TD1 01 MỞ ĐẦU VỀ NGUYÊN HÀM

Đặt vấn đề

Một máy bay di chuyển ra đến đường băng và bắt đầu chạy đà để cất cánh. Giả sử vận tốc của máy bay khi chạy đà được cho bởi $v(t) = 5 + 3t$ (m/s), với t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi máy bay bắt đầu chạy đà. Sau 30 giây thì máy bay cất cánh rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển từ khi bắt đầu chạy đà đến khi rời đường băng là bao nhiêu mét?

Ta cần tìm quãng đường $S(t)$ mà máy bay di chuyển được sau t giây kể từ lúc bắt đầu chạy đà. Từ ý nghĩa cơ học của đạo hàm, ta biết rằng $S'(t) = v(t)$. Như vậy, ta cần tìm một hàm số có đạo hàm bằng hàm số $v(t)$ đã cho. Bài toán này dẫn đến một khái niệm quan trọng trong Toán học, đó là khái niệm nguyên hàm.

1. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT HÀM SỐ

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên một khoảng K (hoặc một đoạn, hoặc một nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là một **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K.

Chú ý: Trường hợp $K = [a, b]$ thì các đẳng thức $F'(a) = f(a)$ và $F'(b) = f(b)$ được hiểu là đạo hàm bên phải tại điểm $x = a$ và đạo hàm bên trái tại điểm $x = b$ của hàm số $F(x)$, tức là

$$\lim_{x \to a^+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = f(a) \text{ và } \lim_{x \to b^-} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = f(b).$$

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x$. Trong các hàm số cho dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên R?

a) $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$;

b) $G(x) = \frac{x^3}{3} + x^2$.

Ví dụ 2: Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$?

a) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln x$;

b) $G(x) = \frac{x^2}{2} - \ln x$.

Giả sử hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Khi đó:

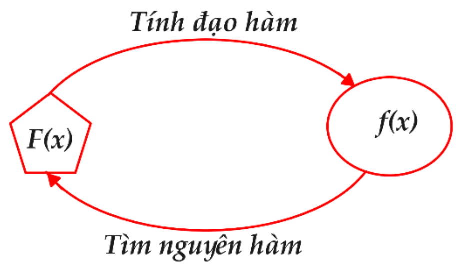
a) Với mỗi hằng số C, hàm số $F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K;

b) Nếu hàm số $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $G(x)=F(x)+C$ với mọi $x\in K$.

Như vậy, nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x)+C$ (C là hằng số). Ta gọi $F(x)+C$ $(C\in R)$ là **họ các nguyên hàm** của $f(x)$ trên K, kí hiệu bởi $\int f(x)dx$.

Chú ý:

a) Để tìm họ các nguyên hàm (gọi tắt là tìm nguyên hàm) của hàm số $f(x)$ trên K, ta chỉ cần tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ trên K và khi đó
$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C, C \text{ là hằng số.}$$
b) Người ta chứng minh được rằng, nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng K thì $f(x)$ có nguyên hàm trên khoảng đó.



c) Biểu thức $f(x)dx$ gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$, kí hiệu là $dF(x)$. Vậy
$$dF(x)=F'(x)dx=f(x)dx.$$
d) Khi tìm nguyên hàm của một hàm số mà không chỉ rõ tập K, ta hiểu là tìm nguyên hàm của hàm số đó trên tập xác định của nó.

✪ **Ví dụ 3:** Tìm một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2$ trên R. Từ đó hãy tìm $\int x^2dx$.

✪ **Ví dụ 4:** Tìm $\int x^3dx$.

2. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA NGUYÊN HÀM

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \ (k\neq 0).$$

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

$$\int [f(x)-g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx.$$

✪ **Ví dụ 5:** Sử dụng kết quả của **Ví dụ 3,** hãy tìm:

a) $\int 3x^2dx$;

b) $\int -1{,}5x^2dx$.

✪ **Ví dụ 6:** Cho hàm số $f(x)=x^n$ $(n\in N^*)$.

a) Chứng minh rằng hàm số $F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Từ đó tìm $\int x^n dx$.

b) Từ kết quả câu a, tìm $\int kx^n dx$ (k là hằng số thực khác 0).

✪ **Ví dụ 7:** Sử dụng kết quả của **Ví dụ 6** và tính chất cơ bản của nguyên hàm, hãy tìm:

a) $\int (x^2+x)dx$;

b) $\int (4x^3 - 3x^2)dx$.

✪ **Ví dụ 8:** Tìm:

a) $\int (3x^2 + 1)dx$;

b) $\int (2x - 1)^2 dx$.

✪ **Ví dụ 9:** Doanh thu bán hàng của một công ty khi bán một loại sản phẩm là số tiền $R(x)$ (triệu đồng) thu được khi x đơn vị sản phẩm được bán ra. Tốc độ biến động (thay đổi) của doanh thu khi x đơn vị sản phẩm đã được bán là hàm số $M_R(x) = R'(x)$. Một công ty công nghệ cho biết, tốc độ biến đổi của doanh thu khi bán một loại con chip của hãng được cho bởi $M_R(x) = 300 - 0{,}1x$, ở đó x là số lượng chip đã bán. Tìm doanh thu của công ty khi đã bán 1000 con chip.

Hướng dẫn: Vì $R'(x) = M_R(x)$nên doanh thu $R(x)$ là một nguyên hàm của $M_R(x)$

3. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

Ở lớp 11, ta đã biết đạo hàm của các hàm số $y = x^n$ $(n \in N^*)$ và $y = \sqrt{x}$ là:

$$(x^n)' = nx^{n-1};$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ hay } \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} (x > 0).$$

Tổng quát, người ta chứng minh được

Hàm số luỹ thừa $y = x^\alpha$ $(\alpha \in R)$ có đạo hàm với mọi $x > 0$ và $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Sau đây là bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

$\int 0\mathrm{d}x = C$	$\int 1\mathrm{d}x = x + C$
$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C.$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(0 < a \neq 1)$
$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C;$	$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C;$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C;$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.$

✪ **Ví dụ 10:** Tìm

a) $\int \sqrt{x}dx (x > 0)$;

b) $\int \frac{1}{x^3} dx$;

c) $\int \left(2x^2 + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx$.

✪ **Ví dụ 11:** Tìm

a) $\int \frac{1}{x^4} dx$;

b) $\int x\sqrt{x}dx\ (x > 0)$;

c) $\int \left(\frac{3}{x} - 5\sqrt[3]{x}\right) dx\ (x > 0)$

✪ **Ví dụ 12:** Tìm

a) $\int (\cos x + \sin x)dx$;

b) $\int \left(2\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx$.

✪ **Ví dụ 13:** Tìm

a) $\int (3\cos x - 4\sin x)dx$;

b) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$.

✪ **Ví dụ 14:** Tìm

a) $\int 2^x dx$;

b) $\int \frac{1}{3^x} dx$;

c) $\int (2e^x - 5^x)dx$.

✪ **Ví dụ 15:** Tìm

a) $\int 4^x dx$;

b) $\int \frac{1}{e^x} dx$;

c) $\int \left(2.3^x - \frac{1}{3}.7^x\right) dx$.

4. BÀI TẬP

1. Trong mỗi trường hợp sau, hàm số $F(x)$ có là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng tương ứng không? Vì sao?

a) $F(x) = x\ln x$ và $f(x) = 1 + \ln x$ trên khoảng $(0; +\infty)$;

b) $F(x) = e^{\sin x}$ và $f(x) = e^{\cos x}$ trên R.

2. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$;

b) $f(x) = x^3 - x$;

c) $f(x) = (2x + 1)^2$;

d) $f(x) = \left(2x - \frac{1}{x}\right)^2$.

3. Tìm:

a) $\int (3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})dx$;

b) $\int \sqrt{x}(7x^2 - 3)dx\ (x > 0)$;

c) $\int \frac{(2x-1)^2}{x^2} dx$;

d) $\int \left(2^x + \frac{3}{x^2}\right) dx$.

4. Tìm:

a) $\int \left(2\cos x - \frac{3}{\sin^2 x}\right) dx$;

b) $\int 4\sin^2 \frac{x}{2} dx$;

c) $\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$;

d) $\int (x + \tan^2 x) dx$.

5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$. Biết rằng, $f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ với mọi $x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = 1$. Tính giá trị $f(4)$.

6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C). Xét điểm $M(x; f(x))$ thay đổi trên (C). Biết rằng, hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là $k_M = (x-1)^2$ và điểm M trùng với gốc tọa độ khi nó nằm trên trục tung. Tìm biểu thức $f(x)$.

7. Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi $t = 0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t) = 160 - 9{,}8t$ (m/s). Tìm độ cao của viên đạn (tính từ mặt đất):

a) Sau $t = 5$ giây;

b) Khi nó đạt độ cao lớn nhất (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

--- Hết ---