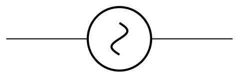
XIII Circuits à Courant Alternatif: Déphasage, Représentation de Fresnel, Phaseurs, et Réactance

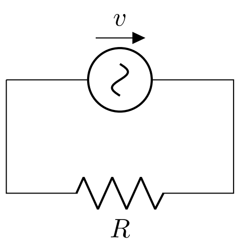
XIII.1 Source de f.é.m. alternative



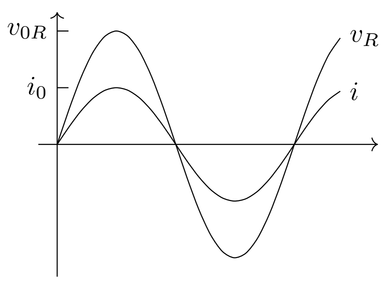
Exemple Centrale Électrique

XIII.2 Circuits AC simples

XIII.2.1 Circuits à une résistance

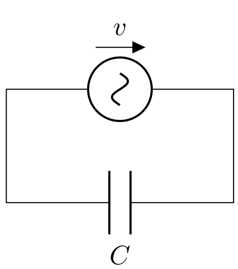


$$
\begin{aligned}
v_R &= v && \text{Kirchhoff} \\
v_R &= Ri && \text{Ohm} \\
\Rightarrow v &= Ri \\
&= \frac{v_{0R}}{R}\sin(\omega T + \varphi) \\
&= i_0 \sin(\omega t + \varphi) \\
\text{Avec} \quad & v_{0R} = i_0 R
\end{aligned}
$$

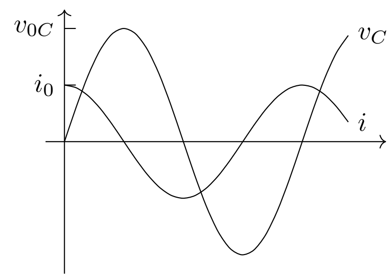


i et v_R ont la même fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ et sont en phase.

XIII.2.2 Circuits à un condensateur



$$
\begin{aligned}
v_C &= v && \text{Kirchhoff} \\
v_C &= \frac{q}{C} && \text{Chap X} \\
i &= \frac{dq}{dt} && q \to i \\
\Rightarrow dq &= idt = i_0 \sin(\omega t) dt \\
\Leftrightarrow q &= \frac{-i_0}{\omega}\cos(\omega t) = \frac{i_0}{\omega}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \\
\Rightarrow v &= \frac{i_0}{\omega C}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = v_{0C}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \\
\text{Avec} \quad & v_{0C} = \frac{i_0}{\omega C}
\end{aligned}
$$

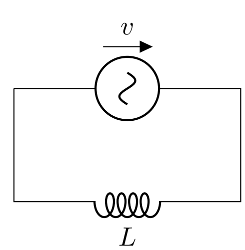


i et v_C ont la même fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ mais ne sont pas en phase. Il y a un déphasage de $\varphi = \frac{\pi}{2}$. vC est en retard par rapport à i d'un angle $\frac{\pi}{2}$.

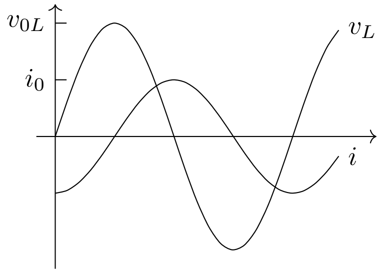
XIII.2.3 Circuits à un inducteur

Note – Loi de Lenz et Loi d'Ohm Une bobine s'oppose au passage du courant alternatif. Ce comportement est similaire à une résistance qui s'oppose au passage du courant continu.

Ohm : $V_A - V_B = RI$
Lenz : $V_A - V_B = L\frac{di}{dt}$



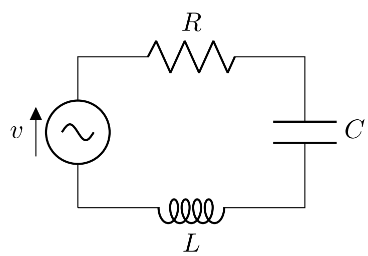
$$
\begin{aligned}
v &= L\omega i_0 \cos(\omega t) \\
&= L\omega i_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \\
&= v_{0L}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \\
\text{Avec} \quad & v_{0L} = i_0 \omega L
\end{aligned}
$$



i et v_L ont la même fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ mais ne sont pas en phase. Il y a un déphasage de $\varphi = \frac{\pi}{2}$. v_L devance i d'un angle $\frac{\pi}{2}$.

XIII.3 Circuit AC RLC en série

Circuit RLC Circuit comportant une résistance R, un inducteur L, et un capaciteur C en série.



Un même courant i circule dans le circuit.

$$i_R = i_C = i_L = i = i_0 \sin(\omega t)$$

D'où on trouve les tensions suivantes:

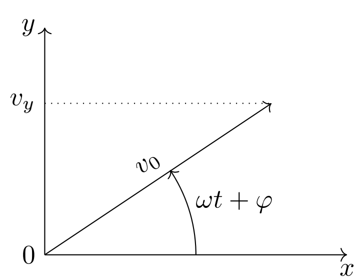
$$\begin{aligned}
v_R &= Ri_0 \sin(\omega t) = v_{0R} \sin(\omega t) \\
v_C &= \frac{1}{\omega C} i_0 \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = v_{0C} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \\
v_L &= \omega L i_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = v_{0L} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})
\end{aligned}$$

Par la loi des Mailles:

$$v_{\text{source}} = v_R + v_C + v_L$$

XIII.4 Représentation de Fresnel

Vecteur de Fresnel Une tension $v = v_0 \sin(\omega t + \varphi)$ est représentée dans le plan Oxy par un vecteur de longueur égale à l'amplitude de la tension v_0 faisant un angle $\omega t + \varphi$ avec l'axe Ox.



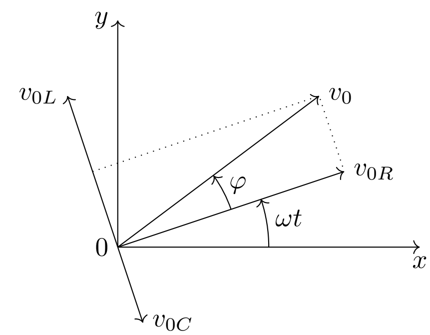
La tension intantanée est donnée par v_y:

$$v_y = v_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

v_{source} devient une relation entre les composantes y des vecteurs représentant les trois différentes tensions instantanées:

$$v_y = V_{Ry} + V_{Cy} + v_{Ly}$$

Trouver la tension instantanée Revient à faire la somme des vecteurs v_R, v_C, et v_L et de projeter la résultante v_0 sur l'axe Oy.



Avec v_0 l'amplitude de v donnée par:

$$v_0 = \sqrt{(v_{0L} - v_{0C})^2 + v_{O_R}^2}$$

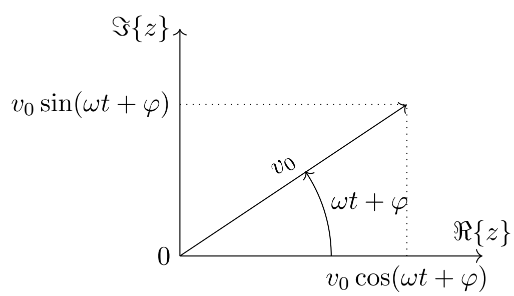
Et φ l'angle que v fait avec i donné par:

$$\cos\varphi = \frac{v_{0R}}{v_0} \qquad \text{ou} \qquad \tan\varphi = \frac{v_{0L} - v_{0C}}{v_{0R}}$$

XIII.5 Phaseurs

Représentation dans le plan complexe On représente la tension par un point complexe qui est l'extrémité du vecteur de Fresnel

$$z = x + jy \qquad \text{où} \quad j = \sqrt{-1}$$



$$\begin{aligned}
\Rightarrow z &= v_0[\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)] \\
&= v_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = v_0 e^{j\omega t} e^{j\varphi}
\end{aligned}$$

La tension instantanée est donnée par:

$$v = \Im\{v_0 e^{j(\omega t + \varphi)}\}$$

Phaseur Dans la représentation de Fresnel, la relation de phase entre les différentes tensions reste constante. On peut donc travailler avec le phaseur $\tilde{v}$: un nombre complexe associé à une tension instantanée d'amplitude v_0 et de phase φ.

$$\tilde{v} = v_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

XIII.5.1 Circuit RLC

On a les phaseurs suivants:

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_R &= v_{0R} & \text{car} \quad \varphi = 0 \\
\tilde{v}_C &= v_{0C} e^{-j\frac{\pi}{2}} = -v_{0C} j & \text{car} \quad \varphi = \frac{-\pi}{2} \\
\tilde{v}_L &= v_{0L} e^{j\frac{\pi}{2}} = v_{0L} j & \text{car} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \\
\Rightarrow \tilde{v} &= \tilde{v}_R + \tilde{v}_C + \tilde{v}_L \\
&= v_{0R} + (v_{0L} - v_{0C}) j
\end{aligned}$$

On en déduit l'amplitude v_0 et la phase φ:

$$v_0 = |\tilde{v}| = \sqrt{v_{0R}^2 + (v_{0L} - v_{0C})^2}$$
$$\cos\varphi = \frac{\Re\{\tilde{v}\}}{|\tilde{v}|} = \frac{v_{0R}}{v_0}$$

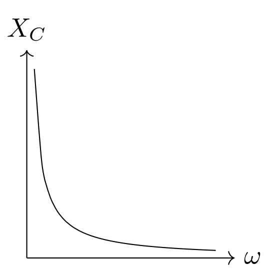
XIII.6 Réactance

XIII.6.1 Réactance Capacitive

Quantifie la manière dont un condensateur freine le courant. X_C exprimé en Ohm (Ω).

$$X_C = \frac{v_{0C}}{i_0}$$
$$X_C = \frac{1}{\omega C} \qquad \text{avec} \quad i_0 = \omega C v_{0C}$$

X_C diminue lorsque ω augmente. Plus la fréquence est frande, moins les charges ont le temps de s'accumuler sur les armatures du condensateur, et moins ce dernier freine l'accès aux électrons.

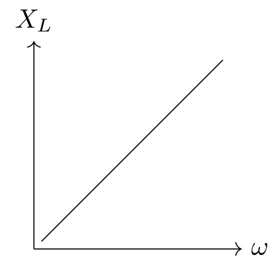


Courant DC Pour un courant DC: $\omega = 0$. Ceci mène à une réactance capacitive qui tend vers $+\infty$.

XIII.6.2 Réactance Capacitive

Quantifie la manière dont un inducteur freine le courant. X_L exprimé en Ohm (Ω).

$$X_C = \frac{v_{0L}}{i_0}$$
$$X_C = \omega L \qquad \text{avec} \quad i_0 = \frac{v_{0L}}{\omega L}$$

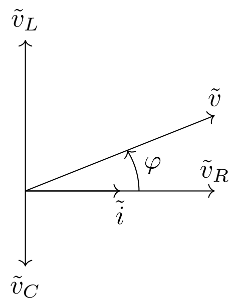


XIV Circuits à Courant Alternatif: Impédance, Puissance, Facteur de Qualité, et Largeur de Bande

XIV.1 Impédance Complexe

Valeur généralisant la notion de résistance, réactance capacitive, et réactance inductive: elle caractérise la manière dont le circuit freine le courant.

$$Z = \frac{\tilde{v}}{\tilde{i}}$$



$$|Z| = \left|\frac{\tilde{v}}{\tilde{i}}\right| = \left|\frac{v_0 e^{j\varphi}}{i_0}\right| = \frac{v_0}{i_0} = \frac{v_{\text{eff}}}{i_{\text{eff}}}$$

Relation entre Impédance et Déphasage

$$\cos\varphi = \frac{\Re\{Z\}}{|Z|} \qquad et \qquad \tan\varphi = \frac{\Re\{Z\}}{\Im\{Z\}}$$

XIV.1.1 Résistances

$$Z_R = \frac{v_{0R}}{I_0} = \frac{RI_0}{i_0} = R$$

Car $\tilde{i} = i_0 e^{j\varphi}$ et $\tilde{v} = v_{0R} e^{j\varphi}$ ont un déphasage nul.

$$\Rightarrow Z_R = |Z_R| = R$$

XIV.1.2 Condensateurs

$$Z_C = \frac{-V_{0C}j}{i_0} = \frac{\frac{-i_0}{\omega C}}{i_0} j = \frac{-j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C j}$$

Comme $-j^2 = 1 \Leftrightarrow -j = \frac{1}{j}$.

$$Z_C = -X_C j$$
$$|Z_C| = X_C$$

XIV.1.3 Inducteurs

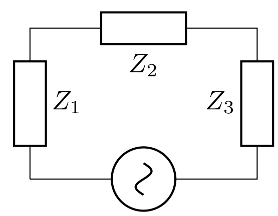
$$Z_L = \frac{V_{0L}j}{i_0} = \frac{\omega L i_0}{i_0} j = \omega L j$$
$$\Rightarrow Z_L = X_L j$$
$$|Z_L| = X_L$$

XIV.2 Impédance d'un Circuit RLC en Série

$$\begin{aligned} Z = \frac{\tilde{v}}{\tilde{i}} &= \frac{V_{0R} + (V_{0L} - V_{0C})j}{i_0} \\ &= \frac{V_{0R}}{i_0} + \left(\frac{V_{0L}}{i_0} - \frac{V_{0C}}{i_0}\right) j \\ \Rightarrow Z &= R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) j \\ |Z| &= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \end{aligned}$$

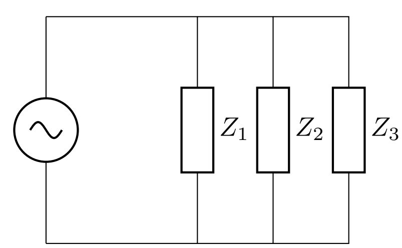
XIV.3 Impédences en série et en parallèle

XIV.3.1 En série



$$Z_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

XIV.3.2 En parallèle



$$\frac{1}{Z_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Z_i}$$

XIV.4 Puissance Dissipée en AC

La puissance électrique instantanée en AC est donnée par:

$$p = vi$$

XIV.4.1 Résistances

$$p = Ri^2 = Ri_0^2 \sin^2(\omega t)$$

Avec un taux moyen de:

$$\langle p \rangle = i_{\text{eff}}^2 R = \frac{V_{\text{eff}}^2}{R}$$

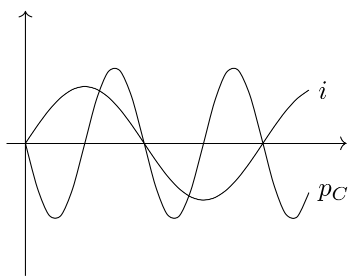
XIV.4.2 Condensateurs

$$p = v_{0C} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) i_0 \sin(\omega t)) = -\frac{V_{0C}^2 C}{2} \sin(2\omega t)$$

$$\langle p \rangle = -\frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_{0C}^2 C}{2} \sin(2\omega t) dt = 0$$

Un condensateur ne dissipe pas d'énergie sur un nombre demi-entier de périodes. Pendant un quart de cycle, le condensateur emmagasine de l'énergie: vi est positif; pendant le quart suivant du cycle: vi est négatif. Ce qui s'additionne pour donner une puissance nulle.

Une résistance n'emmagasine pas l'énergie: elle la dissipe en chaleur et ne la restitue donc pas à la source.

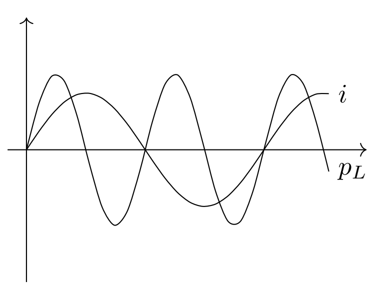


XIV.4.3 Inducteurs

$$p = v_{0L} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) i_0 \sin(\omega t) = \frac{1}{2} v_{0L} i_0 \sin(2\omega t)$$

$$\langle p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \frac{V_{0L}^2}{\omega L} \sin(2\omega t) dt = 0$$

Pour les même raisons que pour un condensateur, la puissance moyenne d'un inducteur est nulle.



XIV.4.4 Puissance moyenne

Seule la partie résistive du circuit dissipe de l'énergie.

$$\langle p \rangle = \Re\{Z\} i_{\text{eff}}^2$$
$$\Rightarrow \langle p \rangle = i_{\text{eff}} v_{\text{eff}} \cos\varphi$$

XIV.5 Phénomène de résonance

Alors que la composante réelle résistive d'une impédance ne dépend pas de la fréquence angulaire ω, la partie imaginaire vaire avec celle-ci. D'où dans un circuit non purement résistif $|Z|$ varie avec ω et donc I_{eff} varie avec ω pour V_{eff} fixe.

Fréquence de Résonnance Fréquence angulaire ω_0 telle que $|Z|$ atteint un minimum et donc i atteint un maximum.

XIV.5.1 Fréquence de Résonnance pour un Circuit RLC

Pour un circuit RLC, ω_0 et $i_{\text{eff}}^{\max}$ valent:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{et} \qquad i_{\text{eff}}^{\max} = \frac{V_{\text{eff}}}{R}$$

XIV.6 Facteur de Qualité

Défini comme:

$$Q = \frac{2\pi \cdot \text{énergie max emmagasinée dans le circuit}}{\text{énergie dissipée par cycle}}$$

XIV.6.1 Circuit RLC en Série

À la résonnance, le facteur de qualité vaut:

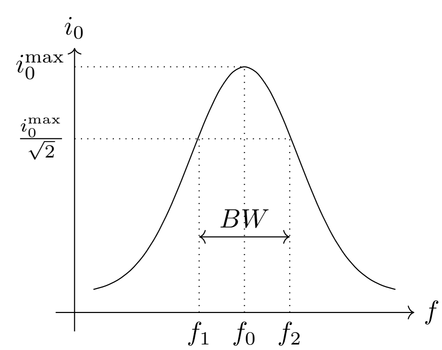
$$Q_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

XIV.7 Largeur de Bande

BW ou Bandwidth en anglais.

Différence entre deux fréquences auquelles le courant ne vaut que $\frac{1}{\sqrt{2}}$ fois le courant maximum.

$$BW = f_2 - f_1$$



XIV.7.1 Circuit RLC en Série

Pour le circuit RLC en série, on établit la relation entre la largeur de bande et le facteur de qualité:

$$Q_0 = \frac{f_0}{DW}$$