



# TD5 05

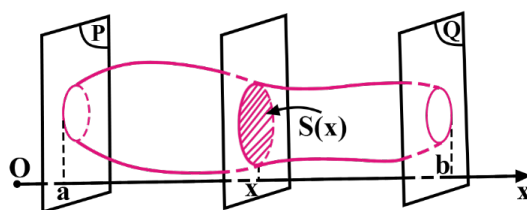
## ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH THỂ TÍCH

### 1. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ

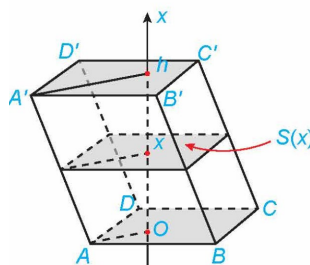
#### a) Tính thể tích của vật thể

Cho một vật thể trong không gian  $Oxyz$ . Gọi  $\beta$  là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại các điểm có hoành độ  $x = a, x = b$ . Một mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm có hoành độ là  $x$  cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích là  $S(x)$ . Giả sử  $S(x)$  là hàm số liên tục trên đoạn  $[a; b]$ . Khi đó, thể tích  $V$  của phần vật thể  $\beta$  được tính bởi công thức

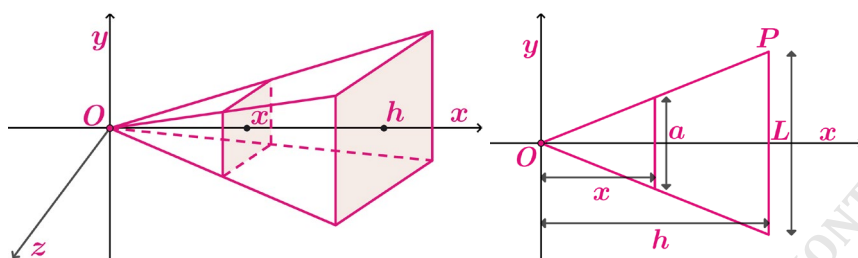
$$V = \int_a^b S(x) dx.$$



★ **Ví dụ 1:** Tính thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy bằng  $S$  và chiều cao bằng  $h$ .



★ **Ví dụ 2:** Tính thể tích của khối chóp đều có đáy là hình vuông cạnh  $L$  và chiều cao là  $h$ .



🔴 **Chú ý:** Bằng ứng dụng của tích phân, người ta chứng minh được thể tích của khối chóp bất kỳ bằng  $1/3$  diện tích mặt đáy nhân với chiều cao của nó.



## b) Thể tích khối tròn xoay

Cho hàm số  $f(x)$  liên tục, không âm trên đoạn  $[a; b]$ .

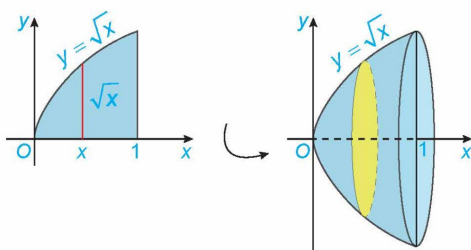
Khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = a, x = b$  xung quanh trục hoành, ta được hình khối gọi là một khối tròn xoay.

Khi cắt khối tròn xoay đó bởi một mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm  $x \in [a; b]$  được một hình tròn có bán kính  $f(x)$ .

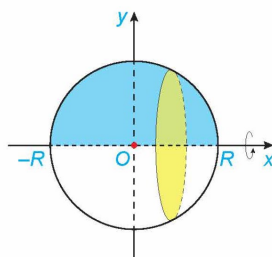
Thể tích của khối tròn xoay này là

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

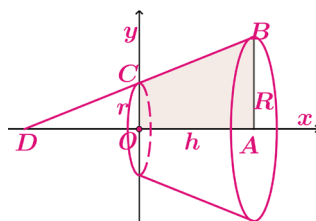
★ **Ví dụ 3:** Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục  $Ox$  hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = \sqrt{x}$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = 0, x = 1$ .



★ **Ví dụ 4:** Tính thể tích của khối cầu bán kính  $R$ .



★ **Ví dụ 5:**



- Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang vuông  $OABC$  trong mặt phẳng  $Oxy$  với  $OA = h, AB = R$  và  $OC = r$ , quanh trục  $Ox$ .
- Từ công thức thu được ở phần a) hãy rút ra công thức tính thể tích của khối nón có bán kính đáy bằng  $R$  và chiều cao  $h$ .



## 2. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

- Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau xung quanh trục  $Ox$ :  $y = 2x - x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ .
- Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau xung quanh trục  $Ox$ :  
a)  $y = 1 - x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$ ;      b)  $y = \sqrt{25 - x^2}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 2$ ,  $x = 4$ .
- Tính thể tích của vật thể  $T$  nằm giữa hai mặt phẳng  $x = 0$  và  $x = \pi$ , biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm có hoành độ  $x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) là một hình vuông cạnh là  $2\sqrt{\sin x}$ .

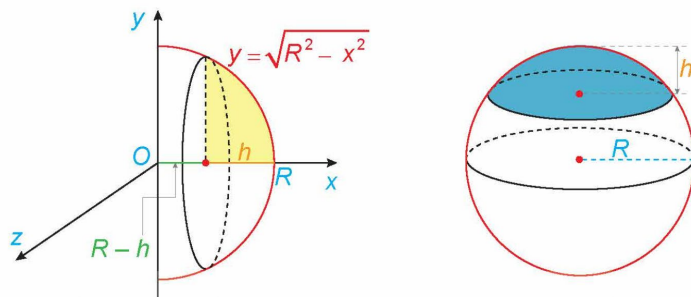
➡ Đáp án: .....

- Chứng minh công thức tính thể tích khối chóp cụt, chiều cao  $h$ , diện tích đáy nhỏ và đáy lớn theo thứ tự là  $S_0, S_1$ . Chứng minh rằng thể tích  $V$  của nó là:

$$V = \frac{h}{3}(S_0 + \sqrt{S_0 S_1} + S_1).$$

➡ Đáp án: .....

- Khối chòm cầu có bán kính  $R$  và chiều cao  $h$  ( $0 < h \leq R$ ) sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = R - h$ ,  $x = R$  xung quanh trục  $Ox$  (hình vẽ). Tính thể tích của khối chòm cầu này.



- Tính thể tích vật thể:  
a) Có đáy là một tam giác cho bởi  $y = x$ ,  $y = 0$  và  $x = 1$ . Mỗi thiết diện vuông góc với trục  $Ox$  là một hình vuông.  
b) Có đáy là một hình tròn giới hạn bởi  $x^2 + y^2 = 1$ . Mỗi thiết diện vuông góc với trục  $Ox$  là một hình vuông.

➡ Đáp án: .....

- Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = 4 - x^2$  và  $y = 0$  quanh trục  $Ox$  bằng

A.  $\frac{32\pi}{3}$ .

B.  $\frac{512\pi}{15}$ .

C.  $\frac{16\pi}{3}$ .

D.  $\frac{256\pi}{15}$ .

- Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 1$  có đồ thị là  $(C)$  và  $d$  là đường thẳng tiếp xúc với  $(C)$  tại điểm cực đại. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $(C)$  và  $d$ .

A.  $\frac{27}{4}$ .

B. 4.

C. 6.

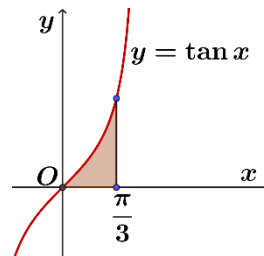
D.  $\frac{9}{4}$ .



9. Cho hàm số  $f(x) = 2 - x^2$  và  $g(x) = -x$ .
- Vẽ hai đồ thị  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$  trên cùng hệ trục tọa độ.
  - Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$ .
  - Tính thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (ở câu b) quay xung quanh trục hoành.

➡ Đáp án: .....

10. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng ( $H$ ) giới hạn bởi phần tô đậm (trong hình vẽ) quay quanh trục hoành.



➡ Đáp án: .....

11. Cho hàm số  $f(x) = \frac{4}{x}$ .

- Vẽ đồ thị hàm số  $y = f(x)$ .
- Xác định phần hình phẳng ( $H$ ) giới hạn bởi đồ thị  $y = f(x)$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$  và trục hoành.
- Tính diện tích hình ( $H$ ).
- Cho ( $H$ ) quay quanh trục hoành, tính thể tích khối tròn xoay thu được.

➡ Đáp án: .....

12. Cho hàm số  $f(x) = \cos 4x$ .

- Vẽ đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , từ đó xác định hình phẳng ( $H$ ) giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{8}$ .
- Tính diện tích hình ( $H$ ).
- Cho ( $H$ ) quay quanh trục hoành, tính thể tích khối tròn xoay thu được.

➡ Đáp án: .....

13. Trong nghiên cứu khoa học, người ta sử dụng thể tích của một quả trứng để xác định kích thước của nó là một cách dự báo khá tốt về các thành phần cấu tạo của trứng và đặc điểm của con non sau khi nở ra. Một quả trứng ngỗng được mô hình bởi quay đồ thị hàm số

$$y = \frac{1}{30} \sqrt{7560 - 400x^2}, -4,35 \leq x \leq 4,35$$

quanh trục  $Ox$ . Sử dụng mô hình này để tính thể tích quả trứng ( $x, y$  được đo theo đơn vị cm)

➡ Đáp án: .....

14. Nghệ thuật làm gốm có lịch sử phát triển lâu đời và vẫn còn tồn tại cho đến ngày nay. Giả sử một bình gốm có mặt trong của bình là một mặt tròn xoay sinh ra khi cho phần đồ thị của hàm số

$$y = \frac{1}{175}x^2 + \frac{3}{35}x + 5 \quad (0 \leq x \leq 30), \quad (x, y \text{ tính theo cm})$$

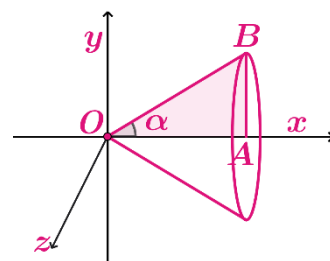
quay tròn quanh bộ gồm có trục trùng với trục hoành  $Ox$ . Hỏi để hoàn thành bình gốm đó ta cần sử dụng bao nhiêu  $\text{cm}^3$  đất sét, biết rằng bình gốm đó có độ dày không đổi là 1 cm.

➡ Đáp án: .....



15. Cho tam giác vuông  $OAB$  có cạnh  $OA = a$  nằm trên trục  $Ox$  và  $\widehat{AOB} = \alpha \left( 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4} \right)$ . Gọi  $B$  là khối tròn xoay sinh ra khi quay

miền tam giác  $OAB$  xung quanh trục  $Ox$  (hình vẽ).



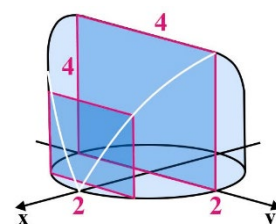
a) Tính thể tích  $V$  của  $B$  theo  $a$  và  $\alpha$ .

b) Tìm  $\alpha$  sao cho thể tích  $V$  lớn nhất.

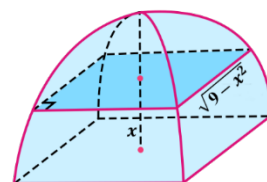
16. Nghệ thuật làm gốm có lịch sử phát triển lâu đời và vẫn còn tồn tại cho đến ngày nay. Giả sử một bình gốm có mặt trong của bình là một mặt tròn xoay sinh ra khi cho phần đồ thị của hàm số  $y = \frac{1}{175}x^2 + \frac{3}{35}x + 5$  ( $0 \leq x \leq 30$ ) ( $x, y$  tính theo cm) quay

tròn quanh bệ gốm có trục trùng với trục hoành  $Ox$ . Hỏi để hoàn thành bình gốm đó ta cần sử dụng bao nhiêu  $\text{cm}^3$  đất sét, biết rằng bình gốm đó có độ dày không đổi là 1 cm.

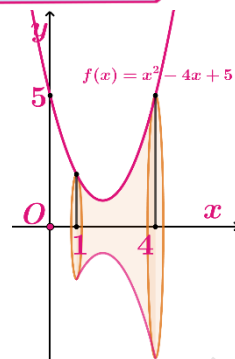
17. Tính thể tích của vật thể  $\beta$ , biết đáy của  $\beta$  là hình tròn bán kính bằng 2 và các mặt cắt vuông góc với mặt đáy là những hình vuông (hình vẽ).



18. Một chiếc lều mái vòm có hình dạng như hình vẽ. Nếu cắt lều bằng mặt phẳng song song với mặt đáy và cách mặt đáy một khoảng  $x$  (m) ( $0 \leq x \leq 3$ ) thì được hình vuông có cạnh  $\sqrt{9 - x^2}$  (m). Tính thể tích của lều.



19. Cho khối tròn xoay như Hình vẽ. Hình phẳng được giới hạn bởi các đường nào để khi quay quanh trục  $Ox$  ta được khối tròn xoay như Hình vẽ? Tính thể tích khối tròn xoay đó?



20. Sau khi đo kích thước của thùng rượu vang (Hình vẽ), bạn Quân xác định thùng rượu vang có dạng hình tròn xoay được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

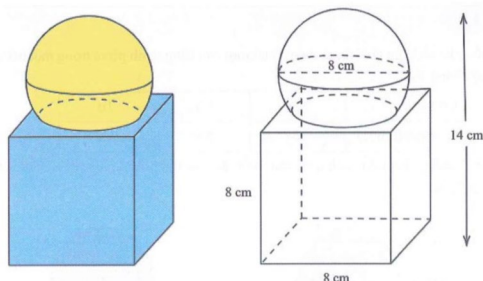
$$y = -0,011x^2 - 0,071x + 40$$

trục  $Ox$  và hai đường thẳng  $x = -35, x = 35$  quay quanh trục  $Ox$ . Tính thể tích thùng rượu vang đó, biết đơn vị trên mỗi trục tọa độ là centimet.





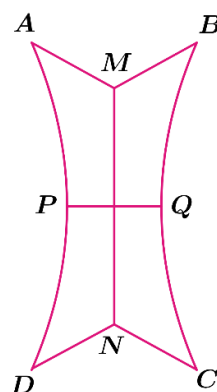
21. (trắc nghiệm đúng sai) Một đồ lưu niệm bằng thủy tinh có chiều cao bằng 14 cm, được thiết kế gồm hai phần, phần dưới là một khối lập phương có cạnh bằng 8 cm và phần trên là một phần của một khối cầu có đường kính bằng 8 cm (tham khảo hình vẽ).



- Thể tích của đồ lưu niệm đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) là  $738 \text{ cm}^3$ .
- Phần khối cầu có bán kính 4 cm và chiều cao 6 cm.
- Quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = \sqrt{8x - x^2}$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = 0, x = 2$  quanh trục hoành ta thu được khối tròn xoay có thể tích  $V = \int_0^2 (\sqrt{8x - x^2})^2 dx$ .
- Khối lập phương có thể tích bằng  $512 \text{ cm}^3$ .

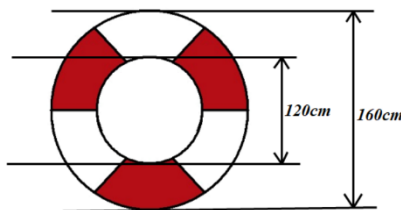
Nguồn: Đề khảo sát chất lượng Toán 12 lần 3 năm 2024 – 2025 sở GD&ĐT Ninh Bình

22. Một mô hình khối tròn xoay có trục là đường thẳng  $MN$ , khi ta cắt khối tròn xoay đó bởi một mặt phẳng đi qua trục của khối tròn xoay thì ta được mặt cắt có dạng như hình vẽ dưới đây. Biết  $MN = 20 \text{ cm}$ ,  $ABCD$  là hình chữ nhật có  $AB = 16 \text{ cm}$ ,  $AD = 32 \text{ cm}$ , hai cung  $APD$  và  $BQC$  là một phần của các đường parabol với đỉnh lần lượt là  $P, Q$  và  $PQ = 8 \text{ cm}$ . Tính thể tích của mô hình đó.



- $\frac{11456}{15} \pi \text{ cm}^3$ .
- $\frac{12416}{15} \pi \text{ cm}^3$ .
- $\frac{10496}{15} \pi \text{ cm}^3$ .
- $\frac{12896}{15} \pi \text{ cm}^3$ .

23. Một cái phao bơi được bơm từ một cái ruột xe hơi có kích thước như hình sau. Thể tích của cái phao bằng



- $14000\pi^2 (\text{cm}^3)$ .
- $8000\pi^2 (\text{cm}^3)$ .
- $10000\pi^2 (\text{cm}^3)$ .
- $12000\pi^2 (\text{cm}^3)$ .