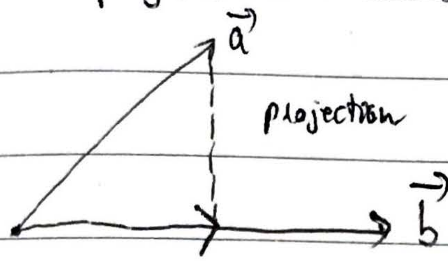
Đại số tuyến tính

+) $\alpha = (\vec{a}, \vec{b})$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\alpha$

→ scalar projection of $\vec{a}$ on $\vec{b}$: $|\vec{a}|.\cos\alpha$ [hình chiếu của $\vec{a}$ trên $\vec{b}$]



→ vector projection of $\vec{a}$ on $\vec{b}$: $\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\vec{b}.\vec{b}}.\vec{b}$

+) Ma trận cấp n (ma trận vuông n×n): $A_{n\times n}$

. Ma trận tam giác trên nếu: $\forall a_{ij}\ (i>j) = 0$

. Ma trận tam giác dưới nếu: $\forall a_{ij}\ (i<j) = 0$

. Ma trận chéo: $\forall a_{ij}\ (i\neq j) = 0$

+) $(A.B)^T = B^T.A^T$

1. Định thức

- Định thức của ma trận vuông cấp n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ma trận M_{ij}: là ma trận bỏ đi phần tử của hàng i, cột j → ma trận cấp n−1.

- Định nghĩa: định thức của ma trận A, det(A) được định nghĩa dần dần như sau:

+) A là ma trận cấp 1: $A = [a_{11}] \Rightarrow \det(A) = a_{11}$

+, A là ma trận cấp 2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = a_{11}.\det(M_{11}) - a_{12}.\det(M_{12})$$
$$= a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

+, A là ma trận cấp n:

$$\det(A) = a_{11}.\det(M_{11}) - a_{12}.\det(M_{12}) + \dots + (-1)^{1+n}.a_{1n}.\det(M_{1n})$$

Với $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ là các phần tử nằm ở hàng 1 của ma trận A.

* Tính chất:

- $\det(A^T) = \det(A)$

→ Một tính chất đã đúng khi phát biểu về hàng của định thức thì nó cũng đúng khi thay hàng bằng cột

- Đổi chỗ 2 hàng hoặc 2 cột của định thức ta được định thức mới bằng định thức cũ đổi dấu

- Một định thức có 2 hàng (cột) như nhau thì bằng 0

- $\det(A) = (-1)^{i+1}.[a_{i1}\det(M_{i1}) - a_{i2}.\det(M_{i2}) + \dots \pm a_{in}\det(M_{in})]$

  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$: nằm ở hàng i

  $\det(A) = (-1)^{j+1}.[a_{1j}\det(M_{1j}) - a_{2j}\det(M_{2j}) + \dots \pm a_{nj}\det(M_{nj})]$

  $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$: nằm ở cột j

- Một định thức có một hàng, hoặc một cột toàn 0 thì bằng 0.

- Khi nhân 1 hàng hoặc 1 cột với số k thì định thức bằng định thức cũ x k.

- Khi các phần tử của 1 hàng (cột) có một thừa số chung, ta có thể đưa thừa số chung để ra ngoài dấu của định thức.
- Một định thức có 2 hàng (cột) tỉ lệ thì $= 0$
-
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}' + a_{12}'' \\ a_{21} & a_{22}' + a_{22}'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}' \\ a_{21} & a_{22}' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & + a_{12}'' \\ a_{21} & + a_{22}'' \end{vmatrix}$$
- Nếu 1 định thức có hàng (cột) là tổ hợp tuyến tính của các hàng (cột) khác thì định thức $= 0$
- Khi cộng bội k của 1 hàng (cột) vào 1 hàng (cột) khác thì định thức ko thay đổi.
- Định thức của ma trận tam giác là bằng tích các đường chéo.

MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

* Ma trận đơn vị

Ma trận
$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 1 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots \quad \cdots \\ 0 & 0 \cdots 1 \end{bmatrix}$$

trong đó các phần tử đường chéo $= 1$, các phần tử khác $= 0 \Rightarrow$ Ma trận đơn vị cấp n.

Đặc điểm: $AI = IA = A \;, \forall A \in M_n$

(M_n: là tập các ma trận cấp n)

* Ma trận khả đảo và ma trận nghịch đảo

Đn: Xét $A \in M_n$, nếu tồn tại $B \in M_n$ sao cho:
$$AB = BA = I$$
thì nói A khả đảo và B là ma trận nghịch đảo của A.

Khi A có nghịch đảo ta nói A không suy biến.

* Sự duy nhất của ma trận nghịch đảo

Đlí: Tồn tại duy nhất ma trận A^{-1} là ma trận nghịch đảo của A nếu A khả đảo.

Xét ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Gọi $D_{ij} = \det(M_{ij})$ là định thức con ứng với phần tử a_{ij}

và: $C_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ là phụ đại số của a_{ij}

$$\Rightarrow a_{k1} \cdot C_{i1} + a_{k2} \cdot C_{i2} + \dots + a_{kn} \cdot C_{in} = \begin{cases} \det(A) & \text{nếu } k = i \\ 0 & \text{nếu } k \neq i \end{cases}$$

$$a_{1k} C_{1j} + a_{2k} \cdot C_{2j} + \dots + a_{nk} \cdot C_{nj} = \begin{cases} \det(A) & \text{nếu } k = j \\ 0 & \text{nếu } k \neq j \end{cases}$$

- Nếu $\det(A) \neq 0$ thì ma trận A có nghịch đảo A^{-1} tính như sau:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot C^T = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

* Ma trận nghịch đảo và tích 2 ma trận

- Giả sử $A, B \in M_n$ là 2 ma trận khả đảo. Khi đó AB cũng khả đảo và: $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $A \in M_n$ khả đảo, A^{-1} là nghịch đảo của A:
  - +, A^{-1} cũng khả đảo và $(A^{-1})^{-1} = A$
  - +, A^m cũng khả đảo và:

$$(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m, \text{ m nguyên} > 0$$

  - +, $\forall k \neq 0$ ta có kA cũng khả đảo và

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}$$

- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

HẠNG CỦA MA TRẬN

Xét ma trận $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Gọi p là 1 số nguyên dương $\leq \min\{m, n\}$

* Đ/n: Ma trận vuông cấp p suy ra bằng cách bỏ m-p hàng và n-p cột gọi là ma trận con cấp p của A.

Định thức của nó gọi là định thức con cấp p của A.

* Đ/n: Hạng của ma trận A là cấp cao nhất của các định thức con khác 0 của A.

* Cách tính hạng ma trận bằng biến đổi sơ cấp về hàng

a, Ma trận bậc thang:

- Các hàng $\neq 0$ luôn ở trên các hàng $= 0$ tức là các hàng có ít nhất 1 phần tử $\neq 0$ ở trên hàng có tất cả các phần tử $= 0$
- Trên 2 hàng $\neq 0$ thì phần tử đầu tiên ở hàng dưới nằm ở bên phải cột chứa phần tử $\neq 0$ đầu tiên ở hàng trên.

b, Các phép biến đổi về hàng không làm thay đổi định thức con

$\Rightarrow$ Có thể áp dụng đưa về dạng bậc thang

$\rightarrow$ Hạng của ma trận là số hàng khác 0 của ma trận bậc thang.

KHÔNG GIAN VECTƠ - KHÔNG GIAN EUCLID

* Khái niệm không gian vectơ

Đ/n: Xét tập V khác rỗng mà mỗi phần tử ta quy ước gọi là 1 vectơ và trường số thực R. Giả sử trong V ta định nghĩa được 2 phép toán: phép cộng 2 vectơ và phép nhân vectơ với 1 số thực:

Nếu 10 y/cầu sau thoả mãn $\forall x, y, z \in V$ và $k, l \in \mathbb{R}$ thì V gọi là 1 không gian vectơ:

+) Nếu $x, y \in V$ thì $x + y \in V$

+) $x + y = y + x$, $\forall x, y \in V$

+) $x + (y + z) = (x + y) + z$, $\forall x, y, z \in V$

+) Tồn tại phần tử $\theta \in V$ sao cho:

$$\theta + x = x + \theta = x \quad \forall x \in V$$

θ: phần tử trung hoà của phép + (hay của V)

+) $\forall x \in V$, tồn tại vectơ $-x \in V$ sao cho:

$$x + (-x) = (-x) + x = \theta$$

$-x$: phần tử đối xứng của x

+) Nếu $k \in \mathbb{R}$, $x \in V$ thì $kx \in V$

+) $k(x + y) = kx + ky$

+) $(k + l)x = kx + lx$

+) $k.(lx) = (kl)x$

+) $1.x = x$

* Tính chất:

+) Phần tử trung hoà θ là duy nhất

+) Phần tử đối xứng của bất kì $x \in V$ cũng là duy nhất

+) $\forall x \in V$ ta có: $0x = \theta$

+) $\forall x \in V$ ta có: $-x = (-1).x$

+) $\forall k \in \mathbb{R}$ ta có: $k\theta = \theta$

+) Với $x \in V$, $k \in \mathbb{R}$. Ta có:

$$kx = \theta \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ x = \theta \end{array}\right.$$

* Định nghĩa không gian con:

V là một không gian vectơ với 2 phép tính: cộng 2 vectơ, nhân vectơ với 1 số. W là 1 tập con của V. Nếu với 2 phép tính trên, W cũng là 1 không gian vectơ thì W được gọi là 1 không gian con của V.

* Điều kiện để $W \subset V$ là 1 không gian con

V là 1 không gian vectơ, $W \subset V$, $W \neq \emptyset$. Muốn cho W là không gian con của V, điều kiện cần và đủ là thoả mãn 2 tc:

+, Nếu $u, v \in W$ thì $u + v \in W$

+, Nếu $k \in \mathbb{R}$, $u \in W$ thì $k.u \in W$

* Tổ hợp tuyến tính của một họ vectơ

V là một không gian vectơ, S là 1 họ vectơ của V

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Biểu thức: $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

$$c_i = const \in \mathbb{R}$$

là 1 vectơ $\in V$ và được gọi là 1 tổ hợp tuyến tính của các vectơ của họ S, hay còn gọi là tổ hợp tuyến tính của họ S.

* Không gian con sinh bởi một họ vectơ:

V là một không gian vectơ

$S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ là một họ vectơ của V. Ta gọi tập tất cả những tổ hợp tuyến tính của các vectơ của S là bao tuyến tính của S, kí hiệu là span(S)

W = span(S) là một không gian con của V

* Hệ sinh của không gian vectơ

V là một không gian vectơ, $S = \{x_1, \dots, x_n\} \subset V$.

Nếu span(S) = V, tức là $\forall x \in V$ đều có biểu diễn:

$$x = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Thì nói họ S sinh ra V hay họ S là 1 hệ sinh của V.

HỌ VECTƠ ĐLTT và PTTT

* Khái niệm ĐLTT và PTTT

V là một không gian vectơ, $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset V$

Xét đk: $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \theta$ (1)

+, Nếu đk (1) xảy ra $\Leftrightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ thì họ S ĐLTT

+) Nếu ∃ các số thực $c_1, \dots, c_n$ không đồng thời bằng 0 thoả mãn đk (1) thì họ S PTTT.

- Mọi họ vectơ có chứa vectơ không là PTTT

- Giả sử họ S PTTT và thoả mãn đk (1):

$$c_1 x_1 + \dots + c_k x_k + \dots + c_n x_n = \theta$$

$$\Rightarrow x_k = -(c_1 x_1 + \dots + c_{k-1} x_{k-1} + \dots + c_n x_n) / c_k$$

Vậy nếu họ S PTTT thì trong họ S có ít nhất 1 vectơ biểu diễn được thành một tổ hợp TT của các vectơ còn lại.

KHÔNG GIAN HỮU HẠN CHIỀU VÀ CƠ SỞ CỦA NÓ

* Khái niệm về không gian n chiều

Không gian vectơ V được gọi là không gian n chiều $(n \geq 1)$ nếu trong V tồn tại n vectơ ĐLTT và không tồn tại quá n vectơ ĐLTT

Ta nói số chiều của không gian V là n, kí hiệu dim (V)

* Cơ sở của không gian n chiều

Trong không gian n chiều V, mọi họ gồm n vectơ ĐLTT gọi là 1 cơ sở của V

* Những tính chất về cơ sở và số chiều

- Giả sử V là 1 không gian vectơ, $T = \{y_1, \dots, y_n\}$ là 1 họ n vectơ ĐLTT của V, $S = \{x_1, \dots x_m\}$ 1 họ m vectơ của V sinh ra V $\Rightarrow n \leq m$

- Giả sử V là một không gian vectơ, $S = \{f_1, \dots f_k\}$ là 1 họ gồm k vectơ $\in V$:

+) Nếu S sinh ra V ~~mà~~ ĐLTT thì V là không gian k chiều và S là 1 cơ sở của V

- Trong $\mathbb{R}^n$ xét họ vectơ:

$$B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

$$e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \dots, 0)$$

Họ B sinh ra $\mathbb{R}^n$ vì $\forall x \in \mathbb{R}^n$ có thể viết:

$$x = x_1 . e_1 + \dots + x_n . e_n$$

Họ B ĐLTT vì: $c_1 e_1 + \dots + c_n e_n = (0, 0, \dots, 0)$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

Vậy $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ và B là 1 cơ sở

$\Rightarrow$ Cơ sở này gọi là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$.

- Nếu V là không gian n chiều và S là 1 cơ sở thì $\forall x \in V$ có biểu diễn duy nhất: $(S = \{f_1, \dots, f_n\})$

$$x = c_1 f_1 + \dots + c_n f_n \quad (2)$$

- $\forall x \in V$ có biểu diễn duy nhất (2) thì V là không gian n chiều và S là 1 cơ sở

TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ KHÔNG GIAN CÓ TÍCH VÔ HƯỚNG

V là 1 không gian vectơ, u và v là 2 vectơ của V. Tích vô hướng của u và v là 1 số thực, kí hiệu là $\langle u, v \rangle$, thỏa mãn:

- $\langle u, v \rangle$ xác định $\forall u, v \in V$
- $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
- $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
- $\langle ku, v \rangle = k \langle u, v \rangle$
- $\langle u, u \rangle \geq 0$; $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \theta$

Không gian V có trang bị 1 tích vô hướng gọi là không gian có tích vô hướng. Không gian n chiều có tích vô hướng gọi là không gian Euclid.

*** Độ dài của vectơ**

V là không gian có TVH và $u \in V$ thì số (k° âm) $\|u\|$ xác định:

$$\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$$

Gọi là độ dài vectơ u

*** BĐT Cauchy - Schwarz (C-S)**

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| . \|v\|$$

* Tính chất của độ dài:

- $\|u\| \geq 0$
- $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \theta$
- $\|ku\| = |k| . \|u\|$
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

* Khái niệm khoảng cách

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

- $d(u,v) \geq 0$
- $d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
- $d(u,v) = d(v,u)$
- $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$

* Sự vuông góc của 2 vectơ

- Trong 1 không gian có tích vô hướng, 2 vectơ u và v gọi là trực giao nếu $\langle u,v \rangle = 0$
- Nếu u trực giao ∀ vectơ của 1 họ W thì nói u trực giao với W.

* Họ vectơ trực giao:

- Một họ vectơ trong không gian có tích vô hướng gọi là 1 họ trực giao nếu bất kì 2 vectơ ≠ nhau nào của họ cũng trực giao.
- Một họ vectơ trực giao trong đó mọi vectơ đều có chuẩn là 1 gọi là họ trực chuẩn.
- Nếu v là 1 vectơ ≠ θ trong không gian có TVH:

$$\frac{1}{\|v\|} . v \text{ có chuẩn là } 1$$

* Quá trình trực giao hóa của Gram-Smidt

V là không gian có TVH, $S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ là 1 họ vectơ ĐLTT của V.
Ta có thể thay S bằng họ trực chuẩn

$$S' = \{v_1, v_2, \dots v_m\}$$

sao cho khi kí hiệu $S_k = \{u_1, \dots, u_k\}$, $S'_k = \{v_1, \dots, v_k\}$ thì

$\text{span } S_k = \text{Span } S'_k ;\ k = 1, 2, \ldots, m$

* Tính ĐLTT của 1 họ vectơ trực giao

Nếu $S = \{v_1, v_2, \ldots v_m\}$ là 1 họ trực giao các vectơ $\neq \theta$ trong 1 không gian có TVH thì S là ĐLTT.

Trong 1 không gian Euclid n chiều, mọi họ $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ gồm n vectơ $\neq \theta$ mà trực giao đều là 1 cơ sở của không gian đó.

- Cơ sở trên gọi là cơ sở trực giao, nếu đồng thời $\forall j$ mà $\|v_j\| = 1 \Rightarrow$ cơ sở trực chuẩn.

* Sự tồn tại cơ sở trực chuẩn trong KG Euclid n chiều.

- Trong mọi không gian Euclid n chiều khác $\{\theta\}$ đều $\exists$ ít nhất 1 cơ sở trực chuẩn

- Nếu $S' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là 1 cơ sở trực chuẩn của 1 KG Euclid n chiều thì $\forall u \in V$ ta có:

$$u = \langle u, v_1 \rangle . v_1 + \langle u, v_2 \rangle . v_2 + \ldots + \langle u, v_n \rangle . v_n$$

* Hình chiếu của vectơ lên 1 không gian con.

Giả sử V là 1 KG có tích vô hướng, $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ là 1 họ trực chuẩn các vectơ trong V, W là không gian con sinh bởi S

Xét u là 1 vectơ bất kì của V

Ta đặt: $w_1 = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \ldots + \langle u, v_m \rangle . v_m$

$$w_2 = u - w_1$$

Ta có $u = w_1 + w_2$

Trong đó:

(+) $w_1 \in W = \text{span}(S)$

(+) w_2 trực giao với W

$w_1 = hch_W u \rightarrow w_1$ là hình chiếu của u lên W

$w_2 = u - hch_W u$ là thành phần của u trực giao với W

* Tọa độ trong không gian n chiều

TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN n CHIỀU

Giả sử $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ là 1 cơ sở của không gian n chiều V

Mọi $v \in V$ có biểu diễn duy nhất

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n \ , c_i \in \mathbb{R}$$

Các số $c_1, c_2, \dots, c_n$ là toạ độ của v đối với cơ sở S

Vectơ

$$(v)_S = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

là 1 vectơ trong $\mathbb{R}^n$ gọi là vectơ toạ độ của v đối với cơ sở S.

$$[v]_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

là 1 ma trận cỡ $n \times 1$: ma trận toạ độ của v đối với cơ sở S

* Toạ độ trong KG Euclid

Nếu $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ là 1 cơ sở trực chuẩn trong KG Euclid n chiều

Vectơ $u \in V$ đối với cơ sở S:

$$u = \langle u, v_1 \rangle . v_1 + \langle u, v_2 \rangle . v_2 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n$$

Vậy $(u)_S = (\langle u, v_1 \rangle ; \langle u, v_2 \rangle ; \dots ; \langle u, v_n \rangle)$

* Biểu thức TVH trong CS trực chuẩn của KG Euclid

$S = \{e_1, \dots, e_n\}$ là 1 CS trực chuẩn trong KG Euclid

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$x, y \in e$: $x = (x_1, \dots, x_n)$

$y = (y_1, \dots, y_n)$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Date

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$$

BÀI TOÁN ĐỔI CƠ SỞ

KG vectơ n chiều, giả sử có 2 CS:

$B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ $\quad B' = (e_1', e_2', \dots, e_n')$

B: cơ sở cũ

B': cơ sở mới

Xét ve V: $\begin{cases} v = v_1e_1 + v_2e_2 + \dots + v_ne_n \\ v = v_1'e_1' + v_2'e_2' + \dots + v_n'e_n' \end{cases}$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \qquad [v]_{B'} = \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ \vdots \\ v_n' \end{bmatrix}$$

* Ma trận chuyển

Ma trận P thoả mãn

$$[v]_B = P\,[v]_{B'}$$

Là ma trận chuyển cơ sở từ $B \to B'$

Để có P, trước hết viết các biểu diễn e_i' trong cơ sở B:

$$e_1' = p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \dots + p_{n1}e_n$$

$$e_2' = p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \dots + p_{n2}e_n$$

$$\dots\dots$$

$$e_n' = p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \dots + p_{nn}e_n$$

=>

$$[e_1']_B = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{bmatrix} \quad [e_2']_B = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{n2} \end{bmatrix} \quad \dots \quad [e_n']_B = \begin{bmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{bmatrix}$$

$$v = v_1'e_1' + v_2'.e_2' + \dots + v_n'.e_n'$$

$$= (p_{11}v_1' + p_{12}v_2' + \dots + p_{1n}v_n')e_1 +$$

$$\dots$$

$$+ (p_{n1}v_1' + p_{n2}v_2' + \dots + p_{nn}v_n')e_n$$

$\Rightarrow v_1 = p_{11} v_1' + p_{12} v_2' + \ldots + p_{1n} v_n'$

...

$v_n = p_{n1} v_1' + p_{n2} v_2' + \ldots + p_{nn} v_n'$

Đặt $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$

- P là ma trận chuyển cơ sở:

(+) P khả đảo ($\det(P) \neq 0$)

(+) P^{-1} ma trận chuyển CS $B' \to B$

- Nếu P là 1 ma trận chuyển CS trực chuẩn này → CS trực chuẩn khác trong KGT Euclid n chiều thì P là ma trận trực giao, trực giao theo nghĩa

$P^T \cdot P = I$

$\Rightarrow P^{-1} = P^T$

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

* Định nghĩa

Ánh xạ $T: V \to W$ từ không gian vectơ $V \to$ không gian vectơ W gọi là AXTT nếu có 2 t/c:

(+) $T(u+v) = T(u) + T(v)$, $\forall u, v \in V$

(+) $T(ku) = k.T(u)$ $\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall u \in V$

Nếu $W \equiv V$ thì AXTT: $T: V \to V$ toán tử tuyến tính.

- Ánh xạ $T: V \to W$ xác định bởi $T(v) = \theta$, $\forall v \in V$ đc gọi là ánh xạ không.
- Ánh xạ $T: V \to V$ xác định bởi $T(v) = v$, $\forall v \in V$ đc gọi là ánh xạ đồng nhất.

* Các phép toán về AXTT:

Giả sử V, W là 2 KG vectơ

$f: V \to W$; $g: V \to W$

là 2 AXTT từ $V \to W$

(+) Tổng f+g của 2 AXTT:

$\forall u \in V, (f+g)(u) = f(u) + g(u) \in W$

$\forall u \in V, (kf)(u) = k.f(u) \in W.$

Giả sử V, W, U là 3 KGVT và:

$f: V \to W$; $g: W \to U$ là 2 AXTT

Khi đó ánh xạ hợp $g \circ f$ ($g \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hợp}}}{\circ} f$) x/định bởi $\forall x \in V, (g \circ f)(v) = g(f(v))$

$\in U$ là 1AXTT từ $V \to U$

* Sự đẳng cấu của KG n chiều với $\mathbb{R}^n$

2 KGVT V và V' gọi là đẳng cấu nếu giữa các VT $x \in V$ và $x' \in V'$ có một tương ứng 1-1

$x \leftrightarrow x'$

sao cho, nếu $x \leftrightarrow x'$ và $y \leftrightarrow y'$ thì

$x+y \leftrightarrow x'+y'$

$kx \leftrightarrow kx'$, $k \in \mathbb{R}$

- Mọi KG n chiều V đều đẳng cấu với $\mathbb{R}^n$

TÍNH CHẤT CỦA AXTT, HẠT NHÂN VÀ ẢNH

* Tính chất 1

$T: V \to W$ là 1AXTT thì:

(+) $T(\theta) = \theta$

(+) $T(-v) = -T(v), \forall v \in V$

(+) $T(v-w) = T(v) - T(w), \forall v, w \in V$

* K/n hạt nhân và ảnh của AXTT

$T: V \to W$ là 1AXTT

- Tập tất cả các phần tử của V có ảnh là $\theta \in W$ gọi là hạt nhân của T

$Ker(T) = \{x \mid x \in V, T(x) = \theta\}$

- Tập tất cả các phần tử của W là ảnh của ít nhất 1 phần tử của V gọi là ảnh của T,

$$Im(T) = \{y \mid y \in W, \exists x \in V, T(x) = y\}$$

$$Im(T) = T(V)$$

* Tính chất của nhân và ảnh

$T: V \to W$

(+) $Ker(T)$ là 1 KG con của V

(+) $Im(T)$ là 1 KG con của W

* Hạng của AXTT

$T: V \to W$ là 1 AXTT

Số chiều của $Im(T)$ gọi là hạng của T, kí hiệu $rank(T)$

$$rank(T) = \dim(Im(T))$$

$\dim(Im(T)) + \dim(Ker(T)) = n$

$\Leftrightarrow rank(T) + \dim(Ker(T)) = n$

MA TRẬN CỦA AXTT

V: KG n chiều, B là 1 cơ sở, $B = \{u_1, u_2, \dots u_n\}$

W: KG m chiều, B' là 1 cơ sở, $B' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$

AXTT: $T: V \to W$. Khi đó:

$$x \in V \mapsto T(x) \in W$$

$$x = x_1u_1 + \dots + x_nu_n \to (x)_B = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$T(x) = y_1v_1 + \dots + y_mv_m \to (T(x))_{B'} = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$$

Tìm ma trận $A \in M_{m \times n}$:

$$A.[x]_B = [T(x)]_{B'} \quad \forall x \in V \quad (1)$$

* Đn: Ma trận $A_{m \times n}$ thỏa mãn (1) nếu có được gọi là ma trận của AXTT $T: V \to W$ đối với CS B trong V và CS B' trong W

- Cho axtt $T: V \to W$

V: KG n chiều

W: KG m chiều

Ma trận của nó đối vs CS B trong V với B' trog W là:

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix}$$

*

$V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

B và B' là CS chính tắc

$B = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $B' = \{f_1, \ldots, f_m\}$

$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ hàng i $\qquad f_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ hàng j

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x]_B \qquad T(x) = \begin{bmatrix} (T(x))_1 \\ \vdots \\ (T(x))_m \end{bmatrix} = [T(x)]_{B'}$

Ma trận A tương ứng có dạng

$$A = [T(e_1) \ldots T(e_n)]$$

SỰ ĐỒNG DẠNG

* Ma trận đồng dạng

A, B là 2 ma trận vuông cùng cấp.

B đồng dạng với A nếu tồn tại ma trận không suy biến P cấp n: $(B \backsim A)$

$B = P^{-1} A . P$

$\Leftrightarrow A = P . B . P^{-1} = (P^{-1})^{-1} . B . P^{-1}$

Đặt $P^{-1} = Q \Rightarrow A = Q^{-1} . B . Q$, Q ko suy biến

- Giả sử $T: V \to V$ là 1 toán tử tuyến tính trong KG n chiều V. A là ma trận của T đối vs CS B, A' là của T đối vs B'.

$$A' = P^{-1}.A.P$$

P: ma trận chuyển từ CS: $B \to B'$

TRỊ RIÊNG VÀ VECTƠ RIÊNG

* K/n trị riêng và vecto riêng

A là ma trận vuông cấp n. λ là trị riêng của A nếu:

$$Ax = \lambda x$$

có nghiệm $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$

Veto $x \neq \theta$ đc gọi là vecto riêng ứng với trị riêng λ

- Nếu x là vetơ riêng của A ứng với trị riêng λ thì cx ($c \in \mathbb{R}, c \neq 0$) cũng là vec tơ riêng của A ứng với trị riêng λ

$$A(cx) = c.Ax = c\lambda x = \lambda.(cx)$$

Vecto riêng có độ dài $= 1 \to$ vecto riêng đã chuẩn hoá

* Phương trình đặc trưng

Để tìm trị riêng của ma trận cấp n: $Ax = \lambda x \to Ax = \lambda I x$

$$\to (A - \lambda I)x = 0$$

Đây là hpt tuyến tính thuần nhất.

Điều kiện $x \neq \theta \Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$ (HPT có n_0 không tầm thường)

(+) Phương trình đặc trưng của ma trận vuông A: $\det(A - \lambda I) = 0$

(+) Đa thức đặc trưng: $\det(A - \lambda I)$

* Trị riêng của ma trận đồng dạng

→ 2 ma trận đồng dạng có cùng 1 đa thức đặc trưng, nghĩa là có các trị riêng như nhau.

C/m: Giả sử $B \backsim A \Rightarrow$ Tồn tại P ($\det(P) \neq 0$) để $B = P^{-1}.A.P$

Xét $\det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}.AP - \lambda P^{-1}.I.P)$

$$= \det(P^{-1}.(A - \lambda I).P)$$

$= \det(A-\lambda I) \cdot \det(P^{-1}) \cdot \det(P)$

$= \det(A-\lambda I) \cdot \det(P^{-1} \cdot P)$

$= \det(A-\lambda I) \cdot \det(I)$

$= \det(A-\lambda I)$

* Tìm vectơ riêng của ma trận

Vectơ riêng x là nghiệm $\neq \theta$ của pt: $(A-\lambda I)x = 0$ (1)

- Ta gọi không gian nghiệm của (1) là KG riêng của A cùng trị riêng λ

* Trị riêng của ma trận đối xứng

- Ma trận vuông đối xứng: $A^T = A$

Ma trận đối xứng A chỉ có trị riêng thực

Nếu ma trận A cấp n đối xứng ⇒ có n trị riêng thực, n vectơ riêng trực chuẩn

TRỊ RIÊNG VÀ VECTƠ RIÊNG CỦA TTTT TRONG KG HỮU HẠN CHIỀU

* Đ/n:

Giả sử V: KGVT

λ là trị riêng của TTTT $T: V \to V$ nếu tồn tại vectơ $x \neq \theta$ sao cho:

$T(x) = \lambda . x$

* Cách giải trong KG hữu hạn chiều

Giả sử T là TTTT trong KG hữu hạn chiều V, A là ma trận của T đối với cơ sở B. Vậy thì:

(+) Trị riêng của T là trị riêng của A

(+) Vectơ $(x)_{[B]}$ là vectơ riêng của A ứng với trị riêng λ

VẤN ĐỀ CHÉO HOÁ MA TRẬN

* Ma trận chéo hoá được

Cho ma trận vuông A. Nếu tồn tại ma trận khả đảo P sao cho

$P^{-1}.A.P$ là ma trận chéo thì ma trận A chéo hoá được

* Giải bài toán chéo hoá ma trận

- A là ma trận cấp n. ĐK cần và đủ để A chéo hoá được là nó có n vectơ riêng độc lập tuyến tính.

* Quy trình chéo hoá 1 ma trận

B_1: Tìm n vectơ riêng ĐLTT của A:

$p_1, p_2, \dots, p_n$

B_2: Lập ma trận P có $p_1, \dots, p_n$ là các cột

B_3: Ma trận $P^{-1}.A.P$ sẽ là ma trận chéo với $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ là các phần tử chéo liên tiếp, trong đó λ_i là trị riêng tương ứng với p_i.

- Nếu $A_{n\times n}$ có n trị riêng ≠ nhau ⇒ A chéo hoá được

VẤN ĐỀ CHÉO HOÁ TRỰC GIAO

* K/n: Cho ma trận $A_{n\times n}$. Nếu tồn tại ma trận trực giao P sao cho $P^{-1}.A.P$ là ma trận chéo thì nói A chéo hoá trực giao được

* Giải bài toán chéo hoá trực giao

$A_{n\times n}$. A chéo hoá trực giao được ⇔ A có n vectơ riêng trực chuẩn (1)

* Chéo hoá trực giao ma trận đối xứng

$A_{n\times n}$. A chéo hoá trực giao đc ⇔ A là đối xứng (2)

2 đk (1) và (2) là tương đương

* T/chất:

- Nếu $A_{n\times n}$ đối xứng thì các vectơ riêng ∈ những KG riêng ≠ nhau sẽ trực giao theo TVH Euclid trong $\mathbb{R}^n$

- Nếu $A_{n\times n}$ đối xứng thì số bội hình học của mỗi trị riêng = số bội đại số của nó

⇔ nếu trị riêng λ là nghiệm của m pt đặc trưng của A thì ứng với λ có đủ m vectơ riêng ĐLTT.

⇔ Không gian riêng ứng λ có số chiều = m

* Quy trình chéo hoá trực giao ma trận đối xứng

B_1: Tìm 1 cơ sở cho mỗi KG riêng của $A_{n\times n}$ (đ xứng)

B_2: Áp dụng trực giao hoá Gram-Smidt vào mỗi cơ sở $\Rightarrow$ cơ sở trực chuẩn cho mỗi KG riêng.

B_3: Lập ma trận P: các cột các vectơ cơ sở x/dựng ở B_2. Ma trận P sẽ làm chéo hoá trực giao ma trận A.

TRỰC GIAO HOÁ GRAM-SMIDT

V: KG có TVH

$S = \{u_1, \dots, u_m\}$ họ VT ĐLTT

Tìm $S' = \{v_1, v_2, \dots v_m\}$.

B_1: Đặt $v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$

Như vậy $\|v_1\| = 1$, $\operatorname{span} S_1 = \operatorname{span} S_1'$

B_2: Tìm v_2 sao cho $\{v_1, v_2\}$ trực chuẩn.

Đặt $\overline{v_2} = u_2 + t v_1$

Chọn t để: $\langle \overline{v_2}, v_1 \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \langle u_2, v_1 \rangle + t \langle v_1, v_1 \rangle = 0$

$\Rightarrow t = \dfrac{-\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} = -\langle u_2, v_1 \rangle$

$\Rightarrow \overline{v_2} = u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle \cdot v_1$

Đặt $v_2 = \dfrac{u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1}{\|u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1\|}$

B_3: Giả sử x/dựng đc họ trực chuẩn $S'_{k-1} = \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$

mà $\operatorname{Span} S_l = \operatorname{span} S_l'$ $\quad 1 \le l \le k-1$

Xây dựng tiếp v_k để

$S'_k = \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k\}$ trực chuẩn và span S_k = span S'_k

Đặt $\overline{v_k} = u_k + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_{k-1} v_{k-1}$

Và chọn các t_j, $j = 1, \dots, k-1$ sao cho

$$\langle \overline{v_k}, v_j \rangle = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k-1$$

Điều kiện này viết:

$$\langle u_k, v_j \rangle + \langle t_j v_j, v_j \rangle = 0$$

$$j = 1, \dots, k-1$$

$$\Rightarrow \overline{v_k} = u_k - \langle u_k, v_1 \rangle . v_1 - \dots - \langle u_k, v_{k-1} \rangle . v_{k-1}$$

Đặt $$v_k = \frac{1}{\|\overline{v_k}\|} \overline{v_k} = \frac{u_k - \langle u_k, v_1 \rangle v_1 - \dots - \langle u_k, v_{k-1} \rangle . v_{k-1}}{\| u_k - \langle u_k, v_1 \rangle . v_1 - \dots - \langle u_k, v_{k-1} \rangle . v_{k-1} \|}$$

Tiếp tục tới khi $k = m$

Thu được họ $S' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ gồm m vectơ trực chuẩn.