第六章

二阶电路的瞬态分析

主要内容：

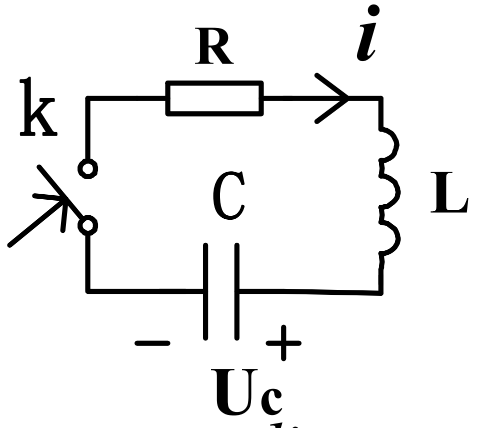
1) 二阶电路的零输入响应；

2) 二阶电路的零状态响应和全响应；

3) 应用举例

6.1 二阶电路零输入响应

例：$U_C(0^-)=U_0$， $i_L(0^-)=0$



电路方程(KVL)： 以$U_C(t)$为变量,

$$i=C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t},\quad u_R=Ri=RC\frac{dU_C}{dt},\quad u_L=L\frac{di_L}{dt}=LC\frac{d^2U_C}{dt^2}$$

得:

$$LC\frac{d^2U_C}{dt^2}+RC\frac{\mathrm{d}U_C}{dt}+U_C=0$$

齐次方程的特征根:

$$LCs^2+RCs+1=0$$

$$LCs^2 + RCs + 1 = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 - 4 \times LC}}{2 \times LC}$$

齐次方程根：

$$\begin{cases} S_1 = -\dfrac{R}{2L} + \sqrt{(\dfrac{R}{2L})^2 - \dfrac{1}{LC}} \\ S_2 = -\dfrac{R}{2L} - \sqrt{(\dfrac{R}{2L})^2 - \dfrac{1}{LC}} \end{cases}$$

电路方程为二阶齐次方程, 电路包含二个动态元件,故称为二阶电路.

二阶电路根据电路参数不同,其电容电压过渡过程(输出响应)也不同.

1) 当 $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$,即 $(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC} > 0$,特征根为二个不等负实根 S_1, S_2

$U_C(t) = A_1 e^{S_1 t} + A_2 e^{S_2 t}$, 初始条件 $U_C(0^+) = U_0$,

过阻尼

$i_L(0^+) = C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0^+} = 0$,即 $\frac{dU_C}{dt}\bigg|_{t=0^+} = 0$

代入上式

$$\begin{cases} U_0 = A_1 + A_2 \\ 0 = A_1 S_1 + A_2 S_2 \end{cases}$$

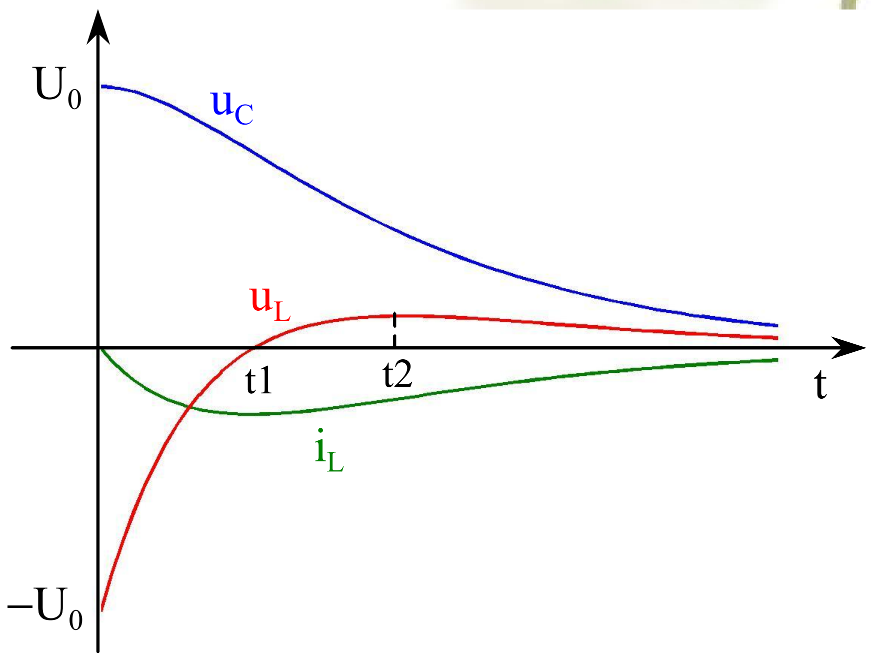
得:

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{S_2}{S_2 - S_1} U_0 \\ A_2 = \dfrac{-S_1}{S_2 - S_1} U_0 \end{cases}$$

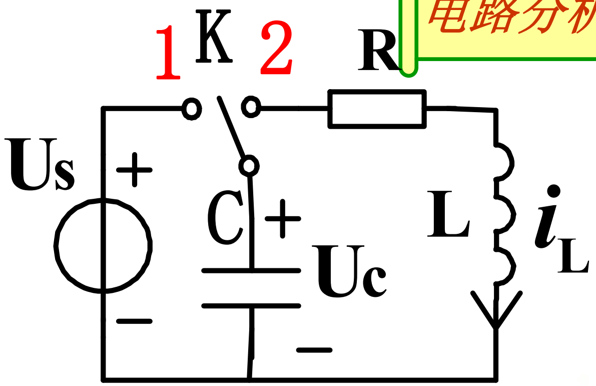
有 $$U_C(t)=\frac{U_0}{S_2-S_1}(S_2\mathrm{e}^{S_1t}-S_1\mathrm{e}^{S_2t})$$

$$i=C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}=\frac{S_1S_2}{S_2-S_1}CU_0(\mathrm{e}^{S_1t}-\mathrm{e}^{S_2t})$$

$$u_L=L\frac{\mathrm{d}i_c}{\mathrm{d}t}=\frac{U_0}{S_2-S_1}(S_1\mathrm{e}^{S_1t}-S_2\mathrm{e}^{S_2t})$$



过渡过程单调衰减,电路无振荡.



例1: $U_S = 10V, C = 1\mu F, R = 4K\Omega,$

$L = 1H$, **K从** $1 \rightarrow 2$ **，求** $U_C(t)$**.**

解: $U_C(0^-) = U_C(0^+) = 10V$

$$i_L(0^+) = -C\left.\frac{dU_C}{dt}\right|_{t=0^+} = 0$$

$$S_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \qquad S_1 = -268, \quad S_2 = -3732$$

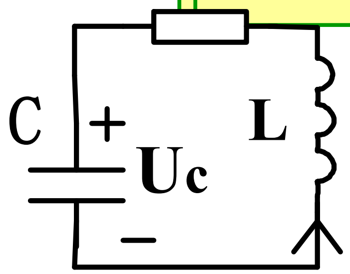
$$A_1 = \frac{S_2}{S_2 - S_1} U_C(0^+) = 10.77, \qquad A_2 = \frac{-S_1 U_C(0^+)}{S_2 - S_1} = -0.77$$

$$U_C(t) = (10.77\mathrm{e}^{-268t} - 0.77\mathrm{e}^{-3732t})V$$

电路分析

2) $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ ，即 $\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 < \dfrac{1}{LC}$ (振荡放电过程)

欠阻尼



方程 $LC\dfrac{d^2U_C}{dt} + RC\dfrac{dU_C}{dt} + U_C = 0$

齐次方程特征根: $S_{1,2} = -\dfrac{R}{2L} \pm \sqrt{(\dfrac{R}{2L})^2 - \dfrac{1}{LC}} = -\alpha \pm j\omega_d$

式中: $\alpha = \dfrac{R}{2L}$ ——衰减系数,

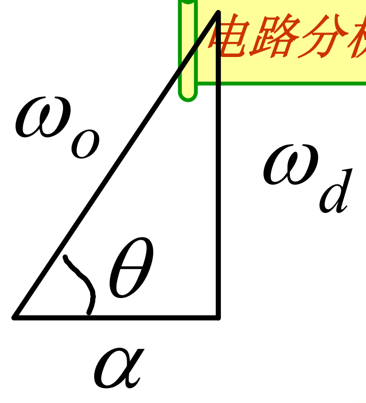
$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L})^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$ ——振荡角频率

ω_0 ——谐振角频率

过渡过程一般形式: $U_C(t) = Ae^{-\alpha t}\sin(\omega_d t + \theta)$

式中 A,θ 为待定系数，由初始条件而定.

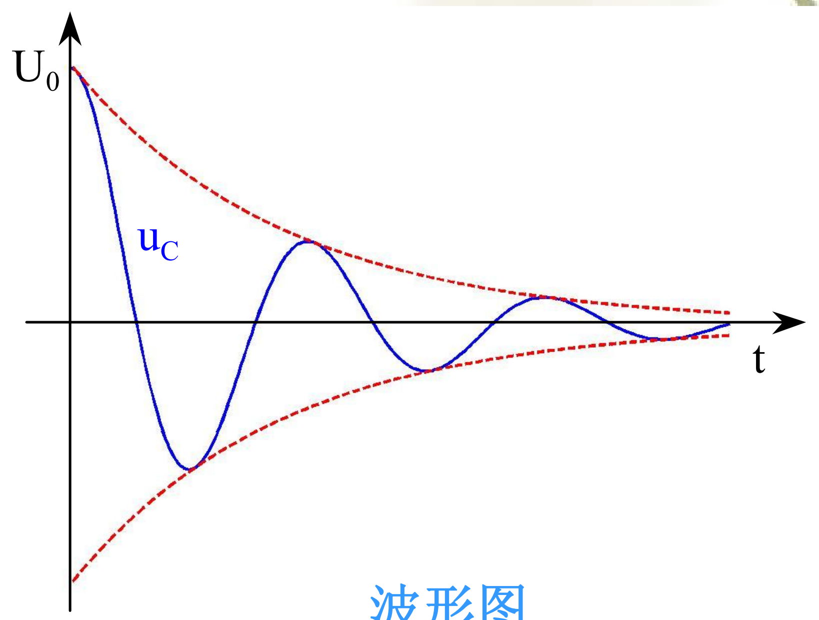
由 $U_C(0^+)=U_0,\quad \left.\frac{dU_C}{dt}\right|_{t=0^+}=0$ 得



$$\begin{cases} U_0 = A\sin\theta \\ 0 = -\alpha\sin\theta + \omega_d\cos\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \theta = tg^{-1}\dfrac{\omega_d}{\alpha} \\ A = U_0\dfrac{\omega_0}{\omega_d} \end{cases}$$

$$U_C(t) = U_0\frac{\omega_0}{\omega_d}e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t + tg^{-1}\frac{\omega_d}{\alpha})$$

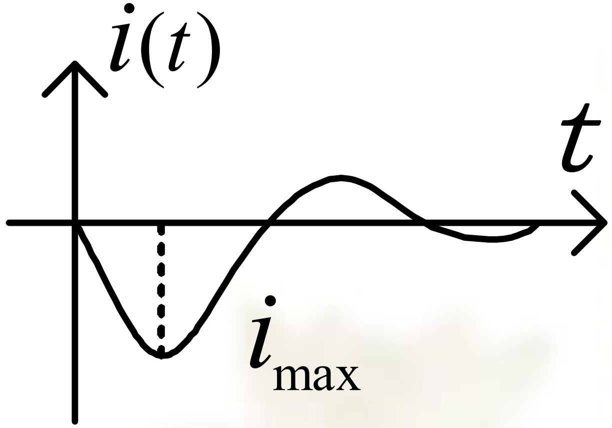
电容电压衰减振荡，衰减由 $e^{-\alpha t}$ 决定。



波形图

$$i = C\frac{dU_C}{dt} = \frac{U_0}{\omega_d L}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_d t + \pi) = \frac{-U_0}{\omega_d L}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_d t)$$

电容电感元件之间有周期性的能量交换。



电流最大值出现时间:

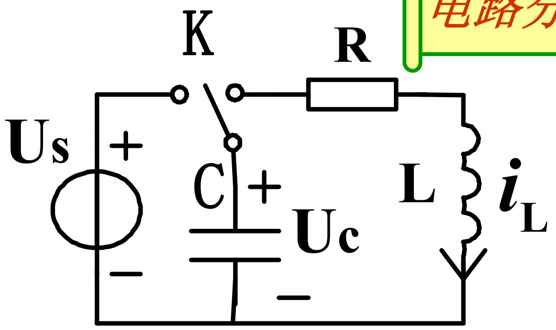
$$\frac{di}{dt} = 0 \rightarrow \alpha\sin(\omega_d t) - \omega_d\cos(\omega_d t) = 0$$

$$t = \frac{1}{\omega_d} tg^{-1}\frac{\omega_d}{\alpha}$$

例2：脉冲磁场电流产生。

$U_S = 15KV, C = 1700\mu F, R = 6\times10^{-4}$

$L = 6\times10^{-9} H$,求 $i(t)$及 $i_{\max}$.



解：二阶电路， $R = 6\times10^{-4} < 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{6\times10^{-9}}{1700\times10^{-6}}} = 3.75\times10^{-3}$

振荡过程： $\alpha = \frac{R}{2L} = 5\times10^{4}.$ $\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2} = 3\times10^{5}$

$$i = \frac{-U_0}{\omega_d L} e^{-\alpha t} \sin\omega_d t = 8.3\times10^{6} e^{-5\times10^{4} t} \sin(3\times10^{5} t) A$$

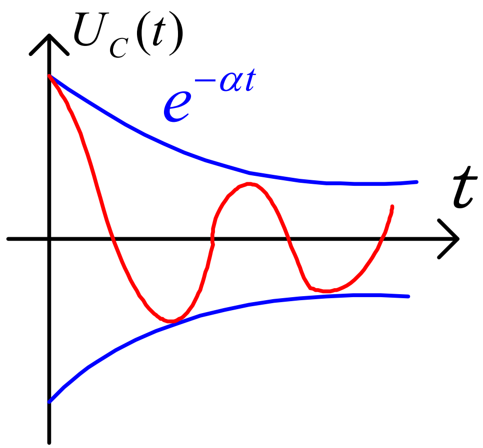
当 $t = \frac{1}{\omega_d} tg^{-1} \frac{\omega_d}{\alpha} = \frac{1}{3\times10^5} tg^{-1} 6 = 4.6\times10^{-6}$ 秒

$$i_{\max} = 8.3\times10^6 e^{-5\times10^4\times4.6\times10^{-6}} \sin(3\times10^5 \times 4.6\times10^{-6})$$

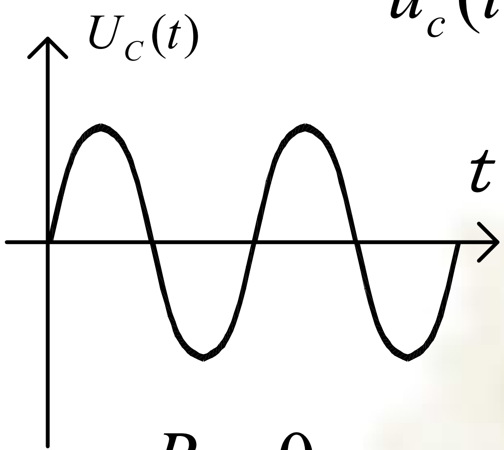
$$i_{\max} = 6.3\times10^6 A$$

讨论： 当 $R=0$ 时, 无衰减振荡, $\alpha = 0, \omega_d = \omega_0$

$$u_c(t) = U_0 \sin(\omega_0 t + 90^\circ)$$



$R \neq 0$



$R = 0$

临界阻尼

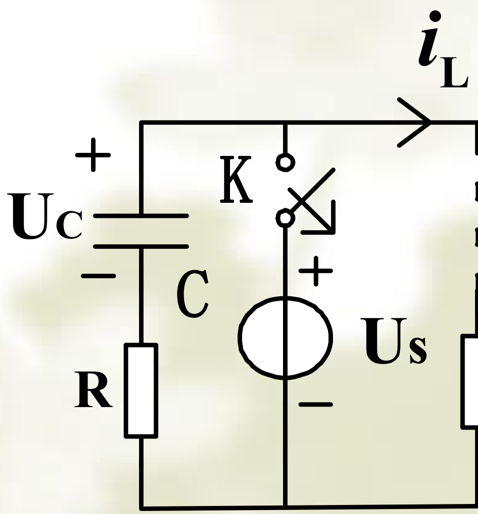
3>. $R = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ ，即 $\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 - \dfrac{1}{LC} = 0$

方程为重根 $S_1 = S_2 = -\dfrac{R}{2L} = -\alpha$

$$U_C(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t}$$ (单调衰减)

例3: $R = 1\Omega, L = 1H, C = 1F, U_S = 1V$

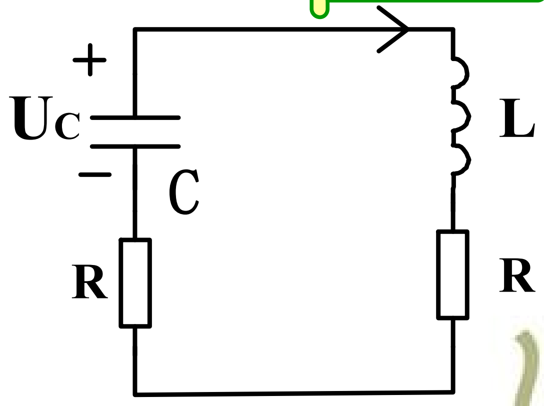
K闭合已久,求K打开后 i_L 和 $U_C(t)$.



解: 判别电路状态 $R' = 2R = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

临界阻尼 $\alpha = \dfrac{R'}{2L} = 1$

方程解: $U_C(t)=(A_1+A_2t)\mathrm{e}^{-t}$,



初始条件: $U_C(0^+)=U_C(0^-)=1$

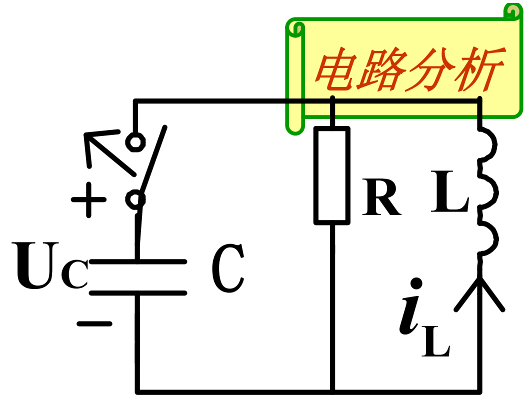
$$i_L(0^+)=i_L(0^-)=1=-C\left.\frac{dU_C}{dt}\right|_{t=0^+},$$ 即

$$\frac{dU_C(0^+)}{dt}=-1$$

代入得: $\begin{cases}1=A_1\\-1=A_2-A_1\end{cases}$ $\qquad\begin{cases}A_1=0\\A_2=0\end{cases}$

$$U_C(t)=\mathrm{e}^{-t}V. \qquad i_L=-C\frac{dU_C}{dt}=\mathrm{e}^{-t}A$$

例4: 判别电路响应形式.



建立电路方程 $i_L = \dfrac{U_C}{R} + C\dfrac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}.$

$$U_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = LC\frac{\mathrm{d}^2U_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}$$

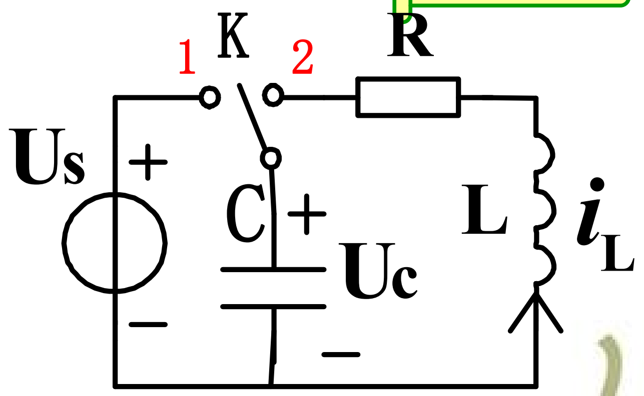
回路方程: $U_L + U_C = 0$ $\quad LC\dfrac{d^2U_C}{dt^2} + \dfrac{L}{R}\dfrac{dU_C}{dt} + U_C = 0.$

特征根 $S_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\dfrac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\dfrac{1}{2RC}\right)^2 - \dfrac{1}{LC}}$

判别式: $\dfrac{1}{R} \sim 2\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ ，当 $\dfrac{1}{R} > 2\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ 时, 二个负实根, 无振荡.

讨论: **RLC 串联时,增大R可抑制振荡.**
RLC并联时, 减小R可抑制振荡.

例：建立电感电流为变量的二阶电路方程。



$$u_C(t)=\frac{1}{C}\int i_L(t)dt$$

$$L\frac{di_L}{dt}+R\times i_L+u_C(t)=0$$ 求导：

$$LC\frac{d^2 i_L}{dt^2}+RC\frac{di_L}{dt}+i_L=0$$

初始条件： $i_L(0^-)=0$

$$\frac{di_L(0^-)}{dt}=-\frac{1}{L}u_C(0^-)$$

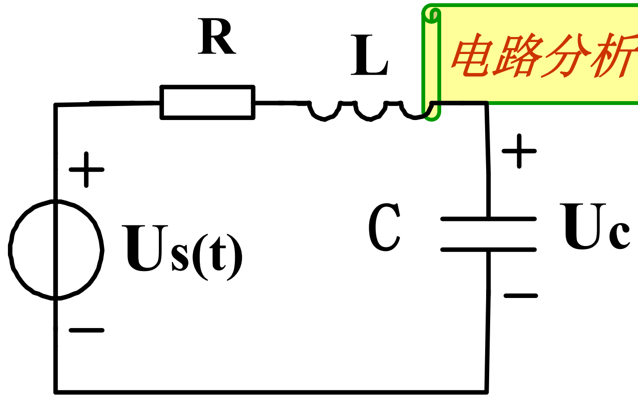
6.2 二阶电路的零状态响应和全响应

对于二阶电路，当*RLC*串联电路接通直流、正弦交流或其他形式的电压源时，其响应的自由分量与零输入响应情况完全一样，强制分量由微分方程特解确定之。与一阶电路相同，当激励是直流或正弦交流函数时，该特解就是相应的稳态解。然后根据零初始条件确定积分常数，最终求得零状态响应。

在二阶动态电路中，当既有激励电源，又有储能元件初始储能时，两者共同引起的响应就是全响应。全响应对应于二阶微分方程的全解，等于其强制分量与自由分量之和，也等于零输入响应与零状态响应之和。

例： $U_C(0^-)=0,\quad i_L(0^-)=0.$

$U_S(t)=U_S\cdot 1(t)$ 求 $U_C(t)$.



设: $L=1H, C=1F, R$ 分别为 $1\Omega, 2\Omega, 3\Omega.$

解: 电路方程 $LC\dfrac{\mathrm{d}^2U_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\dfrac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}+U_C=U_S$ (二阶非齐次方程).

方程解=特解+通解

方程特解 (稳态解): $U_C'=U_S$

通解: 1>. 当 $R=3\Omega, R>2\sqrt{\dfrac{L}{C}}=2$ (过阻尼)

$$S_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{(\frac{R}{2L})^2-\frac{1}{LC}}=-1.5\pm\sqrt{(1.5)^2-1}$$

$S_1 = -0.38,$

$S_2 = -2.62$

$$U_C(t) = U_S + K_1 e^{-0.38t} + K_2 e^{-2.62t}$$

初始条件: $U_C(0^+) = 0,\quad \left.\dfrac{dU_C}{dt}\right|_{t=0^+} = 0$ 代入解出得:

$$U_C(t) = U_0 - 1.17Ue^{-0.38t} + 0.17U_0 e^{-2.62t}$$

2>.当 $R = 2\Omega, R = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}} = 2$ 临界阻尼, $S_1 = S_2 = -\dfrac{R}{2L} = -1$

$$U_C(t) = U_0 + (A_1 + A_2 t)e^{-t}$$

由初始条件: $U_C(0) = 0,\quad \left.\dfrac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$

得: $U_C(t) = U_0 - U_0(1+t)e^{-t}$

3>.当 $R=1\Omega \quad R<2\sqrt{\frac{L}{C}}=2$ ，欠阻尼振荡

$$\alpha=\frac{R}{2L}=\frac{1}{2},\omega_d=\sqrt{\frac{1}{LC}-\alpha^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$U_C(t)=U_0+Ae^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\theta).\qquad U_C(0)=0,\quad \left.\frac{dU_C}{dt}\right|_{\tau=0}=0$$

$$\begin{cases}0=U_0+A\sin\theta\\ 0=-\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\end{cases}\qquad \begin{cases}\theta=tg^{-1}\sqrt{3}=60^\circ\\ A=-\frac{2}{\sqrt{3}}U_0\end{cases}$$

$$U_C(t)=U_0-\frac{2}{\sqrt{3}}U_0e^{-\frac{t}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t+60^\circ)$$

当 $\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\pi}{3}=\pi$ 即 $t=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}=2.41s$ 时， $U_C(2.41)=U_0$

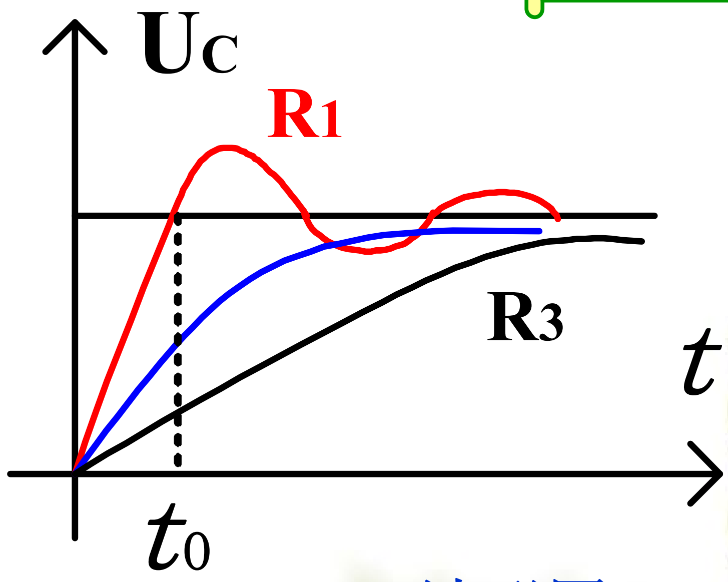
讨论: 减小R可使系统响应加快, 在

$t_0 = 2.41s$ 时,

$R = 1\Omega, U_C = U_S;$

$R = 2\Omega, U_C = 0.69U_S;$

$R = 3\Omega, U_C = 0.53U_S.$



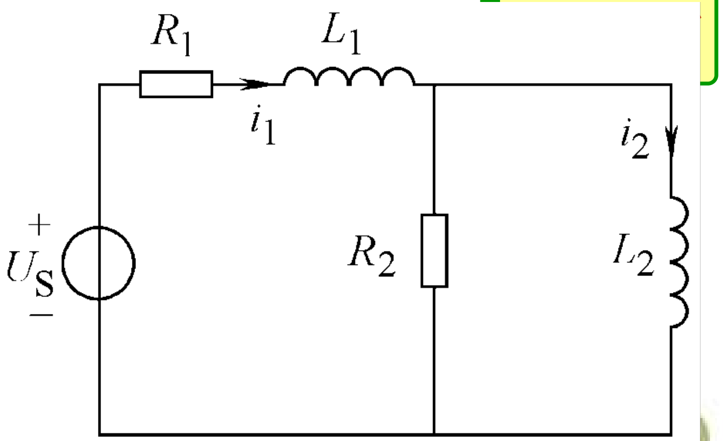
波形图

随着*R*减小, 系统出现振荡, *R*越小, 超调量越大.

响应速度与超调量是互相关联的,在系统设计时应考虑二者之间的关。

例：如图电路，$R_1 = 3\Omega, R_2 = 1\Omega$

$L_1 = 0.5\text{H}, L_2 = 0.2\text{H}, U_S = 7 \cdot 1(t)\text{V}$



求 $t>0$ 时的 $i_2(t)$。

解： $t<0$ 时，电路处于稳态，有

$$i_1(0_-) = i_2(0_-) = 0\text{A}$$

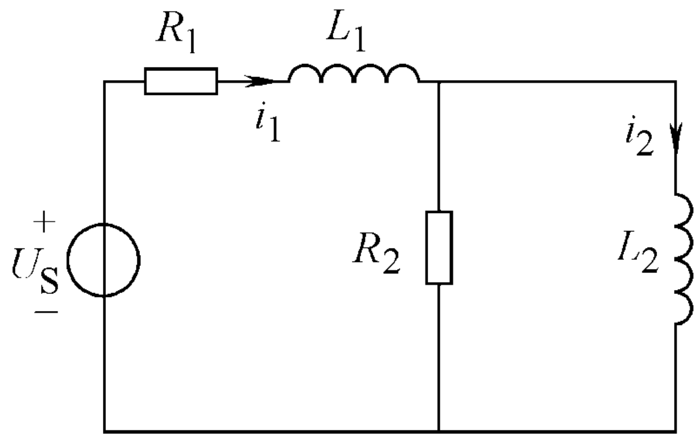
根据换路定则

$$i_1(0_+) = i_1(0_-) = 0\text{A}, \quad i_2(0_+) = i_2(0_-) = 0\text{A}$$

$t>0$时

$$\frac{di_2}{dt}(0_+)=\frac{u_{L2}(0_+)}{L_2}=\frac{R_2(i_1(0_+)-i_2(0_+))}{L_2}$$

$$=0\text{A}/\text{s}$$



当 $t\to\infty$，电路趋于稳态，应有 $i_{2p}=\frac{7}{3}\text{A}$

当$t>0$后，列写KVL与KCL方程如下：

$$R_1i_1+L_1\frac{di_1}{dt}+L_2\frac{di_2}{dt}=U_S,\quad R_2(i_1-i_2)=L_2\frac{di_2}{dt}$$

即 $$\frac{d^2i_2}{dt^2}+13\frac{di_2}{dt}+30i_2=70$$

齐次方程根 $s_1=-3,\quad s_2=-10$

齐次方程通解 $i_{2h}(t)=A_1e^{-3t}+A_2e^{-10t}$

特解为： $i_{2p}(t)=\dfrac{7}{3}\mathrm{A}$

方程全解: $i_2(t)=i_{2P}(t)+i_{2h}(t)=\dfrac{7}{3}+A_1e^{-3t}+A_2e^{-10t}$

由初始条件，

$$i_2(0_+) = \frac{7}{3} + A_1 + A_2 = 0$$

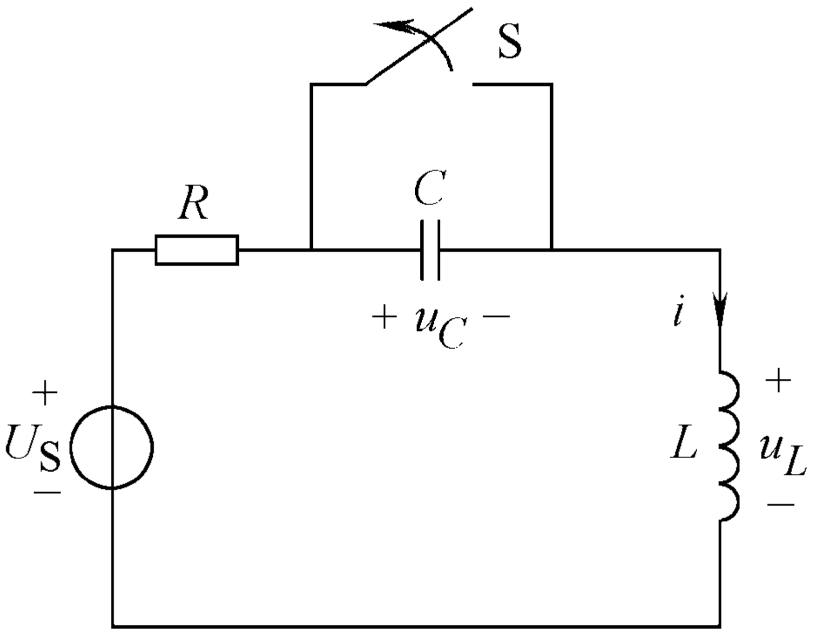
$$\frac{di_2}{dt}(0_+) = -3A_1 - 10A_2 = 0$$

解得:

$$i_2(t) = \frac{7}{3} - \frac{10}{3}e^{-3t} + e^{-10t}\ \text{A} \qquad t \geq 0$$

6.4 应用举例

如图所示RLC串联电路。



设 $U_S = 12\text{V}$， $R = 4\Omega, L = 8\text{mH}, C = 1\mu\text{F}$， $t = 0$ 时开关S打开。

显然，给定初始条件为

$$i(0_+) = i(0_-) = 3\text{A}, \quad u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0\text{V}$$

$$\frac{di(0_+)}{dt} = 0$$

当 $t \to \infty$ 时，系统到达稳态，此时 $i_p = 0\text{A}$

列写KVL方程并整理之，可得

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 500\frac{di}{dt} + 1.25 \times 10^8 i = 0$$

因为 $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ ，电路为欠阻尼响应。求解上式可得

$$i(t) = e^{-250t}(3\cos 11178t + 0.0671\sin 11178t)\ \mathrm{A}$$

电感两端的电压为

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = -268e^{-250t}\sin 11178t\ \mathrm{V}$$

当正弦函数值为1时，电感电压达到峰值，约259V。利用变压器，可以将此电压值提升到更高的水平。