Problem 2.9 | Điện trường trong một vùng không gian có dạng:

$$\vec{E} = kr^3\hat{r}$$

(a) Tìm mật độ điện khối ρ.

(b) Tìm tổng điện tích Q chứa trong một quả cầu bán kính R, đặt tại gốc toạ độ (bằng 2 cách).

Giới thiệu về Divergence (Toán tử div.)

Chắc hẳn khi đọc bài này trong sách của Griffiths, bạn có lẽ sẽ thấy lạ lẫm với kí tự này: $\boldsymbol{\nabla}\cdot$ trong công thức biến đổi định luật Gauss từ tích phân sang dạng vi phân.
Trong hệ toạ độ Descrates, ta có:

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{a} = \int_V (\boldsymbol{\nabla}\cdot E)\,\mathrm{d}\tau = \int_Z\int_Y\int_X (\boldsymbol{\nabla}\cdot E)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$ [a]

Vậy toán tử div. hay Divergence hay $\boldsymbol{\nabla}\cdot$ là gì? và nó có ý nghĩa như thế nào trong các bài toán vật lý.

Toán tử div trong giải tích vectơ, còn gọi là toán tử phân kỳ hoặc suất tiêu tán, là một toán tử đo mức độ phát ra hay thu vào của một trường vectơ tại một điểm cho trước. Kết quả của toán tử div là một **hàm số thực**, có thể âm hoặc dương, biểu thị mật độ thể tích của thông lượng đi ra khỏi hoặc vào trong một thể tích rất nhỏ xung quanh điểm đó.

> Bạn có thể tưởng tượng một điểm trong không gian giống như một 'vòi nước': nếu nước chảy ra từ điểm đó, divergence là dương; nếu nước bị hút vào, divergence là âm.

Đối với điện trường, toán tử div. của trường điện trường E biểu diễn mật độ điện tích tại điểm đó theo định luật Gauss, tức là nó cho biết có bao nhiêu điện tích "phát ra" hay "thu vào" trong một vùng rất nhỏ xung quanh điểm đó.

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot E = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Như vậy, với:

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{a} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

thì:

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}\cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

với ρ là mật độ điện khối

và $Q_{enc} = \int_V \rho\,\mathrm{d}\tau$

[a] tham khảo tr.70 Introduction to Electrodynamics

Bài giải:

(a) Áp dụng những gì đã nói ở trên ta có:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

mà:

$$\vec{E} = kr^3\hat{r}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot E = \underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2E_r)}{\partial r}}_{\text{tham khảo: Wikipedia}} = \frac{1}{r^2}5kr^4 = 5kr^2$$

$$\Rightarrow \rho = \nabla \cdot E \cdot \epsilon_0 = 5kr^2\epsilon_0$$

(b)
Cách 1: Ta sẽ dùng định nghĩa đã giới thiệu ở trên để giải ý này.
Cũng từ phần giới thiệu, ta có:

$$Q_{enc} = \oint_V \rho \, \mathrm{d}\tau = \int 5kr^2\epsilon_0 \, \mathrm{d}\tau$$

mà

$$\mathrm{d}\tau = r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi$$

$$\Rightarrow Q_{enc} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}(5kr^2\epsilon_0)r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi = 4\epsilon_0 k\pi R^5$$

Cách 2: Ta sẽ dùng định luật Gauss thân quen để giải ý này:
Chọn mặt Gauss là hình cầu bán kính R tâm đặt tại tâm gốc toạ độ, ta có:

$$\oint E \cdot dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow Q_{enc} = \epsilon_0 kR^3 4\pi R^2 = 4\epsilon_0 k\pi R^5$$