

# 关于热湿交换大作业的说明

Jiarui Hu

(清华大学未央书院)

2025 年 12 月 15 日

---

## 0 参数定义及说明

Table 1: MATLAB 中各参数定义及其含义-1

| 参数           | 含义           | 单位                                     |
|--------------|--------------|--|
| $T_a$        | 环境温度         | 28°C                                   |
| $RH$         | 环境相对湿度       | 85%                                    |
| $\rho_{air}$ | 空气密度         | 1.18 kg/m <sup>3</sup>                 |
| $\mu_{air}$  | 空气动力粘度       | $1.85 \times 10^{-5}$ kg/(m • s)       |
| $\sigma$     | 空气与水滴表面的张力系数 | 0.072 N/m                              |
| $C_{p,air}$  | 空气比热容        | 1005 J/(kg • K)                        |
| $C_d$        | 气流拖拽系数       | 0.0063                                 |
| $k_a$        | 空气热导率        | 0.0253 W/(m • K)                       |
| $k_w$        | 水的热导率        | 0.606 W/(m • K)                        |
| $D_{aw}$     | 空气中水蒸气扩散系数   | $2.6 \times 10^{-5}$ m <sup>2</sup> /s |
| $M_w$        | 水的摩尔质量       | $18.01528 \times 10^{-3}$ kg/mol       |
| $D_0$        | 水滴初始直径       | 0.1 mm                                 |
| $R_0$        | 水滴初始半径       | 0.05 mm                                |
| $R_{gas}$    | 通用气体常数       | 8.314 J/(mol • K)                      |
| $T_{sur}$    | 翅片表面温度       | °C                                     |
| $\rho_w$     | 水的密度         | 997 kg/m <sup>3</sup>                  |
| $g$          | 重力加速度        | 9.81 m/s <sup>2</sup>                  |
| $P$          | 环境大气压        | 101325 Pa                              |
| $P_s$        | 环境中水蒸气分压     | 3214Pa                                 |
| $P_{sat}$    | 水滴表面饱和水蒸气压   | Pa                                     |

Table 2: MATLAB 中各参数定义及其含义-2

| 参数         | 含义           | 单位                     |
|------------|--------------|------------------------|
| $C_{p,w}$  | 水的比热容        | 4186 J/(kg • K)        |
| $u$        | 空气来流速度       | m/s                    |
| $t$        | 时间           | s                      |
| $X_w$      | 水滴表面水蒸气的摩尔分数 | -                      |
| $T_w$      | 水滴温度         | °C                     |
| $D_w$      | 水滴直径         | m                      |
| $R_w$      | 水滴半径         | m                      |
| $h_{fg}$   | 水的汽化潜热       | J/kg                   |
| $h_c$      | 水滴表面对流传热系数   | W/(m <sup>2</sup> • K) |
| $h_m$      | 水滴表面对流传质系数   | m/s                    |
| $\theta$   | 接触角          | rad                    |
| $L$        | 水滴湿润长度       | m                      |
| $R_c$      | 接触半径         | m                      |
| $A$        | 水滴表面积        | m <sup>2</sup>         |
| $A_p$      | 水滴在流动方向的投影面积 | m <sup>2</sup>         |
| $F_\sigma$ | 表面张力         | W                      |
| $F_d$      | 气流拖拽力        | W                      |
| $F_g$      | 重力           | W                      |
| $V$        | 水滴体积         | m <sup>3</sup>         |
| $N_w$      | 水的摩尔流量       | mol/s                  |
| $q$        | 单位面积上的传热通量   | W/m <sup>2</sup>       |
| $Re$       | 雷诺数          | -                      |
| $Pr$       | 普朗特数         | 0.707                  |
| $Sc$       | 施密特数         | -                      |
| $Nu$       | 努塞尓数         | -                      |
| $Sh$       | 舍伍德数         | -                      |
| $We$       | 韦伯数          | -                      |
| $r_{sl}$   | 水滴与翅片导热热阻    | K/W                    |

---

# 1 ODE 函数的创建：变量关联

## 1.1 课件中给出的公式

表面张力：

$$F_\sigma = \sigma L \sin \theta \quad (1.1)$$

气流拖拽力：

$$F_d = \frac{1}{2} C_d \rho_{air} A_p u^2 \quad (1.2)$$

接触角为  $\theta$  的球形帽状水滴体积：

$$V = \frac{\pi R^3}{3} (2 - 3 \cos \theta + \cos^3 \theta) \quad (1.3)$$

其表面积  $A$  和在投影方向的面积  $A_p$  分别为：

$$A = 2\pi R^2 (1 - \cos \theta) \quad (1.4)$$

$$A_p = \pi R^2 \sin^2 \theta \quad (1.5)$$

接触半径  $R_c$  与曲率半径的关系为：

$$R_c = R \sin \theta \quad (1.6)$$

湿润长度  $L$  与接触半径的关系为：

$$L = 2R \sin \theta \quad (1.7)$$

## 1.2 无量纲参量

对于水滴，其毕渥数  $Bi$  定义为：

$$Bi = \frac{h_c R}{k_w} \quad (1.8)$$

其中  $k_w$  为水的导热系数。集总参数的应用条件为  $Bi < 0.1$ ，所以水滴在这个模型中可以认为是温度均匀的。

水滴表面水蒸气的浓度梯度是水蒸气扩散的主要动力，水滴表面的水蒸气浓度视为在此温度下的饱和水蒸气浓度。水滴表面的水蒸气浓度摩尔通量计算如下：

$$N_w = h_m \left( \frac{P_{sat}(T_w)}{R_{gas} T_w} - X_w \frac{P_s}{R_{gas} T_a} \right) \quad (1.9)$$

根据 ASHRAE 手册，饱和水蒸气压  $P_{sat}$  可由下式计算<sup>1</sup>：

$$\ln P_{sat}(T_w) = c_1 T_w^{-1} + c_2 + c_3 T_w + c_4 T_w^2 + c_5 T_w^3 + c_6 \ln T_w \quad (1.10)$$

其中各常数值为：

$$\begin{aligned}c_1 &= -5.8002206 \times 10^3, \\c_2 &= 1.3914993 \times 10^0, \\c_3 &= -4.8640239 \times 10^{-2}, \\c_4 &= 4.1764768 \times 10^{-5}, \\c_5 &= -1.4452093 \times 10^{-8}, \\c_6 &= 6.5459673 \times 10^0.\end{aligned}$$

水滴质量在微元时间内变化可以表示为：

$$m_w(t + \Delta t) = m_w(t) - N_w A_p M_w \Delta t \quad (1.11)$$

水滴的温度变化可表示为：

$$m_w C_{p,w} \frac{dT_w}{dt} = [h_c A(T_a - T_w) + \pi R_c^2 (T_{sur} - T_w) / r_{sl}] - \frac{dm_w}{dt} h_{fg} \quad (1.12)$$

其中：

$$h_{fg} = 2500 + 1.84T_w - 4.19T_w = 2500 - 2.35T_w \quad (kJ/kg) \quad (1.13)$$

热阻  $r_{sl}$  取：

$$r_{sl} = \frac{\delta_{eff}}{k_w \pi R_c^2} \quad (1.14)$$

其中  $\delta_{eff}$  为等效液膜厚度，取  $10^{-5}m$ 。式1.9中的对流传质系数  $h_m$  可以通过宣乌特准则数计算关联式得到。表达式如下：

$$Sh = \frac{h_m D_w}{D_{aw}} = 2 + 0.6 Re^{1/2} Sc^{1/3} \quad (1.15)$$

施密特准则数  $Sc$  定义如下：

$$Sc = \frac{C_{p,air} \mu_{air}}{k_a} \quad (1.16)$$

式1.12中的对流传热系数  $h_c$  可以通过计算努谢尔特关联式得到，计算表达式如下：

$$Nu = \frac{h_c D_w}{k_a} = 2 + 0.6 Re^{1/2} Pr^{1/3} \quad (1.17)$$

---

<sup>1</sup>ASHRAE. 2013 ASHRAE Handbook Fundamentals SI Edition [M].

式1.17和式1.15中的雷诺数  $Re$  定义如下：

$$Re = \frac{\rho_{air} u D_w}{\mu_{air}} \quad (1.18)$$

关于韦伯数  $We$ , 其定义如下：

$$We = \frac{\rho_{air} u^2 D_w}{2\sigma} \quad (1.19)$$

### 1.3 接触角理论

本部分中，我们假定表冷器翅片材料为铝材，静态接触角  $\theta_s$  依靠托马斯-杨的润湿理论：

$$\cos \theta_s = \frac{\sigma_{sv} - \sigma_{sl}}{\sigma_{lv}} \quad (1.20)$$

其中  $\sigma_{sv}$  为固-气界面张力， $\sigma_{sl}$  为固-液界面张力， $\sigma_{lv}$  为液-气界面张力。在我们的研究案例中，这个  $\theta_s$  取  $\pi/5$  且变化极小，可以认为是常数。但当液滴上方存在空气流动时，接触角会发生变化，这时需要用到动态接触角理论，我们采用 Cox-Voinov 模型<sup>2</sup> 来描述动态接触角与静态接触角的关系：

$$\theta^3 = \theta_s^3 + \frac{9\mu_{air}u}{\sigma} \ln\left(\frac{L}{L_m}\right) \quad (1.21)$$

其中  $\theta$  为动态接触角， $\theta_s$  为静态接触角， $\mu_{air}$  为空气动力粘度， $u$  为空气来流速度， $\sigma$  为空气与水滴表面的张力系数， $L$  为水滴湿润长度， $L_m$  为分子尺度，一般取  $10^{-9}$  m。这是我们实际要用到的接触角，它是关于来流速度  $u$  和半径  $R$  的函数。

### 1.4 力学平衡关系：水滴的生长、脱落、滑移与破碎

首先来考虑水滴的生长 ( $dR/dt$ )。根据1.11，水滴的体积变化率为：

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\rho_w} \frac{dm_w}{dt} = -\frac{N_w A_p M_w}{\rho_w} \quad (1.22)$$

也就是说，对于一个固定的来流速度  $u$ ，水滴生长的速率  $dR/dt$  可以通过下式计算得到：

$$-N_w \pi R^2 \sin^2 \theta M_w = \rho_w \pi R^2 (2 - 3 \cos \theta + \cos^3 \theta) \frac{dR}{dt} \quad (1.23)$$

简化得：

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{N_w M_w}{\rho_w (2 - 3 \cos \theta + \cos^3 \theta) \sin^2 \theta} \quad (1.24)$$

---

<sup>2</sup>Chan TS, Kamal C, Snoeijer JH, Sprittles JE, Eggers J. Cox-Voinov theory with slip. Journal of Fluid Mechanics. 2020;900:A8. doi:10.1017/jfm.2020.499

所以水滴的生长速率用一个偏微分方程表示，只与来流速度  $u$  和半径  $R$  有关。因为  $\theta = \theta(u, R)$ 。

对于贴附在水平上壁面的水滴，其所受重力  $F_g$  为：

$$F_g = \rho_w g \cdot \frac{1}{3} \pi R^3 (2 - 3 \cos \theta + \cos^3 \theta) \quad (1.25)$$

表面张力提供的粘附力  $F_\sigma$  用于抵抗脱落力，当水滴所受重力大于粘附力时，水滴脱落。水滴脱落的条件为：

$$F_g > F_\sigma \quad (1.26)$$

水滴滑移与气流拖拽力  $F_d$  有关，当气流拖拽力大于粘附力时，水滴开始滑移。根据牛顿的粘附力模型，水滴滑移的临界条件为：

$$F_d > \mu_{air} A_p \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \approx \mu_{air} A_p \frac{u}{R_c} \quad (1.27)$$

也就是：

$$R \cdot (u \sin \theta) = \frac{2\mu_{air}}{C_d \rho_{air}} \quad (1.28)$$

最后来讨论水滴的破碎。当韦伯数  $We$  大于临界韦伯数  $We_{dro}$  时，水滴破碎。本文采用 SSD (Stochastic Secondary Droplet) 模型模拟液滴在湿通道中的破碎过程。在气液两相流动过程中，大液滴在气流的冲击下会破碎成小液滴。SSD 模型允许液滴在一定范围内随机破碎。在破碎过程中，小液滴的尺寸具有一定独立性。小液滴的粒径符合 Fokker-Planck 分布。区分液滴大小之间的临界尺寸使用下面的公式来计算：

$$r_{dro} = \frac{We_{dro} \cdot \sigma}{\rho_{air} u^2} \quad (1.29)$$

关于临界韦伯数  $We_{dro}$ ，本文采用源流流动中常出现的经验值 10。

大液滴破碎后，小液滴产生，小水滴的直径可以采用下式计算：

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi^2}} \exp\left[\frac{-(x - x_0 - \xi)^2}{2\xi^2}\right] \quad (1.30)$$

其中  $x$  为水滴破碎后产生的小水滴的半径的对数分布形式：

$$x = \ln(r) \quad (1.31)$$

$\xi^2$  是新生成的水滴的半径方差的一个对数表达形式：

$$\xi^2 = -0.1 \ln(We/We_{dro}) \quad (1.32)$$

最后我们从1.12中提取以翅片表面温度  $T_{sur}$  为自变量的水滴温度变化率：

$$\frac{dT_w}{dt} = \frac{h_c A (T_a - T_w) + \pi R_c^2 (T_{sur} - T_w) / r_{sl} - \frac{dm_w}{dt} h_{fg}}{m_w C_{p,w}} \quad (1.33)$$

上式含自变量  $T_{sur}, R, u$ 。

## 1.5 总结

考虑时间  $t$ , 由前面的推导可知, 水滴的半径  $R$  似乎是一个隐函数 (或偏微分方程) 的形式, 可以表示为:

$$R = R(u, t) \quad (1.34)$$

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{N_w M_w}{\rho_w (2 - 3 \cos \theta + \cos^3 \theta) \sin^2 \theta} \quad (1.35)$$

$$h_m = h_m(u, R(u, t)) = h_m(u, t) \quad (1.36)$$

$$\theta = \theta(u, R(u, t)) = \theta(u, t) \quad (1.37)$$

$$R(u, t = 0) = R_0 = 0.05mm \quad (1.38)$$

对于水的温度  $T_w$ , 其也可以表示为一个隐函数的形式, 自变量含有  $u, t, T_{sur}$ , 可以表示为:

$$T_w = T_w(u, t, T_{sur}, R(u, t)) = T_w(u, t, T_{sur}) \quad (1.39)$$

$$\frac{dT_w}{dt} = \frac{h_c A(T_a - T_w) + \pi R_c^2 (T_{sur} - T_w) / r_{sl} - N_w A_p M_w h_{fg}}{m_w C_{p,w}} \quad (1.40)$$

$$h_c = h_c(u, R(u, t)) = h_c(u, t) \quad (1.41)$$

$$R(u, t = 0) = R_0 = 0.05mm \quad (1.42)$$

$$h_{fg} = h_{fg}(T_w) \quad (1.43)$$

$$m_w = m_w(R(u, t), \theta(u, t)) = m_w(u, t) \quad (1.44)$$