9 Ch7

- **Z-transform**：為discrete-time Fourier transform (DTFT)
  - **基本公式**：$X[z]=\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$，其中 $z=\rho e^{j\Omega}$ (為複數)

    ex: $x[n]=\begin{cases} 1, & n=1 \\ 3, & n=4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \Rightarrow X[z]=1z^{-1}+3z^{-4}=\frac{1}{z}+\frac{3}{z^4}=\frac{z^3+3}{z^4}$

  - **Region of Convergence**：寫成無窮等比，令分母絕對值>0，再取交集即可

    ex: $X[z]=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}=1+\frac{a}{z}+\frac{a^2}{z^2}+\cdots \Rightarrow$ 公比為 $\frac{a}{z}$

    由無窮等比可知 $X[z]=\frac{1}{1-\frac{a}{z}}$，所以 ROC 為 $\left|\frac{a}{z}\right|<1$

Property	$x[n]$	$X(z)$
1. Linearity	$ax[n]+by[n]$	$aX(z)+bY(z)$
2. Time-shifting	$x[n-m]$	$z^{-m}X(z)+z^{-m+1}x[-1]+\cdots+z^{-1}x[-m+1]+x[-m]$
3. Frequency scaling	$a^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$
4. Time reversal	$x[-n]$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$
5. Multiplication by n	$nx[n]$	$-z\frac{d}{dz}X(z)$
6. Multiplication by n^2	$n^2x[n]$	$z\frac{d}{dz}X(z)+z^2\frac{d^2}{dz^2}X(z)$
7. Modulation		
Multiplication by $e^{j\Omega_0 n}$	$e^{j\Omega_0 n}x[n]$	$X(e^{-j\Omega_0}z)$
Multiplication by $\cos\Omega n$	$(\cos\Omega n)x[n]$	$\frac{1}{2}\left[X(e^{j\Omega}z)+X(e^{-j\Omega}z)\right]$
Multiplication by $\sin\Omega n$	$(\sin\Omega n)x[n]$	$\frac{j}{2}\left[X(e^{j\Omega}z)-X(e^{-j\Omega}z)\right]$
8. Accumulation	$\sum_{k=0}^{n} x[k]$	$\frac{z}{z-1}X(z)$
9. Convolution	$x[n]*h[n]$	$X(z)H(z)$
10. Initial value	$x[0]=\lim_{z\to\infty}X(z)$	
11. Final value	$x[\infty]=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z)$	

  - **特性**：
    ① 線性：$Z\{ax[n]+by[n]\}=aX(z)+bY(z)$
    ② 時間平移：$x[n-m]=z^{-m}X(z)$
    ③ 頻率放大：$a^n x[n]=X\left(\frac{z}{a}\right)$
    ④ 時間倒數：$x[-n]=X\left(\frac{1}{z}\right)$
    ⑤ Modulation：$(\cos\Omega n)x[n]=\frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega}z)+X(e^{-j\omega}z)\right]$
    $(\sin\Omega n)x[n]=\frac{j}{2}\left[X(e^{j\omega}z)-X(e^{-j\omega}z)\right]$ ⇒ $j\omega$在前!!
    ⑥ Accumulation：令$y[n]$為discrete time signal $x[n]$的總和，且對於 $n=-1,-2\cdots$，$x[n]=0$
    $y[n]=\sum_{k=0}^{n} x[k] \Rightarrow Y(z)=\frac{z}{z-1}X(z)$
    ⑦ Convolution：$x[n]*h[n]=X(z)H(z)$
    ⑧ 初值：$x[0]=\lim_{z\to\infty}X(z)$
    終值：$x[\infty]=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z)$
    ⑨ $Z\{nx[n]\}=-z\frac{d}{dz}X(z) \Rightarrow$ 微分後 × $(-z)$

Some Common z-Transform Pairs

$x[n]$	$X(z)$	ROC
1. $\delta[n]$	1	All z
2. $\delta[n-m]$	$\frac{1}{z^m}$	$z\neq 0$
3. $u[n]$	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert>1$
4. $a^n u[n]$	$\frac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
5. $nu[n]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert>1$
6. $(n+1)u[n]$	$\frac{z^2}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert>1$
7. $n^2u[n]$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\lvert z\rvert>1$
8. $na^n u[n]$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
9. $(n+1)a^n$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
10. $n^2a^n u[n]$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
11. $\exp[-anT]$	$\frac{z}{z-\exp[-aT]}$	$\lvert z\rvert>e^{-aT}$
12. $\cos\Omega n\ u[n]$	$\frac{z^2-z\cos\Omega}{z^2-2z\cos\Omega+1}$	$\lvert z\rvert>1$
13. $\sin\Omega n\ u[n]$	$\frac{z\sin\Omega}{z^2-2z\cos\Omega+1}$	$\lvert z\rvert>1$
14. $a^n(\cos\Omega n)\ u[n]$	$\frac{z^2-za\cos\Omega}{z^2-2za\cos\Omega+a^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
15. $a^n(\sin\Omega n)\ u[n]$	$\frac{za\sin\Omega}{z^2-2za\cos\Omega+a^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$

  - **反Z-transform**：
    ① 能除 ⇒ 直接用長除法
    ② 不能除 ⇒ 化為部分分式再看出原函數是誰

Ch6

- **Discrete-Time Fourier transform (DTFT):**
  - $X(\Omega)=F\{x[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n}$ ⇒ Z-transform 的 $z=e^{j\Omega}$
    值
  - $e^{j\Omega}=\cos\Omega+j\sin\Omega$
  - $e^{-j\Omega}=\cos\Omega-j\sin\Omega$
  - 特性:
    1. $x[-n]\Rightarrow X(-\Omega)$
    2. $x_{(k)}[n]\Rightarrow X(k\Omega)$，其中 $x_{(k)}[n]=\begin{cases}x[n/k]=x[m], & \text{if } n=km,\ m\text{為int.}\\ 0, & n\text{不為}k\text{的倍數}\end{cases}$
    3. $x[n-n_0]\Rightarrow e^{-j\Omega n_0}X(\Omega)$
    4. $\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\Rightarrow\frac{1}{1-e^{j\Omega}}X(\Omega)+\pi X(0)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2n\pi)$
    5. $nx[n]\Rightarrow j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$

TABLE 6.1
Properties of Discrete-Time Fourier Transform (DTFT)

Property	Time Domain	Frequency Domain
1. Periodicity	$x[n]$	$X(\Omega+2\pi)=X(\Omega)$
2. Linearity	$ax_1[n]+bx_2[n]$	$aX_1(\Omega)+bX_2(\Omega)$
3. Time-shifting	$x[n-k]$	$e^{-j\Omega k}X(\Omega)$
4. Frequency-shifting (modulation)	$e^{j\Omega 0n}x[n]$	$X(\Omega-\Omega_0)$
5. Time reversal	$x[-n]$	$X(-\Omega)$
6. Conjugation	$x^*[n]$	$X^*(-\Omega)$
7. Time scaling	$x_{(k)}[i]$	$X(k\Omega)$
8. Differentiation	$nx[n]$	$j\frac{dX\Omega}{\Omega}$
9. Time-convolution	$x_1[n]*x_2[n]$	$X_1(\Omega)X_2(\Omega)$
10. Frequency-convolution	$x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{2\pi}X_1(\Omega)\otimes X_2(\Omega)$
11. Accumulation	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[k]$	$\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}X(\Omega)+\pi X(0)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2n\pi)$
12. Parseval's relation	$E_x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert x[n]\rvert^2$	$E_x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lvert X(\Omega)\rvert^2\,d\Omega$

- **IFT:**
  $$x[n]=F^{-1}\{X(\Omega)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}\,d\Omega$$

Signal	Type	$x[n]$	$X(\Omega)$
1.	Impulse	$\delta[n]$	1
2.	Shifted impulse	$\delta[n-k]$	$e^{-j\Omega k}$
3.	Unit step	$u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2n\pi),\quad \lvert\Omega\rvert\le\pi$
4.	Shifted unit step	$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}-\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2n\pi),\quad \lvert\Omega\rvert\le\pi$
5.	DC signal	1, for all n	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k)$
6.	Gated function	$u[n]-u[n-k]$	$\frac{\sin(k\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}e^{-j\Omega(k-1)/2}$
7.	Exponential	$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}\quad \lvert a\rvert\le 1$
8.	Weighted exponential	$na^n u[n]$	$\frac{ae^{-j\Omega}}{(1-ae^{-j\Omega})^2}\quad \lvert a\rvert\le 1$
		$(n+1)a^n u[n]$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^2}\quad \lvert a\rvert\le 1$
9.	Two-sided exponential	$a^{\lvert n\rvert}$	$\frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\Omega}\quad \lvert a\rvert<1$
10.	Complex sinusoid	$e^{j\Omega_0 n}$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi k)$
11.	Cosine wave	$\cos\Omega_0 n$	$\cancel{2}\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi k)+\delta(\Omega+\Omega_0-2\pi k)$
12.	Sine wave	$\sin\Omega_0 n$	$\frac{\pi}{j}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi k)-\delta(\Omega+\Omega_0-2\pi k)$

- **Parseval's relation**：能量守恆
  $$\text{Energy}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^2[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lvert X(\Omega)\rvert^2\,d\Omega$$

- **Discrete Fourier Transform (DFT):** N為點的個數
  $$X[k]=F[x[n]]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j2\pi nk/N}=R[k]+jI[k]$$
  $$R[k]=\text{實部}=x[0]+\sum_{n=1}^{N-1}x[n]\cos\frac{2\pi nk}{N}$$
  $$I[k]=\text{虛部}=-\sum_{n=1}^{N-1}x[n]\sin\frac{2\pi nk}{N}$$

TABLE 6.3
Properties of the DFT

Property	Time Domain	Frequency Domain
1. Linearity	$ax_1[n]+bx_2[n]$	$aX_1[k]+bX_2[k]$
2. Time-shifting	$x[n-m]$	$e^{-j2\pi km}X(k)$
3. Frequency-shifting (modulation)	$e^{-j2\pi k_0 n/N}x[n]$	$X(k-k_0)$
4. Time reversal	$x[-n]$	$X(-k)$
5. Conjugation	$x^*[n]$	$X^*(-k)$
6. Time-convolution	$x_1[n]\otimes x_2[n]$	$X_1[k]X_2[k]$
7. Frequency-convolution	$x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{N}X_1[k]\otimes X_2[k]$
8. Parseval's relation	$E_x=\sum_{n=0}^{N-1}\lvert x[n]\rvert^2$	$E_x=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\lvert X[k]\rvert^2$

- **IDFT**:

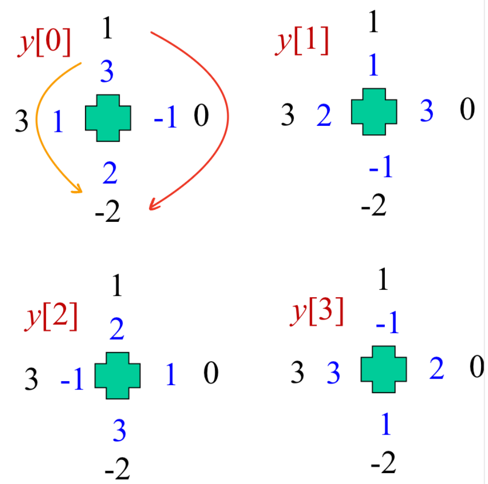
$$x[n] = F^{-1}[X[k]] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi nk/N}$$

- **Circular (periodic) Convolution**：有限點的 conv

$$y[n] = x[n] \circledast h[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]h[n-k] \Rightarrow Y[k] = X[k]H[k]$$

ex: 速解

$x[n]=[1,0,-2,3]$ and $h[n]=[3,1,2,-1]$



$\Rightarrow$ $y[n] = [2, 9, -7, 6]$.

外圈初始為順時針，內圈為逆時針

$y[0] = 3\times1 + (-1)\times0 + 2(-2) + 1\times3 = 2$

之後內圈順轉一格……

§ Ch5

- **傅立葉轉換**：拉普拉斯的 s 用 $j\omega$ 代替
  - $X(\omega) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$
  - $x(t) = F^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$
  - **常用 Fourier**：

① $F\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{a+j\omega}$

② $F\{e^{at}u(-t)\} = \frac{1}{a-j\omega}$

③ $F\{\sin(\omega_0 t)\} = j\pi[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]$

④ $F\{\cos(\omega_0 t)\} = \pi[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)]$

③④ 若 sin、cos 後有 $u(t)$，則轉換後要加 $\frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$

⑤ $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$

⑥ $F\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

  - **特性**：

① **線性**：$F\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\} = a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$

② **伸縮**：$F\{x(at)\} = \frac{1}{a}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

③ 時間平移：$F\{x(t-a)\} = e^{-j\omega a}X(\omega)$

④ 頻率平移：$F\{e^{-j\omega_0 t}x(t)\} = X(\omega+\omega_0)$

⑤ time convolution：$F\{x(t) * h(t)\} = X(\omega)H(\omega)$

⑥ 時間微分：$F\{x^{(n)}(t)\} = (j\omega)^n X(\omega)$

⑦ 時間積分：$F\{\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt\} = \frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$

⑧ Modulation：$F\{\cos(\omega_0 t)x(t)\} = \frac{1}{2}[X(\omega+\omega_0) + X(\omega-\omega_0)]$

$F\{\sin(\omega_0 t)x(t)\} = \frac{j}{2}[X(\omega+\omega_0) - X(\omega-\omega_0)]$

- Amplitude modulation (AM)：不同頻率的疊加 (高頻載波 + 低頻資訊)
  - $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$
  - upper sideband $= f_c + f_0$
  - lower sideband $= f_c - f_0$

  其中 f_c 為 carrier 頻率(高)，f_0 為資訊頻率(低)

- Sampling：
  - Nyquist frequency：最小取樣頻率 f_s
    - $f_s \geq 2W$，其中 W 為被取樣訊號的頻寬 bandwith
    - 若將 f_s 倒數，可得最大取樣週期 T_s
  - oversampled：取樣 $f_s >$ Nyquist f
  - undersampled：取樣 $f_s <$ Nyquist f

- 補 $F\{x_1(t)x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega)$