



TD4

04

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH

1. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

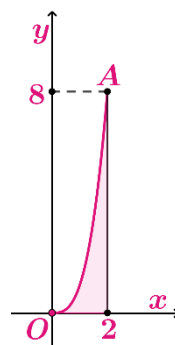
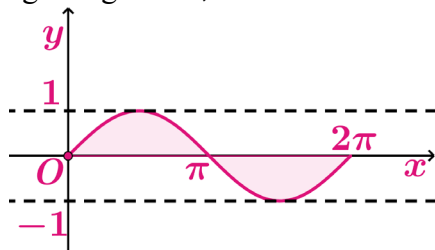
a) Hình phẳng giới hạn bởi một đồ thị hàm số, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$.

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ liên tục, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ ($a < b$), được tính bằng công thức

$$S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

★ **Ví dụ 1:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=2$.

★ **Ví dụ 2:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=2\pi$.

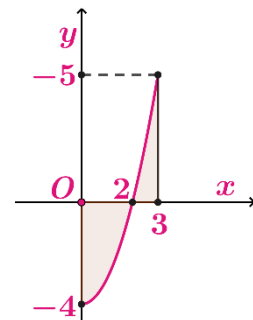


★ **Ví dụ 3:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 - 4$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=3$.

b) Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số và hai đường thẳng $x=a, x=b$

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x=a, x=b$, được tính bằng công thức

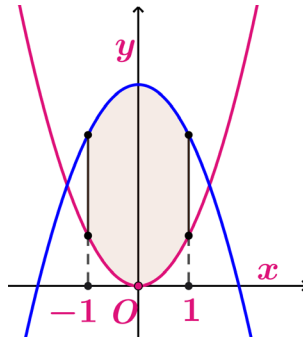
$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$



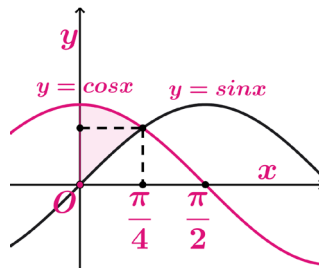
🌟 **Chú ý:** Nếu hiệu $f(x) - g(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a; b]$ thì

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|.$$

★ **Ví dụ 4:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $y = 4 - x^2$, $y = x^2$ và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 1$.



★ **Ví dụ 5:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ và hai đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.



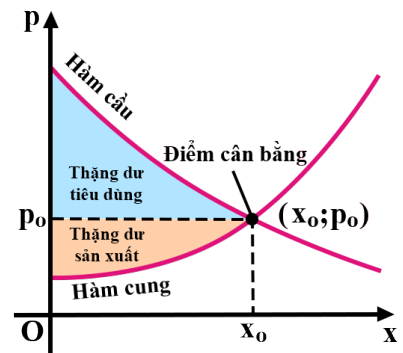
★ **Ví dụ 6:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 4$.

c) Thặng dư tiêu dùng

Ta biết rằng hàm cầu liên quan đến giá p của một sản phẩm với nhu cầu của người tiêu dùng, hàm cung liên quan đến giá p của sản phẩm với mức độ sẵn sàng cung cấp sản phẩm của nhà sản xuất. Điểm cắt nhau $(x_0; p_0)$ của đồ thị hàm cầu $p = D(x)$ và đồ thị hàm cung $p = S(x)$ được gọi là điểm cân bằng.

Các nhà kinh tế gọi diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị hàm cầu, đường ngang $p = p_0$ và đường thẳng đứng $x = 0$ là *thặng dư tiêu dùng*. Tương tự, diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm cung, đường nằm ngang $p = p_0$ và đường thẳng đứng $x = 0$ được gọi là *thặng dư sản xuất*, như trong hình vẽ.

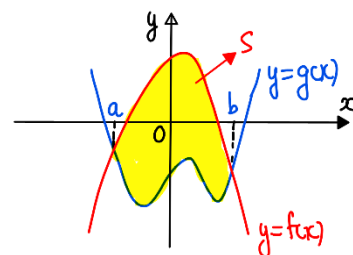
★ **Ví dụ 7:** Giả sử hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm được mô hình hóa bởi: Hàm cầu: $p = -0,36x + 9$ và hàm cung: $p = 0,14x + 2$, trong đó x là số đơn vị sản phẩm. Tìm thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất cho sản phẩm này.





2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

1. Cho hàm số $f(x)$ là hàm số đa thức bậc hai và hàm số $g(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn, có đồ thị như hình vẽ. Diện tích phần tô đậm trong hình vẽ bằng:

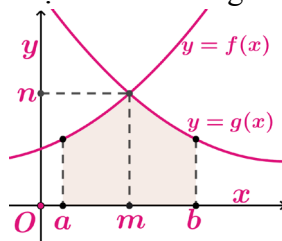


- A. $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$. B. $\int_a^b f(x) dx$.
C. $\int_a^b g(x) dx$. D. $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx$.

2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2 + 4x$ và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$ là

- A. -9. B. 9. C. $\frac{16}{3}$. D. $\frac{20}{3}$.

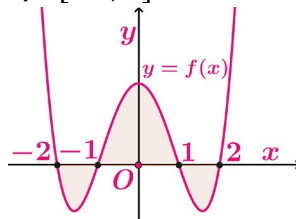
3. Cho S là phần diện tích hình phẳng được tô màu trong hình vẽ:



Khi đó, biểu thức tính diện tích S là

- A. $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$. B. $S = \int_a^m |f(x) - g(x)| dx + \int_m^b |g(x) - f(x)| dx$.
C. $S = \int_a^m |f(x)| dx + \int_m^b |g(x)| dx$. D. $S = \int_a^m |g(x)| dx + \int_m^b |f(x)| dx$.

4. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$ như hình vẽ:



Biết $\int_{-2}^{-1} f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx = -\frac{22}{15}$ và $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{76}{15}$. Khi đó, diện tích của hình phẳng được tô màu là

- A. 8. B. $\frac{22}{15}$. C. $\frac{32}{15}$. D. $\frac{76}{15}$.



5. Tính diện tích phần hình phẳng được tô màu trong hình vẽ

6. Hình phẳng giới hạn bởi elip

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0).$$

Tính diện tích Elip.

7. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường:

a) $y = e^x, y = x^2 - 1, x = -1, x = 1$; ➡ Đáp án:

b) $y = \sin x, y = x, x = 0, 5\pi, x = \pi$; ➡ Đáp án:

c) $y = 9 - x^2, y = 2x^2, x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$; ➡ Đáp án:

d) $y = \sqrt{x}, y = x^2, x = 0, x = 1$. ➡ Đáp án:

e) $y = \frac{3x+1}{1-x}, x = 0, y = 0$. ➡ Đáp án:

f) $y = (e + 1)x, y = (1 + e^x)x$ ➡ Đáp án:

8. Cho hàm số $f(x) = |x^2 - 1|$ và $g(x) = |x| + 5$.

a) Vẽ hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Xác định phần hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số này, tính diện tích hình phẳng đó.

➡ Đáp án:

9. Cho Parabol $(P): y = x^2 + 3$. Điểm A nằm trên (P) có hoành độ bằng 2.

a) Xác định phương trình tiếp tuyến của (P) tại điểm A .

b) Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với tiếp tuyến của (P) tại A . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi d và (P) .

c) Gọi Δ là tiếp tuyến của (P) tại A . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P), \Delta$ và Oy .

➡ Đáp án:

10. Cho các hàm số $f(x) = x^2; g(x) = \frac{x^2}{27}$ và $h(x) = \frac{27}{x}$.

a) Vẽ ba đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x), y = h(x)$ trên phần góc phần tư thứ nhất.

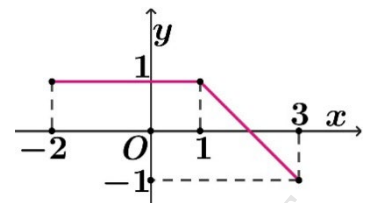
b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi ba đồ thị này.

➡ Đáp án:

11. Đường gấp khúc ABC trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y =$

$f(x)$ trên đoạn $[-2; 3]$. Tính tích phân $\int_{-2}^3 f(x) dx$ bằng bao nhiêu?

➡ Đáp án:



12. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $(P): y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{7}{3}, (H): y = \frac{x-7}{3-x}$ là $S =$

$a + b \ln 2 + c \ln 3$ (đơn vị diện tích), với a, b, c là các số hữu tỉ.

Giá trị của biểu thức $9(a + b - c)$ bằng bao nhiêu?

➡ Đáp án:

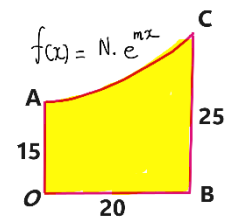


13. Cho hàm số $f(x) = e^x$ và $g(x) = \ln x$.

- Vẽ hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$ trên cùng một hệ trục tọa độ, chứng minh rằng hai đồ thị này đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.
- Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, đường thẳng $y = x$, trục tung và đường thẳng $x = 1$.
- Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = g(x)$, đường thẳng $y = x$, và các đường thẳng $x = 1$ và $x = 2$.
- Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.

➡ Đáp án:

14. Một mảnh vườn hình thang cong $OACB$ vuông tại O và B , có dạng như hình vẽ, trong đó độ dài các cạnh $OA = 15$ m, $OB = 20$ m, $BC = 25$ m, và đường cong AC được mô tả bởi hàm số mũ có dạng $f(x) = N \cdot e^{mx}$, trong đó N và m là các hằng số. Hỏi mảnh vườn này có diện tích bằng bao nhiêu?



➡ Đáp án:

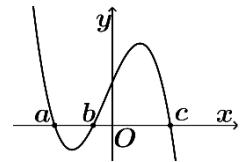
15. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^2 - a$ và trục hoành là $\frac{4}{3}$.

Khi đó, có bao nhiêu giá trị của a thỏa mãn

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

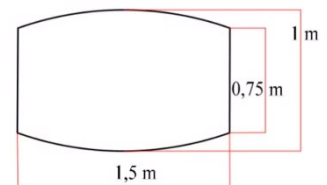
Đặt $I_1 = \int_a^b f(x) dx$, $I_2 = \int_b^c f(x) dx$ và $I_3 = \int_a^c f(x) dx$. Phát biểu nào dưới đây



là đúng?

- A. $0 < I_1 < I_2 < I_3$. B. $I_1 < 0 < I_3 < I_2$. C. $I_1 < I_3 < 0 < I_2$. D. $I_1 < 0 < I_2 < I_3$.

17. Một quán cafe muốn làm cái bảng hiệu là một phần của Elip có kích thước, hình dạng giống như hình vẽ và có chất lượng bằng gỗ. Diện tích gỗ bề mặt bảng hiệu là (làm tròn đến hàng phần chục)



➡ Đáp án:

18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn

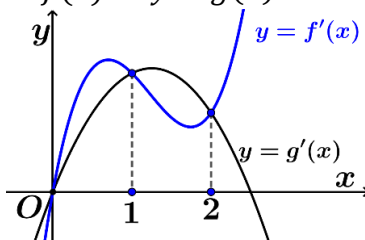
$2f(x) + f(1-x) = 3x^2 - 6, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ bằng $\frac{a\sqrt{5}}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{Z}^+$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó $a - b$ bằng

- A. -20. B. 20. C. 23. D. 17.

19. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và hàm số $f'(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, g'(x) = qx^2 + nx + p$ với $a, q \neq 0$ có đồ thị như hình vẽ. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai



đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng 10, và $f(2) = g(2)$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.



A. $\frac{8}{3}$.

B. $\frac{16}{3}$.

C. $\frac{16}{5}$.

D. $\frac{8}{15}$.

20. Cho hai hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 3x$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 - x$, với a, b, c, m, n là các số thực. Biết hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1; 1; 2$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng

A. $\frac{5}{6}$.

B. $\frac{9}{2}$.

C. $\frac{37}{6}$.

D. $\frac{16}{3}$.

21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và thỏa mãn

$$xf'(x) + 2x^2 = f(x) + 2x^3, \forall x \neq 0, f(1) = 2.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ là

A. $\frac{5}{4}$.

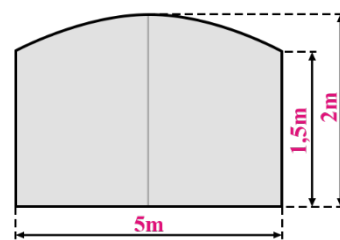
B. $\frac{5}{2}$.

C. $\frac{2}{3}$.

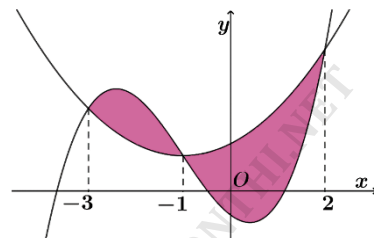
D. $\frac{4}{3}$.

22. Hàm cầu và hàm cung của một sản phẩm được mô hình hoá bởi: Hàm cầu: $p = -0,2x + 8$ và hàm cung: $p = 0,1x + 2$, trong đó x là số đơn vị sản phẩm, p là giá của mỗi đơn vị sản phẩm (tính bằng triệu đồng). Tìm thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất đối với sản phẩm này.

23. Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một parabol. Giá 1 m² của rào sắt là 700000 đồng. Hỏi ông an phải trả bao nhiêu tiền để làm cửa sắt (đơn vị nghìn đồng, làm tròn đến hàng đơn vị).



24. Người ta dự định trồng hoa Lan để trang trí vào phần tô đậm (như hình vẽ). Biết rằng phần tô đậm là diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 0,5$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$, trong đó $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Biết rằng hai đồ thị đó cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt bằng $-3, -1, 2$ chi phí trồng hoa là 800 000 đồng/m² và đơn vị trên các trục được tính là 1 mét.



Tính số tiền trồng hoa (đơn vị nghìn đồng, làm tròn đến hàng đơn vị).