

CHUYÊN ĐỀ. LUYỆN THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I.1. Luyện thừa với số mũ tự nhiên

Lũy thừa bậc n của một số hữu tỉ x (kí hiệu: x^n) là tích của n thừa số x (n là một số tự nhiên lớn hơn 1)

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n \text{ thừa số}} \quad (x \in \mathbf{Q}, n \in \mathbf{N}, n > 1)$$

- Quy ước: $x^1 = x$; $x^0 = 1$

Khi viết số hữu tỉ x dưới dạng $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0$), ta có

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{n \text{ thừa số}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n \text{ thừa số}}}{\underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n \text{ thừa số}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

I.2. Các công thức lũy thừa cần lưu ý

- Nhân hai lũy thừa cùng cơ số: $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
- Chia hai lũy thừa cùng cơ số: $x^m : x^n = x^{m-n}$
- Lũy thừa của lũy thừa: $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$
- Lũy thừa của một tích: $(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$
- Lũy thừa của một thương: $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad (y \neq 0)$
- Mở rộng - lũy thừa với số mũ nguyên âm: $x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbf{N}^*, x \neq 0)$

II. LUYỆN TẬP

Bài 1. Tính giá trị biểu thức

- $(-0,125)^5 \cdot (-8)^5$
- $(-272)^4 : (136)^4$
- $\left(\frac{5}{7}\right)^{15} : \left(\frac{5}{7}\right)^{13}$
- $9^{25} : 3^{30}$
- $12^3 : (3^{-4} \cdot 64)$
- $\left(\frac{3}{7}\right)^5 \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^6 : \left(\frac{243}{625}\right)^{-2}$

Bài 2. Tính

- $\frac{8^{10} + 4^{10}}{8^4 + 4^{11}}$
- $\frac{3^6 \cdot 45^4 - 15^{13} \cdot 5^{-9}}{27^4 \cdot 25^3 + 45^6}$
- $\frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20}$
- $\frac{\left(\frac{2}{7}\right)^7 \cdot 5^7 + \left(\frac{9}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512}$

Bài 3. Tính giá trị của biểu thức

- $2^2 - (-3^2)^3 + 4^{-2} \cdot 16 - 2 \cdot 5^2$
- $B = \left(2^3 : \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{8} + 3^{-2} \cdot 9 - 7 \cdot \left(\frac{14}{25}\right)^0 + 5$

$$c. \quad C = 2^{-3} + (5^2)^3 \cdot 5^{-3} + 4^{-3} \cdot 16 - 2 \cdot 3^2 - 105 \cdot \left(\frac{24}{51}\right)$$

$$d. \quad D = \left(2^3 : \frac{1}{2^{-2}}\right) \cdot \frac{2}{3} + 4^{-2} \cdot 8 - 7 \left(\frac{17}{23}\right)^0 + 19$$

Bài 4. Rút gọn biểu thức

$$a. \quad A = 2^{100} - 2^{99} + 2^{98} - 2^{97} + \dots + 2^2 - 2$$

$$b. \quad C = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$$

$$c. \quad B = 3^{100} - 3^{99} + 3^{98} - 3^{97} + \dots + 3^2 - 3$$

$$d. \quad D = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$$

Bài 5. Tìm các số tự nhiên m và n , biết

$$a. \quad (0,125)^n \cdot 24^n = 243$$

$$b. \quad 85^n : 17^n = 625$$

$$c. \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \dots \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64} = 2^n$$

$$d. \quad 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^n = 2^{n+10}$$

$$e. \quad \frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 2^n$$

Bài 6. Tìm x , biết

$$a. \quad 5^x \cdot (5^3)^2 = 625$$

$$b. \quad 172x^2 - 7^9 : 98^3 = 2^{-3}$$

$$c. \quad \left(\frac{12}{25}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^{-2} - \left(-\frac{3}{5}\right)^4$$

$$d. \quad \left(-\frac{3}{4}\right)^{3x-1} = \frac{256}{81}$$

$$e. \quad 3^{x-1} + 5 \cdot 3^{x-1} = 162$$

$$f. \quad 5^x + 5^{x+2} = 650$$

Bài 7. Tìm x , biết

$$a. \quad (x-1)^3 = 343$$

$$b. \quad (x-1)^2 = 4096$$

$$c. \quad (5x+1)^2 = \frac{36}{49}$$

$$d. \quad (8x-1)^{2n+1} = 5^{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$e. \quad (x-4)^2 = (x-4)^4$$

$$f. \quad \left(x - \frac{2}{9}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

Bài 8. Tìm số tự nhiên x, y , biết

$$a. \quad 2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x$$

$$b. \quad 10^x : 5^y = 20^y$$

$$c. \quad 2^x = 4^{y-1} \text{ và } 27^y = 3^{x+8}$$

$$f. \quad \frac{4^x}{2^{x+y}} = 8 \text{ và } \frac{9^{x+y}}{3^{5y}} = 243$$

$$g. \quad 2^x = 8^{y+1} \text{ và } 9^y = 3^{x-9}$$

$$h. \quad 2^x - 2^y = 256$$

Bài 9. Tìm số tự nhiên x, y , biết

$$a. \quad x^2 + \left(y - \frac{1}{10}\right)^4 = 0$$

$$b. \quad \left(\frac{1}{2}x - 5\right)^{20} + \left(y^2 - \frac{1}{4}\right)^{10} = 0$$

Bài 10. Tìm x, y biết

$$a. \quad x + \left(-\frac{31}{12}\right)^2 = \left(\frac{49}{12}\right)^2 - x = y^2$$

$$b. \quad x(x-y) = \frac{3}{10} \text{ và } y(x-y) = -\frac{3}{50}$$

Bài 11. Chứng minh rằng:

$$a. \quad \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} < 1$$

$$b. \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$$

Bài 12. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \left(2x + \frac{1}{4}\right)^4 - 1$

Bài 13. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B = -\left(\frac{4}{9}x - \frac{2}{15}\right)^6 + 2020$

Bài 14. Cho $x + y = 2$. Chứng minh rằng: $xy \leq 1$

CHUYÊN ĐỀ. SO SÁNH LUYỆN THỪA

I. PHƯƠNG PHÁP SO SÁNH HAI LUYỆN THỪA

Để so sánh hai lũy thừa, ta:

- Đưa về bài toán so sánh hai lũy thừa có cùng cơ số
- Đưa về bài toán so sánh hai lũy thừa cùng số mũ
- Sử dụng tính chất bắc cầu: nếu $\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases}$ thì $a > c$

I.1 SO SÁNH HAI LUYỆN THỪA CÙNG CƠ SỐ

Với $x \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}^*$

1. Nếu $x > 1$ thì $x^n > 1$
2. Với $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $(0, 125)^{90}$
 - a. Nếu $x = 1$ thì $x^m = x^n$
 - b. Nếu $x > 1$ thì $x^m > x^n$
 - c. Nếu $1 > x > 0$ thì $x^m < x^n$

Ví dụ 1. So sánh:

a. 9^{200} và 27^{133}

b. $(0,25)^{80}$ và $(0,125)^{90}$

I.2 SO SÁNH HAI LUYỆN THỪA CÙNG CƠ SỐ

Với $x, y > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$:

1. Nếu $x > y$ thì $x^n > y^n$
2. $x > y \Leftrightarrow x^{2n+1} > y^{2n+1}$
3. $|x| > |y| \Leftrightarrow x^{2n} > y^{2n}$

Ví dụ 2. So sánh

a. 2^{285} và 3^{190}

b. $\left(\frac{1}{16}\right)^{250}$ và $\left(\frac{1}{2}\right)^{1500}$

I.3 SỬ DỤNG TÍNH CHẤT BẮC CẦU

Nếu $\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases}$ thì $a > c$

Ví dụ 3. So sánh

a. 7^8 và 21^5

b. $(0,25)^4$ và $(0,75)^3$

II. LUYỆN TẬP

Bài 1. So sánh:

a. 3^{222} và 2^{333}

c. 2^{3^2} và 2^{2^3}

b. $(2^2)^3$ và 2^{2^3}

d. $(-1)^{5^4}$ và $(-1)^{4^5}$

Bài 2. So sánh

a. 9^{87} và 27^{58}

e. 3^{5^n} và 5^{3^n} ($n \in \mathbb{N}$)

b. 4^{30} và 3.24^{10}

f. 101^{15} và 9^{29}

c. $(0,36)^{42}$ và $(0,216)^{28}$

g. 404^{600} và 505^{450}

d. 2^{101} và 5^{39}

h. $(-32)^9$ và $(-18)^{13}$

Bài 3. Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10}$

So sánh A và 2^{11}

Bài 4. Cho $B = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + 10 \cdot 2^{10}$

So sánh B và 2^{14}

Bài 5. Tìm số tự nhiên n , biết

a. $8 < 2^n \leq 2^9 \cdot 2^{-5}$

b. $27 < 81^3 : 3^n < 243$

c. $\left(\frac{2}{5}\right)^n < \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^2$

Bài 6.