9.D. O método de Gauss-Jordan

A quarta aplicação que faremos do método de eliminação é o cálculo da inversa de uma matriz (invertível) $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(n \times n)$. Antes porém devemos advertir que a determinação da inversa não é necessária para resolver o sistema $\mathbf{ax} = \mathbf{b}$. A expressão $\mathbf{x} = \mathbf{a}^{-1} \cdot \mathbf{b}$ para a solução desse sistema é de grande elegância e significado teórico porém, na prática, a obtenção explícita da inversa $\mathbf{a}^{-1}$ requer a solução de n sistemas lineares. Convenhamos que isto seria um modo pouco eficaz de resolver um único sistema.

Com efeito, examinando coluna por coluna cada membro da igualdade $\mathbf{aa}^{-1} = \mathbf{I}_n$, vemos que a j-ésima coluna de $\mathbf{a}^{-1}$ é a solução do sistema $\mathbf{ax} = \mathbf{e}_j$, portanto o cálculo da inversa $\mathbf{a}^{-1}$ equivale a resolver os n sistemas lineares $\mathbf{ax} = \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{ax} = \mathbf{e}_n$.

O método de eliminação que vimos utilizando é também chamado "método de Gauss". Existe ainda o "método de Gauss-Jordan".

Ele continua a eliminação iniciada pelo método de Gauss, chegando no final a uma matriz escalonada, com a propriedade adicional de que, acima e abaixo do primeiro elemento não-nulo de cada linha, todos os elementos são iguais a zero. Se a matriz for (quadrada e) invertível, o primeiro elemento não-nulo de cada linha da matriz escalonada está sobre a diagonal. Portanto, neste caso, o método de Gauss-Jordan produz uma matriz cujos elementos não-nulos constituem a diagonal.

Vejamos um exemplo da eliminação de Gauss-Jordan.

Exemplo 9.10. No Exemplo 9.4, o método de eliminação de Gauss em resumo operou a seguinte transformação por meio de operações elementares sobre as linhas:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

O método de Gauss-Jordan continua, aplicando as operações elementares sobre as linhas, de modo a anular também os elementos de cada coluna situados acima da diagonal. Ele prossegue a partir daí com as seguintes operações elementares:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 + \frac{4}{15}L_3]{L_1 + \frac{2}{15}L_3}$$

$$\xrightarrow[L_2 + \frac{4}{15}L_3]{L_1 + \frac{2}{15}L_3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 - \frac{1}{7}L_4 \\ L_3 + \frac{15}{14}L_4}]{L_1 + \frac{4}{7}L_4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Esta última matriz diagonal resulta portanto da matriz inicial pela aplicação sucessiva de operações elementares sobre suas linhas.

Existe ainda uma terceira operação elementar, que não tivemos ainda ocasião de mencionar porque não foi necessária até agora, mas que tem também a propriedade de, aplicada às linhas de uma matriz, não alterar o seu espaço-linha. Ela é a seguinte:

(3) Multiplicar uma linha por um número $\neq 0$.

Aplicando essa operação às linhas da matriz final do exemplo acima, obtemos a matriz identidade. (Multiplique a primeira linha por $1/2$, a terceira por $-2/15$ e a quarta por $1/7$.)

O método de Gauss-Jordan fornece imediatamente a solução do sistema $\mathbf{ax} = \mathbf{b}$ sem necessidade de, no final, efetuar a resolução de baixo para cima. Com efeito, depois de efetuada qualquer seqüência de operações elementares (inclusive a terceira) sobre as linhas da matriz aumentada obtemos sempre um sistema equivalente $\mathbf{a}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$. Se a matriz $\mathbf{a}$ é invertível, o processo de Gauss leva a uma matriz escalonada com elementos todos $\neq 0$ na diagonal. Prosseguindo a partir daí com Gauss-Jordan, chegaremos finalmente a um sistema $\mathbf{a}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$, equivalente ao original, com $\mathbf{a}' = \mathbf{I}_n$, logo $\mathbf{x} = \mathbf{b}'$, o que nos dá a solução $\mathbf{x}$ diretamente.

Assim, a solução do sistema $\mathbf{ax} = \mathbf{b}$ é a última coluna da matriz $[\mathbf{a}'; \mathbf{b}']$ que se obtém aplicando a eliminação de Gauss-Jordan à matriz aumentada $[\mathbf{a}; \mathbf{b}]$ de modo a chegar com $\mathbf{a}' = \mathbf{I}_n$.

Em particular, tomando $b = e_j$ (j-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$), a solução x da equação $\mathbf{ax} = \mathbf{e}_j$, que é a j-ésima coluna de $\mathbf{a}^{-1}$, se obtém efetuando operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada $[\mathbf{a}; \mathbf{e}_j]$ até reduzí-la a $[\mathbf{I}_n; \mathbf{x}]$. Como essas operações dependem apenas da matriz **a** mas não de j, isto sugere o tópico seguinte

9.E. Método prático para calcular a inversa $\mathbf{a}^{-1}$

Acrescenta-se a matriz identidade $\mathbf{I}_n$ à direita de **a**, de modo a ter uma matriz aumentada $n \times 2n$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right].$$

Em seguida aplicam-se operações elementares às linhas dessa matriz aumentada de modo a reduzir a matriz **a** à identidade $\mathbf{I}_n$, chegando-se a:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{array}\right].$$

A matriz $[x_{ij}]$ à direita é a inversa de **a**.

Exemplo 9.11. Damos abaixo um exemplo de como obter a inversa de uma matriz segundo este método.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 7 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 8 & -\frac{26}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -\frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

Portanto

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Retornaremos ao asssunto de eliminação gaussiana no item final da seção 17.

Exercícios

9.1. Determine o posto da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 17 \end{bmatrix}.$$

9.2. Ache a matriz, na base $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, da projeção $P\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $P(x, y, z, t) = (x, y, 0, 0)$, sabendo que $u_1 = (2, 0, 3, 4)$, $u_2 = (1, 1, 4, 2)$, $u_3 = (3, 2, 2, 0)$ e $u_4 = (0, 3, 0, 1)$. [Sugestão: use eliminação gaussiana para exprimir e_1, e_2, e_3 e e_4 como combinações lineares de u_1, u_2, u_3 e u_4.]

9.3. Exprima cada um dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^3$ como combinação linear dos vetores $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (-1, 0, 2)$, $v_3 = (4, 2, -5)$ e, a partir daí, obtenha a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

9.4. Decida se as matrizes abaixo são invertíveis ou não. No caso afirmativo, determine a(s) inversa(s). Caso uma delas (digamos **a**) não seja invertível, ache uma matriz $\mathbf{x} \in M(3 \times 1)$ tal que $\mathbf{ax} = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

9.5. Calcule a dimensão do subespaço vetorial de $\mathbb{R}^5$ gerado pelos vetores $v_1 = (2, 4, 8, -4, 7)$, $v_2 = (4, -2, -1, 3, 1)$, $v_3 = (3, 5, 2, -2, 4)$ e $v_4 = (-5, 1, 7, -6, 2)$. Decida se o vetor $b = (6, 18, 1, -9, 8)$ pertence ou não a esse subespaço.

9.6. A matriz $\mathbf{a} \in M(m \times n)$ tem apenas uma linha e uma coluna não-nulas. Dada $\mathbf{b} \in M(m \times 1)$, quais são as dimensões possíveis para a variedade afim formada pelas soluções $\mathbf{x} \in M(n \times 1)$ do sistema $\mathbf{ax} = \mathbf{b}$?

9.7. Exprima cada vetor do conjunto $\{u, v, w, z\} \subset E$ como combinação linear dos vetores $\{w, u + 3z, v - 2u + 3w, 5z\}$.

9.8. Obtenha uma base para o subespaço vetorial gerado por cada um dos seguintes conjuntos e, conseqüentemente, determine a dimensão daquele subespaço:

(a) $\{(1, 2, 3, 4), (3, 4, 7, 10), (2, 1, 3, 5)\}$

(b) $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$, $5x^3 + 4x^2 + 3x + 2$, $4x^3 - 2x^2 + x$, $7x^3 + 2x^2 - 3x - 8$

(c) $(1, 3, 5)$, $(-1, 3, -1)$, $(1, 21, 1)$

(d) $(1, 2, 3)$, $(1, 4, 9)$, $(1, 8, 27)$.

9.9. Mostre que se 0, 1, a, b, c são números dois a dois diferentes então os vetores $(1, 1, 1, 1)$, (a, a^2, a^3, a^4), (b, b^2, b^3, b^4) e (c, c^2, c^3, c^4) são linearmente independentes. Generalize.

9.10. Exiba uma base para a imagem de cada uma das transformações lineares abaixo e determine seu posto.

(a) $A \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $A(x, y, z, t) = (x + 2y - t, 2x - z + 2t, -2x + y + 3z)$

(b) $B \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$, $B(x, y, z, t) = (x + 2y + 2z - t, 2x + 4y + 3z + t, -3x + 2z + 3t, -3x + z + 6t, 10x + 2y + 5z + 5t)$

(c) $C \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $C(x, y, z) = (x + 3y, 2y + 4z, x + y - 4z)$

(d) $D \colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, $Dp(x) = p'(x)$.

9.11. Use escalonamento para resolver os seguintes sistemas lineares:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 6y & + & 9z & = & 7 \\ 2x & + & 8y & + & 8z & = & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & & & + & t & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & + & t & = & 1 \\ 3x & + & 3y & + & z & + & 2t & = & -1 \\ & & y & + & 3z & - & t & = & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & - & z & + & 2t & = & 0 \\ & & 3y & - & z & + & 3t & = & 0 \\ 2x & - & y & - & z & + & t & = & 0 \end{array}$$

9.12. Ache uma condição envolvendo a, b, c para que o sistema abaixo tenha solução e encontre as soluções no caso em que elas existam

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & = & a \\ & & 5y & + & 2z & + & 4t & = & b \\ 3x & - & 2y & + & z & - & t & = & c \end{array}$$

9.13. Ache uma base para o núcleo de cada uma das transformações lineares a seguir:

(a) $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A(x, y, z) = (-3y + 4z, 3x - 5z, -4x + 5y)$.

(b) $B\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$, $B(x, y, z, t) = (2x - 2z + 4t, x - 2z + 3t, 4y + 2z + t, 6x + 4y - 4z + 13t, 2x + 4y - 2z + 7t)$

(c) $C\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $C(x, y, z, t) = (2x+y-z+3t, x-4y+2z+t, 2y+4z-t)$.

(d) $T\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $T \cdot p(x) = p(x + m)$, $m \neq 0$.

9.14. Decida quais das matrizes abaixo possuem inversa e calcule a inversa quando existir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

9.15. Prove que o sistema

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & - & 3t & = & a \\ 2x & - & 5y & - & 3z & + & 12t & = & b \\ 7x & + & y & + & 8z & + & 5t & = & c \end{array}$$

admite solução se, e somente se, $37a+13b = 9c$. Ache a solução geral do sistema quando $a = 2$ e $b = 4$.

9.16. Prove que toda matriz anti-simétrica 3×3 não-nula tem posto igual a dois. Dê exemplo de uma matriz anti-simétrica invertível 4×4.

9.17. Considere o sistema de n equações lineares a n incógnitas:

$$x_i + x_{i+1} = a_i \quad (i = 1, \ldots, n-1), \quad x_1 + x_n = a_n.$$

(a) Se n é ímpar, prove que ele possui solução única, sejam quais forem os a_i. Explicite esta solução.

(b) Supondo n par, obtenha condições sobre os a_i que sejam necessárias e suficientes para que o sistema possua solução. Caso existam soluções, determine a variedade afim por elas formada.