ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN KHOA
CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Nhập môn phân tích độ phức tạp thuật toán
BT01: Phép gán và phép so sánh

GVLT:	Thầy Trần Đan Thư	
GVTH:	Thầy Nguyễn Đức Thân	
	Thầy Trương Toàn Thịnh	
	Thầy Nguyễn Vinh Tiệp	
	Thầy Nguyễn Sơn Hoàng Quốc	
Sv:	Nguyễn Phan Mạnh Hùng	1312727

Mục lục

1 Quy ước

$A(n)$: số lượng phép gán.
$C(n)$: số lượng phép so sánh.

2 Mã nguồn

```cpp
using namespace std;

int SomeSum(int n, int& Assign, int& Comparision)
{
    Assign = Comparision = 0;
    int sum = 0, i = 1;         Assign += 2;
    int j;
    while (++Comparision && i <= n)
    {
        j = n - i;              ++Assign;
        while (++Comparision && j <= i*i)
        {
            sum = sum + i*j;    ++Assign;
            j = j + 1;          ++Assign;
        }
        i = i + 1;              ++Assign;
    }

    return sum;
}
```

3 Nhận xét - Dự đoán độ phức tạp thuật toán

```
int SomeSum(int n)
{
  int sum = 0, i = 1;
  int j;
  while (i <= n)              n+1 so sánh
  {
    j = n - i;                n gán
    while (j <= i*i)          i^2 + i - n + 2 so sánh
    {
      sum = sum + i*j;        i^2 + i - n + 1 gán
      j = j + 1;              i^2 + i - n + 1 gán
    }
    i = i + 1;                n gán
  }
  return sum;
}
```

Ta nhận thấy vòng lặp trong cùng chỉ thực hiện khi $j \leq i * i$ hay:

$$n - i \leq i * i \tag{1}$$

Giải bất phương 2 với ẩn $i \geq 0$, tham số n ta được:

$$i \geq \left\lceil \frac{-1 + \sqrt{4n+1}}{2} \right\rceil = \alpha \tag{2}$$

Ta tính được:

$$C(n) = n + \alpha + \Sigma_{i=\alpha}^{n} \left(i^2 + i - n + 2\right) \tag{3}$$

Mà $\forall n \geq 2,\ alpha \leq \frac{n}{2}$, nên:

$$\begin{aligned}
C(n) &\geq n + \alpha + \Sigma_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1}^{n} \left(i^2 + i - n + 2\right) \\
&\geq n + \Sigma_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1}^{n} \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n}{2} - n \\
&\geq n + \left(\frac{n}{2} - 3\right) \times \left[\left(\frac{n}{2}\right)^2 - n\right] = \frac{n^3}{8} - \frac{5n^2}{4} + 4 \times n \\
\Rightarrow 8 \times C(n) &\geq n \times \left(n^3 - 10n^2 + 32\right) \geq n^3
\end{aligned}$$

Do đó:

$$C(n) \in \Omega(n^3) \tag{4}$$

Bên cạnh đó, $\forall n \geq 2$

$$\begin{aligned} C(n) &\leq n + \Sigma_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1}^{n} \left(n^2 + n - n\right) \\ &\leq n + \left(\frac{n}{2}\right) \times n^2 = n + \frac{n^3}{2} \leq 10n^3 \end{aligned}$$

nên

$$C(n) \in O(n^3) \tag{5}$$

Từ 4 và 5, ta được

$$C(n) \in \Theta(n^3) \tag{6}$$

Tuy vậy, ta có thể tính chính xác số phép so sánh bằng cách khai triển 3, ta được:

$$C(n) = 2n^3 + n \times (16 + 6\alpha) - 2\alpha^3 - 4\alpha + 12 \tag{7}$$

Với công thức trên ta dễ dàng chứng minh được $C(n) \in \Theta(n^3)$ mà không thông qua chứng minh bất đẳng thức ở trên.
Đối với phép gán, ta chứng minh tương tự phép so sánh sẽ cho ra độ phức tạp như trên.