Moon.vn
Học để khẳng định mình

BÀI TẬP

Chuyên đề: GIỚI HẠN HÀM SỐ VÀ TÍNH LIÊN TỤC

Bài 01.02.1.001

Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x_0 = 2$.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x^2-x-2} & khi \quad x\neq 2 \\ \dfrac{10}{3} & khi \quad x=2 \end{cases}$$

Bài 01.02.1.002

Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x_0 = 1$.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & khi \quad x\neq 1 \\ 1 & khi \quad x=1 \end{cases}$$

Bài 01.02.1.003

Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x_0 = 2$.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & khi \quad x>2 \\ 5-x & khi \quad x\leq 2 \end{cases}$$

Bài 01.02.1.004

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & khi \quad x\neq 3 \\ a & khi \quad x=3 \end{cases}$

Định a để hàm số đã cho liên tục tại $x = 3$.

Bài 01.02.1.005

Chứng minh hàm số $f(x)=\sqrt{8-2x^2}$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$.

Bài 01.02.1.006

Chứng minh hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & khi \quad x\neq 1 \\ 3 & khi \quad x=1 \end{cases}$ liên tục trên R.

Bài 01.02.1.007

Chứng minh rằng phương trình $x^7 + 3x^5 - 2 = 0$ có ít nhất một nghiệm.

Bài 01.02.1.008

Chứng minh phương trình $x^2 \sin x + x\cos x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (0;\pi)$.

Bài 01.02.1.009

Chứng minh phương trình $m(x-1)^3(x-2) + 2x - 3 = 0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

Bài 01.02.1.010

Chứng minh phương trình $2\sin x + m\sin 2x + 1 = 0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

Bài 01.02.1.011

Xét tính liên tục của hàm số f(x) = |x|.

Bài 01.02.1.12

Tìm giới hạn hoặc chứng minh chúng không tồn tại.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]$, $a, b > 0$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{[x]}{x}$,

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+1})$,

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos x)}{\sin(\sin x)}$.

Bài 01.02.1.13

Giả sử $f : (-a, a)\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$. Chứng minh rằng

(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = l$ nếu và chỉ nếu $\lim\limits_{x\to 0} f(\sin x) = l$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = l$ thì $\lim\limits_{x\to 0} f(|x|) = l$. Điều ngược lại có đúng không ?

Bài 01.02.1.14

Giả sử hàm $f : (-a, a)\setminus\{0\} \to (0, +\infty)$ thoả mãn

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x) + \frac{1}{f(x)}\right) = 2.$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Bài 01.02.1.15

Giả sử f được xác định trên lân cận khuyết của a và

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+\frac{1}{|f(x)|}\right) = 0.$$

Tìm $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Bài 01.02.1.16

Chứng minh rằng nếu f là hàm bị chặn trên $[0,1]$ thoả mãn $f(ax) = bf(x)$ với $0 \le x \le \frac{1}{a}$ và a, b thì $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

Bài 01.02.1.17

Tính

(a) $\lim_{x\to 0}\left(x^2\left(1+2+3+\cdots+\left[\frac{1}{|x|}\right]\right)\right)$,

(b) $\lim_{x\to 0^+}\left(x\left(\left[\frac{1}{x}\right]+\left[\frac{2}{x}\right]+\cdots+\left[\frac{k}{x}\right]\right)\right)$, $k \in \mathbb{N}$.

Bài 01.02.1.18

Tính $\lim_{x\to\infty}\frac{[P(x)]}{P(|x|)}$, ở đây $P(x)$ là đa thức với hệ số dương.

Bài 01.02.1.19

Chỉ ra bằng ví dụ rằng điều kiện

$$\lim_{x\to 0}(f(x)+f(2x)) = 0$$

không suy ra f có giới hạn tại 0. Chứng minh rằng nếu tồn tại hàm φ sao cho bất đẳng thức $f(x) \ge \varphi(x)$ được thoả mãn trong một lân cận khuyết của 0 và $\lim_{x\to 0}\varphi(x) = 0$, thì (*) suy ra $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Bài 01.02.1.20

(a) Cho ví dụ hàm f thoả mãn điều kiện

$$\lim_{x \to 0} (f(x) f(2x)) = 0$$

và $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ không tồn tại.

(b) Chứng minh rằng nếu trong một lân cận khuyết của 0, các bất đẳng thức $f(x) \geq |x|^{\alpha}$, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, và $f(x)f(2x) \geq |x|$ được thoả mãn thì $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Bài 01.02.1.21

Cho trước số thực α, giả sử $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(ax)}{x^{\alpha}} = g(a)$ với mỗi số dương a. Chứng minh rằng tồn tại c sao cho $g(a) = ca^{\alpha}$.

Bài 01.02.1.22

Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm đơn điệu sao cho $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1$ với mọi $c > 0$.

Bài 01.02.1.23

Chứng minh rằng nếu $a > 1$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ thì

(a) $$\lim_{x \to \infty} \frac{a^x}{x} = +\infty,$$

(b) $$\lim_{x \to \infty} \frac{a^x}{x^{\alpha}} = +\infty.$$

Bài 01.02.1.24

Chứng minh rằng nếu $\alpha > 0$, thì $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0$.-

Bài 01.02.1.25

Cho $a > 0$, chứng minh $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$. Dùng đẳng thức này để chứng minh tính liên tục của hàm mũ.

Bài 01.02.1.26

Chứng minh rằng

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e,$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e,$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

Bài 01.02.1.27

Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x) = 0$. Dùng đẳng thức này, suy ra hàm logarit liên tục trên $(0,\infty)$.

Bài 01.02.1.28

Tính các giới hạn sau :

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$, $a>0$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Bài 01.02.1.29

Tìm

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x-1)^{\frac{1}{x}}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Bài 01.02.1.30

Tìm các giới hạn sau:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x + 2\operatorname{arctg} 3x + 3x^2}{\ln(1+3x+\sin^2 x) + xe^x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\operatorname{tg} x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{cotg} x}$

Bài 01.02.1.31

Tính

(a) $\lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$ (b) $\lim_{x\to\infty} x\left(\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)-\ln\frac{x}{2}\right)$

Bài 01.02.1.32

Giả sử rằng $\lim_{x\to 0^+} g(x)=0$ và tồn tại $\alpha\in\mathbb{R}$, các số dương m, M sao cho $m\le\frac{f(x)}{x^\alpha}\le M$ với những giá trị dương của x trong lân cận của 0. Chứng minh rằng nếu $\alpha\lim_{x\to 0^+} g(x)\ln x=\gamma$, thì $\lim_{x\to 0^+} f(x)^{g(x)}=e^\gamma$. Trường hợp $\gamma=\infty$ hoặc $\gamma=-\infty$, ta giả sử $e^\infty=\infty$ và $e^{-\infty}=0$.

Bài 01.02.1.33

Biết rằng $\lim_{x\to 0} f(x)=1$ và $\lim_{x\to 0} g(x)=\infty$.

Chứng minh rằng nếu $\lim_{x\to 0} g(x)(f(x)-1)=\gamma$,

thì $\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)}=e^\gamma$.

Bài 01.02.1.34

Tính

(a) $\lim_{x\to 0^+}\left(2\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right)^x$,

(b) $\lim_{x\to 0}\left(1+xe^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x^4}\right)^{e^{\frac{1}{x^2}}}$,

(c) $\lim_{x\to 0}\left(1+e^{-\frac{1}{x^2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}+xe^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x^4}\right)^{e^{\frac{1}{x^2}}}$.

Bài 01.02.1.35

Cho $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ là hàm sao cho mỗi dãy $f(a+n)$, $a\ge 0$, hội tụ tới không. Hỏi giới hạn $\lim_{x\to\infty} f(x)$ có tồn tại không ?

Bài 01.02.1.36

Cho $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ là hàm sao cho với mọi số dương a, dãy $\{f(an)\}$, hội tụ tới không. Hỏi giới hạn $\lim_{x\to\infty} f(x)$ có tồn tại không ?

Bài 01.02.1.37

Cho $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ là hàm sao cho với mọi $a \geq 0$ và mọi $b > 0$, dãy$\{f(a+bn)\}$, $a \geq 0$, hội tụ tới không. Hỏi giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ có tồn tại không ?

Bài 01.02.1.38

Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ và $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = 0$

thì $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Bài 01.02.1.39

Giả sử f xác định trên $(a,+\infty)$, bị chặn trên mỗi khoảng hữu hạn (a,b), $a < b$. Chứng minh rằng nếu

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x+1)-f(x)) = l$, thì $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = l$.

Bài 01.02.1.40

Cho f xác định trên $(a,+\infty)$, bị chặn dưới trên mỗi khoảng hữu hạn (a,b), $a < b$. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x+1)-f(x)) = +\infty$, thì $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

Bài 01.02.1.41

Cho f xác định trên $(a,+\infty)$, bị chặn trên mỗi khoảng hữu hạn (a,b), $a < b$. Nếu với số nguyên không âm k, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{x^k}$ tồn tại, thì

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{x^k}.$$

Bài 01.02.1.42

Cho f xác định trên $(a,+\infty)$, bị chặn trên mỗi khoảng hữu hạn (a,b), $a < b$ và giả sử $f(x) \geq c > 0$ với $x \in (a,+\infty)$. Chứng minh rằng nếu

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$ tồn tại, thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)^{\frac{1}{x}}$ cũng tồn tại và

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x))^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}.$$

Bài 01.02.1.43

Giả thiết rằng $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\left[\frac{1}{x}\right]^{-1}\right) = 0$. Từ đó có suy ra $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ tồn tại không ?

Bài 01.02.1.44

Cho $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho với mọi $a\in\mathbb{R}$, dãy $\{f(\frac{a}{n})\}$ hội tụ tới không. Hỏi f có giới hạn tại 0 không ?

Bài 01.02.1.45

Chứng minh rằng nếu f đơn điệu tăng (giảm) trên (a,b), thì với mọi $x_0\in(a,b)$

(a) $f(x_0^+) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \inf\limits_{x>x_0} f(x)$ $\quad (f(x_0^+) = \sup\limits_{x>x_0} f(x))$

(b) $f(x_0^-) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \sup\limits_{x<x_0} f(x)$ $\quad (f(x_0^-) = \inf\limits_{x<x_0} f(x))$

(c) $f(x_0^-)\le f(x_0)\le f(x_0^+)$ $\quad (f(x_0^-)\ge f(x_0)\ge f(x_0^+))$.

Bài 01.02.1.46

Chứng minh rằng nếu f đơn điệu tăng trên (a,b), thì với mọi $x_0\in(a,b)$

(a) $$\lim_{x\to x_0^+} f(x^-) = f(x_0^+).$$

(b) $$\lim_{x\to x_0^-} f(x^+) = f(x_0^-).$$

Bài 01.02.1.47

Chứng minh *định lí Cauchy* sau đây. Để f có giới hạn hữu hạn khi $x\to a$, điều kiện cần và đủ là với mọi $\varepsilon>0$ tồn tại $\delta>0$ sao cho $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$ bất cứ khi nào $0<|x-a|<\delta$ và $0<|x'-a|<\delta$. Lập công thức và chứng minh điều kiện cần và đủ tương tự để $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ tồn tại.

Bài 01.02.1.48

Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ và $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$, thì $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = B$ với giả thiết $(g\circ f)(x) = g(f(x))$ được xác định và f không nhận giá trị A trong lân cận khuyết của a.

Bài 01.02.1.49

Tìm các hàm f và g sao cho $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ và $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$, nhưng $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) \neq B$.

Bài 01.02.1.50

Giả sử $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm tăng và $x\mapsto f(x)-x$ có chu kì 1. Kí hiệu f^n là phép lặp thứ n của f; tức là, $f^1 = f$ và $f^n = f\circ f^{n-1}$ với $n\geq 2$. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f^n(0)}{n}$ tồn tại, thì với mọi $x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f^n(x)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{f^n(0)}{n}$

Bài 01.02.1.51

Giả sử $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm tăng và $x\mapsto f(x)-x$ có chu kì 1. Ngoài ra, giả sử $f(0)>0$ và p là số nguyên dương cố định. Kí hiệu f^n là phép lặp thứ n của f. Chứng minh rằng nếu m_p là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $f^{m_p}(0)>0$, thì

$$\frac{p}{m_p}\leq \varliminf_{n\to\infty}\frac{f^n(0)}{n}\leq \varlimsup_{n\to\infty}\frac{f^n(0)}{n}\leq \frac{p}{m_p}+\frac{1+f(0)}{m_p}.$$

Bài 01.02.1.52

Giả sử $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm tăng và $x\mapsto f(x)-x$ có chu kì 1. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f^n(x)}{n}$ tồn tại và nhận cùng giá trị với mọi $x\in\mathbb{R}$, ở đây f^n kí hiệu phép lặp thứ n của f.

Bài 01.02.1.53

Tìm tất cả các điểm liên tục của hàm f xác định bởi

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{nếu } x \text{ vô tỷ},\\ \sin|x| & \text{nếu } x \text{ hữu tỷ}.\end{cases}$$

Bài 01.02.1.54

Xácđịnh tập các điểm liên tục của hàm f được cho bởi

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{nếu } x \text{ vô tỷ},\\ 0 & \text{nếu } x \text{ hữu tỷ}.\end{cases}$$

Bài 01.02.1.55

Nghiên cứu tính liên tục của các hàm sau:

(a) $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \text{ vô tỷ hoặc } x = 0, \\ \frac{1}{q} & \text{nếu } x = p/q,\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}, \text{ và} \\ & p, q \text{ nguyên tố cùng nhau,} \end{cases}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{nếu } x \text{ vô tỷ hoặc } x = 0, \\ qx/(qx+1) & \text{nếu } x = p/q,\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}, \text{ và} \\ & p, q \text{ nguyên tố cùng nhau,} \end{cases}$$

(Hàm định nghĩa ở (a) được gọi là *hàm Riemann*.)

Bài 01.02.1.56

Chứng minh rằng nếu $f \in C([a,b])$, thì $|f| \in C([a,b])$. Chỉ ra bằng ví dụ rằng điều ngược lại không đúng.

Bài 01.02.1.57

Xác định tất cả các a_n và b_n sao cho hàm xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} a_n + \sin \pi x & \text{nếu } x \in [2n, 2n+1],\ n \in \mathbb{Z}, \\ b_n + \cos \pi x & \text{nếu } x \in (2n-1, 2n),\ n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 01.02.1.58

Cho $f(x) = [x^2] \sin \pi x$ với $x \in \mathbb{R}$. Nghiên cứu tính liên tục của f.

Bài 01.02.1.59

Biết

$$f(x) = [x] + (x - [x])^{[x]} \text{ với } x \geq \frac{1}{2}.$$

Chứng minh rằng f liên tục và tăng thực sự trên $[1, \infty)$.

Bài 01.02.1.60

Nghiên cứu tính liên tục của các hàm sau đây và vẽ đồ thị của chúng

(a) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R},$

(b) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^2 e^{nx} + x}{e^{nx} + 1}, \quad x \in \mathbb{R},$

(c) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(e^n + x^n)}{n}, \quad x \geq 0,$

(d) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}}, \quad x \neq 0,$

(e) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Bài 01.02.1.61

Chứng minh rằng nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và tuần hoàn thì nó có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Bài 01.02.1.62

Cho $P(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdot + a_1x + a_0$, chứng minh rằng tồn tại $x_* \in \mathbb{R}$ sao cho $P(x_*) = \inf\{P(x) : x \in \mathbb{R}\}$. Cũng chứng minh rằng giá trị tuyệt đối của mọi đa thức P có giá trị nhỏ nhất; tức là, tồn tại $x^* \in \mathbb{R}$ sao cho $|P(x^*)| = \inf\{|P(x)| : x \in \mathbb{R}\}$.

Bài 01.02.1.63

(a) Cho ví dụ về hàm bị chặn trên $[0, 1]$ nhưng không có giá trị nhỏ nhất, cũng không có giá trị lớn nhất.

(b) Cho ví dụ về hàm bị chặn trên $[0, 1]$ nhưng không có giá trị nhỏ nhất trên mọi đoạn $[a, b] \subset [0, 1]$, $a < b$.

Bài 01.02.1.64

Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ và $\delta > 0$, đặt

$$\omega_f(x_0, \delta) = \sup\{|f(x) - f(x_0)| : x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta\}$$

và $\omega_f(x_0) = \lim\limits_{\delta \to 0^+} \omega_f(x_0, \delta)$. Chứng minh rằng f liên tục tại x_0 nếu và chỉ nếu $\omega_f(x_0) = 0$.

Bài 01.02.1.65

(a) Cho $f, g \in C([a, b])$ và với $x \in [a, b]$, đặt $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ và $H(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. Chứng minh rằng $h, H \in C([a, b])$.

(b) Cho $f_1, f_2, f_3 \in C([a, b])$ và với $x \in [a, b]$, đặt $f(x)$ là một trong ba giá trị $f_1(x)$, $f_2(x)$ và $f_3(x)$ mà nằm giữa hai giá trị còn lại. Chứng minh rằng $f \in C([a, b])$.

Bài 01.02.1.66

Chứng minh rằng nếu $f \in C([a, b])$, thì các hàm được xác định bởi

$$m(x) = \inf\{f(\zeta) : \zeta \in [a, x]\} \text{ và } M(x) = \sup\{f(\zeta) : \zeta \in [a, x]\}$$

cũng liên tục trên $[a, b]$.

Bài 01.02.1.67

Gọi f là hàm bị chặn trên $[a, b]$. Chứng minh rằng các hàm được xác định bởi

$$m(x) = \inf\{f(\zeta) : \zeta \in [a, x)\} \text{ và } M(x) = \sup\{f(\zeta) : \zeta \in [a, x)\}$$

cũng liên tục trên (a, b).

Bài 01.02.1.68

Với các giả thiết của bài toán trước, kiểm tra các hàm

$$m^*(x) = \inf\{f(\zeta) : \zeta \in [a, x]\} \text{ và } M^*(x) = \sup\{f(\zeta) : \zeta \in [a, x]\}$$

có liên tục trái trên (a, b) hay không ?

Bài 01.02.1.69

Giả sử f liên tục trên $[a, \infty)$ và $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ hữu hạn. Chứng minh rằng f bị chặn trên $[a, \infty)$.

Bài 01.02.1.70

Cho f là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đặt $\{x_n\}$ là dãy bị chặn. Các bất đẳng thức sau

$$\varliminf_{n\to\infty} f(x_n) = f(\varliminf_{n\to\infty} x_n) \text{ và } \varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) = f(\varlimsup_{n\to\infty} x_n)$$

có đúng không ?

Bài 01.02.1.71

Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục, tăng và gọi $\{x_n\}$ là dãy bị chặn. Chứng minh rằng

(a) $$\varliminf_{n\to\infty} f(x_n) = f(\varliminf_{n\to\infty} x_n),$$

(b) $$\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) = f(\varlimsup_{n\to\infty} x_n).$$

Bài 01.02.1.72

Tìm các điểm gián đoạn của hàm số :

a. $f(x) = \dfrac{13x}{\sqrt{4x^2 + 4x + 1}}$ b. $f(x) = \dfrac{\tan x}{x + 1}$

c. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - x}, \text{khi } 0 \neq x \neq 1 \\ 2, \text{khi } x = 0 \text{ hoặc } x = 1 \end{cases}$

Bài 01.02.1.73

Giả sử f liên tục trên $\mathbb{R}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Xác định g bằng cách đặt

$$g(x) = \sup\{t : f(t) < x\} \text{ với } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Chứng minh rằng g liên tục trái.

(b) g có liên tục không ?

Bài 01.02.1.74

Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm tuần hoàn liên tục với hai chu kì *không thông ước* T_1 và T_2; tức là $\frac{T_1}{T_2}$ vô tỷ. Chứng minh rằng f là hàm hằng. Cho ví dụ hàm tuần hoàn khác hàm hằng có hai chu kì không thông ước.

Bài 01.02.1.75

(a) Chứng minh rằng nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục, tuần hoàn, khác hàm hằng, thì nó có chu kì dương nhỏ nhất, gọi là chu kì cơ bản.

(b) Cho ví dụ hàm tuàn hoàn khác hàm hằng mà không có chu kì cơ bản.

(c) Chứng minh rằng nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm tuần hoàn không có chu kì cơ bản, thì tập tất cả các chu kì của f trù mật trong $\mathbb{R}$.

Bài 01.02.1.76

(a) Chứng minh rằng định lí trong mục (a) của bài toán trước vẫn còn đúng khi tính liên tục của f trên $\mathbb{R}$ được thay thế bởi tính liên tục tại một điểm.

(b) Chứng minh rằng nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm tuần hoàn không có chu kì cơ bản và nếu nó liên tục tại ít nhất một điểm, thì nó là hàm hằng.

Bài 01.02.1.77

Chứng minh rằng nếu $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục, tuần hoàn và $\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x)) = 0$ thì $f = g$.

Bài 01.02.1.78

Cho ví dụ hai hàm tuần hoàn f và g sao cho mọi chu kì của f không thông ước với mọi chu kì của g và sao cho $f + g$

(a) không tuần hoàn,

(b) tuần hoàn.

Bài 01.02.1.79

Cho $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là các hàm liên tục và tuần hoàn lần lượt với chu kì cơ bản dương T_1 và T_2. Chứng minh rằng nếu $\frac{T_1}{T_2} \notin \mathbb{Q}$, thì $h = f + g$ không là hàm tuần hoàn.

Bài 01.02.1.80

Cho $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là các hàm tuần hoàn .Giả sử f liên tục và không có chu kì nào của g thông ước với chu kì cơ bản của f. Chứng minh rằng $f + g$ không là hàm tuần hoàn.

Bài 01.02.1.81

Chứng minh rằng tập các điểm gián đoạn của hàm đơn điệu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ không quá đếm được.

Bài 01.02.1.82

Giả sử f liên tục trên $[0, 1]$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f(\frac{k}{n}) = 0.$$

Bài 01.02.1.83

Cho f liên tục trên $[0, 1]$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) = 0.$$

Bài 01.02.1.84

Cho các ví dụ các hàm có tính chất giá trị trung gian trên khoảng I nhưng không liên tục trên khoảng này.

Bài 01.02.1.85

Chứng minh rằng hàm tăng thực sự $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ có tính chất giá trị trung gian thì liên tục trên $[a, b]$.

Bài 01.02.1.86

Cho $f : [0, 1] \to [0, 1]$ liên tục. Chứng minh rằng f có *điểm cố định* trong $[0, 1]$; tức là, tồn tại $x_0 \in [0, 1]$ sao cho $f(x_0) = x_0$.

Bài 01.02.1.87

Giả sử $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho $f(a) < g(a)$ và $f(b) > g(b)$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho $f(x_0) = g(x_0)$.

Bài 01.02.1.88

Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và tuần hoàn với chu kì $T > 0$. Chứng minh rằng tồn tại x_0 sao cho

$$f\left(x_0 + \frac{T}{2}\right) = f(x_0).$$

Bài 01.02.1.89

Hàm $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ liên tục. Chứng minh rằng, với $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cho trước trong (a, b), tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho

$$f(x_0) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdot + f(x_n)).$$

Bài 01.02.1.90

(a) Chứng minh rằng phương trình $(1 - x)\cos x = \sin x$ có ít nhất một nghiệm trong $(0, 1)$.

(b) Với đa thức khác không P, chứng minh rằng phương trình $|P(x)| = e^x$ có ít nhất một nghiệm.

Bài 01.02.1.91

Với $a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < \cdots < a_n < b_n$, chứng minh rằng mọi nghiệm của đa thức

$$P(x) = \prod_{k=0}^{n}(x + a_k) + 2\prod_{k=0}^{n}(x + b_k), \quad x \in \mathbb{R},$$

đều là thực.

Bài 01.02.1.92

Giả sử f và g có tính chất giá trị trung gian trên $[a, b]$. Hỏi $f + g$ có tính chất giá trị trung gian trên khoảng đó không ?

Bài 01.02.1.93

Giả sử $f \in C([0, 2])$ và $f(0) = f(2)$. Chứng minh rằng tồn tại x_1 và x_2 trong $[0, 2]$ sao cho

$$x_2 - x_1 = 1 \text{ và } f(x_2) = f(x_1).$$

Giải thích ý nghĩa hình học kết quả trên.

Bài 01.02.1.94

Cho $f \in C([0, 2])$. Chứng minh rằng tồn tại x_1 và x_2 trong $[0, 2]$ sao cho

$$x_2 - x_1 = 1 \text{ và } f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{2}(f(2) - f(0)).$$

Bài 01.02.1.95

Với $n \in \mathbb{N}$, gọi $f \in C([0,n])$ sao cho $f(0) = f(n)$. Chứng minh rằng tồn tại x_1 và x_2 trong $[0,n]$ thoả mãn

$$x_2 - x_1 = 1 \text{ và } f(x_2) = f(x_1).$$

Bài 01.02.1.96

Hàm liên tục f trên $[0,n]$, $n \in \mathbb{N}$, thoả mãn $f(0) = f(n)$. Chứng minh rằng với mọi $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, tồn tại x_k và x_k' sao cho $f(x_k) = f(x_k')$, ở đây $x_k - x_k' = k$ hoặc $x_k - x_k' = n - k$. Hỏi với mọi $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, có tồn tại x_k và x_k' sao cho $f(x_k) = f(x_k')$, ở đây $x_k - x_k' = k$?

Bài 01.02.1.97

6 Với $n \in \mathbb{N}$, gọi $f \in C([0,n])$ sao cho $f(0) = f(n)$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = f(y)$ có ít nhất n nghiệm với $x - y \in \mathbb{N}$.

Bài 01.02.1.98

Giả sử các hàm thực liên tục f và g xác định trên $\mathbb{R}$ giao hoán với nhau; tức là, $f(g(x)) = g(f(x))$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu phương trình $f^2(x) = g^2(x)$ có nghiệm, thì phương trình $f(x) = g(x)$ cũng có nghiệm (ở đây $f^2(x) = f(f(x))$ và $g^2(x) = g(g(x))$).

Chỉ ra ví dụ rằng giả thiết về tính liên tục của f và g trong bài toán trên không thể bỏ qua.

Bài 01.02.1.99

Chứng minh rằng đơn ánh liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thì hoặc tăng thực sự, hoặc giảm thực sự.

Bài 01.02.1.100

Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là dơn ánh liên tục. Chứng minh rằng nếu tồn tại n sao cho phép lặp thứ n của f là ánh xạ đồng nhất, tức là, $f^n(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, thì

(a) $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, nếu f tăng thực sự,

(b) $f^2(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, nếu f giảm thực sự.

Bài 01.02.1.101

Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện $f(f(x)) = f^2(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$.Chứng minh rằng f không thể liên tục.

Bài 01.02.1.102

Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ có tính chất giá trị trung gian và tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $f^n(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$, ở đây f^n kí hiệu phép lặp thứ n của f.

Bài 01.02.1.103

Chứng minh rằng nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ có tính chất giá trị trung gian và $f^{-1}(\{q\})$ đóng với mọi q hữu tỷ, thì f liên tục.

Bài 01.02.1.104

Giả sử $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ liên tục và bị chặn. Chứng minh rằng, với T cho trước, tồn tại dãy $\{x_n\}$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \text{ và } \lim_{n\to\infty} (f(x_n + T) - f(x_n)).$$

Bài 01.02.1.105

Cho ví dụ hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ đạt mỗi giá trị của nó đúng ba lần. Hỏi có tồn tại hay không hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ đạt mỗi giá trị của nó đúng hai lần ?

Bài 01.02.1.106

Cho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ liên tục và *đơn điệu thực sự từng mảnh*. (Hàm f gọi là đơn điệu thực sự từng mảnh trên $[0, 1]$, nếu tồn tại phân hoạch của $[0, 1]$ thành hữu hạn khoảng con $[t_{i-1}, t_i]$, ở đây $i = 1, 2, \dots, n$ và $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, sao cho f đơn điệu trên mỗi khoảng con đó.) Chứng minh rằng f nhận một trong các giá trị của nó một số lẻ lần.

Bài 01.02.1.107

Hàm liên tục $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ nhận mỗi giá trị của nó hữu hạn lần và $f(0) \neq f(1)$. Chứng minh rằng f nhận một trong các giá trị của nó một số lẻ lần.

Bài 01.02.1.108

Giả sử $f : K \to K$ liên tụctrên tập con compact $K \subset \mathbb{R}$. Ngoài ra, giả sử $x_0 \in K$ là số sao cho mọi điểm giới hạn của dãy lặp $\{f^n(x_0)\}$ là điểm cố định của f. Chứng minh rằng $\{f^n(x_0)\}$ hội tụ.

Bài 01.02.1.109

Hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục, tăng sao cho F xác định bởi $F(x) = f(x) - x$ tuần hoàn với chu kì 1. Chứng minh rằng nếu $\alpha(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^n(0)}{n}$, thì tồn tại $x_0 \in [0, 1]$ sao cho $F(x_0) = \alpha(f)$. Chứng minh thêm rằng f có điểm bất động trong $[0, 1]$ nếu và chỉ nếu $\alpha(f) = 0$. (Xem các bài toán 1.1.40 - 1.1.42.)

Bài 01.02.1.110

Hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ thoả mãn $f(0) < 0$ và $f(1) > 0$, và tồn tại hàm g liên tục trên $[0,1]$ sao cho $f+g$ giảm. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng mở $(0,1)$.

Bài 01.02.1.111

Chứng minh rằng mọi song ánh $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ có vô hạn điểm gián đoạn.

Bài 01.02.1.112

Nhắc lại rằng mỗi $x \in (0,1)$ có thể được biểu diễn bởi số nhị phân (binary fraction) $.a_1a_2a_3\ldots$, ở đây $a_i \in \{0,1\}$, $i = 1,2,\ldots$. Trong trường hợp x có hai khai triển nhị phân khác nhau, ta chọn khai triển có vô hạn chữ số 1. Tiếp đó, gọi hàm $f : (0,1) \to [0,1]$ được xác định bởi

$$f(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Chứng minh rằng f gián đoạn tại mọi $x \in (0,1)$, tuy nhiên, nó có tính chất giá trị trung gian.

Bài 01.02.1.113

Chứng minh rằng nếu x_0 là điểm giới hạn của A và $f : A \to \mathbb{R}$, thì

(a) $\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = \sup_{\delta>0} \inf\{f(x)\} : x \in A,\ 0 < |x - x_0| < \delta,$

(b) $\overline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = \inf_{\delta>0} \sup\{f(x)\} : x \in A,\ 0 < |x - x_0| < \delta.$

Bài 01.02.1.114

Chứng minh rằng $y_0 \in \mathbb{R}$ là giới hạn dưới của $f : A \to \mathbb{R}$ tại điểm giới hạn x_0 của A nếu và chỉ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, hai điều kiện sau đây được thoả mãn :

(i) tồn tại $\delta > 0$ sao cho $f(x) > y_0 - \varepsilon$ với mọi $x \in A$ và $0 < |x - x_0| < \delta$,

(ii) với mọi $\delta > 0$, tồn tại $x' \in A$ sao cho $0 < |x' - x_0| < \delta$ và $f(x) < y_0 + \varepsilon$.

Thiết lập bài toán tương tự cho giới hạn trên của f tại x_0.

Bài 01.02.1.115

Cho $f : A \to \mathbb{R}$ và x_0 là điểm tới hạn của A. Chứng minh rằng

(a) $\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ nếu và chỉ nếu với mọi y thực và với mọi $\delta > 0$, tồn tại $x' \in A$ sao cho $0 < |x' - x_0| < \delta$ và $f(x') < y$.

(b) $\overline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ nếu và chỉ nếu với mọi y thực và với mọi $\delta > 0$, tồn tại $x' \in A$ sao cho $0 < |x' - x_0| < \delta$ và $f(x') > y$.

Bài 01.02.1.116

Giả sử $f : A \to \mathbb{R}$ và x_0 là điểm giới hạn của A. Chứng minh rằng nếu $l = \underline{\lim}_{x\to x_0} f(x)$ (tương ứng $L = \overline{\lim}_{x\to x_0} f(x)$), thì tồn tại dãy $\{x_n\}$, $x_n \in A$, $x_n \neq x_0$, hội tụ tới x_0 sao cho $l = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ (tương ứng $L = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$).

Bài 01.02.1.117

Cho $f : A \to \mathbb{R}$ và x_0 là điểm giới hạn của A. Chứng minh rằng

$$\underline{\lim}_{x\to x_0} (-f(x)) = -\overline{\lim}_{x\to x_0} f(x) \text{ và } \overline{\lim}_{x\to x_0} (-f(x)) = -\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x).$$

Bài 01.02.1.118

Cho $f : A \to (0, \infty)$ và x_0 là điểm giới hạn của A. Chứng minh rằng

$$\underline{\lim}_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\overline{\lim}_{x\to x_0} f(x)} \text{ và } \overline{\lim}_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x)}.$$

(Ta giả sử rằng $\frac{1}{+\infty} = 0$ và $\frac{1}{0^+} = +\infty$.)

Bài 01.02.1.119

Giả sử $f, g : A \to \mathbb{R}$ và x_0 là điểm giới hạn của A. Chứng minh rằng các bất đẳng thức sau đây đúng (trừ trường hợp các dạng bất định $+\infty - \infty$ và $-\infty + \infty$):

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) + \underline{\lim}_{x\to x_0} g(x) &\leq \underline{\lim}_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) \leq \underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) + \overline{\lim}_{x\to x_0} g(x) \\ &\leq \overline{\lim}_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) \leq \overline{\lim}_{x\to x_0} f(x) + \overline{\lim}_{x\to x_0} g(x).\end{aligned}$$

Cho ví dụ các hàm sao cho "$\leq$" trong các bất đẳng thức trên được thay bởi "$<$".

Bài 01.02.1.120

Giả sử $f, g : A \to [0, \infty)$ và x_0 là điểm giới hạn của A. Chứng minh rằng các bất đẳng thức sau đây đúng (trừ trường hợp các dạng bất định $0 \cdot (+\infty)$ và $(+\infty) \cdot 0$):

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{x \to x_0} f(x) \cdot \underline{\lim}_{x \to x_0} g(x) &\le \underline{\lim}_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) \le \underline{\lim}_{x \to x_0} f(x) \cdot \overline{\lim}_{x \to x_0} g(x) \\ &\le \overline{\lim}_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) \le \overline{\lim}_{x \to x_0} f(x) \cdot \overline{\lim}_{x \to x_0} g(x).\end{aligned}$$

Cho ví dụ các hàm sao cho $'' \le ''$ trong các bất đẳng thức trên được thay bởi $'' <''$.

Bài 01.02.1.121

Chứng minh rằng nếu $\lim_{x \to x_0} f(x)$ tồn tại, thì (trừ trường hợp các dạng bất định $+\infty - \infty$ và $-\infty + \infty$):

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \to 0} f(x) + \underline{\lim}_{x \to x_0} g(x), \\ \overline{\lim}_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \to 0} f(x) + \overline{\lim}_{x \to x_0} g(x).\end{aligned}$$

Ngoài ra, nếu f và g là các hàm không âm, thì (trừ trường hợp các dạng bất định $0 \cdot (+\infty)$ và $(+\infty) \cdot 0$):

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x \to 0} f(x) \cdot \underline{\lim}_{x \to x_0} g(x), \\ \overline{\lim}_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x \to 0} f(x) \cdot \overline{\lim}_{x \to x_0} g(x).\end{aligned}$$

Bài 01.02.1.122

Chứng minh rằng nếu f liên tục trên (a, b), $l = \underline{\lim}_{x \to a} f(x)$ và $L = \overline{\lim}_{x \to a} f(x)$, thì với mọi $\lambda \in [l, L]$, tồn tại dãy $\{x_n\}$ gồm các điểm trong (a, b) hội tụ tới a sao cho $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lambda$.

Bài 01.02.1.123

Tìm tất cả các điểm tại đó $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \text{ vô tỷ}, \\ \sin x & \text{nếu } x \text{ hữu tỷ} \end{cases}$$

là nửa liên tục.

Bài 01.02.1.124

Xác định tất cả các điểm tại đó f xác định bởi

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{nếu } x \text{ vô tỷ}, \\ 0 & \text{nếu } x \text{ hữu tỷ} \end{cases}$$

là nửa liên tục.

Bài 01.02.1.125

Chứng minh rằng

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{nếu } x \text{ vô tỷ hoặc } x=0, \\ \frac{1}{q} & \text{nếu } x=\frac{p}{q},\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N}, \\ & \text{và } p,q \text{ nguyên tố cùng nhau}, \end{cases}$$

là nửa liên tục trên.

Bài 01.02.1.126

Tìm tất cả các điểm tại đó hàm xác định bởi

(a) $$f(x)=\begin{cases} |x| & \text{nếu } x \text{ vô tỷ hoặc } x=0, \\ \frac{qx}{qx+1} & \text{nếu } x=\frac{p}{q},\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N}, \\ & \text{và } p,q \text{ nguyên tố cùng nhau} \end{cases}$$

(b) $$f(x)=\begin{cases} \frac{(-1)^q}{q+1} & \text{nếu } x\in\mathbb{Q}\cap(0,1] \text{ và } x=\frac{p}{q},\ p,q\in\mathbb{N}, \\ & \text{và } p,q \text{ nguyên tố cùng nhau}, \\ 0 & \text{nếu } x\in(0,1) \text{ vô tỷ} \end{cases}$$

không nửa liên tục trên, cũng không nửa liên tục dưới.

Bài 01.02.1.127

Cho $f,g : A\to\mathbb{R}$ nửa liên tục trên (tương ứng, dưới) tại $x_0\in A$. Chứng minh rằng

(a) nếu $a>0$ thì af nửa liên tục dưới (tương ứng, trên) tại $x_0\in A$. Nếu $a>0$ thì af nửa liên tục trên (tương ứng, dưới) tại x_0.

(b) $f+g$ nửa liên tục dưới (tương ứng, trên) tại x_0.

Bài 01.02.1.128

Giả sử rằng $f_n : A\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, nửa liên tục dưới (tương ứng, trên) tại $x_0\in A$. Chứng minh rằng $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ (tương ứng, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$) nửa liên tục dưới (tương ứng, trên) tại x_0.

Bài 01.02.1.129

Chứng minh rằng giới hạn theo từng điểm của một dãy tăng (tương ứng, giảm) các hàm nửa liên tục dưới (tương ứng, trên) là nửa liên tục dưới (tương ứng, trên).

Bài 01.02.1.130

Với $f : A \to \mathbb{R}$ và x là điểm giới hạn của A, định nghĩa *dao độ của f tại x* bởi

$$o_f(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \sup\{|f(z) - f(u)| \, : \, z, u \in A, \, |z - x| < \delta, \, |u - x| < \delta\}$$

Chứng minh rằng $o_f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, ở đây

$$f_1(x) = \max\{f(x), \overline{\lim_{z \to x}} f(z)\} \text{ và } f_2(x) = \min\{f(x), \underline{\lim_{z \to x}} f(z)\}.$$

Bài 01.02.1.131

Gọi f_1, f_2, và o_f như trong bài toán trước. Chứng minh rằng f_1 và o_f là nửa liên tục trên, và f_2 là nửa liên tục dưới.

Bài 01.02.1.132

Chứng minh rằng để $f : A \to \mathbb{R}$ là nửa liên tục dưới (tương ứng, trên) tại $x_0 \in A$, điều kiện cần và đủ là với mọi $a < f(x_0)$ (tương ứng, $a > f(x_0)$), tồn tại $\delta > 0$ sao cho $f(x) > a$ (tương ứng, $f(x) < a$) bất cứ khi nào $|x - x_0| < \delta$, $x \in A$.

Bài 01.02.1.133

Chứng minh rằng để $f : A \to \mathbb{R}$ là nửa liên tục dưới (tương ứng, trên) tại $x_0 \in A$, điều kiện cần và đủ là với mọi $a \in \mathbb{R}$, tập $\{x \in A \, : \, f(x) > a\}$ (tương ứng, $\{x \in A \, : \, f(x) < a\}$) là mở trong A.

Bài 01.02.1.134

Chứng minh rằng $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là nửa liên tục dưới nếu và chỉ nếu tập $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, y \geq f(x)\}$ là đóng trong $\mathbb{R}^2$.

Lập công thức và chứng minh điều kiện cần và đủ cho tính nửa liên tục trên của f trên $\mathbb{R}$.

Bài 01.02.1.135

Chứng minh *định lí Baire* sau đây. Mọi hàm nửa liên tục dưới (tương ứng, trên) $f : A \to \mathbb{R}$ là giới hạn của dãy tăng (tương ứng, giảm) các hàm liên tục trên A.

Bài 01.02.1.136

Chứng minh rằng nếu $f : A \to \mathbb{R}$ nửa liên tục trên, $g : A \to \mathbb{R}$ nửa liên tục dưới và $f(x) \le g(x)$ khắp nơi trên A, thì tồn tại hàm liên tục h trên A sao cho

$$f(x) \le h(x) \le g(x), \quad x \in A.$$

Bài 01.02.1.137

Kiểm tra các hàm sau đây có liên tục đều trên $(0,1)$ hay không

(a) $f(x) = e^x$, (b) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$,

(c) $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$, (d) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$,

(e) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, (f) $f(x) = e^x\cos\frac{1}{x}$,

(g) $f(x) = \ln x$, (h) $f(x) = \cos x \cdot \cos\frac{\pi}{x}$,

(i) $f(x) = \operatorname{cotg} x$.

Bài 01.02.1.138

Hàm nào trong số các hàm sau đây liên tục đều trên $[0,\infty)$?

(a) $f(x) = \sqrt{x}$, (b) $f(x) = x\sin x$,

(c) $f(x) = \sin^2 x$, (d) $f(x) = \sin x^2$,

(e) $f(x) = e^x$, (f) $f(x) = e^{\sin(x^2)}$,

(g) $f(x) = \sin\sin x$, (h) $f(x) = \sin(x\sin x)$,

(i) $f(x) = \sin\sqrt{x}$.

Bài 01.02.1.139

Chứng minh rằng nếu f liên tục đều trên (a,b), $a,b \in \mathbb{R}$, thì $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ tồn tại như các giới hạn hữu hạn.

Bài 01.02.1.140

Giả sử f và g liên tục đều trên (a,b) ($[a,\infty)$). Từ đó có suy ra tính liên tục đều trên (a,b) ($[a,\infty)$) của các hàm

(a) $f+g$,

(b) fg,

(c) $x \mapsto f(x)\sin x$?

Bài 01.02.1.141

(a) Chứng minh rằng nếu f là liên tục đều trên $(a, b]$ và trên $[b, c)$, thì nó cũng liên tục trên (a, c).

(b) Giả sử A và B là các tập đóng trong $\mathbb{R}$ và gọi $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ là liên tục đều trên A và B. Hỏi f có nhất thiết liên tục đều trên $A \cup B$?

Bài 01.02.1.142

Chứng minh rằng mọi hàm liên tục và tuần hoàn trên $\mathbb{R}$ thì liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

Bài 01.02.1.143

(a) Chứng minh rằng nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ là hữu hạn, thì f cũng liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

(b) Chứng minh rằng nếu $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ liên tục và $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ là hữu hạn, thì f cũng liên tục đều trên $[a, \infty)$.

Bài 01.02.1.144

Kiểm tra tính liên tục đều của

(a) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ trên $(-\infty, +\infty)$,

(b) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ trên $(0, +\infty)$,

(c) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ trên $(0, +\infty)$.

Bài 01.02.1.145

Giả sử f liên tục đều trên $(0, \infty)$. Hỏi các giới hạn $\lim\limits_{x\to+0} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ có tồn tại không ?

Bài 01.02.1.146

Chứng minh rằng mọi hàm bị chặn, đơn điệu và liên tục trên khoảng $I \subset \mathbb{R}$ là liên tục đều trên I.

Bài 01.02.1.147

Giả sử f liên tục đều và không bị chặn trên $[0, \infty)$. Phải chăng hoặc $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, hoặc $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$?

Bài 01.02.1.148

Hàm $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ liên tục đều và với mọi $x \geq 0$, dãy $\{f(x + n)\}$ hội tụ tới không. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Bài 01.02.1.149

Giả sử $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ liên tục đều. Chứng minh rằng tồn tại số dương M sao cho $\frac{|f(x)|}{x} \le M$ với $x \ge 1$.

Bài 01.02.1.150

Gọi $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ liên tục đều. Chứng minh rằng tồn tại số dương M với tính chất sau đây :

$$\sup_{u>0}\{|f(x+u) - f(u)|\} \le M(x+1) \text{ với mọi } x \ge 0.$$

Bài 01.02.1.151

Cho $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, liên tục đều. Chứng minh rằng nếu $\{x_n\}$ là dãy Cauchy các phần tử trong A, thì $\{f(x_n)\}$ cũng là dãy Cauchy.

Bài 01.02.1.152

Giả sử $A \subset \mathbb{R}$ bị chặn. Chứng minh rằng nếu $f : A \to \mathbb{R}$ biến dãy Cauchy các phần tử của A thành dãy Cauchy, thì f liên tục đều trên A. Tính bị chặn của A có phải là giả thiết cốt yếu không ?

Bài 01.02.1.153

Chứng minh rằng f liên tục đều trên $A \in \mathbb{R}$ nếu và chỉ nếu với mọi dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ các phần tử của A,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0 \text{ suy ra } \lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0.$$

Bài 01.02.1.154

Giả sử $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ liên tục đều. Từ đó có suy ra

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+\frac{1}{x})}{f(x)} = 1\,?$$

Bài 01.02.1.155

Hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại 0 và thoả mãn các điều kiện sau đây

$$f(0) = 0 \text{ và } f(x_1 + x_2) \le f(x_1) + f(x_2) \text{ với mọi } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng f liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

Bài 01.02.1.156

Với $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, ta định nghĩa

$$\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x_1 - f(x_2))| : x_1, x_2 \in A, |x_1 - x_2| < \delta\}$$

và gọi ω_f là *mô đun liên tục của* f. Chứng minh rằng f liên tục đều trên A nếu và chỉ nếu $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \omega_f(\delta) = 0$.

Bài 01.02.1.157

Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục đều. Chứng minh rằng các phát biểu sau tương đương.

(a) Với mọi hàm liên tục đều $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \cdot g$ liên tục đều trên $\mathbb{R}$

(b) Hàm $x \mapsto |x| f(x)$ liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

Bài 01.02.1.158

Chứng minh điều kiện cần và đủ sau đây để f là hàm liên tục đều trên khoảng I. Với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $N > 0$ sao cho với mọi $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$,

$$\left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x - 2}\right| > N \text{ suy ra } |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$