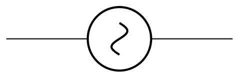
# XIII Circuits à Courant Alternatif: Déphasage, Représentation de Fresnel, Phaseurs, et Réactance

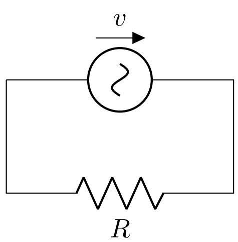
## XIII.1 Source de f.é.m. alternative



**Exemple** Centrale Électrique

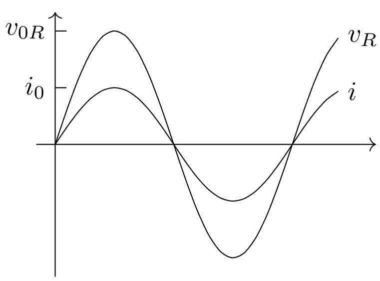
## XIII.2 Circuits AC simples

### XIII.2.1 Circuits à une résistance



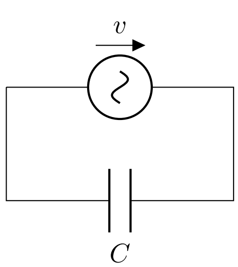

$$\begin{aligned}
v_R &= v && \text{Kirchhoff}\\
v_R &= Ri && \text{Ohm}\\
\Rightarrow v &= Ri &&\\
&= \frac{v_{0R}}{R}\sin(\omega T+\varphi) &&\\
&= i_0\sin(\omega t+\varphi) &&
\end{aligned}$$

Avec $\quad v_{0R} = i_0 R$



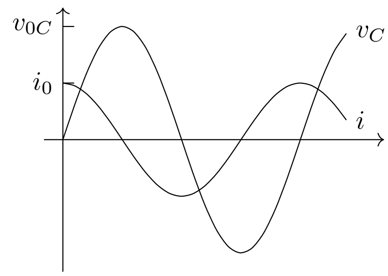

$i$ et $v_R$ ont la même fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ et sont en phase.

### XIII.2.2 Circuits à un condensateur




$$\begin{aligned}
v_C &= v && \text{Kirchhoff}\\
v_C &= \frac{q}{C} && \text{Chap X}\\
i &= \frac{dq}{dt} && q \to i\\
\Rightarrow dq &= idt = i_0\sin(\omega t)dt &&\\
\Leftrightarrow q &= \frac{-i_0}{\omega}\cos(\omega t) = \frac{i_0}{\omega}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) &&\\
\Rightarrow v &= \frac{i_0}{\omega C}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = v_{0C}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) &&
\end{aligned}$$

Avec $\quad v_{0C} = \frac{i_0}{\omega C}$

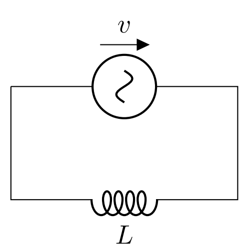



$i$ et $v_C$ ont la même fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ mais ne sont pas en phase. Il y a un déphasage de $\varphi = \frac{\pi}{2}$. $vC$ est en retard par rapport à $i$ d'un angle $\frac{\pi}{2}$.

### XIII.2.3 Circuits à un inducteur

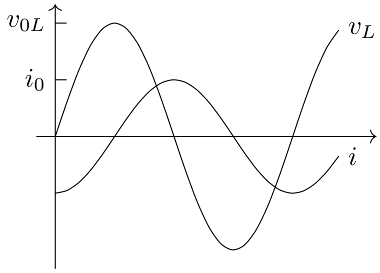
**Note – Loi de Lenz et Loi d'Ohm** Une bobine s'oppose au passage du courant alternatif. Ce comportement est similaire à une résistance qui s'oppose au passage du courant continu.

Ohm : $V_A - V_B = RI$
Lenz : $V_A - V_B = L\frac{di}{dt}$




$$\begin{aligned}
v &= L\omega i_0\cos(\omega t)\\
&= L\omega i_0\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})\\
&= v_{0L}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})
\end{aligned}$$

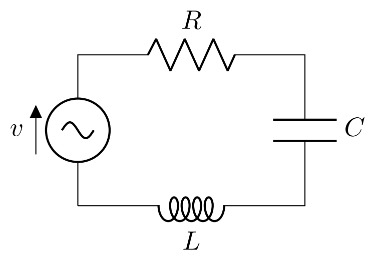
Avec $\quad v_{0L} = i_0\omega L$




$i$ et $v_L$ ont la même fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ mais ne sont pas en phase. Il y a un déphasage de $\varphi = \frac{\pi}{2}$. $v_L$ devance $i$ d'un angle $\frac{\pi}{2}$.

## XIII.3 Circuit AC RLC en série

**Circuit RLC** Circuit comportant une résistance $R$, un inducteur $L$, et un capaciteur $C$ en série.




Un même courant $i$ circule dans le circuit.

$$i_R = i_C = i_L = i = i_0 \sin(\omega t)$$

D'où on trouve les tensions suivantes:

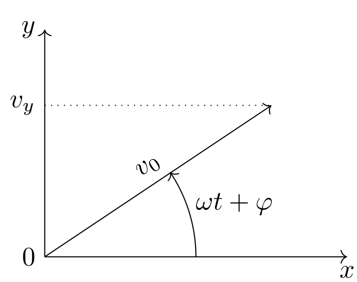
$$\begin{aligned}
v_R &= Ri_0 \sin(\omega t) = v_{0R} \sin(\omega t) \\
v_C &= \frac{1}{\omega C} i_0 \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = v_{0C} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \\
v_L &= \omega L i_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = v_{0L} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})
\end{aligned}$$

Par la loi des Mailles:

$$v_{\text{source}} = v_R + v_C + v_L$$

## XIII.4 Représentation de Fresnel

**Vecteur de Fresnel** Une tension $v = v_0 \sin(\omega t + \varphi)$ est représentée dans le plan $Oxy$ par un vecteur de longueur égale à l'amplitude de la tension $v_0$ faisant un angle $\omega t + \varphi$ avec l'axe $Ox$.



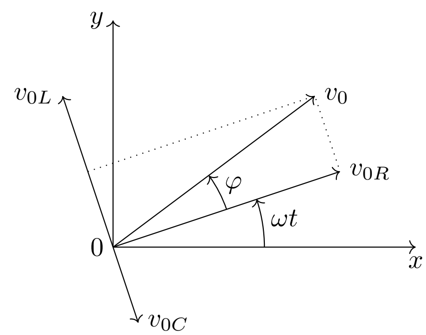

La tension intantanée est donnée par $v_y$:

$$v_y = v_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$v_{\text{source}}$ devient une relation entre les composantes $y$ des vecteurs représentant les trois différentes tensions instantanées:

$$v_y = V_{Ry} + V_{Cy} + v_{Ly}$$

**Trouver la tension instantanée** Revient à faire la somme des vecteurs $v_R$, $v_C$, et $v_L$ et de projeter la résultante $v_0$ sur l'axe $Oy$.




Avec $v_0$ l'amplitude de $v$ donnée par:

$$v_0 = \sqrt{(v_{0L} - v_{0C})^2 + v_{O_R}^2}$$

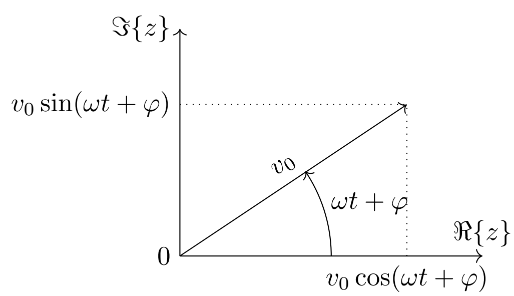
Et $\varphi$ l'angle que $v$ fait avec $i$ donné par:

$$\cos\varphi = \frac{v_{0R}}{v_0} \qquad \text{ou} \qquad \tan\varphi = \frac{v_{0L} - v_{0C}}{v_{0R}}$$

## XIII.5 Phaseurs

**Représentation dans le plan complexe** On représente la tension par un point complexe qui est l'extrémité du vecteur de Fresnel

$$z = x + jy \qquad \text{où} \quad j = \sqrt{-1}$$




$$\begin{aligned}
\Rightarrow z &= v_0[\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)] \\
&= v_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = v_0 e^{j\omega t} e^{j\varphi}
\end{aligned}$$

La tension instantanée est donnée par:

$$v = \Im\{v_0 e^{j(\omega t + \varphi)}\}$$

**Phaseur** Dans la représentation de Fresnel, la relation de phase entre les différentes tensions reste constante. On peut donc travailler avec le phaseur $\tilde{v}$: un nombre complexe associé à une tension instantanée d'amplitude $v_0$ et de phase $\varphi$.

$$\tilde{v} = v_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

### XIII.5.1 Circuit RLC

On a les phaseurs suivants:

$$\begin{aligned}
&\tilde{v}_R = v_{0R} && \text{car} \quad \varphi = 0 \\
&\tilde{v}_C = v_{0C} e^{-j\frac{\pi}{2}} = -v_{0C} j && \text{car} \quad \varphi = \frac{-\pi}{2} \\
&\tilde{v}_L = v_{0L} e^{j\frac{\pi}{2}} = v_{0L} j && \text{car} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \\
\Rightarrow\ &\tilde{v} = \tilde{v}_R + \tilde{v}_C + \tilde{v}_L \\
&\quad = v_{0R} + (v_{0L} - v_{0C}) j
\end{aligned}$$

On en déduit l'amplitude $v_0$ et la phase $\varphi$:

$$v_0 = |\tilde{v}| = \sqrt{v_{0R}^2 + (v_{0L} - v_{0C})^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{\Re\{\tilde{v}\}}{|\tilde{v}|} = \frac{v_{0R}}{v_0}$$

## XIII.6 Réactance

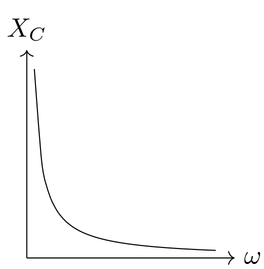
### XIII.6.1 Réactance Capacitive

Quantifie la manière dont un condensateur freine le courant. $X_C$ exprimé en Ohm ($\Omega$).

$$X_C = \frac{v_{0C}}{i_0}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \qquad \text{avec} \quad i_0 = \omega C v_{0C}$$

$X_C$ diminue lorsque $\omega$ augmente. Plus la fréquence est frande, moins les charges ont le temps de s'accumuler sur les armatures du condensateur, et moins ce dernier freine l'accès aux électrons.



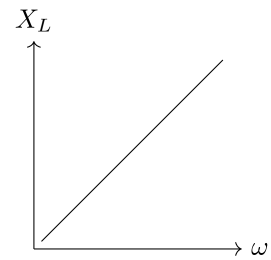

**Courant DC** Pour un courant DC: $\omega = 0$. Ceci mène à une réactance capacitive qui tend vers $+\infty$.

### XIII.6.2 Réactance Capacitive

Quantifie la manière dont un inducteur freine le courant. $X_L$ exprimé en Ohm ($\Omega$).

$$X_C = \frac{v_{0L}}{i_0}$$

$$X_C = \omega L \qquad \text{avec} \quad i_0 = \frac{v_{0L}}{\omega L}$$

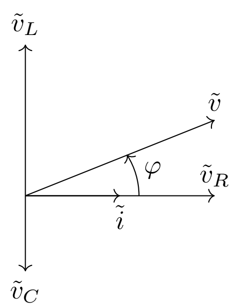


# XIV Circuits à Courant Alternatif: Impédance, Puissance, Facteur de Qualité, et Largeur de Bande

## XIV.1 Impédance Complexe

Valeur généralisant la notion de résistance, réactance capacitive, et réactance inductive: elle caractérise la manière dont le circuit freine le courant.

$$Z = \frac{\tilde{v}}{\tilde{i}}$$




$$|Z| = \left|\frac{\tilde{v}}{\tilde{i}}\right| = \left|\frac{v_0 e^{j\varphi}}{i_0}\right| = \frac{v_0}{i_0} = \frac{v_{\text{eff}}}{i_{\text{eff}}}$$

**Relation entre Impédance et Déphasage**

$$\cos\varphi = \frac{\Re\{Z\}}{|Z|} \qquad et \qquad \tan\varphi = \frac{\Re\{Z\}}{\Im\{Z\}}$$

### XIV.1.1 Résistances

$$Z_R = \frac{v_{0R}}{I_0} = \frac{RI_0}{i_0} = R$$

Car $\tilde{i} = i_0 e^{j\varphi}$ et $\tilde{v} = v_{0R} e^{j\varphi}$ ont un déphasage nul.

$$\Rightarrow Z_R = |Z_R| = R$$

### XIV.1.2 Condensateurs

$$Z_C = \frac{-V_{0C}j}{i_0} = \frac{\frac{-i_0}{\omega C}}{i_0} j = \frac{-j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C j}$$

Comme $-j^2 = 1 \Leftrightarrow -j = \frac{1}{j}$.

$$Z_C = -X_C j$$
$$|Z_C| = X_C$$

### XIV.1.3 Inducteurs

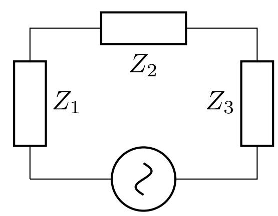
$$Z_L = \frac{V_{0L}j}{i_0} = \frac{\omega L i_0}{i_0} j = \omega L j$$
$$\Rightarrow Z_L = X_L j$$
$$|Z_L| = X_L$$

## XIV.2 Impédance d'un Circuit RLC en Série

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\tilde{v}}{\tilde{i}} = \frac{V_{0R} + (V_{0L} - V_{0C})j}{i_0} \\ &= \frac{V_{0R}}{i_0} + \left(\frac{V_{0L}}{i_0} - \frac{V_{0C}}{i_0}\right) j \\ \Rightarrow Z &= R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) j \\ |Z| &= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \end{aligned}$$

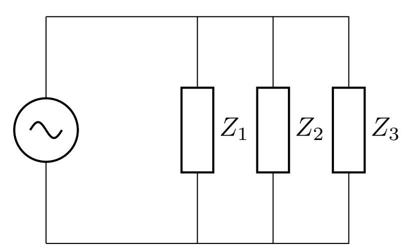
## XIV.3 Impédences en série et en parallèle

### XIV.3.1 En série




$$Z_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

### XIV.3.2 En parallèle




$$\frac{1}{Z_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Z_i}$$

## XIV.4 Puissance Dissipée en AC

La puissance électrique instantanée en AC est donnée par:

$$p = vi$$

### XIV.4.1 Résistances

$$p = Ri^2 = Ri_0^2 \sin^2(\omega t)$$

Avec un taux moyen de:

$$\langle p \rangle = i_{\text{eff}}^2 R = \frac{V_{\text{eff}}^2}{R}$$

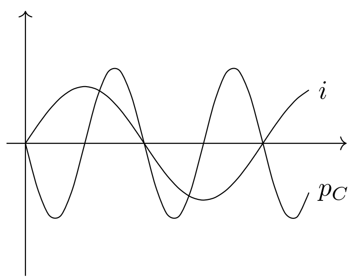
#### XIV.4.2 Condensateurs

$$p = v_{0C}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) i_0 \sin(\omega t)) = -\frac{V_{0C}^2 C}{2}\sin(2\omega t)$$

$$\langle p \rangle = -\frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_{0C}^2 C}{2}\sin(2\omega t)dt = 0$$

Un condensateur ne dissipe pas d'énergie sur un nombre demi-entier de périodes. Pendant un quart de cycle, le condensateur emmagasine de l'énergie: $vi$ est positif; pendant le quart suivant du cycle: $vi$ est négatif. Ce qui s'additionne pour donner une puissance nulle.

Une résistance n'emmagasine pas l'énergie: elle la dissipe en chaleur et ne la restitue donc pas à la source.

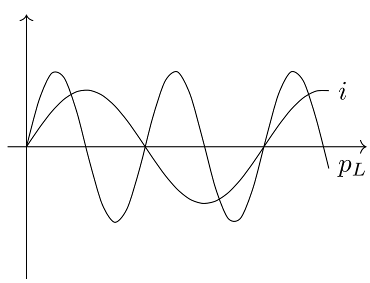



#### XIV.4.3 Inducteurs

$$p = v_{0L}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) i_0 \sin(\omega t) = \frac{1}{2} v_{0L} i_0 \sin(2\omega t)$$

$$\langle p \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\frac{V_{0L}^2}{\omega L}\sin(2\omega t)dt = 0$$

Pour les même raisons que pour un condensateur, la puissance moyenne d'un inducteur est nulle.




#### XIV.4.4 Puissance moyenne

Seule la partie résistive du circuit dissipe de l'énergie.

$$\langle p \rangle = \Re\{Z\} i_{\text{eff}}^2$$
$$\Rightarrow \langle p \rangle = i_{\text{eff}} v_{\text{eff}} \cos\varphi$$

## XIV.5 Phénomène de résonance

Alors que la composante réelle résistive d'une impédance ne dépend pas de la fréquence angulaire $\omega$, la partie imaginaire vaire avec celle-ci. D'où dans un circuit non purement résistif $|Z|$ varie avec $\omega$ et donc $I_{\text{eff}}$ varie avec $\omega$ pour $V_{\text{eff}}$ fixe.

**Fréquence de Résonnance** Fréquence angulaire $\omega_0$ telle que $|Z|$ atteint un minimum et donc $i$ atteint un maximum.

#### XIV.5.1 Fréquence de Résonnance pour un Circuit RLC

Pour un circuit RLC, $\omega_0$ et $i_{\text{eff}}^{\text{max}}$ valent:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{et} \qquad i_{\text{eff}}^{\text{max}} = \frac{V_{\text{eff}}}{R}$$

## XIV.6 Facteur de Qualité

Défini comme:

$$Q = \frac{2\pi \cdot \text{énergie max emmagasinée dans le circuit}}{\text{énergie dissipée par cycle}}$$

#### XIV.6.1 Circuit RLC en Série

À la résonnance, le facteur de qualité vaut:

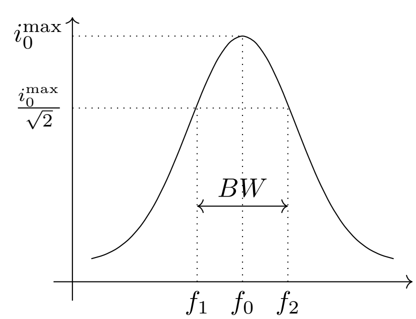
$$Q_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

## XIV.7 Largeur de Bande

BW ou Bandwidth en anglais.

Différence entre deux fréquences auquelles le courant ne vaut que $\frac{1}{\sqrt{2}}$ fois le courant maximum.

$$BW = f_2 - f_1$$




#### XIV.7.1 Circuit RLC en Série

Pour le circuit RLC en série, on établit la relation entre la largeur de bande et le facteur de qualité:

$$Q_0 = \frac{f_0}{DW}$$