Assignment of class MSP

Author: Hung Do (xdohun00@stud.fit.vutbr.cz)

Date: 15/12/2023

In [2]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import pandas as pd
import statsmodels.formula.api as smf
import statsmodels.api as sm

from scipy.stats import gamma, nbinom, truncnorm
from statsmodels.stats.outliers_influence import variance_inflation_factor
```

Reading data from the file

In [3]:
```
# original data
df = pd.read_excel("./Projekt-2_Data.xlsx")

# renaming columns
col_map = {
    "uloha_1 a)": "poster_a",
    "uloha_1 b)_prior": "prior_b",
    "skupina": "groups",
    "uloha_1 b)_pozorování": "observation_b"
}
df1 = df.rename(columns=col_map)
df1
```

Out[3]:

	poster_a	prior_b	groups	observation_b
0	2.0	3.634785	0	3.626656
1	2.0	2.868113	0	3.008269
2	1.0	2.149160	0	2.989829
3	3.0	4.263065	0	2.371630
4	0.0	2.594745	0	4.009366
...	...	...	...	...
99995	NaN	1.725637	9999	NaN
99996	NaN	4.048414	9999	NaN
99997	NaN	3.000662	9999	NaN
99998	NaN	3.058451	9999	NaN
99999	NaN	4.487418	9999	NaN

100000 rows × 4 columns

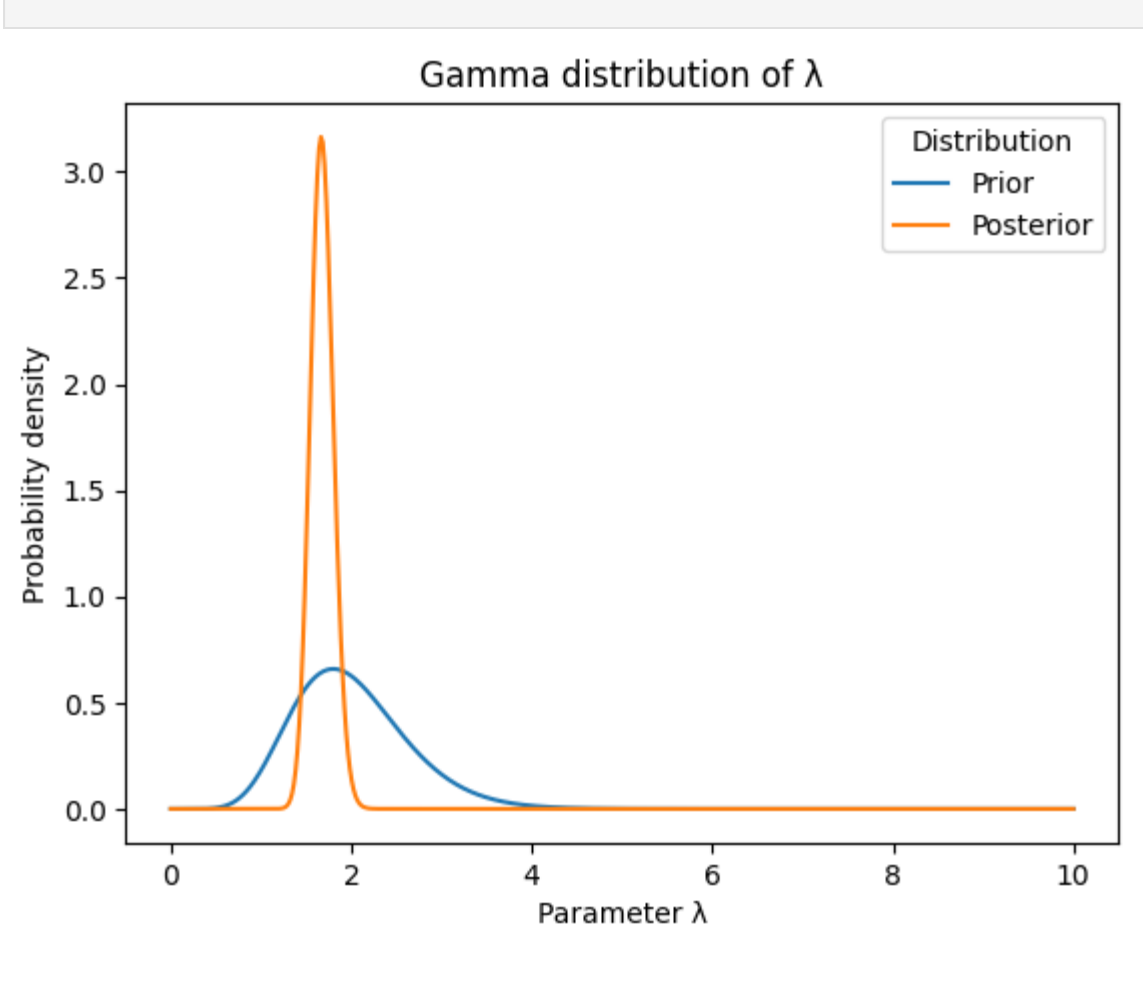
Bayesian Probability

Prior and posterior probability distribution of Poisson distribution parameter λ

Pro výpočet apriorního a aposteriorního rozdělení parametru λ můžeme použít tabulku konjugovaných rozdělení (viz. odkaz na Wiki). Z ní můžeme vyčíst, že Poissonovo rozdělení můžeme vygenerovat pomocí Gamma rozdělení. Proto použijeme funkci `scipy.stats.gamma`.

Hodnota α označuje četnost nějakého jevu a hodnota β označuje délku časového úseku, během kterého experiment proběhl.

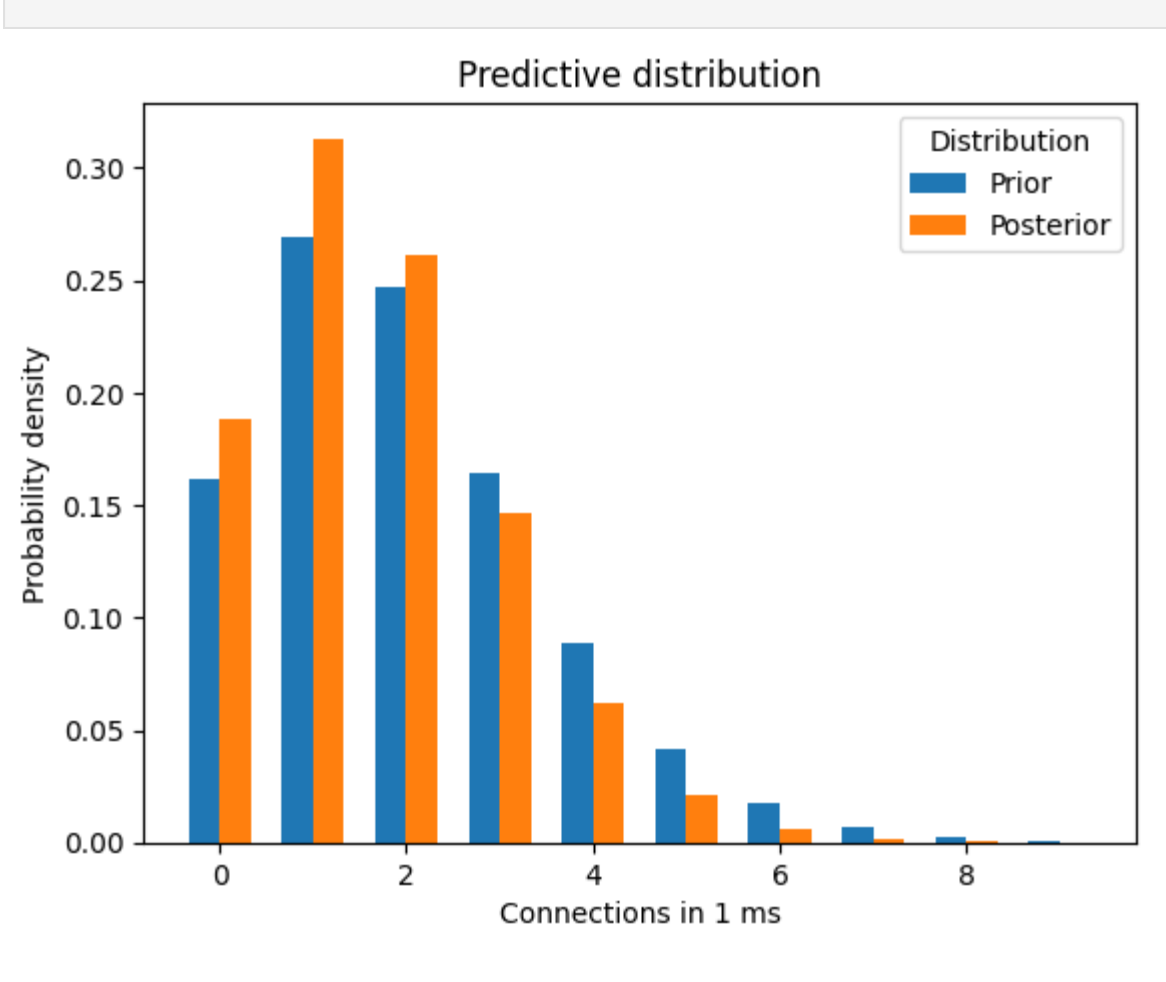
In [4]:
```
# clear data since there are lots of NaN values
# which messes with the calculation
data = df1["poster_a"].dropna()

# defining some constant values
x = np.linspace(0, 10, 500)
alpha, beta = 10, 5
alpha_post = alpha + data.sum()
beta_post = beta + data.size

# calculate prior and posterior distributions
# using Gamma distribution
prior_1a1 = gamma(alpha, scale=1/beta)
posterior_1a1 = gamma(
    alpha + data.sum(),
    scale=1 / (beta + data.size)
)

# plot a graph
fig, ax = plt.subplots()
_ = ax.plot(x, prior_1a1.pdf(x), label="Prior")
_ = ax.plot(x, posterior_1a1.pdf(x), label="Posterior")
_ = plt.legend(title="Distribution")
_ = ax.set(title="Gamma distribution of λ", xlabel="Parameter λ", ylabel="Probability density")
```



Predictive distributions

Prediktivní rozdělení apriorní a aposteriorní se dá vypočítat pomocí NB (Negativní Binomické rozdělení). Vzorce pro α a β jsou byly opět převzaté z Wiki stránky.

In [5]:
```
# create a smaller range
x2 = np.arange(0, 10)

# predictive distributions of the Poisson distribution
# is negative binomial distribution
prior_1a2 = nbinom(alpha, beta/(1 + beta))
posterior_1a2 = nbinom(alpha_post, beta_post / (1 + beta_post))

# plot graph
WIDTH=0.5 / 1.5
fig, ax = plt.subplots()
_ = ax.bar(x2 - WIDTH / 2, prior_1a2.pmf(x2), label="Prior", width=WIDTH)
_ = ax.bar(x2 + WIDTH / 2, posterior_1a2.pmf(x2), label="Posterior", width=WIDTH)
_ = plt.legend(title="Distribution")
_ = ax.set(title="Predictive distribution", xlabel="Connections in 1 ms", ylabel="Probability density")
```

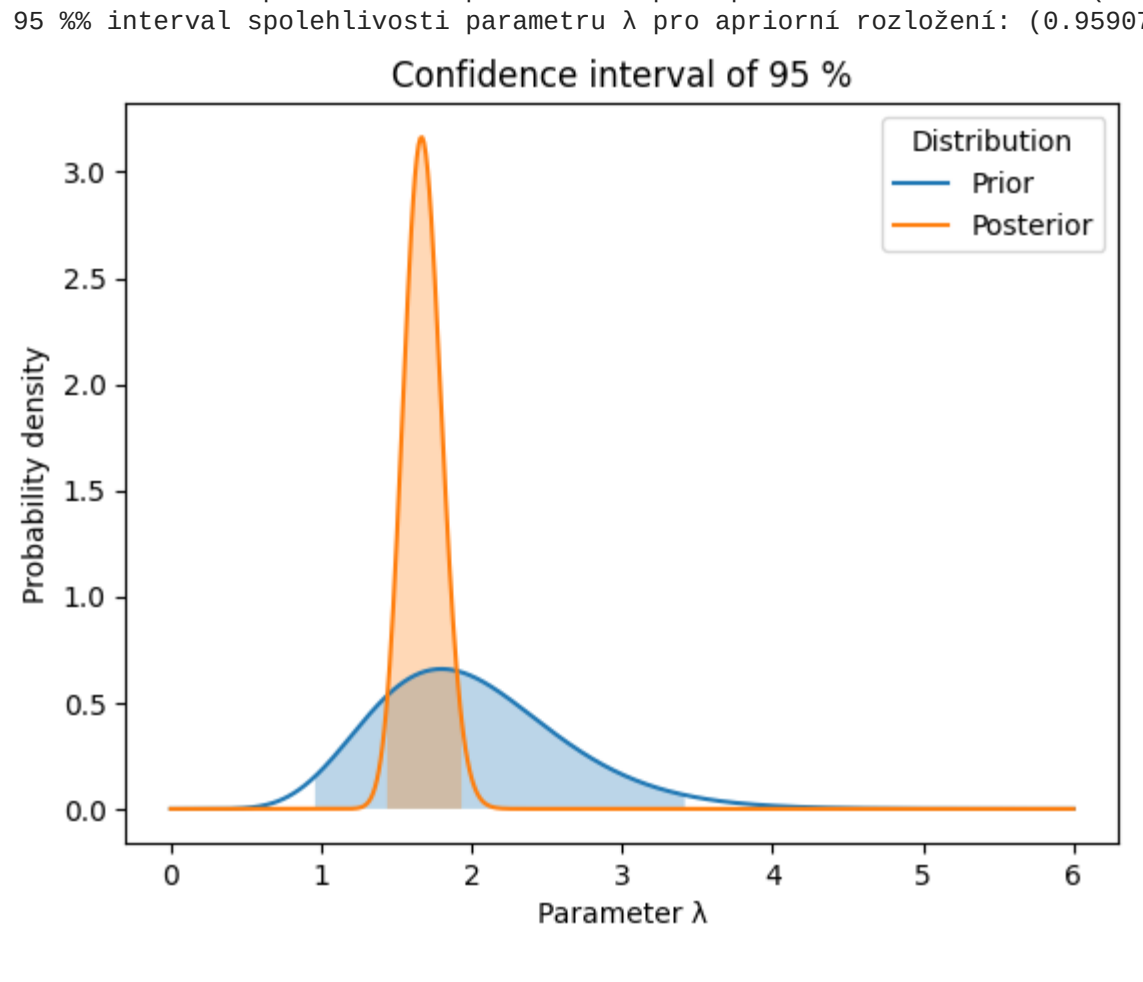


Confidence interval

Každé rozdělení v knihovně `scipy.stats` obsahuje funkci `interval`, která vypočítá hraniční body intervalu se zadanou spolehlivostí. Tyto hodnoty pak zobrazíme v grafu.

In [6]:
```
# define range constant
# calculate a range of the confidence interval of 95 %
# scipy.stats.[distribution] contains a `interval` function
# that returns the starting and ending values for the distribution
x = np.linspace(0, 6, 500)
conf_int_prior = prior_1a1.interval(0.95)
conf_int_posterior = posterior_1a1.interval(0.95)

x_prior = np.linspace(conf_int_prior[0], conf_int_prior[1], 500)
x_posterior = np.linspace(conf_int_posterior[0], conf_int_posterior[1], 500)
print("95 % interval spolehlivosti parametru λ pro aposteriorní rozložení:", conf_int_posterior)
print("95 % interval spolehlivosti parametru λ pro apriorní rozložení:", conf_int_prior)

# plot graph
fig, ax = plt.subplots()
_ = ax.plot(x, prior_1a1.pdf(x), label="Prior")
_ = ax.plot(x, posterior_1a1.pdf(x), label="Posterior")
_ = plt.legend(title="Distribution")
_ = ax.set(title="Confidence interval of 95 %", xlabel="Parameter λ", ylabel="Probability density")
_ = ax.fill_between(x_prior, prior_1a1.pdf(x_prior), alpha=.3)
_ = ax.fill_between(x_posterior, posterior_1a1.pdf(x_posterior), alpha=.3)
```

```
95 % interval spolehlivosti parametru λ pro aposteriorní rozložení: (1.4376938284869922, 1.9327207471868797)
95 % interval spolehlivosti parametru λ pro apriorní rozložení: (0.9590777392264868, 3.416960690283833)
```

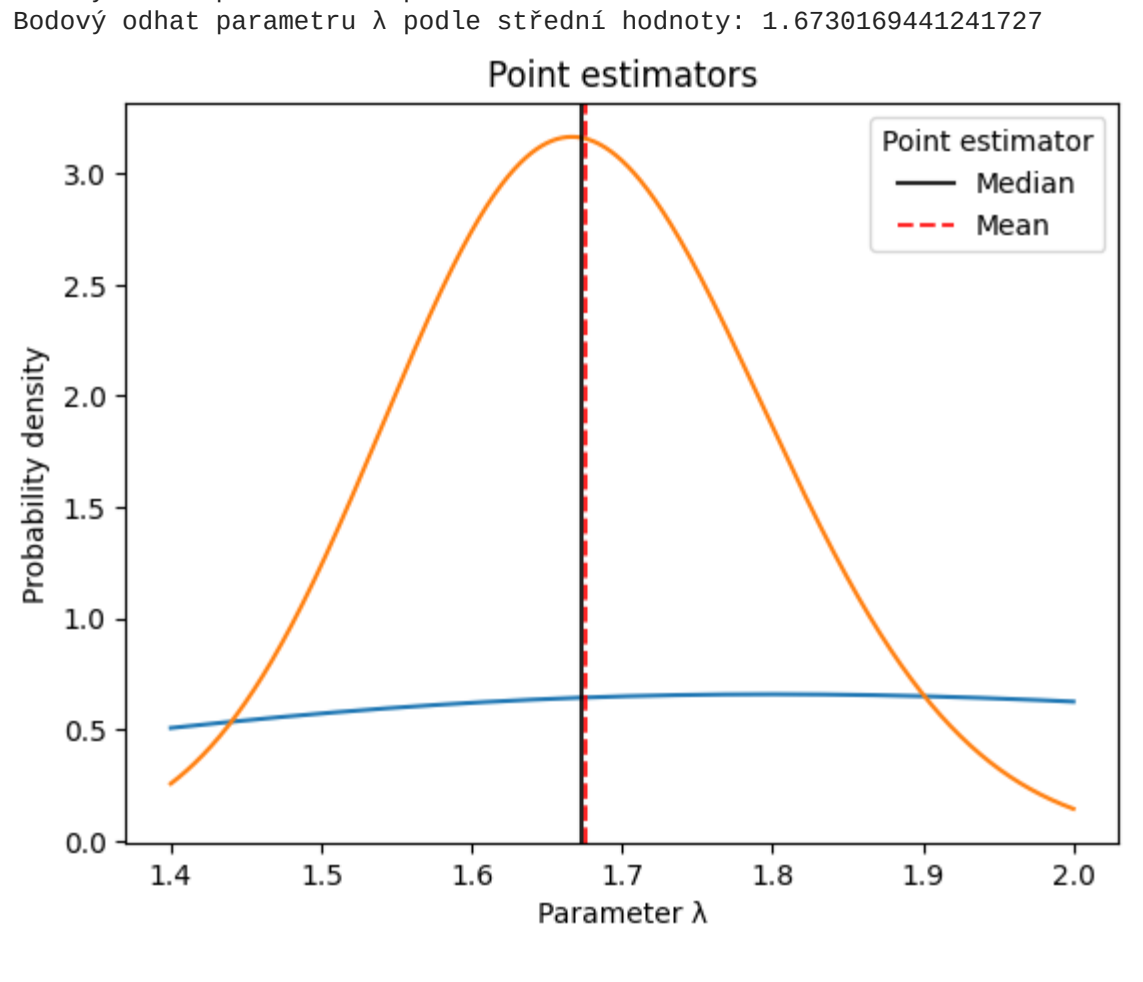


Point estimators

Jako bodové odhady parametru jsem porovnal 2 možné výpočty: **aritmetický průměr** a **medián**. Jelikož tvar aposteriorního rozložení parametru λ je velmi úzký (malý rozptyl) a jeho tvar hodně připomíná normální rozdělení, tak bodové odhady budou mít velmi podobnou hodnotu. Což nám dokládá i náš výpočet. Bodové odhady podle mediánu a střední hodnoty se liší v řádech tisícin.

In [7]:
```
# point estimators - mean, mode, and median
point_estimator_1 = posterior_1a1.mean()
point_estimator_2 = posterior_1a1.median()
x = np.linspace(1.4, 2, 1000)

# plot graph
fig, ax = plt.subplots()
_ = ax.plot(x, prior_1a1.pdf(x))
_ = ax.plot(x, posterior_1a1.pdf(x))
_ = ax.set(title="Point estimators", xlabel="Parameter λ", ylabel="Probability density")
# plot the point estimators
_ = ax.axvline(x=point_estimator_2, alpha=0.85, color="k", linestyle="-", label="Median")
_ = ax.axvline(x=point_estimator_1, alpha=0.85, color="r", linestyle="--", label="Mean")
_ = plt.legend(title="Point estimator")

print(f"Rozptyl aposteriorního rozložení: {posterior_1a1.std():.4f}")
print(f"Bodový odhad parametru λ podle mediánu: {point_estimator_1}")
print(f"Bodový odhad parametru λ podle střední hodnoty: {point_estimator_2}")
```

```
Rozptyl aposteriorního rozložení: 0.1263
Bodový odhad parametru λ podle mediánu: 1.6761904761904765
Bodový odhad parametru λ podle střední hodnoty: 1.6730169441241727
```



Point estimators for predictive distribution

Pro výpočet bodových odhadů prediktivní apriorní a aposteriorní distribuce (rozložení) byla použita **střední hodnota**.

In [8]:
```
print(f"Bodový odhad počtu pozorování aposteriorního rozložení: {posterior_1a2.mean():.4f}")
print(f"Bodový odhad počtu pozorování apriorního rozložení: {prior_1a2.mean():.4f}")
```

```
Bodový odhad počtu pozorování aposteriorního rozložení: 1.6762
Bodový odhad počtu pozorování apriorního rozložení: 2.0000
```

Approximation using discrete distribution

Prior, posterior distributions and likelihood function

Jelikož se snažíme odhadnout parametr b, kde b značí **maximální** dobu trvání procesu, ze zadaných skupin vybereme maximální hodnoty a zakreslíme je do histogramu. V této práci chceme pracovat s až 50 hodnotami b (proto rozdělíme histogram do 50 "binů"). Najdeme středy binů a to jsou pro nás parametry b_i. Jejich váha je pak definována jako výška histogramu.

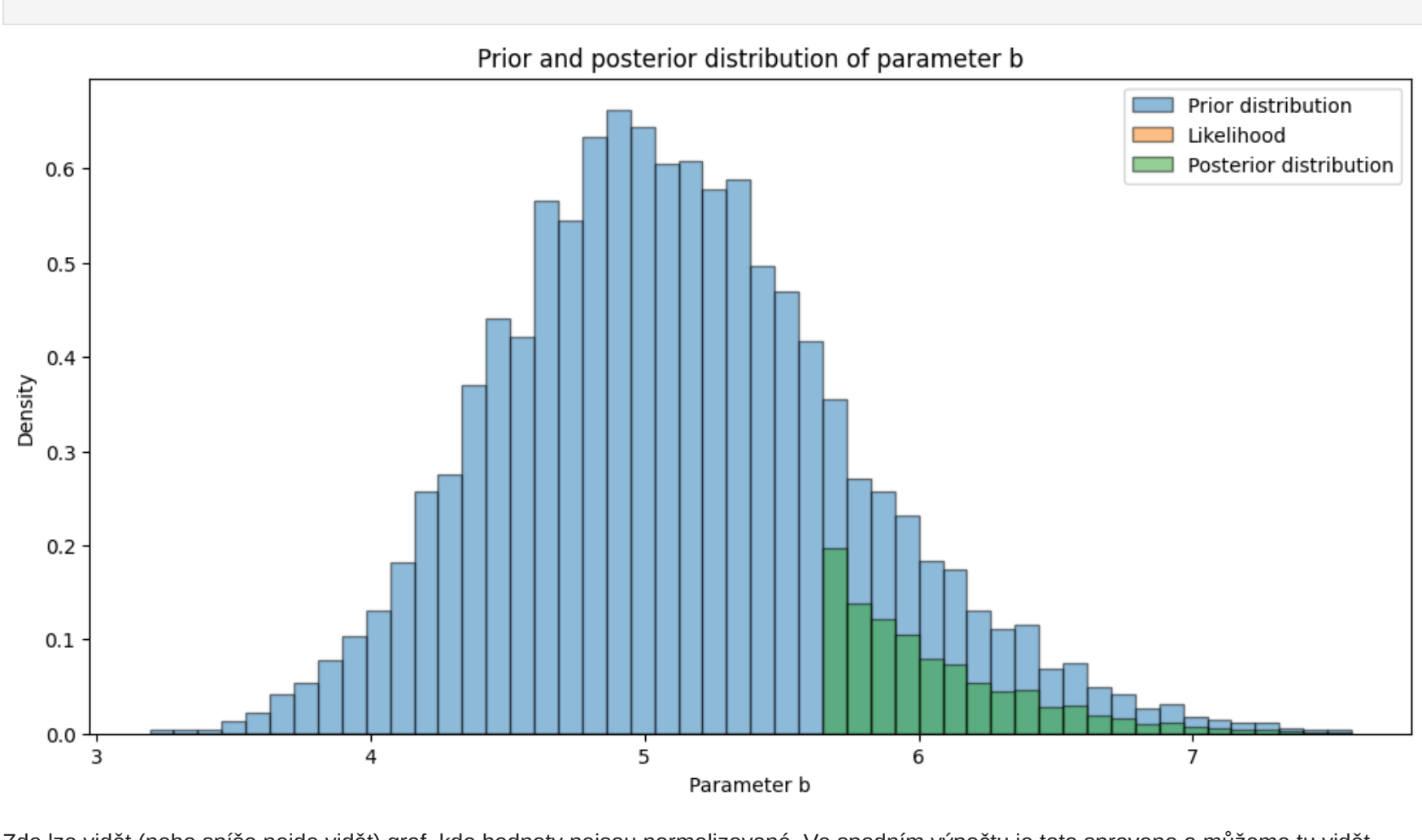
Následně vypočítáme ostatní hodnoty (funkce věrohodnosti a aposteriorní rozdělení) podle vzorce Bayesové pravděpodobnosti:

$$P(b_i|X) = \frac{P(X|b_i)\cdot P(b_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(X|b_j)\cdot P(b_j)}$$

kde $P(b_i|X)$ je aposteriorní pravděpodobnost pro parametr b_i a $P(X|b_i)$ je věrohodnostní funkce s parametrem b_i

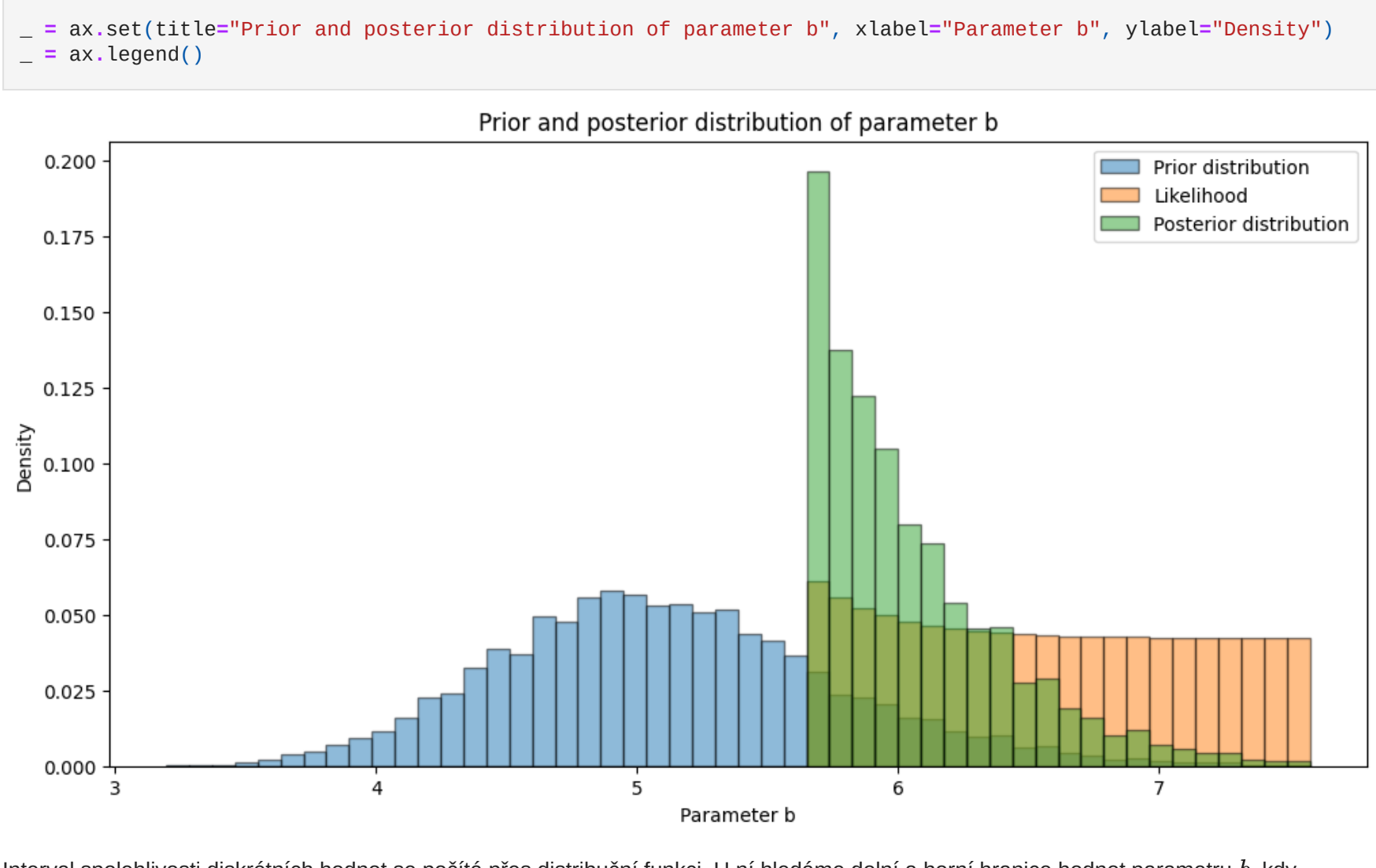
In [9]:
```
# init variables
a = 1
_mu = 3
_sigma = 1 # sqrt(_var)
alpha = (a - _mu) / _sigma

data_group_max = df1.groupby("groups").max()["prior_b"]
data_observe_b = df1["observation_b"].dropna()
```

In [10]:
```
# get the maximum of each group
fig, ax = plt.subplots(figsize=(12, 6))

# get prior distribution of parameter b
_h_b, _b = np.histogram(data_group_max, bins=50, density=True)
mid_bins = np.diff(_b) / 2 + _b[:-1]
WIDTH = np.diff(mid_bins)[0]
ax.bar(mid_bins, _h_b, edgecolor="k", width=WIDTH, alpha=.5, label="Prior distribution")

# calculate likelihood for each b parameter
# the base distribution is a truncated normal
evidence = 0
likelihoods = []
for i, b in enumerate(mid_bins):
    # likelihood for parameter b is a product of all p(X|b)
    # where X is vector of observed values
    beta = (b - _mu) / _sigma
    p_X_b = [truncnorm(a=alpha, b=beta, loc=_mu, scale=_sigma).pdf(x) for x in data_observe_b]
    likelihood = np.prod(p_X_b)
    likelihoods.append(likelihood)
    # evidence is a sum of all [likelihood * prior]
    evidence += likelihood * _h_b[i]

ax.bar(mid_bins, likelihoods, width=WIDTH, alpha=.5, edgecolor="k", label="Likelihood")

# calculating posterior distribution
# posterior = likelihood * prior / evidence
posterior_1b1 = [likelihoods[i] * h_b / evidence for i, h_b in enumerate(_h_b)]
ax.bar(mid_bins, posterior_1b1, width=WIDTH, alpha=.5, edgecolor="k", label="Posterior distribution")

_ = ax.set(title="Prior and posterior distribution of parameter b", xlabel="Parameter b", ylabel="Density")
_ = ax.legend()
```



Zde lze vidět (nebo spíše nejde vidět) graf, kde hodnoty nejsou normalizované. Ve spodním výpočtu je toto spraveno a můžeme tu vidět všechny 3 rozdělení.

In [11]:
```
# normalizing data to make data visible
fig, ax = plt.subplots(figsize=(12, 6))

# get prior distribution of parameter b
_h_b, _b = np.histogram(data_group_max, bins=50)
_h_b = np.array(_h_b) / 10000
mid_bins = np.diff(_b) / 2 + _b[:-1]
WIDTH = np.diff(mid_bins)[0]

evidence = 0
likelihoods = []
for i, b in enumerate(mid_bins):
    # likelihood for parameter b is a product of all p(X|b)
    # where X is vector of observed values
    beta = (b - _mu) / _sigma
    p_X_b = [truncnorm(a=alpha, b=beta, loc=_mu, scale=_sigma).pdf(x) for x in data_observe_b]
    likelihood = np.prod(p_X_b)
    likelihoods.append(likelihood)
    # evidence is a sum of all [likelihood * prior]
    evidence += likelihood * _h_b[i]

# plot graphs
ax.bar(mid_bins, _h_b, edgecolor="k", width=WIDTH, alpha=.5, label="Prior distribution")
ax.bar(mid_bins, np.array(likelihoods) / np.sum(likelihoods), width=WIDTH, alpha=.5, edgecolor="k", label="Like
posterior_1b1 = [likelihoods[i] * h_b / evidence for i, h_b in enumerate(_h_b)]
ax.bar(mid_bins, posterior_1b1, width=WIDTH, alpha=.5, edgecolor="k", label="Posterior distribution")

_ = ax.set(title="Prior and posterior distribution of parameter b", xlabel="Parameter b", ylabel="Density")
_ = ax.legend()
```



Interval spolehlivosti diskrétních hodnot se počítá přes distribuční funkci. U ní hledáme dolní a horní hranice hodnot parametru b_i, kdy výsledek distribuční funkce $f(b)$ je menší než 0.025 a větší než 0.975.

In [12]:
```
cumulative_sum = np.cumsum(posterior_1b1)
lower_bound = np.max(mid_bins[cumulative_sum <= 0.025])
upper_bound = np.min(mid_bins[cumulative_sum >= 0.975])

print(f"95 % interval spolehlivosti parametru b pro aposteriorní rozložení: {lower_bound}, {upper_bound}")
```

```
95 % interval spolehlivosti parametru b pro aposteriorní rozložení: 5.606032121504683, 7.008910628347767
```

Jako 2 bodové odhady jsem znovu zvolil medián a střední hodnotu.

In [13]:
```
# median
median = np.max(mid_bins[cumulative_sum <= 0.5])
mean = sum(mid_bins * posterior_1b1)

print(f"Bodový odhad podle mediánu: {median}")
print(f"Bodový odhad podle střední hodnoty: {mean}")
```

```
Bodový odhad podle mediánu: 6.369971841815776
Bodový odhad podle střední hodnoty: 6.352771319832351
```

Regrese

V druhé části se zaměříme na regresní analýzu dat. Dataset obsahuje 5 sloupců: `OSType`, `ActiveUsers`, `InteractingPct`, `ScrollingPct`, `Ping [ms]`. Naším úkolem je vytvořit model, který nám pomůže odhadnout hodnotu `Ping [ms]` na základě nezávislých hodnot. Podíváme-li se na data letno, můžeme si všimnou negativní korelace mezi `InteractingPct` a `ScrollingPct`. Jejich součet je vždy 1. Pro naší analýzu můžeme tedy jeden z těchto sloupců (vybráno `ScrollingPct`) odstranit.

In [14]:
```
df2_orig = pd.read_excel("./Projekt-2_Data.xlsx", sheet_name=1)
df2_orig
```

Out[14]:

	OSType	ActiveUsers	InteractingPct	ScrollingPct	Ping [ms]
0	iOS	4113	0.8283	0.1717	47
1	iOS	7549	0.3461	0.6539	46
2	Windows	8855	0.2178	0.7822	55
3	Android	8870	0.0794	0.9206	56
4	MacOS	9559	0.7282	0.2718	76
...	...	...	...	...	...
497	iOS	5315	0.1974	0.8026	28
498	MacOS	1392	0.2373	0.7627	24
499	iOS	6014	0.8112	0.1888	54
500	Android	5118	0.2345	0.7655	39
501	MacOS	2660	0.9390	0.0610	55

502 rows × 5 columns

In [15]:
```
def print_vif(model):
    """Function that calculates VIF for a given model.

    The result is printed on STDOUT.

    Args:
        model: Given OLS model.
    """
    X = pd.DataFrame(model.exog, columns=model.exog_names)
    vif = pd.Series([variance_inflation_factor(X.values, i)
                     for i in range(X.shape[1])],
                    index=X.columns)
    vif_df = vif.to_frame()
    # Nastavení názvu sloupce
    vif_df.columns = ['VIF']
    print('\n')
    print(vif_df)
    # ukaž korelaci prediktorů
    print('\n')
    print(X.corr())
```

Nejprve si upravíme náš dataset, aby se nám s ním lépe pracovalo. Sloupec `OSType` přeměníme na kategorický a uděláme z něj dummy variables (metoda one-hot). Následně odstraníme sloupec `ScrollingPct`, přejmenujeme názvy sloupců na jejich kratší alias a vygenerujeme chybějící interakce druhého řádu a druhých mocnin, abych dostali "plný" model.

In [16]:
```
df2 = df2_orig.copy()
df2["OSType"] = df2["OSType"].astype("category")
df2_dummies = pd.get_dummies(df2, drop_first=True)

# dropping a column that has a strong correlation with another column
df2_dummies = df2_dummies.drop(columns=["ScrollingPct"])

# renaming column to retain my last drop of sanity
# after working on this project for a week already
df2_dummies = df2_dummies.rename(columns={
    "ActiveUsers": "AU",
    "InteractingPct": "IP",
    "Ping [ms]": "Ping",
    "OSType_MacOS": "mac",
    "OSType_Windows": "win",
    "OSType_iOS": "ios",
})

# generating "full" model
df2_dummies["AU2"] = df2_dummies["AU"] ** 2
df2_dummies["IP2"] = df2_dummies["IP"] ** 2
df2_dummies["AUIP"] = df2_dummies["AU"] * df2_dummies["IP"]

# os
df2_dummies["win_AU"] = df2_dummies["AU"] * df2_dummies["win"]
df2_dummies["win_IP"] = df2_dummies["IP"] * df2_dummies["win"]
df2_dummies["mac_AU"] = df2_dummies["AU"] * df2_dummies["mac"]
df2_dummies["mac_IP"] = df2_dummies["IP"] * df2_dummies["mac"]
df2_dummies["ios_AU"] = df2_dummies["AU"] * df2_dummies["ios"]
df2_dummies["ios_IP"] = df2_dummies["IP"] * df2_dummies["ios"]

df2_dummies = df2_dummies.astype(float)
df2_dummies
```

Out[16]:

	AU	IP	Ping	mac	win	ios	AU2	IP2	AUIP	win_AU	win_IP	mac_AU	mac_IP	ios_AU	ios_IP
0	4113.0	0.8283	47.0	0.0	0.0	1.0	16916769.0	0.686081	3406.7979	0.0	0.0000	0.0	0.0000	4113.0	0.8283
1	7549.0	0.3461	46.0	0.0	0.0	1.0	56987401.0	0.119785	2612.7089	0.0	0.0000	0.0	0.0000	7549.0	0.3461
2	8855.0	0.2178	55.0	0.0	1.0	0.0	78411025.0	0.047437	1928.6190	8855.0	0.2178	0.0	0.0000	0.0	0.0000
3	8870.0	0.0794	56.0	0.0	0.0	0.0	78676900.0	0.006304	704.2780	0.0	0.0000	0.0	0.0000	0.0	0.0000
4	9559.0	0.7282	76.0	1.0	0.0	0.0	91374481.0	0.530275	6960.8638	0.0	0.0000	9559.0	0.7282	0.0	0.0000
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
497	5315.0	0.1974	28.0	0.0	0.0	1.0	28249225.0	0.038967	1049.1810	0.0	0.0000	0.0	0.0000	5315.0	0.1974
498	1392.0	0.2373	24.0	1.0	0.0	0.0	1937664.0	0.056311	330.3216	0.0	0.0000	1392.0	0.2373	0.0	0.0000
499	6014.0	0.8112	54.0	0.0	0.0	1.0	36168196.0	0.658045	4878.5568	0.0	0.0000	0.0	0.0000	6014.0	0.8112
500	5118.0	0.2345	39.0	0.0	0.0	0.0	26193924.0	0.054990	1200.1710	0.0	0.0000	0.0	0.0000	0.0	0.0000
501	2660.0	0.9390	55.0	1.0	0.0	0.0	7075600.0	0.881721	2497.7400	0.0	0.0000	2660.0	0.9390	0.0	0.0000

502 rows × 15 columns

Nyní provedeme analýzu plného modelu, než z něj začneme odstraňovat prediktory. Z výsledného výpisu nás zajímají tyto informace:

- `R-squared` - koeficient determinace
- `Adj. R-squared` - koeficient determinizace, na který má vliv počet prediktorů
- `Prob (F-statistics)` - testovací kritérium celého modelu; nulová hypotéza H_0 nám povídá, že všechny koeficienty prediktorů jsou rovny 0 (neboli prediktory jsou pro model irelevantní)
- `P>|t|` - testovací kritérium pro jednotlivé koeficienty prediktorů. Pokud je *p-hodnota* větší než 0.05 (pro 95 % interval spolehlivosti), pak je daný prediktor pro model irelevantní.

Z výpočtu `P>|t|` vidíme seznam prediktorů, které nejsou pro náš model moc relevantní (jejich p-hodnota je větší než 0.05, tím pádem nezamítáme hypotézu H_0, že koeficient prediktoru je rovno nule).

In [17]:
```
y = df2_dummies["Ping"]
X = df2_dummies.drop(columns=["Ping"])
X_ols = sm.add_constant(X)

# get base model
model = sm.OLS(y, X_ols)
result = model.fit()
print(result.summary())

# VIF of the base class
print_vif(model)
```

```
                            OLS Regression Results
==============================================================================
Dep. Variable:                   Ping   R-squared:                       0.844
Model:                            OLS   Adj. R-squared:                  0.839
Method:                 Least Squares   F-statistic:                     187.9
Date:                Sat, 16 Dec 2023   Prob (F-statistic):          5.18e-186
Time:                        14:29:40   Log-Likelihood:                -1598.4
No. Observations:                 502   AIC:                             3227.
Df Residuals:                     487   BIC:                             3290.
Df Model:                          14
Covariance Type:            nonrobust
==============================================================================
                 coef    std err          t      P>|t|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
const         -0.3388      2.354     -0.144      0.886      -4.965       4.287
AU             0.0100      0.001     17.571      0.000       0.009       0.011
IP            37.6062      4.567      8.234      0.000      28.633      46.580
mac            2.0017      2.260      0.886      0.376      -2.440       6.443
win            7.8174      2.217      3.526      0.000       3.461      12.174
ios           -0.0483      2.265     -0.021      0.983      -4.499       4.403
AU2         -4.17e-07    4.4e-08     -9.469      0.000   -5.03e-07    -3.3e-07
IP2           -3.7258      3.492     -1.067      0.287     -10.587       3.135
AUIP          -0.0031      0.000     -8.532      0.000      -0.004      -0.002
win_AU        -0.0008      0.000     -2.505      0.013      -0.001      -0.000
win_IP         0.4260      2.721      0.157      0.876      -4.919       5.771
mac_AU         0.0014      0.000      4.536      0.000       0.001       0.002
mac_IP        -0.3566      2.530     -0.141      0.888      -5.327       4.614
ios_AU        -0.0011      0.000     -3.369      0.001      -0.002      -0.000
ios_IP         0.2678      2.691      0.100      0.921      -5.020       5.556
==============================================================================
Omnibus:                      228.442   Durbin-Watson:                   1.933
Prob(Omnibus):                  0.000   Jarque-Bera (JB):             3152.488
Skew:                           1.603   Prob(JB):                         0.00
Kurtosis:                      14.851   Cond. No.                     1.06e+09
==============================================================================

Notes:
[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.
[2] The condition number is large, 1.06e+09. This might indicate that there are
strong multicollinearity or other numerical problems.


              VIF
const   79.081437
AU      30.108570
IP      26.021105
mac     14.530955
win     13.726080
ios     13.164975
AU2     22.499134
IP2     16.060875
AUIP     8.851002
win_AU  10.189613
win_IP   6.857633
mac_AU  10.454073
mac_IP   7.586537
ios_AU   9.061267
ios_IP   6.028016


        const        AU        IP       mac       win       ios       AU2  \
const     NaN       NaN       NaN       NaN       NaN       NaN       NaN
AU        NaN  1.000000  0.040275 -0.000136  0.003135 -0.063206  0.977081
IP        NaN  0.040275  1.000000  0.086466 -0.016964 -0.062634  0.033100
mac       NaN -0.000136  0.086466  1.000000 -0.371550 -0.341322 -0.004621
win       NaN  0.003135 -0.016964 -0.371550  1.000000 -0.334506  0.009084
ios       NaN -0.063206 -0.062634 -0.341322 -0.334506  1.000000 -0.055587
AU2       NaN  0.977081  0.033100 -0.004621  0.009084 -0.055587  1.000000
IP2       NaN  0.025793  0.967446  0.108126 -0.042324 -0.053518  0.018258
AUIP      NaN  0.591746  0.752979  0.052512  0.002608 -0.084945  0.576716
win_AU    NaN  0.258029  0.010807 -0.325207  0.875271 -0.292783  0.261283
win_IP    NaN  0.035105  0.248636 -0.309767  0.833716 -0.278883  0.038643
mac_AU    NaN  0.243697  0.072359  0.881244 -0.327426 -0.300788  0.229636
mac_IP    NaN -0.004409  0.388633  0.821075 -0.305071 -0.280251 -0.008598
ios_AU    NaN  0.189859 -0.050601 -0.296440 -0.290521  0.868507  0.184717
ios_IP    NaN -0.045884  0.244987 -0.272791 -0.267344  0.799219 -0.044630

             IP2      AUIP    win_AU    win_IP    mac_AU    mac_IP    ios_AU  \
const        NaN       NaN       NaN       NaN       NaN       NaN       NaN
AU      0.025793  0.591746  0.258029  0.035105  0.243697 -0.004409  0.189859
IP      0.967446  0.752979  0.010807  0.248636  0.072359  0.388633 -0.050601
mac     0.108126  0.052512 -0.325207 -0.309767  0.881244  0.821075 -0.296440
win    -0.042324  0.002608  0.875271  0.833716 -0.327426 -0.305071 -0.290521
ios    -0.053518 -0.084945 -0.292783 -0.278883 -0.300788 -0.280251  0.868507
AU2     0.018258  0.576716  0.261283  0.038643  0.229636 -0.008598  0.184717
IP2     1.000000  0.720732 -0.017146  0.216347  0.086850  0.399878 -0.050135
AUIP    0.720732  1.000000  0.163826  0.210449  0.193768  0.271050  0.053582
win_AU -0.017146  0.163826  1.000000  0.759496 -0.286586 -0.267019 -0.254284
win_IP  0.216347  0.210449  0.759496  1.000000 -0.272980 -0.254342 -0.242212
mac_AU  0.086850  0.193768 -0.286586 -0.272980  1.000000  0.719630 -0.261236
mac_IP  0.399878  0.271050 -0.267019 -0.254342  0.719630  1.000000 -0.243400
ios_AU -0.050135  0.053582 -0.254284 -0.242212 -0.261236 -0.243400  1.000000
ios_IP  0.235957  0.132465 -0.233998 -0.222889 -0.240395 -0.223982  0.698777

          ios_IP
const        NaN
AU     -0.045884
IP      0.244987
mac    -0.272791
win    -0.267344
ios     0.799219
AU2    -0.044630
IP2     0.235957
AUIP    0.132465
win_AU -0.233998
win_IP -0.222889
mac_AU -0.240395
mac_IP -0.223982
ios_AU  0.698777
ios_IP  1.000000
```

V tabulce se nachází mnoho "přebytečných" prediktorů. Poznámeje tak, že jejich p-hodnota (sloupec `P>|t|`) je větší než 0.05. V následující části iterativně budeme odstraňovat sloupce s nejvyšší p-hodnotou, dokud nám nezůstanou jenom podstatné prediktory.

Nakonec model otestujeme na *multikolinearitu* a odstraníme sloupec `AU2`.

In [18]:
```
# starting to eliminate columns
X_ols_new = X_ols.drop(columns=["ios", "ios_IP", "win_IP", "mac_IP", "IP2", "mac", "AU2"])
model = sm.OLS(y, X_ols_new)
result = model.fit()
print(result.summary())
```

```
                            OLS Regression Results
==============================================================================
Dep. Variable:                   Ping   R-squared:                       0.814
Model:                            OLS   Adj. R-squared:                  0.812
Method:                 Least Squares   F-statistic:                     309.3
Date:                Sat, 16 Dec 2023   Prob (F-statistic):          4.99e-176
Time:                        14:29:40   Log-Likelihood:                -1642.0
No. Observations:                 502   AIC:                             3300.
Df Residuals:                     494   BIC:                             3334.
Df Model:                           7
Covariance Type:            nonrobust
==============================================================================
                 coef    std err          t      P>|t|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
const          9.9196      1.357      7.309      0.000       7.253      12.586
AU             0.0055      0.000     22.743      0.000       0.005       0.006
IP            35.2710      2.286     15.426      0.000      30.779      39.763
win            7.7665      1.526      5.088      0.000       4.767      10.766
AUIP          -0.0033      0.000     -8.504      0.000      -0.004      -0.003
win_AU        -0.0007      0.000     -2.840      0.005      -0.001      -0.000
mac_AU         0.0017      0.000     12.726      0.000       0.001       0.002
ios_AU        -0.0010      0.000     -7.445      0.000      -0.001      -0.001
==============================================================================
Omnibus:                      123.688   Durbin-Watson:                   1.872
Prob(Omnibus):                  0.000   Jarque-Bera (JB):              663.242
Skew:                           0.959   Prob(JB):                    9.53e-145
Kurtosis:                       8.294   Cond. No.                     6.56e+04
==============================================================================

Notes:
[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.
[2] The condition number is large, 6.56e+04. This might indicate that there are
strong multicollinearity or other numerical problems.
```

In [19]:
```
print_vif(model)
```

```
              VIF
const   22.411971
AU       4.567019
IP       5.561726
win      5.546736
AUIP     6.464752
win_AU   4.656643
mac_AU   1.655643
ios_AU   1.550671


        const        AU        IP       win      AUIP    win_AU    mac_AU  \
const     NaN       NaN       NaN       NaN       NaN       NaN       NaN
AU        NaN  1.000000  0.040275  0.003135  0.591746  0.258029  0.243697
IP        NaN  0.040275  1.000000 -0.016964  0.752979  0.010807  0.072359
win       NaN  0.003135 -0.016964  1.000000  0.002608  0.875271 -0.327426
AUIP      NaN  0.591746  0.752979  0.002608  1.000000  0.163826  0.193768
win_AU    NaN  0.258029  0.010807  0.875271  0.163826  1.000000 -0.286586
mac_AU    NaN  0.243697  0.072359 -0.327426  0.193768 -0.286586  1.000000
ios_AU    NaN  0.189859 -0.050601 -0.290521  0.053582 -0.254284 -0.261236

          ios_AU
const        NaN
AU      0.189859
IP     -0.050601
win    -0.290521
AUIP    0.053582
win_AU -0.254284
mac_AU -0.261236
ios_AU  1.000000
```

Model after basic predictor eliminations

Náš výsledný model můžeme popsat touto rovnicí:

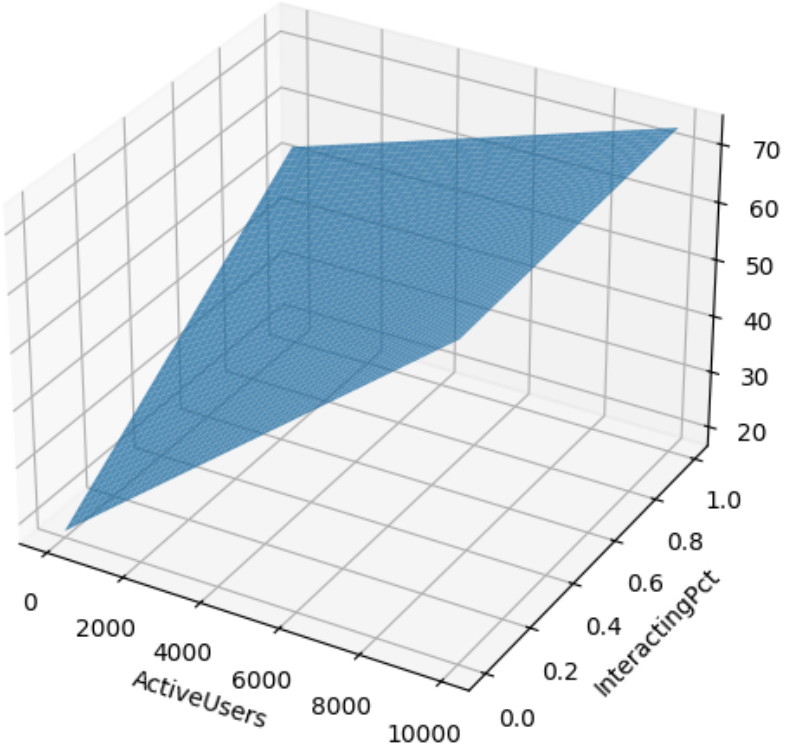
$$y = 9.9196 + 0.0055x_{AU} + 35.2710x_{IP} + 7.7665C_{win} - 0.0033x_{AU}x_{IP} - 0.0007C_{win}x_{AU} + 0.0017C_{mac}x_{AU} - 0.0010C_{ios}x_{AU}$$

kde:

- x_{AU} je prediktor `ActiveUsers`,
- x_{IP} je prediktor `InteractingPct`
- C_{OSType} jsou kategorické prediktory operačních systémů.

V následující části pak vykreslíme graf tohoto modelu ve 3D prostoru.

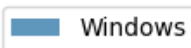
In [20]:
```
# plot graph
X1 = np.arange(0, 10000, 50)
X2 = np.arange(0, 1, 0.005)
X1, X2 = np.meshgrid(X1, X2)
Y = (
        result.params.iloc[0]  # const
      + X1 *    result.params.iloc[1]  # ActiveUsers
      + X2 *    result.params.iloc[2]  # InteractingPct
      +         result.params.iloc[3]  # Windows
      + X1 * X2 * result.params.iloc[4]  # ActiveUsers * InteractingPct
      + X1 *    result.params.iloc[5]  # Windows * ActiveUsers
      + X1 *    result.params.iloc[6]  # MacOS * ActiveUsers
      + X1 *    result.params.iloc[7]  # iOS * ActiveUsers
)

fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={"projection": "3d"}, figsize=(6, 6))
_ = ax.plot_surface(X1, X2, Y, alpha=0.75)
_ = ax.set(xlabel="ActiveUsers", ylabel="InteractingPct")
_ = ax.set_zlabel("Ping", rotation=90)
```

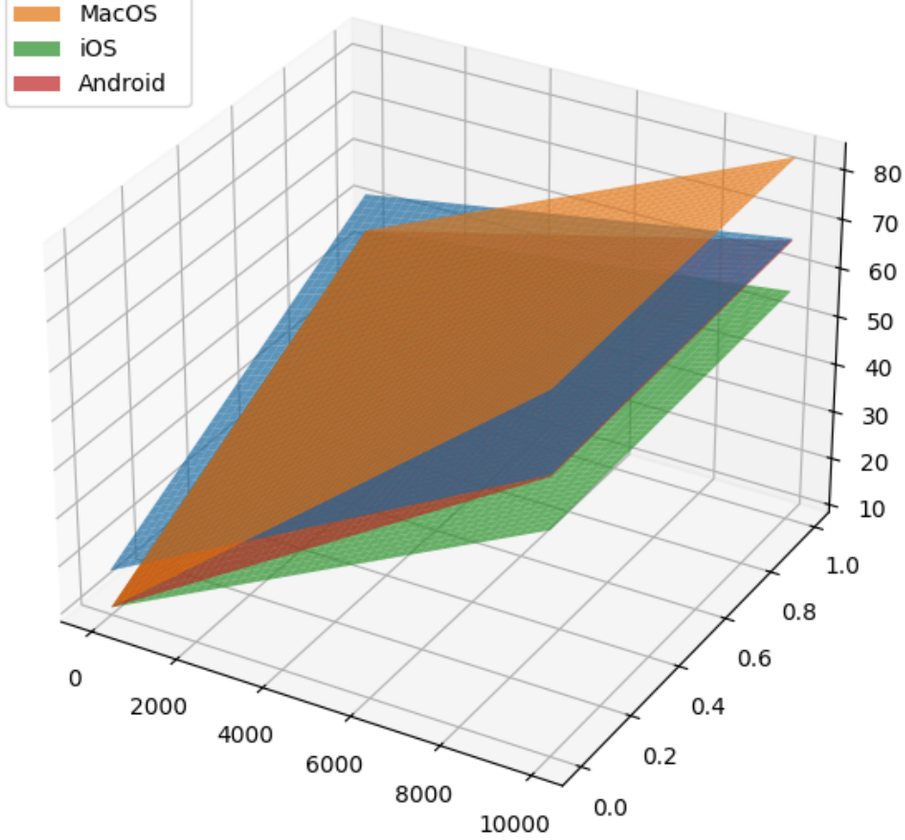


Můžeme si vykreslit graf pro jednotlivé operační systémy

In [21]:

```
def get_y(os, result, x1, x2):
    if os == "win":
        return (        result.params.iloc[0]
            + x1 *      result.params.iloc[1]
            + x2 *      result.params.iloc[2]
            + x1 * x2 * result.params.iloc[4]
            +           result.params.iloc[3]
            + x1 * result.params.iloc[5]
        )
    elif os == "mac":
        return (         result.params.iloc[0]
             + x1 *      result.params.iloc[1]
             + x2 *      result.params.iloc[2]
             + x1 * x2 * result.params.iloc[4]
             + x1 *      result.params.iloc[6]
        )
    elif os == "ios":
        return (         result.params.iloc[0]
             + x1 *      result.params.iloc[1]
             + x2 *      result.params.iloc[2]
             + x1 * x2 * result.params.iloc[4]
             + x1 *      result.params.iloc[7]
        )
    elif os == "and":
        return (            result.params.iloc[0]
             + x1 *      result.params.iloc[1]
             + x2 *      result.params.iloc[2]
             + x1 * x2 * result.params.iloc[4]
        )

# plot for each OSType
fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={"projection": "3d"}, figsize=(7, 7))
_ = ax.plot_surface(X1, X2, get_y("win", result, X1, X2), alpha=0.7, label="Windows")
_ = ax.plot_surface(X1, X2, get_y("mac", result, X1, X2), alpha=0.7, label="MacOS")
_ = ax.plot_surface(X1, X2, get_y("ios", result, X1, X2), alpha=0.7, label="iOS")
_ = ax.plot_surface(X1, X2, get_y("and", result, X1, X2), alpha=0.7, label="Android")
_ = ax.legend(loc="upper left")
```

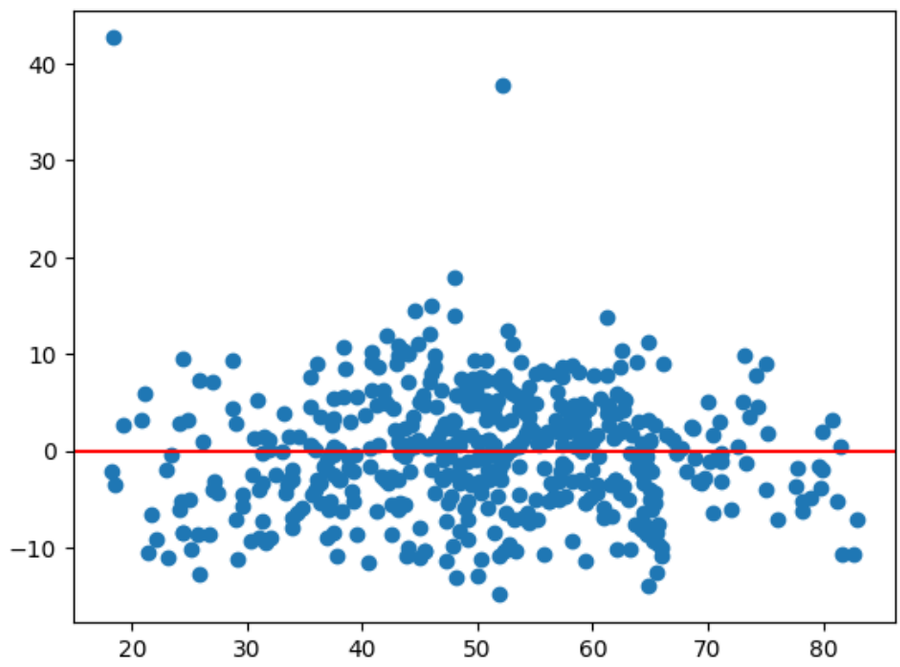




Outliers

V této části se pokusíme identifikovat *odlehlé body* v datasetu, odstraníme je a aktualizujeme náš model. Nejprve si vykreslíme graf, kde porovnáme predikované hodnoty s reálnými testovacími. V ideálním případě by všechny body měly ležet v blízkosti červené přímky. Zde můžeme vidět, že v datasetu se nejspíš nachází 2 odlehlé body (jsou nejdále od červené přímky, jejich `resid` je nad 30).

In [22]:
```
plt.scatter(result.fittedvalues, result.resid)
_ = plt.axhline(y=0, color="r")
```



Pomocí funkce `outlier_test` testujeme odlehlé body na našich pozorovaných datech. Jako výchozí metoda je použita **Bonferroniho korekce** na hladině spolehlivosti 95 %. Data, u kterých vyjde jako výsledek této korelace hodnota menší než 0.05 budeme brát za odlehlou hodnotu. Z testu získáme indexy těchto dat a z datasetu je odstraníme. Následně znovu otestujeme náš model.

Nový model má lepší hodnotu `R-squared` (z 0.814 na 0.842). Upravený model můžeme popsat touto rovnicí:

$$y = 8.5942 + 0.0057x_{AU} + 36.6538x_{IP} + 8.1826C_{win} - 0.0035x_{AU}x_{IP} - 0.0008C_{win}x_{AU} + 0.0017C_{mac}x_{AU} - 0.0010C_{ios}x_{AU}$$

Nyní zkontrolujme náš model. Pokud budeme analyzovat výpis informací o modelu, dospějeme k závěru, že náš model splňuje předpoklady lineární regrese.

- hodnota `R-squared` je vysoká, (model vysvětluje 84.2 % změn hodnoty odezvy)

- `Prob (F-statistic)` je menší než 0.05, což znamená, že náš výběr prediktorů je statisticky signifikantní
- `P > |t|` všech prediktorů je též menší než 0.05, tudíž každý prediktor v modelu má vliv na výpočet výsledné hodnoty odezvy
- hodnota `Durbin/Watson` ova testu leží v intervalu $[1, 2]$, tudíž neexistuje autokorelace mezi sousedními rezidui

Model je samozřejmě deformovaný, protože jsme neprovedli standardizaci. Po standardizaci by nám vyšel stejný model s různými koeficienty a významnostmi.

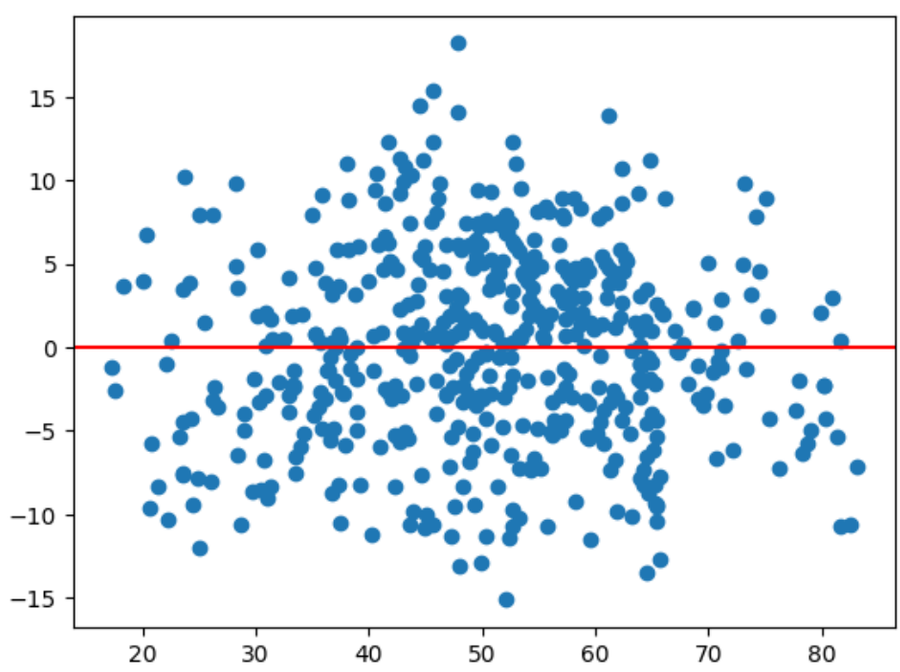
In [23]:

```
# get outliers
# source: https://notebook.community/samuelsinayoko/kaggle-housing-prices/research/outlier_detection_statsmodel
outlier_test = result.outlier_test()
outlier_indices = outlier_test.index[outlier_test["bonf(p)"] < 0.05].to_list()

y_without_outliers = y.drop(outlier_indices)
X_ols_without_outliers = X_ols_new.drop(outlier_indices)

# test an updated model
model = sm.OLS(y_without_outliers, X_ols_without_outliers)
result = model.fit()
print(result.summary())
```

```
                            OLS Regression Results
==============================================================================
Dep. Variable:                   Ping   R-squared:                       0.842
Model:                            OLS   Adj. R-squared:                  0.840
Method:                 Least Squares   F-statistic:                     374.2
Date:                Sat, 16 Dec 2023   Prob (F-statistic):          1.71e-192
Time:                        14:29:43   Log-Likelihood:                -1592.3
No. Observations:                 500   AIC:                             3201.
Df Residuals:                     492   BIC:                             3234.
Df Model:                           7
Covariance Type:            nonrobust
==============================================================================
                 coef    std err          t      P>|t|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
const          8.5942      1.259      6.827      0.000       6.121      11.067
AU             0.0057      0.000     25.489      0.000       0.005       0.006
IP            36.6538      2.107     17.398      0.000      32.514      40.793
win            8.1826      1.404      5.827      0.000       5.424      10.941
AUIP          -0.0035      0.000     -9.825      0.000      -0.004      -0.003
win_AU        -0.0008      0.000     -3.513      0.000      -0.001      -0.000
mac_AU         0.0017      0.000     13.874      0.000       0.001       0.002
ios_AU        -0.0010      0.000     -8.087      0.000      -0.001      -0.001
==============================================================================
Omnibus:                        4.707   Durbin-Watson:                   1.914
Prob(Omnibus):                  0.095   Jarque-Bera (JB):                3.366
Skew:                           0.020   Prob(JB):                        0.186
Kurtosis:                       2.600   Cond. No.                     6.60e+04
==============================================================================

Notes:
[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.
[2] The condition number is large, 6.6e+04. This might indicate that there are
strong multicollinearity or other numerical problems.
```

In [24]:

```
_ = plt.scatter(result.fittedvalues, result.resid)
_ = plt.axhline(y=0, color="r")
```



Problematic values

Pro nás je problematické nastavení prediktorů, který vrací největší hodnotu odezvy. Nalezneme tedy jeho index a získáme jeho nastavení parametrů.

In [25]:
```
index = result.predict().argmax()
X_ols_without_outliers.iloc[index]
```

Out[25]:
```
const        1.0000
AU        9953.0000
IP           0.6729
win          0.0000
AUIP      6697.3737
win_AU       0.0000
mac_AU    9953.0000
ios_AU       0.0000
Name: 227, dtype: float64
```

Predict a value

Nyní se pokusíme odhadnout hodnotu odezvy pro uživatele *Windows*, při průměrném nastavení ostatních parametrů. Následně vypíšeme i jejich konfidenční a prediktivní itervaly.

In [26]:
```
x1_3b = X_ols_new["AU"].mean()
x2_3b = X_ols_new["IP"].mean()
print(f"Odhadovaná hodnota odezvy: {get_y('win', result, x1_3b, x2_3b)} ms")

kw = np.array([
    1,
    X_ols_new["AU"].mean(),
    X_ols_new["IP"].mean(),
    1,
    X_ols_new["AU"].mean() * X_ols_new["IP"].mean(),
    X_ols_new["AU"].mean(),
    0,
    0
])
prediction = result.get_prediction(kw)
pred_frame = prediction.summary_frame(alpha=0.05)
obs_ci_lower, obs_ci_upper = pred_frame.iloc[0][["obs_ci_lower", "obs_ci_upper"]]
mean_ci_lower, mean_ci_upper = pred_frame.iloc[0][["mean_ci_lower", "mean_ci_upper"]]

print(f"Konfidenční interval je ohraničen těmito body: {obs_ci_lower}, {obs_ci_upper}")
print(f"Predikční interval je ohraničen těmito body: {mean_ci_lower}, {mean_ci_upper}")
```

```
Odhadovaná hodnota odezvy: 51.81168875513785 ms
Konfidenční interval je ohraničen těmito body: 40.19035390049061, 63.43302360978511
Predikční interval je ohraničen těmito body: 50.80614933093145, 52.81722817934427
```

Final summary

Jak již bylo řečené v předchozích buňkách, výpis informací modelu nám ukazuje, že máme dobrý model. Podíváme-li se na grafy pro jednotlivé operační systémy, můžeme z něj vyčíst, že s rostoucím počtem **aktivních uživatelů** roste i predikovaná **hodnota odezvy**. Logicky tento výrok dává smysl, nicméně ne vždy to musí platit. Hodnota `InteractingPct` má větší vliv na odezvě jen při malém počtu aktivních uživatelů.

Nalezený model považuju za nejspíš vhodným a můžeme podle něj predikovat hodnoty odezvy, pokud počet aktivních uživatelů nepřesáhne hodnoty 10000.

In [27]:
```
# plot for each OSType
fig, ax = plt.subplots(ncols=2, subplot_kw={"projection": "3d"}, figsize=(14, 7))
_ = ax[0].plot_surface(X1, X2, get_y("win", result, X1, X2), alpha=0.7, label="Windows")
_ = ax[0].plot_surface(X1, X2, get_y("mac", result, X1, X2), alpha=0.7, label="MacOS")
_ = ax[0].plot_surface(X1, X2, get_y("ios", result, X1, X2), alpha=0.7, label="iOS")
_ = ax[0].plot_surface(X1, X2, get_y("and", result, X1, X2), alpha=0.7, label="Android")
_ = ax[0].legend(loc="upper left", title="OS Types")
_ = ax[0].set(xlabel="ActiveUsers", ylabel="InteractingPct", zlabel="Ping")
```

```
Y = (            result.params.iloc[0]  # const
     + X1 *      result.params.iloc[1]  # ActiveUsers
     + X2 *      result.params.iloc[2]  # InteractingPct
     +           result.params.iloc[3]  # Windows
     + X1 * X2 * result.params.iloc[4]  # ActiveUsers * InteractingPct
     + X1 *      result.params.iloc[5]  # Windows * ActiveUsers
     + X1 *      result.params.iloc[6]  # MacOS * ActiveUsers
     + X1 *      result.params.iloc[7]) # iOS * ActiveUsers
_ = ax[1].plot_surface(X1, X2, Y, alpha=0.7, label="Final model")
_ = ax[1].set(xlabel="ActiveUsers", ylabel="InteractingPct", zlabel="Ping")
_ = ax[1].legend(loc="upper left")
```