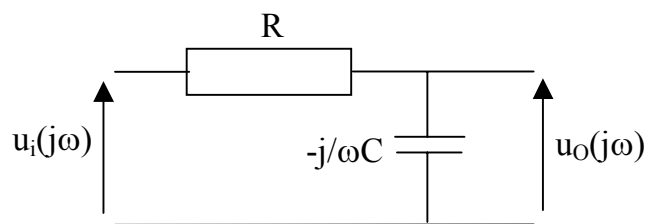


## Bijlage 2: Eerste orde systemen

### 1: Een RC-kring

#### 1.1: Het frequentiegedrag

Een eerste orde systeem kan bijvoorbeeld opgebouwd zijn uit de serieschakeling van een weerstand  $R$  en een condensator  $C$ . Veronderstel dat een sinusvormig signaal  $u_i(j\omega)$  aan de ingang aangelegd wordt en dat parallel over de condensator het uitgangssignaal  $u_o(j\omega)$  afgenomen wordt.

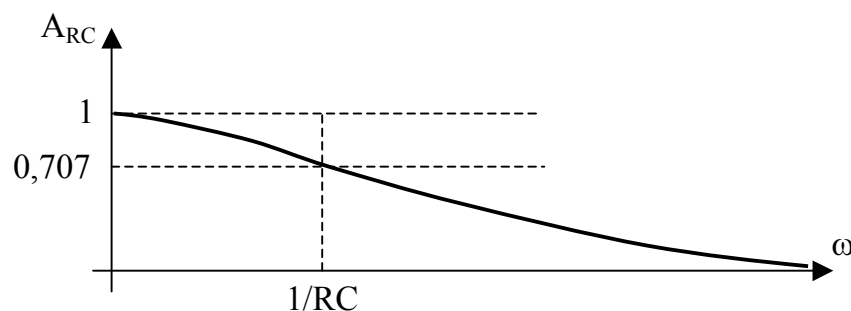


Figuur B2.1: Eerste orde systeem

Wanneer het ingangssignaal sinusvormig is, kan gebruik gemaakt worden van de complexe voorstelling zodat de (eveneens sinusvormige) uitgang

$$u_o(j\omega) = u_i(j\omega) (1/(1 + j\omega RC)).$$

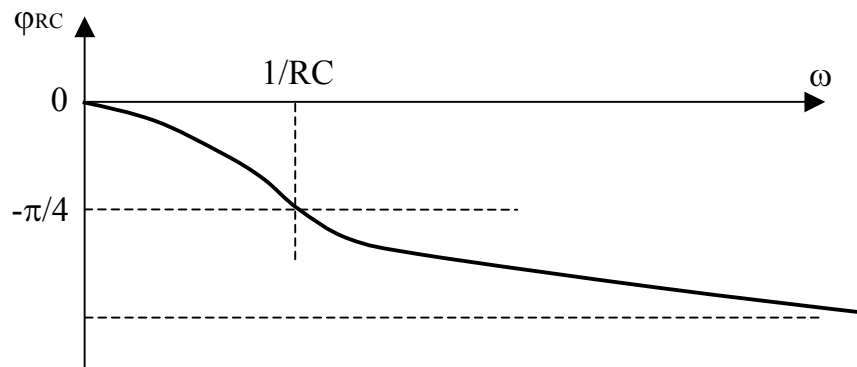
Dit betekent dat  $u_o(j\omega)/u_i(j\omega) = 1/(1 + j\omega RC) = A_{RC}(\omega) = A_{RC}(\omega) e^{j\phi_{RC}(\omega)}$ . De grootte  $A_{RC}(\omega)$  en de hoek  $\phi_{RC}(\omega)$  van  $A_{RC}(\omega)$  zijn allebei frequentie afhankelijk. We zullen deze pulsatie afhankelijkheid niet altijd benadrukken door  $\omega$  expliciet te vermelden.



Figuur B2.2: Frequentieverloop van  $A_{RC}$

Zo is  $A_{RC} = 1$  als  $\omega = 0$  en is  $A_{RC} = 1/\sqrt{2} \cong 0,707$  als  $\omega = 1/RC$ . Naarmate  $\omega$  verder stijgt, daalt  $A_{RC}$ . Wanneer  $\omega$  naar oneindig toe gaat, gaat  $A_{RC}$  naar nul toe. Een ruwe schets van  $A_{RC}$  als functie van  $\omega$  ziet u in Figuur B2.2.

Verder is  $\varphi_{RC} = 0$  als  $\omega = 0$  en is  $\varphi_{RC} = -\pi/4$  als  $\omega = 1/RC$ . Naarmate  $\omega$  verder stijgt, zal  $\varphi_{RC}$  negatiever worden. Wanneer  $\omega$  naar oneindig toe gaat, gaat  $\varphi_{RC}$  naar  $-\pi/2$  toe. Een ruwe schets van  $\varphi_{RC}$  als functie van  $\omega$  ziet u in Figuur B2.3.

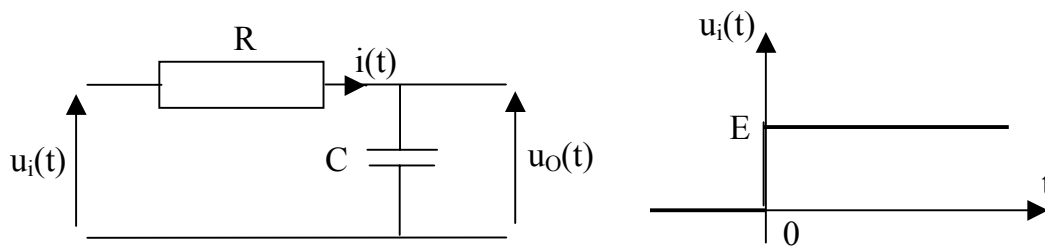


Figuur B2.3: Frequentieverloop van  $\varphi_{RC}$

Bemerk wel dat Figuur B2.2 en Figuur B2.3 erg benaderd getekend zijn. We laten het over aan de geïnteresseerde student om met behulp van PSPICE de schakeling in Figuur B2.1 te simuleren en met behulp van de functie AC-SWEEP de exacte vorm van  $A_{RC}$  en  $\varphi_{RC}$  te bekomen.

## 1.2: Het stapantwoord

Beschouw de RC-kring weergegeven in Figuur B2.1. Nu leggen we aan de ingang een stapfunctie aan. Dit betekent dat  $u_i(t) = 0$  voor alle  $t < 0$  en dat  $u_i(t) = E$  voor alle  $t \geq 0$ . We zoeken nu het tijdsverloop van de uitgangsspanning  $u_o(t)$ .



Figuur B2.4: stapantwoord RC-kring

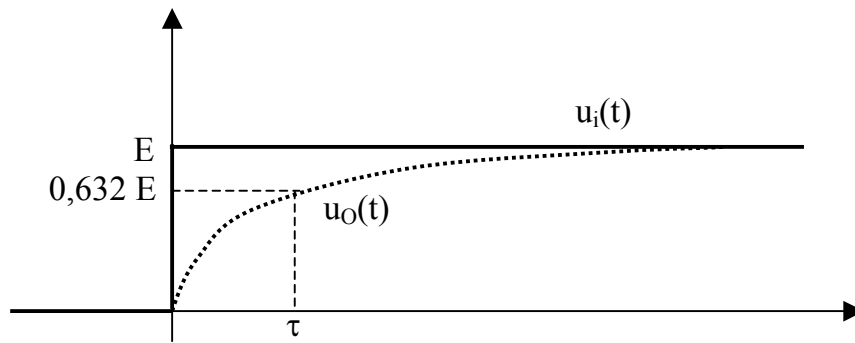
Door R en door C vloeit een stroom  $i(t)$ . We weten dat

$$u_i(t) = R i(t) + u_C(t) \text{ en dat } du_C(t)/dt = (1/C) i(t) = du_o(t)/dt.$$

Verifieer zelf dat  $i(t) = (E/R) e^{-t/\tau}$  (voor  $t \geq 0$ ) waarbij  $\tau = RC$ . Hieruit volgt dat voor alle  $t \geq 0$  geldt dat

$$u_C(t) = u_o(t) = E (1 - e^{-t/\tau}).$$

Dit betekent dat  $u_i(t)$  en  $u_o(t)$  een verloop hebben zoals weergegeven in Figuur B2.5.



Figuur B2.5: Stapantwoord RC-kring

Bemerk dat op  $t = 0$ , de condensator  $C$  nog niet opgeladen is zodat

$$u_C(t = 0) = u_O(t = 0) = 0.$$

Ten gevolge van de aangelegde  $u_i(t)$  stijgt  $u_C(t) = u_O(t)$ . Op  $t = \tau$  is

$$u_C(t = \tau) = u_O(t = \tau) = 0,632 E.$$

Hierna stijgt  $u_C(t) = u_O(t)$ . Het duurt in principe oneindig lang vooraleer de uitgangsspanning de waarde  $E$  bereikt, doch bijvoorbeeld op het tijdstip  $t = 5\tau$  is de eindwaarde  $E$  zo goed als bereikt.

## 2: Het Bode diagram

Bij Figuur B2.2 wordt  $A_{RC}$  uitgezet in functie van de pulsatie  $\omega = 2\pi f$ . In de praktijk zal men vaak  $20 \log(A_{RC})$  (dus gebruik maken van een logaritmische schaal) uitzetten in functie van  $\omega$ . Ook voor de frequentie-as gebruikt men vaak een logaritmische schaal.

We beschouwen algemeen een lineaire elektronische schakeling. Wanneer een sinusvormig signaal  $u_i(j\omega)$  aangelegd wordt, dan verkrijgt men aan de uitgang een sinusvormig signaal  $u_O(j\omega)$  met dezelfde frequentie. De schakeling heeft voor de beschouwde frequentie (pulsatie) een versterkingsfactor  $A(\omega)$ . Met de notatie  $A(\omega)$  benadrukken we dat de versterkingsfactor frequentie-afhankelijk is.

We kunnen bijgevolg stellen dat

$$u_O(j\omega) = A(\omega) u_i(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} u_i(j\omega).$$

Teneinde de versterking  $A(\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$  te kennen, moeten we zowel het frequentie verloop van  $A(\omega)$  als van  $\varphi(\omega)$  kennen. Het bode diagram geeft het verloop van  $A(\omega)$  en  $\varphi(\omega)$  in functie van  $\omega$  waarbij voor  $\omega$  een logaritmische schaal gebruikt wordt. Bovendien wordt feitelijk niet  $A(\omega)$  maar  $20 \log A(\omega)$  uitgezet in functie van  $\omega$ .

## 2.1: Het Bode diagram van een eerste orde systeem

Algemeen heeft een eerste orde systeem een

$$A(\omega) = A_{DC}/(1 + j\omega\tau).$$

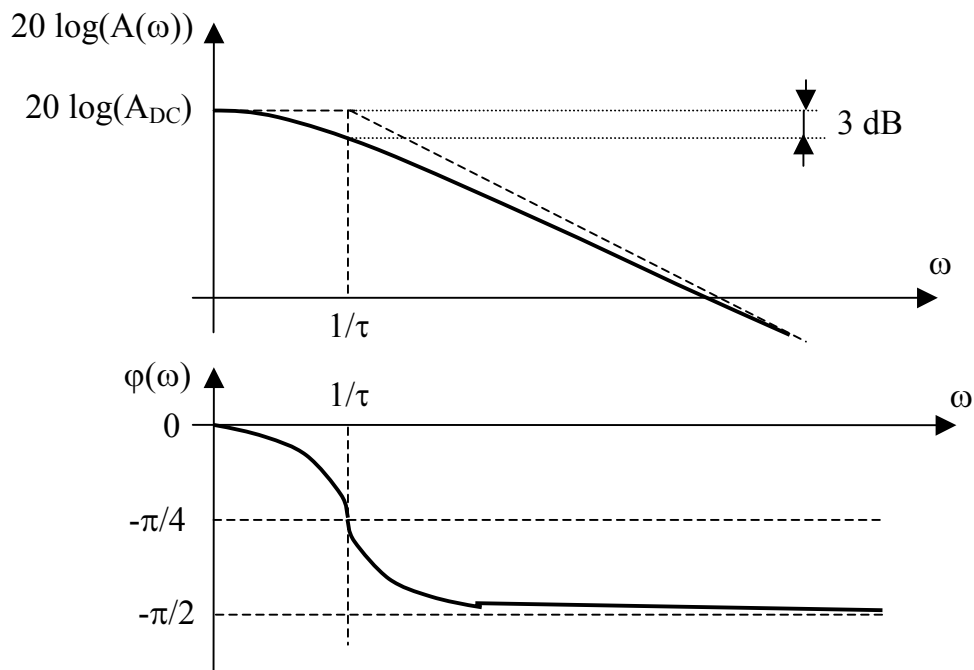
Dit betekent dat  $A(\omega) = A_{DC}/\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$  en dat  $\varphi(\omega) = -\text{Bgtg}(\omega\tau)$ . Dit betekent dat

- voor  $\omega = 0$ ,  $A(\omega) = A_{DC}$  en  $\varphi(\omega) = 0$
- voor  $\omega = 1/\tau$ ,  $A(\omega) = A_{DC}/\sqrt{2}$  en  $\varphi(\omega) = -\pi/4$
- $A(\omega)$  naar nul toe gaat en dat  $\varphi(\omega)$  naar  $-\pi/2$  toe gaat als  $\omega$  naar oneindig toe gaat.

Bovendien is het zo dat bij stijgende  $\omega$ ,  $A(\omega)$  monotoon daalt en dat  $\varphi(\omega)$  steeds negatiever wordt.

Wanneer  $\omega = 1/\tau$ , dan is  $A(\omega) = A_{DC}/\sqrt{2}$  zodat  $20 \log(A(\omega)) = 20 \log(A_{DC}) - 3$  (uitgedrukt in dB).

We krijgen dan ook als Bode diagram voor een eerste orde systeem



Figuur B2.6: Bode diagram eerste orde systeem

Bemerk dat in het bovenste gedeelte van het Bode diagram (de versterking) de curve in volle dikke lijn de reële versterking is. De dunne streeplijn is de asymptotische benadering.

De kantelpulsatie is gelijk aan  $1/\tau$ . Bij benadering kan gesteld worden dat voor alle  $\omega \leq 1/\tau$  de versterking constant is. Boven de kantelpulsatie  $1/\tau$ , begint de versterking te dalen. De asymptotische streeplijn daalt er 20 dB per decade.

Bij de kantelpulsatie  $1/\tau$  bedraagt de faseverschuiving  $\phi$  exact  $-\pi/4$ , bij 10 keer de kantelpulsatie is de faseverschuiving bijna  $-\pi/2$ . Naarmate de pulsatie verder toeneemt, zal de faseverschuiving steeds dichterbij  $-\pi/2$  naderen.

## 2.2: Opmerking

Het is wel belangrijk om op te merken dat we hier enkel het Bode diagram van een eerste orde systeem bestudeerd hebben. Een eerste orde systeem is een systeem met één pool (bij een pulsatie gelijk aan  $1/\tau$ ). Het is ook mogelijk een Bode diagram te tekenen van systemen welke meerdere polen hebben. Naast polen kunnen er ook nullen voorkomen. We gaan er hier niet verder op in, doch in al deze gevallen is het mogelijk een Bode diagram te tekenen.

In verband met het tekenen en interpreteren van een Bode diagram is veel literatuur beschikbaar. Bij wijze van voorbeeld verwijzen we de zeer geïnteresseerde student naar het boek 'Automatic Control Engineering' van F. H. Raven.

## 3: De opamp

We beschouwen een opamp welke slechts één niet idealiteit heeft. De open loop versterking  $A$  is eindig en frequentieafhankelijk zoals weergegeven in Paragraaf 3.4 van Hoofdstuk 1.

Dit betekent dat de opamp zelf zich gedraagt als een eerste orde systeem. De opamp heeft een open loop versterking

$$A(\omega) = A_{DC}/(1 + j\omega/\omega_1)$$

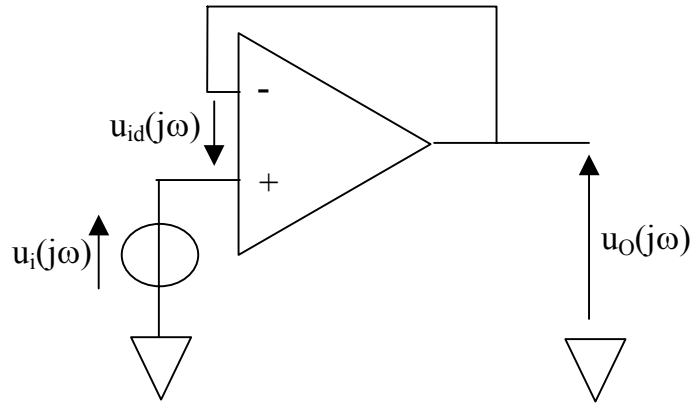
waarbij  $\omega_1 = 2\pi f_1$  ( $f_1$  is de kantelfrequentie).

### 3.1: De spanningsvolger

Beschouw de opamp schakeling van Figuur B2.7 welke een spanningsvolger voorstelt.

De spanningsvolger van Figuur B2.7 is een lineair netwerk. Dit betekent dat het aanleggen van een sinusvormige ingangsspanning aanleiding geeft tot een sinusvormige uitgangsspanning. Ook de differentieelspanning  $u_{id}$  is sinusvormig. Aangezien we in sinusregime werken, gebruiken we ook hier de complexe voorstelling.





Figuur B2.7: Spanningsvolger

Steunende op de basiseigenschappen van een opamp, is het duidelijk dat

$$u_o(j\omega) = A(\omega) u_{id}(j\omega).$$

Steunende op de spanningswet van Kirchoff, bekomen we verder dat

$$u_o(j\omega) + u_{id}(j\omega) = u_i(j\omega).$$

Dit alles betekent dat  $u_o(j\omega) = u_i(j\omega)/(1 + 1/A(\omega))$ . Aangezien  $A(\omega) = A_{DC}/(1 + j\omega/\omega_1)$ , blijkt dat

$$u_o(j\omega)/u_i(j\omega) = 1/((1 + 1/A_{DC}) + j(\omega/A_{DC}\omega_1)).$$

Als we nu die formule interpreteren, zien we dat bij een oneindig grote  $A_{DC}$  (dus een ideale opamp) de uitgangsspanning gelijk is aan de ingangsspanning. Daarom is de schakeling van Figuur B2.7 ook een spanningsvolger. De uitgangsspanning volgt de ingangsspanning.

Bij een eindige  $A_{DC}$  (en dus het hierboven beschreven gedrag van  $A(\omega)$ ) gedraagt de spanningsvolger zich als een eerste orde systeem.

De kantelpulsatie van de spanningsvolger is gelijk aan  $\omega_1(1 + A_{DC}) \cong \omega_1 A_{DC}$ . Reken dit zelf na als u weet dat  $\omega_1$  de kantelpulsatie is van de opamp zelf. Bemerk dat bij  $\omega = 0$ , de spanningsvolger een versterking  $1/(1 + 1/A_{DC}) \cong 1$  heeft.

Met een goede benadering kan dan ook bij de spanningsvolger gesteld worden dat

$$u_o(j\omega)/u_i(j\omega) = 1/(1 + j(\omega/A_{DC}\omega_1)).$$

### 3.2: Stapantwoord van een spanningsvolger

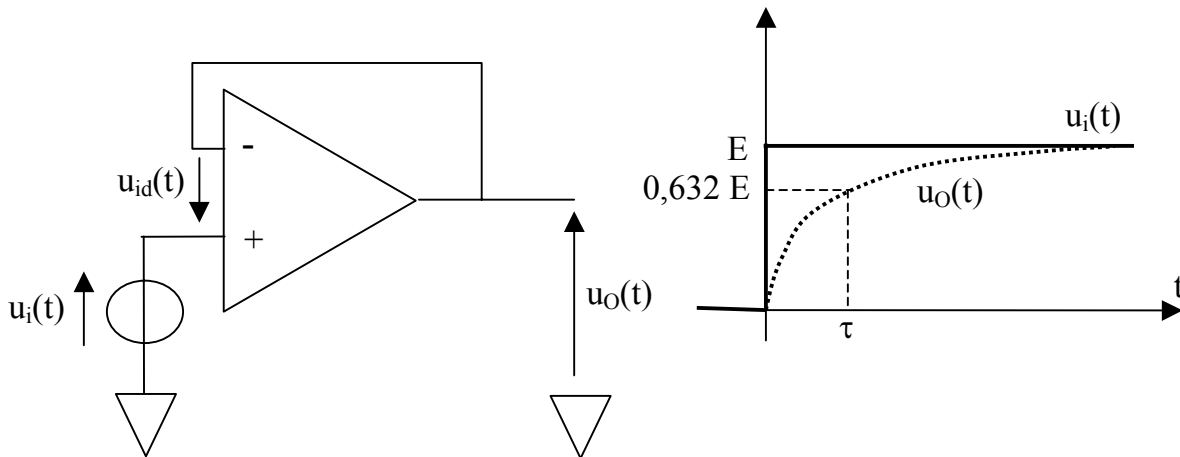
Bij een spanningsvolger is  $u_o(j\omega)/u_i(j\omega) = 1/(1 + j(\omega/A_{DC}\omega_1))$  zodat een spanningsvolger zich gedraagt als de RC-kring van Figuur B2.1 indien

$$\tau = RC = 1/A_{DC}\omega_1.$$

Wanneer nu aan de ingang van de spanningsvolger een stap aangelegd wordt ( $u_i(t) = 0$  wanneer  $t < 0$  en  $u_i(t) = E$  wanneer  $t \geq 0$ ), dan is het uitgangssignaal  $u_o(t)$  gelijk aan

$$u_o(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$$

waarbij  $\tau = 1/A_{DC}\omega_1$ .



Figuur B2.8: Stapantwoord van een spanningsvolger

Bemerkt dat bij een ideale opamp  $A_{DC}$  en  $\omega_1$  oneindig groot zijn zodat  $u_o(t)$  precies gelijk is aan  $u_i(t)$ . Bij een reële opamp daarentegen zijn  $A_{DC}$  en  $\omega_1$  eindig zodat aan de uitgang effectief het verloop weergegeven in Figuur B2.8 bekomen wordt.