ABC 159 解説

writer: DEGwer, kyopro_friends, latte0119, namonakiacc,
satashun, tempura0224, tozangezan, yokozuna57

2020 年 3 月 22 日

For International Readers: English editorial will be published in a few days.

A: the number of even pairs

選んだ 2 つのボールに書かれている数の和が偶数になるのは、 2 つのボールに書かれている数が共に偶数であるか、共に奇数である場合に限ります。したがって、そのようなボールの選び方の数を求めればよいです。これは、 $\binom{N}{2}+\binom{M}{2}$ 通りです。以下は C++ における実装例です。

```
#include<iostream>
using namespace std;

int main(){
    int N,M;
    cin>>N>>M;

    cout<<N*(N-1)/2+M*(M-1)/2<<endl;
    return 0;
}
```

B: Strong Palindrome

文字列 S の 長さを N とします。
S, S の 1 文字目から $\dfrac{N-1}{2}$ 文字目, S の $\dfrac{N+3}{2}$ 文字目から N 文字目 がすべて回文であるかどうかを調べ、すべてが回文であるときに "Yes" , そうでないときに "No" を出力すればよいです。
S が回文であるかどうかを調べる方法としては例えば以下の方法などがあります。

1. すべての i $(1 \leq i \leq N)$ について、S の i 文字目と S の $(N-i-1)$ 文字目が等しいことを確認する。
2. S を反転した文字列と S が等しいかどうかを調べる。

C++ での実装例：https://atcoder.jp/contests/abc159/submissions/11091525

C: Maximum Volume

縦、横、高さをそれぞれ a, b, c とおくと、$a+b+c=L$ をみたす中で abc を最大化する問題となります。

相加相乗平均不等式より、 $(abc)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{a+b+c}{3}$、すなわち $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ です。等号成立条件は $a=b=c$ です。

よって、$a=b=c=\frac{L}{3}$ のとき体積最大となり、その時の体積は $\frac{L^3}{27}$ となります。

Listing 1　C++ での実装例

```
#include <stdio.h>
int main(){
        int L;
        scanf("%d",&L);
        printf("%.12f\n",(double)L*L*L/27);
}
```

D: Banned K

$i = 1, 2, ..., N$ に対して、 $c_i := \#\{1 \leq j \leq N | A_j = i\}$ と定義します。
$k(1 \leq k \leq N)$ を 1 つ固定して考えます。 k に対する問題の答えは、

- N 個のボールから、書かれている整数が等しいような異なる 2 つのボールを選び出す方法の数
- k 番目のボールを除いた $N - 1$ 個のボールから、 k 番目のボールと同じ整数が書かれたボールを選び出す方法の数

をそれぞれ求めて、前者から後者を引けば求まります。
前者は、 $\sum_{i=1}^{N} \binom{c_i}{2}$, 後者は $c_{A_k} - 1$ となります。　前者の値は k によらないので、事前に $O(N)$ で計算しておけばよいです。後者は、各 k に対して $O(1)$ で求められます。
以上より、この問題を $O(N)$ で解くことができました。

E: Dividing Chocolate

もし「縦方向にしか割れない」という条件があれば、左端から順に貪欲にとることで問題を解くことができます。よって、「横方向にどう割るか」を 2^{H-1} 通り全探索し、それぞれの場合について「縦方向にしか割れない」問題を解けばよいです。計算量は $O(2^H HW)$ です。

F: Knapsack for All Segments

求めたい合計値は、

$a_{x_1}+a_{x_2}+\cdots+a_{x_k}=S$, $L\le x_1<x_2<\cdots<x_k\le R$ をみたすような $(L,x_1,x_2,\ldots,x_k,R)$ の組の個数

と言い換えることができます。

これは

$$
\begin{aligned}
dp[i][s][t] = \ & i \text{ 番目までみて、選んだ要素の和が } s \text{ で、} \\
& L \text{ をまだ決めていない状態の場合の数 } (t=0 \text{ のとき}) \\
& L \text{ は決めたが } R \text{ はまだ決めていない状態の場合の数 } (t=1 \text{ のとき}) \\
& L \text{ も } R \text{ も決まっている状態の場合の数 } (t=2 \text{ のとき})
\end{aligned}
$$

と定めて動的計画法を用いると、時間計算量、空間計算量ともに $O(NS)$ で計算することができます。

求めるものは $dp[N][S][2]$ です。

遷移等については実装例を参考にしてください。https://atcoder.jp/contests/abc159/submissions/11096062