TÀI LIỆU KHÓA HỌC ĐỘC QUYỀN

KHÓA BON SEASON 2026

STEP 1 | KIẾN THỨC NỀN TẢNG TOÁN 12

Theme 5. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

BÀI GIẢNG LÍ THUYẾT - VÍ DỤ MINH HOẠ và BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Xem bài giảng & thi online trên ngochuyenlb.edu.vn tại lớp:
STEP 1 | Nền tảng Toán 12 | 8 điểm

A Kiến thức cần nắm

1. Khảo sát và lập bảng biến thiên của hàm số

Các bước để khảo sát hàm số $y=f(x)$

- **Bước 1:** Tìm tập xác định.
- **Bước 2:** Khảo sát sự biến thiên của hàm số
  - ✓ Tìm đạo hàm $f'(x)$.
  - ✓ Tìm nghiệm của phương trình $f'(x)=0$ và tìm các điểm tại đó $f'(x)$ không xác định (tất cả các điểm này đều phải thuộc tập xác định ở bước 1).
  - ✓ Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
  - ✓ Lập bảng biến thiên của hàm số.
- **Bước 3:** Vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

REMARK 1 Cấu trúc của bảng biến thiên:

x	**Bước 1:** Điền miền xác định của hàm số. **Bước 2:** Điền các điểm vừa tìm ở bước 2 (nghiệm của phương trình $f'(x)=0$ và các điểm tại đó $f'(x)$ không xác định) *(điền theo thứ tự trục số từ bé đến lớn).*
$f'(x)$	Bảng xét dấu của $f'(x)$
$f(x)$	Sự biến thiên của hàm số, mô phỏng đồ thị hàm số dựa vào bảng xét dấu dòng trên

REMARK 2 Trong bước 2: Tìm nghiệm của phương trình $f'(x)=0$ và tìm các điểm tại đó $f'(x)$ không xác định, các điểm này đều phải thỏa mãn điều kiện thuộc tập xác định của hàm số.

REMARK 3 Dòng $f(x)$ mô phỏng dáng điệu đồ thị hàm số dưới dạng bảng. Dựa vào dòng $f(x)$ ta có thể giải quyết bài toán tương giao ngay trên bảng biến thiên mà không cần vẽ đồ thị hàm số.

REMARK 4

1. Ở dòng $f(x)$ tại các điểm cụ thể tương ứng với dòng x thì ta điền các giá trị của hàm số tại điểm đó.

2. Nếu tại điểm x_0 xuất hiện trên dòng x mà hàm số không xác định thì, trong trường hợp:

- Hàm số vẫn xác định tại lân cận phải hoặc lân cận trái thì ta tìm $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ ta điền tương ứng.
- Ở vị trí tiến ra vô cực $-\infty;+\infty$ thì ta điền tương ứng $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$

Xét hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$

1. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên

$y' = 3ax^2 + 2bx + c.$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0\ (*)$ (đây là phương trình bậc hai nên nghiệm sẽ phụ thuộc vào biệt số Δ').

$\Delta' = b^2 - 3ac.$

a) Trường hợp $\Delta' > 0$:

<table>
<tr><th>$a > 0;\ \Delta' > 0$</th><th>$a < 0;\ \Delta' > 0$</th></tr>
<tr><td>
Vì $\Delta' > 0$ nên phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$.
Bảng xét dấu:
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>y</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr>
</table>
• Trên các khoảng $(-\infty;x_1)$ và $(x_2;+\infty)$ thì $y' > 0$ và trên $(x_1;x_2)$ thì $y' < 0$.
• Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;x_1)$ và $(x_2;+\infty)$. Hàm số nghịch biến trên $(x_1;x_2)$.
• Hàm số đạt cực đại tại $x = x_1$, giá trị cực đại $y_{CĐ} = y(x_1)$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_2$, giá trị cực tiểu $y_{CT} = y(x_2)$.
• Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $A(x_1;y(x_1))$ và điểm cực tiểu là $B(x_2;y(x_2))$.
• Giới hạn tại vô cực $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$.
</td><td>
Vì $\Delta' > 0$ nên phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$.
Bảng xét dấu:
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>y</td><td></td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>−</td><td></td></tr>
</table>
• Trên các khoảng $(-\infty;x_1)$ và $(x_2;+\infty)$ thì $y' < 0$ và trên $(x_1;x_2)$ thì $y' > 0$.
• Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;x_1)$ và $(x_2;+\infty)$. Hàm số đồng biến trên $(x_1;x_2)$.
• Hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_1$, giá trị cực tiểu $y_{CT} = y(x_1)$; hàm số đạt cực đại tại $x = x_2$, giá trị cực đại $y_{CĐ} = y(x_2)$.
• Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $M(x_1;y(x_1))$ và điểm cực đại là $N(x_2;y(x_2))$.
• Giới hạn tại vô cực $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$.
</td></tr>
</table>

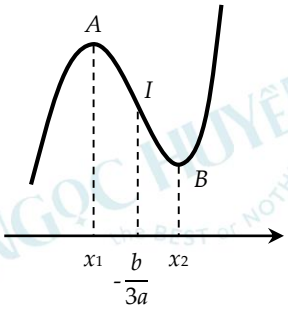
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$y(x_1)$	↘	$y(x_2)$	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm

$$I\left(-\frac{b}{3a};y\left(-\frac{b}{3a}\right)\right).$$

3. Đồ thị hàm số



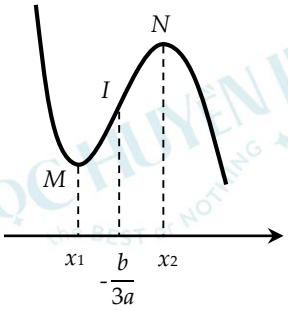
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	$y(x_1)$	↗	$y(x_2)$	↘	$-\infty$

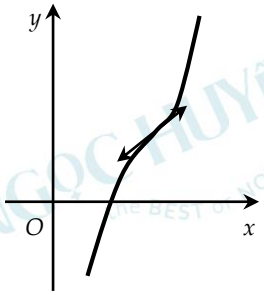
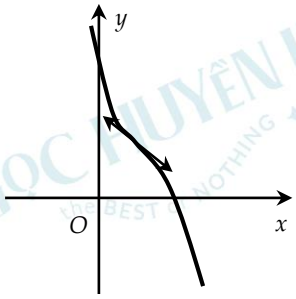
Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm

$$I\left(-\frac{b}{3a};y\left(-\frac{b}{3a}\right)\right).$$

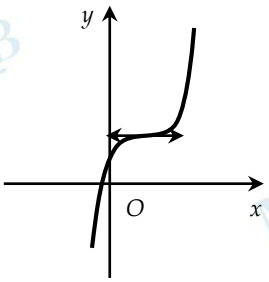
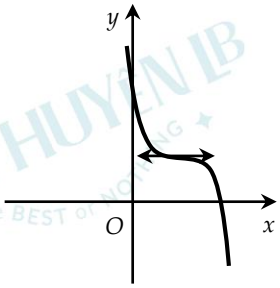
3. Đồ thị hàm số



b) Trường hợp $\Delta' < 0$:

$a > 0;\ \Delta' < 0$	$a < 0;\ \Delta' < 0$
Vì $\Delta' < 0$ nên phương trình $y' = 0$ vô nghiệm. Dẫn đến y' không đổi dấu trên $\mathbb{R}$. • $y' > 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$ (do $a > 0;\ \Delta' < 0$) suy ra hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$. • Hàm số không có cực trị. • Giới hạn tại vô cực $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$.	Vì $\Delta' < 0$ nên phương trình $y' = 0$ vô nghiệm. Dẫn đến y' không đổi dấu trên $\mathbb{R}$. • $y' < 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$ (do $a < 0;\ \Delta' < 0$) suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$. • Hàm số không có cực trị. • Giới hạn tại vô cực $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$.
Bảng biến thiên: x: $-\infty$ … $+\infty$ y': $+$ y: $-\infty$ ↗ $+\infty$	Bảng biến thiên: x: $-\infty$ … $+\infty$ y': $-$ y: $+\infty$ ↘ $-\infty$
3. Đồ thị hàm số 	**3.** Đồ thị hàm số 

c) Xét tương tự với trường hợp $\Delta' = 0$ ta sẽ có đồ thị

	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép (hàm số không có cực trị).		

REMARK 1 Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ (có đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$) hoặc là có hai điểm cực trị, hoặc là không có điểm cực trị nào.

- Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} = b^2 - 3ac > 0$.
- Đồ thị hàm số không có điểm cực trị $\Leftrightarrow b^2 - 3ac \leq 0$.

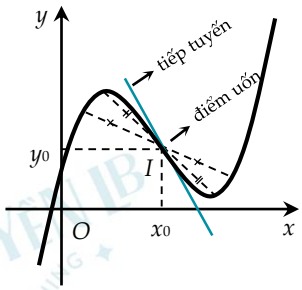
REMARK 2 Đồ thị hàm số bậc ba luôn cắt trục hoành tại ít nhất một điểm.

REMARK 3 Đồ thị hàm số bậc ba nhận điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ làm tâm đối xứng $\left(x = \dfrac{-b}{3a}\right)$.

REMARK 4 **Đọc thêm:** Điểm uốn

Điểm $I(x_0; y_0)$ được gọi là **điểm uốn** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu tồn tại khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho: trên một trong hai khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$, tiếp tuyến của đồ thị tại I nằm phía trên đồ thị, còn trên khoảng kia tiếp tuyến nằm phía dưới đồ thị

$\Rightarrow$ Ta nói tiếp tuyến xuyên qua đồ thị hàm số.

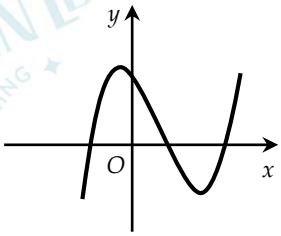
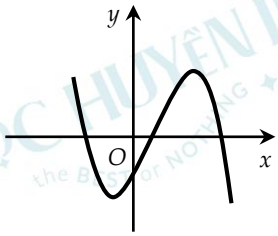
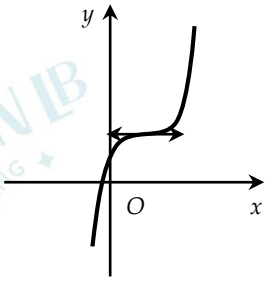
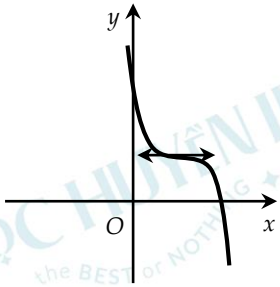
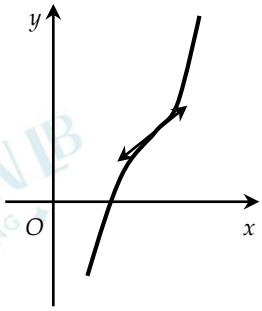
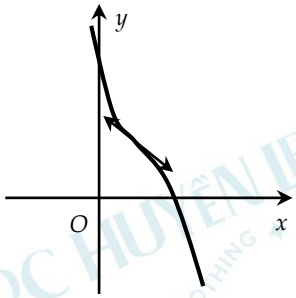


Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên một khoảng chứa x_0 và

$\begin{cases} f''(x_0) = 0 \\ f''(x) \text{ đổi dấu qua } x_0 \end{cases}$ thì $I(x_0; f(x_0))$ là một điểm uốn của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Suy ra: Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ luôn có một điểm uốn và điểm đó là **tâm đối xứng** của đồ thị hàm số.

REMARK 5 Dạng của đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$:

	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt (hàm số có hai điểm cực trị).		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép (hàm số không có cực trị).		
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm (hàm số không có cực trị).		

Ví dụ Khảo sát sự biến thiên và vẽ bảng biến thiên của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

b) $y = -2x^3 + 3x + 1$.

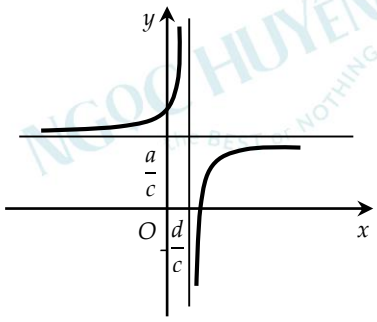
3. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\left(c\neq 0;ad-bc\neq 0\right)$

Trường hợp $ad-bc>0$	Trường hợp $ad-bc<0$
1. Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.	**1.** Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$
2. Sự biến thiên: $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.	**2.** Sự biến thiên: $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.
• $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}>0$ với mọi $x\neq -\dfrac{d}{c}$.	• $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}<0$ với mọi $x\neq -\dfrac{d}{c}$.
• Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{d}{c}\right)$ và $\left(-\dfrac{d}{c};+\infty\right)$.	• Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{d}{c}\right)$ và $\left(-\dfrac{d}{c};+\infty\right)$.
• Hàm số không có cực trị.	• Hàm số không có cực trị.
• Tiệm cận:	• Tiệm cận:
Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-\dfrac{d}{c}$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{a}{c}$.	Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-\dfrac{d}{c}$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{a}{c}$.
• Bảng biến thiên:	• Bảng biến thiên:

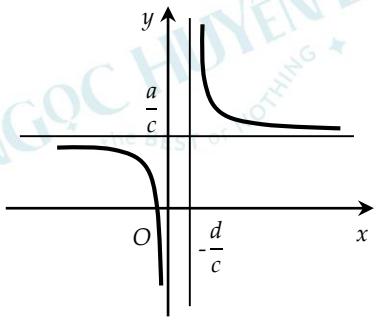
x	$-\infty$		$-\dfrac{d}{c}$		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	$\dfrac{a}{c}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\dfrac{a}{c}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{d}{c}$		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$\dfrac{a}{c}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\dfrac{a}{c}$

3. Đồ thị hàm số



3. Đồ thị hàm số



REMARK 1 Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên từng khoảng xác định, hay nói cách khác là đồng biến hoặc nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{d}{c}\right)$ và $\left(-\dfrac{d}{c};+\infty\right)$.

REMARK 2 Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ không có cực trị.

REMARK 3 Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-\dfrac{d}{c}$ và đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{a}{c}$.

REMARK 4 Đồ thị của hàm số phân thức $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\left(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0\right)$:

- Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm tâm đối xứng;
- Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng.

Ví dụ Khảo sát sự biến thiên và vẽ bảng biến thiên của hàm số $y=\dfrac{-2x+1}{2x+2}$.

4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm phân thức $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}\left(a\neq 0;p\neq 0\right)$ (đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

[Ví dụ 1] Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$.

Lời giải

1. Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

2. Sự biến thiên của hàm số

a) Giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận

Ta viết hàm số đã cho dưới dạng $y=x+1+\dfrac{1}{x+1}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$.

Vì $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=+\infty$ nên đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho (khi $x\to(-1)^-$ và khi $x\to(-1)^+$).

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[y-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[y-(x+1)\right]=0$ nên đường thẳng $y=x+1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho (khi $x\to+\infty$ và khi $x\to-\infty$).

b) Bảng biến thiên:

Ta có: $y'=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$;

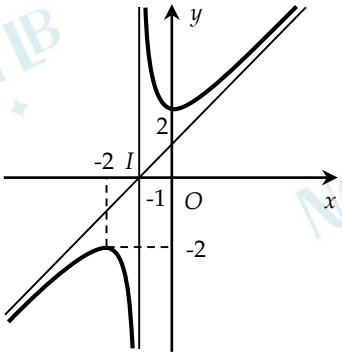
$y'=0\Leftrightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=-2$.

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(-2;-1)$ và $(-1;0)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=-2$ với giá trị cực đại $y(-2)=-2$ và đạt cực tiểu tại điểm $x=0$ với giá trị cực tiểu $y(0)=2$.

3. Đồ thị



Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0;2)$.

Nhận xét: Đồ thị nhận giao điểm $I(-1;0)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

[Ví dụ 2] Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-2}$.

Lời giải

1. Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

2. Sự biến thiên của hàm số

a) Giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to2^-} y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to2^+} y=-\infty$.

Do đó, đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho (khi $x\to2^-$ và $x\to2^+$).

Vì $y'=1+\dfrac{3}{(x-2)^2}>0$ với mọi $x\neq2$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

b) Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

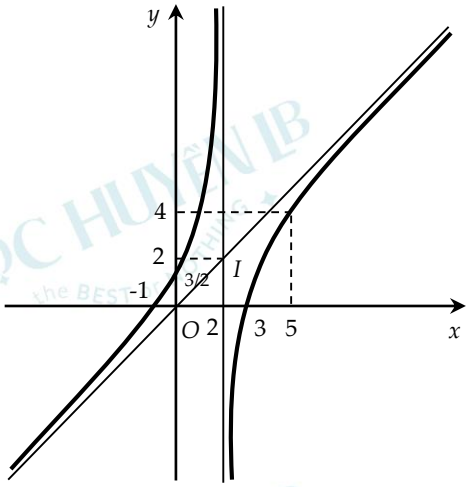
3. Đồ thị

Giao điểm của đồ thị với trục tung là điểm $\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

Ta có: $y=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=3$.

Vậy đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm $(-1;0)$ và $(3;0)$.

Nhận xét: Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2;2)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.



REMARK

Đồ thị của hàm số phân thức $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$ $(a\neq 0,\ p\neq 0,$ đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu):

- Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng.
- Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

B Ví dụ minh họa

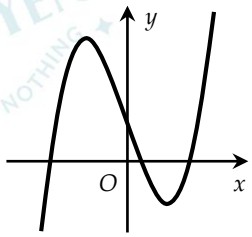
Dạng thức 1 Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án

01 Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như hình vẽ sau?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

A. $y=x^3-3x^2-1$. **B.** $y=-x^3+3x^2-1$. **C.** $y=x^3+3x^2-1$. **D.** $y=-x^3-3x^2-1$.

02 Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=-x^3-2x+\frac{1}{2}$. **B.** $y=x^3-2x+\frac{1}{2}$.

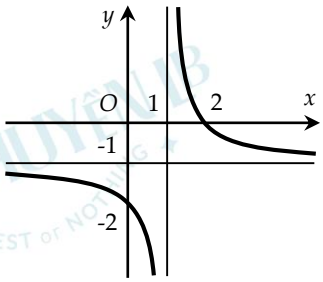
C. $y=-x^4+2x+\frac{1}{2}$. **D.** $y=x^4+2x^2+\frac{1}{2}$.

03 Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như hình vẽ sau?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

A. $y=\frac{-x+2}{x-1}$. **B.** $y=\frac{x+2}{x-1}$. **C.** $y=\frac{x+2}{x+1}$. **D.** $y=\frac{x-3}{x-1}$.

04 Cho đồ thị hàm số $y=\frac{ax+b}{x+c}$ với $a\neq 0;\ a,b,c\in\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Tính giá trị biểu thức $P=a-3b+2c$.

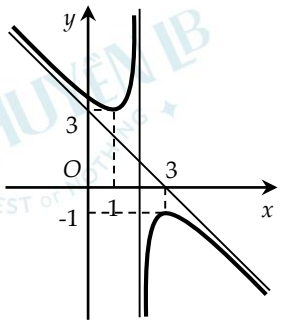
A. 12.
B. –7.
C. 10.
D. –9.

05 Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\frac{x-5}{x+4}$ là

A. $I(-4;1)$. **B.** $I(5;1)$.

C. $I(-4;-1)$. **D.** $I(5;-1)$.

06 Hàm số nào dưới đây có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên?

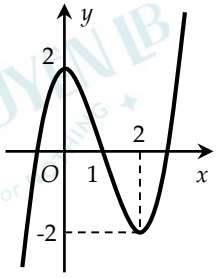


A. $y=\frac{2x^2-9x+10}{-x+2}$. **B.** $y=\frac{2x^2-9x+10}{x+2}$.

C. $y=\frac{x^2-5x+7}{-x+2}$. **D.** $y=\frac{x^2-5x+7}{x+2}$.

Dạng thức 2 Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) thí sinh chọn đúng hoặc sai

07 Cho hàm số đa thức bậc ba có đồ thị như hình vẽ:



a) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

b) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho bằng $\sqrt{5}$.

c) Hình trên là đồ thị của hàm số $y=(x-1)(x^2-2x-2)$.

d) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là $(1;1)$.

08 Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $ad-bc\neq 0;\ c\neq 0$ và $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	-1 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1

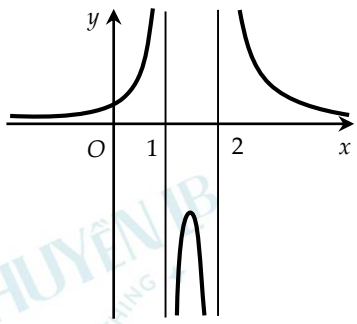
a) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $x=-1$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $y=1$.

c) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là $(1;-1)$.

d) Đường thẳng $y=x+2$ cắt lần lượt đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho tại hai điểm A,B. Gọi I là tâm đối xứng của đồ thị hàm số. Khi đó $S_{IAB}=8$.

09 Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{nx+1}{x^2+3mx+2n^2}$ có đồ thị có hình vẽ như hình vẽ:



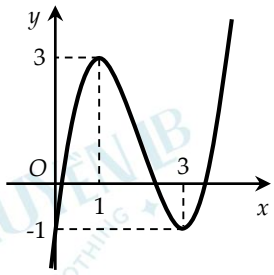
a) Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$.

b) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng.

c) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)}$ không có tiệm cận đứng.

d) Với $\begin{cases} m=1 \\ n=-1 \end{cases}$ thì hàm số có đồ thị như hình vẽ trên.

10 Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x-1$ có đồ thị như hình vẽ:



a) Phương trình $f'(x)=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt $x=-1$ hoặc $x=3$.

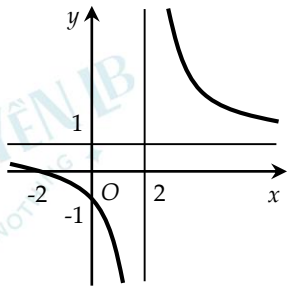
b) Gọi $I(a;b)$ là tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho. Khi đó $2a+b\leq 5$.

c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$.

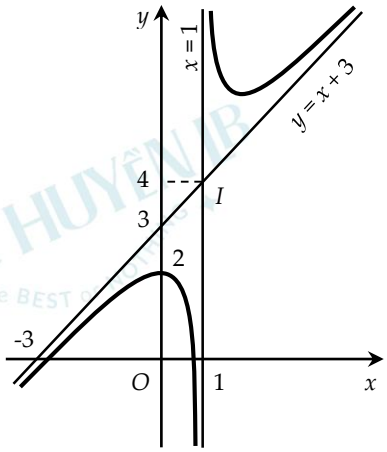
d) Trên miền $[-1;5]$, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng -1.

Dạng thức 3 Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

11 Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+2}{bx+c}$ với $a,b\neq 0$ và $a,b,c\in\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Tính giá trị biểu thức $P=a+b+c$.



12 Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $a,m\neq 0$ và $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ $I(x_0;y_0)$. Tính giá trị biểu thức x_0+2y_0.



13 Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250km so với bề mặt của Mặt Trăng. Trong khoảng 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm: $h(t)=-0,01t^3+1,1t^2-30t+250$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và h là độ cao tính bằng kilômét

(*Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016*).

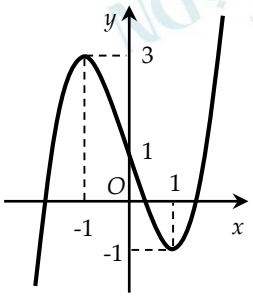
Tìm thời điểm t $(0\le t\le 50)$ sao cho con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng.

14 Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật thể sau thời gian t giây được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 5 mét với tốc độ ban đầu 39,2 *m/s* là $h(t)=5+39,2t-4,9t^2$, chọn chiều dương là chiều hướng từ dưới lên (theo *Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016*). Độ cao của vật thể đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm nào (đơn vị: giây)?

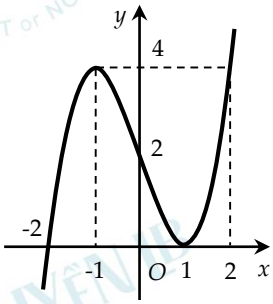
C Bài tập rèn luyện

Dạng thức 1 Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

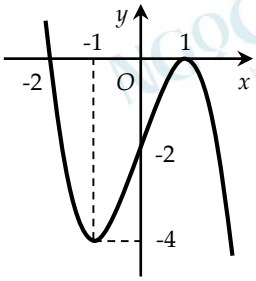
01 Đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$ là hình nào trong bốn hình dưới đây?



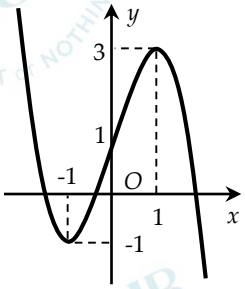
A.



B.

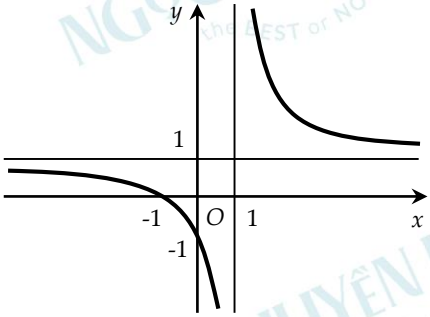


C.



D.

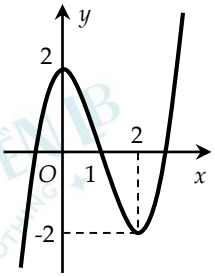
02 Hàm số nào dưới đây có đồ thị là đường cong như hình vẽ sau?



A. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

C. $y=\dfrac{2x+1}{2x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2}{1-x}$.

03 Cho hàm số đa thức bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Tính giá trị biểu thức $S=a+b$.



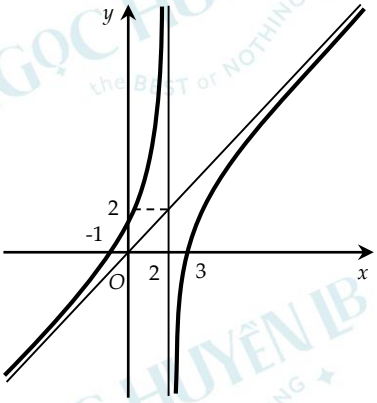
A. $S=-2$.

B. $S=0$.

C. $S=1$.

D. $S=-1$.

04 Hàm số nào dưới đây có đồ thị là đường cong như hình vẽ sau?



A. $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$.

C. $y=\dfrac{x^2-3x}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+3x}{x+1}$.

05 Cho hàm số đa thức bậc ba có bảng biến thiên như hình vẽ.

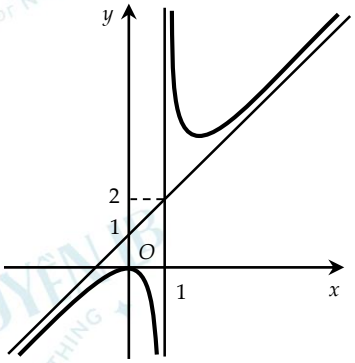
x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-1	↗	$+\infty$

Tọa độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. $I(-1;0)$. **B.** $I\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{11}{16}\right)$.

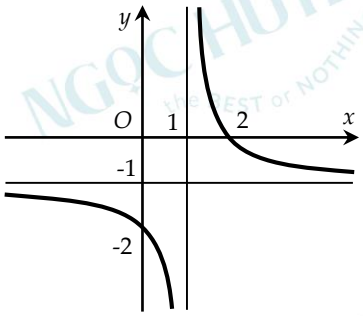
C. $I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{-11}{16}\right)$. **D.** $I\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$.

06 Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $a,m\neq 0$ và $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ $I(x_0;y_0)$. Tính giá trị biểu thức x_0+3y_0.



A. 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

07 Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $ad-bc\neq 0$; $c\neq 0$ và $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{a-2b+3d}{c}$.

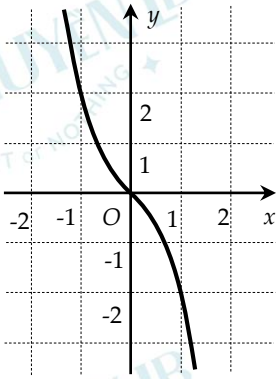


A. $P=6$. **B.** $P=0$.
C. $P=-8$. **D.** $P=2$.

08 Tọa độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x}{x+1}$ là

A. $I(-1;-2)$. **B.** $I(1;-2)$.
C. $I(-1;-4)$. **D.** $I(1;4)$.

09 Hàm số nào dưới đây có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên?



A. $y=-x^3+x$.
B. $y=x^3-x$.
C. $y=-x^3-x$.
D. $y=-x$.

10 Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $ad-bc\neq 0$; $c\neq 0$ và $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.

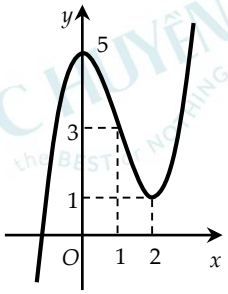
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	-1 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-1

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là

A. $I(-1;1)$. **B.** $I(1;-1)$.
C. $I(-1;-1)$. **D.** $I(1;1)$.

Dạng thức 2 Câu trắc nghiệm đúng sai

11 Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$, với $a\neq 0$; $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



a) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

b) Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên $[0;2]$ bằng 3.

c) Hàm số đã cho có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$ ↗		5	↘	1	↗	$+\infty$

d) Đồ thị ở hình trên là của hàm số $y=x^3-3x^2+5$.

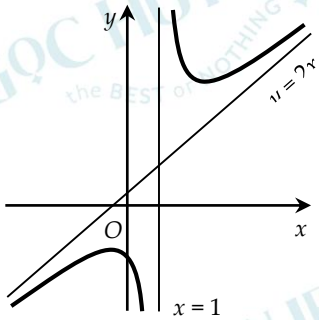
12 Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{2x^2-x+4}{x-1}$ có đồ thị (C).

a) Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) Tiệm cận xiên của đồ thị (C) là đường thẳng $y=2x+1$.

c) Điểm $I(1;2)$ là tâm đối xứng của đồ thị (C).

d) Đồ thị (C) có dạng như hình vẽ sau:



13 Cho hàm số $f(x)=\dfrac{5x-3}{6x+1}$ có đồ thị (H).

a) Hàm số có đạo hàm $f'(x)=\dfrac{-13}{(6x+1)^2}, \forall x\neq\dfrac{-1}{6}$.

b) Hàm số đã cho không có điểm cực trị và đồng biến trên các khoảng xác định của nó.

c) Đồ thị (H) có đường tiệm cận đứng $x=\frac{-1}{6}$ và đường tiệm cận ngang $y=\frac{6}{5}$.

d) Đồ thị (H) cắt trục hoành tại điểm có tung độ bằng $\frac{3}{5}$.

14 Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, với $a\neq 0;\ a,b,c,d\in\mathbb{R}$, có đồ thị là (C). Biết (C) có một điểm cực trị là $A(1;-1)$ và tâm đối xứng là $I\left(\frac{2}{3};-\frac{29}{27}\right)$.

a) (C) có một điểm cực trị là $B\left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{27}\right)$.

b) $a+b+c+d=-1$.

c) Tiếp tuyến của (C) tại A song song với trục hoành.

d) $a+2b+3c+4d=4$.

15 Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, ước tính cần chi phí $\frac{1,7x}{100-x}$ (tỷ đồng).

a) Không thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm từ khí thải nhà máy.

b) Nếu muốn loại bỏ 90% chất gây ô nhiễm từ khí thải nhà máy thì cần chi phí là 15 tỷ đồng.

c) Khi tỷ lệ chất ô nhiễm từ khí thải nhà máy cần loại bỏ càng cao, chi phí mà nhà máy phải chi trả càng lớn.

d) Để loại bỏ ít nhất 50% chất gây ô nhiễm từ khí thải, nhà máy cần phải chi trả ít nhất 1,8 tỷ đồng.

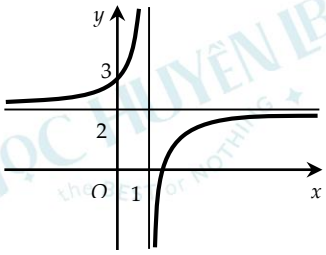
Dạng thức 3 Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

16 Cho hàm số đa thức bậc ba $y=f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như hình vẽ:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ đạt tại $x=x_0$. Giá trị của x_0 bằng bao nhiêu?

17 Cho hàm số $y=\frac{ax-3}{x-b}$, với $3-ab\neq 0$, có đồ thị như hình vẽ sau.

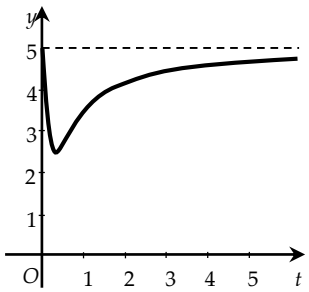


Giá trị của a bằng bao nhiêu?

18 Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, với $a\neq 0;\ a,b,c,d\in\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

Tính $f(22)$.

19 Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $G(t)=45t^2-t^3$ (kết quả khảo sát được trong 10 tháng vừa qua). Nếu xem $G'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t, thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ bao nhiêu?

20 Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ $(t\geq 0)$ khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số (có đồ thị như đường in đậm ở hình bên dưới): $y(t)=5-\frac{15t}{9t^2+1}$. Nồng độ oxygen thấp nhất bằng bao nhiêu mg/l?