Đề toán 2021

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**
**HÀ NỘI**

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

*(Đề thi gồm 1 trang)*

**KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT**
**NĂM HỌC 2021 – 2022**

Môn thi: **TOÁN**
Ngày thi: 13/6/2021
Thời gian làm bài: 90 phút

**Bài I** *(2,0 điểm)*

Cho hai biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \dfrac{3x+9}{x-9}$ với $x \geq 0$, $x \neq 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức $A$ khi $x = 16$.

2) Chứng minh $A + B = \dfrac{3}{\sqrt{x}+3}$.

**Bài II** *(2,5 điểm)*

1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Một tổ sản xuất phải làm xong $4800$ bộ đồ bảo hộ y tế trong một số ngày quy định. Thực tế, mỗi ngày tổ đó đã làm được nhiều hơn $100$ bộ đồ bảo hộ y tế so với số bộ đồ bảo hộ y tế phải làm trong một ngày theo kế hoạch. Vì thế $8$ ngày trước khi hết thời hạn, tổ sản xuất đã làm xong $4800$ bộ đồ bảo hộ y tế đó. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày tổ sản xuất phải làm bao nhiêu bộ đồ bảo hộ y tế? (Giả định rằng số bộ đồ bảo hộ y tế mà tổ đó làm xong trong mỗi ngày là bằng nhau.)

2) Một thùng nước có dạng hình trụ với chiều cao $1{,}6m$ và bán kính đáy $0{,}5m$. Người ta sơn toàn bộ phía ngoài mặt xung quanh của thùng nước này (trừ hai mặt đáy). Tính diện tích bề mặt được sơn của thùng nước (lấy $\pi \approx 3{,}14$).

**Bài III** *(2,0 điểm)*

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{3}{x+1} - 2y = -1 \\ \dfrac{5}{x+1} + 3y = 11 \end{cases}$.

2) Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + m - 2$. Tìm tất cả giá trị của $m$ để $(d)$ cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2$ sao cho $\left|x_1 - x_2\right| = 2$.

**Bài IV** *(3,0 điểm)*

Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$. Vẽ đường tròn tâm $C$, bán kính $CA$. Từ điểm $B$ kẻ tiếp tuyến $BM$ với đường tròn $(C; CA)$ ($M$ là tiếp điểm, $M$ và $A$ nằm khác phía đối với đường thẳng $BC$).

1) Chứng minh bốn điểm $A, C, M$ và $B$ cùng thuộc một đường tròn.

2) Lấy điểm $N$ thuộc đoạn thẳng $AB$ ($N$ khác $A$, $N$ khác $B$). Lấy điểm $P$ thuộc tia đối của tia $MB$ sao cho $MP = AN$. Chứng minh tam giác $CPN$ là tam giác cân và đường thẳng $AM$ đi qua trung điểm của đoạn thẳng $NP$.

**Bài V** *(0,5 điểm)*

Với các số thực $a$ và $b$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3(a+b) + ab$.

………………… Hết …………………

Lời giải đề toán 2021

**Bài 1** (2.0 *điểm*). Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{x-9}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 9$.

**a)** Tính giá trị của biểu thức $A$ khi $x = 16$.

**b)** Chứng minh rằng $A + B = \frac{3}{\sqrt{x}+3}$.

**Lời giải.** **a)** Rõ ràng $x = 16$ thỏa mãn điều kiện đề bài. Do đó, với $x = 16$, ta có

$$A = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{16}+3} = \frac{4}{7}.$$

**b)** Với $x \geq 0$ và $x \neq 9$, ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)} = \frac{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right) - 3x - 9}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)} \\ &= \frac{-x + 6\sqrt{x} - 9}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)} = \frac{-\left(\sqrt{x}-3\right)^2}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)} = \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$A + B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = \frac{3}{\sqrt{x}+3}.$$

□

**Bài 2** (2.5 *điểm*).

**a)** Một tổ sản xuất phải làm xong 4800 bộ đồ bảo hộ y tế trong một số ngày quy định. Thực tế, một ngày tổ đó đã làm được nhiều hơn 100 bộ đồ bảo hộ y tế so với số bộ đồ bảo hộ y tế phải làm trong một ngày theo kế hoạch. Vì thế, 8 ngày trước khi hết thời hạn, tổ đã làm xong 4800 bộ đồ bảo hộ y tế. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày tổ sản xuất phải làm bao nhiêu bộ đồ bảo hộ y tế? (Giả định rằng số bộ đồ bảo hộ y tế mà tổ đó làm xong trong mỗi ngày là bằng nhau.)

**b)** Một thùng nước có dạng hình trụ với chiều cao $1,6\,\mathrm{m}$ và bán kính đáy $0,5\,\mathrm{m}$. Người ta sơn toàn bộ phía ngoài mặt xung quanh của thùng nước (trừ hai mặt đáy). Tính diện tích bề mặt được sơn của thùng nước (lấy $\pi = 3,14$).

**Lời giải.** **a)** Gọi $x$ là số bộ độ bảo hộ ý tế mà mỗi ngày tổ sản xuất phải làm theo kế hoạch ($x \in \mathbb{N}^*$). Khi đó, theo kế hoạch, thời gian để tổ sản xuất làm xong 4800 bộ đồ bảo hộ y tế là $\frac{4800}{x}$ (ngày). Thực tế, mỗi ngày tổ sản xuất làm được nhiều hơn 100 bộ đồ bảo hộ y tế so với kế hoạch nên mỗi ngày tổ sản xuất làm được $x + 100$ bộ đồ bảo hộ. Và như thế, thời gian thực tế để tổ sản xuất làm được 4800 bộ độ bảo hộ y tế là $\frac{4800}{x+100}$ (ngày).

Vì tổ sản xuất làm xong 4800 bộ đồ bảo hộ y tế trước sớm hơn so với kế hoạch 8 ngày nên ta có

$$\frac{4800}{x} - \frac{4800}{x+100} = 8 \Leftrightarrow x^2 + 100x - 60000 = 0 \Leftrightarrow (x+300)(x-200) = 0.$$

Vì $x$ là số nguyên dương nên ta có $x = 200$. Vậy, theo kế hoạch, tổ sản xuất cần làm được 200 bộ đồ bảo hộ y tế mỗi ngày.

**b)** Ta có công thức diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{\text{xq}} = 2\pi Rh$, trong đó $R$ là bán kính đáy và $h$ là chiều cao của hình trụ. Trong bài này, thùng nước có dạng hình trụ với $R = 0,5$ (m) và $h = 1,6$ (m). Do đó, diện tích xung quanh của thùng nước là

$$S_{\text{xq}} = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,5 \cdot 1,6 = 5,024\,(\text{m}^2).$$

Vậy, diện tích bề mặt được sơn của thùng nước là $5,024\,\text{m}^2$. □

**Bài 3** (2.0 *điểm*).

**a)** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x+1} - 2y = -1, \\ \dfrac{5}{x+1} + 3y = 11. \end{cases}$$

**b)** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho parabol $(\mathcal{P}): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + m - 2$. Tìm tất cả các giá trị của số thực $m$ để đường thẳng $(d)$ cắt parabol $(\mathcal{P})$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1$, $x_2$ sao cho $|x_1 - x_2| = 2$.

**Lời giải.** **a)** Điều kiện: $x \neq -1$. Từ hệ phương trình, ta có

$$3\left(\frac{3}{x+1} - 2y\right) + 2\left(\frac{5}{x+1} + 3y\right) = 19,$$

hay

$$\frac{19}{x+1} = 19.$$

Từ đây, ta có $x = 0$ (thỏa mãn). Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được $y = 2$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x,\ y) = (0,\ 2)$.

**b)** Xét phương trình hoành độ giao điểm của $(\mathcal{P})$ và $(d)$:

$$x^2 = 2x + m - 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m + 2 = 0. \tag{1}$$

Để $(\mathcal{P})$ cắt $(d)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1$, $x_2$ thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$, tức $\Delta' > 0$. Điều này tương đương với $1 - (-m+2) > 0$, hay $m > 1$.

Lúc này, theo định lý Vieta, ta có $x_1 + x_2 = 2$ và $x_1x_2 = -m + 2$. Do đó

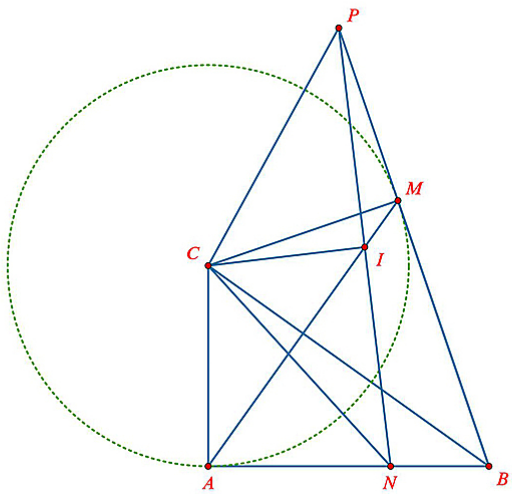
$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4 - 4(-m+2) = 4(m-1).$$

Suy ra, để $|x_1 - x_2| = 2$ thì ta phải có $4(m-1) = 4$, tức $m = 2$ (thỏa mãn $m > 1$). Vậy, có duy nhất một giá trị $m$ thỏa mãn yêu cầu đề bài là $m = 2$. □

**Bài 4** (3.0 *điểm*). Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$. Vẽ đường tròn tâm $C$, bán kính $CA$. Từ điểm $K$, kẻ tiếp tuyến $BM$ với đường tròn $(C, CA)$ ($M$ là tiếp điểm, $M$ và $A$ nằm khác phía đối với đường thẳng $BC$).

**a)** Chứng minh rằng bốn điểm $A$, $C$, $M$ và $B$ cùng thuộc một đường tròn.

**b)** Lấy điểm $N$ thuộc đoạn thẳng $AB$ ($N$ khác $A$ và $B$). Lấy điểm $P$ thuộc tia đối của tia $MB$ sao cho $MP = AN$. Chứng minh rằng tam giác $CPN$ là tam giác cân và đường thẳng $AM$ đi qua trung điểm của đoạn thẳng $NP$.



**Lời giải.** **a)** Vì $\angle BAC = 90°$ nên điểm $A$ thuộc đường tròn đường kính $BC$. Lại có $\angle BMC = 90°$ (do $BM$ là tiếp tuyến của đường tròn $(C)$) nên $M$ thuộc đường tròn đường kính $BC$. Từ đây, ta suy ra bốn điểm $A$, $C$, $M$, $B$ cùng thuộc đường tròn đường kính $BC$.

**b)** Do $\angle BAC = 90°$ và $N \in AB$ nên $\angle NAC = 90°$. Tương tự, ta có $\angle BMC = 90°$ và $\angle BMC + \angle CMP = 90°$ nên $\angle CMP = 90°$.

Xét hai tam giác $NAC$ và $PMC$, ta có $\angle NAC = \angle PMC = 90°$, $MC = AC$ (đều là bán kính của đường tròn $(C)$) và $AN = MP$ (giả thiết) nên hai tam giác này bằng nhau (c-g-c). Từ đó $CN = CP$ (hai cạnh tương ứng). Kết quả này chứng tỏ tam giác $CPN$ cân tại đỉnh $C$.

Bây giờ, gọi $I$ là trung điểm của đoạn $NP$. Khi đó, ta có $\angle CIP = \angle CIN = 90°$ (tính chất tam giác cân). Vì $\angle CIP = \angle CMP = 90°$ nên bốn điểm $C$, $I$, $M$, $P$ cùng thuộc đường tròn đường kính $CP$. Từ đó $\angle MIP = \angle MCP$. (1)

Hoàn toàn tương tự, ta có bốn điểm $N$, $A$, $C$, $I$ cùng thuộc một đường tròn nên

$$\angle NCA = \angle NIA. \tag{2}$$

Mặt khác, do hai tam giác $PMC$ và $NAC$ bằng nhau (chứng minh trên) nên

$$\angle MCP = \angle NCA. \tag{3}$$

Từ (1), (2) và (3), ta có $\angle MIP = \angle NIA$. Suy ra

$$\angle MIP + \angle PIA = \angle NIA + \angle PIA = 180°.$$

Vậy ba điểm $M$, $I$, $A$ thẳng hàng, tức đường thẳng $MA$ đi qua trung điểm của đoạn thẳng $NP$. Ta có điều phải chứng minh. □

**Bài 5** (0.5 *điểm*)**.** Xét các số thực $a$, $b$ thay đổi thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3(a + b) + ab$.

**Lời giải.** Từ giả thiết, ta có $ab = \frac{(a+b)^2-a^2-b^2}{2} = \frac{(a+b)^2-2}{2}$. Do đó

$$P = 3(a + b) + \frac{(a + b)^2 - 2}{2} = \frac{(a + b)^2 + 6(a + b) - 2}{2} = \frac{(a + b + 3)^2 - 11}{2}.$$

Mặt khác, ta lại có $(a+b)^2 \le (a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2) = 4$, suy ra $-2 \le a+b \le 2$. Từ đó, ta có $1 \le a + b + 3 \le 5$. Như vậy, ta có

$$P \ge \frac{1^2 - 11}{2} = -5.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = -1$. Vậy $\min P = -5$. □