

IA2
2NỀN TẢNG VỀ MIN MAX
CỦA HÀM SỐ

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên D .

Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D , kí hiệu $M = \max_D f(x)$ nếu

$$\begin{cases} f(x) \leq M \quad \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D \mid f(x_0) = M \end{cases}$$

Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D , kí hiệu $m = \min_D f(x)$ nếu

$$\begin{cases} f(x) \geq m \quad \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D \mid f(x_0) = m \end{cases}$$

2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số liên tục

🌟 Lưu ý: Mọi hàm số liên tục trên một đoạn đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$, có thể trừ đi một số hữu hạn điểm. Nếu $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc khoảng $(a; b)$ thì ta có quy tắc tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ như sau:

Bước 1. Tìm các điểm x_1, x_2, \dots, x_n thuộc khoảng $(a; b)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 2. Tính $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a)$ và $f(b)$.

Bước 3. So sánh các giá trị tìm được ở bước 2.

Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$, số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.



3. Lưu ýa) Lưu ý về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x) = a \sin x + b \cos x$.Cho hàm số $f(x) = a \sin x + b \cos x$ ($a^2 + b^2 > 0$). Khi đó:

$$\max f(x) = \sqrt{a^2 + b^2}; \min f(x) = -\sqrt{a^2 + b^2}$$

Hệ quả: $\max(a \sin x) = |a|$; $\min(a \sin x) = -|a|$.b) Lưu ý về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(u(x))$ trên D .Đặt $t = u(x)$, với $x \in D$, giả sử ta tìm được tập giá trị của $u(x)$ trên D là K . Khi đó:

$$\max_{x \in D} f(u(x)) = \max_{t \in K} f(t)$$

c) Bất đẳng thức Cauchy (BĐT AM-GM) cho 2 số và cho 3 số

Cho a, b là các số thực không âm, khi đó

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Cho a, b, c là các số thực không âm, khi đó:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Hệ quả

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \text{ với } a, b, c \geq 0.$$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP1. Giả sử chi phí tiền xăng C (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình v (km/h) theo công thức:

$$C(v) = \frac{16000}{v} + \frac{5}{2}v \quad (0 < v \leq 120)$$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $C = C(v)$ trên $(0; 120]$.

b) Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình là bao nhiêu để tiết kiệm tiền xăng nhất?

➡ Đáp số:

.....

.....

.....

.....

.....

2. Trong một nhà hàng, mỗi tuần để chế biến x phần ăn (x lấy giá trị trong khoảng từ 30 đến 120) thì chi phí trung bình (đơn vị: nghìn đồng) của một phần ăn được cho bởi công thức:

$$\bar{C}(x) = 2x - 230 + \frac{7200}{x}.$$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \bar{C}(x)$ trên $[30; 120]$.

b) Từ kết quả trên, tìm số phần ăn sao cho chi phí trung bình của một phần ăn là thấp nhất.



➡ Đáp số:

.....

.....

.....

.....

3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y = -x^2 + 4x + 3$.

b) $y = x^3 - 2x^2 + 1$ trên $[0; +\infty)$.

c) $y = \sqrt{4x - 2x^2}$.

d) $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$ trên $(1; +\infty)$.

➡ Đáp số:

.....

.....

.....

.....

4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y = xe^{-x}$.

b) $y = x \ln x$.

c) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{22-x}$.

d) $y = (x^2 - x)e^x$ trên đoạn $[0; 1]$.

➡ Đáp số:

.....

.....

.....

.....

5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos^2 x - \cos^2 x \sin x$.

➡ Đáp số:

.....

.....

.....

.....

6. Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể mô hình hóa bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2, 0 \leq t \leq 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần).

a) Hãy ước tính số người tối đa bị nhiễm bệnh ở địa phương đó.

b) Đạo hàm $N'(t)$ biểu thị tốc độ lây lan của virus (còn gọi là tốc độ truyền bệnh). Hỏi virus sẽ lây lan nhanh nhất khi nào?



➡ Đáp số:

.....

.....

.....

.....

7. Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích 1000cm^3 . Mặt trên và mặt dưới được làm bằng vật liệu có giá $1,2$ nghìn đồng/ cm^2 , trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá $0,75$ nghìn đồng/ cm^2 . Tìm các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất chiếc bình là nhỏ nhất.

➡ Đáp số:

.....

.....

.....

.....

8. Khối lượng q (kg) của một mặt hàng mà cửa tiệm bán được trong một ngày phụ thuộc vào giá bán p (nghìn đồng/kg) theo công thức $p = 15 - 0,5q$. Doanh thu từ việc bán mặt hàng trên của cửa tiệm được tính theo công thức $R = pq$.

- Viết công thức biểu diễn R theo p .
- Tìm giá bán mỗi kilogram sản phẩm để đạt được doanh thu cao nhất và xác định doanh thu cao nhất đó.

➡ Đáp số:

.....

.....

.....

.....

9. Hộp sữa 1l được thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh $x\text{cm}$. Tìm x để diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất.

➡ Đáp số:

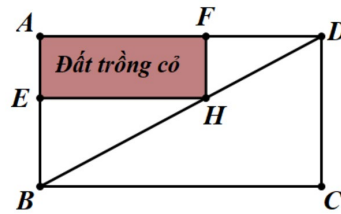
.....

.....

.....

.....

10. Trên một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$, diện tích 25m^2 , người chủ lấy một phần để trồng cỏ. Biết phần đất trồng cỏ này có dạng hình chữ nhật với hai đỉnh đối diện là A và H , với H thuộc cạnh BD . Hỏi số tiền lớn nhất mà người chủ cần chuẩn bị để trồng cỏ là khoảng bao nhiêu, với chi phí trồng cỏ là 70000 đồng/ m^2 ?



- A. 337 500 đồng. B. 875 000 đồng. C. 584 000 đồng. D. 437 500 đồng.

➡ Đáp số:

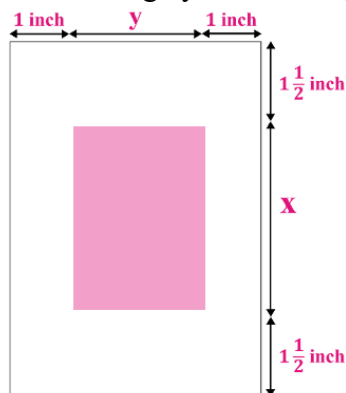
.....

.....

.....

.....

11. Một nhà in sử dụng các trang giấy hình chữ nhật để in sách. Sau khi để lề trái, lề phải, lề trên và lề dưới theo số liệu được cho ở hình vẽ thì diện tích phần in chữ trên trang sách là 24 inch^2 . Tính kích thước của trang sách để diện tích giấy cần sử dụng là ít nhất?



➡ Đáp số:

.....

.....

.....

.....

12. Một trang sách có dạng hình chữ nhật với diện tích là 384 cm^2 . Sau khi để lề trên và lề dưới đều là 3 cm, để lề trái và lề phải đều là 2 cm, phần còn lại của trang sách được in chữ. Kích thước tối ưu của trang sách là bao nhiêu để phần in chữ trên trang sách có diện tích lớn nhất?

➡ Đáp số:

.....

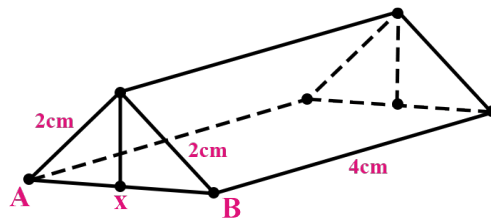
.....

.....

.....



13. Nhóm bạn Đức dựng trên một khu đất bằng phẳng một chiếc lều từ một tấm bạt hình vuông có độ dài cạnh bằng 4 m như hình vẽ với hai mép tấm bạt sát mặt đất.



Tính khoảng cách AB để khoảng không gian trong lều là lớn nhất.

➡ Đáp số:

.....

.....

.....

.....

14. Một nhà phân tích thị trường làm việc cho một công ty sản xuất thiết bị gia dụng nhận thấy rằng nếu công ty sản xuất và bán x chiếc máy xay sinh tố hằng tháng thì lợi nhuận thu được (nghìn đồng) là

$$P(x) = -0,3x^3 + 36x^2 + 1800x - 48000.$$

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = P(x), x \geq 0$. Sử dụng đồ thị đã vẽ để trả lời các câu hỏi sau:

- Khi chỉ sản xuất một vài máy xay sinh tố, công ty sẽ bị lỗ (vì lúc này lợi nhuận âm). Hỏi hằng tháng công ty phải sản xuất ít nhất bao nhiêu chiếc máy xay sinh tố để hoà vốn?
- Lợi nhuận lớn nhất mà công ty có thể đạt được là bao nhiêu? Công ty có nên sản xuất 200 chiếc máy xay sinh tố hằng tháng hay không?

➡ Đáp số:

.....

.....

.....

.....

15. Lợi nhuận thu được P của một công ty khi dùng số tiền s chi cho quảng cáo được cho bởi công thức:

$$P = P(s) = -\frac{1}{10}s^3 + 6s^2 + 400, s \geq 0.$$

Số tiền được tính theo đơn vị nghìn USD

- Tìm số tiền công ty phải chi cho quảng cáo để mang lại lợi nhuận tối đa.
- Lợi nhuận thu được của công ty thay đổi thế nào khi số tiền chi cho quảng cáo thay đổi?

➡ Đáp số:

.....



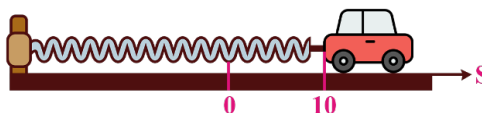
16. Hai nguồn nhiệt đặt cách nhau s mét, một nguồn có cường độ a đặt ở điểm A và một nguồn có cường độ b đặt ở điểm B . Cường độ nhiệt tại điểm P nằm trên đoạn thẳng nối A và B được tính theo công thức:

$$I = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(s-x)^2}.$$

Trong đó x (m) là khoảng cách giữa P và A . Tại điểm nào giữa A và B , nhiệt độ sẽ thấp nhất?

➔ Đáp số:

17. Một chiếc xe nhỏ chuyển động không có ma sát, gắn vào tường bằng một lò xo (xem hình vẽ), được kéo ra khỏi vị trí đứng yên 10 cm rồi thả ra tại thời điểm ban đầu $t = 0$ giây để chuyển động trong 4 giây. Vị trí s (cm) tại thời điểm t giây là $s = 10 \cos \pi t$.



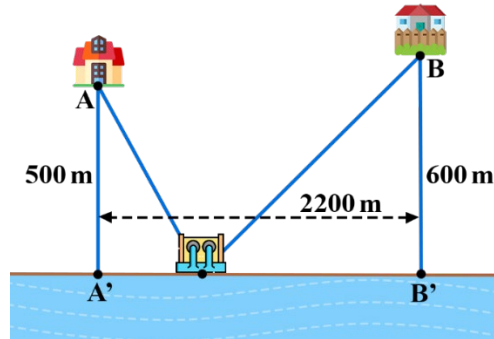
- a) Tốc độ lớn nhất của xe là bao nhiêu? Khi nào xe chuyển động với tốc độ như vậy, khi đó xe đang ở vị trí nào và gia tốc lúc đó có độ lớn là bao nhiêu?
b) Xe ở đâu khi độ lớn gia tốc là lớn nhất? Khi đó vận tốc của xe là bao nhiêu?

➔ Đáp số:



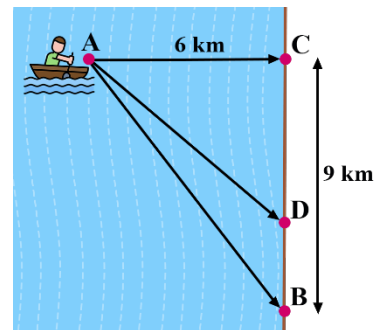


18. Có hai xã cùng ở một bên bờ sông Lam. Người ta đo được khoảng cách từ trung tâm A, B của hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 500$ m, $BB' = 600$ m và $A'B' = 2200$ m (Hình vẽ). Các kĩ sư muốn xây một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông Lam cho người dân hai xã. Để tiết kiệm chi phí, các kĩ sư cần phải chọn vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn $A'B'$ sao cho tổng khoảng cách từ hai vị trí A, B đến vị trí M là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó theo đơn vị mét (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



➡ Đáp số:

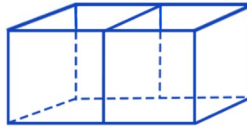
19. Anh Bình muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 6 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hoặc anh có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền 5 km/h, chạy 13 km/h và quãng đường $BC = 9$ km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của anh Bình. Thời gian ngắn nhất để anh Bình đến B là bao nhiêu phút?



➡ Đáp số:



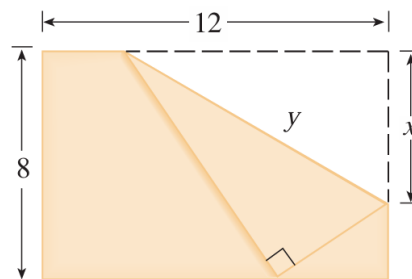
20. Ông X muốn làm một bể cá cảnh hình hộp chữ nhật không có nắp bằng kính với thể tích là 1 m^3 . Ông muốn ngăn bể thành hai phần bằng nhau để nuôi hai loại cá, mặt ngăn đôi bể cá cũng bằng kính và song song với hai mặt bên của bể cá



Biết giá kính ông dùng là $700\,000 \text{ đồng/m}^2$. Số tiền thấp nhất ông X phải trả là (làm tròn đến hàng phần trăm, đơn vị triệu đồng).

➡ Đáp số:

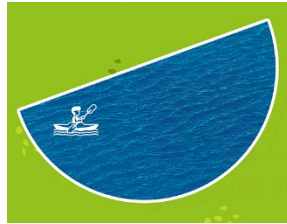
21. Góc trên bên phải của một tờ giấy $12 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$ như trong hình vẽ, được gấp lại đến cạnh dưới với độ dài y (cm) (hình vẽ bên). Bạn cần gấp nó sao cho chiều dài của nếp gấp nhỏ nhất, tính độ dài nếp gấp khi đó? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)



➡ Đáp số:

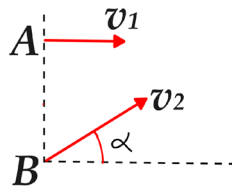


22. Một hồ nước hình bán nguyệt có đường kính $AB = 150$ m. Một người chèo thuyền theo một đường thẳng với vận tốc 3 km/h từ vị trí A đến vị trí C bất kỳ trên cung \widehat{AB} . Tại vị trí C người đó nghỉ 2 phút rồi tiếp tục chạy bộ dọc theo cung nhỏ \widehat{AB} đến B , sau đó chạy theo đường thẳng BA để quay về A với vận tốc 6 km/h (tham khảo hình vẽ). Hỏi thời gian chậm nhất mà người đó về đến A là bao nhiêu phút? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



➡ Đáp số:

23. Có hai chất điểm A và B chuyển động cùng lúc, A đang ở hướng Bắc, đi về hướng Đông với vận tốc không đổi $v_1 = 15$ km/h; B ở phía Nam, cách A 6 km, đồng thời chuyển động đều với vận tốc $v_2 = 26$ km/h theo hướng tạo với phương nằm ngang một góc α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) (quan sát hình vẽ).



Biết khoảng cách nhỏ nhất giữa hai chất điểm là 3 km, khi đó giá trị của α bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của độ).

➡ Đáp số: