关于热湿交换大作业的说明

Jiarui Hu

(清华大学未央书院)

2025 年 12 月 15 日

0 参数定义及说明

Table 1: MATLAB 中各参数定义及其含义-1

参数	含义	单位
T_a	环境温度	28°C
RH	环境相对湿度	85%
ρ_{air}	空气密度	1.18 kg/m^3
μ_{air}	空气动力粘度	1.85×10^{-5} kg/(m • s)
σ	空气与水滴表面的张力系数	0.072 N/m
$C_{p,air}$	空气比热容	1005 J/(kg • K)
C_d	气流拖拽系数	0.0063
k_a	空气热导率	0.0253 W/(m • K)
k_w	水的热导率	0.606 W/(m • K)
D_{aw}	空气中水蒸气扩散系数	2.6×10^{-5} m^2/s
M_w	水的摩尔质量	18.01528×10^{-3} kg/mol
D_0	水滴初始直径	0.1 mm
R_0	水滴初始半径	0.05 mm
R_{gas}	通用气体常数	8.314 J/(mol • K)
T_{sur}	翅片表面温度	°C
ρ_w	水的密度	997 kg/m^3
g	重力加速度	9.81 m/s^2
P	环境大气压	101325 Pa
P_s	环境中水蒸气分压	3214Pa
P_{sat}	水滴表面饱和水蒸气压	Pa

Table 2: MATLAB 中各参数定义及其含义-2

参数	含义	单位
$C_{p,w}$	水的比热容	4186 J/(kg • K)
u	空气来流速度	m/s
t	时间	s
X_w	水滴表面水蒸气的摩尔分数	-
T_w	水滴温度	°C
D_w	水滴直径	m
R_w	水滴半径	m
h_{fg}	水的汽化潜热	J/kg
h_c	水滴表面对流传热系数	W/(m^2 • K)
h_m	水滴表面对流传质系数	m/s
θ	接触角	rad
L	水滴湿润长度	m
R_c	接触半径	m
A	水滴表面积	m^2
A_p	水滴在流动方向的投影面积	m^2
F_σ	表面张力	W
F_d	气流拖拽力	W
F_g	重力	W
V	水滴体积	m^3
N_w	水的摩尔流量	mol/s
q	单位面积上的传热通量	W/m^2
Re	雷诺数	-
Pr	普朗特数	0.707
Sc	施密特数	-
Nu	努塞尔数	-
Sh	舍伍德数	-
We	韦伯数	-
r_{sl}	水滴与翅片导热热阻	K/W

1 ODE 函数的创建：变量关联

1.1 课件中给出的公式

表面张力：

$$F_\sigma = \sigma L \sin\theta \tag{1.1}$$

气流拖拽力：

$$F_d = \frac{1}{2} C_d \rho_{air} A_p u^2 \tag{1.2}$$

接触角为 θ 的球形帽状水滴体积：

$$V = \frac{\pi R^3}{3}(2 - 3\cos\theta + \cos^3\theta) \tag{1.3}$$

其表面积 A 和在投影方向的面积 A_p 分别为：

$$A = 2\pi R^2(1 - \cos\theta) \tag{1.4}$$

$$A_p = \pi R^2 \sin^2\theta \tag{1.5}$$

接触半径 R_c 与曲率半径的关系为：

$$R_c = R\sin\theta \tag{1.6}$$

湿润长度 L 与接触半径的关系为：

$$L = 2R\sin\theta \tag{1.7}$$

1.2 无量纲参量

对于水滴，其毕渥数 Bi 定义为：

$$Bi = \frac{h_c R}{k_w} \tag{1.8}$$

其中 k_w 为水的导热系数。集总参数的应用条件为 $Bi < 0.1$，所以水滴在这个模型中可以认为是温度均匀的。

水滴表面水蒸气的浓度梯度是水蒸气扩散的主要动力，水滴表面的水蒸气浓度视为在此温度下的饱和水蒸气浓度。水滴表面的水蒸气浓度摩尔通量计算如下：

$$N_w = h_m\left(\frac{P_{sat}(T_w)}{R_{gas}T_w} - X_w \frac{P_s}{R_{gas}T_a}\right) \tag{1.9}$$

根据 ASHRAE 手册，饱和水蒸气压 P_{sat} 可由下式计算[1]：

$$\ln P_{sat}(T_w) = c_1 T_w^{-1} + c_2 + c_3 T_w + c_4 T_w^2 + c_5 T_w^3 + c_6 \ln T_w \tag{1.10}$$

其中各常数值为：

$$\begin{aligned}
c_1 &= -5.8002206 \times 10^3, \\
c_2 &= 1.3914993 \times 10^0, \\
c_3 &= -4.8640239 \times 10^{-2}, \\
c_4 &= 4.1764768 \times 10^{-5}, \\
c_5 &= -1.4452093 \times 10^{-8}, \\
c_6 &= 6.5459673 \times 10^0.
\end{aligned}$$

水滴质量在微元时间内变化可以表示为：

$$m_w(t+\Delta t) = m_w(t) - N_w A_p M_w \Delta t \tag{1.11}$$

水滴的温度变化可表示为：

$$m_w C_{p,w} \frac{\mathrm{d}T_w}{\mathrm{d}t} = [h_c A(T_a - T_w) + \pi R_c^2 (T_{sur} - T_w)/r_{sl}] - \frac{\mathrm{d}m_w}{\mathrm{d}t} h_{fg} \tag{1.12}$$

其中：

$$h_{fg} = 2500 + 1.84T_w - 4.19T_w = 2500 - 2.35T_w \quad (kJ/kg) \tag{1.13}$$

热阻 r_{sl} 取：

$$r_{sl} = \frac{\delta_{eff}}{k_w \pi R_c^2} \tag{1.14}$$

其中 δ_{eff} 为等效液膜厚度，取 $10^{-5}m$。式1.9中的对流传质系数 h_m 可以通过宣乌特准则数计算关联式得到。表达式如下：

$$Sh = \frac{h_m D_w}{D_{aw}} = 2 + 0.6Re^{1/2}Sc^{1/3} \tag{1.15}$$

施密特准则数 Sc 定义如下：

$$Sc = \frac{C_{p,air}\mu_{air}}{k_a} \tag{1.16}$$

式1.12中的对流传热系数 h_c 可以通过计算努谢尔特关联式得到，计算表达式如下：

$$Nu = \frac{h_c D_w}{k_a} = 2 + 0.6Re^{1/2}Pr^{1/3} \tag{1.17}$$

[1]ASHRAE. 2013 ASHRAE Handbook Fundamentals SI Edition [M].

式1.17和式1.15中的雷诺数 Re 定义如下：

$$Re = \frac{\rho_{air} u D_w}{\mu_{air}} \tag{1.18}$$

关于韦伯数 We，其定义如下：

$$We = \frac{\rho_{air} u^2 D_w}{2\sigma} \tag{1.19}$$

1.3 接触角理论

本部分中，我们假定表冷器翅片材料为铝材，静态接触角 θ_s 依靠托马斯-杨的润湿理论：

$$\cos\theta_s = \frac{\sigma_{sv} - \sigma_{sl}}{\sigma_{lv}} \tag{1.20}$$

其中 σ_{sv} 为固-气界面张力，σ_{sl} 为固-液界面张力，σ_{lv} 为液-气界面张力。在我们的研究案例中，这个 θ_s 取 $\pi/5$ 且变化极小，可以认为是常数。但当液滴上方存在空气流动时，接触角会发生变化，这时需要用到动态接触角理论，我们采用 Cox-Voinov 模型[2] 来描述动态接触角与静态接触角的关系：

$$\theta^3 = \theta_s^3 + \frac{9\mu_{air} u}{\sigma} \ln(\frac{L}{L_m}) \tag{1.21}$$

其中 θ 为动态接触角，θ_s 为静态接触角，μ_{air} 为空气动力粘度，u 为空气来流速度，σ 为空气与水滴表面的张力系数，L 为水滴湿润长度，L_m 为分子尺度，一般取 10^{-9} m。这是我们实际要用到的接触角，它是关于来流速度 u 和半径 R 的函数。

1.4 力学平衡关系：水滴的生长、脱落、滑移与破碎

首先来考虑水滴的生长 $(\mathrm{d}R/\mathrm{d}t)$。根据1.11，水滴的体积变化率为：

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\rho_w}\frac{\mathrm{d}m_w}{\mathrm{d}t} = -\frac{N_w A_p M_w}{\rho_w} \tag{1.22}$$

也就是说，对于一个固定的来流速度 u，水滴生长的速率 $\mathrm{d}R/\mathrm{d}t$ 可以通过下式计算得到：

$$-N_w \pi R^2 \sin^2\theta M_w = \rho_w \pi R^2 (2 - 3\cos\theta + \cos^3\theta)\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} \tag{1.23}$$

简化得：

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = -\frac{N_w M_w}{\rho_w (2 - 3\cos\theta + \cos^3\theta)\sin^2\theta} \tag{1.24}$$

[2] Chan TS, Kamal C, Snoeijer JH, Sprittles JE, Eggers J. Cox–Voinov theory with slip. Journal of Fluid Mechanics. 2020;900:A8. doi:10.1017/jfm.2020.499

所以水滴的生长速率用一个偏微分方程表示，只与来流速度 u 和半径 R 有关。因为 $\theta = \theta(u, R)$。

对于贴附在水平上壁面的水滴，其所受重力 F_g 为：

$$F_g = \rho_w g \cdot \frac{1}{3}\pi R^3 (2 - 3\cos\theta + \cos^3\theta) \tag{1.25}$$

表面张力提供的粘附力 F_σ 用于抵抗脱落力，当水滴所受重力大于粘附力时，水滴脱落。水滴脱落的条件为：

$$F_g > F_\sigma \tag{1.26}$$

水滴滑移与气流拖拽力 F_d 有关，当气流拖拽力大于粘附力时，水滴开始滑移。根据牛顿的粘附力模型，水滴滑移的临界条件为：

$$F_d > \mu_{air} A_p \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} \approx \mu_{air} A_p \frac{u}{R_c} \tag{1.27}$$

也就是：

$$R \cdot (u \sin\theta) = \frac{2\mu_{air}}{C_d \rho_{air}} \tag{1.28}$$

最后来讨论水滴的破碎。当韦伯数 We 大于临界韦伯数 We_{dro} 时，水滴破碎。本文采用 SSD（Stochastic Secondary Droplet）模型模拟液滴在湿通道中的破碎过程。在气液两相流动过程中，大液滴在气流的冲击下会破碎成小液滴。SSD 模型允许液滴在一定范围内随机破碎。在破碎过程中，小液滴的尺寸具有一定独立性。小液滴的粒径符合 Fokker-Planck 分布。区分液滴大小之间的临界尺寸使用下面的公式来计算:

$$r_{dro} = \frac{We_{dro} \cdot \sigma}{\rho_{air} u^2} \tag{1.29}$$

关于临界韦伯数 We_{dro}，本文采用源流流动中常出现的经验值 10。

大液滴破碎后，小液滴产生，小水滴的直径可以采用下式计算：

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi^2}} \exp[\frac{-(x - x_0 - \xi)^2}{2\xi^2}] \tag{1.30}$$

其中 x 为水滴破碎后产生的小水滴的半径的对数分布形式：

$$x = \ln(r) \tag{1.31}$$

ξ^2 是新生成的水滴的半径方差的一个对数表达形式：

$$\xi^2 = -0.1 \ln(We/We_{dro}) \tag{1.32}$$

最后我们从1.12中提取以翅片表面温度 T_{sur} 为自变量的水滴温度变化率：

$$\frac{\mathrm{d}T_w}{\mathrm{d}t} = \frac{h_c[A(T_a - T_w) + \pi R_c^2 (T_{sur} - T_w)] - \frac{\mathrm{d}m_w}{\mathrm{d}t} h_{fg}}{m_w C_{p,w}} \tag{1.33}$$

上式含自变量 T_{sur}, R, u。

1.5 总结

考虑时间 t，由前面的推导可知，水滴的半径 R 似乎是一个隐函数（或偏微分方程）的形式，可以表示为：

$$R = R(u,t) \tag{1.34}$$

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = -\frac{N_w M_w}{\rho_w(2-3\cos\theta+\cos^3\theta)\sin^2\theta} \tag{1.35}$$

$$h_m = h_m(u,R(u,t)) = h_m(u,t) \tag{1.36}$$

$$\theta = \theta(u,R(u,t)) = \theta(u,t) \tag{1.37}$$

$$R(u,t=0) = R_0 = 0.05mm \tag{1.38}$$

对于水的温度 T_w，其也可以表示为一个隐函数的形式，自变量含有 u,t,T_{sur}，可以表示为：

$$T_w = T_w(u,t,T_{sur},R(u,t)) = T_w(u,t,T_{sur}) \tag{1.39}$$

$$\frac{\mathrm{d}T_w}{\mathrm{d}t} = \frac{h_c[A(T_a-T_w)+\pi R_c^2(T_{sur}-T_w)] - N_w A_p M_w h_{fg}}{m_w C_{p,w}} \tag{1.40}$$

$$h_c = h_c(u,R(u,t)) = h_c(u,t) \tag{1.41}$$

$$R(u,t=0) = R_0 = 0.05mm \tag{1.42}$$

$$h_{fg} = h_{fg}(T_w) \tag{1.43}$$

$$m_w = m_w(R(u,t),\theta(u,t)) = m_w(u,t) \tag{1.44}$$