MATH
THẦY ĐỖ VĂN ĐỨC

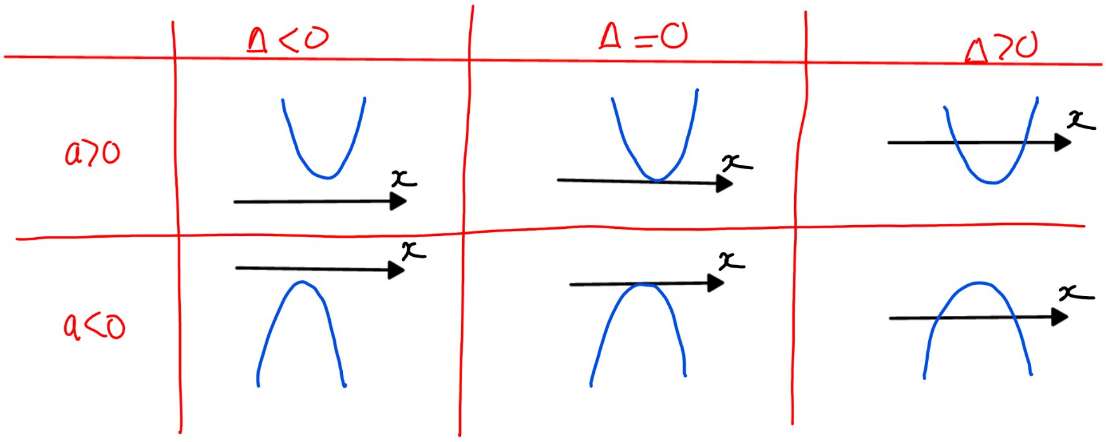
BUỔI IA5 | CÁC DẠNG ĐỒ THỊ HÀM SỐ ĐIỂN HÌNH

PHẦN LÝ THUYẾT

I. Hàm bậc hai $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$

$\Delta = b^2-4ac$.

Đỉnh Parabol: $I\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$



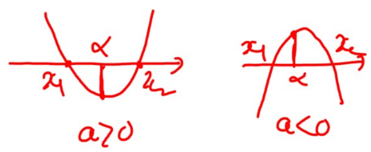
Lưu ý: Cho hàm số bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$.

+) Nếu $\Delta<0$ thì $af(x)>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

+) Nếu $\Delta=0$ thì $f(x)=0$ có no kép $x=-\frac{b}{2a}$

+) PT $f(x)=0$ có 2no $x_1; x_2$ t/mãn: $x_1<\alpha<x_2$

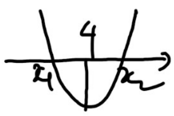
$\Leftrightarrow af(\alpha)<0$.



VD: Tìm m để pt $x^2+(m+1)x-3m-5=0$ có 2no phân biệt $x_1; x_2$ t/mãn $x_1<4<x_2$.

Giải

$f(x)=x^2+(m+1)x-3m-5$ $(a=1)$.



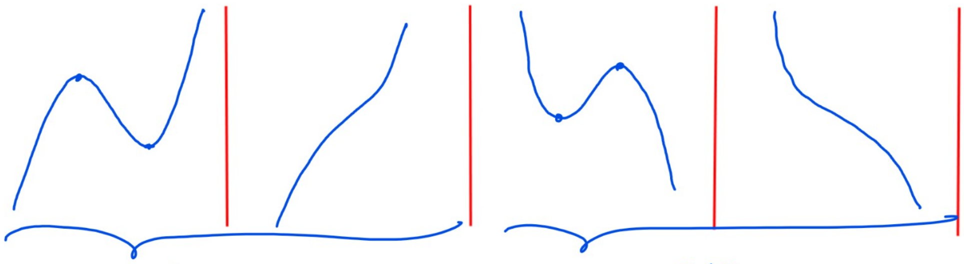
ĐK cần và đủ: $f(4)<0$

$\Leftrightarrow 16+4(m+1)-3m-5<0$

$\Leftrightarrow m+15<0 \Leftrightarrow m<-15$

II. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$.

a) Đồ Thị

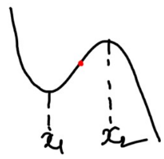


a>0 a<0.

Xét $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ có $\Delta' = b^2 - 3ac$

+) Nếu $\Delta' > 0 \Rightarrow y' = 0$ có 2 no pb $x_1 ; x_2 \Rightarrow y = f(x)$ có 2 đ' cực trị

$(a>0;\ \Delta'>0)$



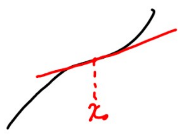
$(a<0;\ \Delta'>0)$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

$(a>0)$

+) Nếu $\Delta' < 0 \Rightarrow y' = 0$ vô no $\Rightarrow y'$ cùng dấu với hệ số a.

⊛ $a>0$, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$



x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$+\infty$

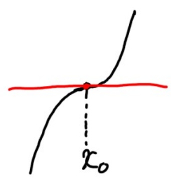
⊛ $a<0$, hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\infty$

+) Nếu $\Delta' = 0 \Rightarrow y' = 0$ có no kép
| $a>0 \Rightarrow y' \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$
| $a<0 \Rightarrow y' \leq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

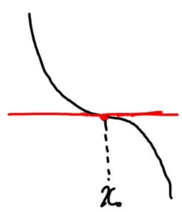
+) $a>0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
y'		+	0	+	
y	$-\infty$		↗		$+\infty$



+) $a<0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
y'		−	0	−	
y	$+\infty$		↘		$-\infty$



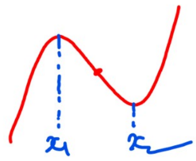
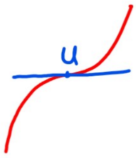
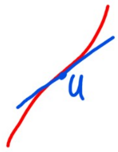
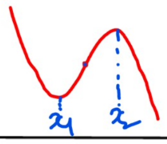
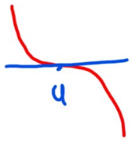
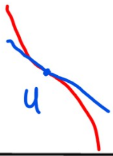
Lưu ý:

- Đồ thị hàm số bậc ba luôn có tâm đối xứng, tâm đối xứng đó chính là điểm uốn của đồ thị hàm số.

Cách xác định điểm uốn của đồ thị hàm số bậc ba: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Điểm uốn U.

$x_U = -\frac{b}{3a}$ (là no của PT $f''(x) = 0$) ; $y_U = f\left(-\frac{b}{3a}\right)$

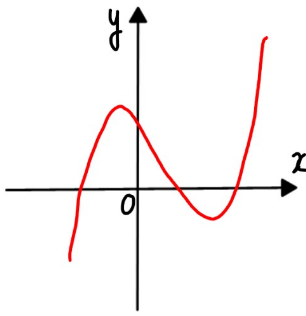
Tổng kết $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$; $\Delta'_{y'} = b^2 - 3ac$.

	$\Delta' > 0$	$\Delta' = 0$	$\Delta' < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

b) Dạng toán.

Xét dạng toán: Cho 1 đồ thị hàm bậc ba f(x)=ax^3+bx^2+cx+d (đã có đồ thị như hình vẽ, đồ thị này có 2 điểm cực trị). Yêu cầu: Xác định dấu của các hệ số a, b, c, d.

VD



$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

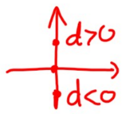
Ycầu: xác định dấu các hệ số a, b, c, d ?

Giải

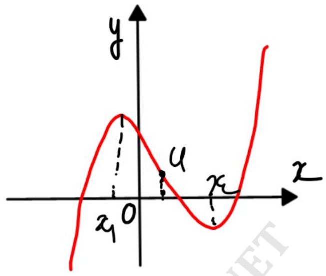
⊛ Dấu a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow a > 0$ | $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow a < 0$

(Ở bài toán này : $a > 0$)

⊛ Dấu d: Xét . $d = f(0)$ Để xác định dấu của d, ta xét giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung.



⊛ Dấu b và c ?

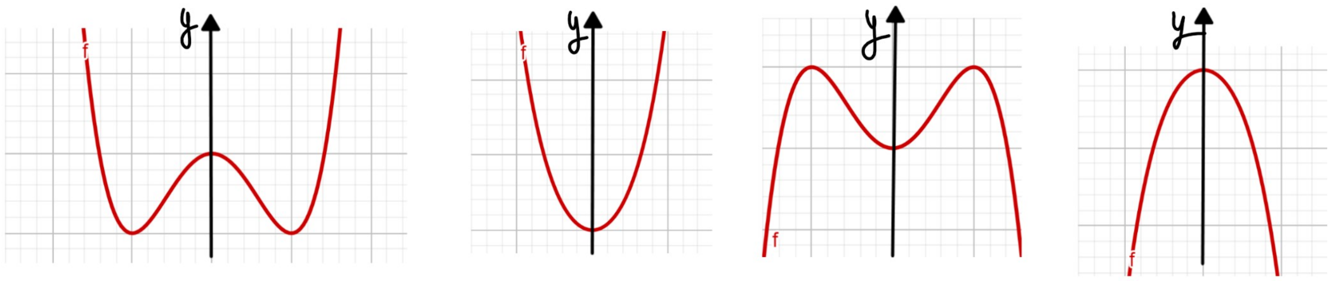


Xét $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ có 2n$_0$ x_1, x_2
$(x_1 < 0 < x_2)$.

Điểm uốn U có $x_U = \dfrac{-b}{3a}$.

$$\begin{cases} x_1 x_2 = \dfrac{c}{3a} < 0 \\ x_U = -\dfrac{b}{3a} > 0 \end{cases}$$, mà ta đã biết dấu của a ⇒ xác định d. b và c.

III. Hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$.



+) ĐTHS nhận trục tung làm trục đối xứng.

+) Khi $a > 0$ $x \to +\infty$ thì $y \to +\infty$

Khi $a < 0$ $x \to +\infty$ thì $y \to -\infty$.

+) Xét $y' = 4ax^3 + 2bx = 4ax.\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)$. $\to y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{array}\right.$.

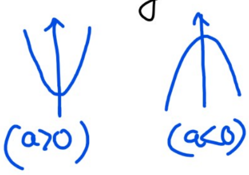
⊕ nếu $-\frac{b}{2a} > 0 \Leftrightarrow ab < 0$

$\to$ $y' = 0$ có 3 n_0 phân biệt: $x = 0$; $x = \sqrt{-\frac{b}{2a}}$; $x = -\sqrt{-\frac{b}{2a}}$

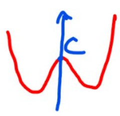
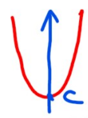
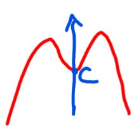
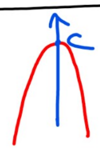
$\to$ h/số có 3 điểm cực trị:

+) Nếu $-\frac{b}{2a} \leq 0 \Leftrightarrow ab \geq 0$.

$\to$ $y' = 0$ có đúng 1 n_0: $x = 0$ $\to$ h/số có đúng 1 đ cực trị $(x = 0)$

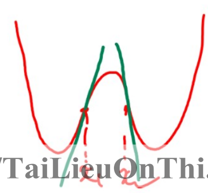


Tổng kết

	$ab < 0$	$ab \geq 0$
$a > 0$		
$a < 0$		

Lưu ý $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ | $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$; $f''(x) = 12ax^2 + 2b$.

+) Nếu $ab < 0$ thì $f''(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt; 2 n_0 đó là hoành độ đ uốn của ĐTHS.

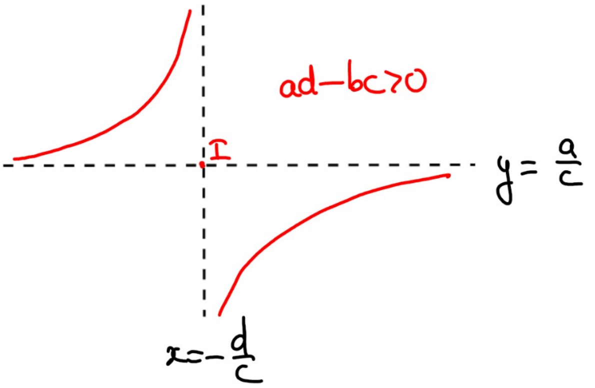


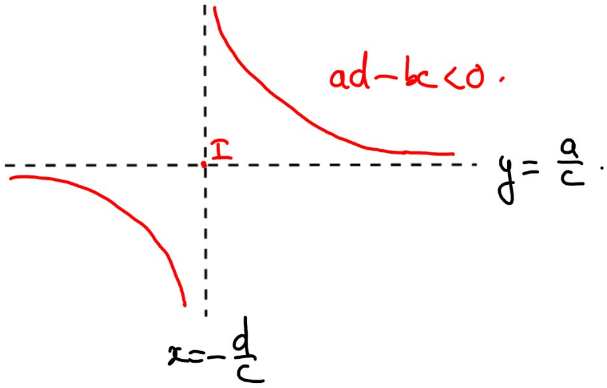
IV. Hàm số: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0;\ ad-bc\neq 0)$

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

Có: $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ | $ad-bc>0 \to y'>0 \ \forall x\in D$; $ad-bc<0 \to y'<0\ \forall x\in D$

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\dfrac{a}{c}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\dfrac{a}{c}$





Lưu ý!: ⊕ ĐTHS luôn có TCĐ: $x=-\dfrac{d}{c}$ và TCN: $y=\dfrac{a}{c}$.

⊕ Nếu $ad-bc>0 \to$ hàm số đb trên $\left(-\infty;-\dfrac{d}{c}\right)$ và $\left(-\dfrac{d}{c};+\infty\right)$

(K° ghi đb trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ hoặc $\left(-\infty;-\dfrac{d}{c}\right)\cup\left(-\dfrac{d}{c};+\infty\right)$)

⊕ Nếu $ad-bc<0 \to$ hàm số ngb trên $\left(-\infty;-\dfrac{d}{c}\right)$ và $\left(-\dfrac{d}{c};+\infty\right)$.

⊕ Khi đề bài cho ta thông tin về đồ thị hàm số y=(ax+b)/(cx+d), ta không thể xét dấu của riêng lẻ từng giá trị a, b, c, d được,
Cụ thể, ta có thể biết a/c dương hay âm, nhưng ta không thể biết được c dương hay âm.

VD: $y=\dfrac{x+1}{2x-3} \Rightarrow y=\dfrac{-x-1}{-2x+3}$.

V. Hàm số bậc hai / bậc nhất: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(am\neq 0)$

TXĐ: $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{n}{m}\right\}$.

+) $g(x)=ax^2+bx+c$ | ⊕ Nếu $x=-\dfrac{n}{m}$ là no của $g(x)=0$

$\left(g\left(-\dfrac{n}{m}\right)=0\right)$

$y=\dfrac{a\left(x+\frac{n}{m}\right)(x-x_0)}{m\left(x+\frac{n}{m}\right)}=\dfrac{a}{m}\cdot(x-x_0) \to$ hàm bậc nhất

$\to$ đồ thị là đg thẳng,

VD: $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1}=x+3.$

+) Nếu $x=-\dfrac{n}{m}$ k^0 là n_0 của $g(x)=0$.

ĐTHS có TCĐ: $x=-\dfrac{n}{m}$.

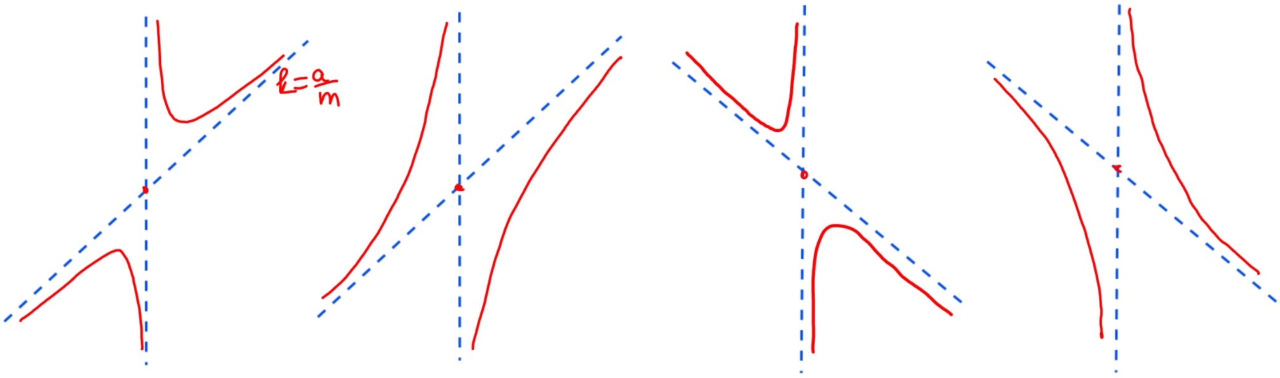
Xét $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx+c}{x(mx+n)}=\dfrac{a}{m}\ (\neq 0)$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(y-\dfrac{a}{m}x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}-\dfrac{ax}{m}\right)$

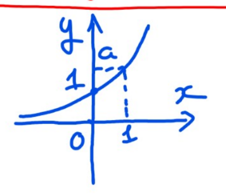
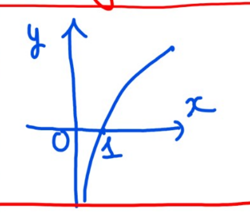
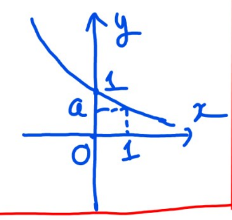
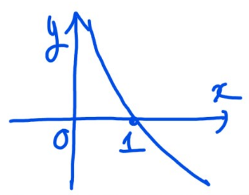
$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}-\dfrac{ax\left(x+\frac{n}{m}\right)}{m\left(x+\frac{n}{m}\right)}\right)$

$=\dfrac{b-\frac{an}{m}}{m}.$

ĐTHS có TCXiên: $y=\dfrac{a}{m}x+\dfrac{b-\frac{an}{m}}{m}.$



VI. Đthị hsố mũ, logarit.

	$y=a^x$	$y=\log_a x$
$a>1$		
$0<a<1$		

ĐTHS $y=a^x$ và ĐTHS $y=\log_a x$ đx nhau qua $y=x$