Suppression du non déterminisme

$\mathcal{A}$=(Q,A,T,i,F) est un AFND : T est une application de Q dans $\mathcal{P}$(Q). On lui associe son déterminisé $\mathcal{D}$=($\mathcal{P}$(Q),A,T',{i},F') où

$$\text{T '(X,q)}=\bigcup_{x\in X}\text{T}(x,q) \qquad \text{et} \qquad \text{F'} = \{X\subset Q|X\cap F\neq\emptyset\}$$

Pour un AFD $\mathcal{A}$ comme pour un AFND $\mathcal{D}$ on notera ci-dessous $\text{suit}_{\mathcal{A}}(q,a)$ ou $\text{suit}_{\mathcal{D}}(q,a)$ ce qui a été noté ci-dessus T(q,a) ou T'(q,a)

Pour $\mathcal{M}$= $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{D}$, on étend aux mots de A^* la définition de suit par

$$\text{suit}_{\mathcal{M}}(q,\varepsilon)=q \text{ et } \text{suit}_{\mathcal{M}}(q,\mu a)=\text{suit}_{\mathcal{M}}(\text{suit}_{\mathcal{M}}(q,\mu),a)$$

Enfin si X est une partie de Q on utilise la définition usuelle de l'image d'une partie par une application: $\text{suit}_{\mathcal{A}}(X,m)=\bigcup_{q\in X}\text{suit}_{\mathcal{A}}(q,m)$

On va prouver que, $\forall Z\in\mathcal{P}(Q),\forall m\in A^*,\text{suit}_{\mathcal{D}}(Z,m)=\text{suit}_{\mathcal{A}}(Z,m)$

La preuve va s'effectuer par récurrence sur |m|

$\triangleright$Pour $|m|=0$ on a m=ε et on doit vérifier : Z=Z, c'est bon

On prend maintenant un mot m=μa où a $\in$ A et où le résultat est supposé acquis pour μ, on le veut pour m

Partons de $\text{suit}_{\mathcal{A}}(Z,\mu a)$ c'est à dire $\bigcup_{q\in Z}\text{suit}_{\mathcal{A}}(q,\mu a)$ par définition(s) des images par μa c'est encore $\bigcup_{q\in Z}\text{suit}_{\mathcal{A}}(\text{suit}_{\mathcal{A}}(q,\mu),a)$ on utilise alors nos hypothèses sur μ pour le transformer en $\bigcup_{q\in Z}\text{suit}_{\mathcal{A}}(\text{suit}_{\mathcal{D}}(q,\mu),a)$

Maintenant $\text{suit}_{\mathcal{D}}(q,\mu a)$ c'est $\text{suit}_{\mathcal{D}}(\text{suit}_{\mathcal{D}}(q,\mu),a)$ on utilise alors la définition de $\mathcal{D}$ en fonction de $\mathcal{A}$: $\bigcup_{\alpha\in\text{suit}_{\mathcal{D}}(q,\mu)}\text{suit}_{\mathcal{A}}(\alpha,a)$ soit par définition de l'image d'une partie (par un automate ou non) $\text{suit}_{\mathcal{A}}(\text{suit}_{\mathcal{D}}(q,\mu),a)$: c'est ce qui apparaissait dans notre union en fin du § précédent

On a donc $\text{suit}_{\mathcal{A}}(Z,\mu a)=\bigcup_{q\in Z}\text{suit}_{\mathcal{D}}(q,\mu a)$ c'est à dire $\text{suit}_{\mathcal{D}}(Z,\mu a)$ $\triangleleft$

Pour passer d'un AFNDε à un AFD, il reste à effectuer le passage AFNDε $\rightarrow$ AFND : on remplace T'(X,q) défini ci dessus à partir de T par T "(X,q)=clot(T'(X,q)) : il n'y a plus de transitions instantanées, on vient de traduire en ensembles d'états ce qu'elles faisaient

Attention le concours CCP aime (?) ce genre de détails et chaque année il y a des preuves par récurrences du type de celle qui part au $\triangleright$ ci-dessus