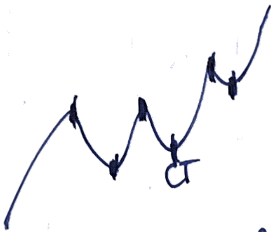
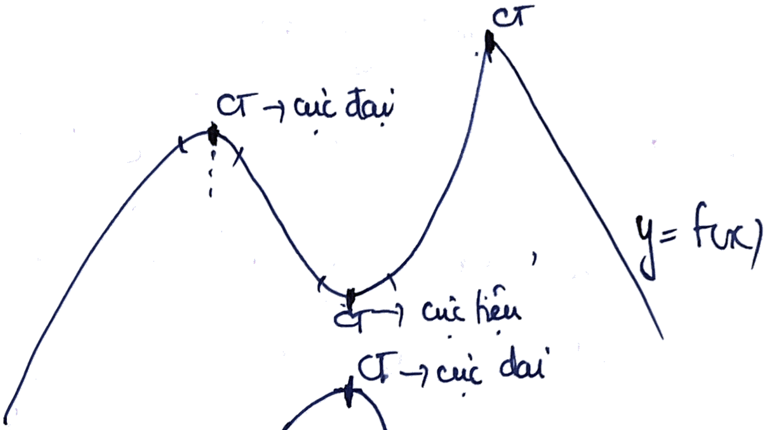
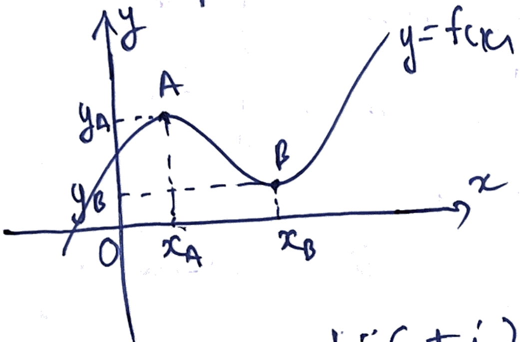
Nền Tảng Về Cực Trị Hàm Số

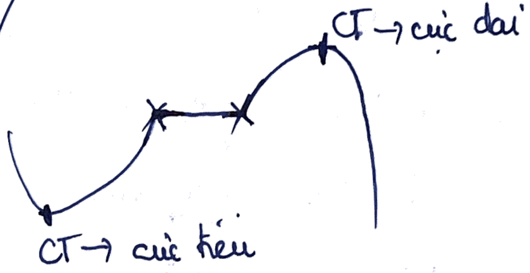
A – KIẾN THỨC CẦN NẮM

I/ Hiểu









x_A: điểm cực trị (đại) của hàm số $y = f(x)$

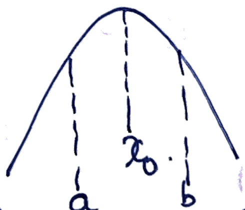
x_B: điểm cực trị (tiểu) của hàm số $y = f(x)$

y_A: giá trị cực đại (cực đại) của h/số $y = f(x)$

y_B: giá trị cực tiểu (cực tiểu) của hàm số $y = f(x)$

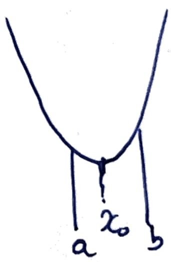
A và B là các đ' cực trị của ĐỒ THỊ Hàm Số $y = f(x)$

• Khái niệm điểm cực đại



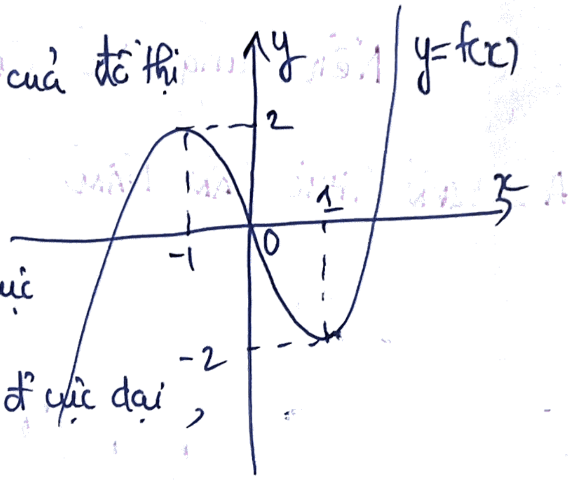
$f(x)$ xác định trên D, x_0 là đ' cực đại của $f(x)$ nếu $\exists$ khoảng $(a;b) \subset D$ và:
$$\begin{cases} x_0 \in (a;b) \\ f(x) < f(x_0)\ \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\} \end{cases}$$

Khái niệm điểm cực tiểu



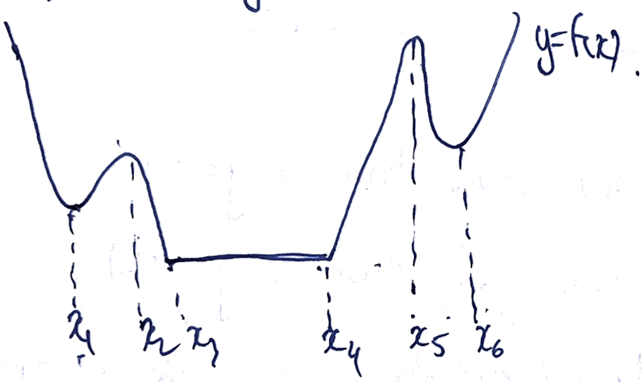
$f(x)$ xác định trên D, x_0 là đ' cực tiểu của $f(x)$ nếu $\exists (a;b) \subset D$ mà:
$$\begin{cases} x_0 \in (a;b) \\ f(x) > f(x_0)\ \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\} \end{cases}$$

*) Điểm: $(-1;2)$ và $(1;-2)$ là các đ' cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$.



*) Điểm -1 và 1 $(x=-1; x=1)$ là các đ' cực trị của hàm số $y=f(x)$, và: $x=-1$ là đ' cực đại, $x=1$ là đ' cực tiểu.

*) 2 là cực đại (giá trị cực đại) của hàm số $y=f(x)$
-2 là cực tiểu (giá trị cực tiểu) của hàm số $y=f(x)$.

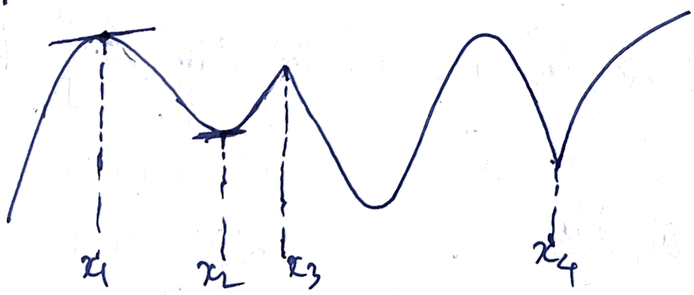


Điểm cực tiểu: x_1 và x_6.

$\min f(x) = f(x_3) = f(x_4)$

x_3 và x_4 k0 là các đ' cực trị

2 Mối quan hệ với đạo hàm



x	x_1
$f'(x)$	$+ \quad 0 \quad -$
$f(x)$	$\nearrow f(x_1) \searrow$

x	x_2
$f'(x)$	$- \quad 0 \quad +$
$f(x)$	$\searrow f(x_2) \nearrow$

x	x_3
$f'(x)$	$+ \quad \| \quad -$
$f(x)$	$\nearrow f(x_3) \searrow$

x	x_4
$f'(x)$	$- \quad \| \quad +$
$f(x)$	$\searrow f(x_4) \nearrow$

Nếu $f(x)$ liên tục trên $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$, có đạo hàm trên $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$

Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua x_0 $\to$ $x=x_0$ là đ' cực trị

âm $\longrightarrow$ dương: $x=x_0$ là đ' cực tiểu

dg $\longrightarrow$ âm: $x=x_0$ là đ' cực đại.

III. Mối Quan hệ với đạo hàm cấp 2.

$f(x)$ có đạo hàm trên $(a;b)$ chứa x_0; $f'(x_0)=0$.

x	x_0
$f''(x)$	+ + +
$f'(x)$	↗ 0 ↗
$f'(x)$	− 0 +
f	↘ ↗

Nếu: $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)>0 \end{cases} \Rightarrow x=x_0$ là đ' cực tiểu của $f(x)$

x	x_0
$f''(x)$	− − −
$f'(x)$	↘ 0 ↘
$f'(x)$	+ 0 −
$f(x)$	↗ ↘

Nếu: $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{cases}$

$\rightarrow x=x_0$ là đ' cực đại của $f(x)$

Lưu ý:

① Nếu $f''(x_0)=0$ thì ta chưa thể kết luận được $x=x_0$ có là đ' cực trị k°

② TH Đặc biệt: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

⊕ Nếu $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)=0 \end{cases} \rightarrow$ chắc chắn $x=x_0$ k° là đ' cực trị

⇓

$x=x_0$ là đ' cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{cases}$ | $x=x_0$ là đ' cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)>0. \end{cases}$

PHẦN 2: Ví Dụ Luyện Tập

Câu 1:

a) $y = x^2 \Rightarrow y' = 2x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	

$x = 0$ là đ' cực trị

b) $y = x^3 - 3x \Rightarrow y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x = 1$ và $x = -1$ là các đ' cực trị

c) $y = x^4 - 2x^2 + 1 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$x = 0$; $x = 1$ và $x = -1$ là các đ' cực trị

d) $y = x^4 + 2x^3 \Rightarrow y' = 4x^3 + 6x^2 = 4x^2\left(x + \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{3}{2} \\ x = 0. \end{array}\right.$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	

$x = -\frac{3}{2}$ là đ' cực trị của hàm số.

e): $y = x - \frac{1}{x}$; TXĐ: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, xét $y' = 1 + \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \in D$

$\Rightarrow$ hàm số k^o có cực trị

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \;\|\|\; -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

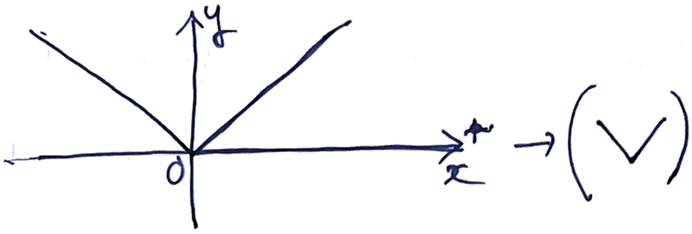
f) $y = x + \frac{1}{x}$; TXĐ: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, xét $y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

$x = -1$ và $x = 1$ là các đ' cực trị của hàm số.

g) Cách 1: Dựa vào đồ thị.

$$y = |x| = \begin{cases} x \text{ khi } x \geq 0 \\ -x \text{ khi } x < 0 \end{cases}$$



$x = 0$ là điểm cực trị.

Cách 2: Tính y'.

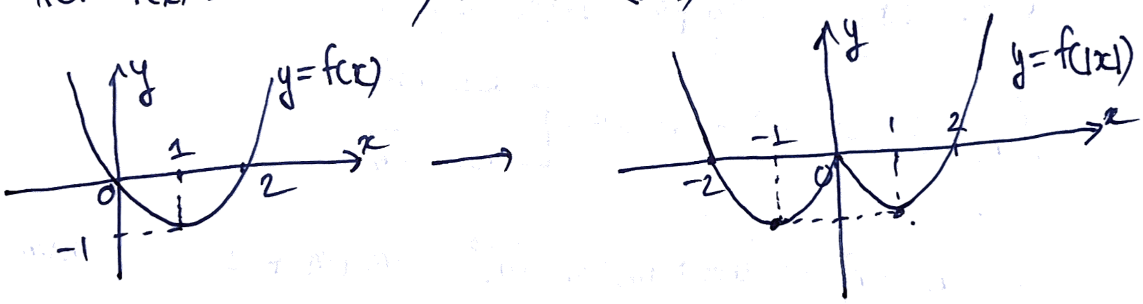
$$y = |x| = \begin{cases} x \text{ khi } x \geq 0 \\ -x \text{ khi } x < 0 \end{cases} \to y' = \begin{cases} 1 \text{ khi } x > 0 \\ -1 \text{ khi } x < 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	
y		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$x = 0$ là đ' cực trị.

h) Cách 1: Dựa vào đồ thị. $(y = x^2 - 2|x|)$

Xét $f(x) = x^2 - 2x$, ta có: $f(|x|) = |x|^2 - 2|x| = x^2 - 2|x|$



Các đ' cực trị: $x = -1$; $x = 0$; $x = 1$

Cách 2: Xét dấu y'.

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x \text{ khi } x \geq 0 \\ x^2 + 2x \text{ khi } x < 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 2x - 2 \text{ khi } x > 0 \\ 2x + 2 \text{ khi } x < 0 \end{cases}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x + 2 = 0 \\ x < 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array} \right.$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Các đ' cực trị: $x = -1$; $x = 0$; $x = 1$.

Câu 2

$$f'(x) = -x(x-1)(x-1)(x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$$
$$= -x.(x-1)^2(x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$$

Tự luận:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Hsố có 2 đ' cực đại.

Trắc nghiệm

x		-1		0		2	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Hàm số có 2 đ' cực đại.

Câu 3

$f(x) = x^3 - 3mx + 2$; $f'(x) = 3x^2 - 3m$.

ĐK để $f(x)$ có 2 no pb: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 0^2 - 3.(-3m) > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{m} \\ x = -\sqrt{m} \end{array}\right.$$

*) $x = \sqrt{m} \Rightarrow y = f(\sqrt{m}) = \sqrt{m}^3 - 3m\sqrt{m} + 2 = -2m\sqrt{m} + 2$.

*) $x = -\sqrt{m} \Rightarrow y = f(-\sqrt{m}) = (-\sqrt{m})^3 - 3m(-\sqrt{m}) + 2 = 2m\sqrt{m} + 2$

Hai điểm cực trị: $A(\sqrt{m}; -2m\sqrt{m} + 2)$; $B(-\sqrt{m}; 2m\sqrt{m} + 2)$

$$AB = 2 \Leftrightarrow (\sqrt{m} + \sqrt{m})^2 + (4m\sqrt{m})^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow 4m + 16m^3 = 4 \Leftrightarrow 4m^3 + m - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \text{ (thoả mãn } m > 0)$$

4C

A. $y=x^3-3x$ có $y'=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

B. $y=-x^2+4$ có $y'=-2x$

C. $y=\dfrac{x+1}{x-2} \Rightarrow y'=\dfrac{-2-1}{(x-2)^2}<0 \quad \forall x\in \mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Lưu ý: Hàm số: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0)$ không có điểm cực trị.

5C

A. $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ → không có đ' cực trị

B. $y=x^3+2$ có $y'=3x^2\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$ → không có đ' cực trị

C. $y=2x^4+x^2-3$ có $y'=8x^3+2x=8x\left(x^2+\frac{1}{4}\right)$

Vậy $y'=0 \Leftrightarrow x=0$ (n₀ đơn).

D. $y=x^3+x^2+2$ có $y'=3x^2+2x=3x\left(x+\frac{2}{3}\right)$ → có 2 đ' CTrị.

6B Rõ ràng, $f'(x)$ đổi dấu đúng 1 lần qua $x=-1$.

7D

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

$f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

→ $x=-1$ là 1 đ' cực trị

→ $x=0$ là 1 đ' cực trị

8A Cách 1 (Tự luận)

$y'=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗	4	↘	0	↗	

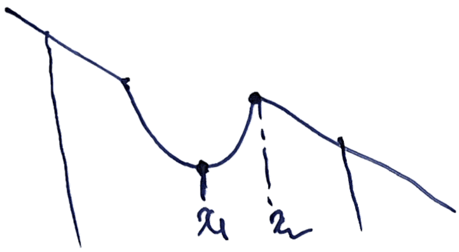
$y_{CĐ}=y(-1)=-1+3+2=5-1=4$

Cách 2 (Casio)

$\boxed{9C}$ trên $[-2;2]$, hsố có 2 đ² cực trị là $x=-1$ và $x=1$.

$\boxed{10B}$

$\boxed{11C}$



$\boxed{12B}$ $f'(x) = 2(x-1)^2(x-3)(x-2)(x+2)$

Trắc no:

x		-2		2		3	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
	↘	CT	↗		↘	CT	↗

2 điểm cực tiểu.

Tự luận:

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↗		↘		↗	

2 điểm cực tiểu

$\boxed{13D}$ $f'(x) = 3\sin x - 4\cos x - 5$.

Bổ đề: Xét $A = a\sin x + b\cos x$; $\begin{cases} \min A = -\sqrt{a^2+b^2} \\ \max A = \sqrt{a^2+b^2}. \end{cases}$

Lý do: $A^2 = (a\sin x + b\cos x)^2 \le (a^2+b^2)(\sin^2 x + \cos^2 x) = a^2+b^2$

Áp dụng: $(3\sin x - 4\cos x) \le \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5 \Rightarrow f'(x) \le 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số $f(x)$ k° có đ² cực trị

$\boxed{14A}$ $f(x) = x^4(x-1)^2$, có $f'(x) = 4x^3.(x-1)^2 + x^4.2(x-1)$

$= 2x^3(x-1)\left[2(x-1)+x\right]$

$= 2x^3(x-1)(3x-2)$

$f'(x)$ đổi dấu 3 lần $\Rightarrow f(x)$ có 3 đ² cực trị

$\boxed{15B}$ $f'(x) = x(x+5)^2 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \text{ (no đơn)} \\ x=-5 \text{ (no kép)} \end{array}\right.$

$\boxed{16A}$ $y = mx^3 - (m+1)x^2 + \left(2m - \frac{2}{3}\right)x + 1$ có 2 đ' cực trị

xét $y' = 3mx^2 + 2(m+1)x + 2m - \frac{2}{3}$

+) $m=0 \to y' = 2x + \left(-\frac{2}{3}\right) \to$ hàm số có đúng 1 đ' cực trị (loại)

+) $m \neq 0$, $y'=0$ có 2 no phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$

$\Leftrightarrow (m+1)^2 - 3m\left(2m - \frac{2}{3}\right) > 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 - 6m^2 + 2m > 0$

$\Leftrightarrow -5m^2 + 4m + 1 > 0. \Leftrightarrow (m-1)\left(m+\frac{1}{5}\right) < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{5} < m < 1$

Vậy: $\begin{cases} -\frac{1}{5} < m < 1 \\ m \neq 0. \end{cases}$

$\boxed{17D}$ $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ $\left\langle \begin{array}{l} f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (0;+\infty) \\ f(x) < 0 \quad \forall x \in (0;+\infty) \end{array}\right.$.

xét $g'(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f'(x).x - f(x)}{x^2}$ $\left\langle \begin{array}{l} xf'(x) \geq 0 \ \forall x \in (0;+\infty) \\ -f(x) > 0 \ \forall x \in (0;+\infty) \\ x^2 > 0 \ \forall x \in (0;+\infty) \end{array}\right.$

$\to g'(x) > 0 \ \forall x \in (0;+\infty) \Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

$\Rightarrow g(x)$ có 0 điểm cực trị.

Mẹo giải nhanh: Chọn 1 hàm f(x) t/mãn là xong.

Nxét: $f(x) = -\frac{1}{x}$ $\left\langle \begin{array}{l} f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \cdot \forall x \in (0;+\infty). \\ f(x) < 0 \quad \forall x \in (0;+\infty) \end{array}\right.$ | $g(x) = \frac{-1}{x^2}$ k° có cực trị

$\boxed{18D}$ Ta có: $f'(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

Cách 1 Xét $g'(x) = 2x.f'(x^2-3) = 2x.(x^2-3-1)(x^2-3+2)$

$= 2x.(x^2-4)(x^2-1) = 2x(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)$

$\rightarrow g'(x) = 0$ có 5 no (đơn) $\rightarrow g(x)$ có 5 điểm cực trị

Cách 2. Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Vậy: $g'(x) = 2x.f'(x^2-3) \rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2-3)=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-3=1 \\ x^2-3=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \\ x=\pm 1 \end{array}\right. \rightarrow g(x)$ có 5 đ' cực trị.