Divide-and-Conquer (chia để trị)

- chia BT x/p thành các BT con độc lập
- Trị (giải) các BT con (đệ quy)
- Tổng hợp lời giải các BT

$$\underbrace{x . x . x \ldots}_{n/2} \underbrace{\ldots \ldots x}_{n/2}$$

$a = x^{n/2}$ $\quad a .$

$\boxed{x\ x}\ x\ \boxed{x\ x}$

Cho x và N, tính x^N

N có thể 10^6, 10^9

```
res = 1
for i = 1 → n do
    res = res * x;
```

→ $O(n)$

$n = 2^{10}$

→ 10

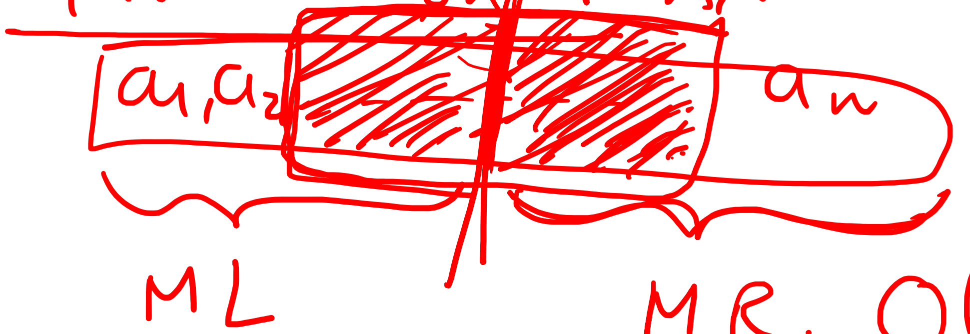
giảm để trị

```
exp(x, N)
    if N = 0 return 1;
    a = exp(x, N/2);
    a2 = a * a;
    if N lẻ then a2 = a2 * x;
    return a2;
```

$\Downarrow$ $O(\log n)$

Bài Max Subsequence:

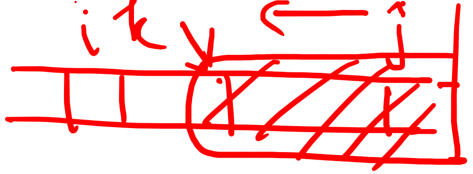
Cho dãy $a_1, a_2 \dots a_n$, Tìm dãy con gồm liên tiếp các p(tử) có tổng MAX.



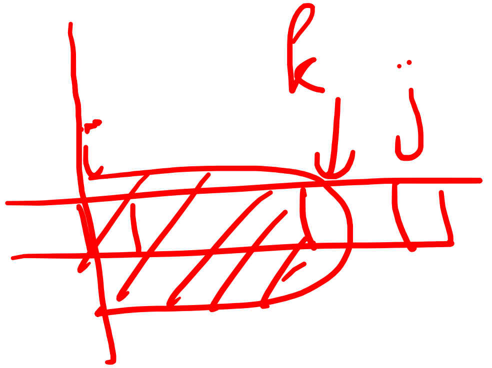
$O(n\log n)$

```
MaxSubSeq(a, L, R)
[ if L = R then return a[L];
  m = (L+R)/2;
  ML = MaxSubSeq(a, L, m)
  MR = MaxSubSeq(a, m+1, R)
  MLR = MaxLeft(a, L, m)
       + MaxRight(a, m+1, R)
  return MAX(ML, MR, MLR);
```

```
MaxLeft(a, i, j)
[ res = -∞; S = 0
  for k = j downto i do
  [ S = S + a[k];
    if S > res then res = S;
  return res;
```




```
MaxRigh(a, i, j)
[ res = -∞; S = 0
  for k = i to j do
  [ S = S + a[k];
    if S > res then res = S;
  return res;
```



Dynamic Programming (Quy hoạch Động)

- Đ/N Bài toán (các BT con phụ thuộc lẫn nhau)
- $\boxed{\text{BT con nhỏ nhất}}$ → giải trực tiếp
- XĐ CT QHĐ (CT truy hồi)
  Thể hiện sự phụ thuộc 1 BT con vào các BT con nhỏ hơn

⇒ Tổng hợp lời giải các BT con → cho ta lời giải BT xuất phát

BT con → giải (Bottom Up)
lưu solution trong BN
để tránh lặp lại việc giải BT con nhiều lần (Đệ quy có nhớ)

Top Down → Đệ quy có nhớ

Hàm đệ quy giải 1 BT con với tham số đầu vào.

Max Sub Sequence

$a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$

- Đ/N BT con:
  S_i: trọng số của dãy con MAX của dãy $a_1, a_2 \dots a_i$ (kết thúc tại a_i ($i = 1, 2, \dots, n$))
- BT con nhỏ nhất $S[1] = a[1]$,
- CT QHĐ: $S_i = \begin{cases} S_{i-1} + a_i, & \text{nếu } S_{i-1} > 0 \\ a_i, & S_{i-1} \le 0 \end{cases}$


```
MaxSubSeqDP(a[1..n])
  S[1]=a[1]; res=S[1];
  for i=2 → n do
    if S[i-1]>0 then
      S[i]=S[i-1]+a[i];
    else S[i]=a[i];
    if S[i] > res then
      res = S[i];
  return res;
```

$\Downarrow$

$O(n)$

Dãy con $\boxed{\text{tăng dần}}$ dài nhất

$a_1, a_2, a_3, \ldots \ldots a_n$

a	3	1	2	6	4	7	12	5

$a_1, a_2 \ldots \boxed{a_j} \ldots \boxed{a_i}$

$a_j < a_i$

$\boxed{1, 2, 4, 7, 12}$

- Đ/N Bài toán con

  S_i: độ dài dãy con dài nhất, tăng dần của dãy $a_1, a_2, \ldots a_i$ kết thúc tại a_i

- $S_1 = 1$
- CTQHĐ $S_i = MAX\left(1, \underset{j=1,i-1}{MAX}\left(S_j + 1 \mid a_j < a_i\right)\right)$

$S_1 \to S_2$

$S_2 \to S_3$

$S_3 \to S_4$

$\ldots$ S_n

$result = MAX(S_1, S_2, \ldots S_n)$

Pseudo code.

```
S[1] = a[1];
for i = 2 → n do
    S[i] = 1; res = S[1];
    for j = 1 → i-1 do
        if a[j] < a[i] then
            if S[i] < S[j]+1 then
                S[i] = S[j]+1;
    if res < S[i] then
        res = S[i]
return res
```

$= 5$

$O(n^2)$

Kỹ thuật Truy vết.

Đ/N Cấu trúc dữ liệu lưu vết mỗi khi ta ra QĐ lựa chọn để XD lời giải cho BTcon.

BTcon → op 1, op 2, op3, …, opk

ghi nhận QĐ lựa chọn

Dùng cấu trúc vết để truy ra lời giải

Trace[i]: chỉ số j của phần tử đứng trước a[i] trong dãy con tăng dần dài nhất k/t tại a[i].

$$a_1, a_2 \ldots \boxed{a_j}, \ldots \boxed{a_i}$$

```
MaxIncSubSeqTrace(a[1..n])
S[1]=1; res = S[1];
Trace[1]=0;
for i = 2 to n do
    S[i]=1; Trace[i]=0;
    for j=1 → i-1 do if a[j]<a[i] then
        if S[i]<S[j]+1 then
            S[i] = S[j]+1;
            Trace[i]=j;
    if res < S[i] then
        res=S[i];
        last = i;
return res, trace;
```

	1	2	3	4	5	6	7	8
a	3	1	2	6	4	7	12	5
S	1	1	2	3	3	4	5	4
Trace	0	0	2	3	3	4	6	5

Truy vết: last = 7.

$\boxed{1, 2, 6, 7, 12}$

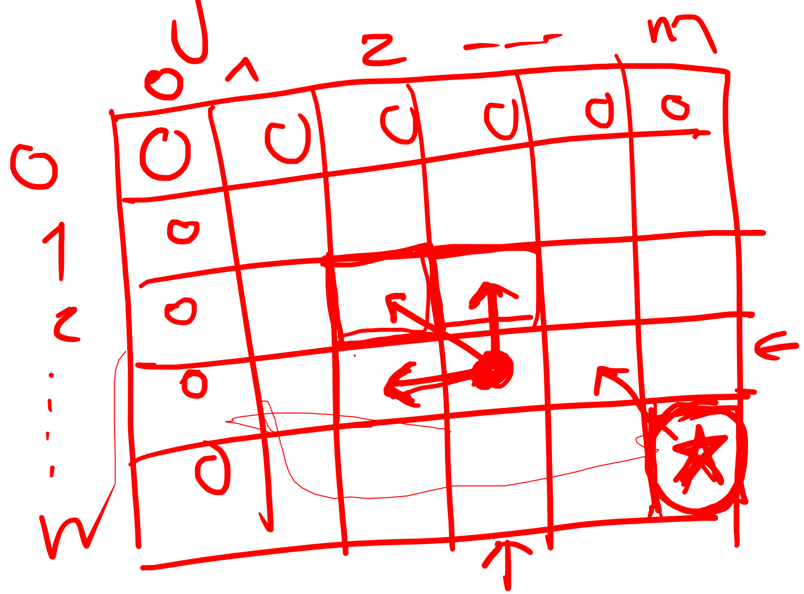
```
i = last;
while i > 0 do
[ print(a[i]);   // in xuôi → dùng stack
  i = Trace[i];
```

Longest Common SubSequence

$X_1, X_2, \dots, X_n$

$Y_1, Y_2, \dots, Y_m$

Tìm dãy con chung có độ dài MAX của 2 dãy.



$S[i,j]$ độ dài dãy con chung dài nhất của $(X_1, X_2, \dots, \boxed{X_i})$ và $(Y_1, Y_2, \dots, \boxed{Y_j})$

. BT con nhỏ nhất $S[i,0]=0$, $S[0,j]=0$, $\forall i,j$

. CT QHĐ.

$$S[i,j] = \begin{cases} S[i-1, j-1]+1, \text{ nếu } X_i = Y_j \\ \max(S[i,j-1], S[i-1,j]), \text{ ngược lại} \end{cases}$$

Truy vết

$\text{Trace}[i,j] = \begin{cases} \text{'D'} : \text{đi chéo} \\ \text{'U'} : \text{đi lên} \\ \text{'L'} : \text{đi sang trái} \end{cases}$

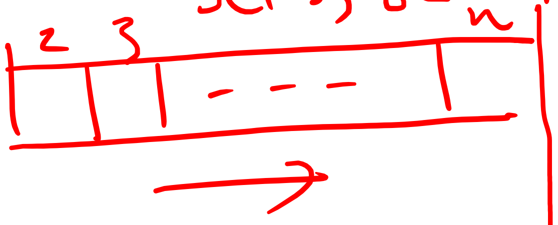
Pseudo code

```
for i = 0 to n do S[i,0] = 0;
for j = 0 → m do S[0,j] = 0;
for i = 1 to n do
    for j = 1 to m do
        if X[i] = Y[j] then
            S[i,j] = S[i-1,j-1] + 1;
            Trace[i,j] = 'D';
        else
            if S[i,j-1] > S[i-1,j] then
                S[i,j] = S[i,j-1];
                Trace[i,j] = 'L';
            else
                S[i,j] = S[i-1,j];
                Trace[i,j] = 'U';
return S[n,m], Trace;
```

Cho dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$. Dãy con $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$. Tìm dãy con có tổng $\boxed{\text{chẵn}}$ và MAX - lẻ

$a_1, \boxed{a_2 \dots a_{i-1}} \boxed{a_i}, \dots a_n$.

SC[1], SL[1]



~~• S[i]: độ dài dãy con chẵn, MAX của $a_1, a_2 \dots a_i$, kết thúc tại a_i~~

~~CT QHĐ: $S[i] = \begin{cases} S[i-1] + a_i, & \text{nếu } S[i-1] > 0 \\ a_i, & \text{nếu } S[i-1] \le 0 \end{cases}$~~

• SC[i]: tổng các p/tử dãy con chẵn MAX của $a_1, a_2 \dots a_i$, kết thúc tại a_i

• SL[i]: tổng các p/tử dãy con lẻ MAX của $a_1, a_2, \dots, a_i$, kết thúc tại a_i

$\boxed{a_i \text{ chẵn}}$

if SC[i-1] tồn tại và >0 then
  SC[i] = SC[i-1] + ai
else SC[i] = ai.

if SL[i-1] tồn tại then
  SL[i] = SL[i-1] + ai
else SL[i] không tồn tại.

$\boxed{a_i \text{ lẻ}}$

if SL[i-1] tồn tại then
  SC[i] = SL[i-1] + ai
else SC[i] không tồn tại

if SC[i-1] tồn tại >0 then
  SL[i] = SC[i-1] + ai
else SL[i] = ai.

	1	2	3	4	5	6	7	8
a	2	-9	3	10	-5	6	-9	20

$O(n)$

10^5

	1	2	3	4	5	6	7	8
SC								

	1	2	3	4	5	6	7	8
SL	x	-7	3	13	5	11	5	25

SC	2	x	-4	10	8	14	2	22

Cho 2 số nguyên dương ~~đến~~ n và M

cho dãy nguyên dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Y/cầu: đếm số nghiệm nguyên không âm của p/t: $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = M$

$\cancel{x_1 + x_2 + 2x_3 = 4}$

$\boxed{x_1 + x_2 + \boxed{2x_3} = 4}$

$\Rightarrow x_3 = 0, 1, 2$

$x_3 = 0$: $x_1 + x_2 + 2.0 = 4$

$\boxed{x_1 + x_2 = 4} \to S(2, 4)$

$x_3 = 1$: $x_1 + x_2 + 2.1 = 4$

$\boxed{x_1 + x_2 = 2} \to S(2, 2)$

$x_3 = 2$: $x_1 + x_2 + 2.2 = 4$

$\boxed{x_1 + x_2 = 0} \to S(2, 0)$

$\Downarrow$

$S(3, 4) = S(2, 4) + S(2, 2) + S(2, 0)$

$\boxed{S(i, m)}$ là số nghiệm nguyên không âm của $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + \boxed{a_ix_i} = m$

$(i = \overline{1, n},\ m = \overline{0, M})$ $\quad 0 \leq x_i \leq \lfloor \frac{m}{a_i} \rfloor$

$$\boxed{S(i, m) = \sum_{v = \overline{0, \lfloor \frac{m}{a_i} \rfloor}} S(i-1, m - v \cdot a_i)}$$