

CÁC MÔ HÌNH CỦA BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÀM SỐ



THẦY ĐỐ VĂN ĐỨC | Khóa 12K6 | Buổi IA4

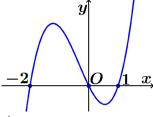
PHẦN 1 – KIẾN THỰC CẦN NHỚ

I – TÌM M ĐỂ HÀM SỐ ĐẠT CỰC TRỊ TẠI X=X₀

- **Cho** hàm số f(x) có chứa tham số m, tìm m để hàm số đạt cực trị tại điểm $x = x_0$
 - ightharpoonup Phương pháp giải: Tìm m để hàm số f'(x) đổi dấu khi x đi qua x_0
- ▶ Đặc biệt: Nếu f(x) là hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a ≠ 0)$. Hàm số f(x) đạt cực trị tại điểm $x = x_0$ khi và chỉ khi $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) \neq 0 \end{cases}$.
 - Nếu $f''(x_0) > 0$ thì $x = x_0$ là điểm cực tiểu.
 - Nếu $f''(x_0) < 0$ thì $x = x_0$ là điểm cực đại.
- **Ví dụ 1:** Cho hàm số $f(x) = x^2 + mx + 5$. Tìm m để hàm số f(x) đạt cực trị tại x = 1.
- **Ví dụ 2:** Cho hàm số f(x) có $f'(x) = (x-1)(x^2+2mx+4)$. Tìm m để hàm số f(x) đạt cực trị tại x=1
- **Ví dụ 3:** Cho hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 + mx + 1$. Tìm m để f(x) đạt cực trị tại x = -1.
- **Ví dụ 4:** Tìm m để hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 (m-1)x^2 (2m-1)x + 99$ đạt cực tiểu tại x = 99.

II – ĐẾM SỐ ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

- \bullet Đếm số điểm cực trị của hàm số y = f(x) khi biết thông tin về f'(x)
 - ightharpoonup Phương pháp giải: Đếm số lần f'(x) đổi dấu
- Lưu ý: Nếu đề bài yêu cầu tìm m để hàm số f(x) có a điểm cực trị, ta cần tìm m để hàm số f'(x) có a lần đổi dấu.
- **Ví dụ 1:** Cho hàm số f(x) có đạo hàm trên \mathbb{R} . Hàm số y = f'(x) có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số y = f(x+1) là

A. 1

5. 2.

C. 4

D. 3

Ví dụ 2: Cho hàm số f(x) thỏa mãn $f'(x) = (x-1)(x^3-1)(x^2+4x+3)$. Hỏi hàm số f(x) có bao nhiều điểm cực trị?

A. 1.

B. 2.

C, 0.

D. 3

- **Ví dụ 3:** Cho hàm số f(x) thỏa mãn $f'(x) = x^3 + 3mx \ \forall x \in \mathbb{R}$. Tìm m để hàm số f(x) có 3 điểm cực trị?
- **Ví dụ 4:** Tìm m để hàm số $f(x) = x^3 (m+1)x^2 + mx$ có đúng 2 điểm cực trị?

III – TOA ĐÔ CÁC ĐIỂM CỰC TRI

- Dạng toán này thường đề cho hàm số bậc ba hoặc hàm số trùng phương có các điểm cực trị phụ thuộc vào tham số m, yêu cầu bài toán tìm m để tọa độ các điểm cực trị thỏa mãn một điều kiện nào đó.
- **S**** \overrightarrow{B} \mathring{o} \mathring{d} : Trong mặt phẳng Oxy, cho $\triangle ABC$ có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (x_1; y_1) \\ \overrightarrow{AC} = (x_2; y_2) \end{cases}$. Khi đó: $S_{ABC} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 x_2 y_1|$.

Ta có:
$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

$$\Rightarrow \sin \widehat{BAC} = \sqrt{1 - \frac{\left(x_1 x_2 + y_1 y_2\right)^2}{\left(x_1^2 + y_1^2\right)\left(x_2^2 + y_2^2\right)}} = \sqrt{\frac{\left(x_1 y_2 - x_2 y_1\right)^2}{\left(x_1^2 + y_1^2\right)\left(x_2^2 + y_2^2\right)}} = \frac{\left|x_1 y_2 - x_2 y_1\right|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Từ đó $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|$.

- **Ví dụ 1:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 3mx^2 + 3m^2$ có hai điểm cực trị là A, B và ΔOAB có diện tích bằng 24
- **Ví dụ 2:** Cho hàm số $y = x^4 2mx^2 + 1$. Tổng lập phương của các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm cực trị này có bán kính R = 1.

A.
$$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

A.
$$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$
. **B.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $2+\sqrt{5}$.

C.
$$2 + \sqrt{5}$$
.

$$0. -1 + \sqrt{5}.$$

PHẦN 2 – VÍ DỤ MINH HỌA

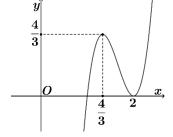
Câu 1. Cho hàm số y = f(x) có đồ thị như hình vẽ. Giá trị cực đại của hàm số g(x) = f(x) + 1 là





$$\frac{4}{2}$$
.

$$\frac{0}{3}$$
.



Câu 2. Cho hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 + 3x - 1$. Tìm m để hàm số không có cực trị

A.
$$m \le -3$$
.

B.
$$-3 \le m \le 3$$
.

C.
$$m > 0$$
.

②.
$$m \ge 3$$
.

Câu 3. Tìm m để hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 + (m+1)x - 2$ đạt cực tiểu tại x = 1

A.
$$m = 0$$
.

B.
$$m = -\frac{3}{4}$$

B.
$$m = -\frac{3}{4}$$
. **C.** $m = -\frac{4}{3}$.

$$m = -1$$
.

Câu 4. Tìm m để hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + (m^2 - 3m + 2)x + 5$ đạt cực đại tại x = 0.

A.
$$m = 1$$
.

B.
$$m = 2$$
.

C.
$$m = 3$$
.

a Các mô hình củo	ı bài toán cực trị của đồ th	Website: http://thayduc.vn/			
Câu 5. Cho hàm s nhiều điểm cực tiểu		$(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$	$(x-5)^5$. Hỏi hàm số $f(x)$ có bao		
A. 0.	B. 1.	C. 2.	D. 3.		
	$y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m-1)x^2$ Em cực trị nằm về hai phía	,	u giá trị của số tự nhiên $m < 20$ để đồ		
	B. 19.		2 . 20.		

Câu 7. Cho hàm số $y = 4x^3 + mx^2 - 3x$. Có bao nhiều giá trị của tham số m để hàm số có cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 = -4x_2$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 8. Cho hàm số bậc ba y = f(x) có đồ thị đi qua các điểm A(2;6), B(3;11), C(4;18) và đạt cực trị tại điểm x = 3. Đồ thị hàm số y = f(x) đi qua điểm nào dưới đây?

A. M(1;-11) **B.** N(1;-10) **C.** P(1;-33) **D.** Q(1;-34).

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d(a, b, c, d \in \mathbb{R})$. Biết đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là A(0;0) và B(2;6). Giá trị của a+b+c+d là

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 10. Cho f(x) là hàm đa thức bậc bốn, biết đồ thị hàm số y = f'(x) có hai điểm cực trị là A(0;1) và B(2;5). Điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(x) - x^2 - x$ là

A. x = 0. **B.** x = 1. **C.** x = 2. **Q.** x = -1.

Câu 11. Cho hàm số y = f(x) có đạo hàm cấp 3 liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn $f(x).f'''(x) = x(x-1)^2(x+4)^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = [f'(x)]^2 - 2f(x).f''(x)$ có bao nhiều điểm cực trị

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 12. Cho hàm số f(x) có đạo hàm liên tục và xác định trên \mathbb{R} . Biết $f'(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)^2(x+m)$. Hỏi có bao nhiều giá trị nguyên của tham số $m \in [-10;10]$ để hàm số y = f(x) có đúng 4 điểm cực trị?

A. 17. **B.** 18. **C.** 10. **D.** 19.

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số có cực tiểu mà không có cực đại. Tính tổng các phần tử của tập S

A. 1. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 0.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2}{x+m}$. Tìm m để hàm số nhận x=0 làm điểm cực đại

A. m < 0. **B.** $m \le 0$. **C.** m > 0. **Q.** $m \ge 0$.

Câu 15. Cho hàm số $y = 4x^3 + mx^2 - 3x$. Có bao nhiều giá trị của tham số m để hàm số đạt cực trị tại x_1 và x_2 thỏa mãn $3x_1 + x_2 = 1$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 16. Cho hàm số y = f(x) biết $f'(x) = x^2(x-1)^3(x^2-2mx+m+6)$. Số giá trị nguyên của tham số mđể hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là

A. 7.

B. 5.

C. 6.

Q. 4.

Câu 17. Cho hàm số $y = x^3 + (m-1)x^2 - 3mx + m$. Biết hàm số có cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2x_1x_2$. Giá trị của *m* thuộc khoảng nào sau đây

A. $m \in (-2,0)$. **B.** $m \in (0,2)$.

C. $m \in (-\infty; -2)$. **Q.** $m \in (2; +\infty)$.

Câu 18. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m-1)x - 3m - 1$ có điểm cực đại, điểm cực tiểu, đồng thời các điểm đó tạo với gốc tọa độ O một tam giác vuông tại O. Số phần tử của tập hợp S là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 19. Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ với $m \in \mathbb{R}$. Giá trị của m thuộc tập hợp nào sau đây để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng d: x+8y-74=0

A. $-1 < m \le 1$.

B. -3 < m ≤ -1.

C. $3 < m \le 5$.

Q. $1 < m \le 3$.

--- Hết ---



CỰC TRỊ HÀM HỢP KHÔNG THAM SỐ



THẦY ĐỐ VĂN ĐỨC | Khóa 12K6 | Buổi IA5

PHẦN 1 – KIẾN THỰC CẦN NHỚ

CÁC VÍ DU VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Ví dụ 1. Cho hàm số bậc bốn y = f(x), hàm số y = f'(x) có bảng xét dấu như hình. Số điểm cực đại của hàm số $y = f(\sqrt{x^2 - 2x + 2})$ là:

Phân tích và giải bài toán

Để tìm số điểm cực đại của hàm số $y = f\left(\sqrt{x^2 - 2x + 2}\right)$, ta cần tìm xem có bao nhiều lần y' đổi dấu từ dương sang âm.

Xét
$$g(x) = f(\sqrt{x^2 - 2x + 2})$$
 có

$$g'(x) = f'(\sqrt{x^2 - 2x + 2}) \cdot \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 2}} = f'(\sqrt{x^2 - 2x + 2}) \cdot \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}.$$

Tương tự như phần đơn điệu hàm hợp ở bài trước, ta tiếp tục tìm các điểm làm đạo hàm đổi dấu

Ta có:
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f'(\sqrt{x^2 - 2x + 2}) = 0 \\ x - 1 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 - 2x + 2} = -1 \\ \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 1 \\ \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3 \\ x = 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 - 2\sqrt{2} \\ x = 1 + 2\sqrt{2} \\ x = 1 \end{bmatrix}$$

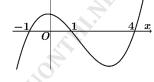
Chú ý rằng khi $x \to -\infty$ thì $\sqrt{x^2 - 2x + 2} \to +\infty$, nên $f'(\sqrt{x^2 - 2x + 2}) < 0$, do đó g'(x) < 0.

Từ đó ta có bảng xét dấu g'(x) như sau:

Từ đó hàm số g(x) có 3 điểm cực trị, trong đó có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại. \rightarrow Chọn D

SLưu ý: Nếu đề bài chỉ hỏi về số điểm cực trị của hàm số g(x), các em chỉ cần tìm các điểm làm cho g'(x) đổi dấu và kết luận. Nếu g(x) liên tục và có 2n điểm cực trị, hàm $s\delta g(x)$ sẽ có n điểm cực đại và n điểm cực tiểu.

Ví dụ 2. Cho hàm số y = f(x) xác định và có đạo hàm f'(x) trên tập số thực \mathbb{R} . Đồ thị của hàm số y = f'(x) cho như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = f(x^2 + x + 2)$ có hoành độ điểm cực đại là:



A. x = 1.

B. x = -2.

C. $x = \frac{1}{2}$.

Phân tích và giải bài toán

Thầy Đỗ Văn Đức – Khóa học Online Môn Toán

Tương tự bài trước, ta tính đạo hàm và tìm các điểm làm cho đạo hàm đổi dấu. Xét $g'(x) = (2x+1) f'(x^2+x+2)$. Ta có:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x+1=0 \\ f'(x^2+x+2) = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -\frac{1}{2} \\ x^2+x+2 = -1 \\ x^2+x+2 = 1 \\ x^2+x+2 = 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -0.5 \\ x = 1 \\ x = -2 \\ x^2+x+2 = 4 \end{bmatrix}$$

Vậy g'(x) đổi dấu qua 3 điểm -0,5;1;-2. Ngoài ra dễ thấy $\lim_{x\to +\infty} g'(x) > 0$ nên ta có bảng xét dấu g'(x) như sau

Vậy hoành độ điểm cực đại của đồ thị hàm số y = g(x) là $x = -\frac{1}{2}$. \rightarrow Chọn đáp án D

Lưu ý: Em cần phân biệt được điểm cực đại của hàm số, cực đại của hàm số và điểm cực đại của đồ thị hàm số.

II – MỘT SỐ BỔ ĐỀ CẦN LƯU Ý

S*Bổ đề 1:

Số điểm cực trị của hàm số f(x) bằng số điểm cực trị của hàm số $f(ax+b)(a \neq 0)$.

6* Bổ đề 2:

Nếu hàm số f(x) liên tục trên \mathbb{R} , không có khoảng nào suy biến thành hàm hằng thì Hàm số f(x) có 2n điểm cực trị thì sẽ có n điểm cực đại và n điểm cực tiểu.

Hàm số f(x) có 2n+1 điểm cực trị thì số điểm cực đại sẽ là n hoặc n+1, số điểm cực tiểu sẽ là n+1 hoặc n.

PHẦN 2 – BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Câu 1. Cho hàm số f(x) thỏa mãn f'(x) = x(x+1). Số điểm cực trị của hàm số f(1-2x) là

A. 0.

B. 1.

C. 2

Q. 3

Câu 2. Cho hàm số f(x) thỏa mãn $f'(x) = x^2 - 2x$. Số điểm cực trị của hàm số $f(x^2)$ là

A. 1.

B. 2.

C₄ 3

Q. 4.

Câu 3. Cho hàm số f(x) thỏa mãn $f'(x) = x^3 - x$. Số điểm cực trị của hàm số $f(x^2 - 1)$ là

A. 3.

B. 5.

C. 7.

D. 6.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x$. Số điểm cực trị của hàm số $f(x^2)$ là

A. 0.

B. 1

C. 2

D. 3.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$. Số điểm cực trị của hàm số $f(4-x^2)$ là

A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. 7.

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$. Số điểm cực trị của hàm số $f(x^2 + 2)$ là

A. 1.

B. 3.

C. 4

Q. 2.

Câu 7. Cho hàm số f(x) = x(x+1)(x-2). Số điểm cực trị của hàm số $f(x^3+3x)$ là

A. 1.

B. 0

C. 2

D. 3.

Câu 8. Cho hàm số y = f(x), hàm số y = f'(x) có bảng xét dấu như hình vẽ

Số điểm cực trị của hàm số $f(x^2-2x)$ là

A. 3.

B. 5.

C. 7.

Q. 1.

Câu 9. Cho hàm số y = f(x), hàm số y = f'(x) có bảng xét dấu như hình vẽ

Số điểm cực đại của hàm số $f(x^2+2x-2)$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 7.

Câu 10. Cho hàm số y = f(x), hàm số y = f'(x) có bảng xét dấu như hình vẽ

Số điểm cực đại của hàm số $f(x^3-3x)$ là

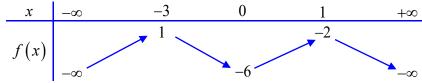
A. 2.

B. 3

C. 4.

D. 7.

Câu 11. Cho hàm số y = f(x) liên tục trên \mathbb{R} , và có bảng biến thiên như sau:



Hàm số $y = f(x^3 - 3x^2 + 1)$ có bao nhiều điểm cực trị?

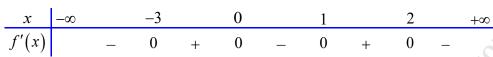
4. 7.

B. 3

C. 5.

D. 9.

Câu 12. Cho hàm số y = f(x), hàm số y = f'(x) có bảng xét dấu như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(x + \frac{1}{x}\right)$ là

4. 2.

B. 4

C. 5.

D. 6.

Câu 13. Cho hàm số y = f(x), hàm số y = f'(x) có bảng xét dấu như hình vẽ

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(x + \frac{4}{x}\right)$ là

A. 8.

B. 10.

C. 5.

D. 6.

Câu 14. Cho hàm số y = f(x), hàm số y = f'(x) có bảng xét dấu như hình vẽ

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(x - \frac{1}{x}\right)$ là

A. 8.

B. 10.

C. 5.

D. 6.

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2)$ là

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$. Số điểm cực trị của hàm số g(x) = f(f(x)) là

A. 8.

B. 10

C. 7

D. 9.

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x + \frac{1}{x})$ là

A. 2.

B. 0.

C. 1

Q. 4.

Câu 18. Cho hàm số bậc bốn f(x) có bảng biến thiên như sau:

X	$-\infty$		-1		0		1		+∞
f'(x)		+	0	_	0	+	0	_	
f(x)			3		-1		3		

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = [f(x-1)]^2$ là

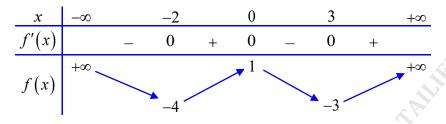
A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 7.

Câu 19. Cho hàm số y = f(x) có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như sau:



Thầy Đỗ Văn Đức – http://facebook.com/dovanduc2020

Cực trị hàm hợp không tham số

Hàm số $y = f^3(x) + 6f^2(x)$ có tất cả bao nhiều điểm cực tiểu?

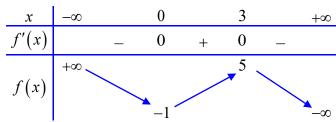
A. 3.

B. 4.

C. 6.

D. 7.

Câu 20. Cho hàm số f(x) có bảng biến thiên như hình sau



Hàm số $g(x) = 2f^2(x)[f(x)-3]$ có bao nhiều điểm cực đại?

A. 3.

B. 4.

C. 6.

D. 8.

Nguồn: Đề thi HK1 – Sở Thái Bình năm 2022-2023