



TD6

06

## ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

### 1. Kiến thức cần nhớ

Gia tốc là đạo hàm của vận tốc:

$$a(t) = v'(t) \Rightarrow v(t) = \int a(t)dt$$

Vận tốc là đạo hàm của quãng đường

$$v(t) = s'(t) \Rightarrow s(t) = \int v(t)dt \text{ nếu } v(t) \geq 0 \forall t$$

Trong trường hợp  $v(t)$  có thể âm, tức là vật không chuyển động theo 1 hướng nhất định, khi đó tổng quãng đường đi được của vật trong thời gian từ  $t = a$  đến  $t = b$  là

$$s = \int_a^b |v(t)|dt$$

Khi ta xét  $\int_a^b v(t)dt$  thì giá trị này là độ dịch chuyển của vật, nó thể hiện vị trí của vật tại thời điểm  $t = b$  so với vị trí tại thời điểm  $t = a$ .

**Ví dụ:** Một vật chuyển động với vận tốc  $v(t) = t^2 - 4t + 3$  (m/s). Tính quãng đường vật di chuyển được trong 5 giây đầu tiên.

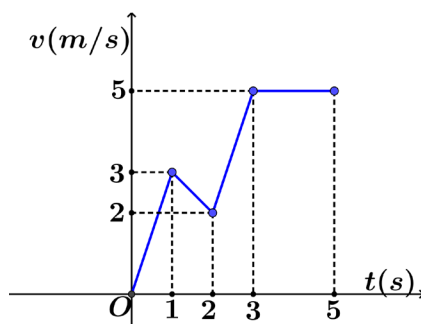
Giải

Quãng đường vật đi được trong 5 giây đầu là:

$$s = \int_0^5 |v(t)|dt = \int_0^5 |t^2 - 4t + 3| dt = 9, (3) \text{ m.}$$

### 2. Bài tập luyện tập

1. Một vật chuyển động trên 1 đường thẳng nằm ngang. Đồ thị mô tả mối quan hệ giữa vận tốc và thời gian như hình vẽ.



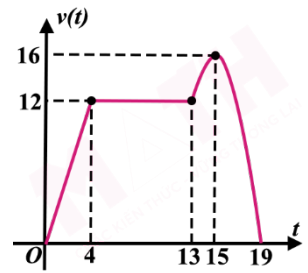
Sau 5 giây, vật đi được quãng đường bằng bao nhiêu mét?

➡ Đáp số: .....

2. Một máy bay vào vị trí cất cánh chuyển động trên đường băng với vận tốc  $v(t) = 2t^2 + t$  (m/s), với  $t$  tính bằng giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết máy bay đạt vận tốc 105(m/s) thì nó rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng gần nhất với giá trị nào dưới đây?
- A. 163 m.                      B. 303 m.                      C. 253 m.                      D. 483 m.
3. Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái xe phát hiện có hàng rào chắn ngang đường ở phía trước cách xe 45 m (tính từ đầu xe tới hàng rào) nên người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc  $v(t) = -5t + 20$  (m/s), trong đó  $t$  là thời gian được tính từ lúc người đạp phanh. Khi xe dừng hẳn, khoảng cách từ xe đến hàng rào là bao nhiêu mét?
- A. 3 m.                      B. 6 m.                      C. 4 m.                      D. 5 m.
4. Người ta cho một chiếc xe điện mô hình chạy thử nghiệm trên một đường thẳng trong 24 giây với vận tốc  $v(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & \text{nếu } 0 \leq t \leq 8 \\ 4 & \text{nếu } 8 < t < 16 \\ -\frac{1}{2}t + 12 & \text{nếu } 16 \leq t \leq 24 \end{cases}$  (decimet/giây), trong đó  $t$  là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc xe bắt đầu chuyển động. Trong 24 giây chạy thử nghiệm đó, chiếc xe mô hình đi được quãng đường bao nhiêu decimet?
- ➡ Đáp số: .....
5. Một ô tô bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc  $v_0$ , sau 6 giây thì gặp chướng ngại vật nên ô tô đi chậm dần với vận tốc  $v(t) = -2,5t + a$  (m/s), ( $t \geq 6$ ) cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc bắt đầu chuyển động đến lúc dừng hẳn thì ô tô đi được quãng đường là 80 (m). Giá trị của  $v_0$  bằng bao nhiêu (m/s)?
- A. 35 (m/s).                      B. 10 (m/s).                      C. 20 (m/s).                      D. 25 (m/s).
6. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật  $v(t) = \frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t$  (m/s), trong đó  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng  $a$  (m/s<sup>2</sup>) ( $a$  là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng
- A. 22 (m/s).                      B. 15 (m/s).                      C. 10 (m/s).                      D. 7 (m/s).



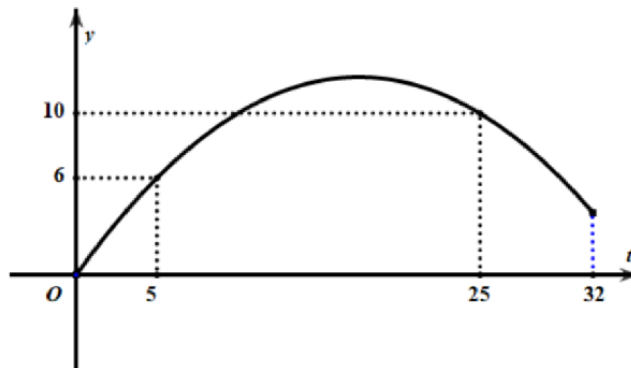
7. Một chất điểm chuyển động thẳng trong 19 giây với vận tốc  $v(t)$  (đơn vị: m/s) là hàm số phụ thuộc thời gian  $t$  (đơn vị: giây) có đồ thị như hình vẽ.



- Tại thời điểm  $t = 19$  giây, vận tốc của chất điểm bằng 16 m/s.
  - Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian từ 0 giây đến 4 giây bằng 24 m.
  - Trong khoảng thời gian từ 13 giây đến 19 giây, đồ thị của  $v(t)$  là một phần của đường cong parabol. Khi đó  $v(t) = -t^2 + 30t - 209$  (m/s).
  - Quãng đường chất điểm đi được từ lúc xuất phát đến khi dừng lại bằng 204 m.
8. Hai vận động viên A và B tham dự cuộc thi chạy bộ trên một đường thẳng, xuất phát cùng một thời điểm, cùng vạch xuất phát và chạy cùng chiều với vận tốc lần lượt là  $v_A$  và  $v_B$ . Trong khoảng thời gian 32 giây chạy đầu tiên ta có

$$v_A = \frac{1}{450}t^3 - \frac{47}{450}t^2 + \frac{64}{45}t \text{ (m/s)} \text{ và } v_B = at^2 + bt \text{ (m/s)}$$

Với  $t \geq 0$  là thời gian tính bằng giây. Hàm số  $y = at^2 + bt$  có đồ thị là một phần của parabol như hình vẽ bên.

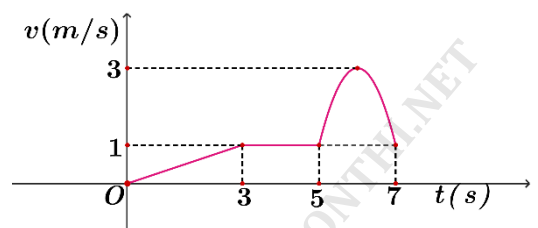


- Tốc độ chạy lớn nhất của vận động viên A trong khoảng 20 giây tính từ khi bắt đầu xuất phát là 6 m/s.
- Sau 30 giây tính từ khi bắt đầu xuất phát, hai vận động viên cách nhau một khoảng 120 m.
- $a = -0,2$ .
- Quãng đường vận động viên B chạy được trong 30 giây tính từ khi bắt đầu xuất phát là 250 m (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Nguồn: Đề khảo sát chất lượng Toán 12 lần 2 năm 2024 – 2025 sở GD&ĐT Ninh Bình

9. Một vật bắt đầu chuyển động trên đường thẳng AB, đồ thị thể hiện mối quan hệ giữa vận tốc theo thời gian trong 7 giây đầu tiên của vật đó như hình vẽ. Biết trên đoạn  $[5; 7]$ , đồ thị là một phần của parabol có phương trình

$$y = at^2 + bt + c.$$

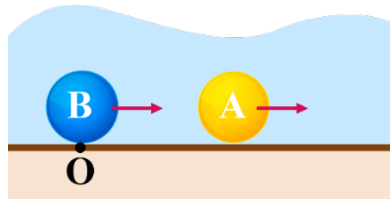


- Vào 3 giây đầu tiên, vật chuyển động thẳng đều.
- Quãng đường vật đi được trong 5 giây đầu tiên là 3,5 m.

c)  $a + b + c < -50$ .

d) Quãng đường chuyển động của vật từ giây thứ 5 tới giây thứ 7 là  $\frac{14}{3}$  m.

- 10.** Một chất điểm  $A$  xuất phát từ  $O$ , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật  $v(t) = \frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t$  (m/s), trong đó  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc  $A$  bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm  $B$  cũng xuất phát từ  $O$ , chuyển động thẳng cùng hướng với  $A$  nhưng chậm hơn 10 giây so với  $A$  và có gia tốc bằng  $a$  (m/s<sup>2</sup>) ( $a$  là hằng số). Biết sau khi  $B$  xuất phát 15 giây thì đuổi kịp  $A$ .



- a) Vận tốc của chất điểm  $B$  được tính theo công thức  $v_B(t) = at$  (với mốc thời gian tính từ lúc  $A$  bắt đầu chuyển động).
- b) Quãng đường mà chất điểm  $A$  đi được trong 25 giây là  $\frac{375}{2}$  m.
- c) Quãng đường  $S_B(t)$  mà chất điểm  $B$  đi được trong thời gian  $t$  giây ( $t > 0$ ) kể từ khi xuất phát được tính theo công thức  $S_B(t) = \int_0^t v(t) dt$ .
- d) Vận tốc của chất điểm  $B$  tại thời điểm đuổi kịp chất điểm  $A$  là 25 (m/s).