Divide-and-Conquer (chia để trị)

- chia BT XP thành các BT con độc lập
- Trị (giải) các BT con (đệ quy)
- Tổng hợp lời giải các BT

$$\underbrace{x \cdot x \cdot x}_{n/2} \cdots \overbrace{}^{x}$$

$$a = x^{n/2} \qquad \underbrace{a}_{n/2} \cdot$$

$$\boxed{x \; x} \; \boxed{x} \; \boxed{x \; x}$$

Cho x và N, tính x^N

N có thể $10^6, 10^9$

res = 1
for i = 1 → n do
   res = res × x;

$\rightarrow O(n)$

$n = 2^{10}$

$\rightarrow \boxed{10}$

giảm để trị

exp(x, N)

if N = 0 return 1;
a = exp(x, N/2);
a2 = a × a;
if N lẻ then a2 = a2 × x;
return a2;

$\Downarrow$
$O(\log n)$

Bài Max SubSequence :

Cho dãy $a_1, a_2 \dots a_n$,

Tìm dãy con gồm liên tiếp các

P(tử có tổng MAX.

$a_1, a_2 \qquad a_n$

ML $\qquad$ MR. $O(n \log n)$

MaxSubSeq (a, L, R)

$\quad$ if $L = R$ then retu $a[L]$;

$\quad m = \dfrac{L+R}{2}$;
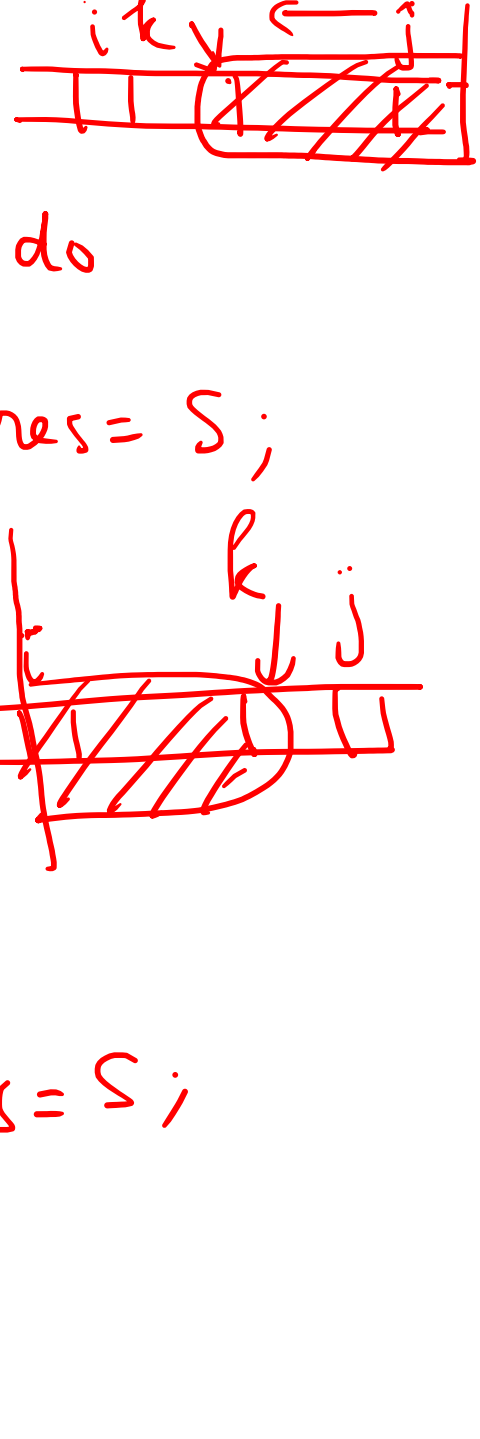
$\quad ML = \underline{MaxSubSeq(a, L, m)}$

$\quad MR = \underline{MaxSubSeq(a, m+1, R)}$
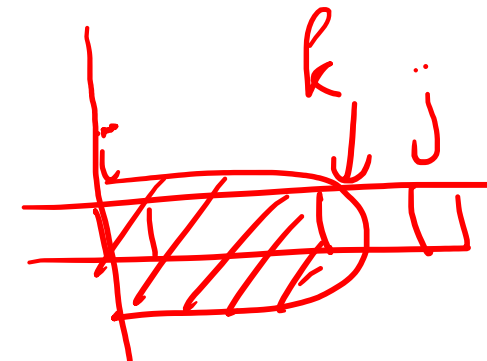
$\quad MLR = \underline{MaxLeft(a, L, m)}$
$\qquad\quad + MaxRight(a, m+1, R)$

$\quad$ return $MAX(ML, MR, MLR)$;

MaxLeft (a, i, j)

$\quad$ res $= -\infty$; $S = 0$

$\quad$ for $k = j$ down to i do

$\qquad S = S + a[k]$;

$\qquad$ if $S >$ res then res $= S$;

$\quad$ return res;

MaxRight (a, i, j)

$\quad$ res $= -\infty$; $S = 0$

$\quad$ for $k = i$ to j do

$\qquad S = S + a[k]$;

$\qquad$ if $S >$ res then res $= S$;

$\quad$ return res;

Dynamic Programming (Quy hoạch Động)

- ĐỊNH Bài toán (các BT con phụ thuộc lẫn nhau)
- BT con nhỏ nhất → giải trực tiếp
- XD CT QHĐ (CT truy hồi)
  Thể hiện sự phụ thuộc 1 BT con
  vào các BT con nhỏ hơn

⟹ Tổng hợp lời giải các BT
con → cho ta lời giải BT xuất phát

Các BT con → giải (Bottom Up)
lưu solution trong BN
  để tránh lặp lại việc giải BT
  con nhiều lần (Đệ quy có
  nhớ)

Top Down → Đệ quy có
nhớ
Hàm đệ quy giải 1 BT con
với tham số đầu
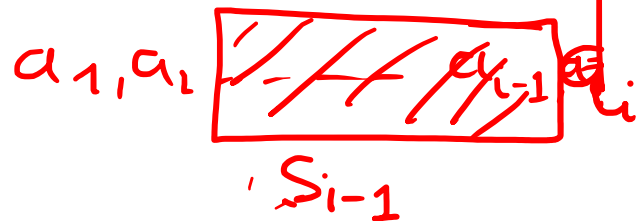vào

Max Sub Sequence

$a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j$

- Đ/N BT con:

S_i: trọng số của dãy con MAX của dãy $a_1, a_2 \ldots a_i$ (kết thúc tại a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$)

- BT con nhỏ nhất $S[1] = a[1]$.

- CT QHĐ: $S_i = \begin{cases} S_{i-1} + a_i, \text{ nếu } S_{i-1} > 0 \\ a_i, \quad S_{i-1} \leq 0 \end{cases}$

$a_1, a_2 \boxed{//////a_{i-1}} a_i$
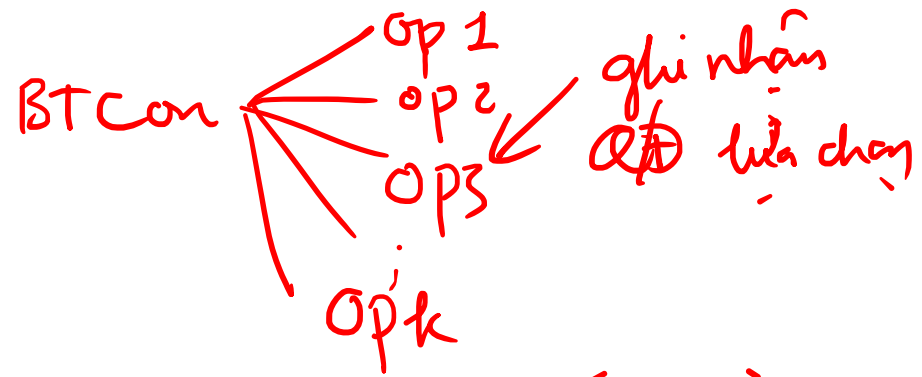
S_{i-1}

MaxSubSeqDP(a[1..n])

```
S[1] = a[1]; res = S[1];
for i = 2 → n do
    if S[i-1] > 0 then
        S[i] = S[i-1] + a[i];
    else S[i] = a[i];
    if S[i] > res then
        res = S[i];
return res;
```

$\Downarrow$

$O(n)$

Kỹ thuật Truy vết.

Đ/N Cấu trúc dữ liệu lưu vết mỗi khi ta. ra QĐ lựa chọn để xđ lời giải cho BTcon.

BTcon
- Op 1
- Op 2
- Op 3
- ...
- Op k

ghi nhận QĐ lựa chọn

Dùng cấu trúc vết để truy ra lời giải

Trace[i]: chỉ số j của phần tử đứng trước a[i] trong dãy con tăng dần dài nhất kết tại a[i].

$a_1, a_2 \ldots \boxed{a_j}, \ldots \boxed{a_i}$

MaxIncSubSeqTrace (a[1..n])

```
S[1] = 1; res = S[1];
Trace[1] = 0;
for i = 2 to n do
    S[i] = 1; Trace[i] = 0;
    for j = 1 → i-1 do if a[j] < a[i] then
        if S[i] < S[j] + 1 then
            S[i] = S[j] + 1;
            Trace[i] = j;
    if res < S[i] then    res = S[i];
                          last = i;
return res, trace;
```
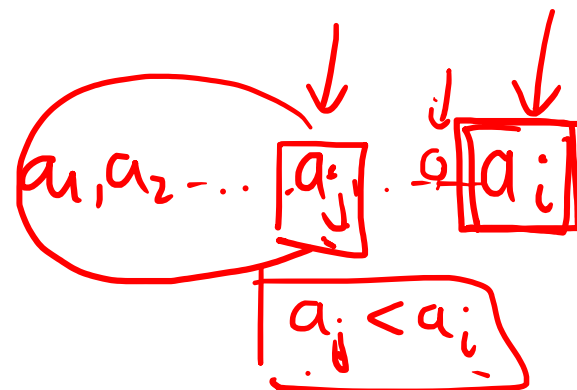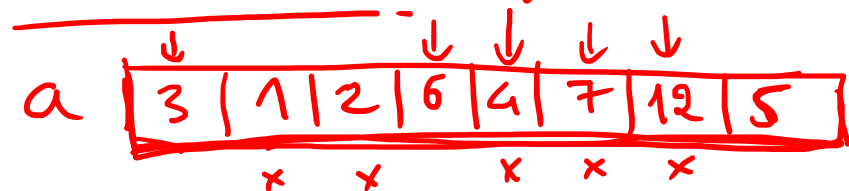
Dãy con [tăng dần] dài nhất

$$a_1, a_2, a_3, - - - - - . a_n$$

a | 3 | 1 | 2 | 6 | 4 | 7 | 12 | 5

$a_1, a_2 - \ldots . a_j \ldots . \text{o} \, \boxed{a_i}$

$a_j < a_i$

1, 2, 4, 7, 12

- Đ/N Bài toán con

S_i: độ dài dãy con dài nhất, tăng dần cửa dãy $a_1, a_2, \ldots a_i$ kết thúc tại a_i

- $S_1 = 1$

- CTQHĐ $\quad S_i = MAX \left(①, \underset{j=1, i-1}{MAX} \left(S_j + 1 \mid a_j < a_i \right) \right)$

$S_1 \rightarrow S_2$
$S_2 \rightarrow S_3$
$S_3 \rightarrow S_4$
$\ldots \ldots S_n$

$result = MAX(S_1, S_2, \ldots S_n)$

Pseudo code.
```
S[1] = a[1];
for i = 2 → n do
    S[i] = 1; res = S[1];
    for j = 1 → i-1 do
        if a[j] < a[i] then
            if S[i] < S[j] + 1 then
                S[i] = S[j] + 1;
    if res < S[i] then
        res = S[i]
return res
```

$O(n^2)$

a	1	2	3	4	5	6	7	8
	3	1	2	6	4	7	12	5

S | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 4

Trace | 0 | 0 | 2 | 3 | 3 | 4 | 6 | 5

Truy vết: last = 7.

1, 2, 6, 7, 12

```
i = last;
while i > 0 do
    print(a[i]);   // in xuôi => dùng
                   stack
    i = Trace[i];
```

Longest Common SubSequence

$X_1, X_2, \ldots, X_n$
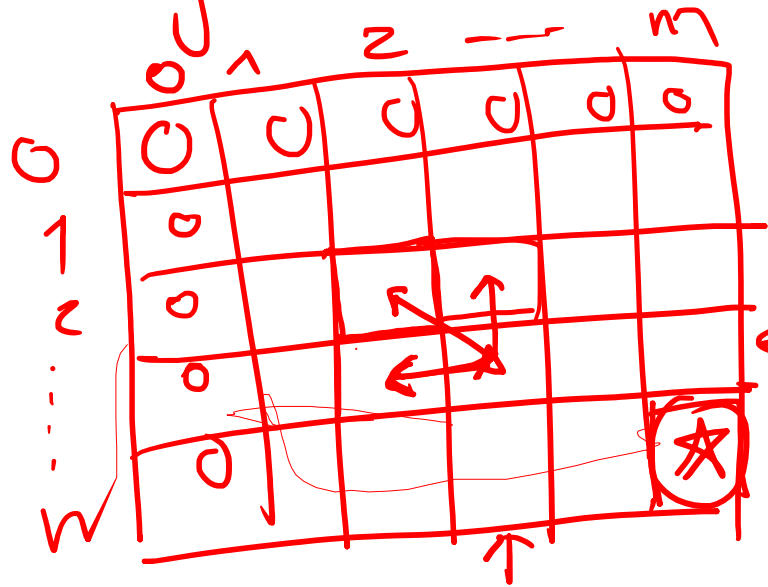
$Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$

Tìm dãy con chung có độ dài MAX của 2 dãy.

- $S[i,j]$ độ dài dãy con chung dài nhất của $(X_1, X_2, \ldots, X_i)$ và $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_j)$

- BT con nhỏ nhất $S[i,0] = 0$, $S[0,j] = 0$, $\forall i, j$

- CT QHĐ.

$$S[i,j] = \begin{cases} S[i-1, j-1] + 1, & \text{nếu } X_i = Y_j \\ \max(S[i, j-1], S[i-1, j]), & \text{ngược lại} \end{cases}$$

Truy vết

$$\text{Trace}[i,j] = \begin{cases} 'D' : \text{đi chéo} \\ 'U' : \text{đi lên} \\ 'L' : \text{đi sang trái} \end{cases}$$

Pseudo code

```
for i = 0 to n do S[i,0] = 0;
for j = 0 → m do S[0,j] = 0;
for i = 1 to n do
   for j = 1 to m do
      if X[i] = Y[j] then  [ S[i,j] = S[i-1,j-1] + 1;
                             Trace[i,j] = 'D';
      else [ if S[i,j-1] > S[i-1,j] then
                [ S[i,j] = S[i,j-1];
                  Trace[i,j] = 'L';
             else [ S[i,j] = S[i-1,j];
                    Trace[i,j] = 'U';
return S[n,m], Trace;
```