



IA4 4

CÁC ĐỒ THỊ HÀM SỐ KINH ĐIỂN



KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

1. Kiến thức cần nhớ

<p>✧ Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0), f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c; \Delta' = b^2 - 3ac$</p>			
	$\Delta' < 0$	$\Delta' = 0$	$\Delta' > 0$
$a > 0$			
$a < 0$			
<p>✧ Điểm uốn của đồ thị hàm số bậc ba là tâm đối xứng của đồ thị.</p> <p>Xét $f''(x) = 6ax + 2b; f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$.</p> <p>Điểm $U\left(-\frac{b}{3a}; f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$ là điểm uốn của đồ thị</p> <p>✧ Đồ thị hàm số bậc ba có thể không có cực trị, hoặc có thể có đúng 2 điểm cực trị.</p>			

2. Ví dụ luyện tập

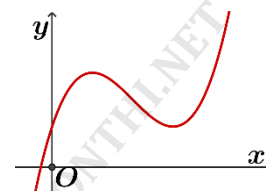
✧ **Ví dụ 1.** Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Trong các số a, b, c, d có bao nhiêu số thực dương?

A. 1.

B. 2.

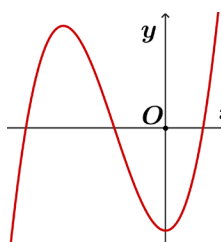
C. 3.

D. 4.

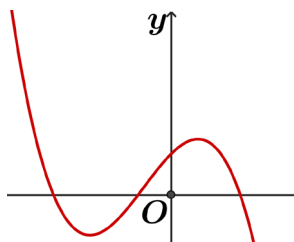




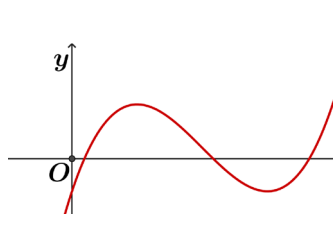
★ **Ví dụ 2.** Đồ thị hàm số $y = x^3 + bx^2 - x + d$ có thể là đồ thị nào trong các đồ thị ở các phương án sau:



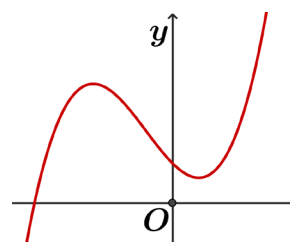
A. Hình 1



B. Hình 2



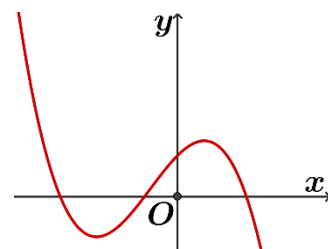
C. Hình 3



D. Hình 4

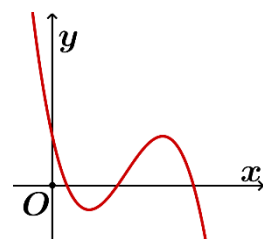
★ **Ví dụ 3 (trắc nghiệm đúng sai).** Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ sau:

- a) $a > 0$.
- b) $d > 0$.
- c) $b > 0$.
- d) $abcd > 0$.



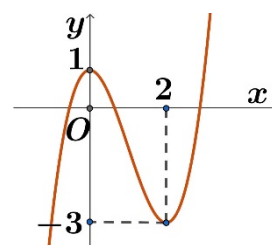
★ **Ví dụ 4 (trắc nghiệm đúng sai).** Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ:

- a) $a > 0$.
- b) $ad < 0$.
- c) $b > 0$.
- d) $b + d > a + c$.



★ **Ví dụ 5 (Trắc nghiệm đúng sai).** Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ sau:

- a) $a > 0$.
- b) $d = 1$.
- c) $a + b + c = -2$.
- d) $f(-1) = -4$.



★ **Ví dụ 6 (Trắc nghiệm điền đáp số).** Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	α	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		0		$-\infty$

\swarrow $f(\alpha)$ \searrow
 \swarrow $f(2)$ \searrow

Biết $f(0) = 4$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + 2b + 3c$.

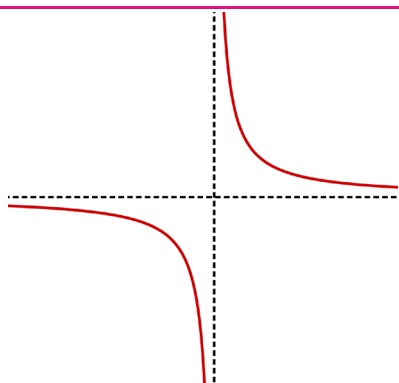
➡ Đáp số:



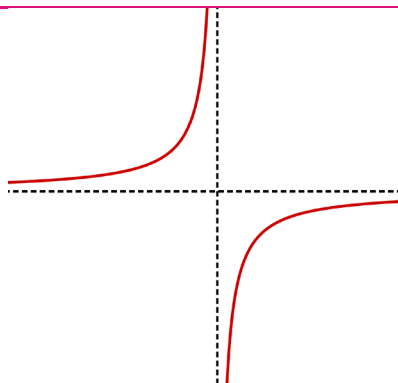
II. Đồ thị hàm số bậc nhất trên bậc nhất

1. Tóm tắt kiến thức

✧ Xét hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} (c \neq 0)$.



$ad - bc < 0$



$ad - bc > 0$

➡ Nhận xét:

★ Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận:

- Tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c}$
- Tiệm cận đứng: $x = -\frac{d}{c}$.

★ Giao điểm hai đường tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị hàm số, hay tâm đối xứng I có tọa độ là $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$.

★ Hàm số $f(x)$ luôn đồng biến (hoặc nghịch biến) trên các khoảng xác định.

2. Ví dụ luyện tập

✧ **Ví dụ 1.** Gọi A là giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+20}{x-5}$ với trục tung, I là giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số. Gọi B là điểm đối xứng với A qua I .

- Tìm tọa độ điểm A .
- Tìm tọa độ điểm I .
- Chứng minh rằng B thuộc đồ thị hàm số đã cho.

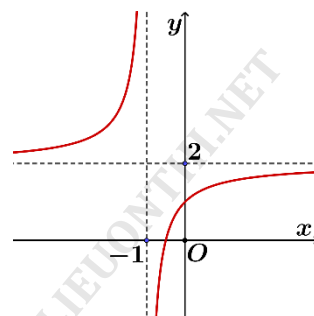
✧ **Ví dụ 2.** Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

B. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

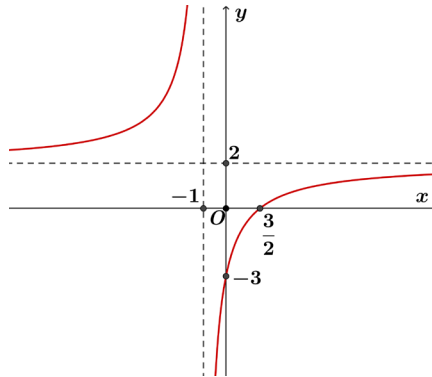
C. $y = \frac{2x-3}{x+1}$.

D. $y = \frac{2x+5}{x+1}$.





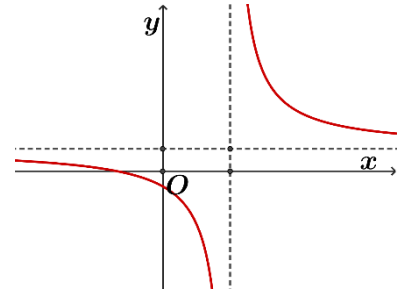
★ **Ví dụ 3 (trắc nghiệm đúng sai).** Biết hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (với $c \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ sau:



- a) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- b) $f(0) = -3$.
- c) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $x = 2$.
- d) $a + b + d = 0$.

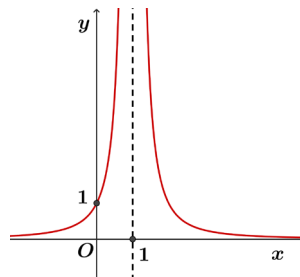
★ **Ví dụ 4 (trắc nghiệm đúng sai).** Cho hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$.

- a) Hàm số $f(x)$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- b) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- c) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ:
- d) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là điểm $I(-3; 1)$.



★ **Ví dụ 5 (trắc nghiệm điền đáp số).** Cho hàm số

$y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ:



Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $A(0; 3)$. Tính $f(2)$.

➡ Đáp số:

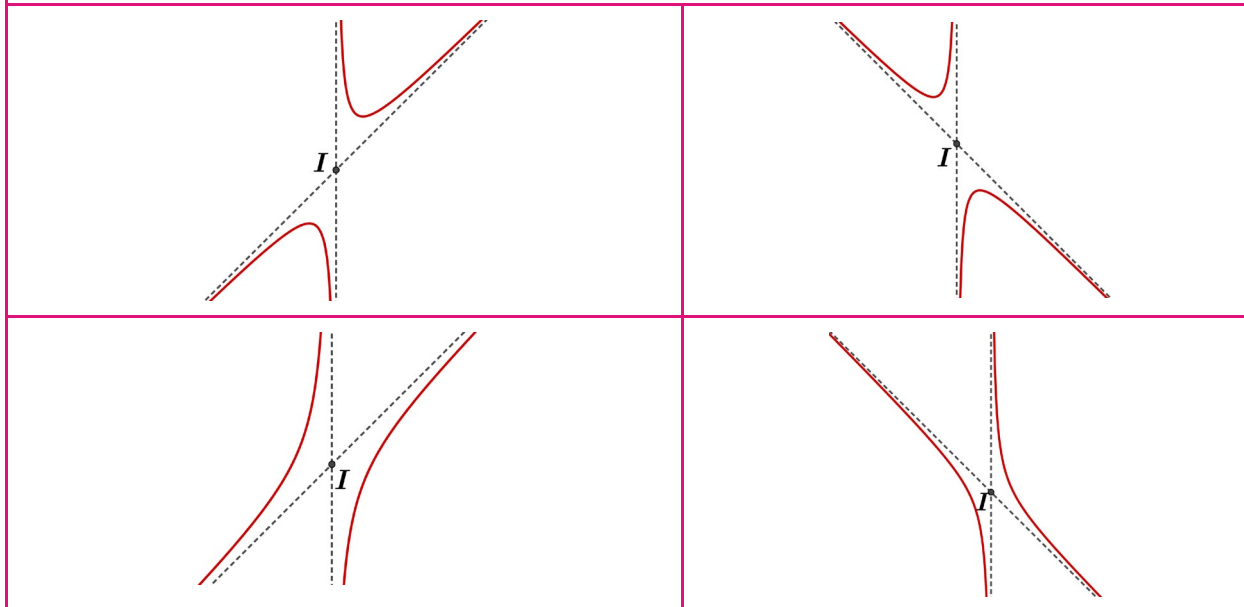
TAILIEUONTHI.NET



III. Đồ thị hàm số bậc hai trên bậc nhất

1. Tóm tắt kiến thức

★ Xét hàm số $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ với $a \neq 0, p \neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu.



➔ Nhận xét: Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận:

- Tiệm cận xiên: Viết lại $f(x) = mx + n + \frac{k}{px + q}$ ($m \neq 0$) thì đồ thị hàm số nhận đường $y = mx + n$ làm đường tiệm cận xiên.
- Tiệm cận đứng: $x = -\frac{q}{p}$.
- Đồ thị hàm số nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.
- Đồ thị hàm số nhận đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng

Lưu ý

1. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị

Nếu đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ có 2 điểm cực trị là A và B , thì phương trình đường thẳng AB là: $y = \frac{(ax^2 + bx + c)'}{(px + q)'} = \frac{2ax + b}{p}$.



2. Mẹo kiểm tra nhanh xem hàm số có cực trị hay không

Xét hàm số $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ với $a \neq 0, p \neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu.

Đặt $g(x) = ax^2 + bx + c$.

- Nếu $a.g\left(-\frac{q}{p}\right) > 0$ thì hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị
- Nếu $a.g\left(-\frac{q}{p}\right) \leq 0$ thì hàm số $f(x)$ không có cực trị.

★ **Ví dụ:** Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 9}{2x + 1}$. Để biết hàm số $f(x)$ có cực trị hay không, ta chỉ cần xét:

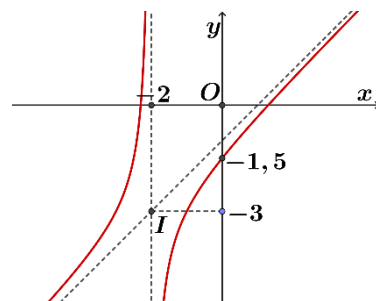
$$a.g\left(-\frac{q}{p}\right) = 1.g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 9 < 0$$

Do đó đồ thị hàm số không có cực trị.

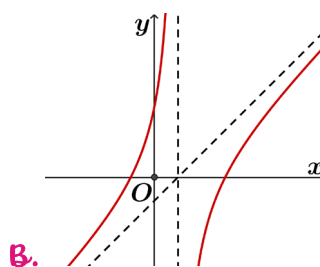
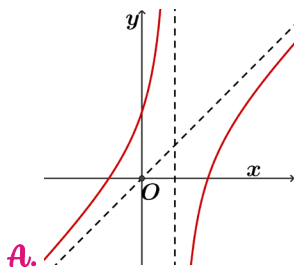
2. Ví dụ luyện tập

★ **Ví dụ 1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

$$y = \frac{x^2 + x - 3}{x + 2}.$$

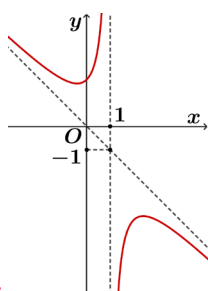


★ **Ví dụ 2.** Đồ thị của hàm số $\frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$ là đồ thị nào trong các đồ thị dưới đây

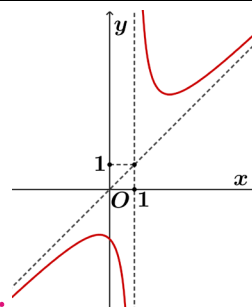




C.



D.



★ Ví dụ 3. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 22x + 1000}{x - 2}$ là điểm có tung độ bằng

A. 20.

B. 22.

C. 24.

D. 26.

★ Ví dụ 4 (câu hỏi trắc nghiệm đúng sai). Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + n}$

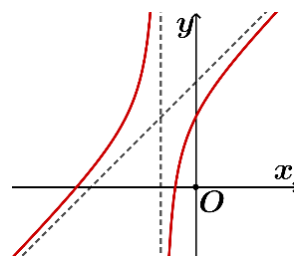
có đồ thị là đường cong như hình vẽ.

a) $n < 0$.

b) $a > 0$.

c) $c > 0$.

d) $b < 0$.



★ Ví dụ 5 (câu hỏi trắc nghiệm đúng sai). Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 2}$ có đồ thị (C).

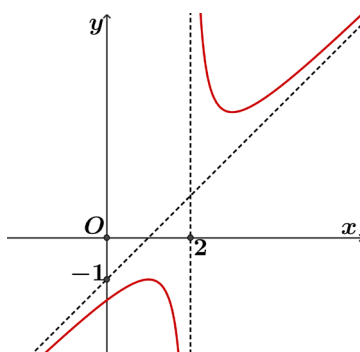
a) Đồ thị (C) có hai đường tiệm cận.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$.

c) Giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị (C) là $I(-2; -6)$.

d) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) bằng $4\sqrt{2}$.

★ Ví dụ 6 (câu hỏi trắc nghiệm đúng sai). Cho đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$ có như hình vẽ.



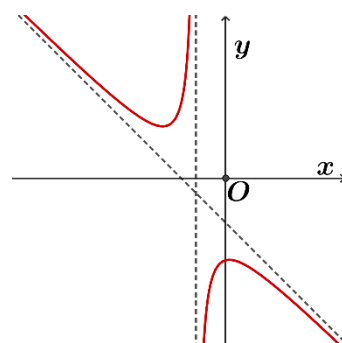
Giá trị của $2a + b + 10d$ bằng bao nhiêu?

➡ Đáp số:



★ Ví dụ 7 (câu hỏi trắc nghiệm đúng sai). Cho hàm số

$$y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d} \text{ có đồ thị như hình vẽ.}$$

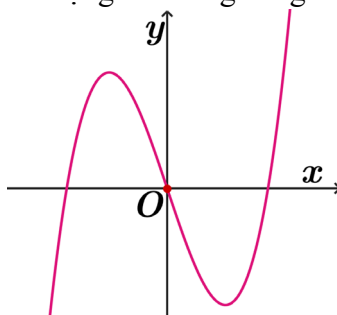


- a) $a > 0$.
- b) $d > 0$.
- c) $c > 0$.
- d) $b < 2ad$.



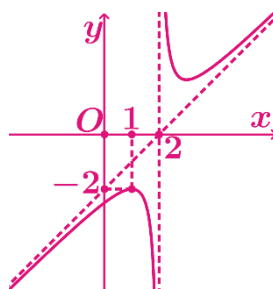
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. Đồ thị hàm số bậc ba nào sau đây có dạng là đường cong như hình vẽ



- A. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
- B. $y = x^3 - 3x$.
- C. $y = -x^3 + 3x^2$.
- D. $y = -x^3 + 3x$.

2. Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ (với $a \neq 0, m \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



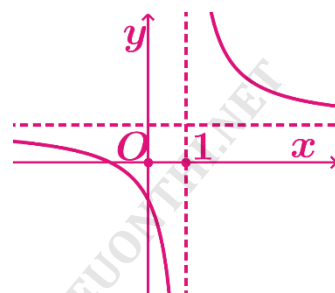
Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là

- A. $y = 2x + 2$.
- B. $y = x - 2$.
- C. $y = 2x - 2$.
- D. $y = x + 2$.

3. Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.

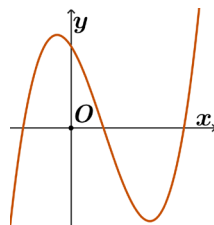
Mệnh đề nào đúng?

- A. $y' > 0, \forall x \neq 1$.
- B. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- C. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- D. $y' < 0, \forall x \neq 1$.



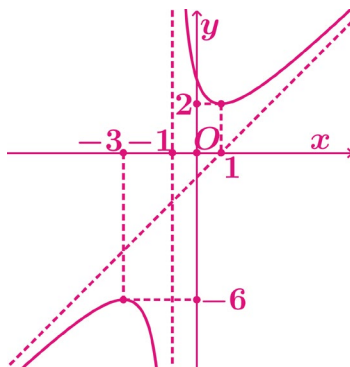


4. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là đúng?



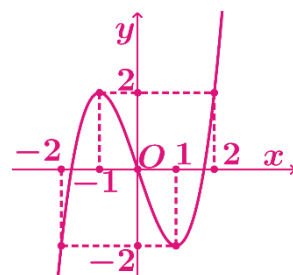
- A. $\begin{cases} b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} b > 0 \\ c < 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} b > 0 \\ c > 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} b < 0 \\ c > 0 \end{cases}$.

5. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



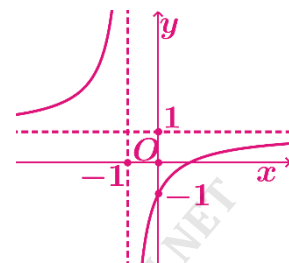
Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên khoảng $(-\infty; -1)$ bằng

- A. 1. B. 2. C. -6. D. -3.
6. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây
- A. $x = -2$. B. $x = -1$.
C. $x = 1$. D. $x = 2$.



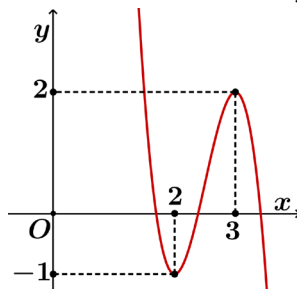
7. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- A. $y = \frac{x-1}{x+1}$. B. $y = \frac{-2x+1}{2x+2}$.
C. $y = \frac{x^2+3x+1}{x+3}$. D. $y = x^3 - 3x^2$.





8. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Giá trị $f(1)$ bằng bao nhiêu?

➡ Đáp số:

9. Cho hàm số $y = \frac{ax+12}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên bên dưới. Hỏi b có thể nhận giá trị nguyên lớn nhất bằng bao nhiêu?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-		-	
$f(x)$		-3		$+\infty$	
			$-\infty$		-3

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

10. Trong các hàm số sau, hàm số nào có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		+		+	
y		$+\infty$		$-\infty$	
	1				1

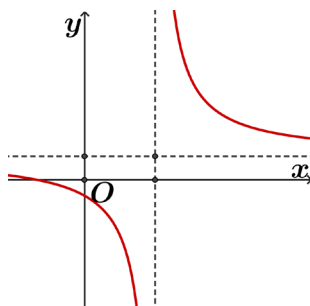
A. $y = \frac{x+1}{x-2}$.

B. $y = \frac{x+3}{x-2}$.

C. $y = \frac{x-1}{x-2}$.

D. $y = \frac{x-3}{x-2}$.

11. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ



A. $\begin{cases} ad < 0 \\ bc < 0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} ad < 0 \\ bc > 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} ad > 0 \\ bc < 0 \end{cases}$.

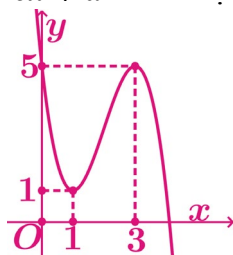
D. $\begin{cases} ad > 0 \\ bc > 0 \end{cases}$.



12. Cho hàm số $y = \frac{2x-224}{x-m}$ có đồ thị là (C_m) . Tìm tổng tất cả các giá trị m nguyên dương sao cho diện tích tứ giác tạo bởi các trục tọa độ và hai đường tiệm cận của đồ thị (C_m) không vượt quá 224 (đvdt).

➡ Đáp số:

13. Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Giá trị của $a + b + c$ là

➡ Đáp số:

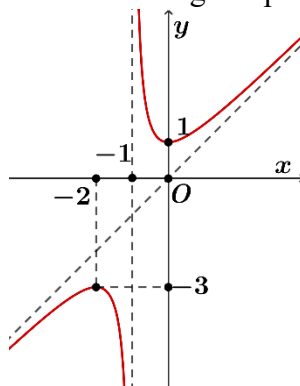
14. Cho đồ thị hàm số

$$f(x) = 5x - 1 + \frac{8}{x-1}$$

có tâm đối xứng là $I(a; b)$. Giá trị $4b - a$ bằng

➡ Đáp số:

15. Đồ thị của hình bên là đồ thị của hàm số nào trong các phương án sau:



A. $y = x - \frac{1}{x+1}$.

B. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

C. $y = \frac{x^2-x+1}{x+1}$.

D. $y = \frac{x^2+x+1}{x+1}$.

16. Cho hàm số $y = \frac{x^2+bx+c}{x+n}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y			-6		$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$		$-\infty$		2	

a) $n = 2$.

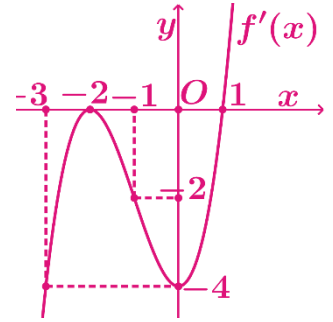


- b) $c = -4$.
 c) $b = 2$.
 d) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên đi qua gốc tọa độ.

17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} và hàm số $y = f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.

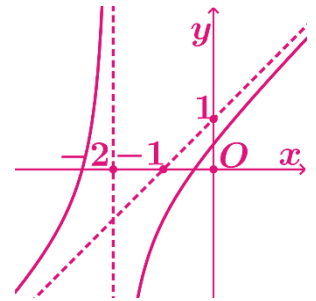
- a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
 b) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.
 c) $f'(2) = 4$.
 d) Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{x^2} + x + 2025$ đồng biến trên khoảng

$$\left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right).$$

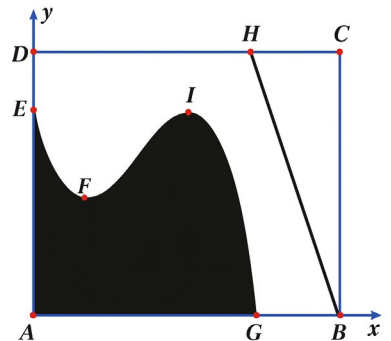


18. Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + nx + 1}{px + 2}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

- a) Đường tiệm cận đứng của đồ thị là đường thẳng $x = -2$.
 b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
 c) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; 1)$.
 d) Ta có $2m + 3n - p = 10$.



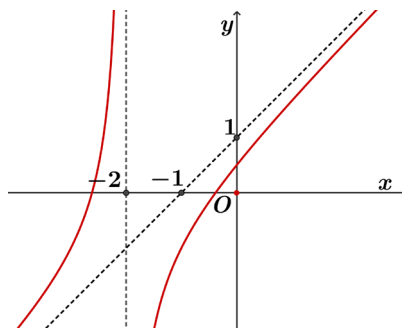
19. Ông An có một mảnh đất hình vuông $ABCD$ có cạnh $AB = 12$ m. Ông làm một hồ bơi dạng hình thang cong (phần tô đậm) và một lối đi là đoạn thẳng HB . Nếu đặt hệ trục tọa độ có gốc tại A như hình vẽ, độ dài đơn vị là 1 m, thì đường cong $EFIG$ là một phần đồ thị của một hàm số bậc ba $y = f(x)$ có F là điểm cực tiểu và I là điểm cực đại. Biết $CH = DE = GB = 3$ m và các điểm F, I cách cạnh AD lần lượt là 2 m và 6 m.



- a) Phương trình của đường thẳng HB là $y = -4x + 48$.
 b) Tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f'(x) = a(x + 2)(x + 6)$.
 c) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 7 song song với đường thẳng HB .
 d) Ông An cần đặt một cái thang lên xuống hồ bơi tại một điểm trên đường cong $EFIG$ sao cho khoảng cách từ điểm đặt thang đến lối đi là ngắn nhất, khoảng cách đó bằng 2,56 m (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



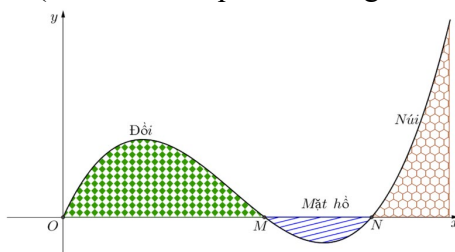
20. Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + 1}{cx + 2}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tính giá trị biểu thức $T = 2a + 3b - c$.



- A. 8. B. 10. C. 9. D. 11.

21. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ có đồ thị là (C) . Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị (C) . Trên đồ thị (C) có một điểm $M(a; b)$ với $a > 1$ sao cho khoảng cách IM là nhỏ nhất. Tìm a (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

22. Lát cắt ngang của một vùng đất được mô hình hóa là một phân hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ (đơn vị độ dài trên các trục là kilômét). Biết khoảng cách hai bên chân đồi $OM = 2$ (km), độ rộng của hồ nước $MN = 1$ (km) và ngọn đồi cao 528 (m). Độ sâu nhất của hồ nước là bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).



➡ Đáp số:

23. Đường đi của một khinh khí cầu được gắn trong hệ trục tọa độ là một đường cong bậc hai trên bậc nhất có đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm có tọa độ là $(1; 0)$ và $(8; 0)$ với đơn vị trên hệ trục tọa độ là 1 (km). Biết rằng điểm cực đại của đồ thị hàm số là điểm $(6; 5)$. Hỏi khi khí cầu đi qua điểm cực đại và cách mặt đất 3875 (m) thì khí cầu cách gốc tọa độ theo phương ngang bao nhiêu? (đơn vị: km).

➡ Đáp số:

