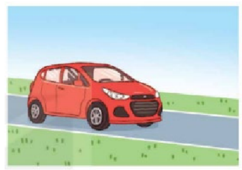
TD2 02 MỞ ĐẦU VỀ TÍCH PHÂN

✪ Đặt vấn đề

Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái đạp phanh. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -40t + 20$ (m/s), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

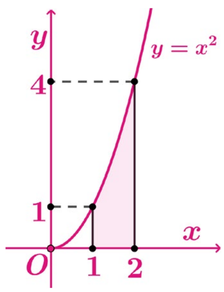


1. KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN

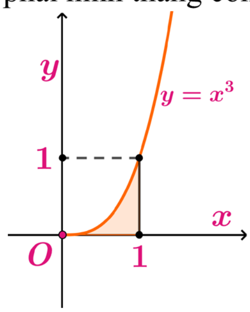
a) Diện tích hình thang cong

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ $(a < b)$, trong đó $f(x)$ là hàm liên tục không âm trên đoạn $[a; b]$, gọi là *hình thang cong*.

✪ Ví dụ 1: Những hình phẳng được tô màu dưới đây có phải hình thang cong không?

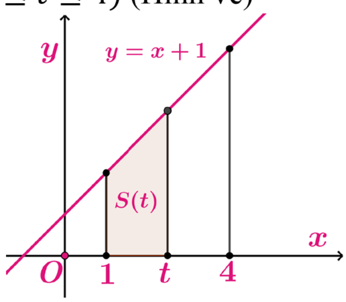


a)



b)

✪ Ví dụ 2: Kí hiệu T là hình thang vuông giới hạn bởi đường thẳng $y = x + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = t$ $(1 \le t \le 4)$ (Hình vẽ)



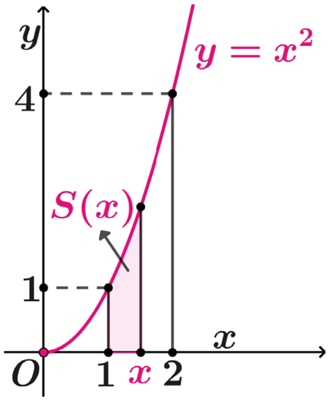
a) Tính diện tích S của T khi $t = 4$.

b) Tính diện tích $S(t)$ của T khi $t \in [1; 4]$.

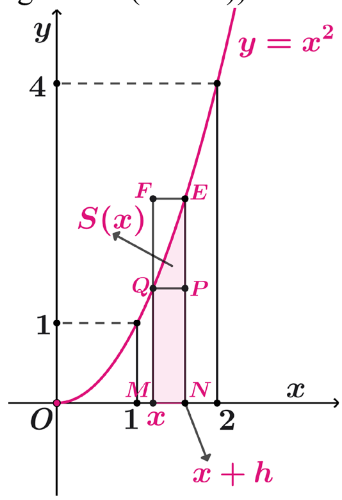
c) Chứng minh rằng $S(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(t) = t + 1, t \in [1; 4]$ và diện tích $S = S(4) - S(1)$.

✪ **Ví dụ 3:** Xét hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$. Ta muốn tính diện tích S của hình thang cong này.

a) Với mỗi $x \in [1; 2]$, gọi $S(x)$ là diện tích phần hình thang cong đã cho nằm giữa hai đường thẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 1 và x (Hình a))



Hình a)



Hình b)

Cho $h > 0$ sao cho $x + h < 2$. So sánh hiệu $S(x+h) - S(x)$ với diện tích hai hình chữ nhật $MNPQ$ và $MNEF$ (Hình b)). Từ đó suy ra

$$0 \le \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - x^2 \le 2xh + h^2.$$

b) Cho $h < 0$ sao cho $x + h > 1$. Tương tự phần a , đánh giá hiệu $S(x) - S(x+h)$ và từ đó suy ra

$$2xh + h^2 \le \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - x^2 \le 0$$

c) Từ kết quả phần a và phần b , suy ra với mọi $h \ne 0$, ta có

$$\left|\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - x^2\right| \le 2x|h| + h^2.$$

Từ đó chứng minh $S'(x) = x^2, x \in (1; 2)$.

Người ta chứng minh được $S'(1) = 1, S'(2) = 4$, tức là $S(x)$ là một nguyên hàm của x^2 trên $[1; 2]$.

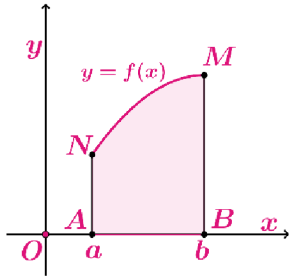
d) Từ kết quả của phần c, ta có $S(x) = \frac{x^3}{3} + C$. Sử dụng điều này với lưu ý $S(1) = 0$ và diện tích cần tính $S = S(2)$, hãy tính S.

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm tuỳ ý của $f(x) = x^2$ trên $[1; 2]$. Hãy so sánh S và $F(2) - F(1)$.

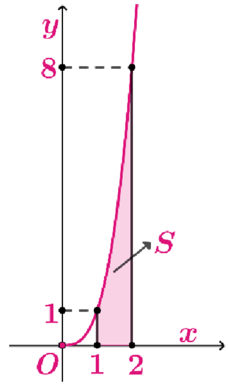
Tổng quát, ta có:

Định lí 1:

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$, thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ là $S=F(b)-F(a)$, trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.



Ví dụ 4: Tính diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$.



b) Định nghĩa tích phân

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thì hiệu số $F(b)-F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chú ý:

a) Hiệu $F(b)-F(a)$ thường được kí hiệu là $F(x)\big|_a^b$. Như vậy

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b.$$

b) Ta gọi $\int\limits_a^b$ là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên, $f(x)\mathrm{d}x$ là biểu thức dưới dấu tích phân và $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

c) Trong trường hợp $a=b$ hoặc $a>b$, ta quy ước:

$$\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0;\ \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

Ví dụ 5: Tính

a) $\int\limits_1^3 x^2\mathrm{d}x$; b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos t\,\mathrm{d}t$; c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u}$; d) $\int\limits_1^2 2^x\mathrm{d}x$.

Ví dụ 6: Tính

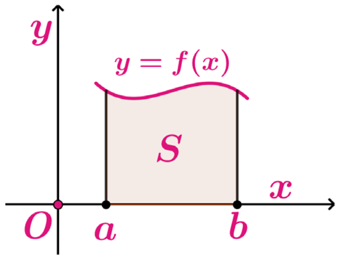
a) $\int\limits_0^1 e^x\mathrm{d}x$; b) $\int\limits_1^e \frac{1}{x}\mathrm{d}x$; c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$; d) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$.

Từ Định lí 1 và định nghĩa tích phân, ta có

Ý nghĩa hình học của tích phân

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$, thì tích phân $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ (Hình vẽ). Vậy

$$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$



Ví dụ 7: Sử dụng ý nghĩa hình học của tích phân, tính:

a) $\int_0^1 (x+1)\mathrm{d}x$;

b) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

2. TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, ta có

1) $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (k là hằng số);

2) $\int_a^b [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;

3) $\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;

4) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ $(a<c<b)$.

Ví dụ 8: Tính

a) $\int_1^4 \left(x^3+3\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^x-2\cos x\right)\mathrm{d}x$;

c) $\int_1^4 \left(2^x-\frac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

✪ **Ví dụ 9:** Tính các tích phân sau:

a) $\int_{0}^{2\pi}(2x+\cos x)\mathrm{d}x$; b) $\int_{1}^{2}\left(3^x-\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x$; c) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$.

✪ **Ví dụ 10:** Tính $\int_{0}^{3}|x-2|\mathrm{d}x$.

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

1. Sử dụng định nghĩa hình học của tích phân, tính:

a) $\int_{1}^{2}(2x+1)\mathrm{d}x$; b) $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$.

c) $\int_{-2}^{1}|x|\mathrm{d}x$; d) $\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

2. Cho $\int_{0}^{3}f(x)\mathrm{d}x=5$ và $\int_{0}^{3}g(x)\mathrm{d}x=2$. Tính:

a) $\int_{0}^{3}[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$; b) $\int_{0}^{3}[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$;

c) $\int_{0}^{3}3f(x)\mathrm{d}x$; d) $\int_{0}^{3}[2f(x)-3g(x)]\mathrm{d}x$.

3. Tính:

a) $\int_{0}^{3}(3x-1)^2\,\mathrm{d}x$; b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)\mathrm{d}x$;

c) $\int_{0}^{1}\left(e^{2x}+3x^2\right)\mathrm{d}x$; d) $\int_{-1}^{2}|2x+1|\mathrm{d}x$.

4. Tính các tích phân sau:

a) $\int_{0}^{2}|2x-1|\mathrm{d}x$; b) $\int_{-2}^{3}|x-1|\mathrm{d}x$.

5. Tính các tích phân sau:

a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(3\cos x+2\sin x)\mathrm{d}x$; b) $\int_{0}^{1}\frac{\left(e^x-1\right)^2}{2e^x}\mathrm{d}x$.

6. Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t)=t^2-t-6$ (m/s).

a) Tìm độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1\le t\le 4$, tức là tính $\int_{1}^{4}v(t)\mathrm{d}t$.

b) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này, tức là tính $\int_1^4 |v(t)|\,\mathrm{d}t$.

7. Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hoá bằng công thức
$$P'(x) = -0{,}0005x + 12{,}2$$
Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

a) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 101 đơn vị sản phẩm.

b) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 110 đơn vị sản phẩm.

8. Tìm chi phí trung bình trên mỗi đơn vị sản phẩm trong khoảng thời gian hai năm nếu chi phí cho mỗi đơn vị được tính bởi $c(t) = 0{,}005t^2 + 0{,}02t + 12{,}5$ với $0 \le t \le 24$, tính theo tháng.

9. Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động mạch bán kính R không đổi, có thể được mô hình hoá bởi công thức
$$v = k(R^2 - r^2),$$
trong đó k là một hằng số. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0 \le r \le R$. So sánh vận tốc trung bình với vận tốc lớn nhất.

10. Giả sử tổng chi phí mua và bảo trì một thiết bị trong x năm có thể được mô hình hoá bởi công thức
$$C = 5000\left(25 + 3\int_0^x t^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}t\right).$$
Tìm tổng chi phí sau:

a) 1 năm; b) 5 năm; c) 10 năm.

11. Vận tốc v của một vật rơi tự do từ trạng thái đứng yên được cho bởi công thức $v(t) = 9{,}8t$, trong đó vận tốc v tính bằng $\mathrm{m/s}$ và thời gian t tính bằng giây.

a) Biểu thị quãng đường vật đi được trong T giây đầu tiên dưới dạng tích phân.

b) Tìm quãng đường vật đi được trong 5 giây đầu tiên.