
Le Modèle de Régression Linéaire Simple

Mars 2020

1 Exercices théoriques

1.1 Exercice 1

Considérons les cinq observations suivantes :

$$(X_1, Y_1) = (3, 5)$$

$$(X_2, Y_2) = (2, 2)$$

$$(X_3, Y_3) = (1, 3)$$

$$(X_4, Y_4) = (-1, 2)$$

$$(X_5, Y_5) = (0, -2)$$

Sans l'aide de l'ordinateur, répondez aux questions suivantes :

1. Représentez graphiquement les cinq données observées (X en abscisse et Y en ordonnée)
2. On désire ajuster une droite de régression par OLS à ces données ($\mathbb{E}(Y | X) = \beta_0 + \beta_1 X$).
Pour ce faire, calculez les estimateurs OLS $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$
3. Sur le graphique, dessinez la droite de régression estimée $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$.
Donnez une interprétation géométrique de $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$.
4. Représentez graphiquement les résidus après estimation ($\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{Y}_t$)
À partir de ceux-ci, calculez un estimateur de σ_ε^2
5. Localisez, sur le graphe, le point de coordonnée (\bar{X}, \bar{Y}) . Ce point se situe-t-il sur la droite de régression que vous avez estimée? Si oui, est-ce une propriété systématique de la droite de régression estimée ?

1.2 Exercice 2

Soient $\hat{\varepsilon}_t$ les résidus après estimation par OLS de la régression linéaire simple de X_t sur Y_t ($t = 1, \dots, T$). Démontrez que :

$$\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t = 0$$

et

$$\sum_{t=1}^T X_t \hat{\varepsilon}_t = 0$$

2 Application : estimation de la couverture de risque optimale pour un investisseur

Nous considérons l'exemple d'un investisseur qui cherche à couvrir sa position longue prise sur le S&P500 en recourant à une position courte sur des contrats *futures*. L'investisseur s'intéresse à la couverture optimale qui définit le nombre d'actifs *futures* à vendre par unité d'actifs *spots* détenus.¹

Téléchargez le fichier **SandPhedge.xls** sur Webcampus. Il contient, sur la période 1997-2018 en fréquence mensuelle, les prix *spots* et *futures* du S&P500. L'analyse se fera à partir des rendements de ces derniers. Suivant la littérature financière, nous utiliserons les rendements à composition continue dans le temps, soient les rendements logarithmiques $r_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$.

Q1 : Importez le fichier dans R en spécifiant les types suivants pour les colonnes, respectivement : date, numeric, numeric. Créez les séries des rendements des deux prix, à ajouter à la base.

Q2 : Tracez les courbes montrant l'évolution des séries des prix sur un même graphique. Tracez celles des rendements également. Créez ensuite l'histogramme des séries des rendements ainsi que leur nuage de points.

*Produisez les statistiques descriptives des rendements. Calculez leurs skewness et kurtosis à la "force brute". (Des packages comme **moments** ou **e1071** existent aussi pour cela).*

Passons ensuite à l'analyse économétrique des rendements. Afin d'expliquer les variations des rendements *spots* par les variations des rendements *futures*, effectuons une régression linéaire simple. La commande à utiliser est `lm`.

Q3 : Régressez la variable dépendante `rspot` sur la variable indépendante `rfutures` (la constante est automatiquement incluse). Sauvegardez cette régression comme `lm_returns` et affichez les principaux résultats à l'aide de la commande appropriée.

R vous permet aussi d'afficher 4 graphiques relatifs à `lm` avec `plot`. Construisez ces graphiques. Calculez enfin par vous-mêmes les coefficients de la régression et comparez les aux résultats obtenus par le logiciel.

Q4 : Réalisez "à la main" un test de significativité sur les coefficients de la constante puis de la pente de la régression. Ces résultats sont-ils cohérents avec les \mathbb{P} – value calculées par le logiciel? Justifiez.

¹Prendre une position longue signifie que l'on est acheteur d'un actif financier ; prendre une position courte signifie que l'on est vendeur.

Le *spot* ou cours comptant est le prix d'un actif pour une livraison immédiate. Le *future* ou cours à terme désigne le prix auquel les parties s'engagent à s'échanger un actif à la date d'échéance du contrat.