# Wyznaczanie Przyspieszenia Ziemskiego Za Pomocą Wahadła Rewersyjnego

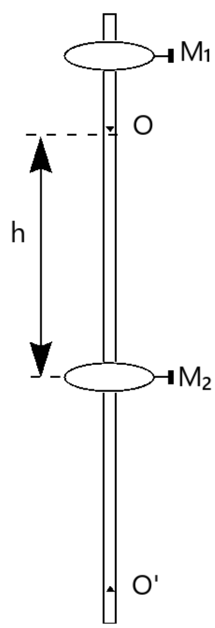

## Abstrakt

W tym eksperymencie wyznaczono wartość przyspieszenia ziemskiego ($g$) za pomocą wahadła rewersyjnego. Otrzymana wartość wyniosła $9,7394 \pm 0,0265[\frac{m}{s^2}]$. Ta metoda oferuje większą precyzję w porównaniu z tradycyjnym wahadłem matematycznym, eliminując pewne założenia inherentne w tym drugim. Eksperyment polegał na pomiarze okresu oscylacji dla różnych długości wahadła, a uzyskane wartości zostały następnie wykorzystane do obliczenia wartości $g$ przy użyciu zasad ruchu wahadła rewersyjnego i analizy niepewności.


---

## Wstęp

Wyznaczenie przyspieszenia ziemskiego ma istotne znaczenie w różnych dziedzinach naukowych i inżynieryjnych. Podczas gdy tradycyjna metoda często polega na użyciu wahadła matematycznego, wahadło rewersyjne zapewnia bardziej precyzyjne podejście poprzez eliminację pewnych założeń. Polega ona na zawieszeniu wahadła na dwóch różnych punktach zawieszenia i pomiarze okresu drgań dla każdej pozycji zawieszenia.




Rysunek poglądowy wahadła rewersyjnego.

## Użyte Wyposażenie

- Wahadło rewersyjne
- Stoper o precyzji $\Delta T = 0.01[s]$
- Wskaźnik milimetrowy przytwierdzony do wahadła rewersyjnego o precyzji $\Delta = 0.1[cm]$

---

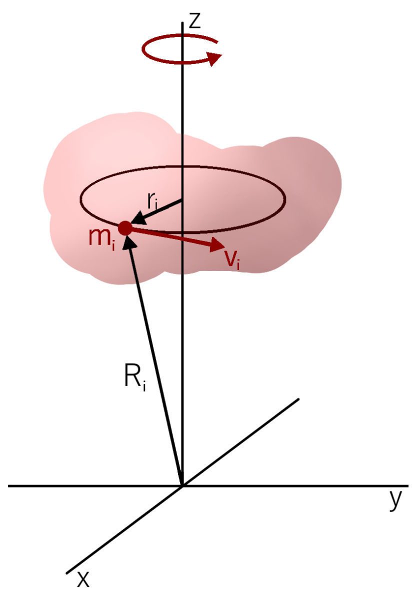
# Tło teoreytyczne eksperymentu

**Dynamika Ruchu Obrotowego**

**Bryła sztywna** to ciało fizyczne, w którym elementy (punkty materialne) są nieruchomo połączone ze sobą i nie mogą się względem siebie przemieszczać. W skrócie, bryła sztywna jest dosłownie sztywna, co oznacza, że nie ulega deformacjom ani plastycznym przemieszczeniom.

Kiedy taka bryła obraca się wokół określonej osi, każdy punkt materialny (z wyjątkiem tych bezpośrednio na osi obrotu) porusza się po okręgu, przy czym kierunek ruchu jest prostopadły do osi obrotu. Środki tych okręgów leżą na osi obrotu.

Promienie wodzące, czyli wektory łączące punkty na obwodzie okręgu z osią obrotu (oznaczone jako $r_i$), zakreślają w danym przedziale czasu takie same kąty. *Dlatego też prędkość kątowa i przyspieszenie kątowe są dla wszystkich punktów bryły jednakowe.* Można to zauważyć na podstawie rysunku poniżej:




---

**Moment Bezwładności**

Do opisu ruchu obrotowego bryły sztywnej służą m.in. moment bezwładności.

Moment bezwładności; co zmienia w zależności od jego wartości:

- **Wysoka wartość** momentu bezwładności powoduje, że *ciężko jest zmienić* ruch obrotowy danego ciała wokół osi.
- **Niska wartość** momentu bezwładności pozwoli w *łatwy sposób* zmieniać jego prędkość w ruchu obrotowym wokół tej osi.

Moment bezwładności to stosunek długości i masy, opisywany literką $I$

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

W powyższym wzorze $m_i$ oznaczają masę fragmentów ciała oddalonych od osi obrotu o $r_i$.

---

### Twierdzenie Steinera

Pozwala wyliczyć moment bezwładności obiektu względem osi równoległej.

Moment bezwładności względem osi równoległej do osi przechodzącej przez środek masy jest sumą momentu bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy oraz iloczynu masy i kwadratu odległości pomiędzy osiami:

$$I_o = I_r + md^2$$

$I_o$ - moment bezwładności osi przechodzącej przez środek masy
$I_r$ - moment bezwładności osi równoległej do osi $I_o$
$m$ - masa bryły
$d$ - odległość między osiami $I_o$ i $I_r$

---

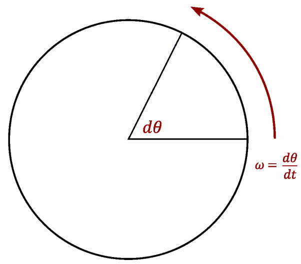
### Wahadło fizyczne - Równanie Ruchu

$$I\frac{d^2 0}{dt^2} + mgdsin0 = 0$$

$I$ - Moment Bezwładności
$\frac{d^2 0}{dt^2}$ - Przyspieszenie kątowe (na rysunku $\omega$ - szybkość zmiany prędkości ruchu obrotowego)
$m$ - masa wahadła
$g$ - przyspieszenie ziemskie

$d$ - odległość od górnej części wahadła do środka masy
$0$ - pionowe przemieszczenie kątowe

Dla małych kątów $\sin(0) \approx 0$, więc można go pominąć.




**Wahadło Fizyczne - Okres Ruchu**

Wyznaczanie okresu drgań wahadła polega na zmierzeniu czasu trwania kilku lub kilkudziesięciu wahnięć i podzieleniu wyniku tego pomiaru przez liczbę wahnięć.

$$T = \frac{t_n}{n}$$

$n$ - liczba wahnięć.
$t_n$ - czas trwania n ilości wahnięć.

Wyprowadzenie wzoru na okres drgań:

*Warto wspomnieć że* $\omega = \frac{2\pi}{T}$ *i określa jak szybko (w radianach) wahadło fizycznie się porusza*
oraz: $\omega^2 = \frac{mgd}{I}$
stąd:

$$I\frac{d^2 0}{dt^2} + \omega^2 = 0$$

a więc okres drgań ruchu, po podstawieniu $\omega = \frac{2\pi}{T}$ będzie wynosił:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

$I$ - Moment Bezwładności
$m$ - masa wahadła
$g$ - przyspieszenie ziemskie
$d$ - odległość od górnej części wahadła do środka masy

**Wahadło Fizyczne - Długość Zredukowana Wahadła**

Długość zredukowana $L$ wahadła fizycznego jest równa takiej długości wahadła matematycznego, które posiada ten sam okres drgań co dane wahadło fizyczne.

$$L = \frac{I}{md}$$

$I$ - Moment Bezwładności
$m$ - masa wahadła
$d$ - odległość od górnej części wahadła do środka masy

W przypadku używanego w eksperymencie wahadła rewersyjnego, długość zredukowana $L = 129[cm]$

Okres drgań wahadła matematycznego:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$L$ - Długość wahadła
$g$ - przyspieszenie ziemskie

Wzór ten zostanie wykorzystany później w sprawozdaniu, w celu przekształcenia go i wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego na jego podstawie.

---

# Przebieg eskperymentu

1. **Początkowe Pomiaru**: Zmierzono czas dziesięciu okresów drgań wahadła w dwóch różnych pozycjach (pozycja 1 i pozycja 2).
2. **Inkrementacja Pomiarów**: Następnie, przesuwając pozycję wahadła o 8 cm, powtórzono pomiary.
3. **Dodatkowe Precyzowanie Pomiarów**: Dla pozycji, w których różnica czasów drgań była minimalna, dokonano dodatkowych pomiarów z inkrementacją co 1 cm.
4. **Pomiar Czasu 50 Okresów**: Dla najbardziej precyzyjnych pozycji wahadła zmierzono czas trwania 50 okresów drgań.
5. **Ustalenie odległości między ostrzami wahadła rewersyjnego:** Na końcu, zmierzono wartość odległości między ostrzami O i O' wahadła rewersyjnego.

W ten sposób otrzymano następujące wyniki:

| h [cm] | 10T [s] | 10T' [s] | T [s] | T' [s] | T - T' [s] |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 31.83 | 22.81 | 3.183 | 2.281 | 0.902 |
| 18 | 20.62 | 22.35 | 2.062 | 2.235 | -0.173 |
| 26 | 18.64 | 22.43 | 1.864 | 2.243 | -0.379 |

| h [cm] | 10T [s] | 10T' [s] | T [s] | T' [s] | T - T' [s] |
|---|---|---|---|---|---|
| 34 | 18.08 | 22.40 | 1.808 | 2.240 | -0.432 |
| 42 | 17.81 | 21.60 | 1.781 | 2.160 | -0.379 |
| 50 | 18.22 | 21.35 | 1.822 | 2.135 | -0.313 |
| 58 | 18.67 | 21.60 | 1.867 | 2.160 | -0.293 |
| 66 | 19.46 | 21.74 | 1.946 | 2.174 | -0.228 |
| 74 | 19.92 | 21.65 | 1.992 | 2.165 | -0.173 |
| 82 | 20.58 | 21.68 | 2.058 | 2.168 | -0.110 |
| 90 | 21.41 | 22.03 | 2.141 | 2.203 | -0.062 |
| 98 | 22.07 | 22.23 | 2.207 | 2.223 | -0.016 |
| 106 | 22.30 | 22.43 | 2.240 | 2.243 | -0.013 |
| 114 | 22.98 | 22.90 | 2.298 | 2.290 | 0.008 |

Warto pamiętać o niepewności pomiaru wynoszących odpowiednio:

$$\Delta h = \pm 0.01 cm$$

$$\Delta T = \Delta T' = \pm 0,01 s$$

Niepewność pomiarowa wynika z dokładności użytej miary, oraz błędu pomiarowego wynikającego z powodu używania ręcznego stopera.

Następnie dla wartości zaczynając od $h = 15$ oraz $h = 112$, powstają tabele z inkrementacją o $1 cm$, gdyż różnice $T - T'$ dla tych wartości są najmniejsze:

| h [cm] | 10T [s] | 10T' [S] | T [s] | T' [s] | T - T' [s] |
|---|---|---|---|---|---|
| 111 | 22.84 | 22.73 | 2.284 | 2.273 | 0.011 |
| 112 | 23.08 | 23.03 | 2.308 | 2.303 | 0.005 |

| h [cm] | 10T [s] | 10T' [S] | T [s] | T' [s] | T - T' [s] |
|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 24.06 | 22.62 | 2.406 | 2.262 | 0.144 |
| 15 | 22.73 | 22.40 | 2.273 | 2.240 | 0.033 |
| 16 | 21.90 | 22.46 | 2.190 | 2.246 | -0.056 |
| 17 | 21.42 | 22.43 | 2.142 | 2.243 | -0.101 |

Dzięki tym tabelom wywnioskowano, że najmniejsze różnice w wartości $T - T'$ wypadają dla $h = 15$ oraz $h = 112$.

Zatem, dla tych wartości zmierzono czas 50 okresów $T$ oraz $T'$, co zaprezentowano w tabelach poniżej:

| h [cm] | 50T [s] | 50T' [s] | T [s] | T' [s] | T - T' [s] |
|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 115.08 | 113.59 | 2.3016 | 2.2718 | 0.0298 |
| 15 | 114.93 | 113.84 | 2.2986 | 2.2768 | 0.0218 |
| 15 | 114.90 | 113.94 | 2.2980 | 2.2788 | 0.0192 |
| **h [cm]** | **50T [s]** | **50T' [s]** | **T [s]** | **T' [s]** | **T - T' [s]** |
| 112 | 115,68 | 114.84 | 2.3136 | 2,2968 | 0.0168 |
| 112 | 115,68 | 115.12 | 2.3136 | 2.3024 | 0.0112 |
| 112 | 115.77 | 115.01 | 2.3154 | 2.3002 | 0.0152 |

Natomiast na podstawie tabel z wartościami $50T$ i $50T'$, wyliczono średnią wartość okresu jak i odchylenie standardowe średniej.

Aby wyznaczyć pojedynczą wartość okresu drgań wahadła rewersyjnego wyliczono średnią arytmetyczną $\overline{T}_{50} = T_{50} + T'_{50}$

Dodatkowo dzięki wiedzy, że **odchylenie standardowe** liczb od ich średniej arytmetycznej $S$, to pierwiastek kwadratowy z wariancji, obliczono odchylenie standardowe dla kolejnych rzędów tabeli używając wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - S)^2 + (x_2 - S)^2 + \ldots + (x_n - S)^2)}{n}}$$

| h [cm] | 50T [s] | 50T' [s] | $\overline{T}_{50}$ [s] | $\sigma_{\overline{T}}$ |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 115.08 | 113.59 | 114.34 | 1,053589104 |
| 15 | 114.93 | 113.84 | 114.39 | 0,7707463915 |
| 15 | 114.90 | 113.94 | 114.42 | 0,6788225099 |
| 112 | 115.68 | 114.84 | 115.26 | 0,5939696962 |
| 112 | 115.68 | 115.12 | 115.40 | 0,3959797975 |
| 112 | 115.77 | 115.01 | 115.,39 | 0,5374011537 |

Otrzymana tabela z wyliczonymi średnimi wartościami oraz odchyleniem standardowym.

Wyliczono średnią wartość odchylenia standardowego, która wynosi:

$$\sigma_{\overline{T}} = 0.67175144213 \approx 0.6718$$

Następnie aby uzyskać okres pojedynczego wahnięcia wartość $\overline{T}_{50}$ podzielono przez pięćdziesiąt, oraz dla każdy wynik podstawiono do wzoru na przyspieszenie ziemskie, który można wyliczyć używając wiedzy o długości zredukowanej wahadła fizycznego.
Wiemy, że długość zredukowana L wahadła fizycznego jest równa takiej długości wahadła

matematycznego, które posiada ten sam okres drgań co dane wahadło fizyczne. Zatem wzór na okres drgań wahadła matematycznego można przekształcić w następujący sposób:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T^2 = \left(2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right)^2$$

$$T^2 = 4\pi\frac{l}{g}$$

$$T^2 \cdot g = 4\pi^2 l$$

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

Czyli wzór, którego użyto do wyliczenia przyspieszenia ziemskie to:

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

$L$ - Długość zredukowana L wahadła fizycznego
$T$ - Średnia z wyznaczonych okresów z dwóch pozycji wahadła

Kolejno w celu uwzględnienia błędu pomiaru wynikającego z niedokładności przyrządu - sekundomierza, skorzystano ze wzoru na obliczenie uogólnionej niepewności standardowej:

$$u_{\overline{T}} = \sqrt{S_{\overline{T}}^2 + \frac{\Delta_T^2}{3}}$$

$S_{\overline{T}}$ - Średnia wartość okresu
$\Delta_T$ - wartość niedokładności sekundomierza wynosząca $0,01$.

Natomiast niepewność pomiaru przyspieszenia ziemskie można przedstawić za pomocą *metody różniczki logarytmicznej*, ze wzoru:

$$\Delta g = g(\left|\frac{u_L}{L}\right| + 2\left|\frac{u_T}{\overline{T}}\right|)$$

Gdzie:
$u_L$ - $\frac{\Delta L}{\sqrt{3}}$,
$u_T$ - uogólniona niepewność standardowa podzielona przez pięćdziesiąt,
$\overline{T}$ - średnia wartość jednego okresu,

$L$ - długość zredukowana wahadła fizycznego.
$g$ - wartość przyspieszenia ziemskiego.

Zatem używając wyznaczonego powyżej wzoru na wartość przyspieszenia ziemskiego, wzoru na uogólnioną niepewność standardową oraz metody różniczki logarytmicznej, przedstawiono wyniki
pojedynczych wartości przyspieszenia ziemskiego oraz jego niepewności pomiaru w tabeli poniżej.

| **h [cm]** | **T [s]** | **T' [s]** | $\overline{T}$ **[s]** | $\frac{u_{\overline{T}}}{50}$ | $g[\frac{m}{s^2}]$ | $\Delta g[\frac{m}{s^2}]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 2.3016 | 2.2718 | 2,2867 | 0.04573 | 9.7394 | 0.4490 |
| 15 | 2.2986 | 2.2768 | 2.2877 | 0.04575 | 9.7309 | 0.3936 |
| 15 | 2.2980 | 2.2788 | 2.2884 | 0.04577 | 9.7249 | 0.3934 |
| 112 | 2.3136 | 2.2968 | 2.3052 | 0.04610 | 9.5837 | 0.3876 |
| 112 | 2.3136 | 2.3024 | 2.3080 | 0.04616 | 9.6070 | 0.3886 |
| 112 | 2.3154 | 2.3002 | 2.3078 | 0.04615 | 9.6254 | 0.3893 |

Następnie w celu uzyskania średniej wartości przyspieszenia ziemskiego, wykorzystano wzory na średnią ważoną dyspersyjną, które wyglądają następująco:

$$\overline{g} = \frac{a}{b}$$

$$\overline{\Delta g} = \frac{1}{b}$$

gdzie:
$a = \sum_i \frac{g_1}{(\Delta g_i)^2}$
$b = \sum_i \frac{1}{(\Delta g_i)^2}$

Wyliczając odpowiednio wartości a oraz b otrzymano:
$a = 367.6948$
$b = 37.7533$
oraz wyliczając wartości $\overline{g}$ oraz $\overline{\Delta g}$:

$$\overline{g} = 9.7394$$

$$\overline{\Delta g} = 0.0265$$

Kolejno sprawdzono na poziomie ufności 0.95 hipotezę o zgodności otrzymanej wartości przyspieszenia z wartością tablicową.
Do tego wykorzystano wzór na 95% przedział ufności, który prezentuje się następująco:

$$\overline{g} \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\sigma$ - odchylenie standardowe
$n$ - liczba obserwacji

Podstawiając do wzoru:

$$\overline{g} \pm 0.5376$$

Przyspieszenie ziemskie uznawane za tablicowe dla miejsca wykonania eksperymentu - Gdańska wynosi $g = 9,814$.
Zatem porównując otrzymany wynik $\overline{g} = 9.7394 \pm 0.0265$ do tablicowego, używając wyliczonej powyżej hipotezy na poziomie ufności 0.95, można stwierdzić że wynik mieści się w przedziale ufności, jednak nie jest dokładny.
Margines błędu pomiaru $g$, najpewniej wynikający z wielu nałożonych na siebie czynników, w tym:

- błędu ludzkiego (reakcja oko-ręka), przy użyciu stopera ręcznego, który wynosi średnio $0.23[s]$,
- niepewności pomiarowych,
- oporu powietrza wpływającego na wahadło rewersyjne,
- położenie geograficzne,
- miejsca zaczepienia wahadła na ostrzach, które posiada margines błędu z powodu jego braku punktowości.

---

# Podsumowanie i Wyniki

- Obliczono średni okres drgania oraz odchylenie standardowe .
- Korzystając ze średnich okresów i długości wahadła, obliczono przyspieszenie ziemskie dla każdej pozycji, uwzględniając niepewności.
- Obliczono średnią ważoną, aby uzyskać ostateczną wartość $g$ wraz z jej niepewnością.
- Otrzymaną wartość porównano z wartością standardową $g$.

Po przeprowadzeniu eksperymentu uzyskano następujące wyniki:

- Średnie przyspieszenie ziemskie: $g = 9,7394 \pm 0,0265, \mathrm{m/s}^2$
- Średnia niepewność pomiarowa: $\Delta g = 0,0265, \mathrm{m/s}^2$

Dzięki wykorzystaniu metody wahadła rewersyjnego i zastosowaniu zasad dynamiki ruchu obrotowego, możemy precyzyjnie wyznaczyć przyspieszenie ziemskie $g$. Ten eksperyment dostarcza cennych informacji na temat zachowania się układów wahadłowych i demonstruje zastosowanie koncepcji teoretycznych w fizyce eksperymentalnej.