
**TÀI LIỆU KHÓA HỌC ĐỘC QUYỀN**

# KHÓA BON SEASON 2026

## STEP 1 | CHAPTER 0. KIẾN THỨC TIỀN ĐỀ TOÁN 12

### Theme 2. Giới hạn của hàm số khi $x \to \infty$

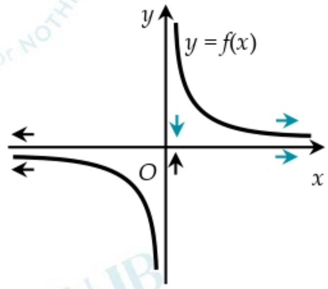
Xem bài giảng & thi online trên **ngochuyenlb.edu.vn** tại lớp:
**STEP 1 | Nền tảng Toán 12 | 8 điểm**

## 1. Giới hạn của hàm số khi $x \to \infty$

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Ta thấy

- Khi $x \to +\infty$ thì giá trị của $f(x)$ tiến dần đến 0.
- Khi $x \to -\infty$ thì giá trị của $f(x)$ tiến dần đến 0.

Ta có thể viết $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.




- Khi giá trị của $f(x)$ tiến dần đến vô cùng lớn, giá trị của hàm số $f(x)$ tiến dần đến $\alpha$ thì ta viết:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \text{khi } x \to +\infty \text{ thì } f(x) \to \alpha}$$

Ví dụ: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

- Khi giá trị của $x$ tiến đến vô cùng bé, giá trị của hàm số $f(x)$ tiến dần đến $\beta$ thì ta viết

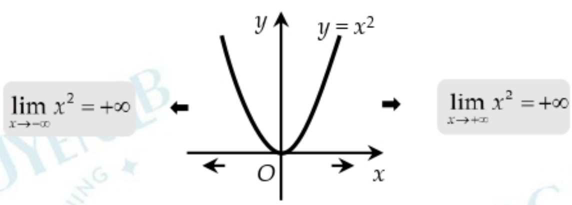
$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \beta \Leftrightarrow \text{khi } x \to -\infty \text{ thì } f(x) \to \beta}$$

Ví dụ: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

- Trong trường hợp $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$ mà giá trị của $f(x)$ cũng tiến dần đến vô cực thì ta viết

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

Ví dụ:



**REMARK 1** Với $c$ và $k$ là các hằng số và $k$ nguyên dương, ta luôn có

- $\lim\limits_{x\to+\infty} c = c;\ \lim\limits_{x\to-\infty} c = c.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0;\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ với $k$ nguyên dương; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = -\infty$ với $k$ là số nguyên lẻ; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = +\infty$ với $k$ là số nguyên chẵn.

**REMARK 2**

Tính chất về giới hạn của hàm số khi $x\to a$ trong **Theme 1** vẫn đúng khi $x\to+\infty$ hoặc $x\to-\infty$.

**[Ví dụ]** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^2+3x+5\right) = -\infty.$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3+3x+5\right) = -\infty.$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^4+3x+5\right) = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 5 = 5.$

**REMARK 3** **Quy tắc về giới hạn vô cực**

- Quy tắc áp dụng cho cả $x\to a; x\to a^+; x\to a^-; x\to+\infty$ và $x\to+\infty$.
- Quy tắc áp dụng cho tích, thương hai hàm số khi một trong hai hàm có giới hạn vô cực.

(1) Quy tắc tìm giới hạn của một tích:

Cho $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \alpha \neq 0;\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ (hoặc $-\infty$)

| $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ | $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ | $\lim\limits_{x\to x_0}\{f(x).g(x)\}$ |
|---|---|---|
| $\alpha>0$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\alpha<0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| | $-\infty$ | $+\infty$ |

(2) Quy tắc tìm giới hạn của một thương:

| $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ | $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ | Dấu của $g(x)$ | $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ |
|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $\pm\infty$ | Tùy ý | 0 |
| $\alpha>0$ | 0 | + | $+\infty$ |
| | | – | $-\infty$ |
| $\alpha<0$ | 0 | + | $-\infty$ |
| | | – | $+\infty$ |

**[Ví dụ]** Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-2x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)$ vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right) = 1>0\end{cases}$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-2x\right) = -\infty.$

## 2. Giới hạn $\dfrac{\infty}{\infty}$

**Phương pháp:** Khi cả tử thức $f(x)$ và mẫu thức $g(x)$ đều là các hàm đa thức và $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)|=\infty; \lim\limits_{x\to\infty}|g(x)|=\infty$ thì $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ thuộc dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Chia cả tử và mẫu cho lũy thừa có bậc cao nhất và sử dụng $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{c}{x^n}=0$ ($c$ là hằng số) để giải quyết.

**[Ví dụ]**

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{x^3-3x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{2x^2}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{8x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{2+0+0}{1+0+0}=\dfrac{2}{1}=2.$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+1}{2x^2+x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{-x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{2x^2}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{0+0}{2+0+0}=0.$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+3x^2+2}{2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^3}}{\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=+\infty\ \left(\text{do}\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)=0\end{cases}\right)$

**REMARK** (quan trọng cho bài toán tiệm cận)

Từ ba ví dụ trên ta có với dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$ mà cả tử thức và mẫu thức đều là đa thức thì

(1) Khi (bậc của tử thức) = (bậc của mẫu thức) thì giới hạn = (hệ số cao nhất của tử thức) / (hệ số bậc cao nhất của mẫu thức).

(2) Khi (bậc của tử thức) > (bậc của mẫu thức) thì giới hạn = 0.

(3) Khi (bậc của tử thức) < (bậc của mẫu thức) thì giới hạn tiến tới vô cực ($-\infty$ hoặc $+\infty$)

**Ví dụ 1** Tìm các giới hạn sau:

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-3x+1}{5-2x}$; (2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-3x^2-x^3}{4x^2+1}$; (3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{2x^2-x+5}$; (4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{2x^2-x+1}$;

**Ví dụ 2** Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}$ bằng

**A.** 2 **B.** –2. **C.** 1 **D.** –1.

**Ví dụ 3** Tìm giới hạn:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{x+1}$; (2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}$.

**Ví dụ 4** Cho $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^2+bx+3}{cx^3+3x+2}=2$; biết $a,b,c\in\mathbb{R}$. Tính $a+b+c$?

**Bài tập rèn luyện thêm**

Tìm các giới hạn:

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x+1}{2x^3+2x+5}$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^3-3x^2+2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-x+1}}{5x^2-1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{2x+1}$;

(5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-1}}{\sqrt{2x^2+1}}$;

(6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^6+x^4+x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}}$;

(7) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\sqrt{2x^2+1}}{2x+3\sqrt{x^2+1}}$;

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^3+1}{2x^3+5}}$.

## 3. Giới hạn dạng $\infty-\infty$

**Bài toán:** $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]$ khi và $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$

hoặc $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]$ khi $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$.

**Phương pháp:** Nhân hoặc chia với biểu thức liên hợp (nếu có sẵn) hoặc quy đồng đưa về cùng một phân thức (nếu chứa nhiều phân thức)

Cụ thể $\infty-\infty \xrightarrow{\text{nhân liên hợp}} \dfrac{\infty}{\infty}$

**[Ví dụ]**

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x^2+2x\right)-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}=\dfrac{2}{\sqrt{1+0}+1}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x+1-x}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\to\dfrac{\infty}{\infty}$

**REMARK 1**

Trong ví dụ 3 mặc dù hàm $\sqrt{x^2+x+1}+x$ là tổng hai hàm nhưng $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ nên vẫn là dạng $\infty-\infty \xrightarrow{\text{nhân liên hợp}} \dfrac{\infty}{\infty}$.

**REMARK 2** Nhầm lẫn giữa dạng $\infty - \infty$ và $\frac{\infty}{\infty}$.

Giới hạn dạng $\infty - \infty$ chỉ áp dụng khi hệ số bậc cao nhất của $u(x)$ và $v(x)$ (trong $\sqrt{u(x)} - \sqrt{v(x)}$) bằng nhau.

Nếu hệ số bậc cao nhất của của $u(x)$ và $v(x)$ (trong $\sqrt{u(x)} - \sqrt{v(x)}$) không bằng nhau thì làm kiểu $\frac{\infty}{\infty}$.

**Ví dụ 1** Tìm các giới hạn

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x}\right)$;

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}\right)$;

(3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x} + x\right)$;

(4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 + 2x - 1}\right)$.

**Ví dụ 2** Giá trị $A = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x\right)$ bằng

**A.** 1. **B.** $+\infty$. **C.** 2. **D.** $-2$.

**Ví dụ 3** Cho $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - x\right) = 8$. Tìm số thực $a$.

**Bài tập rèn luyện thêm**

Tìm các giới hạn sau:

(1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x + 1} + x\right)$;

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4x + 2} - x\right)$;

(3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)$;

(4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + x} + 2x\right)$;

(5) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 1}\right)$;

(6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 + x - 2} + x}{3x - 1}$;

(7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left\{\dfrac{1}{x+1} \cdot \left(\sqrt{x^2 + 2x} - x\right)\right\}$;

(8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 - 3x}\right)$;