。此时 \vec{D} 的分布与真空情况下完全相同，故 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_0$ 。再根据上式推出各个区域的 \vec{E}

2.11 * 电像法

完全参照知乎学长的笔记，我学的时候这里也不会。

将分布在一个面上的电荷等效为一个点电荷，使得等效之后在除了该点电荷所在区域（被面划分）以外的空间电势分布与等效之前相同（充要条件是该边界的边界解不变），电像法的规则是：

- 像电荷只能置于解空间之外，不同的解空间可以置不同像电荷
- 有解空间的边界上电势分布不变（可以用电场分布推出），这个分布可以是一个具体的数值，也可以是边值关系

- 若像电荷置于介质中，则不需要考虑他周围的感应电荷（计算时直接带入 ϵ ），直接体现在数值上；而对于原电荷则需要考虑周围感应电荷（计算时需要代入其所在介质的介电常量 ϵ ）
- 不同性质的电荷要分开求像，比如孤立的带电球，其上既有被感染的电荷也有源电荷，二者是不一样的

以下是几种模拟的电像

- 点电荷对无限大接地平板的电像：对称位安放一个相反的电荷
- 点电荷对两个有夹角的接地无限大平板的电像：各关于两个平板置像，置出来的像必须再对另一个平板置，直到两个像重合。像电荷就是所有置出来的电荷
- 点电荷对接地导体球的电像：导体球的感应电荷分布满足阿波罗尼斯圆关系，像电荷到球心的距离 r 与源电荷到球心的距离 R 和球的半径 a 满足：

$$rR = a^2 \quad (14)$$

若导体球不接地，则必须在球心再置一个像，使得电势满足原先的边值条件。这个像电荷的大小等于球原先带电减去感应电荷

3 第三章：静电能

3.1 点电荷体系的静电能

$$W_e = W_{eachother} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i U_i \quad (15)$$

3.2 连续分布电荷体系的静电能

- 体分布自能：

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho_e U dV \quad (16)$$

- 面分布自能：

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \sigma_e U dS \quad (17)$$

- 线分布由于发散特性，无法计算自能

3.3 平行板电容器静电能

$$W_e = \frac{1}{2}QU = \frac{Q^2}{2C} \quad (18)$$

3.4 电荷体系在外场的静电能

这实际上就是考察的电荷体系与产生外场的电荷体系之间的互能。特别地，电偶极子在外场中的静电能：

$$W_e = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (19)$$

3.5 电能密度

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \quad (20)$$

一般情况下，各向同性介质： $\vec{D} \parallel \vec{E}$ ，则：

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} DE \quad (21)$$

同时也有：

$$W_e = \iiint_V w_e dV \quad (22)$$

同时可以定义宏观静电能和介质极化能：

$$W_{e0} = \iiint_V \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV \quad (23)$$

$$W_{pole} = \iiint_V \frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{E} dV \quad (24)$$

3.6 * 虚功原理求静电力

对维持导体 Q ， U 不变的情况，分别有；

$$F_x = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_Q = -(\nabla W_e)_Q \quad (25)$$

$$F_x = \left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_U = (\nabla W_e)_U \quad (26)$$

只要选定一个特定的虚位移，并且所考察的物理过程是相同的，那么这两种求法是等价的，静电力矩也可以这么算：

$$L_\theta = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial \theta}\right)_Q \quad (27)$$

$$L_\theta = \left(\frac{\partial W_e}{\partial \theta}\right)_U \quad (28)$$

4 第四章：稳恒电流

4.1 相关概念

- 电流强度 $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ ，小时间间隔 Δt 内通过某一截面的电量 Δq
- 电流密度 $j = \frac{\Delta I}{\Delta S_0}, \vec{j} = \frac{\Delta I}{\Delta S_0} \vec{n}_0$ ， $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$

4.2 电流连续性方程

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} \quad (29)$$

微分形式：

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0 \quad (30)$$

稳恒条件：

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (31)$$

其本质是电荷守恒原理。

4.3 欧姆定律和焦耳定律的微分形式

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, P = \frac{j^2}{\sigma} \quad (32)$$

其中 σ 为电导率，是电阻率的倒数

4.4 电源、电动势

- 在内外电路可区分的情况下，非静电力 K 只在电源存在，此时 $\epsilon = \int_{-}^{+} \vec{K} \cdot d\vec{l}$
- 若无法区分外电路与内电路，则 $\epsilon = \oint_L \vec{K} \cdot d\vec{l}$

4.5 基尔霍夫定律

4.5.1 定律内容

- 第一方程组（节点电流方程组）：

$$\sum(\pm I) = 0 \quad (33)$$

含义：汇于任一节点处的电流代数和为零

- 第二方程组（回路电压方程组）：

$$\sum U = \sum(\pm IR) + \sum(\pm \epsilon) = 0 \quad (34)$$

含义：任一闭合回路的全部支路上的电压代数和为零

4.5.2 正负号的法则

事先标定每支路电流方向 (a) 与每一回路绕行方向 (b)

- I、U 前正负号：

- * 与 a 相同 $I > 0$ ，否则 $I < 0$
- * 沿 b 看去 $U > 0$ ，即电势下降，反之升高

- 各项前正负号：

- * 第一方程组中，I 流向某节点的项前面写-号，否则写 + 号
- * 第二方程组中：
 - a 与 b 一致，IR 前写 + 号，否则写-号
 - b 由电源 “+” 转变为 “-”，则 ϵ 前写 + 号，否则写-号

4.6 稳恒电流与静电场综合求解

基本方程：

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{静电场环路定理} \quad (35)$$

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{稳恒条件} \quad (36)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \text{欧姆定律} \quad (37)$$

回顾边界条件：

- 法向边界条件：

$$\vec{j}_{2n} = \vec{j}_{1n} \quad (38)$$

- 切向边界条件：

$$\vec{E}_{2\tau} = \vec{E}_{1\tau} \quad (39)$$

则电流线在边界上有类似“折射”：

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad (40)$$

5 第五章：真空中的静磁场

5.1 恒磁场的两种观点

- 磁荷观点（磁的库仑定律）：两点磁荷之间的相互作用力 $F = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_{m1}q_{m2}}{r^2}$ 方向沿连线
- 磁荷意义下，磁场强度的定义

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_m}{r^3} \vec{r} \quad (41)$$

- 电流观点（安培定律）：两电流元之间相互作用力 $dF_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2 d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12})}{r_{12}^2}$ ，不一定大小相等、方向相反，也不一定沿连线。

5.2 安培力与洛伦兹力

$$d\vec{F} = \begin{cases} Id\vec{l} \times \vec{B} \\ \vec{i} \times \vec{B}dS \\ \vec{j} \times \vec{B}dV \end{cases} \quad (42)$$

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (43)$$

\vec{v} 、 \vec{B} 、 \vec{F} 的方向如式 (43) 所示, 满足右手定则

5.3 毕奥-萨伐尔定律

- 电流元 $\vec{a} = Id\vec{l}/\vec{i}dS/\vec{j}dV$ 产生的磁场:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{a} \times \vec{r}}{r^3} \quad (44)$$

- 总环路产生的磁场为沿着上式的环路积分, 如:

$$\vec{B} = \oint d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (45)$$

5.4 静磁场的高斯定理和环路定理

由毕奥-萨伐尔定律导出:

- 安培环路定理:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L, inner} I \quad (46)$$

I 的正向按照绕行回路的方向 (右手螺旋定则) 确定

- 磁场高斯定理:

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (47)$$

5.5 磁矩、磁偶极子

磁矩的定义;

$$\vec{m} = I\vec{S} = \frac{1}{2} \oint \vec{R} \times d\vec{R} \quad (48)$$

磁偶极子产生的磁场公式和电偶极子产生的电场公式在形式上是一模一样的。

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [-\vec{p} + 3(\hat{r} \cdot \vec{p})\hat{r}] \quad (49)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [-\vec{m} + 3(\hat{r} \cdot \vec{m})\hat{r}] \quad (50)$$

5.6 一些常用的二级结论

- 无限长直细导线:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \quad (51)$$

- 无限长、半径为 R 的载流圆柱:

– 内部:

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \quad (52)$$

– 外部: 外部磁场等效于位于轴线处的线电流产生的磁场

- 载流原线圈, 半径为 R 。在轴线上距离圆心 z 处的磁感应强度:

$$B_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (53)$$

- 总匝数为 N 、半径为 R 的螺绕环:

– 内部: $B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi R}$

– 外部: $B = 0$

- 单位长度内匝数为 n 、半径为 R 的螺线管:

– 内部: $B = \mu_0 n I$

– 外部: $B = 0$

- 面电流密度为 i 的无限大平面导体：

$$B(x) = \frac{\mu_0 i}{2} \quad (54)$$

- 任意形状的非平面线圈电流在远处产生磁场：

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 \vec{m}}{4\pi r_0^3} + \frac{3\mu_0 \vec{r}_0 (\vec{m} \cdot \vec{r}_0)}{4\pi r_0^5} \quad (55)$$

- 平行无限长直导线之间的相互作用：

$$F = \frac{dF_{12}}{dl_2} = \frac{dF_{21}}{dl_1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \quad (56)$$

- 线圈在均匀磁场中所受力矩：

$$\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (57)$$

$\vec{m} = IS\vec{n}$ 为线圈磁矩

5.7 霍尔效应

电流通过与磁场垂直的导体时产生换向电压（霍尔电压）

- 霍尔系数 $\kappa = \frac{1}{nq}$

5.8 磁矩与浸渐不变量

- 回旋磁矩的一般表达式：

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} \quad (58)$$

随时空缓慢变化的磁场中， μ 近似为守恒量，这称为第一绝热不变量

5.9 * 磁镜

磁镜利用了磁矩守恒的原理。定义磁镜最弱处出射速度和轴线夹角为投射角 $\theta = \arcsin \frac{v_{\perp}}{v}$ ，则由能量、磁矩守恒得出：

$$\frac{mv^2 \sin^2 \theta}{2B_{min}} = \frac{mv^2}{2B_{max}} \quad (59)$$

式中 B_{min} 表示最弱场, B_{max} 表示磁镜点即最强场, 则得到 $\theta > \theta_m = \arcsin \sqrt{\frac{B_{min}}{B_{max}}} = \arcsin \sqrt{\frac{1}{R_{mi}}}$ 部分的例子被捕获。逃逸的粒子占的比例为 $1 - \cos \theta_m$

6 第六章：静磁场中的磁介质

6.1 磁场对电流的作用

$$\vec{F} = \begin{cases} q\vec{v} \times \vec{B} \\ \oint_L I d\vec{l} \times \vec{B} \\ \iint_S \vec{i} dS \times \vec{B} \\ \iiint_V \vec{j} dV \times \vec{B} \end{cases} \quad (60)$$

$$\vec{L} = \begin{cases} \oint_L \vec{r} \times (I d\vec{l} \times \vec{B}) \\ \iint_S \vec{r} \times (\vec{i} dS \times \vec{B}) \\ \iiint_V \vec{r} \times (\vec{j} dV \times \vec{B}) \end{cases} \quad (61)$$

6.2 小电流元

- 体电流元当 $V \rightarrow 0$, $B \rightarrow 0$, 故体电流元处的磁场用总磁场代替即可
- 面电流元两侧则有间断, 故面电流元处的磁场用面两侧的磁场平均值代替即可
- 线电流元 $l \rightarrow 0$, $F \rightarrow \infty$, 无法近似

6.3 磁场对磁矩的作用

磁矩在磁场中受的力形式上和电偶极子在电场中受的力相同

$$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \Leftrightarrow \vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \quad (62)$$

$$\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B} + \vec{r} \times \vec{F} \Leftrightarrow \vec{L} = \vec{p} \times \vec{E} + \vec{r} \times \vec{F} \quad (63)$$

6.4 磁化强度

定义为单位体积内各分子磁矩之和：

$$\vec{M} = \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta V} \quad (64)$$

无外场，未被磁化的磁介质 $\vec{M} = 0$ ；被磁化后不等于零。均匀磁化 $\vec{M} = \text{Const}$ ，非均匀磁化 $\vec{M} = \vec{M}(\vec{r})$

6.5 磁场强度

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (65)$$

此时环路定理可以写成：

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0 \quad (66)$$

对线性各向同性磁介质，定义了 $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ ，得到：

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu\vec{H} \quad (67)$$

取真空中 $\mu = \mu_0$ ，导体中 $\mu = 0$

6.6 磁化电流

一般地，均匀磁化介质中 $I' = 0$ ，磁化电流一般只在均匀介质的表面或交界处出现。下式是计算磁介质表面或者导体表面（另一侧是真空）的面电流。磁化电流是不产生焦耳热的。

$$\vec{i}' = \vec{M} \times \vec{n}, \quad \vec{i}'_0 = \vec{H} \times \vec{n} \quad (68)$$

6.7 磁介质中高斯定理

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (69)$$

6.8 磁介质中环路定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0, \oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = \sum I', \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I = \mu_0 \sum I_0 + \mu_0 \sum I' \quad (70)$$

6.9 边值关系

静磁场 \vec{B} 必定法向连续否则不满足高斯定理。

$$\vec{i}' = \vec{n} \times (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) = -(\vec{M}_{\tau 2} - \vec{M}_{\tau 1}) \quad (71)$$

$$\vec{i}_0 = \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = (\vec{H}_{\tau 2} - \vec{H}_{\tau 1}) \quad (72)$$

取磁介质界面 $\vec{i}_0 = 0$ ，得到磁介质界面 \vec{H} 连续

类似地，在没有自由电流的界面，磁感应强度存在类似“折射”的关系：

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (73)$$

	电介质	磁介质
规律	$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$	$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$
法向边界条件	$D_{2n} = D_{1n}$	$B_{2n} = B_{1n}$
切向边界条件	$E_{2\tau} = E_{1\tau}$	$H_{2\tau} = H_{1\tau}$
场线在边界上的折射	$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$	$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$

Table 1: 边界条件

6.10 分区的均匀线性各向同性磁介质中静磁场

- 介质界面与磁感应线重合，此时 \vec{H} 分布不因插入磁介质改变，为：

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \quad (74)$$

再利用：

$$\vec{B}_i = \mu_i \vec{H}_i \quad (75)$$

计算即可；

- 介质界面与磁感应线垂直，此时 \vec{B} 分布不因插入磁介质改变，但可能会有倍数 α 的变化。若我们不关心 α 则可直接计算：

$$\sum_{i=1}^n \int_{L_i} \frac{\vec{B}}{\mu_0} d\vec{l} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu_i} \right) \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \sum I_0 \quad (76)$$

其中 $\vec{B} = \alpha \vec{B}_0$ 。若要求出 α 则可在已知 \vec{B}_0 的情况下算出来：

$$\alpha = \frac{\sum I_0}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu_i} \right) \oint_L \vec{B}_0 \cdot d\vec{l}} \quad (77)$$

6.11 磁路法

即，将磁路类比到电路。

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \Leftrightarrow \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (78)$$

$$I = jS \Leftrightarrow \Phi_B = BS \quad (79)$$

$$R = \int \frac{dl}{\sigma S} \Leftrightarrow R_m = \int \frac{dl}{\mu S} \quad (80)$$

$$\epsilon = IR \Leftrightarrow \epsilon_m = \Phi_B R_m \quad (81)$$

这种等效的条件是磁介质的 $\mu \gg \mu_0$ 且忽略漏磁，线圈的磁动势 $\epsilon_m = nI_0$ ，磁位降 $H_i l_i = \Phi_B R_{mi}$ ，则有磁路定理：

$$\epsilon_m = \sum H_i l_i = \Phi_B \sum R_{mi} \quad (82)$$

6.12 * 磁像法与磁荷观点的应用

6.12.1 磁荷的观点

- 利用磁荷的观点，将磁荷与电荷对应，将静电场的规律应用到稳恒磁场。主要可用于求作用力等。

- 磁荷观点下的磁极化强度 \vec{J} 与分子电流观点下的磁化强度 \vec{M} 的对应关系：

$$\vec{J} = \mu_0 \vec{M} \quad (83)$$

其他物理量的对应关系：

静磁场	静电场
\vec{H}	\vec{E}
\vec{B}	\vec{D}
\vec{J}	\vec{P}
\vec{p}_m	\vec{p}_e
q_m	q
σ_m	σ_e
μ_0	ε_0
μ_r	ε_r
χ_m	χ_e

Table 2: 对应关系

6.12.2 磁像法

类比前面提到的电像法，像电流计算使用真空 μ_0 ，源电流使用实际介质 μ

- 以下结果在胡、叶的教材中可见。
- 介质面为无限平面，分界面 xoy，实际电流 $I(z = z_0)$ ，实际电流一侧 $\mu = \mu_1$ ，另一侧 $\mu = \mu_2$ 。用来考察对上半空间的磁场作用的像电流：

$$I'(z = -z_0) = -\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} I \quad (84)$$

用来考察对下半空间的磁场作用的像电流：

$$I''(z = z_0) = -I'(z = -z_0) \quad (85)$$

核心：采用被考察空间的 μ

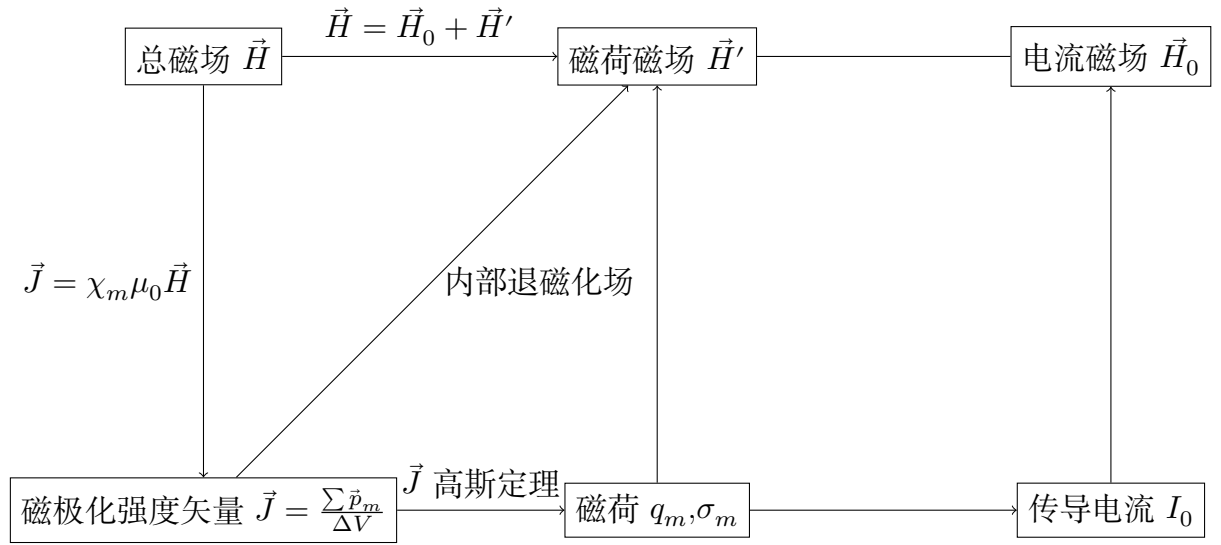
- 介质面为无穷长的圆柱面半径为 R ，柱内 $\mu = \mu_1$ ，柱外 $\mu = \mu_2$ ，在柱外 $r = a$ 处有源电流 I 。柱内像电流 I' ， I'_0 ：

$$I' = \frac{\mu_2(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_0(\mu_1 - \mu_2)} I, \text{ 位置服从阿波罗尼斯圆 } r = \frac{R^2}{a} \quad (86)$$

$$I'_0 = -I', \text{ 位置在轴心处} \quad (87)$$

6.13 各物理量的关系总结

6.13.1 磁荷观点



有：

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \sum_{S, inner} q_m \quad (88)$$

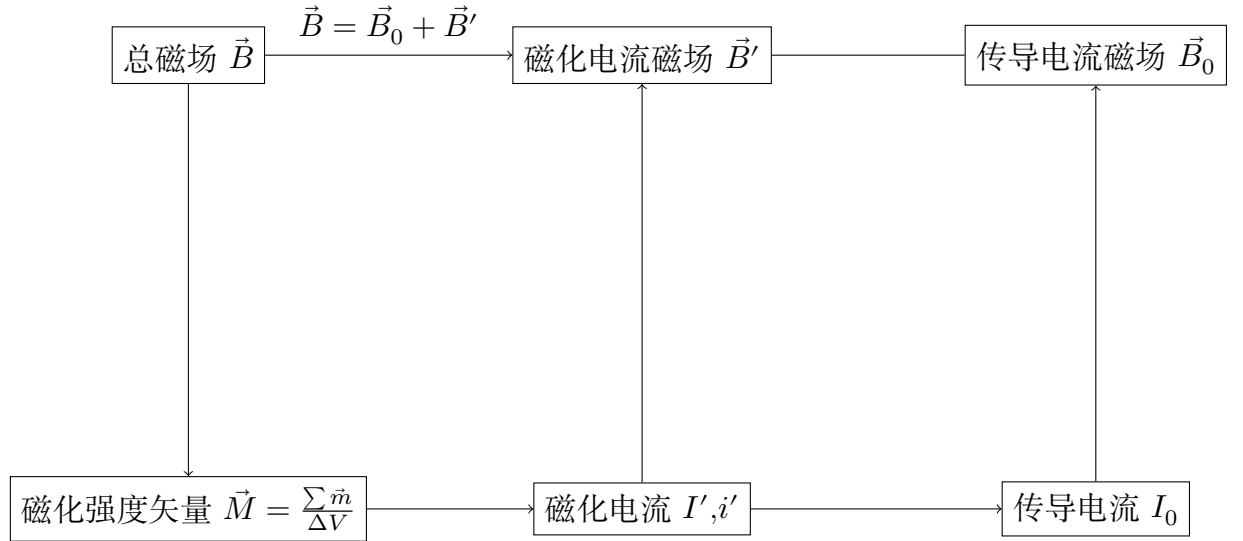
引入辅助场矢量：

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J} \text{ 为磁感应强度} \quad (89)$$

则高斯定理可变为不含磁荷的形式：

$$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \sum_{S, inner} q_m \rightarrow \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (90)$$

6.13.2 分子电流观点



有：

$$\oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = \sum_{L, inner} I', \quad \vec{i}' = \vec{M} \times \vec{n} \quad (91)$$

引入辅助场矢量：

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (92)$$

则环路定理可变为不含磁化电流的形式：

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L, inner} (I_0 + I') \rightarrow \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (93)$$

7 第七章：电磁感应

7.1 法拉第电磁感应定律、楞次定律

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (94)$$

楞次定律：感应电流的效果总是反抗引起感应电流的原因。对于线圈，定义全磁通：

$$\Psi = \sum_{i=1}^n \Phi_i \quad (95)$$

这样整个线圈的总感应电动势：

$$\epsilon = -\frac{d\Psi}{dt} \quad (96)$$

7.2 动生电动势和感生电动势

- 动生电动势计及静电场中运动导体（不一定闭合）产生的电动势，只有切割磁感线的部分才会产生。最终结果是各段的叠加：

$$\epsilon = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (97)$$

此外还可以理解为非静电力（涡旋电场） $\vec{K} = \vec{v} \times \vec{B}$ 的电动势

- 感生电动势：

$$\epsilon = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (98)$$

感应电动势来源于感应电场所产生的非静电力。感应电场的环路定理：

$$\oint_C \vec{E}_{rot} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (99)$$

随时间变化的电场并非一定环流不为零。用环流是否为零可以区分势场与涡旋场。

实验只能测得势场与涡旋场的总电场 $\vec{E} = \vec{E}_{pot} + \vec{E}_{rot}$ ，故：

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (100)$$

不闭合的路径实际上也可以定义感生电动势，只需要构造一个除了该路径以外处处垂直于涡旋电场的路径即可。

7.3 电场与磁场的洛伦兹变换

$$\begin{cases} E'_{\parallel} = E_{\parallel} \\ E'_{\perp} = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_{\perp} \end{cases} \quad (101)$$

$$\begin{cases} B'_{\parallel} = B_{\parallel} \\ B'_{\perp} = \gamma(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E})_{\perp} \end{cases} \quad (102)$$

其中：

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \quad (103)$$

7.4 互感、自感

- 互感系数的定义及互感电动势：

$$\Psi_{12} = M_{12}I_1, \quad \Psi_{21} = M_{21}I_2, \quad M_{12} = M_{21} = M \quad (104)$$

其中 Ψ_{12} 是 1 对 2 的磁通量。

$$\epsilon_1 = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M\frac{dI_2}{dt} \quad (105)$$

$$\epsilon_2 = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt} \quad (106)$$

- 自感系数的定义及自感电动势：

$$\Psi = LI, \quad \epsilon = -L\frac{dI}{dt} \quad (107)$$

- 以上两个定义都是针对线圈的。如果不是线圈则全磁通替换成 Φ

7.5 线圈的并联和串联

- 一般自感和互感都取其绝对值，那么两个线圈的同名端意味着从这段流入时的自感磁通和互感磁通是同向的。

- 两个线圈串联后的总自感：

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M \quad (108)$$

当且仅当顺接（异名端相接）时取正号，且有：

$$M \leq \frac{L_1 + L_2}{2} \quad (109)$$

对于两个线圈并列，可列出方程（同名端相接）：

$$-\epsilon = L_1\frac{dI_1}{dt} + M\frac{dI_2}{dt} = L_2\frac{dI_2}{dt} + M\frac{dI_1}{dt} \quad (110)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} = -\frac{\epsilon}{L} \quad (111)$$

求得一般情况下，两线圈并联后的自感：

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} \quad (112)$$

若为异名端相接，则用-M 替代 M 即可。

3. 根据此，有不等式：

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2} \quad (113)$$

理想耦合的情况下上式取等。若考虑无耦合，也即 $M=0$ ，那么自感的求法和电路里电阻的并、串联规律是一样的。

7.6 似稳条件和似稳电路方程

7.6.1 似稳条件

$$l \ll \frac{c}{f} = \lambda \quad (114)$$

其中 λ 是波长。上式的物理含义是电路对变化可否是做瞬时相应。

7.6.2 似稳电路方程

- 单一闭合回路：

$$e = iR + \frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} + M \frac{di'}{dt} = iR + \frac{1}{C} \int i dt + L \frac{di}{dt} + M \frac{di'}{dt} \quad (115)$$

- 多电路的似稳回路：基尔霍夫第一、二定律

- 稳态过程：

- LR 电路中的 I 不能跃变
- CR 电路中的 q 和 U 不能跃变
- 电源突然接通或断开时 I 或 U 按照指数 $e^{-\frac{t}{\tau}}$ 形式变化, τ 称作时间常量

* LR 电路中, $\tau = \frac{L}{R}$

* RC 电路中, $\tau = CR$

– LCR 电路中的阻尼度 $\lambda = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$:

- * λ 大于、等于和小于 1，分别对应过阻尼、临界阻尼和阻尼振荡的情况。
- * 若真的要解方程 (115)，须知对于函数 $y = y(t)$ ，有二阶微分方程 $A\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + Cy = 0$ ，其解应该形如：

$$y(t) = e^{\frac{-B \pm \sqrt{4AC - B^2}}{2A}t} \quad (116)$$

8 磁场能量

8.1 载留线圈的磁能

- 单个载留线圈的磁能：

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 \quad (117)$$

- 互感线圈的磁能：

$$W_m = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2 \quad (118)$$

其中顺接时取正号

- 载留线圈在外场（均匀外场或非均匀外场中的小线圈）中磁能

$$W_m = \vec{m} \cdot \vec{B} \quad (119)$$

8.2 磁场能量

$$W_m = \iiint_V w_m dV = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{B} \cdot \vec{H} dV \quad (120)$$

其中 $w_m = \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H}$ 是磁能密度，即（螺绕环内）单位体积的磁能

8.3 电场能量与磁场能量的简单对比

电场能量	磁场能量
电容器 $W_e = \frac{1}{2}CU^2$	自感线圈 $W_m = \frac{1}{2}LI^2$
电场强度密度 $w_e = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}\epsilon E^2$	磁场强度密度 $w_m = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2\mu}B^2$
电场能量 $W_e = \iiint_V w_e dV$	磁场能量 $W_m = \iiint_V w_m dV$

Table 3: 电场能量与磁场能量的简单对比

8.4 虚功原理求力

方法同 3.6

9 第九章：交流电路

9.1 交流电路描述法

- 函数描述:

- 电压 $u(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_u)$
- 电流 $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$
- 电动势 $e(t) = \epsilon_m \cos(\omega t + \varphi_e)$

其中 V_m, I_m, ϵ_m 为峰值，除以 $\sqrt{2}$ 后为有效值，代表热效应

- 矢量描述：旋转矢量的叠加运算

- 复数描述（瞬时复数形式）

- 复电压 $\tilde{V} = V_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \sqrt{2}\dot{V}e^{j\omega t}$
- 复电流 $\tilde{I} = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}$
- 复电动势 $\tilde{\epsilon} = \epsilon_m e^{j(\omega t + \varphi_e)} = \sqrt{2}\dot{\epsilon}e^{j\omega t}$

其中 $\dot{V}, \dot{I}, \dot{\epsilon}$ 为复有效值

9.2 交流电路复数解法

- 单回路下

$$e = iR + \frac{1}{C} \int i dt + L \frac{di}{dt} + M \frac{di'}{dt} \quad (121)$$

考虑复数形式：

$$\operatorname{Re}(\tilde{\epsilon}) = R \cdot [\operatorname{Re}(\tilde{I})] + \frac{1}{C} \int [\operatorname{Re}(\tilde{I})] dt + L \frac{d}{dt} [\operatorname{Re}(\tilde{I})] + M \frac{d}{dt} [\operatorname{Re}(\tilde{I}')] \quad (122)$$

那么经过简单推导，有复有效形式：

$$\dot{\epsilon} = R\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I} + j\omega L\dot{I} + j\omega M\dot{I}' \quad (123)$$

9.3 交流电路元件复阻抗

交流电路复阻抗即复电压与复电流之比。

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = Z e^{j\varphi} \quad (124)$$

其中 Z 为阻抗， $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ 为幅角。对于不同种类的电路器件，

- 电阻 $\dot{Z}_R = R$ ，即电流和电压是同位相的，阻抗 $Z_R = R$ ；
- 电容 $\dot{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}$ ，即电流超前 $\frac{\pi}{2}$ ，阻抗 $Z_C = \frac{1}{\omega C}$ ；
- 电感 $\dot{Z}_L = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}}$ ，即电流滞后 $\frac{\pi}{2}$ ， $Z_L = \omega L$

串、并联上的阻抗服从串、并联的已有规律。

9.4 基尔霍夫定律

(4.5) 提到的基尔霍夫定律在有效值情形下依然成立，方向（正负）的判定规则也不变。

9.5 交流电路功率问题

- 交流电路中设 $i(t) = I_m \cos \omega t$, $u(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$ 则瞬时功率

$$P(t) = V_m I_m \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} V_m I_m [\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi)] \quad (125)$$

其中第一项与时间无关；电感 ($\varphi = +\frac{\pi}{2}$) 或电容 ($\varphi = -\frac{\pi}{2}$) 中 $\cos \varphi = 0$ 只有第二项。而当 $P(t) < 0$ 时，电感和电容分别释放储存的磁能和电能。

- 平均功率：瞬时功率在一个周期内的平均值

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \varphi = VI \cos \varphi \quad (126)$$

其中 V 和 I 是有效值

- * 视在功率：一个元件上电压和电流有效值的乘积

$$S = VI \quad (127)$$

- * 有功功率：电路在一个周期内实际产生的功率。

$$P = S \cos \varphi \quad (128)$$

$\cos \varphi$ 为功率因数

- 电流、电压复有效值，平均功率：

$$P = \frac{1}{2} (\dot{V} \dot{I}^* + \dot{V}^* \dot{I}) \quad (129)$$

9.6 交流电路分析举例

9.6.1 RLC 串联谐振

$$\dot{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \quad (130)$$

则阻抗应该表示成 $Ze^{j\varphi_z}$ ：

$$\begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2 (1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2} \\ \varphi_z = \arctan[\frac{\omega L}{R} (1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})] \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases} \quad (131)$$

当 $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ ，即 $\omega = \omega_0$ 时 I 取极大值。此时称串联谐振。谐振频率：

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (132)$$

对于 ω 小于、等于或大于 ω_0 、即 φ_z 小于、等于或大于 0，则电路分别呈现电容性、电阻性和电感性。

定义品质因数：

$$Q = \frac{1}{R\omega_0 C} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (133)$$

其物理意义：

- 决定谐振时的阻抗比和电压比
- 决定谐振曲线的尖锐程度：

$$f_0 \rightarrow f_0 + \Delta f \text{ 时 } Z = \sqrt{2}Z_{min} \text{ 即 } I = \frac{I_{min}}{\sqrt{2}}, \text{ 此时 } 2\Delta f \text{ 为谐振电路的带宽} \quad (134)$$

$$\text{此时有 } 2\Delta f = \frac{\Delta\omega}{\pi} = \frac{f_0}{Q}$$

9.6.2 并联谐振电路：“C+RL”

$$\frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C \quad (135)$$

则此时阻抗：

$$\begin{cases} Z = R \sqrt{\frac{1 + \frac{Q^2 \omega^2}{\omega_0^2}}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + \frac{\omega^2}{Q^2 \omega_0^2}}} \\ \varphi_z = \arctan[\frac{\omega L}{R}(1 - \frac{1}{Q^2} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})] \end{cases} \quad (136)$$

$$\varphi_z = 0 \text{ 时, 角频率 } \omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}, \text{ 频率 } f_c = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}$$

9.6.3 变压器电路

考虑二级耦合且线圈无损耗和漏磁的理想情况。

- 初级绕组：电流 \dot{I}_1 ，交流电压 \dot{V}_1 ，线圈 L_1 和电阻 R_1 ；
- 次级绕组：电流 \dot{I}_2 ，线圈 L_2 和电阻 R_2 ，还有其余的阻抗（记作 \dot{Z} ）；
- 两线圈之间互感系数为 M 。

则初级回路的方程：

$$\dot{I}_1 \dot{Z}_1 - \dot{I}_2 \dot{Z}_M = \dot{V}_1 \quad (137)$$

次级回路的方程：

$$-\dot{I}_1 \dot{Z}_M + \dot{I}_2 \dot{Z}_2 = 0 \quad (138)$$

其中：

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 \\ \dot{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 + \dot{Z} \\ \dot{Z}_M = j\omega M \end{cases} \quad (139)$$

解得：

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_1 - \dot{Z}_M^2} \\ \dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_1 \dot{Z}_M}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_1 - \dot{Z}_M^2} \end{cases} \quad (140)$$

则变流比（输入：输出）：

$$\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{Z}_M}{\dot{Z}_2} \quad (141)$$

变压比：

$$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = \frac{\dot{Z} \dot{Z}_M}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_1 - \dot{Z}_M^2} \quad (142)$$

由于理想情况 $M = \sqrt{L_1 L_2}$ ，且无漏磁 $\frac{L_1}{L_2} = \frac{N_1^2}{N_2^2}$ ，其中 N_1 和 N_2 分别为初、次级线圈匝数则有：

$$\begin{aligned} \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} &= \frac{\dot{N}_1}{\dot{N}_2} \\ \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} &= \frac{\dot{N}_2}{\dot{N}_1} \\ \frac{P_2}{P_1} &= 1 \end{aligned} \quad (143)$$

变压器次级回路在初级回路中的等效阻抗：

$$\dot{Z}_{21} = \frac{N_1^2}{N_2^2} \dot{Z}_2 \quad (144)$$

10 第十章：电磁场的基本规律

10.1 实验规律的推广

- 静电场环路定理 → 电场环路定理。涡旋电场 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 的本质是，随时间变化的磁场可以激发出电场。

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \rightarrow \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_L (\vec{E}_{pot} + \vec{E}_{rot}) \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (145)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \rightarrow \nabla \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (146)$$

- 静电场的高斯定理 → 电场高斯定理，因为涡旋电场的电力线为闭合的曲线，故闭合曲面积分为零，高斯定理形式不变：

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{S, inner} q_{0i} \quad (147)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0 \quad (148)$$

- 静磁场的高斯定理 → 磁场高斯定理，定理形式不变：

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (149)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (150)$$

- 静磁场环路定理 → 磁场环路定理。定义位移电流密度 $j_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 表示空间随时间变化的电场的磁效应。

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{S} \rightarrow \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{j}_0 + \vec{j}_D) \cdot d\vec{S} = \iint_S (\vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \quad (151)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 \rightarrow \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (152)$$

10.2 位移电流

非稳定的情况下，传导电流终止的地方由位移电流接上。如果计及了位移电流，那么在位移电流存在的区域就不可以计算传导电流。事实上，在似稳条件下安培环路定律：

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(I_C + I_D) \quad (153)$$

但毕奥-萨伐尔定律无需计及 I_D 因为其环路积分为零。

10.3 麦克斯韦方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_0 dV \\ \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) dS \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dS \end{array} \right. \quad (154)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (155)$$

10.4 各向同性介质的电磁性能方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{j}_0 = \sigma \vec{E} \end{array} \right. \quad (156)$$

10.5 边值关系

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_0 \\ \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \\ \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}_0 \\ \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \end{cases} \quad (157)$$

10.6 其他形式的麦克斯韦方程组

- 存在磁流和磁荷的麦克斯韦方程组，设磁流密度、磁荷密度为 \vec{j}_m , ρ_m ，则：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = \rho_m \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\vec{j}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \quad (158)$$

- 光子质量不为零的麦克斯韦方程组（Proca 方程组）

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} - \mu^2 U \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \mu_0 \vec{j}_0 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu^2 \vec{A} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \quad (159)$$

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla U = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases} \quad (160)$$

10.7 自由空间的电磁波

根据式 (155) 和 (156), $\rho_0 = 0$, $j_0 = 0$ 的麦克斯韦方程组：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \quad (161)$$

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \end{cases} \quad (162)$$

根据上式可以推出：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \vec{E} \\ \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \vec{B} \end{cases} \quad (163)$$

电磁波在真空中的传播速度遂为 $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

10.8 电磁波的性质

定义波矢 \vec{k} ，其大小为波数 $\frac{2\pi}{\lambda}$ ，方向为波的传播方向，那么平面电磁波解可以表示为（其中 \vec{r} 为位矢）

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \exp[-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})] \\ \vec{H} = \vec{H}_0 \exp[-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})] \end{cases} \quad (164)$$

利用 $\nabla = i\vec{k}$ ， $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$ ，可以得到以下性质：

- 电磁波是横波， $\vec{E} \perp \vec{H}$ 且 $\vec{k} \parallel \vec{E} \times \vec{H}$
- \vec{E} ， \vec{H} 的振幅成比例

$$\varepsilon E^2 = \mu H^2 \quad (165)$$

这说明介质中任一点任意时刻电场能量密度和磁场能量密度相等。

- 电磁波在介质中的传播速度为：

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{\sqrt{\varepsilon\mu}} c \quad (166)$$

折射率与介电常量的关系

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \quad (167)$$

10.9 电磁场的能量、动量、角动量

电磁场的能量密度、能流密度（玻印廷矢量）、动量密度、角动量密度：

$$\begin{cases} w = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \\ \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \\ \vec{g} = \vec{D} \times \vec{B} \\ \vec{l} = \vec{r} \times \vec{g} \end{cases} \quad (168)$$

10.10 平面电磁波的能量和动量

平面电磁波的能量密度、能流密度（玻印廷矢量）、动量密度（都是瞬时值）：

$$\begin{cases} w = \varepsilon E^2 = \mu H^2 \\ \vec{S} = w v \vec{k} \\ \vec{g} = \frac{\vec{S}}{v^2} \end{cases} \quad (169)$$

10.10.1 例：光压

- 垂直入射到某表面，平均光压强：

$$p = (1 + R)w \quad (170)$$

其中 R 为反射系数，是反射的玻印廷矢量 S_r 与入射 S_i 大小之比； $w = \frac{S_i}{c}$

- 考虑更一般的情况：入射角为 θ 时，光压：

$$p = (1 + R)w \cos^2 \theta \quad (171)$$

这里出现因子 $\cos^2 \theta$ 是因为入射角为 θ 时：

- 面元 dA 与光的传播方向夹角为 θ ，有效接受面积为 $dA \cos \theta$ ；
- $d\vec{F}$ 沿面元法向，与法向电磁动量损失对应，故应将沿着传播方向的 \vec{S} 投影至法向分量，需再乘因子 $\cos \theta$ 。

11 * 超导体与超导现象

11.1 超导体的基本特性

- 零阻抗：超导体内总是有 $E=0$ ；
- 迈斯纳效应：超导体内总是有 $B=0$ 。

零电阻现象和完全的抗磁性是超导体的两个独立的性质。仅仅具有零电阻的导体成为完全导体，完全导体内可以有磁通，但磁通不能改变。而超导体内任意情况下都不会出现磁通。

11.2 三个临界参量

- 临界温度 T_C ： $T < T_C$ 时，电阻率 $\rho = 0$
- 临界磁感强度 B_C ：超导态的 $B < B_C$ ， $B > B_C$ 时则“失超”
- 临界电流密度 j_C ：超导体中 $j > j_C$ 时“失超”

11.3 两类超导体

- 第一类超导体只有一个 B_C （一般金属）
- 第二类超导体有 B_{C1} 和 B_{C2} ：
 - 正常态： $B > B_{C2}$ ， $R \neq 0$ ， $B_{inner} \neq 0$
 - 混合态： $B_{C1} < B < B_{C2}$ ， $R = 0$ ， $B_{inner} \neq 0$
 - 迈斯纳态： $B < B_{C1}$ ， $R = 0$ ， $B_{inner} = 0$

11.4 超导性的唯象理论——二流体模型

这个模型认为：金属内部有两种流体，即正常流体和超导体。它们的相对数量随温度和磁场而变化。正常流体导电性与金属中电子气相同，而超导体在晶格中运动完全自由，畅通无阻。低于超导转变温度，所有电子都凝聚到超导态了。

超导电子和正常电子：

$$N = N_s + N_n \quad (172)$$

超导流体没有阻力：

$$m_s \dot{\vec{u}} = e_s \vec{E} \rightarrow \dot{\vec{j}}_s = \frac{Ne_s^2 \vec{E}}{m_s} \quad (173)$$

$\vec{E} \rightarrow 0, \dot{\vec{j}}_s \rightarrow 0, \vec{j}_s$ 为恒量。这实际上反映了理想的导电性。若超导电流是交变的，则 $\dot{\vec{j}}_s \neq 0, \vec{E} \neq 0, \vec{j}_n = \sigma \vec{E} \neq 0$ 表征超导体内有交流损耗

$$\nabla \times \dot{\vec{j}}_s = \frac{Ne_s^2}{m_s} \nabla \times \vec{E} \quad (174)$$

由于 $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 则：

$$\nabla \times \dot{\vec{j}}_s = -\frac{Ne_s^2}{m_s} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (175)$$

又有 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ，则：

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times (\vec{j}_s + \frac{Ne_s^2}{m_s} \vec{A}) = 0 \quad (176)$$

11.5 伦敦方程

假设（规范对称性被破坏）：

$$\vec{j}_s + \frac{Ne_s^2}{m_s} \vec{A} = 0 \quad (177)$$

由于 $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ，

只考虑超导电流：

$$\nabla \times \vec{H} = -\frac{Ne_s^2}{m_s} \vec{A} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (178)$$

超导体的效果就是超导电流：

$$\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = -\frac{Ne_s^2}{m_s} \vec{A} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (179)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = -\frac{\mu_0 Ne_s^2}{m_s} \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (180)$$

加上洛伦兹规范：

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (181)$$

则：

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{\mu_0 N e_s^2}{m_s} \vec{A} \quad (182)$$

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \quad (183)$$

则：

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\mu_0 N e_s^2}{m_s} \quad (184)$$